Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2009

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.

Vol.22 • Año 2009

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 22

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 22

Editora:

Patricia Lestón

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:

Carlos Oropeza Legorreta, Hugo Parra Sandoval, Elizabeth Mariscal Vallarta

En la portada:

(Fotografías ganadoras del *Primer Concurso de Fotografía de Matemática Educativa 2008*)

Manos gráficas
Silvia Cristina Tajeyan
Primer Lugar,
Categoría "El aula de clase de matemática"

En prueba de geometría
Héctor Silva Crocci
Segundo Lugar,
Categoría "El aula de clase de matemática"

Reflexión desde Casapueblo
Héctor Osorio Ábrego
Primer Lugar,
Categoría "Memoria gráfica de la Relme"

Diseño de portada y CD:
Gabriela Sánchez Téllez
Juan Gabriel Molina Zavaleta

Diseño de interiores:
José Francisco Canché Gómez
Elizabeth Mariscal Vallarta
CICATA IPN, Legaria

Digitalización:
Juan Gabriel Molina Zavaleta
CICATA IPN, Legaria

Edición:

©2009. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-00

Lestón, P. (Ed.). (2009). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 22. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2008-2012

Cecilia Crespo Crespo

Presidente

presidencia@clame.org.mx

Gisela Montiel Espinosa

Tesorera

tesoreria@clame.org.mx

Olga L. Pérez González

Secretaria

secretaria@clame.org.mx

Ángela M. Martín

Vocal Caribe

vocal_caribe@clame.org.mx

Claudia M. Lara Galo

Vocal Centroamérica

vocal_centroamerica@clame.org.mx

Apolo Castañeda Alonso

Vocal Norteamérica

vocal_norteamerica@clame.org.mx

Hugo Parra Sandoval

Vocal Sudamérica

vocal_sudamerica@clame.org.mx

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de Admisión

Liliana Homilka
Leonora Díaz Moreno
Eugenio Carlos

Comisión de Promoción Académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité Internacional de Relme

Cecilia Crespo Crespo
Ángela Martín
Javier Lezama Andalón
Hugo Parra Sandoval
Olga L. Pérez González

Comité
Científico de Evaluación

Tabla de contenidos

CATEGORÍA 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CATEGORÍA 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CATEGORÍA 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

CATEGORÍA 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), fue constituido hace casi tres lustros, con el su propósito de nuclear a docentes e investigadores del área de la matemática educativa, posibilitando el intercambio entre colegas y creando espacios académicos tendientes a compartir periódicamente experiencias de docencia e investigación orientadas a obtener beneficios de los sistemas escolares de América Latina.

Uno de los espacios de intercambio que organiza Clame son las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (Relme), que se realizan anualmente en distintos países de Latinoamérica. Estas reuniones dieron continuidad a las Reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, que originaron a la creación de Clame. Ante el crecimiento de la participación de colegas de los distintos países latinoamericanos, así como la mayor profesionalización de la comunidad que año a año participa activamente en sus reuniones, se han ido configurando diversos proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina en nuestra región, bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros.

Es en este contexto de ideas y en cumplimiento además de uno de los propósitos específicos del CLAME, *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*, que se publica año con año el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme).

El Alme tiene carácter de publicación periódica y si bien los artículos que la integran provienen de trabajos que fueron previamente expuestos en Relme, son presentados en forma de artículos y sometidos posteriormente a dicha reunión, a la evaluación rigurosa de por lo menos dos pares especialistas en dicho campo y provenientes de distintos países. Los artículos publicados son los que son aceptados a través de esta evaluación de manera directa o después de que sus autores realicen las modificaciones propuestas por los árbitros. La edición de esta publicación está a cargo de un Comité Editor formado por varios colegas de nuestra comunidad, que da continuidad a la línea de publicación definida de acuerdo con el respeto los lineamientos propuestos.

Esta publicación se compone de trabajos en los que docentes e investigadores latinoamericanos de matemática educativa exponen sus experiencias, propuestas e investigaciones, mostrando los productos de una comunidad activa de creciente profesionalización y fortalecimiento de esta disciplina. De esta manera, se trata de una tarea que se plantea año a año el objetivo de lograr difundir mediante una publicación de nivel académico, el estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica. En la página web de Clame, los distintos volúmenes de nuestra publicación son puestos a disposición de colegas, constituyendo una fuente de consulta y referencia en la comunidad de matemática educativa.

En este caso, las exposiciones tuvieron lugar durante *Relme 22*, llevada a cabo en la ciudad de México DF (México) durante 2008.

Los trabajos han sido organizados según cinco categorías:

- Categoría 1: Análisis del Discurso Matemático Escolar
- Categoría 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas
- Categoría 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
- Categoría 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
- Categoría 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Cada una de estas categorías, va precedida de una breve introducción donde se reflexiona sobre el tema y se comentan de manera sucinta el contenido de los artículos que la componen. Estas introducciones fueron solicitadas a reconocidos especialistas de nuestra comunidad a quienes agradecemos especialmente su colaboración.

En mi carácter de Presidenta de Clame, agradezco a los miembros del Comité Editor y Comisión Académica del Alme 22 que colaboraron activamente y con entusiasmo y profesionalismo, así como a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos. Quienes de una u otra manera hemos colaborado en la constitución de este documento, nos sentimos orgullosos de haber podido participar en él prestando este servicio académico y de ver la manera en la que nuestra comunidad crece y se fortalece académicamente cada año.

Agradecemos a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, como asimismo y de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta nos regalaron su tiempo, inteligencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Cecilia Crespo Crespo

Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Mayo 2009

Categoría 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

INTRODUCCIÓN AL CAPÍTULO DE ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Rosa María Farfán, Patricia Lestón

Durante años, la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa ha generado espacios de intercambio en los cuales sus miembros puedan comunicar los resultados de sus investigaciones y compartir con otros colegas lo que están construyendo. El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa es, en este sentido, un escenario de gran valor, dado que en cada una de sus ediciones, colegas de toda Latinoamérica presentan sus trabajos para contribuir con el crecimiento de una comunidad pujante, cada vez más fortalecida y profesionalizada.

El Análisis del Discurso Matemático Escolar suele ser una de las líneas que más investigaciones reporta. Y es éste un hecho para celebrar, ya que uno de los objetivos de la investigación en Matemática Educativa, tal vez el más importante, es la búsqueda del impacto en las aulas de Matemática. Los trabajos que se presentan a continuación pretenden modificar las prácticas escolares de nuestra región, teniendo en cuenta que las características de nuestros países, que comparten historia y cultura, son centrales en las producciones de nuestros colegas.

> *Vivimos en una economía globalizada que nos reclama del ingenio en el diseño de estrategias para el acercamiento entre colegas, comunidades e instituciones de diversos países y regiones con identidades históricas y culturales marcadas por su geografía y su pasado. En nuestro caso esto queda claramente sintetizado por las lenguas y las tradiciones. Los países latinoamericanos comparten además de lengua y cultura, desafíos semejantes entre sí, en este sentido, el movimiento de Matemática Educativa encara tales retos de manera multinacional, regional, histórica y culturalmente situada.* (Cantoral, 2007, p. 325)

El estudio del Discurso Matemático Escolar y las propuestas que se reportan año tras año hacen de este movimiento del que habla Cantoral una fuente de recursos de la cual docentes e investigadores se nutren para poder resignificar la matemática escolar y lo que ocurre al seno de nuestras instituciones. El análisis del DME se ha convertido en la herramienta con la cual los investigadores han avanzado del estudio de la cognición o la epistemología al estudio del conocimiento escolar en conjunto, entendiendo que esos saberes que viven en las aulas no son producto de la escuela, sino de una sociedad que los ha construido y les ha dado sentido y significado.

> *La estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos*. (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra, 2006, p. 86)

Ya sea a través de propuestas didácticas, de estudios de casos o programas de estudios, los artículos que continúan permiten que la investigación llegue a la escuela, a las aulas, a impactar a docentes y alumnos que reclaman de la investigación: resultados concretos que modifiquen la realidad de la matemática escolar.

Entendemos a la escuela como fuente y fin de la investigación en Matemática Educativa y al Análisis del Discurso Matemático Escolar como el germen de la problematización de las situaciones que se viven en las aulas. Es en ese escenario tan particular donde la tarea de los docentes cobra sentido. Si no se piensa en lo que sale de la escuela al mundo en las mentes y manos de los alumnos, toda situación educativa pierde sentido.

Invitamos a nuestros colegas a nutrir sus prácticas escolares con los resultados que se proponen aquí, a tomar las investigaciones para continuar con sus propias construcciones y a retroalimentar con ese proceso a un colectivo que se constituye como tal en el reconocimiento de lo común a nuestros países latinoamericanos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2007). La Relme a sus veinte años. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20.* (pp. 325-331). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 9 (4)*, 83-102.

ESTOCÁSTICOS EN EL SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN ESPECIAL

José Marcos López, Ana María Ojeda, Ricardo Cantoral
CAM 18; DME, Cinvestav, IPN México
jmlopez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Educación Especial Nivel: Básico

Resumen. *El estudio enfoca el tratamiento de estocásticos en el segundo grado de educación especial. La perspectiva teórica considera aspectos en el orden epistemológico, el cognitivo y el social. La investigación, de carácter cualitativo, sigue los lineamientos del órgano operativo y de la célula de análisis. Se caracterizan los procesos de enseñanza realizados en aula alterna, para lo cual se juzga esencial el tipo de actividades propuestas y el análisis del papel del habla. Participan en el estudio niños con diagnósticos de lento aprendizaje y de problemas de lenguaje. El examen de la propuesta institucional para el grado educativo en cuestión resulta en un tratamiento de estocásticos insuficiente, por lo que se han incluido para el aula actividades relativas a la idea de azar. Referente a las actividades en aula alterna, se realizó la distinción de la situación de referencia y el signo, y de las ideas fundamentales. Se notaron, tanto en aula como en las entrevistas, el uso de esquemas compensatorios*.
Palabras clave: Educación especial, esquemas compensatorios, estocásticos

Planteamiento del Problema

Anteriores investigaciones han evidenciado el escaso tratamiento de los estocásticos en el sistema educativo básico regular (Limón, 1995; Gurrola, 1998; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004). Esta insuficiencia también ocurre en el caso particular de la educación de comunidades con audición diferenciada (Garnica y González, 2005; Garnica, 2006; López y Ojeda, 2007), por lo que la conjeturamos extensiva al sistema de Educación Especial.

El problema de investigación se orientó por las interrogantes de cuáles son los procesos de enseñanza de los estocásticos en el segundo grado de educación especial, el papel del habla en ellos, y cuál es el desempeño de los niños con lento aprendizaje y problemas de lenguaje en actividades referidas a nociones de azar. Como objetivos, se pretendió identificar el régimen de estocásticos en educación especial, el papel del habla en los procesos de su enseñanza y proponer actividades para un tratamiento relativo al azar.

El propósito de la Educación Especial es brindar un servicio de calidad en la *Atención a la Diversidad* de los alumnos con necesidades educativas especiales. De las poblaciones atendidas por la Educación Especial, nos conciernen las pertenecientes al grupo de Discapacidad Mental (DM), la cual se caracteriza por un funcionamiento intelectual y de comportamiento inferior al del promedio (Organización Mundial de la Salud; INEGI, 2004). Una persona con discapacidad mental puede tener un nivel de afectación leve, moderado, severo o profundo. Las características que presentan los niños de nuestro estudio son síndrome Weber, síndrome Down y retraso mental, todos con problemas de lenguaje, y un nivel de afectación moderado y profundo [siete niños con edades 7-11 años].

Perspectiva teórica

El estudio se funda en elementos teóricos según tres ejes. El eje *epistemológico* considera la propuesta de Heitele (1975) respecto a lo fundamental de estocásticos para un currículum en espiral; también toma en cuenta los estudios de Piaget e Inhelder (1951) respecto al origen de la idea de azar en el niño. El eje *cognitivo* considera las funciones del cerebro (Luria, 2005) y la insuficiencia ante el tipo de tarea en un ambiente dado; el niño cuyo desarrollo es afectado por la *ausencia*, no es simplemente un niño menos desarrollado que sus coetáneos regulares, sino desarrollado de *otro modo*. Vygotski (1997) establece que toda ausencia crea estímulos para elaborar una *compensación*. El eje *social* considera, en grados, la importancia de la *integración* del individuo a su medio, la *enseñanza* de estocásticos en educación especial en su marco institucional (SEP, 1993; SEP, 2004) y la *interacción* entre el docente y los niños y las niñas en el aula respectiva. El estímulo primario que hace surgir los procesos compensatorios son las dificultades objetivas del niño en el proceso de su desarrollo intelectual; a partir del proceso de interacción del niño con el medio se crea una situación que lo impulsa hacia la compensación.

Proceso de investigación

La investigación, de carácter cualitativo, siguió los lineamientos del *órgano operativo* y de la *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006). Las fases para el estudio son tres: la primera consistió en el análisis de la propuesta institucional, específicamente de los *Planes y Programas de Estudio de Educación Primaria* (SEP, 1993; SEP, 2004), así como del libro de texto de matemáticas del segundo grado (SEP, 2002). La segunda consistió en la selección de contenidos y el diseño de actividades sobre estocásticos, a la par de la constitución del *aula alterna* (Ojeda, 2007), es decir, el aula en la que interaccionan docencia e investigación según estrategias de enseñanza y contenidos que discuten y acuerdan previamente. Por el lado de la docencia se eligieron tres actividades del libro de texto referidas a estocásticos y dos actividades más propuestas por los investigadores (mezcla aleatoria y problemas de decisión), las cinco para ser videograbadas en su desarrollo en el aula. De las observaciones en ésta y por los objetivos de la investigación, se eligieron tres niñas para la tercera fase, con diagnósticos de lento aprendizaje y de problemas de lenguaje, en particular síndrome Weber (*M*), epilepsia y convulsiones (*I*), y retraso mental moderado (*K*); con ellas se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas referidas a la mezcla aleatoria y a problemas de decisión. Los instrumentos aplicados fueron el guión de análisis de la propuesta institucional y de las actividades propuestas, el guión de observación en aula alterna (Ojeda, 2006) y el guión de entrevistas individuales semiestructuradas. Se utilizaron las técnicas de videograbación, de transcripción de las sesiones de enseñanza y de entrevista, y la escritura en papel.

Para fines de nuestra investigación y en lo que respecta a los elementos en el eje cognitivo, el diagnóstico de *lento aprendizaje* es un referente. En primera instancia, el niño con necesidades educativas especiales las presenta al *acceder a los contenidos* del currículo. Además, el currículo no está diseñado para ese tipo de poblaciones, ya que se utiliza el currículo de Educación Primaria regular. Por otra parte, en el caso de nuestro estudio, el interés se enfoca directamente en las conductas manifiestas de los niños durante las actividades propuestas, que en todo caso serán efecto de las afecciones particulares de que se trate. Por ello, el estudio de niños con ausencia no puede limitarse a determinar el nivel y gravedad de la insuficiencia, sino que incluye obligatoriamente la consideración de los procesos compensatorios (Vygotski, 1997).

La mezcla aleatoria

El material utilizado en la actividad consiste en: una bandeja de madera susceptible de balanceo, con canicas del mismo tamaño, de dos colores en igual proporción (7 azules y 7 verdes), colocadas en un lado de la bandeja y libres de rodar al lado opuesto en cada balanceo (ver *Figura 1*). De igual manera que en el estudio de Limón y López (2005), se enfatizó en la observación de la *comunicación* durante el desarrollo de la actividad debido al *lenguaje limitado* de las niñas participantes. La actividad privilegió la idea de azar sobre otras ideas implicadas utilizando un número relativamente grande de canicas, por el cual resulta muy difícil la anticipación de un acomodo particular al cabo de un balanceo de la bandeja. En efecto; el número (*N)* de maneras en que las 14 canicas indistinguibles, excepto por el color (de dos tipos, siete de un color y siete de otro), se pueden acomodar en los 14 lugares disponibles para ellas es:

$$N=\frac{14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8}{7!}\times\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{7!}=13\times 11\times 8\times 3=3432$$

Mezcla aleatoria en aula alterna

Se planteó a los niños y niñas en qué consistía la actividad, la cual se denominó "*A jugar con Canicas*". Se registraron los resultados en un esquema de la bandeja para cada niño, el cual formó parte de la guía de la docente para la realización de la actividad. Los niños interactuaban con el material cuando la docente se los pedía. Cuando se preguntó a los alumnos sobre la anticipación del acomodo de las canicas en la bandeja después de un balanceo, todos los niños, excepto **J** (8 años) que no respondió, contestaron "*quedaron abajo*"; ellos se remitieron a lo sucedido a las canicas como un todo, es decir, sólo identificaron su posición final respecto a la inicial refiriéndolas a la bandeja, sin mencionar los choques en el trayecto con las paredes laterales de la bandeja ni entre las canicas.

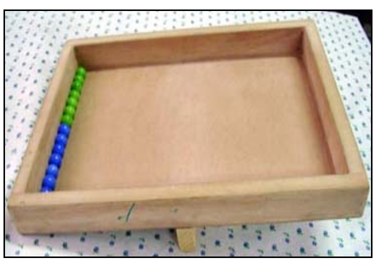


Figura 1. Bandeja para mezcla aleatoria.

Figura 2. Producción de M de las trayectorias.

Figura 3. Producción de las trayectorias por E.

Cuando se pidió a los niños dibujar los "caminitos de las canicas", *J* no realizó lo pedido; *M* dibujó trayectorias cerradas (ver *Figura 2*); *E* dibujó las trayectorias de las canicas lineal y transversalmente, de una cara lateral a la otra (ver *Figura 3*); *I* dibujó canicas agrupadas (ver *Figura 4*); **B** dibujó choques contra la pared de la bandeja (ver *Figura 5*).

Figura 4. Producción de I.

Figura 5. Producción de B.

Entrevista sobre mezcla aleatoria: El caso K

K (11 años), con diagnóstico de retraso mental (según ficha médica) y de discapacidad mental (según la tabla de la OMS) en nivel moderado, presenta lenguaje limitado. *K* (11 años) no asistió el día que se llevó a cabo la actividad de mezcla aleatoria en aula alterna, pero se le entrevistó. Al preguntarle sobre lo que sucedía al balancear la bandeja, señaló inmediatamente a los choques entre las canicas, y entre las canicas y las paredes de la bandeja. Debido a que presenta lenguaje limitado, proporcionó sus respuestas con expresiones ostensivas de los movimientos aleatorios de las canicas y sus choques. Aunque la niña identificó desde el principio y con facilidad la cantidad de canicas de cada color, cuando se le pedía que anticipara sus posiciones con un dibujo, no conservó en su registro su cantidad original. En sus producciones en papel, la niña relacionó sólo algunas canicas de la bandeja con las de su dibujo.

Para asegurar que la niña trazara las trayectorias seguidas por las canicas, se le presentó una actividad para mostrarle lo que era un “caminito”: sobre un papel se dejó rodar una canica mojada que dejó la huella de su trayectoria. Cuando se le preguntó sobre ello contestó que la canica había dejado una *mancha*, pero a pesar de la permanencia de ésta, trazó a un lado el camino seguido por la canica. Entonces, utilizando su palabra de mancha se continuó con la actividad y en sus producciones de las trayectorias de las canicas incluyó los choques entre ellas y contra las paredes de la bandeja (ver *Figura 6*).

Figura 6. Producciones de K durante la entrevista de “mezcla aleatoria”.

La niña también se percató de la irreversibilidad de la mezcla (en la transcripción “E” es el entrevistador y “K” la niña):

[329] E: ¡No!, ¿verdad? Entonces, ¿cuándo es más fácil que las canicas queden todas la verdes de un lado y todas la azules del otro, cuando son muchas o cuando tengo poquitas?

[330] K: ¡Muchas… poquitas…! [expresando con las manos muchas y con los dedos poquitas].

[331] E: ¿Cuándo? ¿Cuándo es más fácil?

[332] K: ¡Poquitas! [indicando con los dedos, índice y pulgar, poquitas].

[333] E: ¿Cuando son poquitas?

[118] K: ¡Sí!

Los datos obtenidos en nuestra investigación indican que sus esquemas compensatorios en uso en la situación de mezcla aleatoria fueron el perceptual visual y el perceptual auditivo, y en todo momento ella manipuló la bandeja. Además, la solicitud del dibujo de las trayectorias apunta hacia la diferenciación entre *situación de referencia* (bandeja de madera y canicas) y *signo* (dibujos de la previsión de la posición de las canicas ante un número de balanceos), lo cual es necesario para la constitución del *concepto* de permutación (Steinbring, 2005).

Urnas y decisión

La actividad, basada en una situación tomada de Piaget e Inhelder (1951, pág. 127), consiste en identificar, por su contenido de canicas de dos colores, la urna de entre dos etiquetadas 1 y 2, para la que es más probable extraer *al azar* una canica de un color dado; si la canica extraída es del color ganador, se gana un premio. Se pregunta al niño de cuál de las bolsas conviene extraer la canica para una variedad de composiciones de sus contenidos.

Las respuestas correctas supondrían la diferenciación entre las posibilidades de la bolsa 1 y las de la bolsa 2. En nuestro estudio, para los casos de desigualdad, se propuso una diferencia grande entre las cantidades de los contenidos para hacer relevantes las composiciones, lo cual se esperaba que motivara al niño a continuar con la experiencia (ver *Tabla 1*).

No. Experimento	**Composición**		**Observación**
	Bolsa 1	**Bolsa 2**	
1	2/2	4/4	Doble certeza.
2	4/4	0/2	Certeza - Imposibilidad.
3	1/2	2/2	Posibilidad – Certeza.
4	1/2	1/2	Composiciones idénticas.
5	0/2	1/2	Imposibilidad - Posibilidad.
6	0/8	0/3	Doble Imposibilidad.
7	1/3	2/6	Proporcionalidad.
8	2/4	3/4	Desigualdad.
9	1/2	1/3	Igualdad.
10	3/4	2/3	Desigualdades.

Tabla 1. Composición de Canicas (Piaget e Inhelder, 1951; pág. 127).

La actividad se realizó en aula alterna y concierne al enfoque clásico de la probabilidad, e implica las ideas de espacio muestra, medida de probabilidad e independencia. Parte de una alusión explícita a la intervención del azar mediante objetos en bolsas de tela no transparente, acciones explícitas para mezclar los contenidos de las bolsas, para extraer de ellas una canica, y la expresión "si sacas *sin ver*". El guión básico para la entrevista semiestructurada se fue modificando según el curso de ésta y también de acuerdo a las características de cada niña. En *aula alterna*, en algunos momentos de la sesión la situación favoreció que las respuestas de los alumnos dependieran de la composición de las bolsas. Los alumnos usaron el esquema perceptual visual y el auditivo. La docente utilizó una tabla para el registro de las extracciones; también usó otra tabla donde se anotó el contenido de las bolsas, la cual utilizó como guión de la actividad.

Resultados

Del análisis de la propuesta institucional para educación especial resulta el deficiente tratamiento de estocásticos en el nivel educativo considerado; en particular, para el segundo grado no se plantea la formación en estocásticos de manera explícita, sino hasta el tercer grado inicia el tratamiento del Eje *azar, predicción y cambio*. El libro de texto de segundo grado no propone actividades que favorezcan el desarrollo de la idea de azar, y su diseño no es adecuado para la población en estudio.

Respecto al proceso de enseñanza en *aula alterna*, la estrategia de enseñanza con tres actividades provenientes del libro de texto y dos actividades para introducir las ideas de azar y de probabilidad, promovió la distinción de los vértices del triángulo epistemológico (Steinbring, 2005), la cual favorece la adquisición de conceptos de estocásticos. De las entrevistas semiestructuradas individuales, los alumnos dieron evidencia de nociones de combinatoria, medida de probabilidad, ley de los grandes números e irreversibilidad de la mezcla aleatoria. **K** dio evidencia de que adquirió la noción de irreversibilidad de la mezcla y la noción de permutación. Respecto al eje cognitivo, los alumnos usaron esquemas compensatorios: el perceptual visual, el perceptual auditivo, y mediante expresiones corporales respondieron a las preguntas planteadas en las actividades en aula alterna.

Los resultados obtenidos indican que, frente a limitaciones, no sólo es posible el tratamiento de situaciones aleatorias, sino necesario para contribuir a una formación matemática integral.

Referencias bibliográficas

Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el Segundo Ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y azar*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Garnica, I. (2006). *Memoria del seminario de estudios sobre el Conocimiento Matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada*. IMAL; ACCTIA/DME del Cinvestav del IPN. (En prensa).

Garnica, I., González, H. (2007). Nociones Matemáticas y Desarrollo de Procesos Cognitivos de Alumnos [6, 8] con Percepción Auditiva Diferenciada. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, (pp. 144-149). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gurrola, M. (1998). *Pensamiento Probabilístico en Niños en Estadio Básico*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6*, 187-205.

INEGI (2004). *Las Personas con Discapacidad en México: una visión censal*. México: Aguascalientes.

Limón, A., López, M. E. (2005). Prácticas de indagación. En *Adquisición de conceptos lógico-matemáticos*. Curso 3er. Semestre de Licenciatura del IMAL (2004; videodocumento e informe no publicados).

Limón, A. (1995). *Elementos para el Análisis Crítico de la Posible Inserción Curricular de Nociones Estocásticas, Ausentes en Programas de Preescolar y Primaria*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

López, J. M., Ojeda, A. M. (2007). Pensamiento Probabilístico de Niños con Audición Diferenciada. La Noción de Mezcla Aleatoria. En *XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 243-255). México.

Luria, A. (2005). *Las funciones corticales superiores del hombre*. México: Fontamara.

Ojeda, A.(2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En *Matemática Educativa, treinta años.* (pp. 257-281). México: Santillana.

Ojeda, A.M. (2007). *Probabilidades y Estadística en Matemática Educativa. Seminario de Investigación*. Cinvestav-IPN, México.

Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. Paris: PUF.

SEP (1993). *Planes y programas de estudio. Educación Primaria*. México.

SEP (2004). *Planes y programas de estudio. Educación Primaria*. México.

SEP. (2002). *Matemáticas. Segundo grado*. México.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. Nueva York: Springer.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V*. Madrid: Visor Dis.

¿PUEDE FAVORECER LA VISUALIZACIÓN A LA CARACTERIZACIÓN DE LA DEPENDENCIA LINEAL PARA UN CONJUNTO DE POLINOMIOS?

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón
FESC-UNAM. CICATA-IPN México
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *En esta fase de la investigación ponemos de manifiesto un punto de vista que permite reflexionar estrategias asociadas a la noción de la visualización en matemáticas. En este reporte presentamos un recorrido general del trabajo realizado hasta este momento, el cual se centra primero en el reconocimiento de la dificultad de la naturaleza del álgebra lineal, y además reflexionamos sobre el poder de la visión como un factor fisiológico y cultural, a partir de ello se proporcionan algunos resultados de investigaciones que abordan la actividad de la visualización en los procesos de construcción de conocimiento en la escuela. Finalmente se comentan algunas exploraciones que hemos podido realizar en diferentes escenarios de estudio.*
Palabras clave: visualización, combinación lineal, dependencia e independencia lineal

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las escuelas de ingeniería representan un conjunto de dificultades con características diferentes a las que se presentan, por ejemplo en el cálculo. En cálculo es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente, pero en el álgebra lineal la mayor parte de conceptos son presentados por los libros de texto escolares a partir de definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. En el ámbito escolar, el carácter abstracto de esta materia ha obligado a los profesores de álgebra lineal a desarrollar prácticas alternativas de presentación del tema.

Con el fin de identificar las dificultades que enfrentan los alumnos al estudiar los conceptos matemáticos de combinación lineal, así como los de dependencia e independencia lineal en polinomios de segundo grado. En esta investigación se pretende hacer uso de las representaciones visuales para que los alumnos puedan incorporarlas en la construcción de significados de los conceptos antes referidos. Tradicionalmente los problemas asociados se resuelven haciendo uso la definición dada (combinación lineal igual al cero vector) junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta (se ha observado que en curso convencional los estudiantes son capaces de determinar si un conjunto de vectores forman o no un espacio vectorial, es decir pueden aplicar los axiomas con la dificultad inherente correspondiente, pero cuando se les cuestiona respecto a su significado, ellos no pueden articular una respuesta, entendemos este hecho como una manipulación algebraica carente de significado) y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en una situación concreta.

Entre los problemas reportados (Sierpinska, 1996) relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. Por ejemplo se puede presentar al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial y en otro momento ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal, en otro caso es frecuente recurrir a la geometría en R^2 o R^3 para visualizar la suma de vectores, pero resulta difícil usar la geometría para visualizar las sumas en espacios vectoriales como polinomios o matrices. El alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

En busca de un marco teórico

La visión (el acto fisiológico de ver) es fundamental para nuestro ser biológico y socio-cultural. Así, el aspecto biológico está descrito bien en lo siguiente (Adams y Victor, 1993, p. 207): “La facultad de la visión es nuestra más importante fuente de información acerca del mundo. La mayor parte del cerebro está implicada en la visión y en el control visual del movimiento, la percepción y la elaboración de palabras, y la forma y color de los objetos. El nervio óptico contiene más de un millón de fibras, comparadas a las 50,000 en el nervio auditivo. El estudio del sistema visual ha tenido grandes avances sobre el conocimiento de nuestro sistema nervioso. Es más, sabemos más acerca de la visión que de cualquier otro sistema sensorial”. En cuanto al aspecto socio-cultural, es casi trivial establecer que vivimos en un mundo donde la información es transmitida sobre todo en envolturas visuales, y las tecnologías mantienen y fomentan la comunicación que es esencialmente visual. Aunque “la gente ha estado usando imágenes para el registro y la comunicación de información desde la era de las pinturas rupestres el potencial para que la ‘cultura visual’ desplace a la ‘cultura impresa’ es una idea con implicaciones tan profundas como el cambio de la cultura oral a la cultura impresa.” (Kirrane, 1992, p. 58 citado por Arcavi, 1999). Consideramos entonces que la herramienta fisiológica de la visión y la influencia cultural pueden ser utilizadas como una estrategia en la tematización de la actividad de los problemas matemáticos y podría poner por tanto a la visualización al servicio y análisis de ciertos conceptos; el caso que nos ocupa es el estudio de los polinomios de segundo orden. La visualización de un problema matemático juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

A continuación presentamos diversas afirmaciones de investigadores que han dedicado esfuerzos por definir a la visualización:

En una entrevista realizada a Arcavi por Mario Sánchez éste señala que la visualización para él es: “*una manera de conectarse con ideas mediante el sentido de la visión con el objetivo de estudiar, entender y aplicar distintas maneras de acercar la matemática a los alumnos”* (Arcavi, 2007). La visualización puede acompañar un desarrollo simbólico, debido a que una imagen visual, en virtud de su concreción, puede ser “*un factor esencial para crear el sentimiento de auto-evidencia e inmediatez*” (Fischbein, 1987, p.101 citado por Arcavi, 1999).

El desarrollo de las teorías que fortalecen la importancia de la visualización matemática, considerada como “*la habilidad para interpretar y representar de manera diferente la información percibida y la reflexión extraída de información visual*”, impone a los autores de textos considerar estas ideas para presentar nuevas propuestas de enseñanza.(Hitt, 2002). Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como “*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende”* (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. Dentro de lo que defiende Hillel (2000), se encuentra el planteamiento de renunciar a la enseñanza de la teoría formal de espacios vectoriales. Lo cual se traduce, que para un estudiante le resulta poco significativo abordar el desarrollo de la axiomatización utilizada en una clase convencional. En algunos casos encontramos respuestas como: "*puedo determinar si un conjunto de vectores puede ser considerado como un espacio vectorial, pero no puedo decir nada en cuanto a su significado*", sin que lo que plantea Hillel sea considerado como la solución a la complejidad de estudiar álgebra lineal.

Resultados de algunas investigaciones

Hoy día, la posición central de la visualización en el aprendizaje y hacer de las matemáticas parece ser ampliamente reconocido. La visualización ya no está relacionada sólo a propósitos ilustrativos, sino también siendo reconocida como un componente clave del razonamiento (profundamente comprometida con lo conceptual y no lo meramente perceptivo), resolución de problemas, e incluso en pruebas. Sin embargo, hay todavía muchas cuestiones concernientes a la visualización en la enseñanza de las matemáticas que requieren cuidadosa atención. Tomando prestado de Eisenberg y Dreyfus (1991), propongo clasificar las dificultades en torno a la visualización en tres categorías principales: 'cultural', cognitiva y sociológica. Una dificultad 'cultural' se refiere a las creencias y valores que se tienen acerca de los que significan las matemáticas y hacer matemáticas, lo que es legítimo o aceptable, y lo que no lo es. Las dificultades cognitivas incluyen, entre otras cosas, la discusión cuya versión simplista sería la siguiente: ¿lo 'visual' es más fácil o más difícil? Cuando la visualización actúa sobre imágenes ricas conceptualmente (o en palabras de Fischbein, cuando hay estructuras intermedias conceptuales), la demanda cognitiva es ciertamente alta. Bajo las dificultades sociológicas, yo incluiría lo que Eisenberg y Dreyfus (1991) consideran como cuestiones de enseñanza. Su análisis sugiere que enseñar implica una "transposición didáctica" (Chevallard, 1985) que, brevemente, significa la transformación que el conocimiento inexorablemente sufre cuando es adaptado de su carácter científico/académico al conocimiento como es enseñado. Arcavi, Hadas y Dreyfus (1994) describen un proyecto para estudiantes de secundaria no orientados matemáticamente que estimula la toma de sentido, graficación, estimación, razonabilidad de las respuestas. diSessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski (1991) describen un experimento de aula en que estudiantes jóvenes eran alentados a crear una representación de una situación de movimiento, y después de varios períodos de clases terminaron por 'inventar' la graficación cartesiana. Siendo no sólo 'consumidores' de representaciones visuales, sino también sus creadores colectivos, comunicadores y críticos, estos estudiantes desarrollaron experiencia meta-representativa, estableciendo y usando criterios concernientes a la calidad y adecuación de las representaciones. Así la visualización fue para ellos no sólo una manera de trabajar con productos pre-establecidos, sino también fue en sí misma el objeto de análisis. Nemirovsky y Noble (1997) describen un estudio de investigación, en que una estudiante hace uso de un dispositivo físico que sirve como una herramienta de traducción usada para apoyar el desarrollo de su habilidad de 'ver' gráficas pendiente vs. distancia. En suma, nuevos énfasis y enfoques curriculares, prácticas innovadoras en las aulas y el entendimiento que desarrollamos de ellos, revalora la visualización y su naturaleza colocándola como una cuestión central en la enseñanza de las matemáticas. Esto no debe ser tomado en el sentido de que la visualización, no importa lo iluminativo de los resultados de la investigación, será una panacea para los problemas de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, entendiéndola mejor debe ciertamente enriquecer nuestro entendimiento de los aspectos de la toma de sentido de las personas sobre las matemáticas y así servir al progreso de nuestro campo. Señalado por Arcavi (1999). Como hemos podido constatar las investigaciones reportadas que centran su atención en la visualización no aluden al tema de nuestro trabajo por lo que el estudio de los polinomios de segundo grado podría ser considerado como una exploración no centrada en la comprensión del espacio vectorial de los polinomios, sino como una experiencia de esclarecimiento en la comprensión de un concepto del álgebra lineal en un espacio vectorial inusual para observar las dificultades del uso de la visualización como herramienta de construcción del concepto. Como una extensión de lo que hasta el momento se ha realizado con este enfoque. Justificando de esta manera la pertinencia de nuestro estudio. A continuación mostramos un parte de una serie de exploraciones que hemos realizado en la puesta en escena de lagunas situaciones didácticas diseñadas para el análisis del concepto de dependencia e independencia lineal.

Un par de exploraciones

El reporte que se presenta parte de experiencias escolares, que hasta el momento se ha podido identificar algunos rasgos que muestran las dificultades en la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal.

En la primera parte de la figura 1, se puede observar que la dependencia e independencia lineal en el espacio de los polinomios de segundo grado es determinada por el punto de intersección entre las parábolas correspondientes. En la segunda parte, se puede identificar la intención de generalizar su idea inicial, se aprecia que hacen uso de la definición de combinación lineal como un elemento que determina la producción de parábolas que se intersecan en un punto común, podemos considerar que su propuesta centrada en el análisis algebraico de casos particulares no les proporciona elementos suficientes para estructurar un planteamiento general.

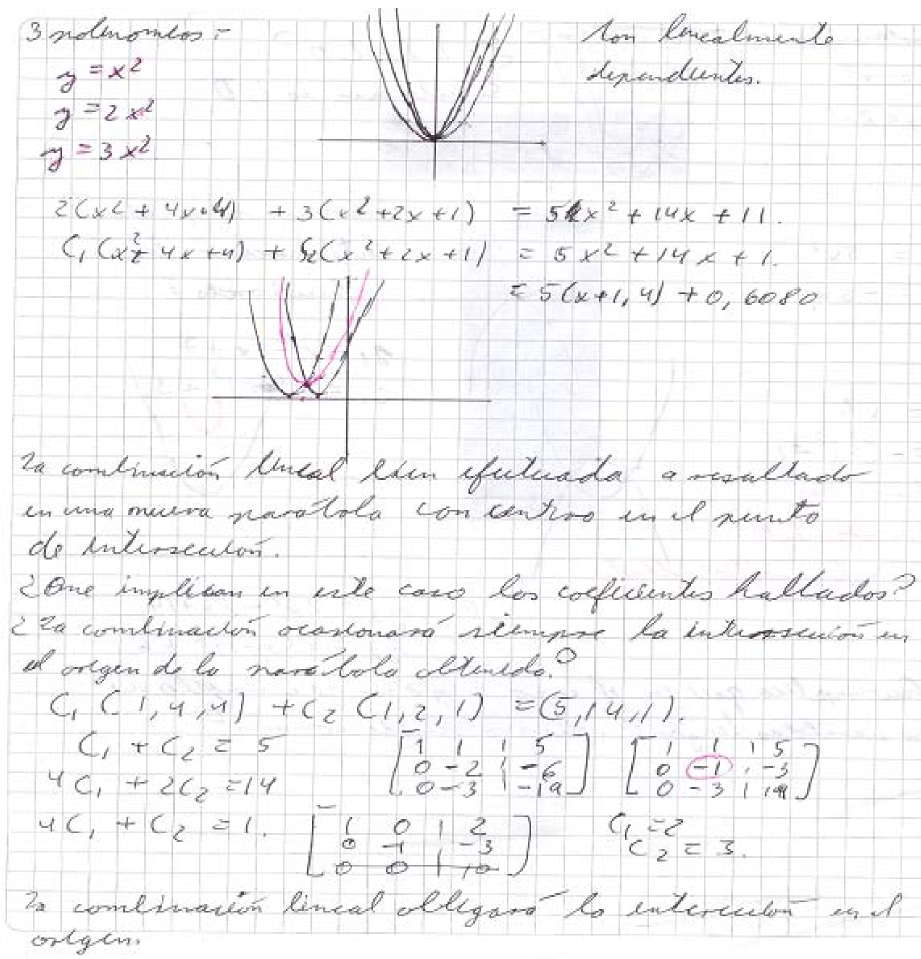


Figura 1

Nótese en la figura 2, que la exploración realizada por este grupo de estudiantes se relaciona con la idea de multiplicidad entre dos polinomios de segundo orden y la intentan relacionar con los puntos que contienen en común las gráficas de estas parábolas.

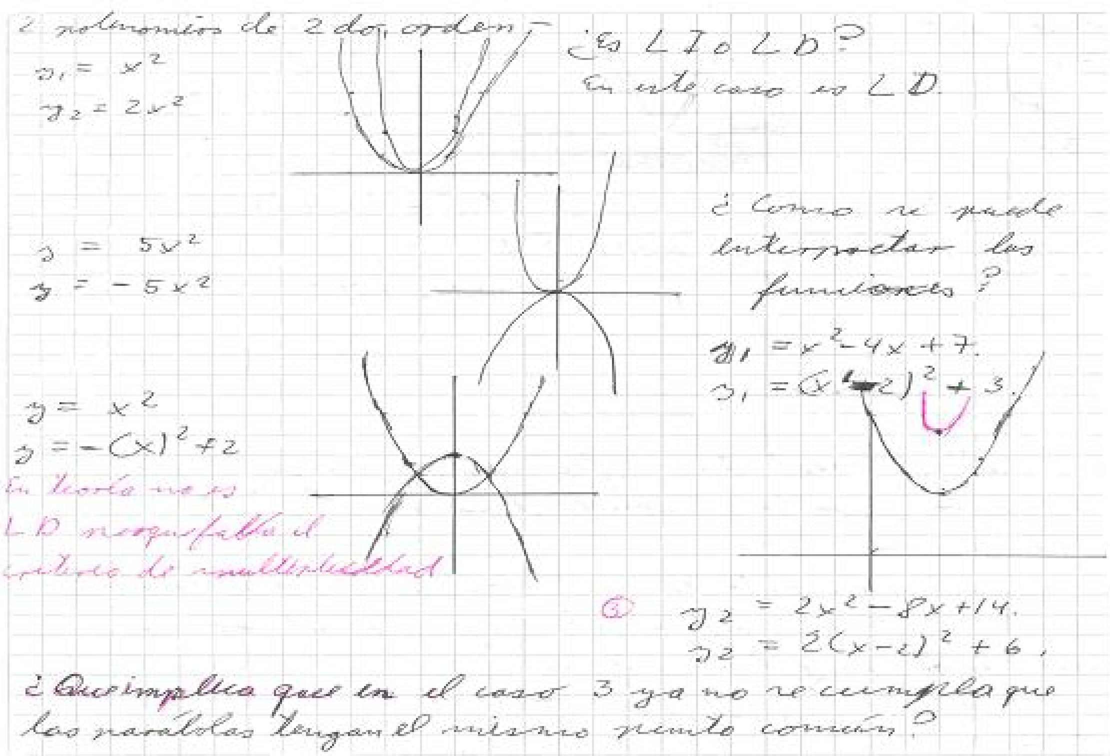


Figura 2

¿Qué aprendimos de las exploraciones realizadas?

Las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:

- La dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas con los mismos ni con la multiplicidad entre vectores.

- Los estudiantes buscan dar respuestas aquello que no logran entender con elementos conocidos y privilegian el aspecto algebraico para la su solución de las actividades propuestas.

Del grupo de estudiantes de ingeniería que participaron en la puesta en escena, se muestran dos de las respuestas que ellos dieron. La razón por la cual decidimos mostrar este extracto de su trabajo, es porque en el se pueden distinguir algunos de los rasgos que hemos encontrado en forma regular:

- Dan evidencia de que cuando hacen uso de la visualización como estrategia de estudio en el espacio de los vectores libres, ésta les puede ayudar en la reflexión y análisis de sus propuestas de solución y les permite replantear en cierto grado (cuando es necesario) las posibles correcciones de sus respuestas. Podemos considerar entonces que en dicho espacio vectorial, la visualización puede contribuir en el estudio de los conceptos de combinación lineal y de dependencia lineal.
- El reconocimiento de que la visualización se puede convertir en un obstáculo para caracterizar si un conjunto de polinomios de segundo grado es linealmente dependiente o independiente cuando se realiza la gráfica de las parábolas respectivas en el plano cartesiano.
- Manifiestan la necesidad de utilizar otras estrategias alternativas para lograr su objetivo, sin desprenderse de la propuesta emergida de lo geométrico, debido al rol de este, en su vida cotidiana.

De esta reflexión, se abren nuevas interrogantes ¿es el contexto de los objetos matemáticos lo que no permite ver con claridad los resultados? , ¿Qué hace que los estudiantes no puedan entender el concepto de combinación lineal con polinomios de segundo grado? ¿Por qué no entienden con la misma claridad el asunto se sumar o restar un vector (polinomios)?

¿Por qué en los polinomios el estudiante no puede decir en forma directa si el conjunto que se le presenta es o no linealmente dependiente?

Consideraciones finales

Hasta el momento haber identificado las dificultades inherentes con la naturaleza del álgebra lineal, permitió iniciar la búsqueda de material bibliográfico e investigaciones asociadas al estudio de la dependencia e independencia lineal. Proponemos hacer uso de la visualización para ponerla al servicio del estudio de un objeto matemático en particular, en el caso de los polinomios de segundo grado. Actualmente contamos con diversas exploraciones que centran su atención en esta categoría, y las utilizaremos como variables por atender en el diseño de las actividades didácticas de nuestra investigación. Las exploraciones realizadas hasta este momento nos permiten replantear algunas de las propuestas iniciales pues reconocemos que el estudio de los polinomios de segundo grado no tiene una interpretación inmediata y que por tanto debemos auxiliarnos de una transposición didáctica en el escenario de los vectores libres en tercera dimensión.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.55-80). Morelos, México.

Arcavi, A., Hadas, N. y Dreyfus, T. (1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. En *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics (2),* (pp. 280–287). Portugal.

Adams, R. y Victor, M. (1993). *Principles of neurology*. Nueva York: McGraw.

Arcavi, A. (2007). Entrevista de podcast 19 por Mario Sánchez Aguilar, Obtenido el 10 de marzo de 2009 de http://matedupodcast.wordpress.com/2007/06/22/episodio-19-entrevista-con-abraham-arcavi/.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (10) 2*, 117-134.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números 55*, 3-22.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. and Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior 10*, 117–160.

Eisenberg, T. y Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem Representation in Linear Algebra. En J-L Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191-207). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Nemirovsky, R. y Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics 33(2)*, 99–131.

Sierpinska, A**.** (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra, Research Conference in Collegiate Mathematics Education*. Michigan: Central Michigan University.

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA. APORTACIONES PARA UN DISEÑO ESCOLAR

Rosa Araceli Rotaeche, Gisela Montiel
Colegio Baden Powell, CICATA-IPN, Legaria México
arotaeche@badenpowell.edu.mx, gmontiel@ipn.mx
Campo de investigación: Teoría de situaciones didácticas Nivel: Básico

Resumen. *El presente documento presenta los elementos teóricos que fundamentan una secuencia didáctica orientada a la construcción de la noción de ángulo, particularmente sus significados como parte de vuelta y giro, y algunos resultados de la puesta en escena en un contexto escolarizado. En el marco de la teoría de situaciones didácticas, contemplamos en la componente cognitiva el modelo de abstracción y del conocimiento situado de Mitchelmore y White (2000) y en la componente epistemológica la naturaleza cualitativa (por su forma), cuantitativa (por su medida) y como relación (por cómo se define) de la noción de ángulo que se maneja en el nivel básico-secundaria del sistema educativo mexicano. La componente didáctica rescata algunos posibles efectos del discurso escolar en los significados relacionados con la medición angular, pero básicamente el diseño rompe con la programación escolar para trabajar con esta noción.*

Palabras clave: noción escolar de ángulo, ingeniería didáctica

Introducción

La Noción escolar de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela, sus definiciones, caracterizaciones y aplicaciones pueden encontrarse en asignaturas como matemáticas, física y dibujo técnico. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Contrario a lo que se asume, es en las otras asignaturas donde se pueden localizar los conflictos más comunes en el manejo de esta noción.

La naturaleza del concepto de ángulo ha sido tema de debate por más de 2000 años y la discusión aún no termina (Matos, 1990). Quizá por ello no hay una única definición aceptada por la comunidad matemática y su transposición didáctica de ninguna manera se convierte en un proceso trivial.

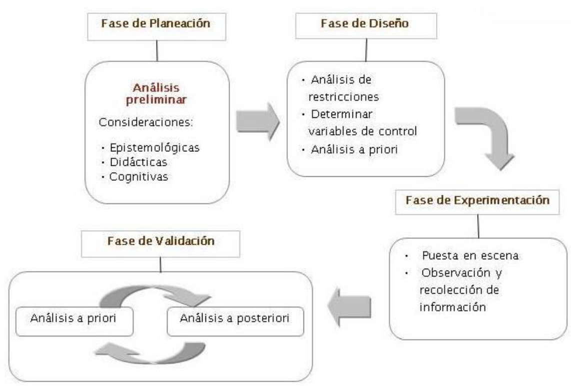
Como tema, el ángulo se aborda por primera vez en el salón de clases en el 4° Grado de la Educación Primaria. Es un concepto en cuyo aprendizaje se han detectado diversas dificultades por parte del estudiante y éstas han sido de interés en diversas investigaciones. Algunas dificultades, denominadas malentendidos, fueron reportados por Bosch, Ferrari, Marván y Rodríguez (2003). Los autores hacen un análisis de la presentación escolar y el tipo de actividades que pudieran detonar tales malentendidos y señalan el desequilibrio que existe entre los 2 temas que pertenecen a la medición de ángulo y los 81 relacionados con otro tipo de mediciones, como indicador de la poca importancia que se le da al tema.

La experiencia de aula nos mostró además, conflictos al usar la noción de ángulo en otras asignaturas, particularmente en la materia de Dibujo Técnico donde el alumno debe manejar el juego de geometría para la construcción y trazo de diferentes figuras. La manipulación incorrecta de la noción escolar de ángulo es visible en el manejo de las escuadras y el transportador.

Fundamentos teóricos y metodología

Son muchas las explicaciones que existen alrededor de los fenómenos relacionados a la enseñanza-aprendizaje del ángulo. Particularmente profundizaremos en aquellas que reflexionan sobre los actores del sistema didáctico, pues nos interesa intervenir en el aula en un contexto escolarizado considerando las variables o elementos que puedan ser controlados para el diseño de una primera secuencia didáctica.

Una Teoría que considera elementos epistemológicos (el saber), cognitivos (el alumno) y didácticos (el profesor) tanto para la explicación del fenómeno como la intervención didáctica a través de su metodología de diseño, es la Teoría de situaciones didácticas. Por tal motivo la metodología utilizada, fue la Ingeniería didáctica.



Fases de la Ingeniería Didáctica, tomadas de (Lezama, 2003)

Dada la extensión del presente documento expondremos la fase de planeación a detalle, la integración sistémica de las consideraciones teóricas, algunos elementos del diseño y la experimentación, y finalmente expondremos la validación como parte de las conclusiones generales. Más detalles pueden consultarse en Rotaeche (2008).

Análisis preliminar, consideraciones epistemológicas

A partir del análisis de Matos (1990 y 1991), se reconocen 3 etapas en la evolución histórica del concepto: un momento de *uso*, otro de *definición-clasificación* y finalmente el de *discusión de su naturaleza*.

Cuando hablamos de uso del ángulo entendemos que juega un papel importante en ciertas actividades al nivel de noción, es decir, que aún no se define o no se identifica como concepto. Definir el concepto, clasificarlo y debatir sobre su naturaleza son acciones que se desarrollan en un contexto matemático-filosófico, no necesariamente asociado a situaciones prácticas.

A partir de aquí se extraen elementos para usar el ángulo en situaciones prácticas donde se favorezca su significado como forma, como giro, como partes de vuelta, como inclinación o como porción, que puedan asociarse con los diferentes conceptos escolares que el estudiante enfrentará desde el nivel primario hasta el nivel universitario.

Sin embargo, sin importar el significado que se favorezca se debe considerar la naturaleza estática/dinámica del ángulo como cualidad (relacionado con las formas de representarse), como cantidad (por ser susceptible de medirse) y como relación (al definirse con otros elementos geométricos).

Análisis preliminar, consideraciones cognitivas

La teoría cognitiva de Mitchelmore y White (2000) considera la formación del ángulo a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes, es decir, parte de la génesis de las abstracciones necesarias para entender los significados asociados al concepto de ángulo. Además, interpretan e integran otras investigaciones a las etapas que proponen en su teoría. Esta teoría toma las nociones de clasificación, similitud, abstracción y concepto; planteadas ya por Skemp (1986, citado por Mitchelmore y White, 2000).

Se describen tres etapas de abstracción que representan una clasificación, progresivamente más refinada de la experiencia de los estudiantes. La primera etapa se denomina *conceptos del ángulo situado* y se limita a las situaciones físicas asociadas con el ángulo, de forma implícita. Los conceptos formados en esta etapa se generalizarán en el tiempo conforme se ponga atención en la situación física y las acciones ejecutadas y menos en las circunstancias sociales.

La segunda etapa se denomina *conceptos contextuales del ángulo*. En ella el alumno clasifica las situaciones físicas en contextos físicos, es decir, tiene cierto estado de reconocimiento de las similitudes que hay entre las situaciones diversas que ha enfrentado. Estos contextos físicos se forman sobre la base de configuraciones geométricas comunes y de acciones físicas similares.

Finalmente, en la tercera etapa denominada *conceptos abstractos del ángulo*, se da el reconocimiento de las similitudes que existen entre los contextos del ángulo. Esto constituye el principio del concepto matemático elemental de ángulo.

Las similitudes entre contextos no son del todo obvias, por lo que reconocerlas requiere regularmente de acciones físicas o mentales por parte del aprendiz, es un proceso constructivo que requiere de abstracción reflexiva.

Una clase de contextos físicos del ángulo que el niño reconoce como similares recibe el nombre de dominio abstracto del ángulo. Cuando la similitud se abstrae para formar un concepto entonces se habla del concepto abstracto de ángulo. Dentro de estos conceptos Mitchelmore y White (2000) reconocen un concepto estándar que se relaciona con todos los contextos físicos del ángulo y es el más común entre las construcciones del estudiante: aquel de las dos líneas inclinadas que se encuentran en un punto. Asumen que el concepto tiene un desarrollo lento, apto para estudiantes de secundaria y que aún se requeriría de una cuarta etapa para llegar al concepto matemático formal.

Análisis preliminar, consideraciones didácticas

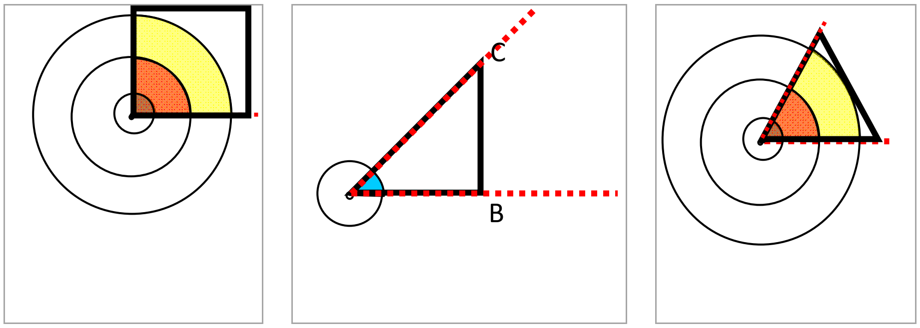
Las investigaciones de Casas (2002) y Mitchelmore y White (2000) reportan la relación que guardan la naturaleza multifacética (refiriéndose más a los diferentes tipos de definiciones escolares que existen) del concepto con las diferentes dificultades que el alumno presenta en las experiencias cotidianas y en el aula.

Se consideran entonces los antecedentes escolares del ángulo mismo y de las nociones escolares de fracción, porción, área, triángulo equilátero, cuadrado, triángulo isósceles, circunferencia, polígonos regulares, triángulo rectángulo; tanto al nivel de concepciones como de posibles dificultades en su manejo. Se rescataron algunos posibles efectos del discurso escolar en los significados relacionados con la medición angular versus medición de longitudes, pero básicamente el diseño rompe con la programación escolar para trabajar con esta noción, de tal suerte que lo didáctico lo concentramos en la organización de clase: a partir del diseño, el alumno debe transitar por las fases escolares de acción, formulación y validación, mientras que la fase de institucionalización recae por completo en la exposición del docente.

Integración sistémica y fase diseño

Contemplando que nuestro marco teórico presupone una visión sistémica, las consideraciones teóricas del análisis preliminar fueron modificadas, especialmente en la Teoría Cognitiva de Mitchelmore y White (2000). Así, a diferencia de las *situaciones físicas* que ellos trabajaron, nosotros consideramos como experiencia cotidiana el escenario de la escuela y lo que ello implica. Las restricciones de tiempo y espacio, los conocimientos previos de los alumnos, las herramientas de medición, etc. Estas situaciones físicas se establecieron con el principio de la manipulación a través de materiales concretos y actividades para iluminar, recortar, superponer figuras, al mismo tiempo que se respondía el cuestionario que guiaba la actividad. Las situaciones se relacionaron con el uso de objetos escolares en los cuales el ángulo está presente y en los que el alumno trabaja cotidianamente, como son el cuadrado, el triángulo equilátero, el triángulo escaleno y el triángulo isósceles.

La secuencia consiste en superponer micas circulares, de diferentes tamaños, sobre las figuras geométricas cuadrado y triángulo equilátero, de tal manera que el centro del círculo coincida con un vértice de la figura. Al sombrear la porción que se superpone, el alumno identifica las fracciones 1/4 y 1/6 del círculo, respectivamente. Al recortar, a la mitad, el cuadrado y el triángulo equilátero el alumno identifica las fracciones 1/8 y 1/12 del círculo, respectivamente.



Los *contextos* se establecieron por figura geométrica trabajada, es decir, cuando el alumno logra generalizar la relación entre la parte de vuelta o giro con la parte del círculo por figura geométrica sin importar el tamaño de la figura geométrica o el círculo sobre el que gira.

El diseño consideró trabajar los dominios abstractos estático (al sombrear las porciones superpuestas) y dinámico (al girar para validar la parte de vuelta) en todos los contextos, pues se reconocen como intrínsecos en la naturaleza del ángulo.

La etapa de abstracción se dividió en una generalización por parte del estudiante y una fase de institucionalización por parte del docente. La generalización buscó que el alumno visualizara la división de la circunferencia en 360 partes y le asociara un objeto cotidiano, el reloj. Además de construir, un elemento de medición escolar, que ahora tendrá significado para él: el transportador.

Con la institucionalización, el docente introduce el término ángulo, lo define y le asocia su medida en grados, con base en las divisiones construidas en el círculo.

Experimentación

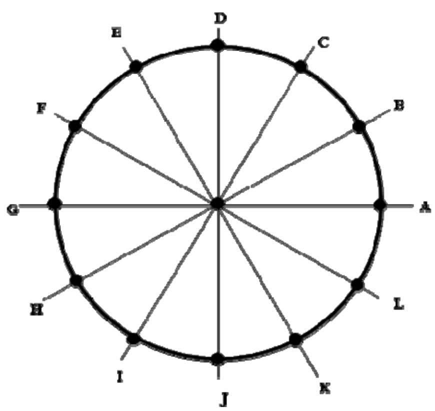
La secuencia se aplicó a 34 alumnos de 1° de secundaria (13 años aproximadamente) de un colegio privado en el Estado de México. Se trabajó en horarios de clase, dentro del calendario escolar 2007-2008, en un total de 4 sesiones de 45 minutos cada una.

Cada alumno recibió la secuencia impresa y los materiales necesarios para resolver las actividades en forma individual, sin embargo, el diseño y la organización de clase generaron más actividad como grupo.

La secuencia inició sin que el alumno tuviera idea del tema a manejar, pero la secuencia le hizo pensar que estaba trabajando con *fracciones.* Para él fue un descubrimiento paulatino del concepto a tratar, *usó* el ángulo sin saberlo.

En las etapas de "ángulo situado" y "conceptos contextuales" las *acciones* del alumno consistieron en superponer las figuras, delimitar y sombrear zonas; para los distintos tamaños de las figuras; sus *formulaciones* consistieron relacionar la parte de vuelta que le correspondía a la zona sombreada y lo *validaron* con los giros de la figura sobre el círculo.

En la fase de generalización de la etapa de "conceptos abstractos" las *acciones* se realizaban sobre la circunferencia dividida en partes, ya no sobre los materiales concretos, y las *formulaciones* fueron las respuestas a preguntas como:



- *¿Qué pasaría si cada doceavo lo dividimos en 30 partes?, ¿Cuántas habría en 1/12?*
- *¿Cuántas partes habría en una vuelta completa?*
- *Si desde A, giro la flecha hasta E, ¿a cuánto equivale el giro?*
- *¿El giro cambia si se modifica la longitud de la flecha?*

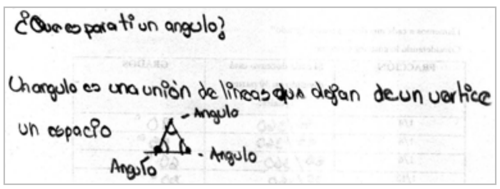
Sólo el giro se conserva como la forma de *validar* tales formulaciones.

La dirección del profesor en toda la secuencia fue de suma importancia, pues la dinámica de trabajo difería del tipo de actividades acostumbradas por los estudiantes. Sin embargo, se cuido no hablar de "ángulo" hasta la fase de institucionalización, donde se hizo explícito el término y la unidad de medida.

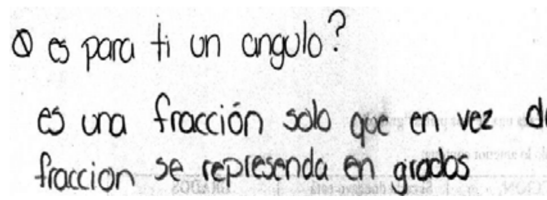
Fase de validación y conclusiones

A partir de las consideraciones teóricas asumidas, los estudiantes a quienes fue dirigida la secuencia y las condiciones escolares que contextualizaron la experiencia, la validación de nuestro trabajo debe valorar la construcción del significado como parte de vuelta y como giro, de la noción escolar de ángulo, más no el concepto como tal. Para lograrlo, apoyando a Mitchelmore y White (2000), haría falta una etapa más o quizá más de una donde la noción construida evolucione con nuevos significados.

Al preguntar ¿Qué es para ti un ángulo? es posible observar la fuerza de los contratos pedagógicos y escolares en algunas respuestas (ver R1), pues se relacionan más a las definiciones escolares más clásicas; sin embargo, también es posible reconocer la construcción de nuevos significados (ver R2).



R1



R2

En consecuencia, no podemos hablar de aprendizaje del concepto de ángulo, pues no es un concepto que se aprende de una vez y por todas, sino que se contextualiza según el uso que se le da. La secuencia se guió por la metodología, pero es evidente que hace falta mucha más experimentación e investigación para considerarla una situación didáctica.

Las consideraciones cognitivas y/o didácticas de otras investigaciones dieron luz de las dificultades que enfrentan los estudiantes con el manejo de la noción escolar de ángulo. Sin embargo, ambas perspectivas quedan condicionadas por el saber. Solo considerando su naturaleza, sus usos y representaciones; y los vínculos entre estos, es que se puede hablar de la *construcción de la noción de ángulo*.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*: *Didactique des mathematiques, 1970-1990.* (Traducido al inglés y editado por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bosch, C., Ferrari, V., Marván, L. y Rodríguez, P. (2003). Diplomado de la Ciencia en tu Escuela. Módulo de Matemática. *Correo del Maestro, 88*. Obtenido el 17 de abril de 2009 de http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/septiembre/1anteaula88.htm

Casas, L. (2002). *Estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de las redes asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría.* Tesis doctoral no publicada. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Extremadura, Badajoz.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The mathematics Educator 1*(1), 4 – 11.

Matos, J. (1991). The historical development of the concept of angle (2). *The mathematics Educator 2* (1), 18 – 24.

Michelmore, M. y White, P. (1995). Development of the angle concept by abstraction from situated knowledge. Paper presentado en la *Annual Meeting of the American Educational Research Association.*

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics 41*, 209-238.

Mitchelmore M. y White P. (2003) Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials*. Proceedings of the Conference of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, (pp. 403-410). Hawaii.

Rotaeche, A. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, Legaria.

Nota. Este trabajo de investigación se lleva a cabo bajo el apoyo del proyecto de investigación SIP ***2008-2650*** *Didáctica de la razón trigonométrica: su incorporación al discurso matemático escolar*.

GRÁFICAS DE VARIACIÓN: REFLEXIONES SOBRE LA VISUALICACIÓN DE LA CURVA

Gabriela Buendía Abalos, Eduardo A. Carrasco Henríquez
CICATA-IPN México
Universidad de Valparaíso Chile
gbuendia@ipn.mx, ecarrascr17@yahoo.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Presentamos una discusión a partir de resultados alrededor del uso de las gráficas sobre qué es lo que un alumno ve al trabajar con una gráfica tiempo-distancia y las implicaciones de dicha visualización en la construcción del conocimiento matemático.*

Palabras clave: gráficas, visualización, curva

Introducción

Al seno de la investigación socioepistemológica, se desarrolla una línea de investigación referida al uso de las gráficas en la construcción del conocimiento matemático. En ella, las gráficas no son la representación de una función, sino que se presentan como un conocimiento en sí mismo con un desarrollo y argumentación propios. Se está proponiendo así un marco de referencia epistemológico que incorpora los elementos del funcionamiento y forma de uso de las gráficas de tal manera que, como consecuencia, se resignifique la variación asociada a los fenómenos de cambio (Suárez, 2008).

Las gráficas como elementos centrales en el desarrollo del Cálculo, surgen como un “dibujo de lo que varía” y se han ido tecnificando hasta ser hoy en día un código complejo de representación de objetos matemáticos. En ellas podemos reconocer metáforas que las constituyen (Carrasco, 2006); en particular, una que vive en las explicaciones de nuestras aulas es la gráfica como la traza de un punto que se mueve, referida en explicaciones del tipo “la función es continua si la puedo dibujar sin levantar el lápiz”. Al entender las gráficas en un contexto de variación como una traza, suele confundirse con la trayectoria dibujada por el móvil que se desplaza provocando con ello ciertas problemáticas al seno del aula: que una línea recta con pendiente no cero sea interpretada como un objeto moviéndose con algún ángulo, que no se asocie una gráfica horizontal con un objeto estacionario, entre otros (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002; Leinhardt, Stein y Zaslavsky, l990).

Así pues, la gráfica no ha perdido su calidad de dibujo y en este sentido se presenta al estudiante como una imagen. Al ser analizada, no sólo sus características y componentes de herramienta matemática están presentes, sino que su forma, color y regularidades parecieran imponerse a las características propias de elementos matemáticos.

El interés de este escrito, desarrollado a luz del trabajo de investigación del Grupo de Trabajo Relme "Aproximaciones socioculturales" está en presentar una discusión a partir de resultados alrededor del uso de las gráficas sobre qué es lo que un alumno *ve* al trabajar con una gráfica tiempo-distancia y las implicaciones en la construcción del conocimiento matemático. Consideramos que el "ver" no se reduce a observar la representación gráfica o a las diferentes formas de análisis que de ello pudieran derivarse, de ahí que hablaremos de visualización como un proceso fuertemente vinculado a la noción matemática, a sus significados y sus representaciones y al escenario escolar o extraescolar donde se le analice (Arcavi, 2003; Cantoral y Montiel, 2001).

Reconociendo propiedades a partir de las imágenes gráficas

Buendía (2007) muestra la siguiente respuesta de un profesor ante la pregunta sobre la periodicidad de las siguientes funciones.

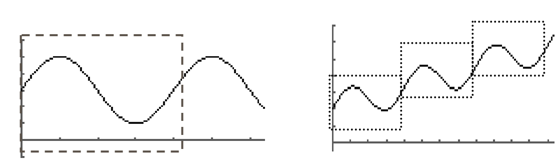
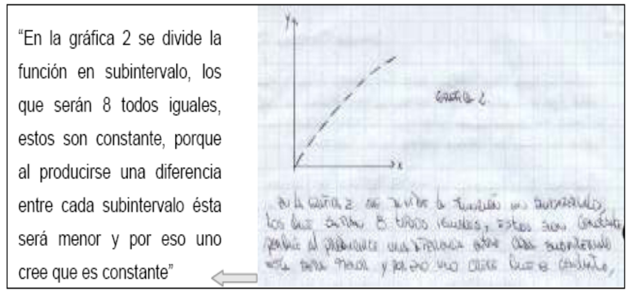
	*"Es como si hiciéramos un cuadrito en la primera para ver el periodo de repetición. Podemos hacer también un cuadrito para la segunda gráfica y veríamos, igual que en la primera, que el cuadrito se va repitiendo todo el tiempo igual...aunque también sube".*

Fig. 1 ¿Son gráficas de funciones periódicas?

En la respuesta podemos notar que el argumento gira alrededor de la unidad de análisis como "algo" sobre la forma de la grafica que se repite constantemente, y no sobre los valores que tienen las ordenadas. Entonces tenemos algo como "segmentos" de la curva, sin considerar los ejes y/o valores de las imágenes y dominios.

Por su parte, Ávila (2006) relata el uso de la gráfica que hace un estudiante cuando trata ideas sobre razón de cambio en funciones. La estudiante (fig. 2) al mirar la razón de cambio necesita particionar la función en ocho intervalos; al hacerlo no trabaja con los ejes, sino

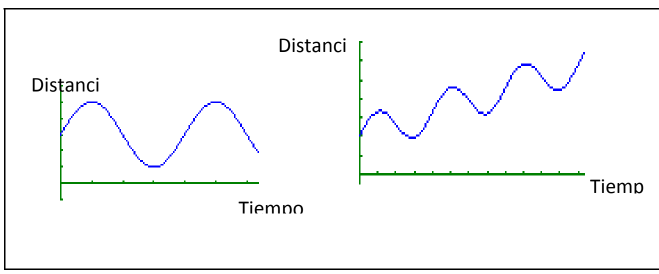


[Ana, Episodio de Bitácora 9, 2002]

Fig. 2

solamente con la curva. La gráfica es por tanto, trabajada como el dibujo que ha de ser analizado y entonces la metáfora vigente del discurso matemático para trabajarla, como pares de números, instanciados en los ejes, no es activada.

Retomando las respuestas de profesores ante lo periódico mostrada por Buendía, se señala que lo periódico se asocia a funciones que no lo son, sin embargo en las gráficas es posible establecer un patrón que se repite. En particular al observar la fig. 3 y la argumentación dada, se reconoce una noción sobre periodicidad que no es propia de la matemática sino que pertenece a nuestra cultura general como aquello que se repite con frecuencia a intervalos determinados y esa variación es la que las gráficas presentan a intervalos claramente definidos.

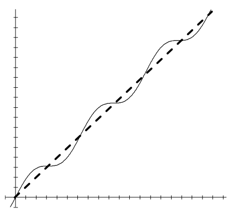


"La segunda gráfica es periódica porque se repite igual todo el tiempo, lo mismo que la primera"

Figura 3. ¿Son periódicas estas funciones?

Es un patrón visual de comportamiento el que finalmente permitirá predecir comportamientos. En ello se reconocen prácticas asociadas con la construcción significativa de lo periódico a partir de la visualización de la gráfica, y por tanto ella actúa como un soporte que permite construir argumentos para predecir.

En los siguientes ejemplos, vemos cómo prima la curva para realizar los análisis solicitados, los ejes no son referenciados y hay una mirada a la gráfica global, como objeto o traza que es posible separar de los ejes. Estos sólo proporcionan un marco.



…no es periódica si tomo como sistema de referencia los ejes de coordenadas propuestos, pero si yo tomo uno distinto (rotando el eje x para que coincida con la gráfica), entonces sí lo es

Fig 4.1 Ordoñez (2008)

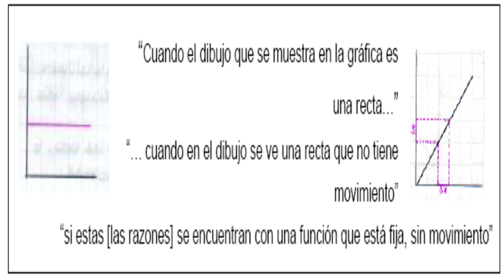


Fig 4.2 Avila (2006)

Respecto de la figura 4.1, la argumentación no refiere a una unidad de análisis, sino a la forma de la curva que sólo se diferencia de una senoidal en que ésta es creciente o, en términos de una imagen, está "ladeada". La argumentación surge posiblemente de reconocer que si el eje *x* estuviera con la misma inclinación que da el incremento en la gráfica, pues sí sería periódica (sería prácticamente una senoidal). La ausencia en la rotación del eje *y*, evidencia una mirada a la imagen más que a los valores de dominio y recorrido de la función; no hay problema en no rotar el eje *y* pues no estamos hablando de los valores de las variables involucradas en la relación funcional, sino simplemente en los marcos de referencia para mirar la imagen. Entonces podemos encontrar en estas producciones una valoración de la gráfica como un dibujo, una imagen constituida por la curva y entonces los valores de las ordenadas y abscisas no están presentes al momento de analizar sus comportamientos.

En la producción estudiantil de la figura 4.2, la estudiante explica cómo entiende la razón de cambio y en las frases refiere dos palabras que encuentra necesarias: gráfica y dibujo, por tanto no las entiende iguales. La palabra *gráfica* aparece sólo si hay puntos en los ejes, y en la que no hay puntos en los ejes sólo habla de *dibujo*.

En el análisis de las gráficas mostradas, los ejes coordenados son evocados o incorporados a las argumentaciones para poder justificar las conclusiones que la imagen de la curva produce. Se hace presente un análisis de la gráfica de modo global de tal manera que el análisis de la gráfica como "pares ordenados de puntos en el plano", metáfora subyacente al cálculo moderno, está ausente.

Las construcciones argumentativas en el uso de la gráfica incorpora concepciones culturales respecto de los elementos que en ella se detectan: el segmento como un trozo de algo o lo periódico como repetición de algo. De modo que al portar la gráfica una doble calidad, como producto institucionalizado de la matemática y por otro lado como dibujo, en las prácticas de uso la gráfica ambas significaciones se mezclan y de ella surgen diferentes mixturas de ideas y conceptos.

Revisando el uso de las gráficas en un contexto de variación

Carrasco (2006) menciona que Oresme incorpora la potencialidad del dibujo geométrico al estudio del devenir de las cualidades. Desde entonces, la evolución temporal comienza a ser representada mediante un segmento geométrico y entendido como tal.

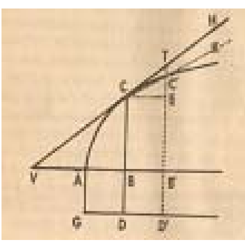


Figura 5

Posteriormente, los trabajos de Fermat y Descartes en el siglo XVII, respecto de la Geometría Analítica permiten el estudio de ecuaciones a través del significado de las curvas y el estudio de curvas definidas por ecuaciones. De este modo, Newton tiene a su disposición una amplia gama de marcos conceptuales para su trabajo con el movimiento, permitiéndole conformar su paradigma geométrico en cual *gráfica* es el resultado de la traza de un punto que se mueve y está constituida por segmentos geométricos (VB como abscisa y diversas ordenadas proporcionales en la figura 4).

Por su parte, Newton (1736) entiende el tiempo como "eterno e infinito, omnipotente y omnisciente; esto es, su duración se extiende desde la eternidad a la eternidad y su presencia del infinito al infinito…"; es un tiempo externo a las cosas. Sin embargo, para el estudio de las curvas o más bien los problemas relativos a un espacio que es atravesado por "algún movimiento local", considera a las "cantidades [que conforman la curva, es decir las coordenadas *x* e *y*] como si fueran generadas por incrementos continuos, a la manera de un espacio descrito por el recorrido de un objeto que se mueve" [pag. 81]. El tiempo ha de ser entonces representado en la curva por una cantidad que se incrementa de modo continuo. Así logra trabajar con un tiempo más manejable que el ya descrito o "formal", y entonces recurre a la noción de duración. De igual modo ya se cuenta con la noción de número real, como un cociente de magnitudes lo que le permite dejar los elementos centrales alrededor de la gráfica para que la comunidad matemática logre una representación del tiempo a partir de una metáfora de flujo continuo, coherente con la representación como línea continua de los números reales. El tiempo es ahora distancia (Lakoff y Nuñez,2000) y desde ahí surge el tiempo isotópico e irreversible, dando un contexto para el trabajo con el tiempo formalmente entendido y alejado de aquél que construimos en nuestra cotidianidad (Carrasco y Díaz, 2008).

Por otra parte, Buendía (2007) menciona que Euler usa lo periódico como una propiedad que califica un cierto tipo de comportamiento repetitivo; así, si bien las funciones trigonométricas quedan formalmente establecidas como *periódicas* en su obra y gracias a su trabajo en contextos de variación, resulta relevante que él construye funciones periódicas a través de usar el comportamiento de las gráficas como se muestra en la figura 6. Así, dice la autora, cuando Euler propone una solución al problema de la cuerda vibrante, éste toma como función que da la forma inicial de la cuerda a una parábola sólo en el intervalo correspondiente a la longitud de la misma (es decir [0,a]); a continuación, refleja sucesivamente el arco de curva correspondiente respecto a las rectas $x = \pm na$ y finalmente refleja los arcos así obtenido uno sí y otro no, respecto al eje de la abscisas. Se obtiene así una curva que se extiende a lo largo de dicho eje y que cumple con la condición de periodicidad que sus contemporáneos exigían a la forma inicial de la cuerda.

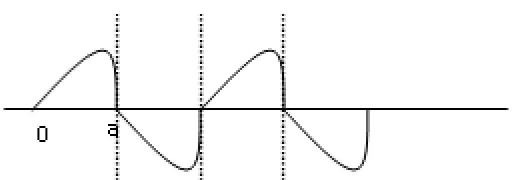


Figura 6. Haciendo periódica una función

De este modo el trabajo con gráficas, consideramos que no sólo es un acto de interpretación, sino que incluye la construcción de significados a partir de las prácticas que se ejercen en el trabajo con ellas. Es decir no sólo es lo que se ve, sino un *ver* dinámico, un construir la representación en una práctica de interpretación o construcción de la gráfica en que su dualidad dibujo/objeto matemático permite incorporar significados, nociones y herramientas que no son sólo de la matemática, sino que de los diversos mundos que portan quienes trabajan con ellas.

Comentarios finales

Las gráficas, constituidas a partir de querer hacer un dibujo de lo que varía ha evolucionado en un azaroso camino desde un dibujo, principalmente geométrico, a un producto institucionalizado un cierto conjunto de normas y principios propios de la estructura matemática (Roth, 2004). Sin embargo al enfrentar prácticas tanto para la construcción de gráficas como para su interpretación se involucran en ella su dualidad, dibujo-gráfica y ello permite incorporar ideas y nociones paramatemáticas o construir pseudo-conceptos, entendidos éstos como rodear un ejemplo con objetos guiados por una similitud concreta y visible formando un complejo asociativo limitado a un tipo de enlace perceptual (Díaz, 1999).

Al reconocer que la persona que interpreta y construye graficas ejerce prácticas relativas al uso de las gráficas, cuya intencionalidad surge de querer describir elementos matemáticos, comportamientos gráficos, y/o modelar fenómenos de variación, se revela la complejidad de una visualización que no es sólo la simple decodificación de los significados escolares y/o matemáticos que tiene la gráfica matemática. Por el contrario, esas prácticas involucran la dualidad de dibujo/gráfica; es la imagen gráfica que se presenta a la cognición y que se estructura como espacio heurístico de construcción de argumentos. Un espacio que según la intencionalidad puesta en la práctica, enacta -hacer emerger un mundo cognitivo mediante el acoplamiento estructural con el entorno durante una historia ininterrumpida- diversos esquemas conceptuales para hacer emerger significados, argumentos y prácticas.

Entonces las metáforas subyacentes al trabajo con gráficas deberán ser un puente entre las interpretaciones globales, sobre el dibujo, sobre la proyección, y aquellos análisis sobre los valores de las coordenadas, que entienden a la grafica como conjunto de puntos/pares de números. Se deberán articular, pues, en las prácticas de aula, la potencia de los análisis globales sobre la gráfica y los puntuales, que permitan significar propiedades matemáticas de las funciones y la variación y coherencia con aquellos significados socioculturales que viven en el dibujo.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241

Ordoñez, A. (2008). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas.

Suárez, L. (2008) *Modelación – Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav-IPN.

Este proyecto recibió apoyo del Conacyt 90398.

De la investigación al aula diseño de secuencias fundamentadas en socioepistemologías del saber matemático

Ordoñez, A. (2008). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas.

Suárez, L. (2008) *Modelación – Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Cinvestav-IPN.

ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN RESULTANTE DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Patricia Flores Marroquín, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN México
pflores@cinvestav.mx, amojeda @cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Básico

Resumen. *La enseñanza de medida de probabilidad, principio fundamental del conteo y espacio muestra, a 39 alumnos de sexto grado de educación primaria (11-12 años), y su comprensión resultante, se investigó mediante la aplicación de un cuestionario. En la propuesta institucional y en el aula se privilegian los contenidos aritméticos sobre los de estocásticos. Los alumnos reproducen gráficas, tablas y diagramas como se les presentan en la enseñanza, sin la referencia conceptual respectiva; usan indistintamente los términos probabilidad y posibilidad en las clases de probabilidad; se desatienden los datos o las instrucciones dadas; y las justificaciones se reducen a la intervención del azar. Fue exitosa (79.4 % correctas) la contestación a preguntas sobre razonamiento bayesiano, sin un trazo correcto del diagrama de árbol respectivo.*

Palabras clave: enseñanza, comprensión, estocásticos, primaria

La investigación y sus ejes

Esta investigación planteó la pregunta: ¿Cuál es la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria resultante de su enseñanza con los medios institucionales? Sus objetivos son: caracterizar el uso de medios en la enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria, e identificar la comprensión de los alumnos de las ideas fundamentales de estocásticos luego de su enseñanza.

La investigación se orienta bajo tres ejes: el primero, *epistemológico*, considera las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975, pág. 3) como las “que proporcionen al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración”. El eje *cognitivo* considera una enseñanza basada en el desarrollo de los fundamentos intuitivos de los alumnos para el pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975). El eje *social* considera las dimensiones de la educación (Eisner, 1998): la *intencional* en los propósitos de la práctica educativa; la *estructural*, con la organización institucional de contenidos temáticos, su jerarquización y temporalidad; la *curricular*, que corresponde a contenidos y actividades a realizar por los alumnos; la *pedagógica*, que compete a lo que se pretende enseñar y los medios y estrategias que el docente pone en práctica para ello; y la *evaluativa*, como un juicio de valor que se otorga a los resultados de la enseñanza obtenidos (pág. 93).

Método

La investigación, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se *enfoca* en la enseñanza y sus resultados. El investigador asume al *yo como instrumento* y su estudio tiene un *carácter interpretativo* que justifica lo informado y lo relaciona con la experiencia obtenida de la situación estudiada. Además, usa el *lenguaje expresivo* y atiende a *lo concreto.*

Los escenarios de investigación son la propuesta institucional, la enseñanza en el aula en condiciones reales y el alumno frente a los estocásticos. Aquí interesan los dos últimos, ante la presencia del investigador.

La enseñanza en el aula. La práctica docente, según estrategia propia del titular del grupo, se sustentó en el uso de medios (libro de texto y programa de cómputo *Enciclomedia*) y consistió en el desarrollo de tres lecciones de probabilidad y una de estadística. La primera de ellas, "Un juego con dados" (lección 30, SEP, 2003), propuso el interactivo *Dados*; la segunda, "Un candado seguro" (lección 35, SEP, 2003), incluyó el interactivo *Diagrama de árbol*; la tercera, "A los conejos les gustan las lechugas" (lección 48, SEP, 2003), propuso el interactivo *Diagrama de árbol* y, finalmente, la lección 52 de estadística, "Información engañosa" (SEP, 2003), sin interactivo, utilizó *Encarta 2005.*

Instrumentos para recopilar información. Se diseñó y aplicó un guión de observación de la enseñanza de estocásticos y un cuestionario a discentes, después de la enseñanza, que planteó seis situaciones aleatorias específicas y preguntas abiertas sobre las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en ellas. Aquí citamos sólo tres situaciones.

Técnicas de Registro de Datos. Las sesiones de aula se videograbaron, digitalizaron y se transcribieron los pasajes de interés para el análisis respectivo. El cuestionario se presentó al alumno en hojas impresas, para su contestación individual, con lápiz y colores, en hora de clase, con tiempo aproximado para su resolución de dos horas.

Criterios de análisis. Los datos recolectados del aula y con el cuestionario se sometieron a la *célula de análisis* (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos (aquí, en particular, medida de probabilidad, espacio muestra, regla del producto y combinatoria), otros conceptos matemáticos requeridos, recursos semióticos y términos empleados.

Resultados

Los resultados revelan la repercusión —en la comprensión de los alumnos de ideas de estocásticos— de la comisión en la enseñanza de errores sintácticos y de la imprecisión de instrucciones, tanto en los medios como en su uso en el aula por los docentes.

Enseñanza en el aula y medios

En términos generales, la enseñanza en el aula con lecciones de probabilidad careció de los elementos conceptuales respectivos. En la transcripción de pasajes ejemplares que aquí incluimos, “M” denota al docente y “A” o “As” a los alumnos.

Ideas fundamentales

La lección 30, “Un juego con dados”, plantea un juego en el que se usa una tira de papel con doce casillas numeradas del 1 al 12,para distribuir 36 fichas entre ellas e irlas retirando según el resultado de la suma de puntos de dos dados lanzados; gana quien retire primero todas sus fichas. Sin su análisis previo, el docente indicó que cada quien distribuyera las fichas como deseara en las casillas de la tira, y si se obtenía la suma correspondiente a una casilla ocupada, se retirarían todas las fichas de ella. Así, los alumnos que colocaron todas sus 36 fichas en la casilla del número seis, cuando resultó esta suma retiraron sus fichas y ganaron. El docente hizo hincapié en los valores posibles de la variable aleatoria (suma de los números de los dados), e indicó que todos tenían las mismas probabilidades de ocurrir (sesgo de equiprobabilidad): no discriminó entre el evento del espacio muestra y el valor respectivo asignado por la variable aleatoria:

> *M: ¿Cuál fue la mejor estrategia de las que ensayaste?*
>
> *A: (Repite la pregunta) Juntar todas en una sola casilla.*

M: ¿Crees que puedas encontrar una estrategia con la que siempre ganes?

A: ¡No!

Con la lección 35, el docente pidió una estrategia para calcular el número de combinaciones posibles de un candado con tres cilindros, cada uno con números 0, 1, 2 y 3, sin referirse, ni antes ni después, al principio fundamental del conteo:

M: ¡No es adivinanza! [Lee en el libro]: "Ahora trata de enunciar una regla para calcular el número de combinaciones del candado de Javier", pongan ahí [en el libro]… "multiplicar el número de cilindros por el número"… Hace rato nos salieron menos, pero son muchísimos más,… "multiplicar el número de combinaciones por el número de … el número de combinaciones", que es del cero al nueve, ¿por el número de qué…? ¡De cilindros! ¿Qué tan grande es el número resultante? Serán entre diez y cien; entre cien y doscientos; más de mil, ¿más de mil?

A: Entre más de mil.

M: ¿Más de mil?

A: ¡No!, ¡más de mil! Entre doscientos, ¿no? Más de doscientos … entre cien y doscientos.

M: Más de doscientos.

Otros conceptos matemáticos*.* El número careció de sentido respecto a la situación aleatoria en estudio, por la falta de análisis de ésta en cada caso y por el desconocimiento de técnicas como la del diagrama de árbol o de enumeración de posibilidades para organizar datos. Por ejemplo, con la lección 30 relativa a la suma de los puntos al lanzar dos dados, ocurrió el siguiente diálogo:

M: ¡Claro! ... ¿Con una sola vez ganas y puedes retirar todas las fichas? … ¿Con una sola vez ganas? ¡No! ¿Alguien me dice …? ¿Cuántas veces se necesitan para que salga un ganador?

A: Doce.

M: ¡Por los menos doce!

As: Doce.

M: Vamos a llenar aquí en el libro, rapidito, doce tiros.

Recursos semióticos

El trazo del diagrama de árbol se plantea en algunas lecciones como el propósito por lograr. Para quinto grado, el libro de texto propone en sus lecciones de probabilidad y de estadística la copia de gráficas, tablas y diagramas. El de sexto grado sólo proporciona datos para que los alumnos elaboren tablas, gráficas o diagramas de árbol, pero sin exigir un análisis o revisión de lo producido. El docente manifestó dificultades en la lectura y trazo del diagrama de árbol; pretendió identificar las distintas posibilidades a partir de un diagrama de árbol trazado en el pizarrón, secuenciando todos los nodos de un mismo nivel y a continuación los del siguiente, esto es, en forma de zig, zag; el trazo del diagrama de árbol realizado en el pizarrón unió dos ramas de distinto orden con un mismo nodo (ver Figura 1). El uso del interactivo respectivo del programa de cómputo no contribuyó a resolver las dificultades, sino a profundizarlas; el diagrama, con orientación horizontal y sin raíz, se "crea" agregando los elementos y el número de niveles (ramificaciones) en el que los organiza. En particular, la dificultad para identificar el número de niveles correspondiente a la situación propuesta en la lección 48 se reveló con el despliegue sucesivo de ramificaciones para una sola rama (ver Figura 2).

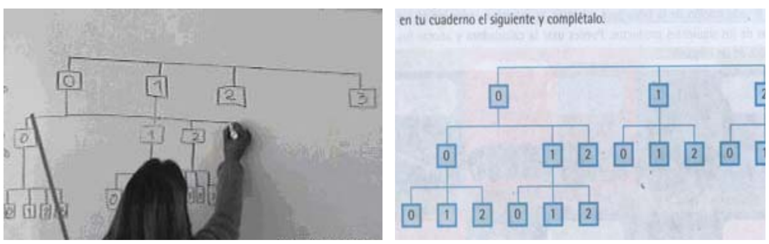


Figura 1. Trazo por el docente del diagrama de árbol del centro.

Figura 2. Interactivo "*diagrama de árbol"*.

Términos empleados

El uso por alumnos y docentes de la frase "por azar", para justificar respuestas sobre ocurrencia de eventos es, por un lado, evidencia de la falta de identificación de las ideas fundamentales de estocásticos implicadas; por otro, es una conducta estandarizada por la enseñanza, a modo de cliché (Flores L., 2002), resultante de la introducción de la idea de azar desde el tercer grado mediante "juegos de azar":

M: ¿Crees que puedas encontrar una estrategia con la que siempre ganes?

A: ¡No!

M. ¿Por qué?

As: Porque es un juego de azar.

M: ¡Porque es un juego de azar!

El término “combinación” no se usó con el sentido de un arreglo o disposición particular de elementos, ni para alumnos ni para docentes. Por ejemplo, en la lección 48 no se determinó el número total de combinaciones de los elementos presentados (conejos, lechugas y perros), sino que fueron “muchísimas” (Flores M., 2008). “Posibilidad” y “probabilidad” se usaron indistintamente, fue lo mismo para los alumnos probabilidad que posibilidad:

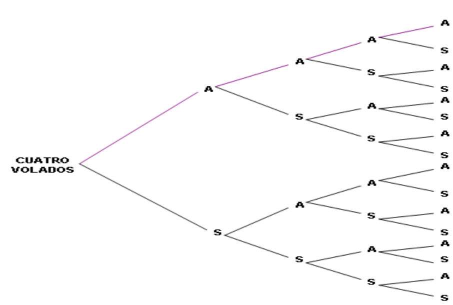
Comprensión de los alumnos de ideas de estocásticos

Se aplicó un cuestionario a 39 alumnos de 11 a 12 años de sexto grado, para obtener datos de su comprensión de ideas de estocásticos enseñadas en el aula.

Estructura del cuestionario

El instrumento incluyó seis situaciones, de las cuales citaremos tres para las que se plantearon preguntas sobre el principio fundamental del conteo, enfoque clásico de la probabilidad y espacio muestra:

Situación I. En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae un águila, Ingrid gana si caen tres soles, Adriana gana si caen dos águilas y Jorge gana si cae un sol. Para revisar sus posibilidades trazaron este diagrama de árbol:



a) ¿Puede haber empate? __________________ ¿Por qué? _______________________________

b) Sí dices sí, marca con rojo las ramas del árbol para este caso (empates).

c) ¿Quién es más probable que gane? ____________

¿Por qué?__________________________________

d) Marca con verde la(s) rama(s) del más probable ganador.

e) ¿Quién tiene más probabilidad de ganar? __________ ¿Por qué?__________________

f) Con el resultado de la rama morada, ¿quién gana? ______________________________

El inciso a) requiere identificar un mismo evento parafraseado de tres formas: Brayan gana si cae *un águila* y *tres soles*; Ingrid gana si caen *tres soles* y *un águila*; Brayan gana si cae *exactamente un águila* (no común en este nivel). Si gana Brayan, también gana Ingrid, esto es, empatan. Los incisos c) y e), formalmente iguales, informan sobre la consistencia de la respuesta: Adriana tiene más posibilidades de ganar. Las ramas que el alumno debió marcar para d) corresponden a (A, A, S, S); (A, S, A, S); (A, S, S, A); (S, A, S, A); (S, A, A, S); (S, S, A, A). Mientras que para el inciso f) la respuesta correcta es que no hay ganador.

Situación II. Dos bolsas de tela contienen pelotas de igual forma y tamaño, una tiene dos pelotas rojas y la otra tiene una pelota roja y una pelota azul. Se toma una bolsa al azar y sin ver se saca una pelota: es *roja*.

a) ¿Cuál de las dos bolsas es más posible que haya sido la que se escogió? ________________________ ¿Por qué? ____

b) Traza un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.

La respuesta requerida para el inciso b) (ver Figura 3) ha sido reportada como empleada por alumnos de secundaria para dar respuesta al inciso a) (Ojeda, 1994).

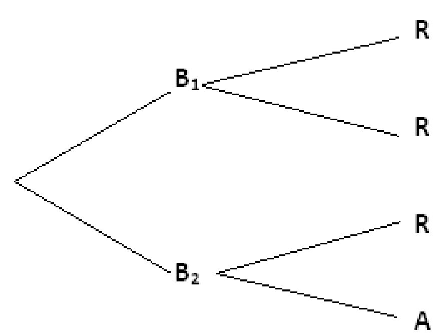


Figura 3. Diagrama de árbol para la situación propuesta en la Situación II.

El problema es conocido en la literatura por la dificultad que entraña el razonamiento bayesiano (Fischbein, 1975; Ojeda, 1994). Si B_1 denota la bolsa con las dos bolas rojas y B_2 la bolsa con una bola roja y otra azul, y si R denota bola roja, la justificación formal de que B_1 es la más probable de haber sido la seleccionada dado que se extrajo R es:

$$P(B_1 \mid R) = P(R \cap B_1)/P(R) = P(R \cap B_1) / [P(R \cap B_1) + P(R \cap B_2)] = (½) / (½ + ¼) = ⅔.$$

Situación III. Traza un diagrama de árbol para los posibles resultados de dos volados.
Para responder a esta instrucción, los alumnos ya tenían el antecedente de la situación I.

Resultados del Cuestionario

La Figura 4 presenta los resultados del cuestionario. En general, las preguntas fueron difíciles para los alumnos, con más del 50% en respuestas incorrectas o no contestadas.

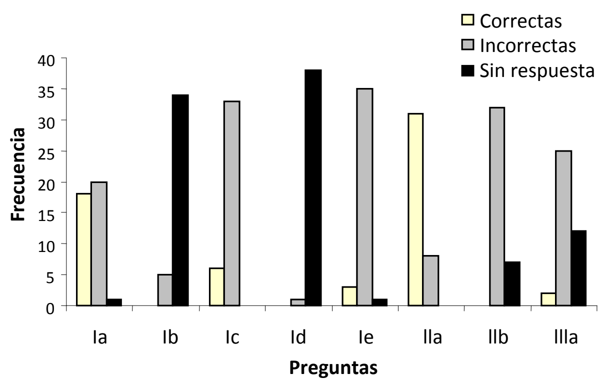


Figura 4. Distribución de tipos de respuestas al cuestionario

Ideas fundamentales

a) *Espacio muestra*. Los alumnos no adquirieron esta idea. Por ejemplo, para la pregunta Ia, 18 alumnos (46.1%) contestaron afirmativamente al empate, pero su justificación no fue congruente, sólo una respuesta reveló la noción: *Pueden caer 3 soles y 1 águila.* A la petición de remarcar las ramas del árbol de empate y ganador y de la identificación del evento correspondiente a la rama morada, el porcentaje de error fue mayor al 80%, lo cual evidencia que los alumnos no adquirieron esta idea. Igual sucedió con las situaciones II y III, porque el espacio muestra no fue relevante.

b) *Combinatoria.* Los alumnos no adquirieron la noción del principio fundamental del conteo: para la pregunta IIb, el 82. % de las respuestas fueron incorrectas y el 17.9% no respondió. Sólo 5% de los alumnos realizaron correctamente la instrucción III.

c) *Medida de probabilidad*. Los alumnos no adquirieron esta idea; sólo 8% de las respuestas fueron correctas para las preguntas Ic y Ie.

d) *Regla del producto.* El 20% de los alumnos contestaron correctamente la pregunta IIa con respuestas como: *Porque si hay dos rojas y metes la mano y sacas la pelota te va a salir roja; No hay otro color*, que sugieren un pensamiento intuitivo primario (Fischbein, 1975). Pero el resto de los alumnos no han adquirido esta idea.

Otros conceptos matemáticos

Los alumnos no dotaron de sentido a las cantidades numéricas por su implicación en la situación aleatoria, sino por sí mismas, en particular respecto a los números naturales y a su orden: (Ia) *son las mismas cantidades* (5.12%); (Ie) *son diferentes cifras* (2.5%). A falta del principio fundamental del conteo, algunos alumnos (12.82%) *contaron* la totalidad de nodos (águilas y soles) del diagrama.

Recursos semióticos

La principal dificultad de los alumnos (85.86%) fue la lectura del diagrama de árbol presentado y el trazo de los diagramas solicitados. Así, para la pregunta Ib (empate), 84.61% (33 alumnos) no efectuó el trazo solicitado; mientras que para la pregunta Id, 94.87% (37 alumnos) no marcó con verde la rama del ganador. Ningún alumno trazó correctamente el diagrama pedido en IIb. Para la situación III, la Figura 5 muestra el árbol trazado por un alumno para el caso de dos volados, con sólo la eliminación de las ramas centrales del árbol presentado en la situación I para cuatro volados.

Términos empleados. La pregunta Ic, "¿*Quién es* más probable que gane?", remitió a los alumnos a una persona y, al parecer, les sugirió enfocarse sólo en el resultado del volado *siguiente* (águila o sol). La pregunta Ie, "¿*Quién tiene* más probabilidad?", los remitió a la cantidad de caras especificadas

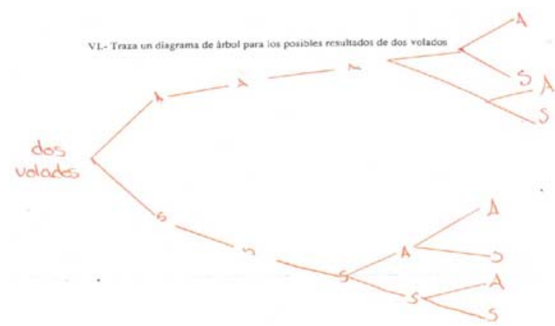


Figura 5. Diagrama de árbol para la situación III.

para cada jugador en su condición para ganar: ocho alumnos contestaron que el jugador que ganaba con tres soles (Ingrid), y dieron justificaciones como: Ingrid, "porque *tiene tres* soles"; al parecer, el verbo "tener" dio relevancia al complemento *más probabilidad de ganar*. "Posibilidades", "probabilidades" y "oportunidades" se usan igual en las contestaciones de los alumnos; a "oportunidades" se asigna el sentido de "ganar": 7.69% lo atribuyeron a Ingrid (con tres soles). "Diagrama de árbol" sugirió a los alumnos líneas consecutivas presentadas en sus trazos (35%) incorrectos; "azar" lo utilizaron para lo que no tuvieron una justificación (35%)**;** "casi nunca" lo relacionaron con "imposible".

Comentarios generales

Los medios no proporcionan lo necesario para la enseñanza en el aula de estocásticos y el propio docente carece de una formación en el tema. Esto repercute en la comprensión correspondiente de los alumnos. Un ejemplo es la dificultad que enfrentaron estudiantes y docente con el trazo del diagrama de árbol y su lectura, con la consecuente falta de identificación del espacio muestra y de asignación de probabilidades a eventos. Otorgar la importancia requerida a los contenidos de estocásticos en la enseñanza es una necesidad primordial, porque a partir de éstos se forman pensamientos dinámicos (Carballo, 2004).

Referencias bibliográficas

Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I., Waldegg, G. (2003). *Matemáticas, sexto grado.* México: SEP.

Carballo, T. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: determinismo y azar*. Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado.* Madrid: Paidós Educador.

Encarta 2005. Recuperado en octubre de 2008 de http://mx.encarta.msn.com/.

Enciclomedia. México, SEP. Recuperado en octubre de 2008 de http://www.enciclomedia.edu.mx/.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Boston: Reidel Publishing Company.

Flores, L. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria.* Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav, IPN.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics 6*, 187-205.

Ojeda, A. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-University Levels*. Tesis de Doctorado no publicada. King´s College London.

Ojeda, A. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed) *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, (pp. 195-214). México: Santillana.

SENTIDOS DE USO DEL CERO Y LA NEGATIVIDAD EN LA RECTA NUMÉRICA

Abraham Hernández, Aurora Gallardo
Cinvestav, IPN. México
ahernandez@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Básico

Resumen. *En este artículo se reporta un estudio realizado con 40 estudiantes, donde se manifiestan diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones: primera, un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica. Así mismo, surgió el evitamiento del cero origen cuando: fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones y cuando no fue simbolizado. Además, se da la aparición de los números negativos en el modelo de la recta numérica y en la resolución de tareas aritméticas. Sorprendentemente la aceptación de números signados no condujo necesariamente a la identificación del cero como número.*

Palabras clave: sentidos de uso, negatividad, cero, recta, números signados

Introducción

Actualmente el cero y los números negativos son temas del currículo escolar, generalmente tratados sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros y alcanzar una competencia en el manejo del lenguaje algebraico.

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio que actualmente se encuentra en proceso. Nuestro tema apunta hacia la "aparición simultánea" de los números negativos y el cero, en los ámbitos histórico y didáctico, enfatizando el problema en la solución de tareas aritméticas, aritmético – algebraicas y algebraicas.

Éste se basa en los trabajos de Gallardo (1994, 2002), donde se identificaron niveles de conceptualización de la negatividad, evidenciados y abstraídos de un análisis histórico – epistemológico y a la vez de un estudio empírico con 35 alumnos de 12-13 años de edad, que en Rubio, Del Valle, Del Castillo y Gallardo (2007) se convirtieron en sentidos de uso de los números negativos en la construcción de número, variable y función en la resolución de problemas verbales.

Estos sentidos de usos individuales o colectivos se convierten en los significados socialmente aceptados de los conceptos matemáticos si la interpretación del estudiante es adecuada (Filloy, 1999), a saber: *sustraendo*, donde la noción de número se subordina a la magnitud (en a-b, a siempre es mayor que b, donde a y b son números naturales); *número signado*, donde un signo menos es asociado a una cantidad y no tiene significado adicional a otras condiciones; el *número relativo*, dónde la idea de cantidades opuestas está en el dominio discreto y la idea de simetría se pone evidente en el dominio continuo; el *número aislado*, es el resultado de una operación o la solución a un problema o ecuación; el *parámetro negativo*, surge en problemas de variación continua representados por: y= mx+ b, al reconocer que m y b pueden tomar valores negativos; y el *número negativo formal*, noción matemática de número negativo, dentro del cual hay concepto general de número que contempla los números positivos y negativos (los enteros de hoy).

La metodología

El fundamento teórico del estudio general está basado en las ideas rectoras de los siguientes autores: Filloy (1999), introdujo los modelos teóricos locales (MTL) para la observación empírica. Estos modelos constan de componentes sobre los procesos cognitivos y de comunicación, sobre la competencia y sobre modelos de enseñanza. La metodología general de nuestro estudio aborda estos componentes en dos planos de análisis, el plano histórico – epistemológico (evolución de los significados en el devenir de la historia) y el plano didáctico (enseñanza – aprendizaje – cognición). Con respecto al componente de los procesos cognitivos, Filloy menciona que desde 1933, Piaget descubrió en el niño un sistema de tendencias de las cuales el infante no es consciente y por ende, no puede manifestarlas en forma explícita. En esta misma dirección, Filloy (1999) explicó que hay tendencias debidas a las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual, que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos. Estas “tendencias cognitivas”, pueden observarse en el aula y durante las entrevistas clínicas.

En la pieza de investigación presentada en este artículo, nos abocamos solamente, al componente sobre un modelo de enseñanza con estudiantes de secundaria acerca de la interrelación entre el cero y la negatividad.

Nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

a) ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros?

b) ¿Cómo consideran los estudiantes al número cero?

c) ¿Cómo se relaciona el cero con los niveles de conceptualización de los números negativos?

d) ¿Ellos entiende la adición, la sustracción, la multiplicación y la división por cero?

e) ¿Contribuirá el análisis histórico – epistemológico del cero como número a la comprensión de las dificultades presentadas por los estudiantes de hoy?

Los pasos iniciales de nuestro tema de investigación fueron reportados en Gallardo y Hernández (2005), donde se concluyó que el reconocimiento de las dualidades del signo igual como equivalencia – operador en ecuaciones; el signo de los números enteros como unario – binario y el cero como totalidad – nulidad, contribuyen como una posible ruta para lograr la extensión del dominio numérico de los naturales a los números enteros. Además, hemos reportado en Gallardo y Hernández (2006), cinco sentidos de uso del cero, que fueron identificados cuando los estudiantes resolvían tareas aritmético – algebraicas.

Los diferentes sentidos de uso del cero que fueron identificados en los diálogos de la entrevista fueron llamados e interpretados como sigue:

Cero nulo: “no tiene valor”, y convive con el número negativo como sustraendo.

Cero implícito: es aquel que no aparece escrito, pero que es utilizado durante el proceso de resolución de la tarea. El cero implícito convive con el número relativo.

Cero total: es aquel que está formado por números opuestos ($+n$, $-n$ con $n \in N$). El cero total convive con el número relativo.

Cero aritmético: es aquel que surge como el resultado de una operación aritmética y se relaciona con el número negativo como sustraendo.

Cero algebraico: es aquel que surge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación, surge espontáneamente como número signado, número relativo y número negativo aislado.

Los resultados de estas dos investigaciones ya reportadas, contestan parcialmente las cuestiones mencionadas anteriormente: a), b) y c).

El estudio

Aquí solamente nos abocamos a los componentes sobre los procesos cognitivos y sobre modelos de enseñanza del MTL, que fundamentaron los estudios de caso aquí presentado. En la resolución de las tareas propuestas, surgieron otros sentidos de uso del cero asociados a la recta numérica, modelo de enseñanza muy sustentado desde hace décadas, por autores como Janvier (1985), Resnick (1983), Peled (1991), Bruno (1994) entre otros. En consecuencia, responderemos más ampliamente y con mayor fundamentación a la pregunta de investigación c). Para ello, 40 estudiantes 13 – 15 años de edad respondieron cuestionarios, que fueron videograbados con el propósito de seguir el orden de las acciones de los alumnos realizadas sobre la recta numérica. Se presentan lo resultados de los 7 alumnos que mostraron el desempeño típico de la mayoría de la población. Éstos son ordenados del mayor al menor número de aciertos en dos de los 15 ítems contestados. No fue necesario incluir el análisis de un mayor número de ítems, porque cada estudiante resolvió todas las operaciones con el mismo procedimiento utilizado en el primer ítem.

Hallazgos:

En esta investigación, se encontraron diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones:

1° Un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, relativo, aislado y ordenado.

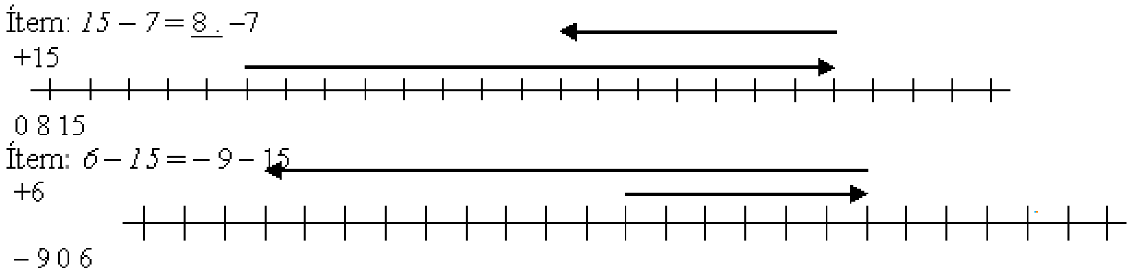
2° Un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, aislado y ordenado.

3° Un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica; convive con los sentidos de uso del negativo como sustraendo, aislado, relativo y ordenado.

Síntomas de evitamiento del cero: a) Cuando no fue simbolizado. b) Cuando fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones. c) Cuando los estudiantes interrumpían su conteo uno a uno al aproximarse al cero por la izquierda. d) Cuando consideraban al 1 y al – 1 como origen en la recta numérica.

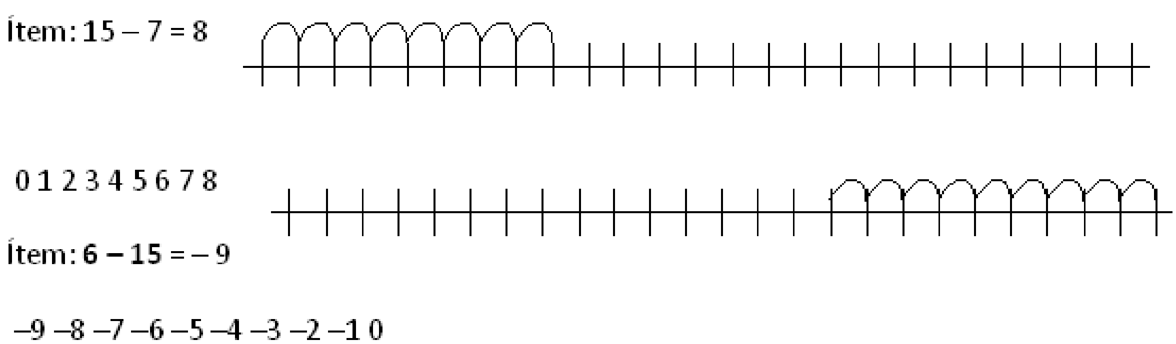
A continuación se muestran los ítems más representativos de lo señalado anteriormente:

RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_1



El estudiante, en primer término recurre a la recta numérica y hace uso de números signados para operar sobre la misma, aunque las sustracciones estén expresadas con números naturales. Los números signados + 15, –7, –15, +6, son representados con segmentos orientados vía flechas con sentido, hacia la derecha números positivos y hacia la izquierda números negativos. En la recta solamente numera el origen, los minuendos, y los resultados obtenidos. Considera al cero un punto arbitrario en la recta y punto de partida de las acciones realizadas para resolver los ítems planteados.

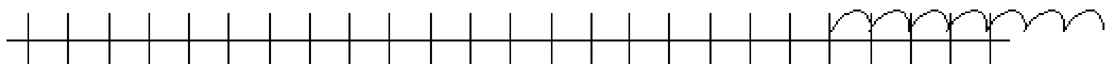
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_2



Se pudo observar siempre que el estudiante, dio respuesta a las operaciones planteadas sin recurrir a la recta numérica. Esta la utiliza para representar el resultado y realiza conteo de uno en uno, numerando solamente los números que necesita para dicho conteo. Considera al cero como el principio u origen de la recta, colocado a la izquierda cuando el resultado es positivo y a la derecha cuando el resultado es negativo.

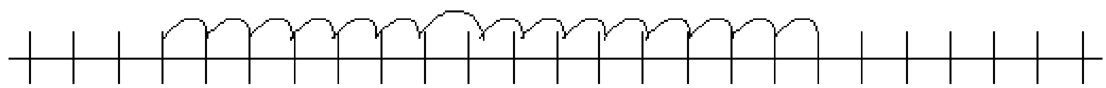
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_3

Ítem: 15 – 7 = 8



–12 –11–10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Ítem: 6 – 15 = – 9

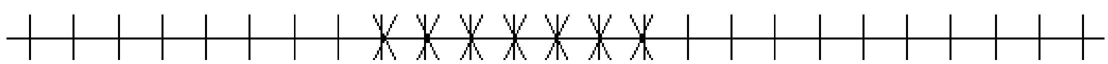


–12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Recurre a la recta numérica, ubica al cero en la mitad de ésta, numerando en forma simétrica hasta terminar los puntos marcados. En el ítem (15 – 7), no coloca en la recta el número 15, sólo agrega 3 arcos para representar el minuendo 15, y se regresa hacia la izquierda contando 7 arcos, llega al número 8 de la recta que es el resultado buscado. En el segundo ítem, a partir del 6 sobre la recta, realiza un conteo uno a uno, de los 15 arcos hacia la izquierda y llega al resultado – 9.

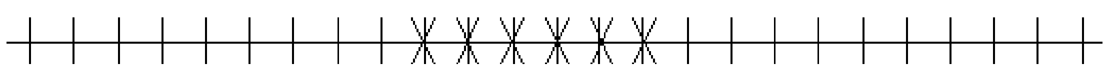
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_4

Ítem: 15 – 7 = 9



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ítem: 6 – 15 = 9



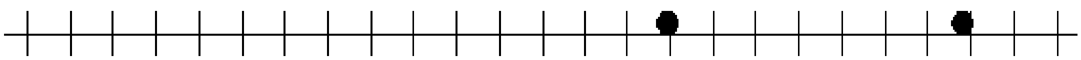
–15 –14 –13 –12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1

En el primer ítem, coloca el uno donde inicia la recta. Trabaja con números naturales, realiza la sustracción sin considerar los intervalos de un punto a otro, lo que condujo al resultado incorrecto

(15 – 7 = 9). El conteo uno a uno lo indicó tachando los números. En el segundo caso comienza con el negativo 15, al llegar al menos 1, se detuvo haciendo una pausa. Se observó que no pudo seguir numerando la recta. Surgió el "síntoma de evitamiento del cero". La expresión 6 – 15 =, la interpreta como 15 – 6 = 9, ya que el estudiante observó las marcas numeradas y a partir del punto denominado por él – 1, tachó 6 marcas sin importar si correspondía o no al resultado buscado.

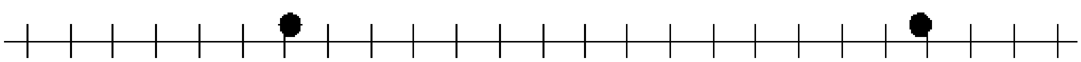
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_5

Ítem: 15 – 7 = 8



–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ítem: 6 – 15 = – 9

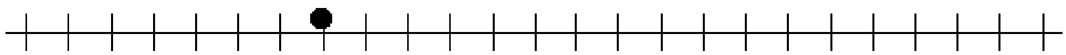


–15–14–13 –12–11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6

En el primer término, recurre a la recta numérica. La extensión de la primera recta es de –7 a 15. La segunda recta recorre de –15 a 6. Nótese que el 7 es transferido a la recta como –7 y el 15 como –15. En la recta sólo representa el minuendo y el resultado con un punto sobre el número correspondiente. El cero es colocado sobre la recta y utilizado para realizar las operaciones vía el conteo.

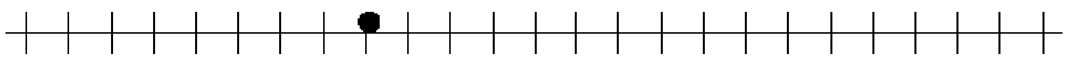
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_6

Ítem: 15 – 7 = 8



(+)

Ítem: 6 – 15 = – 9

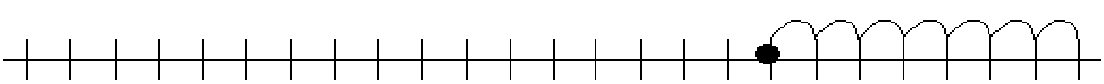


(–)

En primer término resuelve las operaciones indicadas. Al pasar a la recta numérica, solamente las signa con "+" ó "–" de acuerdo al resultado obtenido. Si éste es positivo la recta es positiva, si es negativo, la recta será negativa. En todos los casos propuestos el estudiante considera dos semirrectas por separado, una para los positivos y otra para los negativos. Solamente representa el resultado de la operación, recurriendo al conteo de uno en uno, desde la primera marca de la recta. El cero es ignorado, su conteo siempre empieza en el uno.

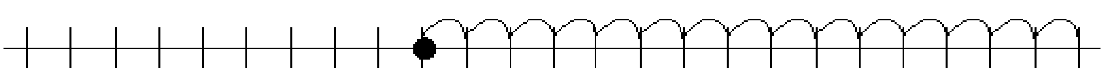
RESPUESTAS DEL ESTUDIANTE E_7.

Ítem: 15 – 7 = 8 22



0

Ítem: 6 – 15 = – 9 21



0

Las expresiones aritméticas planteadas son resueltas en primer término. En la recta coloca el cero en un punto arbitrario. Inventa adiciones con los números dados: 15 + 7 = 22 y 6 + 15= 2. Los resultados obtenidos los coloca arbitrariamente sobre la recta numérica, sin relacionarlos con la posición del cero. Realiza la operación planteada vía el conteo, haciendo sus señalamientos con 7 y 15 arcos respectivamente. Los resultados de las operaciones son señaladas por puntos remarcados. Nótese que el cero no está situado en correspondencia a la serie numérica correcta.

Discusión

Del análisis de los ítems de los estudiantes, se puede afirmar que el significado del cero como origen es reconocido vía tres situaciones: primera, un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica (E_1); segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación dependiendo de los valores numéricos involucrados en las operaciones (Estudiante E_2); tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica representada (E_3). Así mismo, surgió el evitamiento del cero origen cuando, primero, éste fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones (E_5 y E_7); segundo, el cero no fue simbolizado y además el número uno fue considerado como el origen sobre la recta numérica (E_4 y E_6).

La vinculación establecida entre el cero y la negatividad se manifestó como sigue: tres estudiantes (E_1, E_2 y E_3) reconocen negativos signados y el cero origen. Dos estudiantes (E_4 y E_5) aceptan negativos signados pero evitan el cero como número. Otros dos estudiantes (E_6 y E_7) no representan números signados ni tampoco reconocen al cero. En consecuencia, podemos concluir que el reconocimiento de números signados no conlleva necesariamente a la identificación del cero como número. Observamos además, que todos los estudiantes utilizaron el modelo de la recta numérica para tratar de realizar las operaciones de la sustracción. Así, E_1 representó las acciones con segmentos dirigidos; E_2 y E_3 con arcos sobre la recta numérica; E_4 tachó los valores correspondientes; E_5 colocó puntos sobre los números; E_6 utilizó puntos y segmentos dirigidos, y por último, E_7 representó sus acciones mediante puntos y arcos sobre la recta numérica. Sin embargo, no todos utilizaron este modelo como tal, sólo E_1, E_3 y E_5 realizaron las sustracciones en forma correcta.

Un suceso de gran relevancia que se observó en el video grabaciones realizadas a los estudiantes, fue lo que hemos denominado “síntoma de evitamiento del cero” que se manifestó en el hecho de que los estudiantes no podían continuar numerando la recta al aproximarse a la marca correspondiente al cero. Las situaciones descritas y analizadas fueron reiterativas en todos los ítems resueltos por los sujetos del Estudio y han permitido la identificación de otro significado del cero, el cero origen. Hasta el momento, se han reconocido en nuestra investigación seis significados: el cero nulo, el cero total, el cero implícito, el cero aritmético, el cero algebraico y el cero origen. Es evidente que estos hallazgos tienen que ser validados por un estudio empírico a mayor profundidad que ya se esta realizando, así como también proseguir la indagación histórico-epistemológica que dará respuesta a las preguntas de investigación d), e), f).

Referencias bibliográficas

Bruno, A., Martinón, A. (1994). Straight lines in the learning negative numbers*.* *Suma 18*, 39 - 48.

Filloy, E. (1999). Theoretical aspects of educational algebra*. Research in Educational Mathematics.* Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. y Hernández, A. (2005). The Duality of Zero in the Transition from Arithmetic to Algebra. En H. Chick y J. Vincet (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *3*, (pp. 17–24). Melbourne: University of Melbourne.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra*. Educational Estudies in Mathematics. 49*, 171-192.

Gallardo, A., Hernández, A. (2006). The Zero and Negativity Among Secondary School Students. En *Proceedings of the XXX PME 3*, (pp. 153 – 160). Prague: Charles University.

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. En *Proceedings of the Nineth Meeting of the PME*, (pp. 135-140). The Netherlands: State University of Utrecht

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. En F.Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3*, (pp. 145–152). Assisi, Italy: PME.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding*.* En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

ESTOCÁSTICOS EN EL SEGUNDO CICLO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA: DETERMINISMO Y AZAR

María Teresa Carballo Riva Palacio, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav, IPN. México
carivpa@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Básico

Resumen. *El objetivo de esta investigación, de naturaleza epistemológica y con métodos en el orden cualitativo, fue comprender la enseñanza de probabilidad y de azar en el segundo ciclo escolar primario (con niños entre 8 y 10 años). Para ello se consideró: la propuesta institucional, con el eje La predicción y el azar en el Plan y programas de estudio (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993), sus contenidos programáticos, guías y libros de texto y el planteamiento en éstos de las lecciones respectivas; la práctica de la enseñanza en el aula, según elementos formativos que sobre probabilidad y azar tiene la docencia para ejercerla en la escuela regular y de educación especial; la interacción con la docencia en sesiones de estudio dirigido, para la identificación de elementos que pueden incidir en la formación docente en estocásticos.*

Palabras clave: estocásticos, epistemología, docencia, primaria

Antecedentes

Una primera incursión de la investigación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario y un acercamiento con docentes de primaria pública. Ésta proporcionó información como: desconocimiento de los docentes del eje temático “La predicción y el azar” de la asignatura de matemáticas para este ciclo escolar (3° y 4° grados) y de las lecciones del libro de texto correspondientes; sesgos del pensamiento de docentes sobre azar y probabilidad; su indiferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; su enjuiciamiento de las actividades propuestas en este eje temático como de “pasatiempo y recreación” y del alumno como incapaz de estudiar estos contenidos programáticos. La información sugirió la necesidad de indagar sobre la experiencia directa del docente y su interpretación de la *propuesta institucional* en su *enseñanza* del azar y la probabilidad en el *aula*, y sobre los elementos de que dispone para ella en sesiones de *estudio dirigido* conducidas por investigadoras, en diferentes escuelas del Distrito Federal, en sus modalidades de regular pública y de educación especial privada. La indagación en estos espacios docentes permitió reflexionar y analizar la práctica de *enseñanza* sobre azar y probabilidad, de acuerdo a referentes teóricos de carácter epistemológico y cognitivo.

Acerca de la constitución de la idea de azar

De acuerdo al estudio epistemológico *La génesis de la idea de azar en el niño* (Piaget & Inhelder, 1951), el proceso intelectual del individuo parte de la diferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible; lo imprevisto proviene de la incertidumbre, como incomprensión de lo *posible* a falta de un sistema operatorio que dé cuenta de él. Lo imprevisible resulta de la distinción entre lo observado y lo *necesario*, por medio de operaciones de *clasificación* y *seriación* que permiten describir y ordenar las cualidades y propiedades de lo indeterminado, al advertir las disyunciones concretas que implican lo *posible* de un cierto resultado, en relación a otros. Dado que las situaciones aleatorias se hacen evidentes en el terreno de lo *real*, la predicción de algún posible resultado requiere la advertencia de la irreversibilidad de lo aleatorio y del desarrollo de estructuras deductivas que den cuenta de lo *posible*: gracias a la constitución del *azar lógico aritmético*, el sujeto puede comprender el *azar físico* (Piaget & Inhelder, 1951, p. 205) y establecer un juicio de probabilidad. La falta de estructuras lógicas, de conjunciones y disyunciones, primero concretas y luego abstractas, para ordenar las posibilidades en la relación *parte−parte* y *parte−todo*, impide estructurar operaciones de *combinatoria* (segundo orden), pues la ausencia de operaciones lógicas *trae como consecuencia la falta de una síntesis entre el azar y los mecanismos operatorios en forma de un sistema de composición probabilística* (Piaget & Inhelder, 1951, p. 209). Este ordenamiento, primero del enlistado de los posibles resultados, luego de sus relaciones *parte−todo*, en eventos equiprobables e inequiprobables y, posteriormente, del desarrollo de operaciones de proporcionalidad para identificar esas relaciones con grandes números, es un proceso que puede darse de manera simple en niños pequeños, incluso de edades a 6–12 años. Para ello, según Fischbein (1975), se parte de un pensamiento intuitivo primario que se puede ver asistido por una *enseñanza* de estocásticos desde los 4 ó 5 años de edad. Esta asistencia toma el papel de andamiaje que tiene la intuición para la constitución de nuevas adquisiciones cognitivas; y asume el papel que juega la *enseñanza* en el desarrollo de intuiciones secundarias correctas, que apunten hacia un desarrollo del pensamiento de lo probable, *bajo un currículum apropiado al aprendizaje de la probabilidad que considere un sustrato intuitivo primario en la formación de nuevas intuiciones* (Fischbein; 1975, p. 131). El andamiaje intuitivo secundario deberá constituirse con base en *ideas fundamentales*, según Heitele (1975), que: orienten su formación bajo un currículo en espiral para desarrollarlas y superar, progresivamente, intuiciones primarias basadas en explicaciones "mágicas" o relativas a la "suerte"; que consideren situaciones de análisis probabilístico en la *enseñanza* para *normar las expresiones de nuestra creencia*, mediante el inventario del *espacio muestral* Ω (formalmente, el σ - *campo* de subconjuntos del conjunto Ω) y la advertencia de las relaciones *aditivas* o *multiplicativas* entre sus elementos, así como el desarrollo de operaciones de *combinatoria* para posibilitar el ordenamiento cuantitativo de los posibles resultados en relaciones *parte−parte* y *parte−todo*; que advierta la *independencia* de eventos, la *equidistribución y simetría*, la idea de *muestra*, de *variable estocástica* y de *ley de los grandes números* (Heitele, 1975, pp. 198-199) y que recurra al modelo de *urnas* y a la *simulación*. Esta propuesta de ideas fundamentales consideró los resultados de Piaget & Inhelder (1951).

Steinbring (1991) analiza el papel de la enseñanza de estocásticos en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el aula; resalta el papel de la *enseñanza* en la constitución progresiva del conocimiento estocástico, el cual requiere de la observancia del *triángulo epistemológico* (ver Figura 1), es decir, la constitución del concepto resultaría de un balance en la relación entre todos los vértices, por ejemplo, al observar sistemáticamente la *frecuencia relativa* de una secuencia de eventos, como la manera natural del pensamiento de registrar los datos, luego, de organizar los resultados en una relación *parte−parte* y *parte−todo* al asignarle una probabilidad y tomar conciencia de la experiencia al diferenciar la *variable aleatoria* y las frecuencias relativas de sus valores posibles.

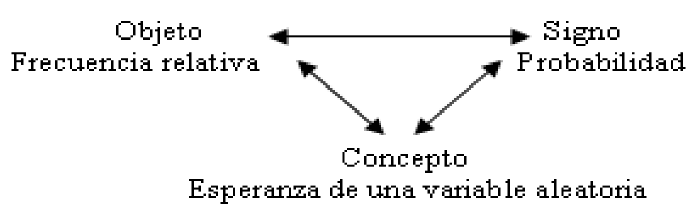


Figura 1. Forma relacional en la constitución del conocimiento, en particular, del concepto de probabilidad, según Steinbring (1991, p. 507).

Según el autor, la comprensión social común y el desarrollo del conocimiento requieren la estructura [de] *retroalimentación interactiva explícita para verificar, mejorar y modificar la comprensión que uno tiene de los conceptos matemáticos* (Steinbring, 1991, p. 519).

Proceso de investigación para el estudio

Con carácter cualitativo (Eisner, 1998), la investigación estuvo constituída en tres fases: la primera, documental, examinó la *propuesta institucional* (SEP, 1993); la segunda consistió en indagaciones en *estudio dirigido* a docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de estocásticos en primaria, de educación regular y de educación especial. La tercera fase se enfocó en la *enseñanza en el aula* de contenidos de estocásticos, en condiciones reales. El objetivo de la investigación fue identificar los elementos de probabilidad y de azar que requiere la docencia para orientar su enseñanza hacia la formación de modelos explicativos sobre el pensamiento de lo *posible*.

Espacios metodológicos

Específicamente, el estudio se llevó a cabo con cuatro docentes, en cuatro aulas distintas de escuela regular, y con un docente en el *aula* de educación especial. Ellos reconocieron la relevancia que tiene la formación de la docencia para poder interpretar la propuesta institucional, dado que ésta determina su interacción con el alumno al interior del *aula*. La estrategia fue, primero, realizar una investigación documental de la *propuesta institucional*, que resultó en elementos para el análisis de la orientación de la docencia hacia estocásticos; y, segundo, realizar una *interacción indagatoria* en *estudio dirigido* y en el *aula*, al desarrollar la docencia los contenidos programáticos de este eje.

Criterios de análisis

La perspectiva teórica permitió examinar la *propuesta institucional* y la información recopilada en sesiones de *aula* y de *estudio dirigido* a docentes, bajo cinco criterios de análisis, a saber: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975); la distinción de éstas de otros conceptos matemáticos, tales como el de número y el producto cartesiano; recursos semióticos gráficos para organizar y tratar los datos, como símbolos matemáticos, figuras, diagramas y gráficas, lengua natural escrita (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991); términos empleados en referencia a estocásticos (Steinbring, 1991); y estrategia de presentación (en la propuesta institucional) o de *enseñanza* (estudio dirigido y aula) (Heitele, 1975).

Instrumentos utilizados

Debido al carácter cualitativo del estudio (Eisner, 1998), se acometió la tarea del acopio de datos mediante guiones de observación, que se completaron de escenario a escenario.

Instrumentos. La información recopilada en cada uno de los escenarios fue producto de guiones específicos, de acuerdo a lo indicado por los elementos teóricos en la sección *2*:

- Guión, según los criterios de análisis (ver 3.2), para el examinar la *propuesta institucional*
- Guión para el planteamiento y desarrollo del *estudio dirigido* a docentes, regido por los resultados del análisis de la *propuesta institucional*.
- Guión para la indagación en el *aula*, dictado por los resultados de sesiones de *estudio dirigido* y del análisis del eje *La predicción y el azar* en los programas de estudio y en las lecciones correspondientes de los libros de texto.

Técnicas. La investigación documental resultó en la constitución de matrices según las categorías de análisis En todas las sesiones de *interacción indagatoria en el aula* y de *estudio dirigido*, se recurrió a la video grabación para el registro de datos, ya que esta técnica permite sus revisiones recurrentes según los criterios indicados en el parágrafo *3.2.*; y la transcripción de pasajes específicos videograbados proporcionó anclajes para el análisis de la información vertida en diálogos y sus referentes.

Resultados: La probabilidad y el azar en el segundo ciclo primario

La *enseñanza* de la probabilidad y el azar se orienta hacia el cálculo formal de probabilidad, ante la inadvertencia de que la constitución de estas nociones no puede ser dada *a priori* (Steinbring 1991a), que se requieren numerosas experiencias empíricas para que el niño pueda comparar y diferenciar los resultados de ellas. En la medida en que se estructuran estas diferencias y se asimilan, se conforma un sistema operatorio que permite comprender el azar. La diferenciación entre lo determinista y lo aleatorio, como la comprensión de las expresiones adverbiales *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, no se constituye únicamente con la identificación de la fracción correspondiente a la probabilidad o de su cálculo decimal, sino que se requiere del desarrollo de *ideas fundamentales* que orienten al pensamiento hacia la identificación de las relaciones entre los casos favorables y el total de casos posibles, así como las de proporcionalidad para dar sentido a cada una de esas expresiones adverbiales (términos empleados).

Propuesta institucional

La propuesta institucional propone para este ciclo seis contenidos a desarrollar por medio de nueve lecciones, planteadas en los libros de texto. En estas lecciones se valora escasamente la acción empírica con material concreto; el foco es la interpretación del texto con apoyo de figuras para responder preguntas sobre creencias (u opiniones) y no sobre el establecimiento de relaciones lógicas para diferenciar lo *posible* de lo imprevisto.

El caso de tercer grado. Se proponen dos contenidos a desarrollar con cuatro lecciones, cuyo propósito es diferenciar entre situaciones deterministas y situaciones aleatorias, mediante la presentación de juegos de estrategia y juegos de azar, que resultaron insuficientes en contenido, estructura, secuencia y número, dado que las *ideas fundamentales* implicadas en los juegos de azar, como *espacio muestra,* no se explicitan.

La importancia otorgada a *otros conceptos matemáticos* desvía e la atención hacia el *número*, no para identificar la cardinalidad del espacio muestra y las relaciones entre los casos favorables y el total de *posibles*, sino como el objeto de *enseñanza* con el cual se satisface la necesidad de saber “cuántos” casos favorables, sin advertir los otros *posibles*, como los casos desfavorables y el total de casos posibles.

Los *recursos para organizar y tratar la información* dispuestos en las lecciones del libro de texto son: lengua natural escrita, numerales, tablas, tableros de juegos, gráficas, figuras para ilustrar las situaciones propuestas, en algunas lecciones se propone el plano cartesiano.

Los *términos empleados* para cada situación propuesta desvían de las *ideas fundamentales* para establecer diferencias entre cada tipo de juego. Tal es el caso con “adivina” para referirse a la situación determinista y “suerte” para referirse a la situación aleatoria.

El caso del cuarto grado. Cuatro contenidos curriculares se plantean en cinco lecciones para lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, con situaciones inequiprobables y equiprobables, mediante la identificación de los casos favorables, pero sin relacionarlos con el total de casos posibles ni con los casos desfavorables.

Las *ideas fundamentales* implícitas en estas lecciones son: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, variable estocástica y muestra. Esta última se incluye en cuanto se plantea el enfoque frecuencial de la probabilidad, en tres de las cinco lecciones de este grado escolar.

En cuanto a *otros contenidos matemáticos* que se convocan para el estudio del azar están los números naturales en situaciones de conteo y su orden. El uso de los números fraccionarios no se plantea para expresar composiciones de urna o los casos favorables en relación a los casos posibles en el lanzamiento de una moneda o de un dado en situación inequiprobable. Los *recursos para organizar y tratar la información* sugieren algunas maneras de organizar los datos en tablas y gráficas. Se utiliza la lengua natural escrita.

Los *términos* relevantes empleados en estas lecciones son: “adivina”, “suerte” y “crees” para demandar la anticipación de un posible resultado. Estos términos desvían de la descripción específica del *objeto*. La *estrategia de presentación* de contenidos está determinada por los recursos utilizados para organizar y tratar la información y éstos revelan el propósito de cada lección, el cual no considera la identificación del espacio muestra para advertir los casos favorables y el total de casos posibles. Las situaciones de estudio proponen como dispositivos de aleatoriedades lanzamientos de monedas, dados, extracciones de canicas de urnas, para casos equiprobables e inequiprobables y favorecen la observación concreta de ensayos sucesivos y de su comportamiento, para dar sentido a las expresiones adverbiales *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*.

Estudio dirigido a la docencia para el segundo ciclo de primaria

Se constató una indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* (Piaget & Inhelder, 1951), dado que no se distinguió entre la “preferencia” por algún posible resultado y su probabilidad de ocurrencia, resultante de un análisis e identificación de los posibles resultados de una situación aleatoria específica. Fueron recurrentes efectos de recencia (Fischbein, 1975) y argumentos referidos a “suerte”, “magia”, “adivinanza”, “lo que no se sabe”, “lo incierto”, “inseguro”, que expresan la indiferenciación entre necesidad deductiva y posibilidad (Piaget & Inhelder, 1951). Esta indiferenciación orientó hacia una propensión al uso del número para cálculos, pero sin advertir la necesidad de describir ni enlistar el espacio muestra correspondiente; por ejemplo, para el lanzamiento de dos dados ordinarios se presentaron reiteradamente juicios de probabilidad basados únicamente en uniones aditivas, con la advertencia de doce posibles resultados y no de treinta y seis.

El aula de estocásticos de segundo ciclo de primaria

La *enseñanza* en el aula, si bien de compromiso, se circunscribió a la escasa formación docente en este campo del conocimiento. Al igual que ocurrió en *estudio dirigido*, el proceso que la rigió reveló ideas intuitivas equivocadas, como recencias (Fischbein, 1975) y la indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* para advertir lo imprevisible (Piaget & Inhelder, 1951).

El aula regular del segundo ciclo de primaria. No hay diferenciación de los términos utilizados en las lecciones, incluso se les adoptó para referirse igualmente a las situaciones deterministas y a las aleatorias. Esto atañe a las relaciones entre el *signo*, el *objeto* y el *concepto* para constituir el conocimiento estocástico (Steinbring, 1991), las cuales resultan desvirtuadas.

De las situaciones de inequiprobabilidad y equiprobabilidad para introducir lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, no se describió el espacio muestral ni se advirtieron las relaciones entre los casos favorables y el total de casos posibles ni los valores de la variable estocástica en juego.

En cuanto a *otros contenidos matemáticos* implicados en la situación para tratar el azar, se distinguió el uso de los números naturales para conteo. Se usaron los números fraccionarios para obtener las fracciones resultantes de cada composición de urna y propiciar el reconocimiento de los casos de equiprobabilidad entre eventos. Las situaciones referidas al enfoque frecuencial de la probabilidad no se relacionaron con la idea de *equidistribución y simetría* ni con la idea de *muestra*. La única estrategia utilizada para la *enseñanza* fue lo dispuesto en cada lección del libro de texto, siguiendo al pie de la letra la secuencia, los términos utilizados para referirse al azar y a la probabilidad, y las experiencias empíricas propuestas ahí. Los patrones de explicación utilizados en la acción educativa sobre estocásticos carecen de elementos probabilísticos que orienten hacia la advertencia de *ideas fundamentales*. La falta de elementos para su identificación en el libro de texto determinó la interacción al interior del *aula* y develó el privilegio al número para *determinar.*

El aula de educación especial. La *enseñanza* en este espacio, precedida por sesiones de *estudio dirigido*, implementó estrategias que permitieron al alumno con déficit de audición advertir, incipiente pero progresivamente, la advertencia de la relación entre las diferentes proporciones de elementos de los conjuntos en juego para distinguir la mayor o menor probabilidad de uno u otro evento. Sin embargo, no se obtuvo evidencia de que se relacionaran las proporciones de cada conjunto con las frecuencias relativas respectivas, obtenidas en cada ejercicio. Se observó que la formación docente determina las maneras en que el profesor acepta y se acerca a situaciones de actualización. Las necesidades surgidas de la atención a niños con déficit de audición dieron apertura a la indagación sobre su enfrentamiento al conocimiento, en particular al de estocásticos.

Conclusiones: Determinismo y azar

Los aspectos de diferenciación entre situaciones deterministas y aleatorias, de lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable* con situaciones inequiprobables y equiprobables, según el eje temático *La predicción y el azar* (SEP, 1993), se tratan de manera insuficiente dadas las experiencias propuestas para avizorar la relación entre casos favorables y el total de casos posibles, con base en el enfoque frecuencial de la probabilidad como preludio a la ley de los grandes números, prevista para el tercer ciclo. La *enseñanza* en el *aula* reveló inadvertencia de *ideas fundamentales* de probabilidad en el planteamiento de las lecciones del libro de texto. En sesiones de *estudio dirigido* a la docencia, ésta manifestó indiferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible (Piaget, 1951) y la consideración del *número* como único objetivo del eje, infiltrada en su práctica en el aula como énfasis en el determinismo. La diferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* (Piaget, 1982) y lo *real*, requiere de una formación docente basada en el desarrollo de *ideas fundamentales* de estocásticos para el estudio del *azar* en situaciones de *enseñanza*.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. y Castrejón, J. (1997). *Matemáticas. Tercer grado.* México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. y Castrejón, J. (2000). *Matemáticas. Tercer grado.* México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H. y Bollas, P. (1994). *Matemáticas. Cuarto grado.* México. SEP.

Ávila, A., Balbuena, H. y Bollas, P. (1997). *Matemáticas. Cuarto grado.* México. SEP.

Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: Determinismo y azar*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, IPN.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado.* Barcelona: Paidós

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6*, 187-205.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La Genèse de l´Idée de Hasard Chez l'Enfant*. Paris: PUF.

Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire*, *2*. Paris: PUF.

SEP. (1993). *Materiales Educativos y Medios. Plan y Programas de Estudio, Educación Básica, Primaria.* México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching : Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics 22*, 503-522.

EL CONOCIMIENTO DE INGENIERÍA COMO CONOCIMIENTO ESCOLAR

Fernando Cajas
Universidad de San Carlos de Guatemala Guatemala
fcajas@usac.edu.gt
Campo de investigación: Socioepistemologia Nivel: Superior

Resumen. *El artículo considera a la ingeniería como una práctica tecnológica cuyos productos son artefactos y conocimientos tecnológicos. Se introducen dos prácticas de referencia clave para la ingeniería: el diseño y la ejecución. Estas dos prácticas tecnológicas están ausentes en muchos programas de formación de ingenieros, los cuales a pesar de haber evolucionado de una concepción de ingeniería como artefacto hacia ingeniería como conocimiento, particularmente como ciencia aplicada, aún no se enfocan en prácticas sociales de las ingenierías. El artículo propone caminos para introducir prácticas sociales de referencia al currículo de ingeniería.*

Palabras clave: ciencia y tecnología, práctica social teórico-conceptual, práctica social empírico-concreta, diseño, ejecución

Introducción

El conocimiento de ingeniería como conocimiento escolar ha sido poco estudiado debido a que se asume que los conocimientos de los profesionales de la ingeniería se trasladan directamente a los centros de enseñanza de la ingeniería. No se discute la naturaleza de este conocimiento como conocimiento escolar (Cajas, 2001), menos la naturaleza social de las prácticas de ingeniería (Cajas, 2006) y cómo estas se trasladan a los sistemas escolares de la enseñanza de la ingeniería (facultades de ingeniería, institutos politécnicos, etc.). El articulo da evidencia del porque el entendimiento de las prácticas de ingeniería como prácticas sociales es de primordial importancia para el diseño de nuevos programas de educación en ingeniería.

Tradicionalmente los programas de ingeniería están basados en una concepción epistemológica que asume a las ciencias básicas (física, matemática, por ejemplo) como los fundamentos de la ingeniería y que sigue la siguiente cadena curricular (Bolton, 1990):

Ciencias Básicas → Ciencias de la Ingeniería → Cursos Profesionales

Esta cadena no reconoce la naturaleza de las prácticas sociales de la ingeniería (Herrera, 1990) y proviene de una relación ciencia-tecnología sobre simplificada. Por ello el artículo inicia clarificando la relación ciencia-tecnología.

Ciencia y Tecnología

Existe una forma común de hablar sobre ciencia y tecnología en la que a la ciencia se le mira como una actividad académica, casi siempre pura, y a la tecnología como a la aplicación de la ciencia, casi siempre impura. Durante las últimas dos décadas un grupo pequeño de investigadores hemos estudiado la percepción social de la ciencia y la tecnología, tanto en muestras de poblaciones de adultos (ciudadanos) como en comunidades escolares (estudiantes) y en ambos casos las investigaciones convergen en que las personas tienen una percepción positiva de la ciencia, asociándola con la investigación médica, por ejemplo, mientras que tienen una percepción negativa de la tecnología, identificándola con la contaminación o con el armamento (AAAS, 1993; Schauble, Klopfer,y Raghavan, 1991).

Por otro lado, filósofos y antropólogos de la tecnología han avanzado una serie de discusiones al respecto de la relación entre ciencia y tecnología. Sin repetir esta discusión, que ha sido ampliamente reportada en diferentes libros, revista, foros (véase resúmenes en Cajas, 1998, 200; AAAS 1993) se puede establecer una serie de concepciones, encapsuladas en "modelos", que van desde la visión de subordinación de la tecnología a la ciencia hasta una concepción más sistémica y compleja que también defiende la especificidad de la tecnología (Tabla 1). En términos generales se pueden establecer diferentes relaciones entre Ciencia y Tecnología. Ya la primera es el *Modelo de Subordinación* en el cual la Ciencia es la base de la Tecnología. La subordinación es de naturaleza epistemológica, metodológica y práctica. Aquí se establece una diferencia también en el estatus social de la ciencia y de la tecnología, dándole mayor estatus a la ciencia. Este fue el paradigma reinante a mediados del siglo pasado. De hecho los grandes avances de la ingeniería nuclear (bomba atómica por ejemplo) fueron vendidos como los logros de la física de partículas y no de la ingeniería, como en efecto fueron. Luego en los años sesenta y setenta del siglo pasado la carrera espacial se vendió al público como un logro de la ciencia, la física, mientras que los desastres espaciales (piense en el trasbordador espacial Challenger), fueron presentados como desastres tecnológicos o desastres de la ingeniería, nunca fueron los desastres de la ciencia. La ciencia entonces se le vende al público con un estatus mayor que la tecnología.

La ciencia es la causa de la tecnología es el segundo modelo, llamado el *Modelo Causa-Efecto* (ver Tabla 1). El viejo modelo lineal de innovación justifica esta relación lineal de causalidad (Godin, 2006). Este modelo describe que la producción tecnológica es el resultado de un proceso lineal que se describe a continuación:

Investigación Básica ➔ Investigación Aplicada ➔ Desarrollo ➔Producción y Difusión

Este modelo, cuya raíces históricas permanecen en la oscuridad, empezó de una simple relación entre investigación básica e investigación aplicada, entendiéndose esta última como tecnología. Luego diferentes autores han enriquecido la cadena lineal presentando la anterior en sus versiones más actualizadas (Godin, 2006). Una primera revisión que para algunos mejora del modelo de subordinación y el modelo de causalidad, es la relación de causalidad directa, la ciencia © produce la tecnología (T), esto es C→ T.

También emergen concepciones más sistémicas de la relación entre ciencia y tecnología. En particular emerge la concepción que la ciencia afecta a la tecnología, por medio de proveer conocimiento y que la tecnología afecta a la ciencia por medio de proveer instrumentación (AAAS, 1997). Esta versión presentada por la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, AAAS por sus siglas en ingles, describe una concepción más compleja de la brelación ciencia-tecnología, particularmente las tecnologías modernas. Este *Modelo de Interacción* dio paso a otro modelo relación ciencia-tecnología, uno que no sólo reconoce la interacción sino que también la especificidad de la tecnología. En la Tabla 1 a ese modelo se le llama el de la *Especificad de la Tecnología*. Varios autores han presentado argumentos a favor de este modelo, tal el caso de Herrera (1989, 1990), Cajas (1998, 2001, 2006). Se trata entonces de clarificar lo específico de la tecnología, en particular de la ingeniería. El mismo documento de la AAAS ya avanza hacia esa especificidad de aspectos particulares de las ingenierías que no son del dominio científico, tal el caso del diseño en ingeniería.

La Tabla 1 resume posibles relaciones entre ciencia y tecnología que van desde el modelo de subordinación hasta el modelo de especificidad.

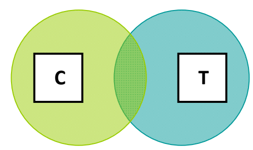
Modelo:	Relación	Descripción:
Subordinación	C | T	La Ciencia es la base de la tecnología
Causa-efecto	C ---> T	La Ciencia es la causa de la la Tecnología
Dos vías	C <---> T	La Ciencia interacciona con la Tecnología.
Especificidad de la Tecnología		Hay especificidad de la tecnología. Existe conocimiento tecnológico asociado prácticas tecnológicas que no necesariamente son de naturaleza científica, aunque existe cierta intercesión entre Ciencia y Tecnología.

Tabla 1 Posibles relaciones entre Ciencia y Tecnología

Estudios sobre alfabetización científica y tecnológica también demuestran que la población confunde la ciencia con la tecnología y en todo caso visualizan a la tecnología como ciencia aplicada. Esto también se da en ambientes universitarios, en especial en programas de educación tecnológica, tal el caso de medicina, agronomía, derecho o las mismas ingenierías que son tratados como ciencia aplicada. Así, la medicina es vista como aplicación de las ciencias básicas tales como biología, anatomía, fisiología, etc. Agronomía también es vista como aplicación de ciencias biológicas a la producción agrícola. El derecho es visto como la aplicación de la sociología, entre otras. Y las ingenierías (civil, industrial, química, etc.) son vistas como la aplicación de la física y la matemática.

Ingeniería

La ingeniería puede verse como artefacto, como conocimiento o como práctica social (Herrera, 1990; Cajas 1998). En general en el mundo, con raras excepciones, los programas de educación en ingeniería están construidos desde la concepción de la ingeniería como conocimiento y vistos como ciencia aplicada (Powell y Wim, 2003). Esto ha llevado a generar programas lineales que inician con Ciencias Básicas, particularmente Física y Matemática, seguidos luego de Ciencias de las Ingeniería para concluir con Materias Profesionales.

Históricamente la evolución de la ingeniería ha venido asociada a la misma evolución de la tecnología. En efecto, la ingeniería puede verse como una práctica tecnológica cuya praxis educativa se ve determinada por condiciones locales y por los avances no sólo de la misma ingeniería sino de la meta-ingeniería, esto es, de lo que en el momento se conoce sobre la naturaleza de la ingeniería. Debido a que la ingeniería como actividad profesional atrae principalmente a las personas orientadas a la acción, existe poca documentación sobre procesos de reflexión de la ingeniería y por lo tanto de la misma educación en ingeniería. En otras palabras, luego de que un proyecto de ingeniería se ha conceptualizado y principalmente ejecutado, los ingenieros son renuentes a analizar la forma en la que llegaron a dichos productos. Son pocos los estudios sistemáticos sobre esta reflexión en la práctica de la ingeniería. Ejemplos de dichos estudios son los trabajos pioneros de Donald Shön quien analiza empírica y conceptualmente la forma en que los profesionales, ingenieros y arquitectos, entre otros, reflexionan desde la acción (Shön, 1983).

El trabajo del Profesor Shön fue tan influyente que se generó una línea de investigación de análisis de la práctica desde la acción. Existen también los estudios de Walter Vicenti sobre lo que saben los ingenieros sobre diseño para casos específicos de aeronáutica (Vicenti, 1994). Emergen también los nuevos estudios de antropología de la ingeniería realizados por Louis Buciarelli sobre lo que realmente hacen los y las ingenieras en diferentes espacios de trabajo tal el caso de diseño de celdas fotovoltaicas y estructuras (Buciarelli, 1994). Todos estos trabajos presentan la base para proponer una nueva epistemología de la ingeniería que no se centra en la epistemología de la ciencia sino una epistemología que se centre en las prácticas.

Al considerar a la ingeniería como una práctica tecnológica cuyos productos y bases son artefactos y conocimientos tecnológicos, la reflexión sobre la naturaleza de la práctica es de primera importancia. Aquí introducimos dos prácticas de referencia clave para la ingeniería. La noción de práctica de referencia significa en este artículo el referente de la práctica social y no se identifica con el origen histórico de la misma. En ese sentido identificamos referentes de la ingeniería. Tome el caso de la ingeniería civil cuyos referentes son las obras civiles tales como carreteras, vías férreas, puentes, estructuras de edificios y proyectos habitacionales. Pero estos referentes son el producto de la práctica mientras que la practica social de referencia seria la planeación, el diseño, la administración, operación, reparación etc.

Estas prácticas han sido identificadas por otros autores, entre ellos Herrera 1989, 1990, 1992, 2006. En principio hay que diferenciar entre la práctica tecnológica empírica de acción sobre la naturaleza y los sistemas tecnológicos y sociales y la práctica tecnológica del diseño, siendo esta última el proceso de diseño que produce sistemas, normas o conceptos fijados en forma de información tales como planos, software y otros que representan posibles sistemas concretos (Herrera, 1992).

La práctica tecnológica empírica de acción sobre la naturaleza y los sistemas tecnológicos y sociales y la práctica tecnológica del diseño son parte de dos prácticas genéricas que se dan en todo trabajo. Hay que aclarar que las prácticas sociales son acciones intencionales de los seres humanos organizados en sociedades, es decir son actividades orientadas a la transformación de objetos, procesos o conocimiento (Herrera, 1989). La intencionalidad de la práctica no es determinista ya que existen efectos colaterales y no planificados de toda práctica social (contingencia). En otras palabras, la intencionalidad no determina la historia sino al final las prácticas sociales son contingentes. El marco conceptual en donde se define a la Práctica Social como acción intencional es el del filósofo Rodolfo Herrera quien toma esta concepción de práctica social de un marco materialista, particularmente neo marxista en el cual Althusser define una práctica social como el proceso de transformación de una materia prima dada determinada en producto terminado, transformación efectuada por un trabajo humano determinado, utilizando medios (de producción). De acuerdo a Althusser, la práctica social, la unidad compleja de las prácticas existentes en una sociedad determinada, contiene en si mismo un número elevado de prácticas distintas. En este trabajo yo agrego la noción de contingencia, de efectos colaterales no pensados y de cierto grado de incertidumbre en las acciones humanas intencionales.

El marco teórico althusseriano introduce la noción de práctica social empírico-concreta y la diferencia de la práctica social teórico-conceptual que yo he identificado con la práctica del diseño. El caso es genérico. Si se estudia, por ejemplo, la práctica económica de una sociedad, esta incluye una componente empírico concreta que consiste en el trabajo directo de las personas entre si y con el ambiente social pero al mismo tiempo en la misma práctica se dan procesos de racionalización, conceptualización y diseño inherentes a cualquier transformación. Dicho recientemente por Arrieta "La práctica siempre implica a la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, la llamada actividad manual no es irreflexiva y la actividad mental no es incorpórea" (2003).

En el caso de la educación en ingeniería estas dos prácticas tecnológicas de diseño y ejecución están ausentes en muchos programas de formación en ingeniería, los cuales a pesar de haber evolucionado de una concepción simplista de ingeniería como artefacto hacia una concepción de ingeniería como conocimiento, particularmente como ciencia aplicada, aún no se han enfocado en las prácticas de la ingeniería y han olvidado el diseño de ingeniería. Esta situación es el resultado de la imposición de una epistemología científica (teoría de conocimiento basada en la ciencia) sobre una epistemología de las prácticas. Se requiere replantear los curricula de ingeniería y superar el modelo lineal que asume a la ingeniería como la simple aplicación de la ciencia, porque en la práctica real la ingeniería es mucho más que la aplicación de la ciencia y posee su propia lógica y epistemología. Si bien las ingenierías echan mano de las ciencias y si bien cada vez más se ven influidas por la ciencia, las ingenierías son fundamentalmente prácticas sociales del diseño, control y ejecución.

Referencias bibliográficas

AAAS (1993). *Benchmarks for Science Literacy*. Nueva York: Oxford University Press.

AAAS (1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla S.A.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Bolton, W. (1990). *Engineering science*. Nueva York: Industrial Press Inc.

Bucciarelli, L. (1994). *Designing engineers*. Boston: MIT Press.

Cajas, F. (1998). Introducing technology in science education: The case of Guatemala. *Bulletin of Science, Technology & Society, 18(3)*, 198-207.

Cajas, F. (2001). Alfabetización Científica y Tecnológica: La Transposición Didáctica Del Conocimiento Tecnológico. *Enseñanza de la Ciencia*, *19(2)*, 243-254

Cajas, F. (2006). *Construyendo Ingenierías Relevantes. Ponencia presentada en el Congreso Venezolano de Educación de Ingeniería*. Maracaibo: Universidad del Zulia.

Dym, C. y Little, P. (2000). *El proceso de diseño en ingeniería*. México: Limusa Wiley.

Godin, B. (2006). The linear model of innovation: The historical construction of an analytical framework. *Science, Technology & Human Values 31(6)*, 639-667.

Herrera, R. (1989). La practica tecnológica. *Revista de Filosofía 66*, 349-359.

Herrera, R. (1990). Critica al modelo ortodoxo de la enseñanza de la ingeniería e ideas para su modificación. *Tecnología en Marcha 10(1)*, 3-16.

Herrera, R. (1992). Los sistemas tecnológicos concretos. *Ingeniería 2(2)*, 41-56.

Powell, P. & Wim, P. (2003). *Project-led engineering education*. Holanda: Lemma.

Schauble, L., Klopfer, L.E., & Raghavan, K. (1991). Students' transition from an engineering model to a science model of experimentation. *Journal of Research in Science Teaching 28*, 859-882.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professional think in action.* Londres: Arena.

Vicenti, W. (1990). *What engineers know and how they know it*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SERIE INFINITA EN ALUMNOS DE BACHILLERATO QUE NO HAN CURSADO CÁLCULO

Alejandro Miguel Rosas Mendoza, Norma Gutiérrez Rodríguez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN México
alerosas@ipn.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo nos interesa el saber si el alumno es capaz de construir el concepto de convergencia de una serie infinita, sin usar cálculo diferencial e integral. Para lo cual se diseñó una actividad didáctica que nos permitiera determinar la forma en que los estudiantes trabajan con los elementos de una serie infinita, tanto gráfica como numéricamente. Durante la aplicación de la actividad los alumnos tuvieron total libertad para trabajar y argumentar sus acciones. Los resultados que surgen de los primeros análisis nos indican que las respuestas obtenidas son semejantes a las que proporcionan alumnos de nivel superior.*

Palabras clave: serie infinita, convergencia, expansión de funciones en serie

Introducción

Como resultado de investigaciones previas realizadas por (Pérez, 1991), (Moreno, 1999) y Rosas (2007) surgió la pregunta ¿por qué el cálculo es un precedente para entender las series infinitas? Una vez formulada esta pregunta era natural que surgiera otra ¿el concepto de serie se puede abordar con alumnos que no hayan cursado Cálculo Diferencia e Integral?

Al observar los avances matemáticos alcanzados por civilizaciones no europeas y que lograron obtener expansiones de funciones en forma de serie basándose en la geometría, la aritmética y el álgebra (Rosas, 2007), surgió la hipótesis de que es posible comprender algunos conceptos relacionados con las sucesiones y series infinitas.

Para evitar que alumnos con conocimientos de cálculo pudieran influenciar los posibles resultados que obtuviéramos se decidió trabajar con alumnos de nivel medio superior que no han cursado las materias de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Tan sólo fue necesario enseñarles a usar el programa graficador GRAPHMATICA con la intención de que pudieran realizar todas las gráficas de forma rápida y fácil de modo que se concentraran en la interpretación de dichas gráficas.

Analizando la tesis de Pérez (1991), se tomo la idea del tema de cómo se aborda la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato, se tomaron algunas consideraciones de ésta a mencionar. Se cambio la secuencia didáctica, pero la finalidad es la misma se tomo el ámbito gráfico y numérico; a modo de que los alumnos sin ninguna intervención del profesor pueden hacer comparaciones entre la función exponencial y los polinomios de grado finito que proporciona la expansión en serie de Taylor de la función exponencial y por medio de cálculos numéricos puedan experimentar la convergencia respectivamente.

De la tesis de Moreno (1999), se tomará en cuenta el marco teórico que desarrolló en su tesis y su conclusión; construcción de una ingeniería didáctica donde solicita a los estudiantes encontrar más términos de la serie y graficar sumas parciales de esta serie.

La diferencia de las tesis antes mencionadas con este nuestro proyecto, es que las anteriores, se analizan con alumnos que son de nivel medio superior que ya cursaron Cálculo Diferencial e Integral y con estudiantes de nivel superior que ya tienen conocimiento de cálculo.

Marco Teórico

Como marco teórico escogimos la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau:

> *Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción*.... (Brousseau, 1983, pp. 169-171).

De acuerdo a lo anterior, el trabajo del profesor no debe reducirse a presentarle al alumno los conceptos, significados y nociones a aprender, su tarea es darle la oportunidad de construirlo a partir de un conjunto de problemas donde dicho significado funcione. La Teoría de las Situaciones Didáctica es un marco dentro del cual las relaciones y procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran representadas, por lo que es un instrumento de gran valor para la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores –quienes también deben conocer esta teoría para aplicar y desarrollar sus propias situaciones didácticas en ambientes favorables al alumno.

Dichas situaciones deben lograr que el alumno proporcione un significado que le sea útil y significativo de modo que pueda aplicarlo en la resolución de problemas diferentes. El alumno debe tener la posibilidad de hacer pruebas, de generar modelos y de formular respuestas y teorías.

Citando a Brousseau:

> *el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas que son la prueba de aprendizaje (Brousseau, 1983, p. 48).*

De los diferentes tipos de situaciones didácticas nuestro trabajo se centra en aquellas situaciones que están centradas sobre la acción, pues nuestros alumnos intentarán resolver problemas que nunca antes han enfrentado; recordemos que las series infinitas no se estudian hasta la universidad.

La actividad que se planteó a ser aplicada en nuestro estudio consta de dos etapas, la primera es una etapa gráfica que fue tomada de Pérez (1991) y la segunda etapa es numérica y fue tomada de Rosas (2007), ambas fueron desarrolladas originalmente bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica.

La Actividad Didáctica

A continuación presentamos la actividad en su etapa gráfica:

A continuación aparecen unas funciones que deberás graficar por parejas de la siguiente manera:

Grafica $y = e^x$ *con la función 1.*

Grafica $y = e^x$ *con la función 2.*

De la misma manera con todas las funciones hasta la 6.

$$y_1 = 1 + \frac{x}{1}$$

$$y_2 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$

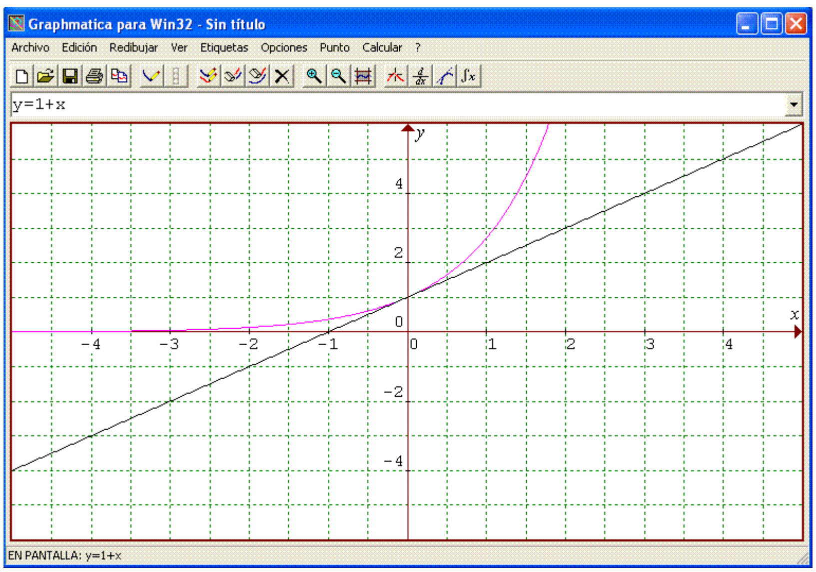
$$y_3 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$y_4 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$y_5 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$y_6 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Por ejemplo, en la primera gráfica vas a comparar la gráfica de e^x con la función y=x+1 como se ve a continuación:



Aprovecha para observar las gráficas y su comportamiento.

Sigue observando lo que sucede con las gráficas de las funciones.

Continúa graficando las funciones de esta misma forma en parejas.

Responde:

¿Se parecen las gráficas de e^x y $y_2 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_3 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_4 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Se parecen las gráficas de e^x *y* $y_6 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ *o son diferentes? ¿Qué tanto?*

¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?

Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?

Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?

Si se te pide el último término de la función 20, ¿Cómo lo escribes?

Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿Cómo la escribes?

Dibuja las gráficas de e^x *y la función 10, ¿cómo son las gráficas? ¿Se parecen?¿Qué tanto?*

Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿Qué nombre le inventarías?

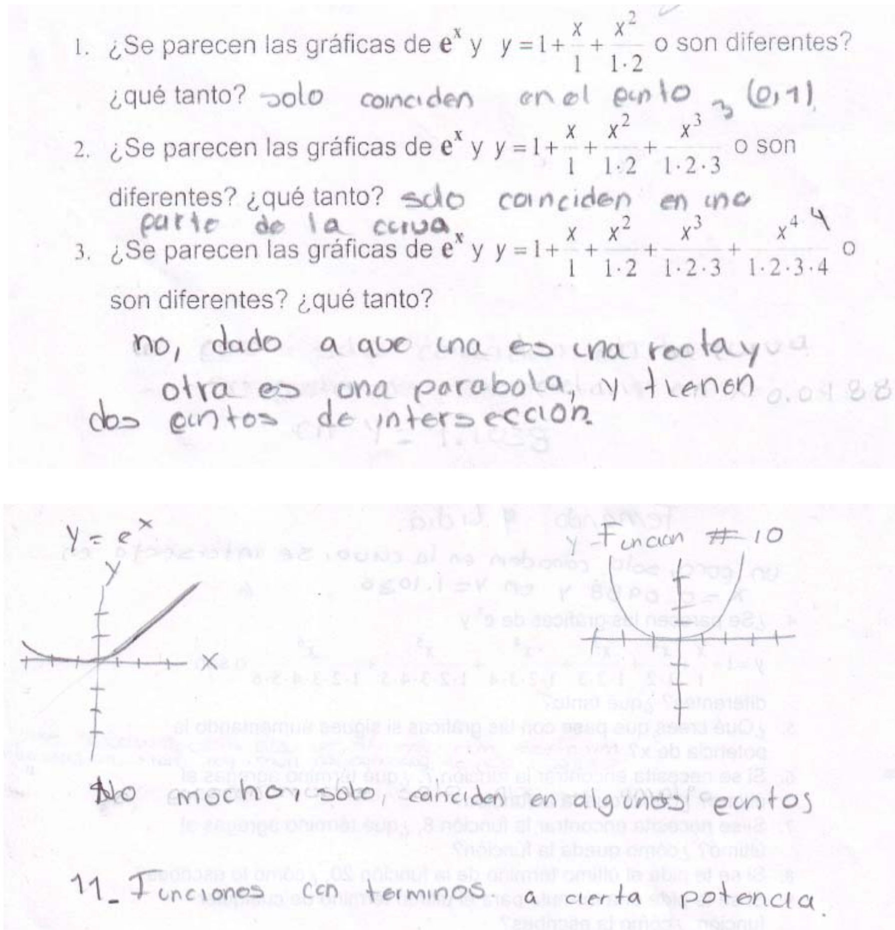
La actividad no será presentada en su etapa numérica por falta de espacio.

Resultados y análisis

Después de aplicar nuestra actividad a tres equipos de alumnos se obtuvieron respuestas que tienen semejanza con las respuestas obtenidas en las investigaciones que antes hemos citado. Durante la aplicación de la actividad no se interfirió con el trabajo de los estudiantes, se permitió que conjeturaran libremente. Tampoco se les guió a que vieran el número de curvas de cada gráfica o a que si se "acercaban" las gráficas.

Si bien el lenguaje no es el utilizado en los cursos de cálculo, los términos empleados por los estudiantes de nivel medio pueden ser considerados como sinónimos de los empleados por estudiantes de nivel superior que ya cursaron cálculo.

Veamos a continuación algunas imágenes de las respuestas que obtuvimos


1. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en el punto (0,1)
2. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en una parte de la curva.
3. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ o son diferentes? ¿qué tanto?

no, dado a que una es una recta y otra es una parabola, y tienen dos puntos de intersección

Imagen 1. Respuestas del Equipo 1.

Entre las respuestas obtenidas a la pregunta de *¿se parecen las gráficas?* tenemos:

- No, se parecen porque una es recta y otra es una parábola
- Sí, pero la primera está más abierta que la segunda
- No, son diferentes en forma pero pasan por los mismos puntos

Conclusiones

En este trabajo sólo hemos presentado una pequeña parte de las respuestas que obtuvimos de la aplicación de nuestra actividad, sin embargo podemos comentar que

1. Sin ser guiados los alumnos encuentran semejanzas entre las gráficas.
2. Aunque sólo dos equipos escribieron comentarios sobre las gráficas, los argumentos proporcionados por los estudiantes hacen alusión a las características de las gráficas que esperábamos que descubrieran.
3. En la etapa numérica los datos que obtuvieron los estudiantes les condujeron a pensar que los valores de la función exponencial y sus polinomios de Taylor se acercan.
4. En la pregunta correspondiente a la forma que tendría el término 20 de la serie, se obtuvieron respuestas correctas en el sentido heurístico; aunque expresadas en un lenguaje no formal.

Aunque es necesario continuar con la investigación hemos encontrado que el desenvolvimiento de los estudiantes que participaron en nuestra actividad y que no han cursado cálculo es semejante al reportado en los estudios anteriores, estudios en los que participaron alumnos que ya habían cursado al menos una vez cálculo.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2)*, 165-198.

Moreno, J. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV.

Pérez, V. (1991). *Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de Casos*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV.

Rosas, A. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. Tesis de doctorado no publicada, CICATA-IPN.

UN ESTUDIO DE LA VARIACIÓN UTILIZANDO FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE LA MEDIA ACADÉMICA

Tulio Rafael Amaya De armas; Javier Barrera Ángeles
Institución Educativa Madre Amalia. Universidad de Sucre Colombia
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
tuama1@hotmail.com, jbarrera12@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo tiene como objetivo principal observar y analizar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de los dos últimos años de bachillerato al intentar resolver situaciones problema que involucran situaciones funcionales de variación y cambio. Para ello se consideró el concepto de función como el objeto matemático que permite relacionar los conceptos matemáticos con otras áreas del currículo, planteados en situaciones de la vida real. Se consideraron dos grupos de trabajo, un grupo control y un grupo experimental; a ambos grupos se les aplicó un examen de reconocimiento, posteriormente, al grupo experimental se le aplicó una serie de talleres usando situaciones funcionales, enfatizando sobre su aplicabilidad en diferentes contextos y su relación con la vida real, finalmente se aplicó una prueba de contraste a ambos grupos de trabajo con el objeto de verificar los avances luego del trabajo en el aula.*
Palabras clave: pensamiento variacional, grupo control, grupo experimental, intervención en el aula

Introducción

En el presente trabajo se reportan algunos hallazgos encontrados en el marco de una investigación cuyo objetivo principal era observar y analizar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la media académica de la Institución Educativa Madre Amalia del municipio de Sincelejo Colombia, utilizando situaciones problema que involucran el concepto de función. Interesaba mirar las estrategias utilizadas por los estudiantes al encontrar el valor de una incógnita, identificar las cantidades que intervienen en la situación y describir las relaciones entre ellas, identificar los intervalos de variación para estas variables, los máximos y mínimos así como indagar por proceso matemáticos como la modelación de la situación, de argumentación al tratar de describir los procedimientos realizados al dar respuesta a una pregunta planteada, y hacer el transito entre sistemas de representación.

Para llevar acabo esta investigación fue necesario considerar dos grupos de trabajo, un grupo control y un grupo experimental; a ambos grupos se les aplicó un examen de reconocimiento, posteriormente, al grupo experimental se le aplicó una serie de talleres usando situaciones funcionales y enfatizando sobre su aplicabilidad en diferentes contextos y su relación con la vida real, después se aplicó una prueba de contraste a ambos grupos de trabajo con el objeto de verificar los avances luego del trabajo de intervención en el aula; posteriormente se realizó un análisis de los resultados teniendo en cuenta los antecedentes de investigación y los referentes teóricos considerado. Algunos de los resultados de esta investigación fueron: 1) los estudiantes mostraron dificultades para pasar del lenguaje ordinario al algebraico, 2) tuvieron problemas para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuáles cambian y cuáles permanecen fijas, entre otras, 3) luego del proceso de intervención, las estrategias de solución a las situaciones en el grupo experimental fueron múltiples e insospechadas por los autores en relación con las del grupo control.

Algunos acercamientos teóricos

El concepto de función es uno de los de mayor aplicabilidad en matemáticas, por cuanto permite relacionar esta área con otras del currículo y modelar situaciones de la vida real, además, "Poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional" (Dolores, 2004, p.197), básico también en la apropiación de otros conceptos fundamentales de cálculo como el de límite y derivada entre otros. Según el Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior, para el estudio del pensamiento numérico y variacional, "Uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones" ((Icfes) (2007, p. 29) por tal razón, en esta investigación se quiso, mediante algunas estrategias metodológicas y utilizando el concepto de función, favorecer el desarrollo de dicho pensamiento en estudiantes de la media académica; pues la interacción con situaciones funcionales y su aplicabilidad en diversos campos y aspectos de la vida, puede permitir al educando un avance en el desarrollo del pensamiento variacional, por cuanto tiene la posibilidad de asignarle significado y sentido a los contenidos trabajados en relación con dicho pensamiento.

En el ámbito de la Matemática Educativa se ha discutido ampliamente acerca de cómo el contexto escolar debe acercar al estudiante al quehacer del matemático. La educación matemática permite a través de una buena transposición didáctica que el estudiante se apropie de los conocimientos matemáticos, que le permitan generar formas de interpretación y de construcción de situaciones desde los avances de la matemática como disciplina. En este sentido el Icfes, considera que "la matemática escolar debe promover el desarrollo del pensamiento matemático, el cual posibilita al estudiante describir, organizar, interpretar y relacionarse con determinadas situaciones a través de la matemática; en otras palabras, un pensamiento que facilita matematizar la realidad" (Icfes (2003, p. 4). Lo que puede dar luces a los educadores matemáticos acerca de los enfoques para enseñar esta disciplina en la escuela en busca de resultados óptimos. Respecto a esta temática, Rico, establece algunos referentes a tener en cuenta en tales procesos de enseñanza y aprendizaje:

> *Los fines que nosotros consideramos prioritarios en la educación matemática son los siguientes: 1) desarrollar la capacidad del pensamiento del alumno, permitiéndole determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar su razonamiento y su capacidad de acción. 2) Promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia o belleza... 3) Lograr que cada alumno participe en la construcción de su conocimiento matemático... 4) Estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la discusión y defensa de las propias ideas. (Rico, 1995, c.p. Icfes, 2003, p. 4).*

En lo propuesto por Rico, se nota el protagonismo que debe tener el educando en el desarrollo de su proceso de aprendizaje, frente a las diferentes alternativas que este autor sugiere que se deben plantear para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es evidente que esto requiere un mayor y cuidadoso trabajo por parte del docente, al seleccionar las actividades que se presentan, las forma de presentarla con el fin de que los estudiantes participen lo mas que se pueda, poniendo todo de sí para mejorar su aprendizaje. Esperando que tales condiciones puedan generar mayor motivación en los estudiantes, que los comprometa con sus procesos de aprendizaje y puedan mostrar desinhibidamente sus estrategias de solución frente a las situaciones planteadas y en el transito por los diferentes planos de representación.

Godino, Batanero y Font plantean algunos elementos determinantes en el proceso de enseñanza de las matemáticas y de las condiciones que pueden favorecer su aprendizaje.

> *Para que el estudio de un cierto concepto sea significativo, debemos mostrar a los alumnos una muestra representativa de las prácticas que lo dotan de significado. Al planificar la enseñanza debemos partir del análisis del significado de dicho concepto (…) Es importante dar a los alumnos la oportunidad de plantearse y de tratar de resolver problemas interesantes donde formulen hipótesis y conjeturas, traten de usar diferentes sistemas de representación, traten de comunicar y validar las soluciones propuestas, confronten sus soluciones con las de otros compañeros, y finalmente, traten de confrontar su solución con la solución que se considera correcta en matemáticas (Godino, Batanero y Font (2005, p. 70)*

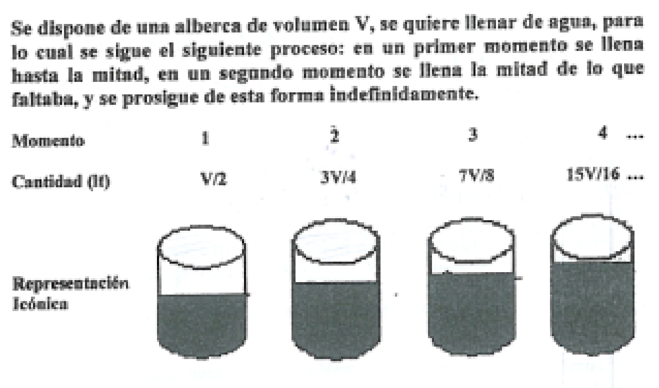
En lo planteado por estos autores se muestra la importancia del trabajo con problemas familiares para los estudiantes, como medio para asignar significado a los conceptos que se trabajen al permitirles resolver tales problemas y analizar sus soluciones, teniendo así la posibilidad de relacionar los conceptos con elementos de su mundo real utilizando diferentes sistemas de representación. Según Duval (1999), para que una representación pueda funcionar como tal, y se puedan reconocer dos representaciones del mismo objeto, se necesita disponer de por lo menos dos sistemas semióticos que representen al objeto que se quiere representar y que se pueda pasar espontáneamente de un sistema semiótico a otro sin siquiera notarlo. Donde además, no es posible aislar la noesis de la semiosis, es decir, no se puede separar el contenido representado de la correspondiente forma que lo representa. En el trabajo de Duval se resalta la importancia del transito entre sistemas semióticos de representación para poder entender un concepto, según este autor, "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (…) Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (Duval, p. 26). Se aprecia aquí, la utilidad de las representaciones semióticas como medio de representar algunas representaciones mentales, conceptos que sin llegar a ser totalmente congruentes, si guardan una estricta relación.

Metodología

Se buscó observar y analizar el desarrollo de pensamiento variacional en estudiantes de la media académica a través de la mediación, fomentando el aprendizaje cooperativo, la importancia del dialogo y la apertura a la discusión, donde cada uno pudiera expresar su punto de vista en relación con sus propuestas de solución y la de los demás. Se tomaron dos grupos, un grupo control (31 estudiantes) y uno experimental (29 estudiantes), lo cuales se escogieron por aplicación del método coordinado negativo. Se aplicó una prueba de reconocimiento a ambos grupos, con el propósito de verificar el desarrollo de pensamiento variacional al inicio del trabajo. Con el grupo experimental se comenzó un proceso de intervención aplicándoles unos talleres con situaciones funcionales, en contra jornada, enfatizando su aplicabilidad en diversos contextos, dándoles la posibilidad de asignarle significado y sentido a los contenidos trabajados al relacionarlos con elementos del medio sociocultural, esto con el propósito de vencer las dificultades evidenciadas en los estudiantes en la prueba de reconocimiento. Estos talleres fueron asistidos por los autores y un grupo de tres estudiantes del programa Licenciatura en matemática de la Universidad de Sucre, quienes utilizaron parte de esta investigación como trabajo de grado. Con los estudiantes del grupo control se siguieron desarrollando los temas ordinariamente, los mismos que también se desarrollan con los del grupo experimental, solo que a los del grupo control no se les realizaba el trabajo con los talleres en contra jornada. Luego se aplicó una prueba de contraste con el fin de verificar los avances luego del proceso de intervención en el aula. Ambas pruebas indagaban por los mismos tópico, de tal forma que fueran comparables y consistieron en un test con preguntas abiertas, con situaciones que involucran el concepto de función; se indagaba por concepto como intervalos de variación, máximos y mínimos, ecuación, identificación de cantidades que intervienen en las situaciones y descripción de las relaciones entre ellas y por algunos procesos matemáticos como argumentar acerca de un procedimiento realizado para obtener una respuesta, modelación matemática de las situaciones planteadas, la consecución de patrones de regularidad y por la capacidad de los estudiantes para transitar entre sistemas de representación de la misma situación. Finalmente se hace un análisis descriptivo cualitativo de los resultados de los test, y de cuerdo a la variedad, la calidad de las estrategias utilizadas por los estudiantes de cada grupo en sus intentos de solución a las situaciones planteadas y los porcentajes de acierto, permitían inferir a cuál de los dos grupos le había asentado mejor su respectivo proceso.

Resultados

En la prueba de reconocimiento las dificultades encontradas en ambos grupos fueron muy similares tanto cuantitativa como cualitativamente. Se encontraron dificultades para pasar del lenguaje ordinario al algebraico, para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuales cambian y cuales permanecen fijas, y para establecer una relación de dependencia entre dos variables, entre otras. Se les facilitaba trabajar con información presentada en una tabla o llenar éstas con información presentada en el lenguaje materno. A partir del análisis de esta prueba, se realizó el proceso de intervención en el aula a los estudiantes del grupo experimental, con talleres y los mismos temas que se desarrollaban en el aula por ambo grupos; en este proceso fueron apareciendo nuevas dificultades para las que se implementaron nuevas estrategias materializadas en los talleres. A continuación se muestra la situación que se planteó en la prueba de contraste y el análisis correspondiente a las soluciones dadas por los estudiantes:

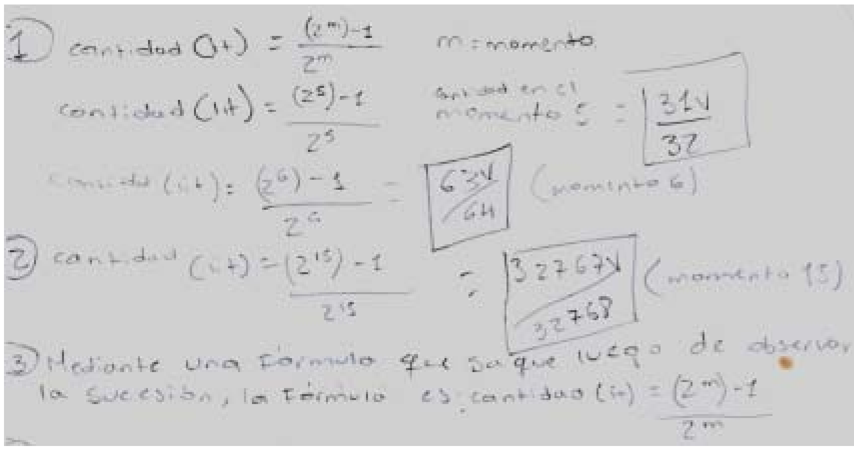


Tipos de estrategias de solución

Para observar y analizar las alternativas de solución dadas por los estudiantes a la situación, se les pidió encontrar el volumen del líquido al final del momento 6 y 16 respectivamente.

Las estrategias utilizadas y los aciertos en las respuestas fueron notorios, aunque mayor en los estudiantes del grupo experimental (86,21%) que en los del grupo control (45,16%). Aunque algunas fueron comunes a ambos grupos, hubo algunas diferencias marcadas: a) la cantidad de respuestas acertadas con estrategias comunes fueron mayor en el grupo experimental. La estrategia que en común utilizaron los estudiantes de los dos grupos fue la siguiente: "*sumar el numerador con el denominador da el numerador, y el denominador más el denominador da el denominador*".

b) los estudiantes del grupo experimental encontraron expresiones matemáticas, las que utilizaron para dar respuestas a otras preguntas que se les plantearon. A continuación se muestra el proceso seguido por un estudiante del grupo experimental, como respuesta a la cuestión planteada.



Otras estrategias que utilizaron los estudiantes del grupo experimental fueron consecución de un patrón, obtención de una fórmula matemática y llenado de tablas para obtener sus respuestas. Mientras los del grupo control, realizaron un proceso secuencial momento por momento hasta llegar a una respuesta, en la mayoría de los casos herrada; y aunque algunos siguieron el patrón numérico de la situación y lo expresaron en la estrategia común expresada anteriormente, no evidenciaron su uso para dar otras respuestas, para las que siguieron un proceso similar, incluso, realizando momentos que ya habían realizado anteriormente.

Descripción de los procesos

Para indagar por la capacidad de los estudiantes para argumentara cerca de los procesos realizados para obtener una respuesta, se les pidió: describir, ¿Cómo obtuvo la repuesta a la pregunta anterior? Entre los estudiantes del grupo experimental se presentaron algunas variantes en esta descripción: 1) los que describieron correctamente el proceso aunque las respuestas no fueran acertadas (17,24%). 2) los que lo describieron correctamente con respuestas acertadas

(58,62%) y 3) aquellos (24,14%) que dieron respuestas acertadas y no pudieron describir el proceso utilizado. Algo similar, con alguna variación sucedió con los estudiantes del grupo control: 1) los que describieron correctamente con respuestas incoherentes (58,06%), 2) los que describieron el proceso correctamente y este era coherente con su respuesta (22,58%). Y otros (19,35%) que en lugar de describir el proceso, lo que hacían era repetir los pasos del procedimiento utilizado.

Encontrar una incógnita

Para indagar la forma cómo los estudiantes encontraban una incógnita, se les planteó lo siguiente: Si se conoce que la cantidad de líquido al interior de la alberca es $\frac{1023\,V}{1024}$ ¿al final de qué momento estamos? los estudiantes del grupo control se caracterizaron por obtener sus respuestas por tanteo; las soluciones fueron de tipo aritmético, y ninguno utilizó la letra como incógnita. Algunos del grupo experimental montaron las ecuaciones y las resolvieron, aunque la mayoría obtuvieron respuestas también por tanteo.

Consecución de un patrón

Para indagar por la búsqueda de un patrón, se les pidió los estudiantes encontrar la cantidad de líquido en el recipiente al final del momento 50. Los estudiantes del grupo control siguieron el patrón propuesto en la situación, pero ninguno terminó el proceso. Algunos del grupo experimental también siguieron el patrón presentado en la situación con la diferencia que el 58,62% de éstos, lo suspendieron y lograron la respuesta, lo que lleva a pensar que reflexionaban sobre el uso de esta estrategia. Otros 8 estudiantes del grupo experimental, lograron la respuesta por utilización de la fórmula $\frac{2^n-1}{2^n}$.

Estado de avances

Al contrastar las dos pruebas, aplicadas a ambos grupos, se pueden destacar algunos avances y diferencias entre ellos: 1) fue mayor el número de estrategias utilizadas por ambos grupo al resolver la prueba final, aunque en los estudiantes del grupo experimental fue mayor el porcentaje de respuestas acertadas con las mimas estrategias. 2) los estudiantes del grupo experimental utilizaron algunas respuestas que habían obtenido durante el proceso para resolver otras preguntas, mientras los del grupo control debieron repetir esto procesos para obtener sus respuestas. 3) los estudiantes del grupo experimental lograron modelar la situación, y con ello utilizaron la letra como variable, luego de seguir un patrón de regularidad, mientras los del grupo control aunque siguieron un patrón, no lograron modelar la situación y no utilizaron la letra como variable. 4) fue mayor el porcentaje de estudiantes del grupo experimental que lograron describir los procesos utilizados para dar sus respuestas.

Referencias bibliograficas

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 7(3)*, 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Grupo de educación matemática.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2005) *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2003). *¿Cómo es la evaluación en Matemáticas?*. Bogotá: Grupo de evaluación dela educación básica y media.

Instituto colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2007). *Fundamentación conceptual área de Matemáticas.* Bogotá: Acevedo, M., Montañés, R., Huertas, C., Pérez, M.

A INFLUÊNCIA DAS PRINCIPAIS TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO CURRÍCULO ESCOLAR

Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Brasil
claudiag@ulbra.br
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumo. *O processo de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente na Escola Básica, se transformou, nos últimos anos, em uma tarefa complexa e fundamental em todos os sistemas educativos. Nesse sentido as formas de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem influenciam significativamente nos resultados e a didática empregada é de fundamental importância. A educação, nos últimos anos, tem enfrentado reformulações curriculares que sinalizam com novas propostas pedagógicas para a sala de aula, que consideram processos cognitivos, afetivos, motivacionais e metodológicos e nesse contexto insere-se a Educação Matemática, cujos professores sentem-se sensibilizados à mudarem suas rotinas curriculares. O objetivo, neste artigo, é refletir sobre a utilização de propostas metodológicas atuais que se contrapõem ao ensino tradicional da Matemática.*
Palabras clave: tendências em educação matemática, perspectivas atuais em educação matemática, didática da matemática

Introdução

Um número significativo de educadores e pesquisadores vêm tentando encontrar respostas satisfatórias para questões fundamentais, relativas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática: o que ensinar, como ensinar, quando ensinar, a quem ensinar e que tipo de aluno se quer formar.

A Matemática possui um papel importante na inclusão social dos indivíduos. Ensiná-la é fornecer instrumentos para o homem atuar no mundo de modo mais eficaz, formando cidadãos comprometidos e participativos. Segundo D´Ambrósio: "Isso significa desenvolver a capacidade do aluno para manejar situações reais, que se apresentam a cada momento, de maneira distinta" (1990, p.16).

A vida moderna exige, cada vez mais, o desenvolvimento de habilidades como: desenvolver a lógica de raciocínio; saber transferir conhecimentos de uma área para outra; saber comunicar-se e entender o que lhe é comunicado; trabalhar em equipe; interpretar a realidade; buscar, analisar, tratar e organizar a informação; adotar uma postura crítica, estando consciente de que o conhecimento não é algo terminado e deve ser construído constantemente; tomar decisões, ganhando em autonomia e criatividade. Logo, aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, perceber problemas, preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender, imaginar e extrapolar (Groenwald, 1999).

Baseados nesses princípios, a escola e os professores devem refletir sobre a necessidade de um planejamento curricular em Matemática que esteja em sintonia com o progresso científico e tecnológico da sociedade atual. Logo, há necessidade de estruturar um currículo matemático onde o eixo central não seja a memorização e a repetição de exercícios, mas um currículo que privilegie a compreensão dos conceitos, a interpretação e a resolução de problemas, cujo principal objetivo seja o desenvolvimento de habilidades tais como comparar idéias, métodos e soluções, saber comunicar idéias através da Matemática e concluir processos de forma clara, rigorosa e precisa.

Nesse contexto, a busca por caminhos metodológicos que integrem a realidade com o “fazer matemático”, possibilitando uma estreita vinculação entre a estrutura lógico-formal da disciplina e sua utilização para compreender e descrever o mundo, permitindo ao aluno uma participação central e atuante no processo de ensino e aprendizagem, deve ser, insistentemente, perseguida por educadores comprometidos com a Educação Matemática.

Segundo Micotti (1999) educar é a principal função da escola, mas as variações do modo de ensinar determinam diferenças nos resultados obtidos. Afirma, também, que até bem pouco tempo, ensinar era sinônimo de transmitir informações, porém, as idéias pedagógicas mudaram e busca-se uma aprendizagem que extrapole a sala de aula, que o aluno consiga aplicar seus conhecimentos vida afora, em benefício próprio e da sociedade na qual está inserido. As possibilidades de aplicar o aprendido, tanto na solução de problemas da vida prática como em novas aprendizagens ou pesquisas, dependem do tipo de ensino desenvolvido.

Esse curso discutirá as principais tendências em Educação Matemática, resultados de pesquisa, no Brasil, que influenciam o currículo escolar e os cursos de formação de professores de Matemática.

Principais tendências em Educação Matemática

As tendências mais expressivas, nesse momento, no Brasil, cuja aplicação em sala de aula já apresentam resultados em diferentes artigos e relatos são: resolução de problemas, modelagem

Matemática, história da Matemática, jogos e curiosidades, Etnomatemática, tecnologias da informação. Outra tendência, que se desenvolveu ao longo do século XX, é o método de projetos, como estratégia para o desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem dentro de uma perspectiva transdisciplinar (D'Ambrósio, 2001; Morin, 1999) a qual, atualmente, tem adquirido uma grande relevância na Educação Matemática.

Os pontos comuns observados nas tendências referidas são, segundo Groenwald, Silva e Mora (2004): um ensino comprometido com as transformações sociais e a construção da cidadania; desenvolvimento contando com a participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem em um contexto de trabalho em grupo e não individual; a busca de uma Matemática significativa para o aluno, vinculando-a a realidade; utilização de recursos específicos e um ambiente que propicie o desenvolvimento de seqüências metodológicas que levem o aluno a construir seu próprio conhecimento.

Dentro dessas concepções de Educação Matemática a atuação do professor adquire uma nova postura, é um mediador do processo, tal como apontam os estudos de Vygotsky (1978).

As tendências apresentadas visam promover um ensino apoiado na atividade do aluno, no trabalho autônomo e fortemente comprometido com a construção da cidadania. Cada tendência possui características próprias e a sala de aula se constitui em um espaço aberto a incorporação das mesmas, sendo que, a utilização de uma não exclui a outra.

A seguir apresenta-se a resolução de problemas e os projetos de trabalho como exemplos de metodologias relevantes para o trabalho em sala de aula e que serão enfatizadas no curso ministrado.

A resolução de problemas na Educação Matemática

Para estar em consonância com o estabelecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1996), que preconizam, para o Ensino Básico, objetivos orientados para a formação de cidadãos socialmente ativos e capazes de solucionarem problemas com que se confrontam no cotidiano, o ensino da Matemática e as experiências de aprendizagem devem estar organizados com base em princípios construtivistas com foco na resolução de problemas.

A metodologia resolução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar as próprias respostas, o próprio conhecimento.

Lester (1983) identifica problema como uma situação que o indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução. Para Fones (1998), problema matemático é toda situação matematizável na qual a partir de relações e operações entre elementos conhecidos, seja possível deduzir elementos desconhecidos. Segundo García e García (1993), problema é algo que não se pode resolver automaticamente mediante os mecanismos normalmente utilizados, mas que exige o emprego de diversos recursos intelectuais. Um problema não precisa ser uma pergunta explicitamente formulada, mas pode ser uma situação incerta que estimula a curiosidade científica, um conjunto de dados difíceis de combinar com conclusões anteriores e que, por isso, obriga a buscar mecanismos de reajuste e de compatibilização.

Uma atividade será um problema para um estudante somente quando ele estiver motivado, por desejo ou necessidade, a encontrar uma solução, não souber de imediato como encontrá-la e tiver que se esforçar na sua busca. Ter um problema significa buscar, conscientemente, alguma ação apropriada para alcançar uma meta claramente concebida, porém não imediata de alcançar (Polya, 1978).

Logo, é toda situação que se apresenta a um aluno ou a um grupo de alunos, com conhecimentos suficientes para entendê-lo, mas que necessitam desenvolver um plano de ação para resolvê-lo.

Medeiros (2001) salienta que atividades realizadas, em sala de aula, para fixar os assuntos que acabaram de ser desenvolvidos e que se constituem, basicamente, em exercícios de repetição, não são caracterizados como problemas, mas sim como exercícios.

Projetos de Trabalho

O trabalho com projetos proporciona contextos que geram a necessidade e a possibilidade de reorganizar os conteúdos, conferindo-lhes significado, permitindo ao aluno vivenciar novas estratégias e desafios em sua aprendizagem. A repetição, elemento fortemente presente no currículo organizado de forma linear, cede lugar para a inovação, criatividade e experimentação.

Segundo Hernández e Ventura (1998, p.61), a função do projeto é “favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares em relação ao tratamento da informação, e aos diferentes conteúdos em torno de problemas ou hipóteses que facilitem aos alunos a construção de seus conhecimentos, a transformação da informação procedente dos diferentes saberes disciplinares em conhecimento próprio.”

O desenvolvimento de projetos propicia o “aprender a aprender”, estabelece conexões entre os conhecimentos adquiridos anteriormente e a construção de novos conhecimentos, permitindo o trabalho com conceitos e estruturas, a elaboração e testagem de hipóteses de trabalho, alteração na ótica da informação e sua descrição para compreendê-la.

Pode-se definir o método de projetos como uma busca organizada de respostas a um conjunto de interrogações em torno de um problema ou tema relevante do ponto de vista social, individual ou coletivo, o qual pode ser trabalhado dentro ou fora da sala de aula com o trabalho cooperativo na comunidade escolar.

Os objetivos do método de projetos podem ser sintetizados, segundo Groenwald, Silva e Mora (2004) do seguinte modo: o trabalho em grupo, dentro da idéia sobre projetos, impulsiona a capacidade de trabalhar cooperativamente, levar em conta séria e solidariamente os companheiros de trabalho, a reflexão sobre atitudes egoístas, próprias da sociedade altamente individualista e a produção de resultados como produto da ação coletiva; as temáticas e o planejamento de situações problemáticas passam pela discussão crítica coletiva, na qual se respeita a opinião de cada participante; o trabalho intensivo e a resolução de problemas impulsionam o pensamento complexo estrutural dos estudantes, o qual se manifesta na elaboração de estratégias de solução que podem ser aplicadas a outras situações similares; permitem que os participantes partam de diferentes perspectivas, baseados em um processo investigativo, encontrando respostas adequadas a uma variedade de interrogações que envolvem a temática.

Para que o trabalho com projetos tenha resultados satisfatórios, é importante seguir algumas fases, pré-estabelecidas e organizadas. As fases de um projeto são, segundo Groenwald, Silva e Mora (2004): iniciativa, discussão, planejamento, desenvolvimento, apresentação dos resultados e avaliação.

Na fase da iniciativa, tanto os alunos como os professores assumem a elaboração de um projeto, debatendo temáticas que sejam do interesse dos estudantes e que se relacionem com suas experiências.

Na discussão, deve-se debater, sob diferentes pontos de vista, o tema escolhido para a realização do projeto. Cada participante de um determinado projeto deve ter a possibilidade de expressar sua opinião ou ponto de vista em torno das características do projeto eleito para ser trabalhado por um certo tempo. Cada aluno deve estar consciente do seu papel no mesmo, o que permitirá apontar as próprias idéias, conhecimentos e experiências. Trata-se de chegar a um acordo em relação ao planejamento do trabalho, a observação de um conjunto de regras sociais necessárias para o êxito do trabalho. O objetivo é a elaboração de um conjunto de idéias, levando em consideração as propostas de cada participante, os recursos necessários, as estratégias de trabalho etc. (Grownwald, Silva E Mora, 2004).

No planejamento, é organizado um cronograma de atividades, os procedimentos que devem ser realizados e quem os realiza. A partir da variedade de idéias e sugestões apontadas por todos os participantes na fase anterior, passa-se à elaboração de um plano de trabalho realizável em um tempo previsto.

O desenvolvimento é a fase onde se executa o planejado. O trabalho com projetos requer uma forma de organização social estrita e coerente de todos os participantes. Essa pode ser feita mediante o trabalho em pares ou em pequenos grupos de 4 a 5 pessoas. As informações pesquisadas devem ser compartilhadas e discutidas pelos membros do grupo ao qual pertencem. Igualmente, cada grupo de trabalho se responsabilizará pela apresentação dos resultados de seu trabalho parcial a todos os membros da classe.

A apresentação dos resultados deve ser à comunidade escolar, através de um trabalho escrito, de um pôster ou de outra maneira que exija o envolvimento dos alunos na apresentação.

Na fase de avaliação, devem-se definir as formas de avaliação da atividade realizada pelos alunos, podendo ser realizada pelo professor, por outros professores, pelos pais ou outros envolvidos, além do próprio aluno.

O uso da metodologia de projetos faz dos estudantes o centro do ensino e os professores se constituem em organizadores, moderadores e facilitadores do processo, facilitando, consideravelmente, a criatividade e a independência dos participantes, possibilitando maior motivação e interesse.

Referências bibliográficas

Brasil. (1996). *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC.

D´ambrósio, U. (1990). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. São Paulo: Atica.

Fones, M. A. (1998). *¿Qué hago com los problemas?* Buenos Aires: Geema.

García, J. E. y García, F. F. (1993). *Aprender investigando - una propuesta metodológica basada en la investigación.* Sevilla: Díada.

Groenwald, C. (1999). *A matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico.* Educação matemática em revista – rs. Sbem do rio grande do sul, 1, ano i, 23-30.

Groenwald, C., Silva, C., Mora, C. (2004) Perspectivas em Educação Matemática. *Acta scientiae* 6 (1), (p. 37-55). Canoas.

Hernández, F., Ventura, M. (1998). *A organização do currículo por projetos de trabalho*. Traduzido por: Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: Artes Médicas.

Lester, F. (1983). *Trends and issues in mathematical problem-solving researchs; en acquisition of mathematics concepts and processes*. USA: Academic Press.

Medeiros, K. (2001). Contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação matemática em revista 8 (9-10)*, 32-39.

Micotti, M. (1999). O ensino e as propostas pedagógicas. En M. Bicudo (org.) *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São paulo: Unesp.

Morin, E. (1999). da necessidade de um pensamento complexo. In F. Martins (org). *Para navegar no século XXI*. Porto Alegre: Sulina/Edipuc.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciência.

Vygotsky, L.(1978). *Mind and society*. Cambridge: Harvard University Press.

ALGUNAS HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS PARA UNA EVALUACIÓN PLURIMETÓDICA

Teresita E. Terán
Universidad Nacional de Rosario — Argentina
teresitateran@hotmail.com

Campo de investigación: Otros – Evaluación — Nivel: Superior

Resumen. *Posicionados en lo que Medina Rivilla y Castillo Arredondo (1998) llaman "perspectiva plurimetódica", y considerando a la evaluación como un proceso reflexivo, sistemático y riguroso de indagación sobre la realidad, en un contexto regido por principios de validez, fiabilidad, participación y ética, nos planteamos la necesidad de analizar las propiedades y los requisitos métricos de una evaluación y las respuestas de los alumnos. Para ello, proponemos utilizar herramientas estadísticas que permitan un análisis exhaustivo de cómo se ha formulado la evaluación y cuál ha sido el grado de comprensión por parte de los alumnos.*

Los estudios de índices de análisis de ítems y de fiabilidad son útiles para generar instancias de reflexión sobre la práctica docente que permitan rever no sólo el proceso de enseñanza-aprendizaje sino la confección de los instrumentos de evaluación. Además, una encuesta de opinión basada en la metacognición puede ser de ayuda para analizar el control y la conciencia que los alumnos tienen sobre sus procesos cognitivos.

Palabras clave: instrumentos, evaluación, consistencia interna, generalizabilidad

Introducción

Posicionados en lo que Medina Rivilla y Castillo Arredondo (1998) llaman "perspectiva plurimetódica", Cardona Moltó (1998) considera al enfoque científico de investigación como un procedimiento de búsqueda de conocimiento aplicable a cualquier campo de estudio, por lo que no hay razón para pensar que vaya asociado a determinados campos o disciplinas.

Batanero y Godino (2000) señalan que en los trabajos sobre investigaciones en Ciencias Sociales y Experimentales se ha puesto de manifiesto la existencia de dificultades y errores en la aplicación de los conceptos y procedimientos estadísticos. Acotan además, que se van abandonando las controversias en torno a lo cuantitativo versus lo cualitativo y cada vez con más frecuencia las investigaciones se encuentran en un punto intermedio entre los paradigmas cuantitativo y cualitativo.El enfrentamiento entre ambos paradigmas marcó el desarrollo de la sociología en los años setenta.

Según D´Arcona (1999) se reconoce la pluralidad de vías para acceder a la realidad social, pero no se trata de afirmar un paradigma sobre otro, sino de buscar compatibilidades entre ellos. Reichardt y Cook (1979) sostienen la necesidad de construir puentes entre métodos a partir de la triangulación en una misma investigación. En el caso de la educación matemática, esta idea de complementariedad de los métodos cuantitativos y cualitativos es sugerida ya, por Kilpatrick (1982) cuando dice que en lugar de abandonar los métodos cuantitativos a favor de los cualitativos deberíamos dirigir nuestros esfuerzos en la dirección de enriquecerlos.

Además, Wittmann (1995) enfatiza que en la Educación Matemática se debe priorizar la investigación sobre el diseño y evaluación de los cuestionarios. Surge, así, la necesidad de construir instrumentos confiables para la evaluación de los alumnos.

Desde esta perspectiva se formulan las siguientes preguntas: ¿Qué criterios seguir para evaluar los cuestionarios en Estadística? ¿Se cuenta con instrumentos de evaluación fiables y válidos en el tema? ¿Cómo analizar el grado de comprensión de los alumnos?

Es por ello, que se propone realizar una investigación sobre métodos mixtos a través del análisis de la concordancia entre el uso de herramientas estadísticas que permitan un análisis exhaustivo de cómo se ha formulado la evaluación y cuál ha sido el grado de comprensión por parte de los alumnos y una encuesta de opinión sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje y el control que tienen los alumnos sobre sus procesos cognitivos.

A partir de los interrogantes planteados, se formula el objetivo siguiente:

Objetivo

Analizar algunas herramientas estadísticas para una evaluación plurimetódica.

Métodos de análisis cuantitativos

Desde esta posición, se presenta un detalle de los métodos de análisis cuantitativos que sugerimos emplear al realizar una evaluación continua de los alumnos.

Índice de Dificultad

Se considera de interés analizar qué tipos de ítems resultan de fácil resolución para los alumnos, y cuáles presentan las mayores dificultades. Para ello se aplica un Índice de Dificultad.

Para la elección de este índice se tiene en cuenta la definición de Muñiz (1994) sobre Índice de Dificultad (ID) de un ítem. Muñiz define ID de un ítem, a la proporción de sujetos que lo aciertan (A) de aquellos que han intentado resolverlo (N).

Simbólicamente $ID = \frac{A}{N}$

Como se observa este índice revela mayor dificultad en el ítem cuando es menor el número de respuestas correctas.

Índice de Discriminación

Muñiz (1994) define que un ítem tiene poder discriminativo si distingue, discrimina, entre aquellos sujetos que puntúan alto en el test y los que puntúan bajo, es decir, si discrimina entre los eficaces en el test y los ineficaces. Para Muñiz, el índice de discriminación de un ítem (ρ) en una prueba es el grado en que diferencia a los examinados respecto al carácter que se pretende medir. Se mide mediante el coeficiente de correlación de la puntuación de cada ítem con la puntuación total de la prueba. Un ítem discrimina mejor el nivel de apropiación de los alumnos con respecto a los conceptos relacionados con un tema en evaluación, cuando su correlación con respecto a la puntuación total en la prueba es mayor.

Para ello, se utiliza un coeficiente de correlación biserial-puntual, que es una aplicación de la correlación de Pearson cuando una de las variables es dicotómica y la otra cuantitativa.

Simbólicamente: $\rho = \frac{\mu_p - \mu_x}{\sigma_x}\sqrt{\frac{p}{q}}$

donde:

μ_p : Media en el test de los sujetos que aciertan el ítem.

μ_x : Media del test.

σ_x : Desviación típica del test.

p : Proporción de sujetos que aciertan el ítem.

q : $(1-p)$

Fiabilidad de la prueba

Muñiz (1994) basándose en la teoría clásica de los tests considera que los errores de medida de los que se ocupa la fiabilidad son aquellos no sometidos a control e inevitables en todo proceso de medir, sea físico, químico o psicológico.

Se llama fiabilidad o consistencia a la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida produce los mismos resultados en ensayos repetidos. La medida siempre produce un cierto error aleatorio, pero dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo suelen ser consistentes.

La fiabilidad de los tests se estima a través de diversos métodos entre los cuales se destaca el método de consistencia interna. Se mide a través del coeficiente alfa de Cronbach (α)

Este coeficiente refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test.

Simbólicamente:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}{\sigma_x^2}\right)$$

donde:

n : Número de ítems del test.

$\sum\sigma_j^2$: Suma de las variancias de los n ítems.

σ_x^2 : Variancia de las puntuaciones en el test.

El rango de variación de este coeficiente es de 0 a 1 (cuanto mayor es su valor, mayor es la fiabilidad del cuestionario).

Si la prueba es homogénea, tiene una alta coherencia interna y mide la misma habilidad en todos sus ítems, pero, si la prueba es heterogénea no se puede esperar un índice de consistencia interna muy alto lo que nos indica que el alfa obtenido es un coeficiente significativo.

Asimismo se ha complementado este estudio a través del cálculo de dos coeficientes de generalizabilidad. La ventaja más clara que presenta la teoría de la generalizabilidad frente a la teoría clásica de la fiabilidad es que permite estimar la fiabilidad de un instrumento de medida en situaciones en las que intervienen múltiples fuentes de error o variabilidad de las puntuaciones.

La teoría de la generalizabilidad tiene en cuenta los múltiples factores que pueden producir variaciones en las puntuaciones de los sujetos y mediante la aplicación de un diseño multivariado y los procedimientos clásicos del Análisis de Variancia (ANOVA), permite estimar la variancia atribuible a cada uno de ellos, así como a sus interacciones.

El coeficiente de generalizabilidad indica el grado en que se pueden generalizar los resultados obtenidos a otras situaciones en que muestras aleatorias de n ítems sean aplicadas en una o más ocasiones aleatorias.

Se calcula, en primer lugar el coeficiente de generalizabilidad (G) que se define como el cociente entre la variancia verdadera en las puntuaciones de la prueba y la variancia observada que es la suma de la variancia verdadera más la variancia debida al error aleatorio. Simbólicamente:

$$G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

donde:

σ_v^2 : Variancia verdadera en las puntuaciones de la prueba.

σ_e^2 : Variancia debida al error aleatorio.

Thorndike (1989) plantea que la variancia del error depende de cómo definimos el universo de puntuaciones verdaderas y en el análisis de las generalizabilidad considera ciertas fuentes como parte de la variancia de error en unas condiciones y otras fuentes en otras.

Se diferencian dos fuentes para el error aleatorio, por lo que se calculan dos coeficientes de generalizabilidad:

Coeficiente de generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba.

Coeficiente de generalizabilidad a otros problemas similares a los incluidos en la prueba a los mismos alumnos.

A través del análisis del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) y del programa SPSS, se puede calcular para el análisis de variancia de medida repetida las siguientes componentes de la variancia:

Variancia dentro de los sujetos $\sigma_s^{\ 2}$

Variancia dentro de los ítems σ_i^2

Variancia residual σ_e^2

Sustituyendo estos valores en la fórmula y teniendo en cuenta los tamaños de muestra (número de alumnos y número de ítems) se obtienen las siguientes estimaciones según qué fuente de variación se considere.

Coeficiente de generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba.

G = $\dfrac{\sigma_i^{\ 2}}{\sigma_i^{\ 2} + \dfrac{\sigma_e^{\ 2}}{n}}$ n: número de alumnos

Este valor obtenido si es alto indica que se pueden generalizar los resultados a otros alumnos conservando el mismo cuestionario de evaluación, suponiendo condiciones uniformes en el tipo de alumno y en el tipo de enseñanza impartida.

Coeficiente de generalizabilidad a otros problemas similares a los incluidos en la prueba a los mismos alumnos.

G = $\dfrac{\sigma_s^{\ 2}}{\sigma_s^{\ 2} + \dfrac{\sigma_e^{\ 2}}{n}}$ n: número de ítems de la prueba

Se observa que el valor de este coeficiente es similar al coeficiente α de Cronbach, ya que estos dos coeficientes deben acercarse puesto que se considera como fuente de variación la de los problemas, y los alumnos fijos.

Métodos de análisis cualitativos

La metacognición como estrategia didáctica: La encuesta de opinión

Para poder realizar una interpretación más exacta de la relación entre la opinión de los alumnos sobre dificultades en el aprendizaje de un tema y el resultado de una evaluación escrita, se incorporan algunas reflexiones teóricas sobre la metacognición.

Cuando se habla de metacognición se refiere a la conciencia y el control que los individuos tienen sobre sus procesos cognitivos. Garner (1987) sostiene que, durante la última década, una considerable cantidad de estudios han demostrado que la metacognición desempeña un papel importante en la efectiva comprensión.

El término metacognición de acuerdo a la mayoría de los autores alude a dos componentes básicos, el saber acerca de la cognición y la regulación de la cognición. El primer componente se refiere a la capacidad de reflexionar sobre nuestros propios procesos cognitivos, y la regulación metacognitiva implica el uso de estrategias que nos permiten controlar esfuerzos cognitivos.

Fischer y Lipson (1986) expresan que uno de los objetivos de la enseñanza universitaria de la ciencia es que los estudiantes aprendan a reconocer y corregir sus propios errores. Sostienen que los propios estudiantes deben adquirir la habilidad de manejarse frente al error y ser capaces de desmontar sus propios “programas”.

En base a lo señalado, se observa que el reconocimiento y la corrección de los propios errores son operaciones metacognitivas fundamentales.

El problema del preconcepto erróneo es de orden metacognitivo. Si los estudiantes no toman conciencia de que no poseen el conocimiento correcto, no pueden clarificar su comprensión, a ese fin la encuesta de opinión constituye una estrategia para esa toma de conciencia. Es por ello, que se propone la realización de una encuesta cuyo objetivo es conocer la opinión de los alumnos sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje del tema y a través de esa opinión conocer la conciencia y el control que tiene el alumno sobre sus procesos cognitivos.

Para confeccionar el protocolo de la encuesta de opinión de los alumnos se debe tener en cuenta no sólo la propia experiencia docente sobre el tema sino estudios realizados por especialistas sobre las dificultades más observadas.

Luego de seleccionadas estas dificultades se agrupan en variables didácticas. En general, se mencionan: comprensión de la teoría, comprensión de la simbología, comprensión de las consignas, planteo del problema, cálculo numérico, especificación de las soluciones utilizando la simbología y las gráficas utilizadas (si las hubiere), interpretación de los resultados.

Una vez realizada la encuesta se debe analizar la proporción de alumnos que dicen no tener problemas en la evaluación de los distintos ítems que comprenden las dificultades más comunes observadas y se debe comparar con las calificaciones obtenidas en cada uno de los ítems en la evaluación escrita, a través de tablas de contingencia. Las conclusiones se deben reforzar mediante los coeficientes de asociación y a través de las pruebas donde se analiza la coherencia entre la opinión de los alumnos sobre las dificultades que se le presentan en el tema considerado y los resultados obtenidos por ellos en la evaluación realizada.

Conclusión

Investigar las herramientas estadísticas para una evaluación plurimetódica permite al docente una investigación- acción sobre su propia práctica docente, generando instancias de reflexión sobre su accionar, complementando el desarrollo de los contenidos estadísticos con la evaluación continua del proceso de enseñanza y aprendizaje y de las herramientas utilizadas para que dicha evaluación sea confiable y válida.La evaluación de los instrumentos es para Wittmann (1995) un proceso de interacción activa entre diferentes áreas y disciplinas relacionadas como lo son la Matemática, la Didáctica, la Pedagogía, la Psicología, entre otras.

Este trabajo es una contribución al mejoramiento de la calidad educativa que propone el estudio exhaustivo de herramientas estadísticas que redundarán en el análisis de los ítems que permitan la confección de un cuestionario de evaluación válido y confiable, que tenga en cuenta todos los factores que pueden afectar el conocer el grado de comprensión de los alumnos sobre los temas propuestos en la evaluación y su triangulación con una encuesta de opinión donde el alumno utilice la metacognición como una estrategia didáctica de sus propio grado de comprensión y aprendizaje del tema planteado. .

Referencias bibliográficas

D´Arcona, M.A. (1999) *Metodología cuantitativa: Estrategias y técnicas de investigación social* .Madrid: Síntesis.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2000). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Cardona Moltó, C. (1998). *Pedagogía diferencial. Educación especial. Proyecto docente y de investigación inéditos*. Alicante: Dpto. Psicología de la Salud, Universidad de Alicante.

Dunn, O. J. y Clarck, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: Wiley.

Fischer, K. M. y Lipson, J.K. (1986). Twenty questions about student errors. *Journal of Research in Science Teaching 23*, 783-803.

Garner, R. (1987). *Metacognition and reading comprehension*. Norwood, NJ: Ablex.

Kilpatrick, J. (1982). Research on mathematical learning and thinking in the United States”. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(3), 393-379.

Medina Rivilla, A. y Castillo Arredondo, S. (1998). *Evaluación de los Procesos y resultados del aprendizaje de los estudiantes*. Madrid: UNED.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.

Reichardt y Cook (1979). *Qualitative and Quantitative Methods in Social Sciences*. Beverly Hills: Sage.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.

Wittmann, R. L (1995). Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematicas. 29*, 355-374

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM ALUNOS CONCLUINTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ednei Luis Becher, Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Escola E. Prudente de Morais. Universidade Luterana do Brasil Brasil
edneilb@terra.com.br, claudiag@ulbra.br
Campo de investigación: Pensamiento Algbraico Nivel: Medio

Resumo. *Conhecer as características dos conhecimentos dos estudantes, com relação aos conteúdos, e como o processo de aprendizagem dos mesmos transcorre a priori, permite ao professor intervir de forma mais eficiente no processo de ensino e aprendizagem, mediando a construção e o desenvolvimento de competências, habilidades e conteúdos estudados. Este trabalho apresenta os resultados do mapeamento das competências e habilidades algébricas, que os estudantes do 2º ano do Ensino Médio apresentam com relação ao conteúdo de equações, de 1º e 2º graus, que são desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental. A experiência foi desenvolvida em uma escola da rede pública, no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Implementou-se uma abordagem com o uso de testes adaptativos com o sistema SCOMAX.*
Palabras clave: pensamento algébrico, matemática, ensino médio, álgebra

Introdução

A Álgebra se constituiu ao longo do tempo como a linguagem da Matemática, e se por um lado, passou a ser um tema considerado como requisito básico na formação de um estudante e cidadão, por outro, tornou-se, ao mesmo tempo, um meio de exclusão social, devido às dificuldades que muitos estudantes têm em trabalhar, principalmente, com o simbolismo algébrico.

A Álgebra atualmente tem como característica, possuir como seu foco o estudo de relações matemáticas abstratas, incluindo fórmulas, equações e inequações, estudando também, conjuntos numéricos e não numéricos, além da resolução de problemas com as operações presentes em diferentes ambientes.

Lins e Gimenez (1997) entendem que a atividade algébrica se caracteriza pela resolução de problemas de Álgebra, independente de serem contextualizados ou não. Consideram também que toda atividade algébrica possui quatro características: conteúdos, notação, ação do pensamento e campo conceitual. Para esses autores a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal, assim o pensamento formal é algébrico.

Para Kaput (1999) a visão tradicional da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, geralmente letras, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Como conseqüência, a álgebra escolar tem servido para ensinar, apenas, um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo real. Além disso, na opinião daquele autor a Álgebra dedica-se a capacitar os estudantes para produzir seqüências de símbolos corretas e não se preocupa na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. O raciocínio algébrico e o uso de representações algébricas como gráficos, tabelas e fórmulas são ferramentas intelectuais poderosas e, ainda segundo Kaput, é lamentável que os estudantes muitas vezes se afastem da Matemática por não compreenderem o significado dos conteúdos estudados, deixando de desenvolverem competências e habilidades ligadas ao simbolismo algébrico. Logo, para o autor, a grande questão que se coloca para os professores e pesquisadores em Educação Matemática, é como fazer a álgebra acessível a todos os alunos, dando ênfase a uma aprendizagem com compreensão, que não se limite à mera manipulação e repetição de procedimentos sem sentido.

Diante desse quadro, percebe-se que o estudo da Álgebra, sua compreensão e desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, vêm ocupando espaço há muito tempo nas pesquisas em Educação Matemática, o que se justifica, uma vez que, os processos de intervenção e mudança são obviamente muito mais eficientes quando se compreende o conceito e processo envolvido, em particular, quando estuda-se Álgebra, visto que a mesma é caracterizada como uma área com assuntos e aspectos específicos, que possuem uma linguagem e um modo próprio de pensar.

Neste trabalho apresentam-se os resultados do mapeamento das competências e habilidades algébricas, que os estudantes, do 2º ano do Ensino Médio pesquisados apresentam com relação ao conteúdo de equações, de 1º e 2º graus, que são desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental.

O pensamento algébrico

O pensamento algébrico tem sido um conceito controverso, embora seja abordado por muitos autores, o que leva Lins e Gimenez (1997) a afirmarem que, não existe um consenso sobre o que é pensar algebricamente. Porém, o estudo das idéias fundamentais da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento matemático são dois componentes do pensamento algébrico que têm sido discutidos por muitos (Driscoll, 1999; NCTM, 1989, 2000).

Entretanto existe convergência entre os pesquisadores/educadores matemáticos, no sentido de que, o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, o uso das operações e análises matemáticas de situações tendo as idéias e conceitos algébricos como seu referencial.

O desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado ao desenvolvimento do pensamento matemático que consiste em hábitos analíticos que capacitam a representação, o raciocínio e a resolução de problemas, bem como, a aprendizagem das idéias fundamentais da Álgebra, que contempla o domínio de conteúdos que devem levar ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Godino e Font (2003), o professor deve ter compreensão da importância que a Álgebra e o pensamento algébrico têm no estudo da Matemática, afirmando que: o raciocínio algébrico implica em representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. E à medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai evoluindo no uso da linguagem e seu simbolismo, necessário para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática concebida como a ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. Em conseqüência, os professores em formação têm que construir essa visão do papel das idéias algébricas nas atividades matemáticas, e sobre como desenvolver o pensamento algébrico durante todos os níveis de ensino.

O software SCOMAX

Na pesquisa realizada com o conteúdo de equações de 1º e 2º graus, foi utilizado o software SCOMAX, desenvolvido a partir de um convênio entre o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, em Tenerife, na Espanha e o grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil, ULBRA, em Canoas, Brasil.

O SCOMAX é um sistema de inteligência artificial, implementado em Java, que demonstra os resultados de um teste adaptativo individualizado, de cada nodo (conceito), de um mapa conceitual geral. Esse sistema informático faz a ligação do mapa conceitual ao teste adaptativo, gerando o mapa individualizado dos conhecimentos prévios dos alunos investigados. O sistema utiliza probabilidade, utilizando Redes Bayesianas, para o teste adaptativo, conectando os conceitos com as perguntas e interligado-os através de um mapa conceitual, desenvolvido no software Compendium.

O professor desenvolve o mapa conceitual de acordo com a seqüência dos conteúdos desenvolvidos na escola, depois organiza-o interligando os conceitos, começando pelos conceitos prévios, avançando para os conceitos intermediários até atingir os conceitos objetivos, gerando assim o grafo que liga os conceitos ao teste adaptativo. O SCOMAX, a partir dos resultados obtidos pelos alunos, gera os mapas individualizados com o desempenho dos estudantes (Moreno et all, 2007).

A experiência

Buscando determinar as características do pensamento algébrico, com o conteúdo de equações de 1º e 2º graus, apresentado por alunos concluintes do Ensino Fundamental, implementou-se uma experiência, utilizando o sistema SCOMAX, em alunos do Ensino Médio, uma vez que, a compreensão dos processos é fundamental para a melhoria das práticas de ensino e aprendizagem.

Utilizou-se um enfoque qualitativo, de acordo com Taylor & Bogdan (1984 citado em Santos Filho, 2002), segundo os quais, a pesquisa qualitativa rejeita a possibilidade de descoberta de leis sociais e está mais preocupada com a compreensão ou interpretação do fenômeno social. O objetivo foi identificar e mapear as competências e habilidades algébricas dos alunos, caracterizando o nível de pensamento algébrico, sem o objetivo de uma ampla generalização.

Esta investigação foi estruturada como um estudo de caso. Sendo os estudos de caso um modo de estruturar uma investigação que visa à compreensão de fenômenos que não se podem isolar do contexto e são "particularmente úteis onde alguém precisa compreender algum problema ou situação particular com profundidade" (Patton, 1987).

O experimento foi desenvolvido com a realização de um teste adaptativo, no sistema SCOMAX, em 12 alunos do Ensino Médio de uma escola pública, na cidade de Osório, Rio Grande do Sul, Brasil, no ano de 2007. A idade média dos alunos era de 16 anos, e estavam no 10º ano de escolarização, cursando o segundo ano do Ensino Médio.

Resultados

A partir dos dados obtidos, foi possível identificar erros como os descritos por (Socas, Machado, Palarea & Hernández, 1996). Por exemplo, ao resolver a questão proposta na figura 1:

Qual o resultado da expressão $3x+4$, se x tiver um valor igual a 2?

(a) 36 (b) 324 (c) 10 (d) 14 (e) 0

Figura 1: Questão do teste com equações do 1º grau

Na resolução desta questão 4 alunos resolveram essa expressão algébrica, assumindo que se x tiver um valor igual a 2, a resposta correta é 36. O que indica que os estudantes não têm clareza do significado e, também, não entendem a natureza do símbolo, tendo muitas vezes a concepção típica de que a Álgebra diz respeito à associação de termos, e de que cada termo tem um lugar. Esse tipo de erro segundo Socas et al. (1996) e Kieran (1992) podem ter suas raízes na interpretação da Álgebra como a aritmética generalizada, assumindo-se o uso de letras em vez de números na escrita de expressões gerais, que representam e/ou descrevem regras aritméticas, o que leva os estudantes a cometerem erros, nos quais as compreensões da aritmética e da álgebra se confundem.

Outro erro encontrado com freqüência está relacionado, como mostrado na figura 2, com a troca de membros, também identificado por Socas et al. (1996), Kieran (1992) e Hall(2002) onde as evidências sugerem que muitos alunos que usam a transposição não estão operando com as equações, como objetos matemático mas, simplesmente, aplicando cegamente a regra que “muda de membro – muda de sinal”, conforme figura 2.

$$\frac{2x}{1} - \frac{x}{3} = x - 4$$
$$-x - 6x = x - 4$$
$$-7x = x - 4$$
$$-6x = 4$$
$$x = \frac{4}{6}$$

$$3m + 2(m+1) = 14 + m$$
$$3m + 2m + 2 = 14 + m$$
$$3m + 2m + m = 14 - 2$$
$$6m = 12$$
$$m = \frac{12}{6} = 2$$

Figura 2: Registros dos alunos durante a resolução de expressões e equações

No que se refere à resolução de problemas, o desempenho apresentado pelos estudantes que realizaram o teste, pode ser classificado como satisfatório, pois 8 estudantes obtiveram um bom desempenho, atingindo acima do mínimo requerido. No entanto, é importante observar que mesmo os alunos que resolveram problemas, como o apresentado na figura 3, utilizando uma notação algébrica adequada, encontraram a solução sem utilizarem uma resolução algébrica, caracterizando um pensamento matemático aritmético, baseado na estratégia de tentativa e erro, conforme exemplo da figura 4.

Enquanto uma agência cobra R$ 60,00 por dia mais R$0,52 por quilometro rodado para locar um carro, outra cobra R$ 65,00 por dia mais R$ 0,47 por quilometro rodado. Com relação ao preço, qual das agências oferece mais vantagens para percorrer, em um dia, uma distância de 90 Km?

Figura 3: Questão do teste de problemas

$$60 + 0,52 \cdot 90 = 0$$
$$60 + 46,80 = 0 \qquad A = 106,8$$
$$65 + 0,47 \cdot 90 = 0$$
$$65 + 42,3 = 0 \qquad B = 107,3$$

Figura 4: Registro dos alunos na resolução do problema

Conclusões

Os resultados evidenciam que os estudantes pesquisados utilizam, na resolução das equações de 1º e 2º graus, o seu aprendizado de aritmética. Além disso, parece que os estudantes não percebem as diferenças entre a Aritmética e a Álgebra, pois os erros que foram identificados têm sua raiz no uso de procedimentos aritméticos, que são generalizados e adaptados pelos estudantes no estudo da Álgebra.

Outra característica importante está relacionada com a capacidade dos estudantes de resolverem problemas, que envolvem modelagens algébricas, que é uma das competências essenciais que se espera que um estudante desenvolva ao longo dos anos de escolarização. Aqui novamente se evidencia a forte influência da Aritmética, pois os estudantes, muitas vezes, no lugar de procederem a uma representação algébrica e posterior solução, para depois, determinarem os valores ou as relações que estavam sendo solicitadas, recorreram a soluções aritméticas. Esse fato pode ter suas raízes no uso de problemas artificiais, que são usualmente apresentados aos alunos (Filloy e Sutherland, 1996). Assim o conhecimento adquirido na escola é visto pelos estudantes como um conteúdo teórico, sem conexão com a realidade, ficando restrito ao ambiente da sala de aula.

Diante dessa situação, ganha importância o período escolar conhecido como pré-álgebra, que conforme Kieran e Chalouh (1993) constitui-se em um momento crucial no processo de aprendizagem da Matemática, pois é quando ocorre a transição da aritmética para a álgebra.

Os resultados do experimento também demonstram, que esses alunos têm o seu aprendizado da Álgebra baseado na aprendizagem de técnicas de manipulação. Embora o conhecimento e o domínio de técnicas seja importante dentro do estudo da Álgebra, é importante também, um entendimento fundamentado dos conceitos e o posterior uso desses na resolução de situações problema.

Diante desse quadro, podemos concluir que esses estudantes não atingiram um nível de pensamento algébrico pleno, pois diante das estratégias utilizadas e dos erros cometidos, consideramos que eles apresentam características de transição entre a Aritmética e a Álgebra, pois no currículo escolar brasileiro a Aritmética é ensinada antes da Álgebra, isso porque embora esses estudantes demonstrem conhecer e manipular representações algébricas, ainda utilizam abordagens aritméticas para resolver problemas, além de evidenciarem o uso de concepções aritméticas em contextos onde se espera abordagens algébricas.

Referencias bibliográficas

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Filloy, E., y Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning Algebra. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* Vol. 1, (pp. 139-160). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Font. V. (2003) *Razonamiento Algebraico y su Didáctiva para Maestros*. Acesso em : janeiro de 2008 em: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/. Granada, Espanha: Universidade de Granada.

Hall, R. (2002). *An analysis of errors made in the solution of simple linear equations*. Documento retirado em 10 de novembro de 2007 de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf.

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Documento retirado em 21de outubro de 2005 de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In D.Owers (Ed) *Research ideas for the classroom middle grades mathematics* (pp. 179-198). New York, NY: MacMillan.

Lins, R. y Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Moreno, L., Gonzalez, E. J., Piñero, J. D., Popescu. B., Hamilton, A., Sigut. J., Torres. J., Toledo. J., Merino. J. y González. C. (2007). Hacia un Sistema Inteligente basado en Mapas Conceptuales Evolucionados para la Automatización de un Aprendizaje Significativo. Aplicación a la Enseñanza

Universitaria de la Jerarquía de Memoria. *XII Jornada de Enseñanza Universitaria de la Informática.* Tenerife.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA.

NCTM (2000) *Principios e Estándares para la Educación Matemática*. Trad. Manuel Fernández Reyes. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.

Santos Filho, J. C. y Gamboa, S. S. (1992) (Org.) *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. 5. ed., São Paulo: Ed. Cortez.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al algebra*. Madrid: Síntesis.

ESTUDIO DE COMPORTAMIENTOS ANÁLOGOS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRIGONOMÉTRICAS USANDO TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

Catalina Navarro Sandoval, Diana Patiño Flores
Universidad Autónoma de Guerrero México
nasacamx@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Medio

Resumen. *En el presente escrito, se reportan los resultados de un trabajo de investigación a nivel licenciatura, el cual se centró en el estudio de comportamientos gráficos en funciones algebraicas y trigonométricas, específicamente en* $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=sen(x)$ *y* $f(x)=cos(x)$, *así como las transformaciones de cada una, considerando la expresión* $Y=Cf(ax+c)+D$, *con la intención de realizar comparaciones gráficas entre las funciones originales y las transformadas, el propósito general fue analizar si la presentación de funciones algebraicas y trigonométricas en diversos contextos (algebraico, visual, numérico y gráfico), permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas. De acuerdo a los resultados obtenidos, concluimos que el estudiante al producir sus propias gráficas, éste logra identificar por si mismo comportamientos análogos entre las gráficas algebraicas y trigonométricas, además, el uso de diferentes registros de representación coadyuva al desarrollo de dichos resultados.*
Palabras clave: funciones algebraicas, funciones trigonométricas, comportamientos análogos, transformaciones gráficas, registros de representación

Introducción y estado del arte

Para el desarrollo del presente trabajo, se realizó una revisión de investigaciones realizadas sobre funciones y graficación, durante ésta, se encontró que en torno al concepto de función existe una gran variedad de investigaciones, que han reportado sobre la problemática que surge al ser enseñado éste concepto dentro del sistema escolar, por lo que éstas se han enfocado a la descripción de concepciones que tienen los estudiantes sobre dicho concepto y otras dan muestra de los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes, etc. (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000; Sierpinska, 1992; entre otros). Por tal razón, el interés nuestro no se centra en estudiar lo descrito anteriormente, dado que sobre eso ya se han realizado diversas investigaciones. Por lo tanto, el trabajo se centró en estudiar las representaciones gráficas, en particular las funciones, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=sen(x)$ y $f(x)=cos(x)$, así como las transformaciones de cada una, considerando a la expresión $Y=Cf(ax+c)+D$ con el propósito de realizar comparaciones gráficas entre las funciones originales (prototipo) y las transformadas, éste trabajo se enfocó, en el nivel medio superior, dado que en los planes y programas de estudio revisados, se reporta que es en éste donde se inicia el trabajo con representaciones gráficas.

Navarro (2004) reportó la existencia de una ruptura conceptual en la transición de funciones algebraicas a trigonométricas, es decir, primero se trabaja con la graficación de funciones algebraicas, posteriormente con las trigonométricas, sin considerar la existencia de características gráficas comunes de manera visual en ambos tipos de funciones. Por otro lado, tampoco se propicia el uso de diferentes registros de representación tales como el algebraico, el analítico, el numérico y el visual. Esto como consecuencia, de los planes de estudio y libros de texto (revisados durante la investigación).

Con base en lo anterior el problema de investigación se centró en estudiar comportamientos análogos de algunas funciones algebraicas y trigonométricas. Para ello se planteó la pregunta: ¿la representación gráfica de transformaciones de funciones algebraicas y trigonométricas permite al estudiante relacionar éstas con comportamientos análogos?, con el propósito de presentar en los contextos algebraico, gráfico, visual y numérico el tema de transformaciones, con la finalidad de analizar si la presentación de ambos tipos de funciones en diversos contextos, permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas, mediante la construcción previa de actividades.

Con la finalidad de dar respuesta a la pregunta planteada y alcanzar el objetivo, se analizaron investigaciones en torno a gráficación (Cantoral y Montiel, 2001; Campos, 2003; Navarro, 2004; Rosado, 2004; y Cordero y Solís, 2001).

En algunas de éstas se reporta la necesidad de crear contextos gráficos para conectarlos con los contextos algebraicos y/o analíticos. Los recursos son diversos: unos se apoyan en algún software gráficador para generar habilidades visuales, otros se ocupan del uso de registros gráficos y algebraicos para generar habilidades cognitivas. Otros se ocupan de diseñar situaciones para generar discursos argumentativos gráficos o lenguajes gráficos para establecer nuevos estatus de las gráficas en la matemática escolar. Algunos autores trabajan las transformaciones gráficas transitando en diferentes contextos y otros tratan a las transformaciones, como argumentaciones para resignificar la función cuadrática. En particular este trabajo se enfocó a identificar comportamientos análogos mediante la comparación gráfica de funciones algebraicas y trigonométricas.

Marco teórico y metodología

Tomando como base a la teoría de Raymond Duval (1998), donde se define a los registros de representación, como aquel sistema semiótico que permite realizar las tres actividades cognitivas ligadas a la sémiosis, tales como las siguientes:

- La formación de una representación identificable, como una representación de un registro dado: enunciado de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula.

- El tratamiento de una representación en el mismo registro, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro.

- La conversión de una representación, es la transformación de la representación en otra representación de otro registro distinto al de la representación inicial, en la que se conserva la totalidad o parte del registro de partida (el registro de la representación por convertir).

En resumen, Duval propone trabajar con diferentes registros de representación semiótica, para que el estudiante logre reconocer y manipular al objeto matemático en cualquier registro de representación, esto es para la adquisición conceptual de un objeto. Con base en lo anterior y al objetivo de la investigación, en esta investigación se utilizó a los registros algebraico, visual, numérico y gráfico para la construcción del cuestionario, así mismo, se realizó la revisión de algunos planes de estudio de algunas instituciones, tales como el de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), el del Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicios (CBTis), el del Colegio de Bachilleres (Cobach) y el del CETIS sobre el tema de "Graficación de funciones algebraicas y trigonométricas", donde se encontró el tema de graficación y clasificación de las funciones se aborda en la asignatura de Matemáticas IV (Geometría Analítica), en el cuarto semestre en la UAG, en el tercer semestre en el CBTIS en la asignatura de Matemáticas III (Geometría analítica-Trigonometría), mientras que en los programas de estudio correspondientes al COBACH en la asignatura de Matemáticas II (Trigonometría, geometría euclidiana, geometría analítica) y en los programas de estudio de el CETIS, este tema no se contempla. Así mismo, se realizó también la revisión de tres libros de texto que se encuentran citados dentro de la bibliografía de los programas del Nivel Medio Superior. Ésta se realizó con la finalidad de conocer cómo se aborda el tema de graficación de funciones y transformaciones gráficas, donde se encontró que se inicia presentando el sistema coordenado rectangular o cartesiano, la ubicación y localización de puntos en el plano y solamente en uno de los libros se observa el uso de tabulación para trazar gráficas en el plano, por otro lado, se deja observar también el trabajo con funciones algebraicas y trigonométricas por separado, así como el uso de algunos registros de representación, sin embargo, no se presenta el trabajo de transformaciones gráficas con las funciones algebraicas y trigonométricas en común (no se miran comportamientos análogos entre funciones algebraicas y trigonométricas).

Con base en la información anterior se diseñó un conjunto de actividades, cuyo propósito fue mirar si la presentación gráfica de ambos tipos de funciones en diversos contextos, permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstos con transformaciones gráficas.

En particular la actividad 1, se enfocó a que los estudiantes a partir de una expresión algebraica obtuvieran numéricamente un conjunto de pares ordenados, mediante la tabulación, para que posteriormente los localizaran en el plano cartesiano y realizaran la representación gráfica.

En la segunda actividad el propósito fue que los estudiantes visualizaran y describieran el comportamiento gráfico de funciones cuando éstas son transformadas por parámetros, considerando como funciones prototipo a $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=sen(x)$ y $y=cos(x)$. En la tercera actividad se pretendió que los estudiantes lograran identificar y visualizar, gráficamente que existe una relación cuando ambos tipos de funciones son afectadas por un mismo parámetro, sabiendo que los dos tipos de funciones son de naturaleza distinta.

Diseño de actividades

Actividad 1

Indicaciones: Dadas algunas funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y trigonométricas graficarlas en los planos cartesianos dados.

$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = \cos(x)$	$y = sen(x)$
$y = x + 2$	$y = x^2 + 1$	$y = x^3 - 3$	$y = \cos(x) + 1$	$y = sen(x) - 2$
$y = -3x$	$y = 0.5x^2$	$y = 2x^3$	$y = 2\cos(x)$	$y = \frac{1}{2} sen(x)$

134

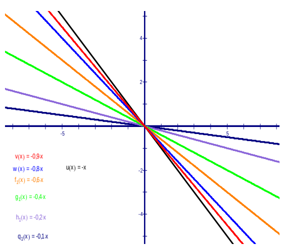
$y = x - 1$	$y = (x+1)^2$	$y = (x-21)^3$	$y = \cos(3x)$	$y = sen(\frac{1}{3}x)$

A) Graficar funciones lineales, B) Graficar funciones cuadráticas, C) Graficar funciones cúbicas, D) Graficar funciones trigonométricas (seno) y E) Graficar funciones trigonométricas (coseno)

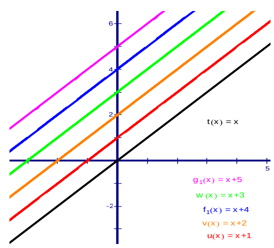
Actividad 2

Observa las funciones y sus respectivas gráficas, describe el comportamiento de las gráficas, cuando son transformadas por parámetros, considerando como funciones prototipo a y=x, y=x^2, y=x^3, y=sen(x), y=cos(x).(nota: sólo presentaremos algunas de las actividades)

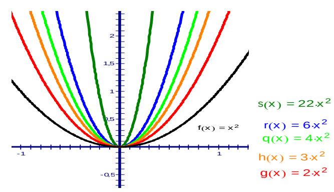
$y = Ax \quad -1\angle A\angle 0$



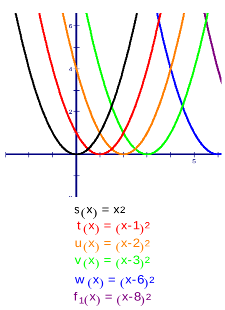
$y = x + B \quad B > 0$



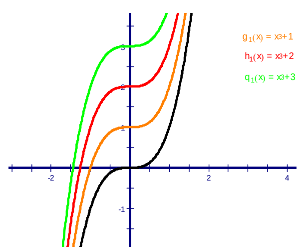
$y = Ax^2 \quad A > 0$



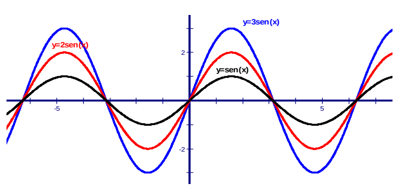
$y = (x - B)^2 \quad B\angle 0$



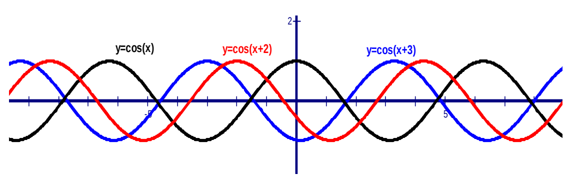
$y = x^3 + C \quad C > 0$



$y = Asen(x) \quad A > 1$

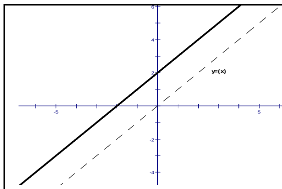
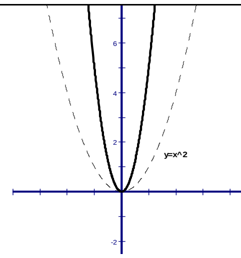
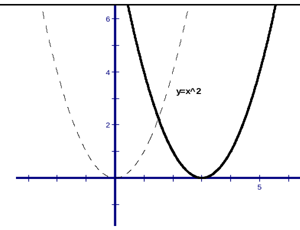
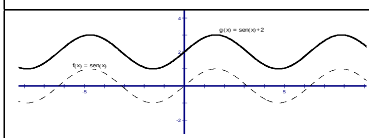
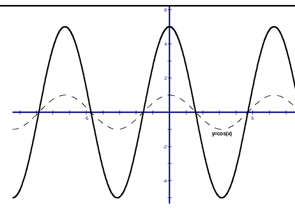
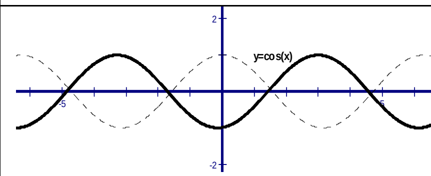


$y = \cos(x + D) \quad D > 0$



Actividad 3

Describe relación que existe entre las gráficas de los incisos A) y a), B) y b), C) y c), D) y d).

 (A) $y = x + 2$	 (B) $y = 5x^2$	 (D) $y = (x-3)^2$
 (a) $y = sen(x) + 2$	 (b) $y = 5\cos(x)$	 (d) $y = \cos(x-3)$

Resultados observados

La aplicación del cuestionario, se realizó con un grupo de diez estudiantes que cursaban un curso propedéutico para ingresar a la Universidad, a los estudiantes se les organizó en equipos de dos integrantes, la aplicación se realizó en tres momentos.

En conclusión, la actividad 1 permite el uso de los contextos algebraico, numérico y gráfico, y con ello realizar comparaciones mediante la visualización gráfica de sus producciones, se percibe que esto lo realizan sólo con funciones algebraicas, teniendo casi nulo éxito en las funciones trigonométricas. Sin embargo, a pesar de que sólo algunos equipos lograron identificar comportamientos en funciones algebraicas, fue clave para poder identificar comportamientos en las actividades posteriores (actividad 2 y 3). En cuanto a los registros de representación, en esta actividad observamos que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades para pasar del registro gráfico al algebraico, logrando conectar los registros numérico y algebraico.

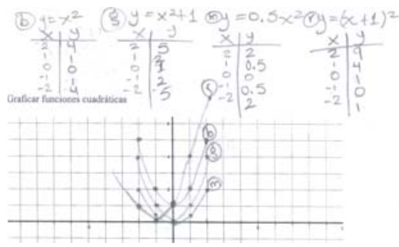


Fig. 1. Muestra la conexión entre registros (función algebraica)

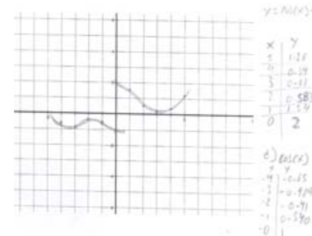


Fig. 2. Muestra dificultades en la conexión de registros (función trigonométrica)

En la actividad dos, se observó que los estudiantes lograron visualizar, identificar, comparar y describir comportamientos de ambos tipos de funciones (ver fig. 3, 4 y 5). Es decir, el registro gráfico proporcionó a los estudiantes información visual, la cual en el registro gráfico no hubiera sido posible visualizar.

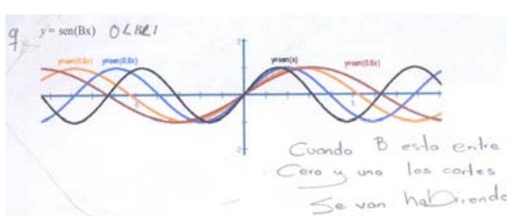


Fig. 3

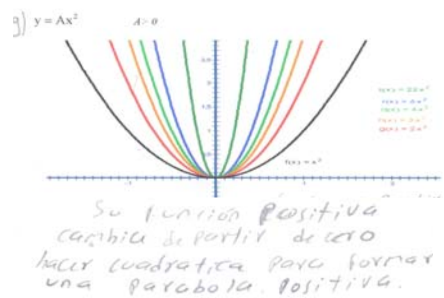


Fig. 4

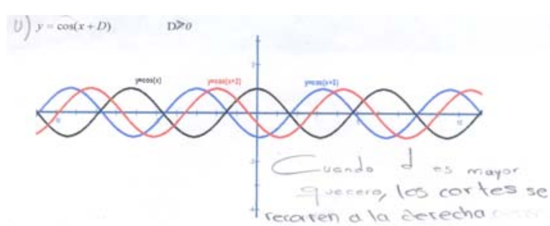


Fig. 5

En la tercera actividad, se observó que la mayoría de los alumnos, identificó comportamientos análogos entre los dos tipos de funciones (ver fig. 6). Cabe señalar que las actividades 1 y 2 jugaron un papel importante para que los estudiantes en la última actividad arribaran a este tipo de argumentaciones.

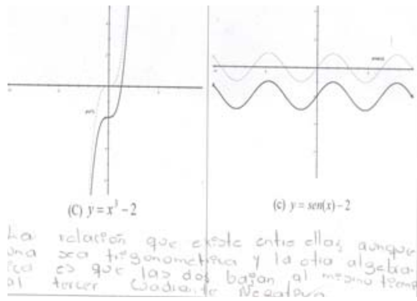


Fig. 6

De los resultados mencionados anteriormente, se señala que algunos estudiantes mencionaron que las representaciones gráficas (registro gráfico) ayudaron a identificar la relación entre las funciones algebraicas y trigonométricas cuando son transformadas por (registro algebraico) parámetros, esto fue en cuanto a sus desplazamientos. Además mencionaban que con la representación gráfica y transformaciones gráficas en funciones algebraicas y trigonométricas lograban identificar que en algunas de las funciones presentadas, existen comportamientos parecidos o similares en ambos tipos de funciones y que de otra forma no hubiesen logrado identificar, puesto que esto no lo habían visto.

Por lo tanto, hay evidencia, del hecho de que el mismo estudiante al reproducir sus propias gráficas, permite que éste identifique comportamientos análogos entre las gráficas algebraicas y trigonométricas; además, el uso de diferentes registros de representación, en este caso el algebraico, numérico, gráfico y visual coadyuvaron al desarrollo de dichas actividades.

Referencias Bibliográficas

Anfonsi, A. y Flores, M. (1948). Coordenadas y Ángulos de diversas magnitudes. [Revisión del libro *Curso de trigonometría rectilínea*]. Progreso, S. A., 71- 73.

Anfonsi, A. y Flores, M. (1948). Variación de los valores de las funciones trigonométricas. [Revisión del libro *Curso de trigonometría rectilínea*]. Progreso, S. A., 98- 99.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F. Alanís, J. A. Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México, Prentice-Hall.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1993). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. Ed. Cambray, R., Sánchez, E. y Zubieta, G. *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México, D. F.: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Ed. Hitt, F. *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201). México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Guerrero, A y Ramiro, M. (2004). *El papel de la Visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites.* Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.

Lehmann, C. (2003). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, México.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Washington, DC, EE. UU.: Mathematical Association of America.

EVALUACIÓN DEL CURRICULUM MATEMÁTICO ESCOLAR APRENDIDO

Antonio Zavaleta Bautista, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero México
zavaleta@prodigy.net.mx, cdolores@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Otros - Evaluación del Currículum Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta, de manera sintética, los resultados preliminares de un proyecto de investigación, en el cual se plantea como objetivo: evaluar el currículum matemático escolar aprendido del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Esta evaluación consiste en comparar lo que se propone en los planes y programas de matemáticas vs lo que los estudiantes al finalizar los cursos aprendieron. Para ello se elaboró y aplicó un instrumento de evaluación, diseñado sobre la base de la exploración de los dominios cognitivos: conocimiento de hechos y de procedimientos, utilización de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento. Para la realización de la evaluación, se seleccionó una muestra aleatoria proporcional a la población, el análisis de los datos se hizo con el software estadístico JMP. Los resultados obtenidos indican la existencia de una asimetría marcada ente el currículum oficial y el aprendido.*
Palabras clave: evaluación, currículum, aprendido, evaluación del currículum

Antecedentes

Bloom en los años cincuenta del siglo pasado, creó la taxonomía cognitiva que lleva su nombre, esta taxonomía se basa en la idea de que las operaciones cognitivas pueden clasificarse en seis niveles de complejidad creciente, cada nivel depende de la capacidad del alumno para desempeñarse en el nivel o los niveles precedentes, estos niveles son: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación (Eisner, 2000). En las evaluaciones actuales todavía se nota la influencia de esta teoría. Bloom desempeñó un papel fundamental en la creación de la asociación internacional de evaluación del rendimiento escolar (IEA), (Eisner, 2000).

Hoy día existen evaluaciones internaciones y nacionales que enfocan la atención principalmente en evaluar el rendimiento de los estudiantes en Ciencias, Matemáticas y lectura o el uso de esos conocimientos en la solución de problemas cotidianos. Dentro de las evaluaciones internacionales que tienen incidencia en México se conoce la de TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) y PISA (Programme for International Student Assessment) (Acevedo, 2005), dentro de las nacionales se conocen las de ENLACE (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares) (ENLACE, 2008) y CENEVAL (Centro Nacional de Evaluación) (CENEVAL, 2008).

TIMSS es un proyecto de evaluación internacional del aprendizaje escolar en matemáticas y ciencias, su objetivo es conocer el nivel de rendimiento de los alumnos, comparar los resultados y tratar de explicar las diferencias. Evalúa el rendimiento de los estudiantes en relación al aprendizaje de la naturaleza, el alcance del aprendizaje y el contexto en el que se da este aprendizaje. Para el diseño de la evaluación, TIMSS utiliza de manera amplia el currículum. Por otro lado PISA es un proyecto promovido por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) para evaluar el resultado de los sistemas educativos relativo a la formación de los alumnos necesaria para la vida adulta, tiene como objetivo indagar sobre el grado de formación o preparación de los alumnos de quince años de edad. La evaluación para el área de matemáticas está organizada por dos dimensiones: 1. El contenido matemático (cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones e incertidumbre) y 2. Las capacidades (El grupo de reproducción, el grupo de conexiones y el grupo de reflexión). Como puede apreciarse las diferencias entre TIMSS y PISA son sustanciales. El primero se interesa por el rendimiento escolar de acuerdo con lo establecido por el currículum y PISA se interesa más por el uso de los conocimientos en situaciones de la práctica cotidiana.

En cuanto a las evaluaciones nacionales que se aplican al Nivel Medio Superior principalmente son dos, la prueba ENLACE (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares) y CENEVAL. El primero es una prueba del Sistema Educativo Nacional que se aplica a planteles públicos y privados del país, en Educación Básica, a niños y niñas de tercero a sexto de primaria y jóvenes de tercero de secundaria, en Educación Media: a jóvenes que cursan el último grado de bachillerato, tiene como objetivo determinar en qué medida los jóvenes son capaces de aplicar a situaciones del mundo real conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar que les permitan hacer un uso apropiado de la lengua (Comprensión Lectora) y las matemáticas (Habilidad Matemática). El segundo, particularmente EXANI-II, evalúa los conocimientos y habilidades que debieran desarrollar los estudiantes en el NMS, en cuanto a matemáticas se refiere la evaluación considera: el razonamiento matemático y conocimientos disciplinares específicos. El primero incluye algoritmos y propiedades, clasificación, deducción e identificación y comparación. El segundo incluye: Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo, Estadística, Probabilidad.

Los resultados de las evaluaciones internacionales indican que la calidad de la educación mexicana es baja. Los resultados de la prueba PISA (Vidal & Díaz, 2004) aportan evidencias de la magnitud del problema. Afirma que en matemáticas, México sigue en el último lugar entre los países de la OCDE y en el lugar 49 de 57 países, señala que más del 50% de los estudiantes tienen conocimientos notoriamente insuficientes en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Estos resultados muestran la escasa asimilación del contenido matemático que se propone en el Currículum Oficial y, sobre todo, su escasa utilización en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Esto quiere decir que la escuela mexicana no está preparando a los estudiantes para la vida.

Problema y objetivo de la investigacion

Los procesos de evaluación han sido parte consustancial del proceso educativo en general. Muchas veces solo se utiliza para discriminar los estudiantes que son capaces y los que no lo son o bien para decidir quiénes ingresan a un centro educativo y quiénes se rechazan. En estos últimos diez años en nuestro país, bajo el pretexto de la globalización y el mejoramiento de la calidad de la educación, la evaluación se está convirtiendo en un hecho cotidiano. Las que han llegado a nuestro país han sido en primer lugar las internacionales, PISA y TIMSS. Sin embargo estas evaluaciones parten del principio de que los planes y programas de estudio, las situaciones culturales, las de enseñanza y aprendizaje, e incluso las económicas de los evaluados son homogéneas. Por ejemplo PISA evalúa principalmente la utilización de las matemáticas en la vida cotidiana. Esto no es necesariamente la orientación esencial de las matemáticas que se enseñan en las aulas mexicanas aunque en las últimas reformas curriculares intentan incorporar esta orientación. O sea evalúan lo que no necesariamente está previsto en los planes como algo sustancial. ENLACE ha seguido casi al pie de la letra este tipo de evaluación y los ítems que plantean sus pruebas tienen mucha similitud con aquellos.

Es un hecho innegable la evaluación se ha convertido en un proceso permanente, sin embargo, los subsistemas de educación en el Estado de Guerrero no tiene procesos regionales de evaluación curricular, se atienen a los resultados de PISA, ENLACE o CENEVAL. La Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) no cuenta con sistemas de evaluación interna del aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, ni mucho menos los tiene institucionalizados. Este es un *problema* para la educación en general y para la educación matemática en particular la región. Por ello, con el propósito de contribuir a su solución se plantea como *objetivo general* de esta investigación, el evaluar el currículum matemático escolar aprendido del Nivel Medio Superior de la UAG. Cuando decimos currículum matemático escolar nos referimos a la matemática que de acuerdo con los planes y programas de estudio debe enseñarse, en particular en las escuelas preparatorias de la UAG.

Elementos teóricos

Este trabajo se fundamenta en dos elementos: el currículum y la evaluación propiamente dicha**.** El *currículum* puede ser considerado como el oficial, el potencial, el impartido y el aprendido. El currículum oficial y el aprendido son los que interesan en este trabajo y se definen según Alsina (2000), al primero como los documentos oficiales donde se plasman el conjunto de objetivos, contenidos, criterios metodológicos y de evaluación que los alumnos deben alcanzar en un determinado nivel educativo y el segundo es lo que logran aprender los estudiantes. La ***evaluación*** la asumimos en un sentido restringido, según Tyler (citado en Ruiz, 1998) como una medición de lo aprendido, por tanto evaluación del currículum matemático escolar aprendido, la entendemos como una medición entre el currículum oficial y el aprendido.

La evaluación del currículum se asume en el mismo sentido que Mullis *et al* (2002), se basa en dos dimensiones: *dimensión de contenidos y dimensión cognitiva.* La dimensión de contenidos se refiere al tipo de conocimiento matemático que es impartido a los estudiantes de acuerdo con el currículum oficial. De acuerdo a nuestras indagaciones este conocimiento matemático impartido a los estudiantes del NMS de la UAG, se refiere a: Aritmética y Algebra (Matemáticas 1), Geometría y Trigonometría (Matemáticas 3) y Cálculo Diferencial (Matemáticas 5).

La dimensión cognitiva se refiere al conjunto de saberes, habilidades y destrezas desarrolladas por los estudiantes: conocimiento de hechos y de procedimientos, utilización de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento. Los hechos engloban el conocimiento factual, así como las propiedades y los hechos matemáticos esenciales, los procedimientos implican recordar conjuntos de acciones y cómo llevarlas a cabo. La utilización de conceptos se refiere a la capacidad para hacer conexiones entre elementos de conocimiento, permite extenderse más allá de sus conocimientos existentes, juzgar la validez de enunciados y métodos matemáticos y crear representaciones matemáticas. La resolución de problemas es un objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas y las destrezas de apoyo que se exploran son, por ejemplo, manipular expresiones, seleccionar, representar, obtener un modelo y aplicarlo, verificar o comprobar, todas estas acciones son indicadoras del dominio de resolución de problemas habituales. El término habitual se refiere al tipo de problemas que se resuelven en la práctica didáctica cotidiana. El razonamiento implica la capacidad de pensamiento lógico y sistemático, incluye el razonamiento intuitivo e inductivo basado en patrones y regularidades que se pueden utilizar para llegar a soluciones para problemas no habituales

Metodología

La ruta metodológica que se siguió en este trabajo, comprendió tres fases: *1. Diseño, 2. Aplicación y 3. Análisis de los resultados.*

1. Diseño de la evaluación: para el diseño de la evaluación se hizo un análisis del currículum, sobre la base de este análisis y del marco teórico se elaboraron las preguntas. Estas preguntas pasaron por 4 procesos de validación. El instrumento definitivo estuvo constituido por tres cuestionarios (uno para la evaluación del primer semestre, otro para el segundo y el último para el tercer semestre)

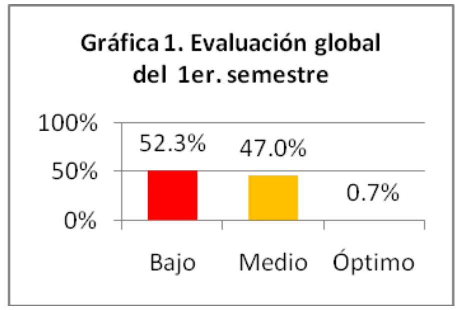
2. Aplicación de la evaluación: Para la aplicación de la evaluación seleccionamos una muestra aleatoria, esta muestra estuvo integrada por 2,496 alumnos de las Unidades Académicas de las siete regiones del Estado de Guerrero. La aplicación del instrumento de evaluación se realizó de manera simultánea en un periodo de 4 días a las Unidades Académicas seleccionadas por la muestra.

3. Análisis de los resultados: para el análisis, nos dimos a la tarea de concentrar toda la información y calificar los cuestionarios. Para esto digitalizamos todas las hojas de respuestas, las cuales fueron calificadas con un programa hecho en una hoja de cálculo; para el análisis y procesamiento de los datos estos fueron llevadas al paquete estadístico JMP, en el cual se hizo todo el análisis estadístico.

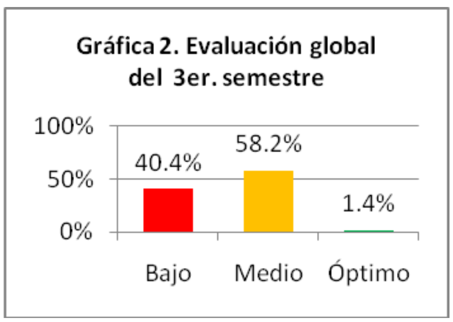
Resultados globales

Como ya mencionamos, evaluamos el currículum matemático escolar de los semestres I, III y V, por tanto los resultados acerca de las evaluaciones las estructuramos por semestre.

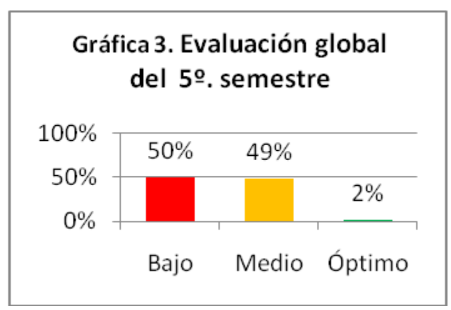
Primer semestre. Sólo el 0.7% (1 de cada 143) de los estudiantes alcanzaron cabalmente los objetivos planteados. Casi la mitad del total (el 47%) mostraron haber logrado un nivel de alcance medio, es decir que alcanzaron entre el 30% y 60% de los objetivos propuesto en el plan, y más de la mitad (para ser precisos el 52.3%) mostraron un bajo alcance de los objetivos, es decir sólo alcanzaron menos del 30% de los objetivos propuestos. Esto se ilustra en la gráfica 1.



Tercer semestre. Sólo el 1.4% de los estudiantes alcanzaron los objetivos planteados en el plan de estudios. Más de la mitad (el 58.2%) mostraron haber alcanzado un nivel medio y el 40.4%, poco menos de la mitad, mostraron un nivel de alcance bajo de los objetivos de este semestre. esto se resume en la gráfica 2.



Quinto semestre, evaluación global. Sólo 2 de cada 100 estudiantes son los que lograron alcanzar los objetivos planteados en el plan de estudios correspondientes a este semestre (Cálculo diferencial), el resto no logró alcanzar todos los objetivos del curso, casi la mitad del total el 49% mostraron haber alcanzado un nivel medio y la mitad mostraron un alcance bajo de los objetivos planteados en plan de estudios oficial correspondiente al quinto semestre.



Respecto de la parte cognitiva, la mayoría de los estudiantes mostró tener conocimiento de hechos y de procedimientos. Sólo el 18% mostró habilidades para la utilización de conceptos. Sólo el 5% se mostró habilidades para la resolución de problemas habituales. En parte esto se debe, así lo suponemos, a que lo planeado en currículum oficial la mayoría de los objetivos están orientados al desarrollo de las habilidades más elementales, muy pocos están referido a la resolución de problemas y no encontramos ninguno que esté orientado al desarrollo del nivel más alto: razonamiento.

Conclusiones

Los resultados que arrojó este estudio indican que existe una asimetría muy marcada entre el currículum matemático planeado y el currículum matemático logrado. Los resultados nos permiten afirmar que en promedio sólo un 1.4 % de los estudiantes alcanzan los objetivos previstos en el plan, el 51.4% de los estudiantes alcanzan entre el 33% y el 66% de los objetivos y el 47.3% de los estudiantes alcanzan menos del 33% de estos objetivos.

En cuanto a los objetivos con mayor alcance por los estudiantes, para el *primer semestre*. Fueron los relacionados al significado y aplicación a problemas cotidianos, de las cuatro operaciones elementales de la Aritmética con números racionales, así como en el conocimiento de los productos notables y factorizaciones elementales. El porcentaje de estudiantes que alcanzaron estos objetivos varía del 25% al 37.1%. Los resultados más bajos en la evaluación del primer semestre lo obtuvieron en los objetivos referidos a: factorizaciones de expresiones algebraicas de más de tres términos, ampliar el dominio del conjunto de los números racionales a los irracionales y la resolución de problemas cotidianos que se modelan con expresiones algebraicas. El porcentaje de estudiantes que alcanzaron estos objetivos varía del 1.7% al 8.4%.

En el *tercer semestre*, los estudiantes mostraron mayor conocimiento en los objetivos relativos a: cálculo de áreas y volúmenes de figuras planas y cuerpos geométricos regulares utilizando las fórmulas correspondientes, así como en la identificación de los elementos de un sistema axiomático de la geometría clásica. El porcentaje de los estudiantes que alcanzaron estos objetivos va del 30.3% al 78.6%. Los resultados más bajos lo mostraron en los objetivos referidos a: las propiedades trigonométricas de triángulos no rectángulos y su aplicación a la solución de problemas, propiedades de la congruencia y semejanza de triángulos y la desigualdad triangular, y las propiedades trigonométricas de los números reales en el campo complejo en su forma polar, así como las operaciones suma y producto de complejos. Estos objetivos sólo lo alcanzaron entre el 3.5% y 3.9% de los estudiantes.

Los mejores resultados de la evaluación del ***quinto semestre***, lo obtuvieron en los objetivos relativos a: las condiciones de diferenciabilidad de una función en un intervalo semiabierto, clasificación y discusión analítica y gráfica de las funciones, deducción de las fórmulas básicas de derivadas. Entre el 16% y el 20% de los estudiantes alcanzaron estos objetivos. Los resultados más bajos en este quinto semestre lo mostraron en los objetivos referidos a: las ideas intuitivas de límite y continuidad, cálculo de límite de funciones elementales, resolución de problemas de aplicación de la derivada y la interpretación de la derivada como límite de un cociente, como razón de cambio y como la pendiente de la tangente en un punto definido de f.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. (2005). TIMSS y PISA. Dos proyectos internacionales de evaluación del aprendizaje escolar en ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 2 (3), 282-301

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J. M. *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. (13-21). España, Editorial Graó, de IRIF, S.L.

CENEVAL. (2008). Recuperado el 2 de Febrero de 2008, de *http://www.ceneval.edu.mx*

ENLACE. (2008). Recuperado el 10 de Febrero de 2008, de *http://enlacemedia.sep.gob.mx/*

Eisner, E. W. (2000). Benjamin Bloom (1913-1999). *Perspectivas: revista trimestral de educación* , 423-432.

Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González, E., Chrostowski, S. y O'Connor, K. (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Editorial Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones.

Ruiz, E. (1998). *Propuesta de un modelo de evaluación curricular para el nivel superior, una orientación cualitativa*. México, D.F.: Editorial Universidad Autónoma de México.

Vidal, R., y Díaz, M. A. (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México.* México.: INEE.

VALIDEZ Y LA CONFIABILIDAD DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR ANSIEDAD EN MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: LA ESCALA DE EVALUACIÓN DE LA ANSIEDAD EN MATEMÁTICAS (MARS)

José Gabriel Sánchez Ruiz, Carolina Barragán Ortiz
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Universidad Nacional Autónoma de México — México
josegsr@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Medición — Nivel: Superior

Resumen. *Se presentan los resultados del análisis de confiabilidad y validez de la Escala de Evaluación de la Ansiedad en Matemáticas-versión breve (MARS-bv). La versión original de la escala, aunque en español, no fue diseñada para población latinoamericana por ello era importante desarrollar un proceso sistemático de revisión de la MARS, dentro de un contexto de interés por encontrar variables que puedan predecir el rendimiento académico. Este trabajo surge como una necesidad de disponer de un instrumento confiable y válido que evalué la ansiedad producida ante las matemáticas. Los resultados mostraron que la MARS, después de ligeras adecuaciones para utilizarla en estudiantes universitarios mexicanos, es un instrumento confiable y con validez que permitiría evaluar la ansiedad a las matemáticas.*
Palabras clave: ansiedad a las matemáticas, escala MARS

La ansiedad es una respuesta compleja en la que interviene un componente fisiológico, uno conductual y uno cognitivo. Se define por un estado de alerta ante una señal difusa de peligro o amenaza y constituye un estado no placentero caracterizado por intranquilidad, expectación aprehensiva y aumento en la vigilancia. Además, la ansiedad desencadena una serie de reacciones que controla el Sistema Nervioso Autónomo como palpitaciones, sacudidas del corazón o elevación de la frecuencia cardiaca, tensión muscular, insomnio, sudoración, temblores o sacudidas, sensación de ahogo o falta de aliento, sensación de atragantarse, opresión o malestar torácico, náuseas o molestias abdominales, inestabilidad, miedo a perder el control, miedo a morir, parestesias -entumecimiento u hormigueo- entre otros. Asimismo, la ansiedad es difícil de controlar e interfiere significativamente en la actividad general del individuo.

La ansiedad es un tema que también se ha discutido en el marco del ámbito escolar. El alumno con ansiedad tiene sentimientos de incompetencia pues esta le plantea una exagerada amenaza a su autoestima; además, parece estar asociada con el bajo rendimiento académico (Hadfield, Martin y Wooden, 1992).

Para Beck, Emery y Greenbery (1985) diversas circunstancias provocan la sensación de ansiedad, por ejemplo, hablar en público o salir en una fecha determinada. Hay evidencia de algunas décadas atrás (Richardson y Suinn, 1972) acerca de que se puede sufrir de formas específicas de ansiedad como la ansiedad a los exámenes académicos y a las matemáticas. Incluso, dentro del escenario escolar, en la literatura se ha planteado que una variable que correlaciona negativamente con el rendimiento y la participación en matemáticas es la ansiedad a las matemáticas (Betz, 1978; Dew, Galassi y Galassi, 1983; Frary y Ling, 1983; Hadfield, Martin y Wooden, 1992).

El concepto de ansiedad a las matemáticas emergió a principios de los setenta al intentar identificar las causas de la participación y el logro diferencial en matemáticas entre hombres y mujeres (Brown y Gray, 1992). Al investigar sobre la ansiedad en matemáticas se han encontrado diferencias entre géneros en ansiedad, específicamente, que los estudiantes masculinos manifiestan menos ansiedad hacia las matemáticas que las mujeres, que las personas de mayor edad son más ansiosas que personas más jóvenes, y que los directivos en educación elemental muestran más ansiedad que los de otras áreas (Betz, 1978, y Rounds y Hendel, 1980, cits. en Brown y Gray, 1992). No obstante, los hallazgos de la investigación realizada plantean más preguntas, por ejemplo: si los muy ansiosos pueden simplemente estar más dispuestos a aceptar la ansiedad que los otros; si la ansiedad fue acerca de las matemáticas o sobre alguna situación en la cual los sujetos han sido evaluados, y si la ansiedad no fue meramente un reflejo de su escases de entrenamiento y habilidad en matemáticas (Resnick, Viehe y Segal, 1982).

Aunque la ansiedad, junto a la depresión, es uno de los componentes más relevantes de las alteraciones psicofísicas de la clasificación nosológica actual (Sierra, Ortega y Zubidat, 2003), debe ser vista como una respuesta normal y necesaria, en contraparte con la ansiedad como una respuesta desadaptativa (ansiedad patológica). La clave para diferenciar ambas respuestas puede residir en que la ansiedad patológica se manifiesta con mayor frecuencia, intensidad y persistencia que la ansiedad normal, es decir, esta presenta diferencias cuantitativas respecto a aquella.

La ansiedad a las matemáticas es “una reacción emocional de evitación a situaciones que requieren tareas numéricas o conceptos matemáticos. No está necesariamente relacionada con la inteligencia general, frecuentemente afecta a personas altamente exitosas en otras áreas” (Morris, 1981, cit. en Hadfield, Martin y Wooden, 1992, p. 171). Es decir, se trata de una ansiedad asociada con el campo particular de la manipulación de números y el uso de conceptos matemáticos, e involucra sentimientos de tensión y ansiedad que interfieren con la solución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones de la vida ordinaria y académica, además, se han encontrado evidencias de que existe en muchos individuos que no sufren ordinariamente de algún otro tipo de ansiedad (Richardson y Suinn, 1972).

La presente investigación se desarrolló considerando, por una parte, el efecto de la ansiedad sobre el rendimiento académico y su papel como una fuente de problemas académicos independientemente de la capacidad intelectual del estudiante; además, por otra lado, como menciona Vigil-Colet, Lorenzo-Seva y Condon (2008), el interés frecuente por encontrar variables que puedan predecir el rendimiento académico así como la evidencia empírica que sugiere que las variables de personalidad, es decir, factores intrínsecos al alumno, pueden jugar un papel importante en la predicción del rendimiento académico, tomando en cuenta las diferencias de potencia de predicción entre las medidas de personalidad generales y las específicas. En particular este trabajo surge como una necesidad de disponer de un instrumento confiable y válido para evaluar la ansiedad producida ante las matemáticas, asignatura en la cual frecuentemente el rendimiento tiende a ser bajo (Sánchez, Becerra, García y Contreras, 2008). Dicho instrumento es la Escala de Evaluación de Ansiedad en Matemáticas-versión corta, MARS-bv, por sus siglas en inglés (Richardson y Suinn, 1972). El objetivo consistió en examinar las propiedades psicométricas de validez y confiabilidad de la MARS-bv, sobre todo porque esta escala no ha sido aplicada y, por lo tanto, validada en población mexicana.

De acuerdo con Suinn (1990), además del proceso de entrevista, pueden lograrse diagnósticos sobre los estados de ansiedad a través de una variedad de procedimientos, en gran medida esquematizados por la complejidad de las definiciones conceptuales ofrecidas sobre la ansiedad, apreciándose no pocas veces la necesidad de una especificidad en la medición, por ejemplo, en las matemáticas. Sin pretender ser exhaustiva la revisión de las características de algunos de los instrumentos desarrollados, en Fuentenebro y Vázquez (1990) se pueden consultar los más frecuentemente utilizados para evaluar la ansiedad.

Este trabajo se justifica en el hecho de que disponer de un instrumento psicológico que mida con validez y confiabilidad el nivel de ansiedad de los alumnos redundará en poder identificar adecuadamente el papel de esta en la interacción del estudiante con las matemáticas con ello se deslindará la contribución de la ansiedad, en relación con otros más que podrían estar involucrados en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: capacidad intelectual del estudiante, estrategias de enseñanza, motivación, etc. Pero, además al poder identificar adecuadamente niveles de ansiedad, se ha dicho que muy altos o muy bajos (Chávez, 1998), que obstaculicen el desempeño del estudiante sería posible canalizarlos a tratamiento profesional para el control de su estado de ansiedad.

Método

Sujetos (Ss): Participaron 254 estudiantes universitarios, a quienes se les aplicó la MARS-bv, que constituían el 79.37 % de los alumnos inscritos en el semestre escolar de interés al momento de iniciar el estudio. Cabe decir que con la población estudiantil de la cual se extrajo la muestra de este estudio, posteriormente, se pretende desarrollar investigación sobre ansiedad a las matemáticas. La muestra fue probabilística y estratificada constituida por estudiantes de primer semestre que en ese momento realizaban el curso oficial de matemáticas I del Plan de Estudios de la Carrera de Psicología, como parte de su formación profesional. El 23.3% fue de sexo masculino y el 76.7% de sexo femenino, lo cual correspondió con la distribución típica por sexo de los alumnos en la Carrera de Psicología. A 132 de estos estudiantes seleccionados aleatoriamente se les administró otro instrumento (Inventario de Ansiedad Rasgo-Estado (IDARE), de Spielberger y Díaz Guerrero, 1975) que tradicionalmente se emplea para evaluar la ansiedad como un atributo de la personalidad (i.e., rasgo) y como una respuesta contextual (i.e., estado), con el fin de examinar la validez concurrente de la MARS-bv.

Instrumentos: Se empleó la MARS-bv (Richardson & Suinn 1972), en una versión en español provista a los autores de este trabajo por uno de los autores originales de la MARS del formato extenso y breve (R. M. Suinn, comunicación personal, 3 de agosto, 2007). La escala está compuesta por 30 ítems consistentes en breves descripciones de situaciones conductuales, las cuales pueden incitar diferentes niveles de ansiedad en las personas. Una extensa variedad de situaciones están incluidas para permitir su aplicación a diversos grupos de personas, incluyendo estudiantes y no estudiantes. La MARS-bv está construida en un formato tipo Likert de 4-puntos, en la que el valor de 0 a 4 corresponde al nivel de ansiedad detectado por el sujeto en cada reactivo, el 0 es asignado a "nada en absoluto" de ansiedad y el 4 refleja "muchísimo" experimentar ansiedad. La puntuación total de ansiedad a las matemáticas es cuantificada sumando todos los valores proporcionados por el sujeto. Una alta puntuación refleja un alto nivel de ansiedad en matemáticas. En la Tabla 1 se muestran ejemplos de algunos reactivos de la MARS-bv.

Instrucciones…*ponga una marca (√) en el cuadro que está en la columna que describa cuánta ansiedad, nerviosismo, tensión o presión le provoca la situación descrita en ese momento. Una puntuación de 0 significa que le provoca nada de ansiedad, nerviosismo o tensión, y una puntuación de 4 significa que le provoca muchísima ansiedad*…

Número de ítem	Contenido del ítem	Escala				
		0	1	2	3	4
1	Resolver un examen final en un curso de matemáticas.					
10	Estudiar para un examen de matemáticas.					
22	Tener a alguien observándolo mientras está sumando una columna de cifras.					
27	Observar a alguien trabajar con una calculadora.					

Tabla 1. Ejemplo de ítems de la MARS-bv

Cabe mencionar que la información de la validez y confiabilidad con la que se disponía al iniciar el estudio correspondía a la versión original de la MARS que consta de 98 ítems. Las medidas de consistencia interna se establecieron bajo el método de test-retest utilizando muestras grandes de estudiantes del Estado de Missouri. El coeficiente alfa obtenido para evaluar su confiabilidad fue de .97. La validez fue determinada de dos maneras: 1) de datos recolectados en un estudio independiente sobre su validez, conducido en Missouri y 2) de tres estudios sobre ansiedad con estudiantes de Missouri y de Colorado, en ambas casos esto sugirió validez de constructo de la escala. Dado que antes no se había aplicado la MARS-bv en población mexicana, aunque sí en estudiantes hispanos residentes en EUA, no se contaba con alguna referencia sobre su validez y confiabilidad en estudiantes universitarios de México, aún cuando se dispone de su versión en español.

Como se indicó, para explorar la validez concurrente de la escala también se empleó el IDARE. Este inventario está constituido por dos escalas separadas de autoevaluación que se utilizan para medir dos dimensiones distintas de la ansiedad: la Ansiedad-Rasgo y la Ansiedad-Estado. Ambas escalas consisten de 20 afirmaciones, en la escala de Ansiedad-Rasgo se pide a los sujetos describir cómo se sienten generalmente. En contraste, en la de Ansiedad-Estado se requiere que los sujetos indiquen como se sienten en un momento dado. El IDARE es un instrumento que tradicionalmente se aplica en México pero en escenarios de investigación y clínicos. Puesto que se considera al IDARE bastante confiable, su coeficiente está entre .83 a .92 para ambas escalas, y adaptado para la población mexicana, aunque no diseñado para medir una ansiedad específica, se eligió para evaluar la validez concurrente de la MARS.

Procedimiento: Una vez obtenida la versión corta en español de la MARS, primero se realizó una aplicación piloto de la versión tal cual fue enviada por uno de los autores de la escala. La aplicación se realizó con el propósito de identificar posibles dificultades por parte de los estudiantes para entender el lenguaje usado. Adicionalmente, por expertos, se determinó la validez de facie de la MARS-bv. A partir de las sugerencias recabadas durante el piloteo de la escala y opiniones hechas por profesores psicólogos en el carácter de expertos que laboran en la UNAM, se realizaron algunas modificaciones a la MARS. Si bien de la versión original se sustituyeron algunas palabras, por otras de uso más común en nuestro contexto, la escala mantuvo su estructura original. Posteriormente, se aplicó la MARS y el IDARE. Aunque la aplicación no se realizó a todos los Ss el mismo día, sí se aplicaron la MARS y el IDARE en la misma sesión. Las aplicaciones se realizaron en forma grupal (aproximadamente 47 sujetos por grupo), se destaca que el IDARE sólo fue administrado a 132 de los sujetos del estudio dado que su uso fue únicamente con el fin de explorar la validez concurrente de la MARS. Por último, se procedió a la calificación y al análisis correspondiente de confiabilidad y validez de la MARS-bv.

Diseño: Cuasi-experimental *ex post facto* de una sola medición (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Resultados

Primero se analizó la distribución de frecuencia de la muestra (n=254) respecto a la puntuación total de la MARS obteniendo un promedio de 37.2 (DS= 17.6). El pico de la frecuencia de la puntuación total se encuentra en un rango de 24 a 28, seguida por el de 32 a 36. Mientras que el de la curva de normalidad se situó en un recorrido de 36 a 40. El comportamiento de la distribución de frecuencia de las puntuaciones de la MARS es considerablemente aproximado a la distribución normal (As= .41, Curtosis= -.49). Además, se aplicó estadística descriptiva para identificar los reactivos de la MARS donde hubo mayores índices de ansiedad en diferentes contextos relacionados con las matemáticas y así conocer las situaciones específicas donde se manifiesta la ansiedad. Se encontraron diferencias entre conjuntos de reactivos que competen a diferentes situaciones que provocarían ansiedad hacia las matemáticas. Cabe mencionar que este tipo de análisis permitiría identificar qué aspectos de las matemáticas generan mayor o menor ansiedad en los alumnos.

La confiabilidad de la MARS se analizó mediante el método basado en una sola aplicación del instrumento. Con el procedimiento de matriz de covariante se calculó el coeficiente Alpha de Cronbach para la estimación de la consistencia interna obteniendo un coeficiente de .92, lo cual muestra que la escala MARS tiene un alto grado de consistencia interna. También se empleó el método de mitades partidas para corroborar la confiabilidad. Con este método el coeficiente alpha obtenido para la parte 1 (reactivos 1 a 15) fue de .91, y de .91 para la parte 2 (reactivos 16 a 30).

Se evalúo la validez de constructo empleando un análisis factorial para constatar la agrupación de los reactivos, además, se analizó la congruencia conceptual entre los factores resultantes y el agrupamiento de los reactivos. Finalmente, se evaluó la validez concurrente de la MARS examinando con el coeficiente de Spearman la correlación entre los datos obtenidos en la MARS y en el IDARE. El método de Análisis de Componentes Principales mostró que los ítems se agrupan en seis factores que en conjunto explican el 64.23 % de la varianza total, esto contrasta con lo reportado por Richardson y Suinn (1972) acerca de que los ítems de la escala están fuertemente dominados por un sólo factor homogéneo, presumiblemente ansiedad matemática, aunque esto ellos lo reportaron para la versión extensa de la MARS. El análisis factorial mostró una carga factorial de los ítems en un recorrido de .50 a .77 lo cual sugiere la pertinencia de los ítems y que la escala MARS es un instrumento válido. Respecto a la validez concurrente, hubo una mayor correlación significativa de la puntuación total de la MARS con el IDARE-Rasgo (r = .45, p < .01), incluso más del doble, que con el componente Estado del IDARE (r = .20, p <.05).

Por otra parte, considerando la adecuada validez y confiabilidad que posee la MARS, al analizar los datos obtenidos en los alumnos de la Carrera de Psicología se encontró que experimentan mayor ansiedad hacia las matemáticas en relación con la resolución de exámenes, mientras que exhiben poca ansiedad situaciones relativas al manejo de cantidades numéricas grandes y a la realización de operaciones matemáticas.

Conclusiones

Los resultados del análisis de confiabilidad y validez que se realizaron a la MARS son muy alentadores, por tal motivo es posible considerar que la escala posee un alto grado de consistencia interna y validez (de constructo y concurrente), lo cual significa que la MARS es un instrumento que posee las propiedades psicométricas adecuadas para evaluar el nivel de ansiedad en Matemáticas y conocer las situaciones específicas donde la ansiedad se manifiesta. Se puede decir que el disponer de un instrumento que permita medir adecuadamente la ansiedad a las matemáticas permitirá conocer el impacto de la ansiedad en el escenario de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Beck, A.T. Emery, G. y Greenbery, R. L. (1985). *Anxiety disorders and phobias: a cognitive perspective.* New York: Basic Books.

Betz, N. E. (1978). Prevalence, distribution and correlates of math anxiety in college students. *Journal of Counseling Psychology.* 25 (5), 441-448.

Brown, M. y Gray, M. W. (1992). Mathematics test, numerical, and abstraction anxieties and their relation to elementary teacher's views on preparing students for the study of algebra. *School Science and Mathematics.* 92 (2), 69-73.

Chávez, V. M. (1998). *Correlación entre ansiedad y rendimiento académico en alumnos de 5° grado de preparatoria.* Tesis de Licenciatura. México: UNAM

Dew, K. H., Galassi, J. P. y Galassi, M. D. (1983). Mathematics anxiety: some basic issues. *Journal of Counseling Psychology.*30 (3), 443-446.

Frary, R. B. y Ling, J. L. (1983). A factor-analytic study of mathematics anxiety. *Educational and Psychological Measurement*. 43(4), 985-993.

Fuentenebro, F. y Vazquez, C. (1990) *Psicología Médica. Psicopatología y Psiquiatría.* México: McGraw- Hill.

Hadfield, O. D, Martin, J. y Wooden, Sh. (1992). Mathematics Anxiety and Learning Style of the Navajo Middle School Student. *School Science and Mathematics.* 92, 4, 171-176.

Hernández, S. R. Fernández, C. C. y Baptista, L. P. (2006). *Metodología de la Investigación.*4ª. Edición. México: Mc Graw-Hill.

Resnick, H., Viehe, J. y Segal, S. (1982). Is mathematics anxiety a local phenomenon? A study of prevalence and dimensionality. *Journal of Counseling Psychology*. 29, 39-47.

Richardson, F. y Suinn, R. M. (1972).The Mathematics Anxiety Rating Scale. *Journal of Counseling Psychology*. 19, 551-554.

Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J. Ma. de L. & Contreras, R. Ma. del S. (2008). La conducta de éxito en el aprendizaje de la estadística: ¿una variable multicausal? *Revista Mexicana de Psicología* (Número especial), 311-312.

Sierra, J. C., Ortega, V. y Zubidat, I. (2003). Ansiedad, angustia y estrés: tres conceptos a diferenciar. *Revista Mal-estar E Subjetividade*, 3, 001, 10 - 59.

Spielberger Ch. D. y Díaz Guerrero R. (1975). *Inventario de Ansiedad: Rasgo- Estado.* México: Manual Moderno.

Suinn, R.M. (1990). *Anxiety Management Training.* New York: Plenum Press.

Vigil-Colet, A., Lorenzo-Seva, U., y Condon, L. (2008). Development and validation of the Statistical Anxiety Scale. *Psicothema* 20 (1), 174-180.

LOS CONTEXTOS EN LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO

Hugo Parra Sandoval
Universidad del Zulia — Venezuela
hps1710@yahoo.es
Campo de investigación: Formación de profesores — Nivel: Superior

Resumen. *El objetivo principal del presente reporte de un proyecto de investigación que se inicia es el de analizar la manera cómo los docentes relacionan los fenómenos presentes en el contexto, con los conceptos y estructuras matemáticas. Este proceso de incorporación de los fenómenos en el marco de su actividad docente es parte constitutiva de su conocimiento didáctico matemático. Se entiende por contexto, todos aquellos fenómenos perceptibles a los sentidos o no, pero que son parte del acervo cultural de la población estudiada. Para el logro del mencionado objetivo haremos uso de lo que se conoce como "análisis fenomenológico"; (Gómez, 2007; Puig, 1997). Como escenario de investigación se considerarán Unidades Educativas del nivel Medio. Para el estudio en cuestión se abordará un enfoque cualitativo etnográfico (Loiola & Carvalho, 2006), en la modalidad de Estudios de Caso (Stake, 1999).*
Palabras clave: contexto, conocimiento didáctico, análisis fenomenológico

La ponencia que presentamos es una síntesis de un proyecto de investigación que se inicia. Nos interesa en particular el estudio del impacto que podría generar la incorporación de elementos del contexto a situaciones de aprendizaje de las matemáticas en el proceso de construcción del conocimiento didáctico matemático de los docentes que cursan estudios de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física en la universidad.

Planteamiento del problema

La incorporación de los contextos en los procesos de enseñanza de las matemáticas es una demanda introducida tanto por el Estado venezolano en la actual propuesta de reforma curricular de la educación preuniversitaria del país (MPPE, 2007), como del campo de la Didáctica de las Matemáticas (Mora, 2005; Segovia y Rico, 2001). Estas exigencias se justifican por el deseo de que las matemáticas contribuyan en la formación de un ciudadano consciente y participativo de la sociedad democrática y no sea, como lo es la matemática en la actualidad, factor de exclusión escolar (Nuria & López, 2007; Skovsmose & Valero, 2007). En razón de ello, nos proponemos en esta investigación analizar la manera cómo los docentes relacionan los contextos con los conceptos y estructuras matemáticas en el marco de su actividad docente, lo cual repercute en los proceso de construcción del conocimiento didáctico matemático de los futuros docentes; esto es, en los procesos de construcción del conocimiento necesario para planificar, ejecutar y evaluar situaciones de aprendizaje de las matemáticas (Parra, 2008; Gómez & Carulla, 2001, Cooney, 1994) Por otra parte, se entiende por contexto en esta investigación, todos aquellos fenómenos perceptibles a los sentidos o no, pero que son parte del acervo cultural de la población que está inmersa en los procesos de enseñanza de las matemáticas. Para ello haremos uso de lo que se conoce como *análisis fenomenológico*; es decir, el proceso mediante el cual se describe y relaciona el contexto – es decir, los fenómenos – de manera que sirvan como medio de organización de un concepto matemático y su estructura en los proceso de enseñanza (Puig, 1997). Es importante señalar que la incorporación de los fenómenos en la implementación de la reforma curricular planteada en los procesos de enseñanza ha sido motivo de preocupación por parte de los docentes, en especial de aquellos que laboran en los niveles de la tercera etapa de la Educación Básica y Media Diversificada y Profesional o lo que se denomina en a propuesta curricular como la secundaria (MPPE, 2007). Las causas de estas dificultades podrían ser variadas; así, algunas personas consideran que se trata de la falta de suficientes herramientas matemáticas o didácticas que le permitan de manera eficiente y eficaz tomar en consideración elementos del contexto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, otros señalan deficiencias en la organización escolar (tiempo, cantidad de alumnos, etc.), pero en general nunca se indaga en profundidad acerca de las razones que los docentes argumentan durante el proceso de incorporación del contexto en los procesos de enseñanza. Por ello nos planteamos entre muchas las siguientes interrogantes: ¿Qué manifiestan los docentes respecto a la propuesta de incorporación de elementos del contexto – es decir, de fenómenos - a los procesos de enseñanza de las matemáticas? ¿Qué tipo de fenómenos incorporan en sus actividades de clase? ¿Qué conceptos y estructuras matemáticas relacionan con los fenómenos? Para responder a estas preguntas nos planteamos los objetivos que a continuación se presentan.

Objetivos

Como objetivo general de la investigación nos hemos propuesto:

* Analizar la manera como los docentes relacionan los fenómenos con los conceptos y estructuras matemáticas en el marco de su actividad docente

A objeto de lograr el mencionado objetivo, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

1.- Identificar los fenómenos incorporados en las actividades docentes de los profesores de matemática

2.- Identificar las estructuras y conceptos matemáticos relacionados con los fenómenos en el marco de la actividad docente matemática

3.-Establecer las relaciones entre los fenómenos, las estructuras y conceptos matemáticos en el marco de la actividad docente matemática.

Metodología

Para el estudio en cuestión se abordará un enfoque cualitativo, que permite estudiar el proceso en toda su complejidad (Loiola & Carvalho, 2006).Dentro de este enfoque la metodología a privilegiar será la Etnográfica, en la modalidad de Estudios de Caso, ya que la misma permitirá indagar en profundidad los procesos personales y colectivos (Stake, 1999) de un grupo de docentes que, ejerciendo la docencia en matemática, se proponen incorporar elementos del contexto a la misma, atendiendo de esta manera a uno de los requerimientos del Estado venezolano. Como escenario de investigación se considerarán Unidades Educativas de la tercera etapa de Educación Básica y Media Diversificada y Profesional. Las técnicas a privilegiar durante el proceso de recolección de información de la investigación serán la entrevista a profundidad, la observación participante y no participante, el registro anecdótico y la revisión documental. Para el análisis de la información hemos establecido por cada objetivo un conjunto de categorías con sus respectivas propiedades las cuales serán sometidas a una revisión permanente de manera que éstas sean finalmente las adecuadas para el logro de los objetivos planteados (ver cuadro 1). (Glasser y Strauss, 1967)

OBJETIVOS	CATEGORÍA	PROPIEDADES
Identificar los fenómenos incorporados en las actividades docentes de los profesores de matemática	*Tipos *Presencia	Cotidiano Social Científico Otro Frecuencia Aceptada por los estudiantes
Identificar las estructuras y conceptos matemáticos relacionados con los fenómenos en el marco de la actividad docente matemática	*Tipo de estructura *Pertinencia de la estructura	Numérica Geométrica Estocástica Algebraica Responde a las necesidades de los estudiantes Responde a los intereses de los estudiantes
Establecer las relaciones entre los fenómenos, las estructuras y conceptos matemáticos en el marco de la actividad docente matemática.	*Tipo	Relación de la estructura matemática con fenómenos cotidianos Relación de la estructura matemática con fenómenos científicos Relación de la estructura matemática con fenómenos sociales

Cuadro 1. Relación entre objetivos, categorías y propiedades

El proceso de revisión se hará triangulando los hechos registrados con la teoría y las mismas interpretaciones que de los hechos realicen los docentes participantes del estudio. Este proceso de triangulación contribuiría a la validación de los resultados debido a que serían los puntos de encuentro los que resultaran de mayor fiabilidad (ver gráfico 1)

Gráfico 1. Validación de los resultados

Viabilidad del proyecto

Un aspecto importante en todo proyecto es reflexionar desde sus inicios acerca de la viabilidad de la propuesta de investigación. En ese sentido, la investigación que se propone la consideramos viable. En primer lugar, nuestros sujetos de estudio son los docentes de matemática responsables de supervisar las Prácticas Profesionales de nuestros estudiantes de la licenciatura en Educación mención Matemática y Física, cátedra que coordina quien suscribe esta presentación; esto permite tener un acceso directo a las fuentes de información. En segundo lugar, como la investigación propuesta se desarrollará en los Centros Educativos que por más de cinco años han prestado sus instalaciones para el desarrollo de las Prácticas Profesionales, se garantiza el acceso directo a la información que se busca. Es de hacer notar que este acceso directo a la información requiere de dos condiciones básicas : confiabilidad y naturalidad en el actuar de los sujetos objeto de estudio (López, 2000); ambas condiciones están garantizadas ya que contamos con la confianza del personal docente que labora en estos Centros Educativos, porque por varios años hemos estado acompañándolos en un proyecto de extensión que busca mejorar la calidad de la educación matemática, lo que ha permitido que al equipo de investigación se le vea como un grupo serio, cuyos fines son totalmente académicos.

Resultados esperados

Al finalizar la investigación se espera contar con información suficiente en relación a los procesos que viven los docentes de matemática al momento de pensar, diseñar y aplicar situaciones didácticas relacionadas con fenómenos de tipo social, natural o matemático (Segovia y Rico, 2001). Las relaciones entre contexto y estructuras matemáticas no siempre resulta fácil para los docentes En razón de ello la investigación permitirá, en primer lugar, aportar elementos que permitan valorar la factibilidad de vincular las matemáticas con el contexto en los procesos de enseñanza y matemática propuestos y las condiciones que ellas podrían requerir.

Referencias bibliográficas

Cooney, T. (1994). Research and Teacher Education: In Search of Common Ground. *Journal for Research in Mathematics Education.* 25 (6), 608 – 636

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory.* Chicago: Aldine Publishing Company.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática*. 13(2), 31 – 54

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada

Loiola, A. y Carvalho, M. (2006). Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. Em M. Carvalho y A. Loiola (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Autentica. Brasil.

López, J. I. (2000) Abriendo puertas. Los Estudios de Casos desde un enfoque innovador y formativo. *Investigación en la escuela* 41, 103 – 111

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). *Currículo y orientaciones metodológicas.* MPPE. Caracas: Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana. Liceos Bolivarianos.

Mora, D. (2005). Didáctica crítica y educación crítica de las matemáticas. En D. Mora (Coord.) *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectiva para la* *transformación de la educación matemática en América Latina.* (pp. 17 – 164). Bolivia: Editorial Campo Iris.

Nuria, R. y López, P. (2007) El valor del contexto de los problemas para la inclusión de los alumnos inmigrantes recién llegados a la ESO. En J. Jiménez; J. Díaz – Palomar y M. Civil (Coords.) *Educación Matemática y exclusión* (pp. 179 -189). España: *G*raó.

Parra H. (2008) Aproximaciones didácticas al concepto del número entero en docentes de Educación Básica. *Encuentro Educacional*. *15 (1)*, 138 -157

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Dir), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Ice - Horsori.

Segovia, I. & Rico, L. (2001) Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed) *Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria.* (pp. 83 – 104). España: Síntesis.

Skovsmose, O. (2007) Educación Matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En J. Jiménez; J. Díaz – Palomar y M. Civil (Coords.) *Educación Matemática y exclusión* (pp. 45 – 61). España: *G*raó.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudios de caso.* España: Morata Editores.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y COGNITIVO DE LOS ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

José Luis Miranda Nava, Elika S. Maldonado Mejía
Universidad Autónoma de Guerrero México
jluis.es@hotmail.com, elika.mm@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Básico, Medio

Resumen. *Diversas investigaciones reportan sobre las diferentes nociones que tienen los estudiantes del concepto de ángulo (Martínez y Rodríguez, 2005) y de razón trigonométrica (Araya, et al, 2007), donde muestran la falta de significación que pudiera ser la causa de no concebir la noción de función trigonométrica (Maldonado 2005) o causa de los conflictos que presentan los estudiantes al estudiar este tipo de función (Montiel 2005).*
Por este motivo nos interesamos en mostrar cómo están presentes los elementos de la trigonometría en el medio escolar y cuáles son las concepciones que el estudiante tiene respecto de los conceptos previos a la función trigonométrica, como son los elementos de trigonometría. En el presente trabajo, se reporta parte del análisis didáctico sobre los elementos de la trigonometría, en el que identificamos cuáles son estos conceptos y cuál es el patrón que siguen para su enseñanza.
Palabras clave: concepto, significado, elementos de trigonometría, transposición didáctica

Introducción

Uno de los intereses de la humanidad se ha centrado en conocer distancias astronómicas, como por ejemplo la distancia que existe entre la Tierra y el sol. En la actualidad sabemos que para calcular distancias inaccesibles, se realiza a través de semejanza de triángulos y relaciones entre los lados y ángulos de éstos, teniendo entonces una herramienta para este tipo de cálculos, desde la época de los griegos, a la trigonometría. Los primeros en hacer uso de los elementos de trigonometría, sin que en ese entonces se consideraran como tales, fueron Menelao, Ptolomeo e Hiparco.

En el medio educativo los elementos de trigonometría son de vital importancia para el estudio de la función trigonométrica. La enseñanza de la trigonometría, o la enseñanza de los primeros conceptos ligados a la función trigonométrica, son abordadas a partir del nivel básico (secundaria), de modo que las concepciones que se adquieren en este nivel son de vital importancia, pues forman una base para adentrarse al estudio de la función trigonométrica en el nivel medio superior. Pero, cuando se plantea una actividad de enseñanza de un tema o concepto matemático, se espera que el estudiante logre asociarle un significado al concepto nuevo por aprender; sin embargo, suele ocurrir que sólo se esté fortaleciendo el conocimiento carente de significación o erróneo.

De acuerdo con Vinner (1983) y Tall (1996), (citado en Montiel, 2005), apropiarse del significado de la noción de un concepto implica formar una imagen del mismo, es decir, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo sus representaciones mentales, procesos y propiedades asociados.

Sin embargo, las nociones que tienen los estudiantes del concepto de ángulo (Martínez y Rodríguez, 2005) y razón trigonométrica (Araya, et al, 2007), suelen ser deficientes y carentes de significación y pudiera ser la causa del por qué no conciben la noción de función trigonométrica (Maldonado 2005) o causa de los conflictos que presentan los estudiantes (Montiel 2005).

Por tal motivo nos planteamos lo siguiente como problema de investigación ¿Cómo están presentes los elementos de la trigonometría en el medio escolar y cuáles son las concepciones que el estudiante tiene con respecto a los conceptos previos a la función trigonométrica, como son los elementos de trigonometría? Con el propósito de dar cuenta de cómo son presentados los elementos de la trigonometría en el plan y programa de estudio y en los libros de texto utilizados por el profesor; también, identificar las concepciones que los estudiantes tienen respecto de los conceptos que son necesarios para el estudio de la función trigonométrica, a fin de describir dichas concepciones.

Para realizar esta investigación nos ubicamos en el nivel básico (secundaria) para el estudio didáctico, y el cognitivo en el nivel medio superior. El análisis cognitivo se hace en este nivel porque el estudio de la trigonometría se realiza al finalizar el último ciclo escolar del nivel medio.

Como pretendemos inferir sobre las concepciones que tienen los estudiantes, en nuestra investigación tomaremos el término concepción como: *los conocimientos del sujeto sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el seno de sistemas didácticos o en entornos informales,* (Ruiz, 1998, p. 49).

Antecedentes

Recientes investigaciones muestran evidencias de que algunos estudiantes presentan conflictos al momento de asignar un significado a la función trigonométrica (Montiel 2005) así como las concepciones que tienen los estudiantes con respecto al concepto de ángulo, razones trigonométricas y sus funciones **(**Martínez y Rodríguez 2005).

Martínez y Rodríguez (2005) con la finalidad de dar cuenta del discurso y vida escolar de los conceptos de ángulo, ángulo negativo, ángulos mayores de 360º, razones y funciones trigonométricas, realizan un análisis de libros de textos utilizados por profesores y alumnos. Diseña un cuestionario tras su análisis didáctico y lo aplican a diecinueve estudiantes. Al confrontar su análisis didáctico y cognitivo, encuentran que los fundamentos para tratar su tema de su interés no son muy amplios, la mayoría de los estudiantes asumen la inexistencia de los ángulos negativos y mayores de 360º, puesto que sólo tres de diecinueve pudieron relacionar a las funciones trigonométricas con sus gráficas y notan una dislexia tras la confrontación de dichos análisis.

Maldonado (2005) realiza un análisis didáctico de la función trigonométrica, encontrando que, antes de mencionar a la función trigonométrica como función real de variable real, la definen como razón que involucra a los ángulos medidos en grados, después realizan la conversión de estos ángulos a radianes en el círculo unitario y así presentar a la función real de variable real. Afirma que la relación radianes-reales no es explícita, y por tanto el estudiante no concibe la noción del concepto de función.

Montiel (2005), atiende al fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica, de acuerdo al análisis realizado distingue seis etapas, las cuales proporcionan el proceso por el cual pasa la función trigonométrica para considerarse como una función real de variable real. A demás identifica conflictos que presentan los estudiantes:

- Como el procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo (rectángulo) y que producen el seno o el coseno de un ángulo (agudo). Aunque a veces los alumnos aplicaban este procedimiento indebidamente a triángulos que no eran rectángulos o a ángulos que no eran agudos;

- Como coordenadas cartesianas de un punto en un círculo trigonométrico, esas coordenadas eran, para los alumnos, el coseno y el seno del «punto»;
- Como las funciones de una calculadora, funciones que proporcionaban, según los alumnos, el seno y el coseno de un número que expresaba la medida de un ángulo.
- Como las curvas de aspecto ondulado. Incluso algunos alumnos admitían que esas curvas seguían representando las mismas funciones cuando sufrían una rotación o un cambio de escala.
- Como una ecuación, aunque raramente recurrieron a ella y eran susceptibles de equivocarse cuando lo hacían.

Debe ser claro que si los conceptos iníciales no son aprehendidos de forma significativa por el estudiante, este hecho repercutirá necesariamente en la aprehensión o comprensión de los temas o contenidos subsecuentes de la asignatura.

A diferencia de las investigaciones anteriores, nos proponemos a realizar un estudio sobre los conceptos que anteceden al concepto de función trigonométrica, a fin de dar cuenta de las concepciones del estudiante y de inferir si dichas concepciones son pertinentes para la apropiación significativa del concepto de función trigonométrica.

Marco teórico

Todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar.

De esta manera el saber al transponerlo al aula sufre algunos cambios en donde el estudiante genera ciertas concepciones en cuanto al saber en juego. Los contenidos de saberes a enseñar (explícitamente: en los programas; implícitamente: por la tradición evolutiva, de la interpretación de los programas), en general preexisten al movimiento que los designa como tales. Sin embargo, algunas veces son verdaderas creaciones didácticas, suscitadas por las "necesidades de la enseñanza" (Chevallard, 1991).

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de trasformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar a en un objeto de enseñanza, es denominado Transposición didáctica.

Chevallard dice que un objeto de saber se trata como tal, cuando se presenta como útil para la economía del sistema didáctico, el cual lo establece como:

Nociones matemáticas, que son considerados como objetos y herramientas de estudio, poseen propiedades y tienen ocasiones de uso, es decir, son objetos de enseñanza para un matemático (que están explícitamente en programas de estudio). Por ejemplo, nuestro objeto de estudio (elementos de trigonometría), son nociones tratadas como objetos de estudio y como herramientas para el estudio de la función trigonométrica.

Nociones paramatemáticas, éstas son nociones-herramientas de la actividad matemática las cuales son objeto de saber auxiliares que no son enseñados pero son necesarios para la enseñanza de los objetos matemáticos.

Nociones protomatemáticas, estas nociones son utilizadas implícitamente en la solución de algún problema y no son reconocidos ni como objetos de estudio, ni como herramientas para el estudio de otros objetos.

La transposición didáctica de las matemáticas y los requisitos se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de preparación didáctica, es decir, la puesta en textos del saber.

Teniendo entonces que, una transmisión escolar burocrática supone en cuanto al saber:

- La división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializadas, es decir, la desincretización del saber.

- En cada una de esas prácticas, la separación del saber y de la persona, es decir, la despersonalizción del saber.

- La programación de de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos, es decir, la programabilidad de la adquisición del saber.

En cuanto a la transmisión, supone:

- La definición explicita, en comprensión y extensión, del saber a transmitir, es decir, la publicidad del saber.

- El control regulado de los aprendizajes según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos, es decir, el control social de los aprendizajes.

Metodología

Dado que se pretende dar cuenta de la presencia de los elementos de la trigonometría, hacemos el análisis de programas de estudio así como de los libros de texto que se emplean para el estudio de los conceptos de trigonometría. Con base en el resultado del análisis realizado se diseñará un cuestionario con el objetivo de inferir sobre las concepciones que tienen los estudiantes, producto de la enseñanza. Finalmente, se confrontará lo expuesto por el estudiante en el cuestionario con lo expuesto en los libros de texto, planes y programas de estudio a fin de inferir sobre la concepción que queda en el estudiante tras la enseñanza-aprendizaje de los elementos de la trigonometría.

Análisis de programas y libros de texto

Elementos de trigonometría en los programas de estudio

En el programa de estudios del plan 1993 de educación básica, se establece que las matemáticas son el producto de un intento por comprender y explicar los fenómenos que en este mundo ocurren, es decir, tratar de entender un fenómeno darle significado y justificarlo dando una explicación racional del por qué y cómo es que ocurre el mismo, considerando por ello a la enseñanza de las matemáticas de tal forma *que fomente en el estudiante la curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva* (p. 37), además de que debe de desarrollar habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento, por tanto el producto de lo anterior, debe de ser el aprendizaje de las matemáticas, es decir *que el alumno adquiera seguridad y habilidad, capacidad de predecir y generalizar resultados, desarrollo gradual del razonamiento deductivo* (p. 37).

Los temas en el programa están agrupados en cinco áreas: Aritmética, Algebra, Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría), Presentación y tratamiento de la información, Nociones de probabilidad.

Los conceptos considerados como elementos de trigonometría, es decir, los conocimientos previos al estudio de la función trigonométrica, en el programa son los siguientes:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno, tangente, y sus reciprocas.
- Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30º, 45º y 60º. Uso de tablas (ejercicios de interpolación) y calculadora para otros ángulos agudos.
- Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y la apotema de polígonos regulares.

En el último grado se presentan los conceptos de triángulos y cuadriláteros, círculo, semejanza, el teorema de Pitágoras.

El saber sigue la siguiente programabilidad en el tercer grado en el área de geometría: Triángulos y cuadriláteros, Círculo, Semejanza, Teorema de Tales en el triángulo y su recíproco; Criterios de semejanza de triángulos, el Teorema de Pitágoras, y finalmente lo que considera como elementos de trigonometría, mencionados anteriormente.

Algo de suma importancia es que el programa no está concebido como una sucesión de temas que deben agotarse uno a continuación del otro, si no que el profesor debe organizar el contenido de manera conveniente para su aprendizaje.

Podemos observar que los elementos de trigonometría siguen una programabilidad, por tanto cumple con uno de los requisitos cuando un saber se designa como saber a enseñar.

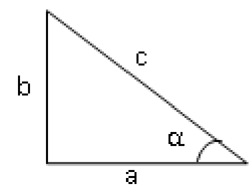
Elementos de trigonometría en los libros de texto

En el análisis de los libros de texto se identificó lo que en estos es considerado como elementos de la trigonometría así como la estructura que tiene la presentación de los mismos.

Matemáticas 3 Briseño, L., Verdugo, J. (2006)

En este libro se consideran como elementos de la trigonometría los siguientes: Razones trigonométricas, Círculo unitario, Identidades trigonométricas, Razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°. La estructura que se presenta para la enseñanza de estos conceptos se da de la siguiente manera:

Razón trigonométrica,



El seno es la razón $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, es decir, $\sin \alpha = \frac{b}{c}$

El coseno es la razón $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$, es decir, $\cos \alpha = \frac{a}{c}$

La tangente es la razón $\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$, es decir, $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

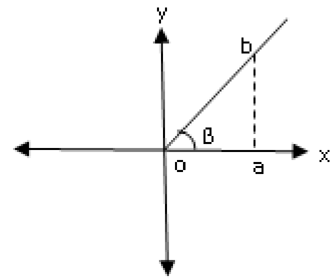
Continúan dando uno y sólo un ejemplo como: ¿Cuáles son las razones trigonométricas de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 unidades?

Para finalizar la presentación de este concepto se propone una serie de ejercicios; cabe señalar que en la presentación de éstos, los datos del ejercicio ya son presentados en los lados y ángulos que corresponden del triángulo, el estudiante sólo tendría qué operar. Este es el patrón en general que se sigue para la presentación de los conceptos restantes. Inferimos que este tipo de presentación pudiera causar dificultades en cuanto a la representación gráfica de un problema como:

Un cable tensor de 30 m de longitud, sostiene un poste de 18 m de altura ¿A qué distancia del pie del poste el ancla que sujeta el cable al piso si dicho cable forma con el piso un ángulo de 37º?

En los libro sólo se pide que realice los cálculos necesarios y en este caso el estudiante tendría que representar gráficamente e indicar los valores en dicha representación para dar solución al problema.

Razón trigonométrica



Seno. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen

- $\sin\beta = \frac{\overline{ba}}{\overline{ob}}$

Coseno. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen.

- $\cos\beta = \frac{\overline{oa}}{\overline{ob}}$

Tangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

- $\tan\beta = \frac{\overline{ba}}{\overline{oa}}$

La definición de las razones trigonométricas están dadas con base en el plano coordenado.

La secuencia para la presentación de este concepto es presentar una definición, se da sólo un ejemplo y finalizan con ejercicios, sin embargo en el planteamiento de los ejercicios nuevamente se observa que los datos del problema y su representación gráfica se presentan en los lugares correspondientes, que al estudiante solo se habilita en la mecanización de las de las definiciones dadas.

A manera de reflexión

Por una parte en el plan se afirma que el alumno debe adquirir seguridad y habilidad, capacidad de predecir y generalizar resultados, desarrollar gradualmente su razonamiento deductivo. Sin embargo, en los libros de texto los ejercicios orientan a quedarse en la algoritmización, limitando al estudiante de poder significar los conceptos necesarios para el estudio de la función trigonométrica, orillándolo a formarse conceptos carentes de significado y de esta manera no lograr la aprehensión del concepto, en este caso de función trigonométrica. Por tanto con este trabajo, al identificar las concepciones que los estudiantes tienen de los elementos de trigonometría, podremos contribuir a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la función trigonométrica.

Referencias bibliográficas

Araya, A., Monge A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las Razones Trigonométricas: Niveles de Comprensión, Indicadores y Tareas de su Análisis. *Actualidades Investigativas en Educación 7*(2), 1-31. Obtenido en noviembre 6, 2007, de http://revista.inie.ucr.ac.cr/articulos/2-2007/archivos/comprension.pdf

Baldor, J. (1999). *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* México: Cultural.

Briseño, L., Verdugo, J. (2006). *Matemáticas 3*. México D.F., México.: Santillana.

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2),* 33 - 115.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus funciones trigonométricas.* Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada, Cicata-IPN, México.

Guerrero, L. S. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Estudio con profesores en servicio.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: Análisis Epistemológico y Didáctico.* Jaén: Universidad de Jaén. Servicio de Publicaciones.

SEP. (1993). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.

IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Concepción Hernández Ponce, Carolina Carrillo García, Elika Sugey Maldonado Mejía
Universidad Autónoma de Guerrero México
conchahp_3386@hotmail.com
Campo de investigación: Factores Afectivos Nivel: Medio

Resumen. *Analizando investigaciones actuales de la Matemática Educativa parece innegable que el aprendizaje está íntimamente ligado a las características cognitivas de nuestros estudiantes, en contraparte las investigaciones en el ámbito afectivo, aunque es un campo creciente, aún representan un pequeño porcentaje. Aspectos endógenos de los estudiantes como la motivación, los valores y las actitudes están presentes frecuentemente en los objetivos curriculares, sin embargo, no es claro cómo crear las condiciones que fomenten su desarrollo.*

En esta investigación nos enfocamos de manera particular en las actitudes hacia la estadística en estudiantes de nivel medio superior. Nuestro interés se centra en identificar y analizar estas actitudes, ya que como dejan ver Gairín (1987), Gómez-Chacón (2000), Castro (2002), las actitudes juegan un papel muy importante en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, por este motivo creemos conveniente primero identificarlas y analizarlas para después crear las condiciones que fomenten las actitudes positivas y mejoren las negativas.
Palabras clave: dominio afectivo, actitudes, estadística descriptiva

Introducción

Desde los inicios de la matemática educativa se han realizado investigaciones encaminadas a encontrar alternativas que mejoren la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, en un principio las investigaciones sólo se enfocaban en aspectos cognitivos dejando de lado aspectos afectivos, sin embargo actualmente las investigaciones ya toman en cuenta estos elementos debido a que investigaciones de Mc Leod (1988, 1989, 1992, 1994, en Estrada, 2002), Gairín (1987), entre otros, mas de corte psicológico, muestran que juegan un papel muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier conocimiento y particularmente de conocimientos matemáticos.

Se ha mencionado la noción de aspectos afectivos pero, ¿Cuáles son esos aspectos afectivos? Son los que hacen referencia a aspectos que están en el ser humano, no a las maneras de cómo aprende o qué aprende sino a aquellos que están mas allá, es decir, al porqué no aprende, qué es lo que siente al momento de aprender, qué es lo que obstaculiza el proceso de enseñanza o aprendizaje. Éstos son: los valores, las apreciaciones, las preferencias, los sentimientos, el comportamiento moral y ético, las atribuciones, la motivación, el desarrollo personal y social, las creencias, las actitudes y las emociones que surgen al momento de enseñar o aprender.

Cabe mencionar que algunos de estos elementos están propuestos en los currículos y planes y programas escolares para desarrollarse y evaluarse en el aula, sin embargo no se dan las bases de cómo implementarlos o abordarlos, además de que los profesores no pueden evaluar algo que desconocen.

Centramos nuestro interés en las actitudes hacia la estadística, particularmente en la estadística descriptiva, porque es una de las asignaturas que presenta mayores dificultades de comprensión, y que aparece al final de los contenidos matemáticos y no siempre es abordada (Estrada, 2001, en Estrada, 2002), a pesar de su naturaleza interdisciplinar que hace que los conceptos estadísticos aparezcan en otras materias como ciencias sociales, biología, geografía, entre otras.

El trabajo se ubica en el nivel medio superior, ya que es precisamente en este nivel en el que se hacen presentes de manera más clara las actitudes en los estudiantes con respecto a las matemática, actitudes que se han venido acumulando a lo largo de su vida escolar (Valdez, 2000; Hidalgo, Maroto, Palacios, 2005, Castro 2002), además de que en este nivel es donde las actitudes pueden influir en la toma de decisiones hacia qué carrera seguir estudiando.

De acuerdo con lo antes expuesto, se pretende, en un primer plano, identificar y analizar las actitudes hacia la estadística más frecuentes que presentan los estudiantes de nivel medio superior, para después identificar los factores que determinan dichas actitudes, es decir, las causas que hacen que se formen las actitudes. Unos posibles factores pueden estar relacionados con, los expuestos por Gairín (1987): variables personales: sexo, edad, personalidad; variables familiares; variables escolares: el profesor, las estrategias metódicas (métodos y materiales), el rendimiento de los alumnos. Aunado a estos, también está la influencia que tienen los medios de comunicación y la percepción que se tiene sobre la utilidad de la estadística.

Marco teórico

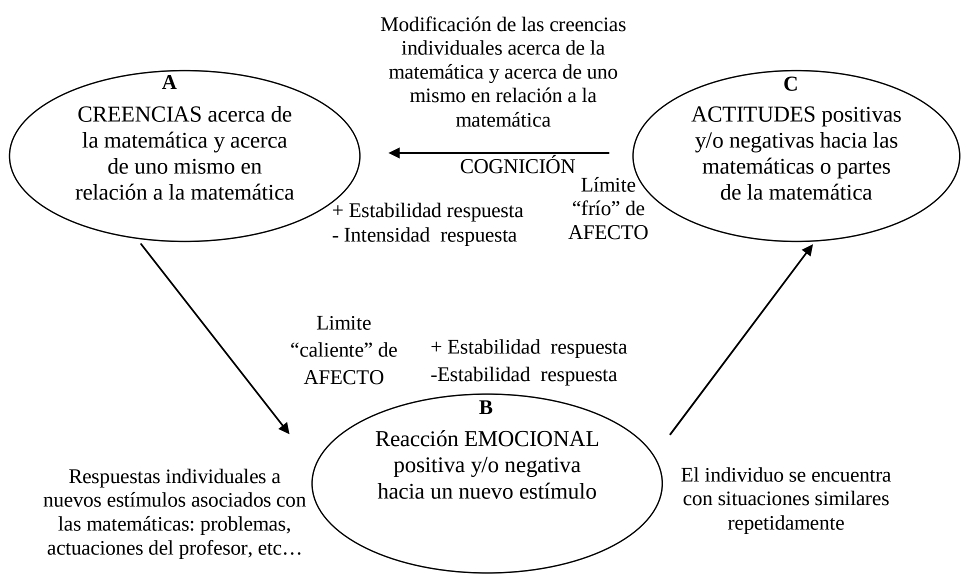
Del estudio de los valores, las apreciaciones, las preferencias, los sentimientos, el comportamiento moral y ético, las atribuciones, la motivación, el desarrollo personal y social, las creencias, las actitudes y las emociones que surgen al momento de enseñar o aprender se encarga el dominio afectivo, una línea de investigación que surgió en la década de los años 70's.

Mc Leod (citado en Gómez Chacón 2000), define el termino dimensión afectiva como "un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición" (pág. 22).

La dimensión afectiva tiene como descriptores básicos a las creencias, las emociones y las actitudes.

En las siguientes líneas presentamos un diagrama, que sintetiza la teoría de Mandler y Mc Leod sobre como los factores afectivos (creencias, emociones y actitudes) influyen en el aprendizaje de la matemática, (Gómez-Chacón 1997, Pág. 14).

Diagrama interpretativo de los descriptores específicos del dominio afectivo en matemáticas



La explicación que hace la autora del diagrama es la siguiente:

> *El estudiante al aprender matemáticas, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas – problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc.- que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa. Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si el individuo se encuentra con*

> *situaciones similares repetidamente, produciéndose la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional (satisfacción, frustración etc.) puede ser automatizada, y se solidifica en actitudes. Estas actitudes y emociones influyen en las creencias y colaboran a su formación (Gómez-Chacón, 2000, Pág. 26).*

En esta investigación nos enfocamos de manera particular en las actitudes hacia la estadística en estudiantes de nivel medio superior. Es de nuestro particular interés abordar la identificación y análisis de las actitudes, ya que como menciona Gairín (1987) pueden considerarse causa y efecto de aprendizaje. Según (Gómez-Chacón, 2000), *actitud es una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento, (Pág. 23).*

En opinión de (Castro, 2002) las actitudes se manifiestan por medio de respuestas de tipo cognitivo, afectivo y conativos. En la realización de este trabajo de investigación se toma la postura de Gómez-Chacón (2000).

Metodología

La metodología del trabajo es mixta. Las actitudes, no son observables de manera directa, sino que han de ser inferidas de las expresiones verbales, de la conducta observada, de afirmaciones, proposiciones o juicios, sobre los que los individuos manifiestan su opinión. Por tales razones se utilizan instrumentos de tipo cuantitativo tal como una adaptación del cuestionario producto de una modificación de la Escala de Actitudes diseñada por Gairín (1987) y otros cuestionarios que se han utilizado en investigaciones sobre actitudes, cuyos resultados se triangulan y complementan por medio de la observación en clase y la aplicación de entrevistas. La observación en clase y las entrevistas se realizarán con el único fin de tener una visión más clara de las respuestas que den los estudiantes en el cuestionario.

Los cuestionarios utilizados en investigaciones sobre actitudes y que consideramos que debíamos analizar para tomar ítems que se podían poner en nuestro cuestionario son el de Castro (2002) y el de Estrada (2002).

La escala de actitudes hacia las matemáticas de Gairín fue diseñada para estudiantes, así que los ítems de esta escala sólo se enfocaron hacia la estadística y a algunos enunciados les cambiamos la forma en que estaban redactados, pero en esencia los enunciados seguían significando lo mismo.

Al realizar el análisis de la escala de actitud hacia la enseñanza de la matemática utilizada por Castro (2002) identificamos que era una adaptación de la escala de Gairín, de modo que de esta escala se tomaron algunos enunciados, porque la manera en cómo están escritos permiten una mejor compresión. En este caso, en lugar de quedarnos sólo con enunciados de Gairín optamos por tomar algunos de esta escala, aunque también se hicieron modificaciones debido a que estaban enfocados a la enseñanza de las matemáticas enfocándolas ahora hacia la estadística. También se tomaron algunos ítems de la escala de evaluación del ambiente escolar (EAE), también de Gairín.

Asimismo adecuamos para nuestra población algunos ítems del cuestionario que aplicó Estrada (2002) "Cuestionario de actitudes hacia la estadística (SATS)" que está dirigido a profesores en formación.

Después del análisis de los cuestionarios antes mencionados identificamos a qué componente (cognitivo, afectivo o conativo) pertenecen los enunciados puesto que esto nos ayudará a realizar la identificación y el análisis de las actitudes de manera mas eficaz. En seguida presentamos el cuestionario preliminar señalando los enunciados tomados de la escala de Gairín (1987), los tomados de Castro (2002) y los tomados de Estrada (2002), que en su conjunto forman el instrumento que utilizaremos en este trabajo para identificar y analizar las actitudes hacia la estadística en estudiantes de nivel medio superior.

Cuestionario preliminar

Enunciados tomados de la escala de actitudes de Gairín (1987):

1. Me siento poco seguro cuando hago tareas de estadística. *Afectivo*
2. Si pudiera no vendría a la clase de estadística. *Comportamental*
3. Me gusta la estadística. *Afectivo*
4. Las clases de estadística duran mucho tiempo. *Cognitivo*

5. No me interesa la estadística. *Afectivo*
6. Me alegro que por las (mañanas/tardes) no haya clase de Estadística. *Afectiva*
7. Los que saben estadística encuentran un trabajo mejor. *Cognitivo*
8. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de estadística. *Comportamental*
9. Si pudiera quitar alguna clase sería la de estadística. *Comportamental*
10. El estudio de la estadística es muy importante para mi vida y mi formación. *Cognitivo*
11. Todos los días (con frecuencia) pienso mucho en saber más sobre estadística. *Cognitivo*
12. Me gusta hacer trabajos y problemas de estadística. *Afectivo*
13. Las escuelas no deben trabajar la estadística. *Cognitivo*
14. Paso mucho tiempo estudiando estadística. *Comportamental*
15. La estadística no sirve para nada. *Cognitivo*

Enunciados tomados de Castro (2002):

16. Los contenidos de estadística son muy difíciles. *Cognitivo*
17. Cuando tus compañeros hablan de las clases de estadística. *Comportamental*
    a) Cambio de tema
    b) Procuro cambiar de tema
    c) Solo escucho lo que dicen
    d) Participo y/o pregunto sobre el tema
    e) ¿Qué otra cosa haces?
18. Define en una palabra cómo te sientes cuando estás en la clase de Estadística. *Afectivo*
19. A toda mi familia le gusta la estadística. *Afectivo*

Enunciados tomados de Estrada (2002):

20. Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de televisión. *Afectivo*
21. La estadística ayuda a entender el mundo de hoy. *Cognitivo*
22. A través de la estadística se puede manipular la realidad. *Cognitivo*
23. Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana. *Comportamental*
24. Me divierto en las clases en las que se explica estadística. *Afectivo*
25. No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa. *Comportamental*
26. Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas. *Afectivo*
27. Me siento intimidado ante datos estadísticos. *Afectivo*
28. Encuentro interesante el mundo de la estadística. *Afectivo*
29. Utilizo poco la estadística fuera de la escuela. *Comportamental*
30. En la clase de estadística nunca entiendo de qué están hablando. *Comportamental*
31. La estadística es fácil. *Comportamental*
32. Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas. *Cognitivo*
33. La estadística sólo sirve a la gente de ciencia. *Cognitivo*
34. A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido. *Comportamental*
35. La estadística ayuda a tomar decisiones más precisas. *Cognitivo*
36. Evito las informaciones estadísticas cuando las leo. *Comportamental*

Consideraciones finales

Con el presente trabajo pretendemos aportar información que permitirá posteriormente buscar estrategias que mejoren (en el caso de las actitudes negativas) o que logren mantener (en el caso de las actitudes positivas) las actitudes encontradas en esta investigación, todo esto con el único fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, concretamente de la estadística.

Referencias bibliográficas

Castro, J. (2002). *Análisis de los componentes actitudinales de los docentes hacia la enseñanza de la Matemática*. Tesis doctoral publicada en la red catalana de universidades. Universidad Rovira i Virgili, España.

Estrada, Ma. A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Gairín, J. (1987). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre Educación Matemática.* Barcelona: Serie Psicopedagógica.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *Revista de Didáctica de las matemáticas 13, julio,* 17-22.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Editorial Narcea, S.A.

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evaluativa. *Educación Matemática, 17* (002), 89-116.

Valdez, E. (2000). *Rendimiento escolar y actitudes hacia las matemáticas. Una experiencia en la escuela secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA A ALUMNOS DE 12 A 15 AÑOS

[1,2]Natalia Sgreccia, [2]Marta Massa
[1]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas Argentina
[2]Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mmassa@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Básico

Resumen. *Se reporta parte de una investigación en la que se buscaron indicadores de clases reflexivas cuando se enseña geometría a alumnos de 12 a 15 años en Argentina. Particularmente en este artículo se presentan aspectos metodológicos del estudio de casos múltiples realizado y las categorías utilizadas para analizar la configuración de la geometría del profesor desde sus prácticas de enseñanza.*
La técnica empleada fue la observación natural de clases, las cuales fueron procesadas mediante registros de observación, reconstrucciones a partir de síntesis conceptuales y diagramas de flujo, y caracterizaciones de acuerdo a un grupo de componentes de interés.
Desde el análisis del discurso en la clase se encontraron indicadores que permitieron delinear configuraciones didácticas específicas que dieron cuenta de un perfil de enseñanza.
Palabras clave: prácticas de enseñanza, geometría, categorías

Problema

Para circunscribir el problema de investigación, se realiza un breve recorrido histórico en relación a la enseñanza de la geometría en el ámbito argentino en función de los matices que se fueron dando a partir de la conocida corriente de la Matemática Moderna.

En Argentina, se pueden identificar tres grandes momentos en los últimos tiempos de la historia del currículum de geometría en la escuela secundaria: 1. Décadas 1950 y 1960: tratamiento basado en enunciado, demostración y resolución de problemas específicos; 2. Décadas 1970 y 1980, prácticamente sin inclusión alguna; 3. Décadas 1990 y 2000: campo de motivación en relación con problemas concretos. Cabe señalar que esto último es así desde lo declarado en los Diseños Curriculares Jurisdiccionales, pero no necesariamente se corresponde con las prácticas reales de aula, porque precisamente hay una tensión entre la formación de los profesores (con rasgos de los momentos 1 o 2) y las características de las demandas (desde lo normado) de la docencia actual. En esta tensión se inscribe el problema de investigación, focalizado en lo que las autoras han denominado la *geometría del profesor*, inspiradas en Halbwachs (1985). Ésta es entendida como un complejo entramado entre su *concepción disciplinar* como resultante de su formación específica, sus *valoraciones* como contenido de enseñanza y su *actuación* en el momento de efectivizar su enseñanza, propiciando procesos reflexivos en los alumnos en para la construcción de representaciones mentales y comprensión de relaciones espaciales.

En este marco, específicamente se intentó responder cómo se conforma la *geometría del profesor* como un espacio en el que confluyen diversos componentes y, en función de los procesos reflexivos promovidos en las clases de geometría, cómo caracterizar una tipología de actuaciones docentes. Para ello se procedió a elaborar ciertas categorías de análisis.

Referentes teóricos

Las categorías de análisis del presente estudio emergen a partir del esquema teórico-conceptual (Sgreccia & Massa, 2008) que se muestra en la Fig. 1.

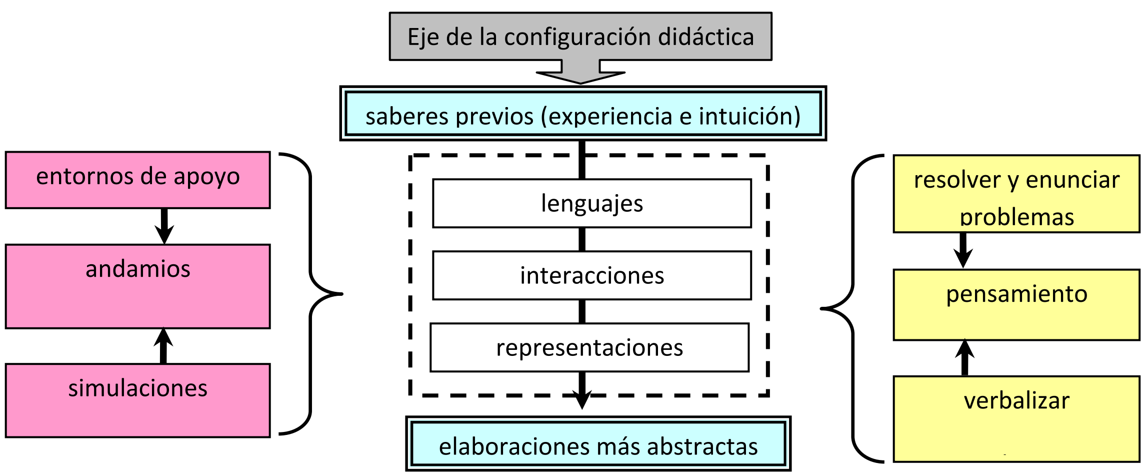


Figura 1. Esquema de componentes, o marco de categorías de análisis, de una configuración didáctica para la gestión de una clase de geometría en este nivel educativo

La *configuración didáctica* (eje central del esquema) es definida por Litwin (1997) como el entretejido desarrollado por los profesores para abordar la enseñanza de su campo disciplinario, favoreciendo los procesos comprensivos. En este sentido, Fioriti (2006) señala que la clase de geometría destinada a alumnos de 12 a 15 años ha de gestionarse considerando como punto de partida sus saberes previos -experiencia e intuición de los alumnos asociadas a las percepciones del mundo sensible y al conocimiento escolar del nivel primario- y recurriendo a actividades cercanas a lo contingente, con carácter de experiencias empíricas, para avanzar hacia elaboraciones geométricas cada vez más abstractas (Bressan, Reyna & Zorzoli, 2003) y más cercanas a lo anticipatorio -basado en propiedades matemáticas-. Este recorrido, de lo contingente a lo anticipatorio, constituye uno de los procesos fundamentales a aprender por los estudiantes en este nivel de la escolaridad (Barrero, Beltrán, Bifano, Carpintero, Fioriti, Giuliani, Sessa & Veiga, 2007). Desde la enseñanza se promueve, así, un desarrollo progresivo de habilidades geométricas -razonamiento lógico, visualización, ubicación, dibujo y construcción, comunicación, aplicación o transferencia (Bressan, Reyna & Zorzoli, 2003)- y de transición no lineal por distintos niveles, tanto de intuición geométrica -sensible, informada, de los resultados deductivos, discernimiento intuitivo asertivo y creatividad (Sgreccia, 2007)- como de razonamiento geométrico -visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor (Van Hiele, 1957, citado en Corberán Salvador, Huerta Palau, Margarit Garrigues, Peñas Pascual & Ruiz Pérez, 1989).

Las interacciones entre los actores de las clases (Quaranta & Wolman, 2005), está mediada por distintos tipos de lenguajes (coloquial -oral o escrito- gráfico y simbólico), contribuyendo a organizar las representaciones geométricas. En particular, el profesor es agente de aquellas interacciones pedagógicas que entretejen la configuración didáctica específica en el recorrido de referencia (de lo contingente a lo anticipatorio). Tales interacciones están constituidas, en términos generales, por las formas básicas de enseñar, entre las que se pueden nombrar: observación, elaboración de un curso de acción, apoyaturas visuales, diálogo e interrogatorio (Aebli, 2002; Sanjurjo, 2005). En relación con este último, Alsina Catalá, Burgués y Fortuny Aymemí (1995) distinguen tres tipos de interrogación: desde los típicos ejercicios hasta la elaboración de informes, pasando por indagaciones que apelan no sólo a la memoria. En este proceso se considera fundamental al discurso docente (Candela, 2003) y, en particular, el formato y la función de las preguntas que efectúa, las cuales pueden promover (o no) reflexiones en las clases que alienten el pensamiento activo

A la izquierda de la Fig. 1, se presentan apoyos de los que se vale la configuración didáctica para la generación de un pensamiento activo (Tishman, Perkins & Jay, 1995, citado en Litwin, 1997), en un marco de comunicación didáctica (Litwin, 1997) en las clases de geometría. Los andamios crean situaciones de enseñanza que facilitan la internalización de los contenidos a aprender (Nickerson, 1995, citado en Litwin, 1997). Sin embargo, para que actúen como tales, no deben generar dependencia para quienes los usan. La acción de desarmar cajas de envases reales para observar su desarrollo plano y para poder re-armar el cuerpo geométrico, es una actividad que puede pensarse como andamio para un modo de vinculación entre lo bi y tri-dimensional. Pero si un alumno siempre necesita realizar esta acción para saber, por ejemplo, que con seis cuadrados consecutivos en fila no se puede armar un cubo, entonces pasó a depender de ese material y no avanzó hacia la anticipación de los resultados mediante el establecimiento de relaciones a partir del uso de propiedades geométricas. Es allí donde se hacen relevantes los entornos de apoyo -por ejemplo, las propuestas a implementar desde la enseñanza (Collins, Brown & Newman, 1989, citado en Litwin, 1997) con la intencionalidad de un uso adecuado de los materiales para que se constituyan en andamios sin dependencia-. También son significativos las simulaciones y otros recursos puntuales, tales como los diversos softwares de geometría dinámica o los manipulativos (virtuales o reales) de los que se dispone en la actualidad.

A la derecha de la Fig. 1, se ubican los procedimientos que contribuyen a la generación de pensamiento activo en geometría. Tanto la resolución problemas (Barallobres, Fioriti, Itzcovich & Sessa, 2000, citado en Itzcovich, 2005) como la verbalización de procedimientos (Nickerson, 1995, citado en Litwin, 1997) son fundamentales en esta etapa de la escolaridad (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí & Pérez Gómez, 1997).

Metodología de la investigación

El enfoque fue eminentemente cualitativo, centrado en la comprensión de procesos, con rasgos etnográficos y alcance descriptivo-correlacional. El diseño estuvo organizado en dos etapas, con posterior un análisis cruzado de la información.

En la etapa 1, denominada *la geometría del docente desde lo declarado (el decir)*, se efectuó un análisis de contenido, siguiendo un conjunto de ideas básicas (Bernárdez, 1995).

Se empleó la entrevista semiestructurada como técnica, en forma individual y grupal (grupos enfocados), a dos muestras intencionales de participantes. La muestra 1 de *expertos* (con reconocida trayectoria en el ámbito) estuvo constituida por 12 personas (9 entrevistas individuales y 3 en un grupo enfocado). La muestra 2 de *sujetos-tipo* (profesores en Matemática en ejercicio en el nivel educativo de interés) estuvo formada por 13 personas (10 individuales y 3 en un mismo grupo).

En la etapa 2, denominada *la geometría del docente desde sus prácticas de enseñanza (el hacer)*, se efectuó un estudio de casos múltiples, con análisis del discurso en la clase para identificar indicadores que permitan delinear *configuraciones didácticas específicas*. Algunos autores (Burbules, 1999; Candela, 2003; Lemke, 1997; Litwin, 1997; Van Dijk, 1998; Villella, 2001) destacan la importancia del discurso en el aula para estudiar y comprender la complejidad de las interacciones que acontecen en el acto educativo.

Las técnicas empleadas fueron la observación no participante de clases y la técnica flash (donde se les solicitó a los alumnos que escriban en breve qué les había dejado esa clase).

En esta etapa participaron 5 profesores, 4 de ellos de la muestra 2, observados en un conjunto de 18 clases. La técnica flash se pudo llevar a cabo en 5 de esas clases.

Posteriormente se efectuó un análisis cruzado, mediante estudios comparativos de la etapa 1 (con la intención de comparar lo dicho por la muestra 1 y la muestra 2), de la etapa 2 (para comparar las distintas clases entre sí) y de las etapas 1 y 2 (con la intención de comparar *el decir* y el *hacer*, entre los 4 docentes que habían participado en ambas etapas).

Hacia las categorías de análisis

El objetivo central de este trabajo es presentar las categorías empleadas en el análisis didáctico de prácticas de enseñanza de la geometría (etapa 2: *el hacer*), sin detallar aquí los resultados de la investigación (por carecer del espacio suficiente para ello). A continuación se explicitan dichas categorías, entrelazándolas con los aspectos metodológicos pertinentes.

Para el procesamiento de las observaciones de clases (con registro de video o audio, complementado con notas de campo) se siguió la siguiente secuencia de actividades:

a)Registro de observación de clase. Consistió en la trascripción de lo acontecido en la clase, intercalándose consideraciones que establecían una correspondencia entre las componentes de la clase reflexiva (o marco de las categorías) (Fig. 1) y lo que estaba sucediendo concretamente en *ese momento, es decir, los indicadores. Cada uno de los registros fue segmentado en una cierta cantidad de episodios denotando distintos momentos de la clase según las actividades llevadas a cabo. En la Figura 2 se explicitan las categorías, con breves explicaciones entre paréntesis, acompañadas de los indicadores respectivos.*

Categorías teóricas de análisis		**Indicadores (Ejemplo: Episodio 1 de la Clase 18)**
Formas básicas de enseñar	Generales (Aebli, 2002; Sanjurjo, 2005)	Apoyaturas visuales. Diálogo e interrogatorio. Contemplar y observar. Narrar. Mostrar
	Complementarias (emergieron en esta investigación y, en algunos casos, son más específicas desde lo disciplinar)	Interpretación de la notación. Evaluación. Precisión. Representación. Repaso de contenidos trabajados recientemente. Uso de instrumentos de geometría. Seguimiento de indicaciones del alumno. Acción para detectar la necesidad de todas las condiciones en una definición. Conclusión luego de mostrar que todas las condiciones deben tenerse en cuenta
Recursos y materiales didácticos		Pizarrón, para comunicar procedimientos y palabras clave. Material concreto, como disparador
Discurso del docente	Formato	Pregunta (sí/no, qué). Nueva pregunta sustituyendo una respuesta directa. Narración de procedimiento. Se vuelve a preguntar de otra manera
	Función	Exigencia de comunicación de lo realizado. Exigencia de mayor precisión. Invitación a la participación. Uso de preguntas para confirmación
Discurso del alumno		Respuesta. Consulta. Pregunta. Narración de procedimiento. Consideraciones sobre condiciones necesarias
Contenidos matemáticos involucrados		Traslación como función puntual. Vector traslación. Vectores iguales
Niveles de interrogación (Alsina Catalá, Burgués & Fortuny Aymemí, 1995)		Memoria. Construcción e Interpretación de Representaciones gráficas. Explicitación de una definición o de una propiedad geométrica
Habilidades que desarrolla el estudio de la geometría (Bressan, Reyna & Zorzoli, 2003)		Visuales (manipulación de imágenes mentales, memorización de propiedades, lectura e interpretación de representaciones externas). De dibujo y construcción (construcción de dibujos). De comunicación (lectura, interpretación de información en lenguaje simbólico, comunicación oral con vocabulario específico, en forma adecuada)
Niveles de razonamiento / Fases de enseñanza (Van Hiele, 1957)		Deducción informal / Orientación dirigida
Actitudes	del docente (posturas que asume el docente, para generar hábitos de trabajo en los alumnos)	Solicitud de disposición hacia la actividad y de participación ordenada. Firmeza (orden en la participación). Aliento. Confianza. Insistencia. Atención en la clase. Se genera expectativa. Se da el ejemplo desde la acción. Se tiene en cuenta la intervención anterior del alumno
	del alumno	Motivación. Participación activa. Atención en la clase. Confianza

Tabla 1. Cuadro que se utilizó en cada episodio de cada clase para la explicitación de los indicadores observados en relación a las categorías de análisis.

Para cada clase, se identificaron las preguntas formuladas por el docente (tipo y función), las cuales fueron registradas en una matriz (Fig. 3), ejemplificándose aquí con el episodio 1 de la clase 18 y considerándose como referencia: T1: Sí /No; T2: Qué; T3: Cómo; T4: Cuál; T5: En qué/Con qué; T6: Cuánto; T7: Quién; T8: Por qué; T9: Dónde/Cuándo.

F1: Recordar contenidos previos; F2: Dar consejos/Dar consignas; F3: Informar o Solicitar información; F4: Promover reflexión/Fundamentar; F5: Aclarar o Solicitar aclaración; F6: Formalizar; F7: Cumplimiento/Promover actitudes; F8: Evaluar o Confirmar; F9: Solicitar mayor precisión; F10: Solicitar participación; F11: Dar confianza/Desafiar; F12: Corregir.

Clase	***Episodio***	***Tipo de pregunta***								
		T1	***T2***	***T3***	***T4***	***T5***	***T6***	***T7***	***T8***	***T9***
18	***1***	***18***	***12***	***3***	***1***	***0 / 1***	***1***	***1***	***2***	***0***

Clase	***Episodio***	***Función de la pregunta***											
		F1	***F2***	***F3***	***F4***	***F5***	***F6***	***F7***	***F8***	***F9***	***F10***	***F11***	***F12***
18	***1***	***2***	***0***	***13***	***2/2***	***4***	***0***	***0/1***	***5***	***2***	***3***	***1/0***	***6***

Tabla 2. Extracto de la matriz donde se registraron los tipos y funciones de las preguntas de los docentes en cada episodio de cada clase observada

b)Reconstrucción de la clase observada. Se sintetizó lo acontecido en la clase, haciéndose referencia a las actividades realizadas en los distintos episodios, mencionándose los aspectos identificados en relación a las mencionadas categorías de análisis. Además se realizó un diagrama de flujo, el cual consistió en un esquema que intentó reflejar los movimientos o secuencias que se fueron dando en los distintos episodios de la clase, es decir, cómo se fue generando el entramado entre los distintos aspectos de esa clase de Matemática al abordar contenidos geométricos.

Para el análisis de las clases, y a los efectos de caracterizar las configuraciones didácticas y los procesos reflexivos promovidos, se procedió a reconocer los elementos significativos en función de lo sintetizado en la Fig. 1.

c) Clasificación de las clases según los procesos reflexivos identificados. Se reconocieron las diferencias y semejanzas en las configuraciones didácticas de las clases, en función de los procesos reflexivos promovidos atendiendo a los aspectos mostrados en la Fig. 2.

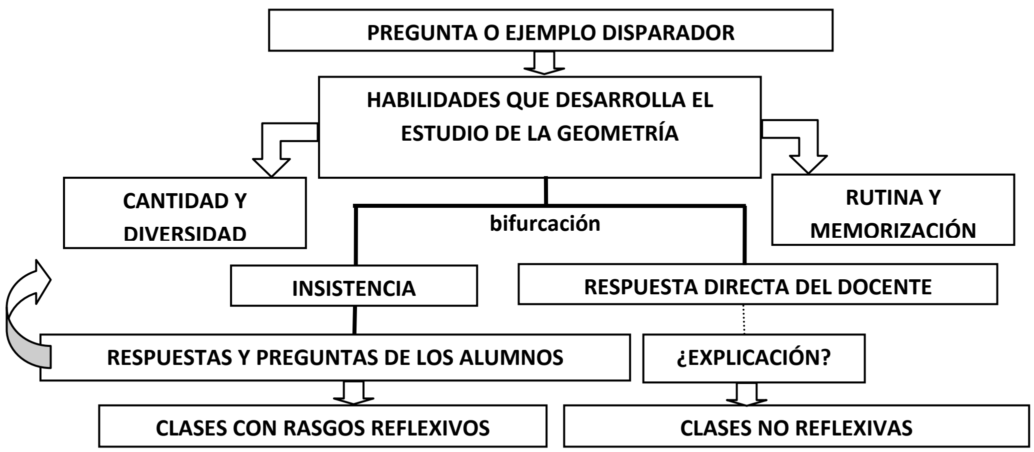


Figura 2. Aspectos básicos que se tuvieron en cuenta para la clasificación de las clases

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (2002). *12 formas básicas de enseñar: una didáctica basada en la psicología.* Madrid: Narcea.

Alsina Catalá, C., Burgués, C. y Fortuny Aymemí, J. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis.

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Barrero, M., Beltrán, S., Bifano, F., Carpintero, C., Fioriti, G., Giuliani, D., Sessa, C. y Veiga, S. (2007). *Geometría. Aportes para su enseñanza. Nivel Medio*. Buenos Aires: Dirección de Currícula del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires.

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Bressan, A., Reyna, I. y Zorzoli, G. (2003). *Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años.* Montevideo: Styrka.

Burbules, N. (1999). *El diálogo en la enseñanza. Teoría y práctica.* Buenos Aires: Amorrortu.

Candela, A. (2003). Física y Físicos: Construcción Discursiva de una Identidad Cultural en Aulas Universitarias. En E. Mortimer y A. Smolka, (Eds.), *Anais de II Encontro Internacional Linguagem Cultura e Cognição: Reflexões para o Ensino*. **Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.**

Corberán Salvador, R., Huerta Palau, P., Margarit Garrigues, J., Peñas Pascual, A. y Ruiz Pérez, E. (1989). *Didáctica de la geometría: modelo van Hiele.* Valencia: Universidad de Valencia.

Fioriti, G. (2006). *Didácticas específicas. Reflexiones y aportes para la enseñanza.* Buenos Aires: Miño y Dávila.

Halbwachs, F. (1985). La física del profesor entre la física del físico y la física del alumno. *Revista de Enseñanza de la Física, 1(2),* 77-89.

Itzcovich, H. (2005). *Introducción al estudio didáctico de la Geometría.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores.* Barcelona: Paidós.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas: Una nueva agenda para la enseñanza superior.* Buenos Aires: Paidós.

Quaranta, E. y Wolman, S. (2005). Discusiones en las clases de Matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza (Ed.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (3ª. Ed.) (pp. 192-212). Buenos Aires: Paidós.

Sanjurjo, L. (2005). Volver a pensar la clase. En L. Sanjurjo y X. Rodríguez, *Volver a pensar la clase. Las formas básicas de enseñar* (pp. 11-138). Rosario: Homo Sapiens.

Sgreccia, N. (2007). *La clase reflexiva en el aula de Matemática cuando se abordan contenidos geométricos en el Tercer Ciclo de la EGB.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2008). Contribuciones teóricas para caracterizar clases reflexivas de Matemática en la escolaridad básica. En P. Lestón (Editor), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (560-570). México DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stone Wiske, M. (2003). *La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Paidós.

Van Dijk, T. (1998). *Estructuras y funciones del discurso* (12ª. Ed.). México: Siglo XXI.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.

LA IMPORTANCIA DE LA PRIMERA REPRESENTACIÓN EN PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11, "Wilfrido Massieu" - IPN México
abenitez@ipn.mx
Campo de investigación: Resolución de Problemas Nivel: Medio

Resumen. *El estudio de la Primera Representación adquiere un papel determinante en la actividad de la resolución de problemas, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución. El presente trabajo, plantea la posibilidad de desarrollar la formulación de problemas para enriquecer el contenido de la primera representación, permitiendo de explorar nuevas representaciones para identificar la organización de sus relaciones y establecer su articulación en problemas contextualizados.*
Palabras clave: representaciones, formulación de problemas

Introducción

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, área Físico- Matemáticas, mencionan la importancia de promover las habilidades del pensamiento; análisis, interpretación y síntesis, así como la elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización, en este sentido, las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende las estructura cognitiva en el estudiante.

La representación es un proceso que dinamiza la resolución de problemas en las ciencias y en particular en matemáticas, permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Particularmente, Benítez (2006) menciona el hecho de que la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución es decisiva, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, durante el cual influyen varios aspectos como son: la formulación del problema, las ideas previas del estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso, factores que son determinantes para que el estudiante pueda re-interpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los elementos relevantes que posteriormente se traducirán en la abstracción del análisis de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del problema.

La presente investigación tiene como propósito analizar las estrategias que el alumno desarrolla, cuando se impulsan actividades que enfatizan el planteamiento de preguntas y la reformulación de problemas contextualizados, para favorecer la re-interpretación o modificación de la primera representación, para lo cual se constituyó un ambiente de actitudes abiertas, reflexivas y críticas, originando reflexiones individuales de resolución, así como discusiones grupales.

Marco de Referencia

El papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje de la matemática es fundamental, pues beneficia la comunicación y comprensión del sujeto con su medio y con el mismo. Las representaciones son configuraciones (palabras, gráficas, ecuaciones, entre otros), que pertenecen a sistemas altamente estructurados, denominados; “Esquemas Simbólicos” (Kaput, 1987), “Sistemas Representacionales” (Goldin,1987) o “Sistemas Semióticos” (Duval, 1992 no está en las referencias), los cuales están constituidos de caracteres o signos primitivos, para ser combinados a través de reglas particulares en cada sistema, dichas reglas estructuran el sistema de producción de la representación, el cual contribuye para enriquecer su contenido (Duval, 1998).

Callejo (1994), estudia el empleo de las representaciones gráficas por alumnos de nivel secundario cuando resuelven problemas, su investigación reporta los elementos que desde su perspectiva determinan la elección, interpretación y modificación de las representaciones, es decir, descripción de la situación, las preguntas y el contexto matemático en el cual está envuelto el enunciado. Estos factores influyen directamente para elegir el primer acercamiento con la representación, a lo cual Callejo denomina representación generatriz, por ser ésta la primera representación gráfica que inicia el proceso de resolución del problema, siguiendo un acompañamiento de representaciones diseñadas con la misma finalidad del proceso, por ejemplo, ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones diseñadas en el curso de la resolución del problema esta determinado por la primera representación.

En esta misma dirección aunque con sus respectivos matices Keller y Hirsch (1998), enfocan su investigación para analizar la preferencia cognitiva de estudiantes universitarios que cursan el primer semestre de cálculo. La tarea consistió en elegir la representación que emplean para resolver una situación dada, sin que ésta se resolviera. Las situaciones que presentan a los estudiantes están caracterizadas por situaciones en contexto y no contextualizadas. El estudio reportó que la elección de la representación inicial puede estar influenciada por diversos factores, uno de los cuales es la preferencia cognitiva de los estudiantes, es decir, la manera personal por la cual un individuo escoge inicialmente el proceso de información de una actividad intelectual, así como la experiencia del alumno con una representación, el nivel de la tarea, la descripción de la situación, las preguntas aplicadas, el contexto del enunciado, el lenguaje de las tareas y el contexto en el cual se representa la situación. Las actividades también están influenciadas por la percepción del estudiante, por el pragmatismo de las preguntas escolares, y por las herramientas de procedimiento que fueron dadas para manipular sucesivamente la elección de las representaciones.

Respecto a las representaciones semióticas, Duval (2000) menciona la necesidad de manejar al menos dos registros de representación semiótica, para llevar a cabo las tres funciones cognitivas (formación, tratamiento y conversión) y poder lograr la aprehensión del objeto. Por lo cual, el modelo que presenta Duval enfatiza la necesidad de manejar al menos dos registros de representación semiótica, para llevar a cabo las tres funciones cognitivas (formación, tratamiento y conversión) y, poder lograr la aprehensión del objeto. Particularmente la actividad de conversión no es una tarea inmediata en un alumno que está en proceso de formación, sino al contrario, Duval enfatiza la necesidad de establecer la correspondencia entre dos representaciones que pertenecen a registros semióticamente diferentes, y además representan al menos parcialmente el mismo contenido. La actividad involucra establecer la congruencia entre ambos registros de representación, a través de la identificación de sus unidades significativas, para establecer su correspondencia.

Metodología

La matemática en contexto como estrategia didáctica es una aproximación teórica que vincula diversas áreas de conocimiento, esta aproximación nace de la extrapolación de la teoría educativa matemática en el contexto de las ciencias (Camarena, 2002), teniendo dos modalidades; la primera es presentar dentro de los cursos de matemáticas, contenidos matemáticos con otras ciencias y, otra es la enseñanza de las ciencias, esta última corresponde a la etapa denominada fase didáctica (Camarena, 2000).

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones asociados a las representaciones, empleando tratamientos que permitan evidenciar su riqueza, impulsando la formulación de problemas. La actividad se realizó en el contexto del curso de Álgebra. Los estudiantes no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase.

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 40 alumnos (grupo 1IM3) respectivamente, del nivel medio superior (C.E.C.yT. 11, "Wilfrido Massieu") que cursaban el primer semestre del ciclo escolar, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Los estudiantes no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase.

Desarrollo de la Experiencia Educativa

Fase de introducción. Los alumnos participantes no contaban con antecedentes para llevar a cabo la dinámica en el aula, considerando que los alumnos estaban habituados a una enseñanza magistral. Ante esta situación, la primera semana de trabajo, se introdujo a los estudiantes al trabajo en equipo y discusión en el grupo, teniendo el profesor el papel de coordinador del proceso.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selección consideraba los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades.

Tipo de Actividades

Desarrollo de la Experiencia Educativa, desde la Matemática en Contexto

Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.

Para el diseño de las actividades, previamente se realizó un análisis del contenido matemático. El propósito fue identificar las ideas principales para desarrollarse durante la experiencia, el resultado se enfocó en dos ideas centrales que articulan toda la organización conceptual: lenguaje algebraico, modelación ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticas en situaciones concretas. Estas ideas fueron el apoyo para elaborar el diseño de las actividades que se utilizaron durante la experiencia. Algunas de las actividades fueron piloteadas en un curso paralelo, anterior al de la experiencia, para examinar su potencial o bien las dificultades que presentan los alumnos. A continuación se expone una actividad;

Dos velas (V1 y V2) del mismo tamaño (120cm) están hechas de distintos materiales, tales que una de ellas se consume uniformemente hasta consumirse en tres horas en tanto que la otra se consume en cuatro horas. ¿A qué hora se deben encender ambas velas simultáneamente para que a las 5:00 PM un cabo de vela mida el triple que el otro?

Determinación de las variables y de las constantes del problema.

Variables identificadas: tiempo, altura.

Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.

Temas: Ecuación de la recta, interpretación de la gráfica, interpretación numérica, sistema de ecuaciones lineales.

Determinación del modelo matemático.

Ecuación vela 1: $Y_1 = 120 - 40X_1$

Ecuación vela 2: $Y_2 = 120 - 30X_2$

Solución matemática del problema

$$X = 2hrs \quad 40\min$$

Discusión del trabajo

El proceso inició con la identificación de la información parcial en la situación que, por lo general, es la más notoria. Con base en ella se construyó un modelo inicial y se planteó un primer problema, aunque se debe hacer notar que durante el análisis del consumo de las velas se identificó información relativa a sus alturas respecto al tiempo trascurrido, no obstante, al establecer nuevas cuestiones los alumnos no identificaron ningún rasgo característico desde el punto de vista de la relación entre ambos eventos.

Con estas ideas previas, los alumnos analizaron la representación numérica, la cual representaba el comportamiento de las velas para ciertos tiempos, y plantearon un primer problema; ¿cómo se determina el comportamiento del consumo de las velas?

2): V_1

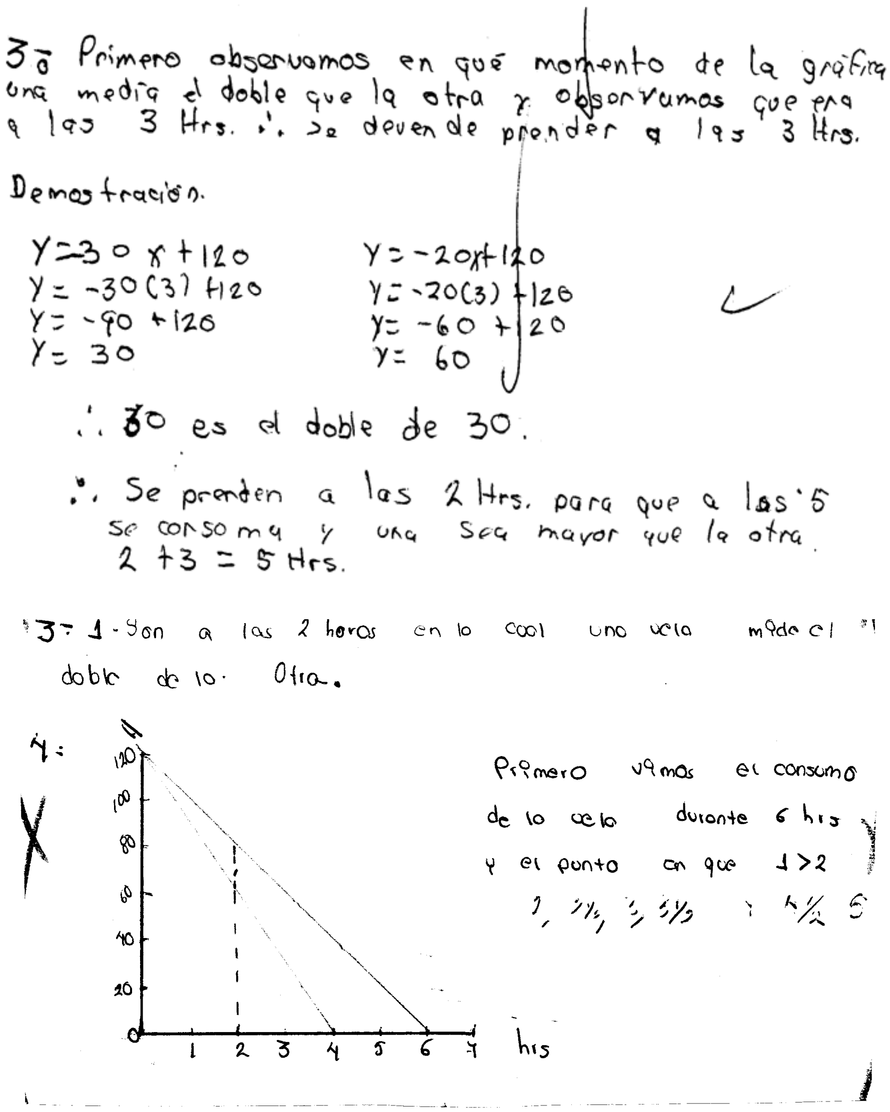
Δt	t	h	Δh
	0	120	
2	2	80	-40
2	4	40	-40
2	6	0	-40

V_2

Δt	t	h	Δh
	0	120	
2	2	60	-60
2	4	0	-60

Exploración de la Representación Numérica

Este cuestionamiento, permitió a los estudiantes pasar a otro nivel, pero se debió a las preguntas emitidas por el profesor. En este nivel se identificó nueva información para la situación, lo que trae consigo la necesidad de que el problema original debe ser revisado. No obstante, los estudiantes no lo realizaron de manera espontánea y se continuó con el problema planteado originalmente. A pesar de haber identificado nueva información, no la usaron para reexaminar el problema inicial. La nueva información no se conectó con la información previamente identificada. El cambio de perspectiva en los estudiantes se produjo por el interrogatorio del docente y por la interacción con las tareas. Ambos elementos propiciaron que los alumnos se dieran cuenta, que la nueva información faculto la modificación del problema original, considerando la interpretación del contenido de la representación gráfica para construir las expresiones algebraicas



Exploración de las Representaciones: Gráfica y Algebraica

Durante el desarrollo de la actividad se identificaron etapas: La primera esta referida a una fase de apropiación en la cual el alumno atiende aspectos que son parciales, aunque relevante, ya que inicia construyendo preguntas parciales a la situación. En una segunda etapa, los alumnos identifican más información, la cual les permite reexaminar la situación para establecer nuevas preguntas y establecer una primera formulación del problema. La tercera etapa, se presenta cuando el estudiante establece conexiones con la información ya identificada y la formulación de nuevos eventos en la situación.

Conclusiones

Los estudiantes en sus primeras interacciones se enfocan a situaciones o elementos parciales omitiendo otros elementos relevantes durante el análisis del problema.

Ante una situación los estudiantes atienden algunos aspectos mientras que desatienden otros. Esta actividad en necesaria que el alumno tenga la vivencia, con la finalidad de fortalecer su percepción durante las preguntas planteadas.

El proceso de aprendizaje durante este tipo de aprendizaje, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban.

Los estudiantes pretendieron reproducir la actividad en las diferentes actividades. Lo cual sugiere la tendencia en los estudiantes a examinar los datos o relaciones siguiendo un conjunto de reglas presentadas por el maestro.

Durante el trabajo en equipo los estudiantes superaron la tendencia calculista, no obstante cuando debían trabajar de manera individual los estudiantes regresaban al uso de tratamientos cuantitativos, mientras que por equipo los estudiantes exploraban las situaciones con tratamientos cualitativos.

Las discusiones en plenaria permitieron a los estudiantes debatir sus argumentos en un ambiente de análisis y de razonamiento.

La manera en que se organizaron las actividades en el curso, es decir, trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fueron elementos que aportaron para que el alumno pudiera exponer sus ideas y conjeturas.

Referencias bibliográficas

Benítez A. (2006) *Estudio acerca de las estrategias para identificar el contenido de las Representaciones "Vía la Interpretación Global".* Reporte técnico de investigación del proyecto número de registro CGPI 20061484, México, IPN.

Benítez A. (2007) *Las Representaciones Gráficas y la Matemática en el Contexto de las Ciencias.* Reporte técnico de investigación del proyecto número de registro CGPI 20071568, México, IPN.

Camarena P. (2000) *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. Reporte de investigación del proyecto número de registro CGPI 20021080. México, 2002, IPN.

Camarena, P. (2002, noviembre). Metodología curricular para las ciencias básicas en igeniería. *Innovación Educativa 2*, (10), 165-180.

Callejo, M. (1994). Les Représentations Graphiques dans la Résolution de Problèmes: Une expérience d´entraînement D´Étudiants dans un Club Mathématique. *Educational Studies in Mathematics 27*, 1-33.

Duval, R. (1992). Graphique et Equations: l´Articulation de deux Registres. *Antología de Educación Matemática,* (pp. 125-135), Cinvestav-IPN.

Duval, R. (1998), Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (vol. l, pp.173-201). Grupo Editorial Iberoaméricano, México: Cinvestav.

Duval R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-26). Cuernavaca, México.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. Basic issues for learning. In T. Nakahana & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the twenty-second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I* (pp. 55-69). Japan.

Goldin, G. (1987). Levels of Language in Mathematical Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. (pp. 59-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Keller, B. y Hirsch, C. (1998). Student Preferences for Representations of Functions. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology 29*, 1-17.

LA ACTIVIDAD DE MEDIR APORTA SIGNIFICADOS A FRACCIONES Y RAZONES

Marta Salazar, Leonora Díaz
Pontificia Universidad Católica. Universidad Matropolitana de Ciencias de la Educación — Chile
martacecilias@gmail.com, leonora.diaz@umce.cl
Campo de investigación: Pensamiento numérico — Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan evidencias de vacíos e invisibilidades de la enseñanza -para y entre- los conceptos de fracción y razón, mismos que instalan, en el aula, obstáculos producto de las epistemologías diferentes y relacionadas que configuran hoy a estos conceptos. Se ilustra como la medida colabora a dar sentido, fungiendo como eslabón, entre la razón matemática y la razón cotidiana como parte de un estudio que explora, desde una perspectiva socioepistemológica, la enseñanza de la fracción para dotar de significado a su aprendizaje en el marco del pensamiento variacional y del álgebra. Articulado éste con los otros cuatro ejes de pensamiento matemático escolar, a saber, pensamientos de la medida, la forma y el espacio, los números y el azar.*
Palabras clave: socioepistemología, razones, fracciones, medida

Bajos logros de aprendizaje de las fracciones. Los resultados obtenidos en las diferentes pruebas aplicadas a los escolares de nuestro país, tanto nacionales como internacionales (Sistema de Medición de la Calidad de la Enseñanza, SIMCE, de Chile; Programme for International Student Assessment, PISA, de la Organisation for economic co-operation and development, OECD y Trends in International Mathematics and Science Study, TIMMS, de la Asociación Internacional para la Evaluación Educativa) dejan un claro cuestionamiento frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debido que los malos resultados obtenidos aún persisten a pesar de los cambios que se han producido con el fin de revertir dichos resultados. El segundo estudio regional comparativo y explicativo SERCE - UNESCO, señala que los estudiantes de 6º grado de educación básica de América Latina tienen un desarrollo cognitivo muy bajo. De acuerdo a este estudio, el 56% de los estudiantes presenta dificultad en el nivel III de desempeño cognitivo, nivel que, entre otras habilidades, considera la comparación de fracciones, el uso de la idea de porcentaje en el análisis de la información y en la resolución de problemas. En Chile se aprecia, en este nivel de educación, que los estudiantes no han logrado aprender el concepto de fracción, como lo ilustra la medición nacional SIMCE. La prueba SIMCE de matemáticas, aplicada en el 4º año de educación básica, consideró tres ejes temáticos: números, operaciones aritméticas y formas y espacio. En el eje de números considera los números naturales y el tema de las fracciones. En los análisis de resultados atendiendo a los niveles de logro se observa que, en el nivel inicial, se ubican aquellos estudiantes que recién están iniciando la comprensión de los números naturales, la realización de los cálculos simples, el estudio de las formas geométricas y el manejo de aspectos básicos de la resolución de problemas, hasta aquellos estudiantes cuya comprensión matemática es fluctuante. Se observa que, en el nivel inicial, se concentra el mayor porcentaje (63%) de los estudiantes pertenecientes al nivel socioeconómico bajo y sólo un 7% del nivel alto. Quienes no alcanzan el nivel cognitivo de las fracciones, tendrán dificultades para interpretar los elementos de una división, la equivalencia de medidas y el desarrollo del pensamiento proporcional, entre otros. Cabe entonces la pregunta ¿Por qué los estudiantes no aprenden las fracciones?

Hacia un estudio socioepistemológico de las fracciones. El saber matemático, aún el más avanzado, resulta de un complejo proceso de selección de piezas de conocimiento y de actividades asociadas. Actividades que desempeñan un papel importante desde el punto de vista de su origen, desarrollo y consolidación de los escenarios históricos, culturales e institucionales. Las aproximaciones epistemológicas tradicionalmente asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando las circunstancias que le dieron origen y los escenarios históricos (Cantoral y Farfán, 2003). La socioepistemología, como una aproximación teórica de naturaleza sistémica, permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, incorporando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos asociados y los mecanismos de institucionalidad vía la enseñanza. El conocimiento lo asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales (Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J.; Romo, A.; 2006). La socioepistemología enfatiza la naturaleza social de la actividad de construcción de saberes por parte de actores sociales en contexto, de sus conocimientos y realidades. Este énfasis en lo social, altera el sentido tradicional que se le otorga a las dimensiones cognitivas, didácticas y epistemológicas (Arrieta, 2003). La socioepistemología intenta articular dos grandes componentes. Por un lado lo social y por otro lo epistemológico, donde la persona y su actividad se conviertan en elementos primarios en sus teorizaciones. En esta posición, lo socioepistemológico debe significar, en primer lugar, el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de las matemáticas, es decir, con el lenguaje de las herramientas (Cordero, 2001, citado por Arrieta, 2003). Mirar la matemática como una construcción humana, un producto social y cultural, conduce a develar que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, pasa por varias etapas o momentos. Comienza a ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos, hasta insertarse en una teoría con características propias (Ferrari, 2001).

Interesa responder, desde una perspectiva socioepistemológica, a la pregunta ¿Por qué los estudiantes no ostentan desempeños competentes en su actividad con las fracciones?

Metodología

Se aborda un diseño de enseñanza de las fracciones con base en una ingeniería didáctica (ID) tendiente a superar las dificultades que experimenta el estudiantado para lograr aprenderla significativamente, atendiendo a que se aprende por la actividad y, en este caso, por la actividad de medir. Una ID considerada a la vez como metodología de investigación y como estrategia para la elaboración de una secuencia didáctica, en sus cuatro fases: (i) Estudios preliminares: históricos-epistemológicos, didácticos, de los entendimientos del estudiantado y socioescolares; (ii) Análisis a priori: diseño y conjeturas respecto a los aprendizajes estudiantiles esperados; (iii) Enseñanza o fase de experimentación; y, (iv) Análisis a posteriori: contraste, entre aprendizajes logrados y conjeturas, y, rediseño didáctico.

Elementos precursores de la ID. Algunos resultados, provenientes de los estudios previos acerca del desarrollo del pensamiento de la medida, de las razones y de las fracciones. En una mirada histórico-epistemológica las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza. Avanzado el siglo XX se enseñaron en el marco de la geometría de Euclides: la teoría de las magnitudes del libro V de Euclides, uno de los principales pilares de las matemáticas griegas. Junto a esta teoría de las magnitudes, se elaboró en el transcurso de los siglos un sistema de números cada vez más satisfactorio, llegando a nuestro cuerpo de números reales. Esta construcción de números se basó fundamentalmente en la medida de las magnitudes (Rouche, 1994).

La teoría de las razones y proporciones, en los elementos de Euclides, ocupa dos habitats diferenciados: la teoría de las razones de magnitudes (en los libros llamados geométricos) y la teoría de las razones de números (en los libros llamados aritméticos). De esta forma, los números reales, que habían germinado, en el transcurso de los siglos, de la geometría y de la física de las magnitudes, ya no les debían nada de ahora en adelante. No solamente se habían apoderado de su autonomía, sino que al mismo tiempo a través de la estructura de espacio vectorial, sirviendo más tarde para (re)fundar la geometría. El cuerpo de los números, en este nuevo marco, se construyó incluso antes de que se abordara la geometría (Bosch, 1994).

Antecedentes desde la dimensión sociocultural muestran que la medida surge de la necesidad misma de medir y de una noción de igualdad socialmente aceptada (Rouche, 1998).

Por otra parte antecedentes de orden socioescolares informan que profesores y estudiantes enuncian la acepción cotidiana de la razón. Que la razón matemática no emerge en sus discursos, aunque aparece implícita en sus prácticas (Díaz, 2008).

Antecedentes didácticos señalan que las fracciones están siendo enseñadas en el aula, de forma casi exclusiva, bajo la concepción parte-todo. Se utiliza para ello figuras geométricas regulares divididas en partes iguales, para lo cual el estudiante debe realizar un doble conteo, primero el total de las partes y luego las partes achuradas. Con este doble conteo no han realizado nada diferente a la actividad de contar en los números naturales, actividad que realizan desde sus actividades preescolares (Escolano y Gairin, 2005).

Antecedentes cognitivos ilustran que la enseñanza de la medida, en la concepción parte-todo, promueve el aprendizaje pasivo. La relación entre la parte y el todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie; no hay situación problemática porque la tarea esta perfectamente preparada para asegurar el éxito de los escolares (op.cit., 2005).

Desde una mirada histórico-epistemológica el concepto de fracción tiene su origen en aquellas actividades humanas relacionadas con la medida (Rouche, 1998).

Por lo tanto, desde la perspectiva didáctica, resultaría significativo construir el concepto de fracción a partir de la medida. Donde el estudiante deba dar una respuesta que no resulte evidente. Que el estudiante encuentre una solución frente al nuevo planteamiento, que elabore la respuesta a través de la toma de decisiones a través de ensayo y error. Ello se ve favorecido entre otras posibilidades, en problemas de superficies que no están contenidas de manera exacta. Las exigencias cognitivas a partir del concepto de medida tendrán como resultado la elaboración del concepto de fracción como un número real y no vinculado a una simbología que involucra dos números naturales. En consecuencia, los estudiantes darán significado al concepto de razón matemática con base en la medida.

Un estudio socioepistemológico de la razón matemática. Distintas investigaciones ilustran vacíos en los conceptos de razón y fracción con base en obstáculos epistemológicos, entre otros obstáculos posibles. Díaz (1998) muestra que profesores de matemáticas, física y ciencias naturales en la enseñanza de un simple factor unitario dejan ver diferencias producto de la visión que tiene cada uno de ellos desde sus propios campos disciplinarios, visualizándose dos campos disciplinares distintos, con sus conceptos y técnicas propios: "los campos experimentales de la química y la física y el campo ´formal´ de la matemática usada en el aula" (Díaz, 1998, p. 24). Al respecto Díaz señala que en la enseñanza de las nociones de fracción y de razón existe un vacío que difícilmente podrían resolver los estudiantes.

Díaz (2008) ilustró –en el marco de una investigación realizada con profesores del 5º y 7º año de escolaridad- a través de un cuestionario aplicado con el fin de percibir sus concepciones con relación –entre otros- a los conceptos de magnitud y de medida, que existe una confusión entre dichos conceptos, siendo las magnitudes -para la mayoría de ellos- sinónimo de medida. También exploró los sentidos de la noción de razón en el profesorado. En el contexto de la pregunta del cuestionario ¿Qué entiende por RAZÓN? un 65% de las respuestas se asocian con facetas de la semantización construidas por la disciplina de las matemáticas. Para Díaz (1998, p. 51) en una primera aproximación, la razón matemática es una manera de comparar dos magnitudes, informando esa comparación por división de dos números o de las medidas de dos cantidades de magnitudes. Para Batanero, Cid y Godino (2003, p. 8) es un par ordenado de pares de magnitudes cada una de las cuales se expresa con un número real y una unidad de medida. Con base en estas dos acepciones se analizaron las textualidades docentes. Una de ellas apunta a la razón de cantidades sin mencionar magnitudes:

"(La razón es la) comparación de dos cantidades mediante cuociente" [M,EB,C15]

Las restantes textualidades aluden a partes de la noción. Casi la mitad de ellas relevan que es una comparación. Más de la mitad refiere a dos valores que se comparan, refiriendo un quinto de las textualidades a valores que se relacionan y otro quinto a sus nombres, a saber, antecedente y consecuente. Un quinto de las textualidades precisan que la comparación es por cuociente. Casi un tercio de las acepciones la entienden como fracción. Y un quinto de las respuestas aluden a sus notaciones: “a/b”, “a:b” y “a es a b”.

Más de un tercio de las respuestas de los docentes asocia a la razón con tres de entre las diez acepciones no vinculadas a las matemáticas que recaba el diccionario de la Real Academia Española, www.rae.es. Algunas de ellas se registran en la tabla siguiente:

ACEPCIONES DOCENTES	ACEPCIONES RAE
¿Qué entiende por razón?	
– *Entendimiento [M,EB,C3]*	Acto de discurrir el entendimiento
– *Explicar o fundamentar una respuesta [M,EB,C6]* – *Tener razón es la capacidad de razonar una idea con una base [M,EB,C7]* – *Es el razonamiento lógico para una determinada situación [M,EB,C9]* – *Es la lógica, lo que no se puede refutar 2x2=4 [M,EB,C10]*	Argumento o demostración que se aduce en apoyo de algo
– *Verdad, algo que se cumple [M,EB,C3]*	Justicia, rectitud en las operaciones, o derecho para ejecutarlas.

Díaz (2008) implementó una mediación que moduló la inducción a la investigación y desarrollo didácticos en una perspectiva sistémica y que considera los aspectos histórico epistemológicos, cognitivos, socioculturales y didácticos. Fruto de la misma, los dos equipos docentes dieron cuerpo a secuencias de enseñanza con soporte en las fases de una ingeniería didáctica. Interesó articular la experiencia y el diseño científico desde los docentes participantes. Se promovieron las operaciones epistemológica, metodológica y tecnológica necesarias para el dominio científico de los hechos sociales, a saber, una construcción teórica y una comprobación empírica en orden a abrir miradas y levantar alternativas acerca de cómo abordar la apropiación cabal de procesos complejos, en el camino de realizar científicamente un diseño que cristaliza en desarrollos didácticos considerados de modo sistémico.

Afirman los docentes que *"La enseñanza de Razones y Proporciones en la escuela es una de las tareas difíciles para los maestros y maestras... se manifiesta en el alto porcentaje de alumnos que presentan problemas al confundir fracciones con razones matemáticas. Uno de los aspectos que determinan este problema es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar"* (Equipo 2; en Díaz, 2008). Y que *"Al consultar a los estudiantes de 5º año básico sobre sus entendimientos de la Razón Matemática… nos dimos cuenta de que profesores y estudiantes reconocen a la acepción cotidiana de la razón y desconocen la razón matemática*" (Equipo 1; en Díaz, 2008). Concluyen que *"existe una deficiencia en el conocimiento general de Razones y Proporciones, no solo por parte de los alumnos, sino también, en alguna medida, por parte de los Profesores, lo cual conlleva a requerir un esfuerzo conjunto para mejorar…" (*Ávila y equipo, 2007, en Díaz, 2008).

El primer equipo diseñó la secuencia didáctica DESDE LA RAZÓN COTIDIANA A LA RAZÓN MATEMÁTICA que atiende a las concepciones de la razón cotidiana y procura que los estudiantes se apropien del concepto matemático de razón. En su estudio de la construcción histórica de la noción de razón matemática, constatan que ésta ha presentado un devenir oscilante separándose por momentos para confundirse en otros, con la noción de fracción y en el marco de la disputa entre números y magnitudes que inicia con la obra de Euclides. Logra un significado pleno mediante un juego sutil entre ostensivos y no ostensivos, en el mundo local de la proporcionalidad. Su proceso de construcción exhibe dificultades: a) En la teoría de las razones y proporciones de los Elementos de Euclides ocupa dos habitats diferenciados: la teoría de las razones de magnitudes, en los libros llamados geométricos (precursora de la construcción del número real que arranca con fuerza el siglo XIX) y la teoría de las razones de números (que confluirá en la construcción de los números racionales) en los libros llamados aritméticos; b) El manual clásico de enseñanza de Dalmau introduce la notación a:b, que se lee "es a", para la razón. Desca2⍰⍰⍰en esta oralización de su escritura, una tenue distancia a la división y a las fracciones; c) En la construcción de lo numérico no surge la necesidad de introducir la noción de razón por lo que el docente no la explicita en su enseñanza. Se introduce en la manipulación de lo numérico que recae bajo la responsabilidad del estudiante. Desde la didáctica las fracciones siempre serán fracciones de números enteros, mientras que las razones permitirán dar sentido a unas "fracciones generalizadas" (Bosch, 1994).

Para el diseño consideran que la razón es una comparación de cantidades de magnitudes –homogéneas o heterogéneas- donde a las magnitudes de la geometría euclidiana se añaden las magnitudes que manejan hoy las distintas ciencias. Atendiendo al amplio uso de la razón cotidiana, a las dificultades que presentan las fracciones, al rol que juega el estudio de lo que varía en la formación del pensamiento matemático estudiantil deciden diseñar una enseñanza de la razón, incorporando el diálogo entre sus acepciones cotidiana y matemática en el 5º año.

Los estudiantes distinguieron acepciones cotidianas respecto de la matemática; compararon parejas de objetos, ordenaron tres objetos o características según un atributo; y, usaron la razón matemática y su notación con el ostensivo "es a".

El segundo equipo abordó la disyuntiva de fracción o razón matemática sobre la base de una exploración inicial de razones y proporciones, buscó evidencias en los programas, en los entendimientos estudiantiles y en los textos escolares. Constata que no existe una conexión entre razón y fracción en los contenidos de Planes y Programas ni en los textos escolares. Aplicaron dos cuestionarios a dos grupos de estudiantes de séptimo año de escolaridad de dos colegios, uno municipal y el otro particular subvencionado. En el 1º consultaron por las nociones de razón y proporción. En el 2º focalizaron en las nociones de razón y fracción y sus notaciones. Con base en los estudios previos levantaron la secuencia LA RAZÓN MATEMÁTICA CON BASE EN LA MEDICIÓN DE MAGNITUDES. Con los propósitos de identificar magnitudes; reconocer unidades de medida de las magnitudes de longitud y superficie; identificar relaciones matemáticas entre objetos dados; reconocer el significado de razones matemáticas; expresar matemáticamente relaciones entre cantidades de magnitudes mediante una razón; resolver problemas matemáticos que involucran razones matemáticas. Los estudiantes distinguieron fracción –si bien no se abordó la construcción significativa de ésta- de razón sobre la base de la medición de magnitudes, en un trabajo contextualizado con material concreto y desplegaron avances significativos en la medición de magnitudes y la representación de una razón matemática con las notaciones a:b, a/b y "a *es a b".*

A modo de conclusiones. El aula viene presentando vacíos e invisibilidades -para y entre- los conceptos de fracción y razón. Vacíos que instalarán en ella obstáculos producto de dos epistemologías diferentes, una con relación a las fracciones y la otra con la razón matemática. Se constató entre el profesorado la existencia de obstáculos epistemológicos y didácticos imbricados en la enseñanza de las razones y fracciones. Se ilustró como la medida colaboró a dar sentido, fungiendo como eslabón, entre la razón matemática y la razón cotidiana. Se explorará en lo que sigue y desde una perspectiva socioepistemológica, la enseñanza de la fracción. Se procurará dotar de significado al aprendizaje de las fracciones en el marco del pensamiento variacional y del álgebra. Articulado éste con los otros cuatro ejes de pensamiento matemático escolar, a saber, pensamientos de la medida, la forma y el espacio, los números y el azar.

Referencias bibliograficas

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV, IPN. México.

Batanero, C., Cid. J. y Godino,J. (2003) *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros.* Tomado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/ el 240306.

Bosch, A. (1994) *La Dimensión Ostensiva en la Actividad Matemática. El Caso de la Proporcionalidad,* Memoria Doctoral, U. Autónoma de Barcelona.

Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J.; Romo, A. (2006) *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Un Reporte Iberoamericano*. México: Clame

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1)*, 27-40

Díaz, L. (2008) *Enseñando la razón matemática en aulas de 5º y 7º básico*. Obtenido en noviembre de 2008 de www.umce.cl.

Díaz, L. (1998) *Reflexiones didácticas: en torno a Fracciones, Razones y Proporciones.* Ministerio de Educación República de Chile. Santiago de Chile.

Escolano, R. y Gairín, J. (2005) Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista IEM*, 17-35.

Ferrari, M. (2001) *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

PISA (2006) Obtenido el 160407 desde http://nodo6.simce.cl/index.php?id=100&nocache=1.

Rouche, N. (1994) *Enseñanza de las matemáticas y de las ciencias*. Santiago de Chile: CIDE.

Rouche, N. (1998) *Du Quotidien aux Mathématiques: Nombres, Grandeurs, Proportions*. París: Ed. Ellipses.

SERCE (2008) Tomado en noviembre de 2008 de: http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001606/1600660S.pdf

SIMCE (2007) Tomado el 16 de abril de 2007 de www.SIMCE.cl

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FAVORECER LA VINCULACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS Y LOS DE LA ESPECIALIDAD EN LA ENSEÑANZA TÉCNICO PROFESIONAL

Reinaldo Sampedro Ruiz, Milagros Gutiérrez Alvarez, Olga Lidia Pérez González
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey Cuba
reinaldo.sampedro@redeuc.edu.cu, milagros.gutierrez@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: Educación contínua Nivel: Medio

Resumen. *La Estrategia Didáctica presentada en este reporte de investigación es el resultado del trabajo que realiza el grupo de Matemática Educativa de nuestro centro, con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educacionales del territorio. Tiene el fin de lograr el vínculo entre los contenidos matemáticos y las especialidades que se estudian en la Enseñanza Técnico Profesional y preparar al egresado de esta enseñanza para enfrentar los problemas técnicos profesionales que enfrentará en la vida como trabajador. En la estrategia se muestran las acciones desarrolladas, lo que nos permitió establecer la interrelación de los contenidos de las especialidades con los de la asignatura de Matemática, y crear un conjunto de tareas vinculadas a la especialidad de forma sistémica teniendo en cuenta el nivel de desempeño cognitivo de los estudiantes. La implementación se realizó en dos politécnicos de la provincia, con resultados satisfactorios.*
Palabras clave: estrategia didáctica, vínculo entre contenidos matemáticos, sistema de tareas

Introducción

En los últimos años la política educacional cubana ha estado orientada a formar ciudadanos con una cultura general e integral y con un pensamiento humanista, científico y creador, que les permita adaptarse a los cambios de contexto y resolver problemas de interés social con una ética y una actitud crítica responsable. La Enseñanza Técnico Profesional cubana, que se enfrenta hoy a grandes transformaciones en su modelo educativo, tiene como misión la de dirigir científicamente la formación técnica y profesional de los estudiantes, con el objetivo de lograr una preparación integral de un futuro trabajador, competente y comprometido con su país, que le posibilite su incorporación al mundo laboral y en tal sentido esta orienta, coordina, supervisa y evalúa el proceso de enseñanza aprendizaje en los centros docentes pertenecientes a esta enseñanza.

Teniendo en cuenta dichas transformaciones, la Enseñanza Técnico Profesional se transforma teniendo como producto final un egresado en Bachiller Técnico donde se asume como prioridad; impartir el programa de preuniversitario para los dos primeros años de la carrera de Técnico – Bachiller en las diferentes especialidades. La ETP cubana tiene la función social de proporcionar a la economía del país la fuerza de trabajo calificada de nivel medio y los principales principios que caracterizan a este nivel de enseñanza son:

- El principio de integración del estudio con el trabajo.
- El vínculo de la teoría con la práctica.
- La vinculación de los contenidos de las asignaturas que se reciben en cada año con los contenidos de la especialidad.

La importancia de este trabajo se fundamenta en la necesidad de propiciar una enseñaza problémica, que logre superar la tendencia memorística que hasta hoy predomina en las aulas de nuestra enseñanza y que prepare cada día mas al egresado de la Enseñanza Técnica Profesional para enfrentar los problemas técnicos profesionales que enfrentará en la vida como trabajador.

La actualidad de la temática está contenida en los cambios que le ha propuesto el Ministerio de Educación a la ETP, formar un técnico profesional, con amplios conocimientos, habilidades y valores, apto para enfrentar los retos de un nuevo orden mundial, asumiendo compromisos para mejorar las condiciones económicas y políticas en defensa de los valores e intereses nacionales.

Para este trabajo se realizó un diagnóstico inicial en dos de los centros educacionales de la provincia de esta enseñanza y se encontraron entre otras las siguientes dificultades:

- Escasa vinculación de las asignaturas de la enseñanza general con las asignaturas propias de la especialidad.
- Carencia de una bibliografía técnica especializada.
- Poca o casi nula disposición de ejercicios acorde con las especialidades.
- No conocimiento de las habilidades técnico profesionales a formar por parte de los profesores de Matemática en cada una de las especialidades.
- El programa de Matemática tiene mucho contenido y ofrece muy poco tiempo para vincular los contenidos matemáticos con los contenidos de la especialidad.
- Poca utilización de la colección futuro, de software educativo y de los videos clases.
- Falta de formación de los docentes en los contenidos de la especialidad.

- Escaso diseño de actividades que propicien el vínculo del contenido de la Matemática con la especialidad.
- Insuficiente cantidad de tareas y materiales de estudio que contemplen problemas de aplicación a las especialidades.

Desde nuestro punto de vista se ha intentado abordar la problemática, de cómo favorecer el vínculo de los contenidos matemáticos con los de las especialidades en el proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza técnica profesional en Cuba, teniendo como objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la ETP, sin embargo las investigaciones y los trabajos aun son insuficientes.

Se pretendió como objetivo elaborar una estrategia didáctica que tome en consideración los niveles de desempeño en el proceso de enseñanza aprendizaje y el vínculo con los contenidos de las especialidades a través de un sistema de tareas que favorezca los resultados del PEA de la Matemática en los alumnos de esta enseñanza.

Para el diseño de esta estrategia didáctica se han tenido en cuenta aspectos tan importantes como:

El papel del maestro, por ser este la persona que dirige el proceso docente educativo, lo planifica, lo organiza, ejecuta y controla, y que entre otros aspectos este maestro debe poseer:

- Conocimiento de los objetivos del programa de la asignatura que imparte.
- Amplios conocimientos de los contenidos que imparte.
- Una buena preparación para aplicar el diagnóstico en sus estudiantes.
- Constante preparación tanto técnica como metodológica para dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Conocimientos básicos de la especialidad, que permitan el vínculo de los contenidos matemáticos con los de las especialidades.
- Conocimientos básicos de la especialidad, que permitan la resolución de problemas relacionados con la especialidad del estududiante.

Los niveles de desempeño. Es necesario que el profesor domine los niveles que están establecidos por la enseñanza (Campitrous, 2000), por los que debe transitar la asimilación de los conocimientos en los estudiantes.

- Primer nivel: Capacidad del alumno para utilizar las operaciones de carácter instrumental básicas de una asignatura dada, para ello deberá reconocer, identificar, describir e interpretar los conceptos y propiedades esenciales en los que esta se sustenta.
- Segundo nivel: Capacidad del alumno de establecer relaciones conceptuales, donde además de reconocer, describir e interpretar los conceptos deberá aplicarlos a una situación planteada y reflexionar sobre sus relaciones internas.
- Tercer nivel: Capacidad del alumno para resolver problemas, por lo que deberá reconocer y contextualizar la situación problemática, identificar componentes e interrelaciones, establecer las estrategias de solución, fundamentar o justificar lo realizado.

La integración del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje. La integración en el PEA

Se coincide en plantear que la integración es una etapa y no un producto acabado de la interdisciplinariedad, es un momento de organización y estudio de los contenidos de las disciplinas, es una etapa para la interacción que sólo puede ocurrir en un régimen de coparticipación, reciprocidad, mutualidad (condiciones esenciales para la efectividad de un trabajo interdisciplinario), se considera entonces la integración como una etapa necesaria para la interdisciplinariedad (Fiallo, 1996).

La integración se expresa en cada asignatura, en las relaciones entre ellas las cuales conforman el año o grado de cada carrera. En este trabajo se aborda la integración para contribuir al desarrollo de las habilidades profesionales desde el primer año de la especialidad, para dar solución a los problemas profesionales más comunes que se les pueden presentar a los futuros egresados en el desempeño profesional y al mismo tiempo contribuir a la asimilación y fijación de conocimientos fundamentales para el alumno.

La creación de un sistema de tarea

Se partió de la definición que la tarea docente como la célula del Proceso Enseñanza Aprendizaje y que en cada una de ella se pretende un objetivo, es decir hay un contenido asimilar una habilidad a desarrollar por lo tanto se crea un sistema de tareas que vincule con de los contenidos matemáticos con la especialidad, teniendo en cuenta los niveles de asimilación y desempeño del contenido en los estudiantes y la integración de las materias de la matemática, especialmente con cálculo topográfico y práctica de la topografía básica ,logrando a través del sistema de tareas desarrollar el PEA de la matemática teniendo en cuenta la vinculación del contenido matemático con los de la especialidad del futuro profesional.

Al plantearse como objetivo elaborar una estrategia se tomó como definición de estrategia al uso deliberado y planificado de una secuencia compuesta por acciones y procedimientos dirigida a alcanzar una meta establecida, (Pozo,1999).con las siguientes características.

- Sistémica, pues tiene su origen en los objetivos generales que deben retomarse en cada tema para trabajar en el PEA de la Matemática y de las especialidades.
- Toma en consideración los intereses, motivaciones de los estudiantes para su concreción.
- Propicia el trabajo individual y grupal y la integración de estos en el proceso docente-educativo.

Objetivo principal

Favorecer el vínculo de los contenidos de la Matemática con la especialidad

Entre las premisas fundamentales para su aplicación se encuentran.

- Consideración de los componentes no personales del proceso docente-educativo.
- Disposición favorable del docente.
- Participación activa de los estudiantes.
- Consideración de la coherencia interna del proceso enseñanza-aprendizaje.

La estrategia consta de cuatro etapas, cada una con un fin determinado y con sus acciones correspondientes.

Etapa de planificación

- Estudio de los programas de las asignaturas, (análisis de los objetivos del grado, contenidos, modelo del egresado).
- Intercambio con los especialistas.
- Confección de la tabla de doble entrada en forma matricial para la determinación de las relaciones entre contenidos,(Ruiz, 2005) .
- Determinación de las relaciones ínter materias.

Etapa de organización

- Organización de los contenidos.
- Diseño de las tipologías de clases.
- Diseño del sistema de tareas, según los niveles de desempeño.
- Incorporar el sistema de tareas según la tipología de clases.
- Determinación del sistema evaluativo.

Etapa de ejecución

- Diagnóstico del grupo de estudiantes.
- Análisis de cada clase, sistema de tareas, relación alumno – profesor – alumno.
- Desarrollo del sistema evaluativo concebido al planificar la asignatura.

Etapa de control.

- Análisis de la marcha de la propuesta, al cierre de cada unidad, y semestre.
- Reajustar la estrategia según las sugerencias que existan en cada análisis según corresponda.

Este trabajo fue aplicado en dos especialidades en distintos politécnicos de la provincia de Camaguey, en la especialidad de Geodesia y Cartografía, y en la especialidad de Agronomía, aunque con anterioridad se había trabajado en el Politécnico de Gastronomía. Como trabajo que ha garantizado los resultados, se ha ido reforzado el trabajo metodológico con los docentes, exigiéndose en ellos:

- Estudios de los programas de las asignaturas de cada año.
- Intercambio con especialistas de la profesión.
- Selección de la, o las unidades a trabajar.
- Confección de la tabla de doble entrada en forma matricial.
- Organización de los contenidos de la Matemática.
- Confección de las tareas.
- Desarrollo del trabajo metodológico de la unidad.
- Ejemplificación y desarrollo de la propuesta.

Para la confección del sistema de tareas se ha tenido en cuenta la relación entre los contenidos de ambas asignaturas, esta se realizó luego del estudio del programa, plan temático de primer, segundo y tercer año de la especialidad, con ayuda de los profesores que imparten la asignatura Cálculo Topográfico Básico y Practica de topografía Básica en cada uno, de allí seleccionamos los contenidos comunes que pueden ser tratados en ambas asignaturas, para la elaboración de los ejercicios nos apoyamos en la información obtenida a través de la entrevista realizada a diferentes trabajadores de Geocuba entre ellos, Ingenieros, Topógrafos actualidad grupo empresarial de Geocuba, rectora de los trabajos topo geodésico ,catastrales y cartográficos en el país y estudiantes de segundo y tercer año del Instituto, las tareas del sistema fueron creadas con el apoyo de los profesores de geodesia y otros en el centro de estudio apoyándonos en el conocimiento teórico de los profesores de Geodesia y de Matemática y además con la valiosísima ayuda y cooperación de los profesores de segundo y tercer año por poseer además del contenido teórico, la experiencia práctica, los cuales a raíz de la investigación se han visto motivados por el sistema de tareas.

Propuesta de tareas de los tres niveles en la especialidad de Geodesia y Cartografía:

Ejemplo de ejercicio del primer nivel

Convierta los rumbos en azimut según los cuadrantes donde se encuentra

1- N 78º 30` w , N 45º 20 ´E , 54º 42` E

Ejemplo de ejercicio del segundo nivel

Calcule la longitud de un tensor que se debe utilizar para asegurar un teodolito un punto A hasta un punto C se conoce que el triángulo ABC es recto y el <)BAC mide 30° y la longitud del teodolito a la base es de 1m.

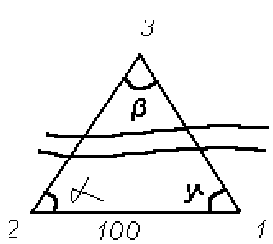
a) De la respuesta en Km.

En este ejercicio del Nivel de complejidad requiere por parte del alumno dominio de las razones trigonométricos, razonamiento y compresión del texto del problema y al mismo tiempo le esta haciendo reconocer en instrumento de especialidad.

Ejemplo de ejercicio del tercer nivel

Determine las divisiones inclinadas hacia un punto inaccesible desde dos puntos geodésicos donde es posible medir la distancia entre ellos.

Si el estudiante con sus conocimientos, con los de geometría y los instrumentos de la especialidad obtuvo estos datos, entonces puede calcular aplicando el resto de los conocimientos trigonométricos b =100 m, α= 45°00' y β = 42° 00´.



En el tercer nivel se necesita del estudiante creativo, en el ejemplo el debe denominar que tiene que hacer en la práctica para resolver el problema y después comienza buscando las distancias partiendo de un tercer punto y después aplica la ley de los senos y de los cosenos. Para darle cumplimiento al objetivo de este trabajo proponemos que los profesores se apoyen en un sistema de tareas el cual se corresponda con el contenido de la unidad de Trigonometría, se apoye en lo estudiado en 1er año en la unidad de cálculo numérico y se retome en la unidad I de sistematización de 3er año, este nivel de desempeño se pueden aplicar según el diagnóstico que cada profesor halla hecho en su grupo. Variando por alumno, grupo y escuela.

Conclusiones

A través de la investigación desarrollada, en el proceso docente-educativo se detectaron limitaciones que parten del propio programa de estudios. Se ha comprobado cuan vital es como herramienta para el profesor tener un material auxiliar, en este caso el sistema de tareas y orientaciones para desarrollar la enseñanza de la Matemática en la especialidad de Geodesia y Cartografía teniendo en cuenta la vinculación de ambas asignaturas y los niveles de asimilación del contenido, esto constituye una mejora en las formas organizativas del PEA, así como el dominio que debe poseer el profesor del lugar que ocupa la Matemática dentro del plan de estudio, revirtiéndose esto en una mejor asimilación de los contenidos y en el desarrollo de las habilidades profesionales de los estudiantes, se evidenció que el material didáctico resultado de la investigación, logra que el docente posea un mayor dominio de elementos de la especialidad con que trabaja, se logra una mayor motivación de los estudiantes hacia la Matemática al ver su utilidad práctica y a la vez mayor conocimiento de aquellos contenidos matemáticos que le permiten justificar elementos prácticos en la carrera .Con el desarrollo del sistema de tareas se logró que los estudiantes, basándose en los modelos establecidos según los niveles de asimilación desarrollaran trabajos prácticos, logrando una labor independiente en los mismos.

Referencias bibliográficas

Arango, M. (2007). *Sistema de Tareas para lograr el vínculo de los contenidos de Matemática con la especialidad de Geodesia y Cartografía del IPC*. Tesis de Master no publicada. Universidad de Camagüey. Cuba

Ariza, I. (2004). *Vinculación de la matemática con Tecnología de los Servicio Gastronómicos*. Tesis de Master no publicada. Universidad de Camagüey. Cuba.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Campitrous, L. (2000). *Orientaciones metodológicas. Décimo grado*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García, J. (2001). *Metodología para un enfoque interdisciplinario desde la Matemática destinada a fortalecer la preformación profesional del contador*. Tesis de doctorado no publicada. Camaguey. Cuba: ISP "José Martí".

Fiallo, J. (1996). *Las relaciones intermaterias una vía para incrementar la calidad de la educación*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Fiallo, J. (2001). *La interdisciplinaridad en el currículo. Realidad o utopía*. La Habana.

Gutiérrez, M. (2000).Una experiencia de actividades integradoras. *I encuentro internacional de enseñanza de la Matemática.* Universidad de Camaguey. Cuba.

Jungk, W. (2003). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática.* La Habana: Editorial. Pueblo y Educación.

MINED. (1987). *Proyecto Matemática. Concepción general de la educación general politécnica*. Cuba.

Pozo, J.I- (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Madrid: Ediciones Morata

Ramírez, E. (2001). *Diseño teórico metodológico de una estrategia didáctica para la integración de la Matemática*. Tesis de doctorado no publicada. UCLV. Cuba.

Reshetova, A. (1988). *Problemas de la unidad de los conocimientos fundamentales y profesionales y la estructura de una asignatura en el CES*. ISAICC.

Rodríguez, M. (2004).*Tipologías de estrategia*. Centro de Ciencias e Investigaciones Pedagógicas. Universidad Pedagógica "Félix Varela".Villa Clara .Cuba.

Ruiz, J. (2005). *Metodologia para la organización cientifica del contenido de planes de estudios en la educación superior en Cuba*. Tesis de doctorado no publicada. Camaguey. Cuba.

Santos, J (2005). *Modelo pedagógico para el mejoramiento del desempeño pedagógico profesional de los profesores de Agronomía de los Institutos Politécnicos Agropecuario*. Tesis de doctorado no publicada. La Habana. Cuba.

Valcárcel, N (1998). *Estrategia interdisciplinaria de superación para profesores de Ciencias de la Enseñanza Media.* Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. Ciudad de la Habana. Cuba.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS: DE LA INTUICIÓN A LA FORMALIZACIÓN. EL CASO DE LAS CÓNICAS

Efrén Marmolejo, Gema Moreno, Silvia Hernández, Amín Bahena
Universidad Autónoma de Guerrero México
efrenmarmolejo@yahoo.com, alejandrigemath@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico Nivel: Medio

Resumen. *Nuestra propuesta, la cual es resultado de una investigación en proceso, se encuentra inserta en el nivel Medio Superior y es relativa a la Geometría Analítica, específicamente a la construcción de las cónicas. Se nutre del plegado de papel y del uso de un software de geometría dinámica (Cabri Geomètre II) como recursos didácticos. Su referencia teórica está basada en los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele.*
Caracterizamos, así, la construcción geométrica en tres momentos: la intuición a través del plegado de papel; la visualización vía un software de geometría dinámica como herramienta didáctica argumentativa; y por último formalizando las argumentaciones y conjeturas establecidas al analizar las cónicas vía la técnica del Debate Científico.
Palabras clave: construcción geométrica, cónicas, intuición matemática

Introducción

¿Qué es construir un concepto matemático?, ¿qué procesos tienen lugar durante esta construcción? Específicamente en el campo de la Geometría Analítica, ¿cómo motivar la construcción de las cónicas?

Contestar estas preguntas ha conducido a la exploración de recursos estratégicos que permitan transitar entre los niveles de razonamiento geométrico. Este escrito corresponde a una investigación en proceso que descansa en la búsqueda de un camino hacia la construcción de objetos geométricos, para el caso específico del estudio de las cónicas. El objetivo es construir una propuesta de aplicación en el aula que pueda extenderse a otros tópicos matemáticos.

Nuestra investigación toma los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1990) como marco para el aprendizaje, vía sus aportaciones acerca de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, lo cuáles van desde el razonamiento visual hasta el formal y abstracto. Nuestro trabajo se encuentra inserto en el nivel Medio Superior y es relativo a la Geometría Analítica.

Es ampliamente compartido que una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría es la articulación entre los procesos de visualización y los procesos de justificación. El discurso escolar, a este respecto, debe llevar de una argumentación informal que se apoya fuertemente en la visualización -y por lo tanto es de carácter descriptivo- a una organización discursiva formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas.

Por ello, la metodología que hemos desarrollado se alimenta de dos recursos para la enseñanza: el plegado de papel y el uso de un software de geometría dinámica. Se parte entonces, de la *intuición* a través del doblado de papel, seguida de la *visualización* vía un software de geometría dinámica como *herramienta didáctica argumentativa* (Larios, 2007) y por último la *formalización* de las argumentaciones y conjeturas establecidas al analizar las cónicas vía la técnica del *Debate Científico* (Legrand, 1993/2006). Caracterizando así, la construcción geométrica en tres momentos: intuición, argumentación y formalización.

Apelando a la Intuición

Es a través del doblez de papel que introducimos la fase manipulativa de "palpar" conceptos, visualizar y modelar propiedades. La "manipulación" facilita la comprensión de conceptos geométricos, dota de significado a los alumnos y propicia el descubrimiento de propiedades, desarrolla la intuición, fomenta la creatividad y se nutre el carácter lúdico. Así, la técnica del plegado de papel, como una estrategia para la enseñanza de la Geometría, proporciona un medio eficaz para la manipulación de los objetos geométricos.

En este contexto, las líneas serán dobleces y los puntos serán intersección de dobleces o puntos marcados con el lápiz. Como preliminar, es imprescindible dedicar una sesión de trazos básicos previo al desarrollo de la construcción de las cónicas (línea perpendicular, línea paralela, mediatriz y punto medio de un segmento, punto simétrico, línea simétrica, bisectriz de un ángulo, etc.).

Por lo tanto, en nuestra propuesta para el desarrollo de las construcciones de las cónicas (parábola, elipse, hipérbola), explotamos la idea de rectas tangentes como envolventes de las curvas cónicas, mediante el plegado de papel (García, s.f.). En cada actividad son discutidas las razones que sustentan tal construcción, enfatizando los argumentos intuitivos que las validan.

Hacia la visualización dinámica

En esta fase, la construcción de las cónicas se realiza de forma semejante a la realizada con el doblado de papel, pero haciendo uso de un software de geometría dinámica (Cabri Geomètre II). Sin embargo, aquí se acentúa la acción de proporcionar impulsos que motiven la argumentación de los estudiantes.

Escogimos el uso de un software debido a las siguientes características del medio geométrico dinámico (Ministerio de Educación Nacional, 2004):

a) La capacidad de arrastre de las figuras construidas que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación.

b) El uso extensivo del lugar geométrico y traza (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.

c) La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

El papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de la geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de "experimentación" sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso. La manera de reaccionar ante los estímulos proporcionados por el individuo y los instrumentos utilizados para proporcionar tales estímulos, se pueden convertir en herramientas para que el individuo exprese sus observaciones, conjeturas o argumentaciones. De esta forma, se contribuye a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, las tensiones entre *los procesos de visualización y su potencial heurístico* en la resolución de problemas y los *procesos de justificación y su potencial pedagógico* para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.

Consecuentemente, explotamos la capacidad dinámica que tiene un software de geometría dinámica, como un mediador entre el conocimiento geométrico y el individuo. El objetivo es que los estudiantes sistematicen sus observaciones, conjeturas y argumentaciones para que las refinen, e inducir un acercamiento a la construcción de las cónicas.

Formalización

En esta última etapa, hacemos uso, con mayor énfasis, la técnica del Debate Científico (Legrand, 1993/2006). El Debate Científico es entendido como aquel que se instaura entre los estudiantes a partir de situaciones problemáticas introducidas por el profesor, o a propósito de cuestiones o conjeturas que los mismos estudiantes aportan. El debate científico es aquel en el que los enunciados que se trabajan son conjeturales y todo alumno puede someter sus propias conjeturas al grupo de trabajo, cabe mencionar la importancia de un ambiente que permita esta apertura sin temor a que las aseveraciones que se revelen finalmente equívocas no produzcan malestar entre quien las evocó.

En ese sentido, dentro de esta metodología, se caracterizan las formas de comportamiento del alumno y del profesor, así como el establecimiento de los roles que desempeñan.

El *juego del alumno*. Se da una negociación didáctica en la que éste va a atender y analizar las aseveraciones y propósitos de sus iguales y, por otra parte, debe convencerlos de que sus participaciones son aceptables. Lo que se busca es NO centrar el trabajo alrededor de la opinión del instructor.

Existe pues un *fundamento epistemológico de la didáctica del debate científico* se hace necesario tomar en cuenta las conjeturas, como el encadenamiento de ideas que van a considerarse como verdaderas, las pruebas personales para que pueda persuadirse a los demás de la veracidad de tales conjeturas. En este sistema, el "*alumno-matemático*" tiene por interlocutor a su mini-comunidad, es decir, conjunto de personas con las que interactúa.

El *juego del profesor.* Exige jugar simultáneamente un triple juego: epistemológico, didáctico y social.

- Desde el punto de vista *epistemológico*, a fin de que perciba los diferentes niveles de argumentación que se presenten y ayude al microuniverso a captar lo que está fundamentalmente en juego.
- En el juego *Didáctico*, se trata primordialmente de permitir a los estudiantes introducirse en problemáticas científicas difíciles conservando un sentido imparcial, construyendo un historial de las ideas fuertes, llevando una bitácora personal, de tal forma que permaneciendo neutro, forme una memoria de la clase.

- En el sentido *Social*, se toman dos perspectivas, por un lado, se hace necesaria su presencia a fin de organizar las participaciones de los asistentes, y evitar un descontrol; por el otro, el coordinador debe redefinir su estatus social y hacer a un lado la imagen tradicional como especialista; en pocas palabras, debe renegociar el contrato habitual.

Con este tipo de metodología, se busca que una parte de las conjeturas propuestas por los alumnos, después de ser probadas, se conserven; seleccionando entre las intuiciones espontáneas que son profundas y que van a proporcionar afirmaciones y aquellas que son muy intuitivas y que desembocan en resultados falsos. Se presenta por lo tanto un triple problema: lo que es falso, la identificación de procedimientos para conservar lo probado como verdadero y la adquisición de un sentido crítico.

Lo anterior implica, que con la implementación del Debate Científico por medio de la construcción y discusión de ideas generales, los razonamientos en ello utilizados sean necesarios, accesibles y naturales, buscar que los alumnos, puedan manipular las matemáticas, para que finalmente a partir de enunciados generales les atribuyan sentidos compatibles con los del matemático profesional y finalmente el acceso a una forma de discurso que confiere a aquellos que la dominan cierta autonomía de pensamiento.

Hacemos uso de esta técnica con el objetivo de conducir los argumentos empleados por los estudiantes, en la construcción de las cónicas, hacia la definición como lugar geométrico y su definición analítica.

Conclusión

En el aula, deben desarrollarse experiencias que permitan al estudiante transitar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas, con el propósito de generar convicciones y permitir eliminar ambigüedades en el proceso de elaboración colectiva del conocimiento matemático, es decir, validar sus aseveraciones.

Invitamos a la reflexión acerca de las concepciones y creencias, sobre los distintos modos de actuar en el aula y de los distintos momentos que atraviesa un estudiante en el camino a la construcción de las cónicas. Presentamos la propuesta de un camino de acceso a la construcción de las cónicas, vía el reconocimiento de las herramientas heurísticas del estudiante rescatando aquellas ideas elementales que conforman la definición de los conceptos matemáticos involucrados, reflexionando sobre el proceso propio de la construcción.

Consideramos pertinente que la actividad de enseñanza sobre la construcción de conceptos geométricos, debe tomar la precaución de llevar al estudiante a la generalización, sin brindar conceptos y definiciones concluyentes de forma inmediata, procurar que se identifique gradualmente con los métodos de la ciencia y desarrollar su independencia de pensamiento mediante la realización de tareas creadoras.

Referencias bibliográficas

García, J., (S.f.) *Construcciones geométricas con dobleces de papel*. Obtenido en noviembre 12, 2006, del sitio Web del Proyecto Estímulo del Talento Matemático: http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/.

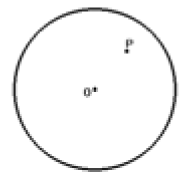
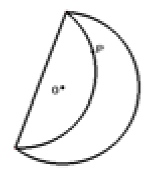
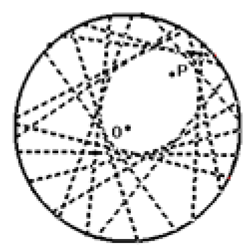
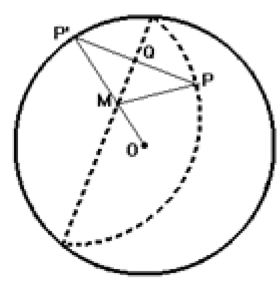
Larios, V. (2007) El software para geometría dinámica como mediador semiótico entre la geometría y el alumno. *Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* (pp.281-288) Querétaro, México.

Legrand, M. (2006) *Debate científico en cursos de matemáticas y especifidad del análisis* (E. Locia)Traducción no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México. (Trabajo original publicado en 1993).

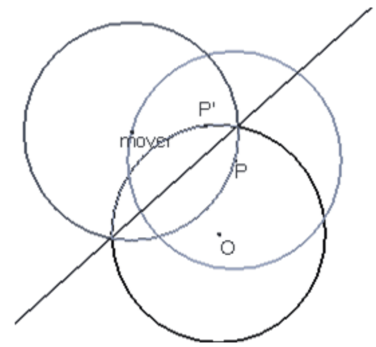
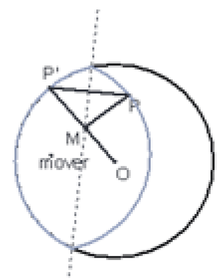
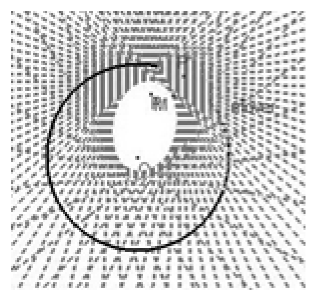
Ministerio de Educación Nacional (2004) *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Proyecto de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Colombia. Obtenido en abril 12, 2006, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

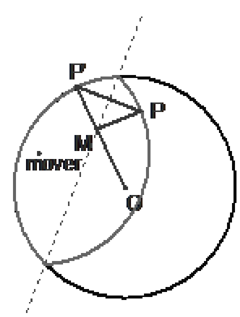
Van Hiele, P.M. (1990). *El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría* (De problematiek van het inzicht, gademonstreed aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde - leerstof). Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, Holanda.

El caso de la Elipse

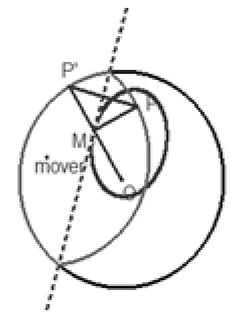
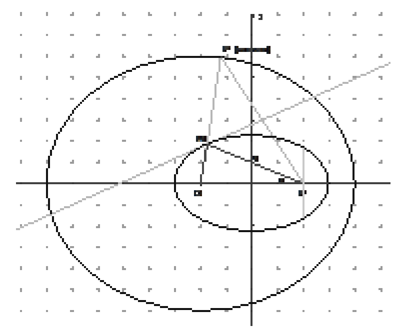
Instrucción	Construcción
Apelando a la intuición	
Toma un recorte en forma de círculo y marca un punto **P** distinto del centro **O**. Marca el punto y el centro por los dos lados, para facilitar la visión al doblar.	
Dobla el círculo de forma que la circunferencia pase por **P** y desdobla.	
Repite la operación variando el doblez de forma que vaya girando por los puntos de la circunferencia. *¿Qué figura delimitan los dobleces?, ¿Qué papel desempeñan el punto* ***P*** *en la figura, la circunferencia y* ***O****? ¿Es simétrica la figura? De ser así, ¿cuántos ejes de simetría tiene? ¿Cuál es la relación de éstos con los puntos* ***P*** *y* ***O****?*	
Supongamos el radio de la circunferencia es **r** y fijémonos en un doblez. Marca el punto **P'** que al doblar cae sobre **P** y desdobla y remarca con un lápiz la línea del doblez. Une con lápiz **P'** con el centro (así **OP'** = **r**) y llama **M** al punto de intersección de **OP'** con la línea marcada por el doblez. *¿Qué podemos decir de* ***P'M*** *y* ***MP****?, ¿Cuánto suma* ***OM*** *+* ***MP****?, ¿Qué argumento geométrico valida tu respuesta****?,*** *¿Sucederá lo mismo con otros dobleces?*	

<table>
<tr><th colspan="2">Hacia la visualización dinámica</th></tr>
<tr><td>Haciendo uso del software, en un círculo con centro O, escogemos un punto P arbitrario y diferente del centro. Con el compás, se traza una circunferencia de igual radio que la primera y con centro en P, con centro (mover) en esta segunda circunferencia se traza otra de igual radio. Al igual que en el doblado de papel, se busca que esta tercera circunferencia al rotar, siempre toque el punto P.

Se traza una recta que pasa por la intersección de la primera y la tercera circunferencia.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ocultando los trazos innecesarios tendría una apariencia similar a la del doblado de papel.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Le damos traza a la recta y animación al punto mover y podemos ver la figura que describen las rectas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Usando simetría axial se encuentra el simétrico P’ de P. La recta es mediatriz del segmento PP’, se traza el radio OP’. A la intersección del radio y la recta le llamamos M. Como el triángulo MPP’ es isósceles MP’=MP, el radio OP’ = OM+MP’= OM+MP, así la suma de las distancias de MO y MP es siempre constante, igual al radio OP’.

¿Qué puedes decir de los segmentos PM y P’M?, ¿Qué importancia tiene los puntos M y O?, ¿Y el radio de la circunferencia?</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Le damos traza al punto M y animación a mover, y obtenemos la imagen de una elipse.

¿Qué pasa si acercamos P a O?, ¿Qué puedes decir de la longitud de los segmentos MP y MP’?, ¿Cuál es la longitud de OP’?, ¿Cuál es la suma de las longitudes de OM y MP?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Hacia la formalización</td></tr>
<tr><td>Se hace la identificación del triángulo característico y de las propiedades intuitivamente construidas dando paso mediante su ubicación en el plano cartesiano. Finalmente, se construye la ecuación correspondiente a $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a partir de los conceptos de distancia y de la ubicación de puntos previamente del dominio del estudiante.</td><td></td></tr>
</table>

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL ÁMBITO ESCOLAR. UN ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO EN INGENIERÍA

Gema Rubí Moreno Alejandri
Universidad Autónoma de Guerrero México
alejandrigemath@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación es producto de una tesis de maestría (Moreno, 2008) y es referente a un análisis de tres libros de texto -principalmente usados- de Cálculo Vectorial en Ingeniería Electromecánica. Específicamente, se analiza el tratamiento que se le da al Teorema de la Divergencia (TD) en los libros de texto. El marco teórico referencial es la aproximación socioepistemológica. La metodología de análisis de los libros de texto es de tipo conceptual y estructural.*
Palabras clave: teorema de la divergencia, análisis de libros de texto

Introducción

La experiencia ha mostrado que, los cursos tradicionales de Cálculo Vectorial, por lo general, han tenido un enfoque mayoritariamente teórico, centrado en procedimientos algorítmicos de derivación e integración en varias variables. Esto ha llevado a descontextualizar y despersonificar los conceptos y nociones en el cálculo vectorial, ocultándose de esta forma su primera significación. En especial el Teorema Fundamental del Cálculo -por ejemplo el Teorema de la Divergencia (TD)- posee poco o ningún significado natural en los alumnos que han cursado la materia. Esta desvinculación con las aplicaciones de los campos vectoriales ha resultado en que un estudiante apruebe, sin que pueda otorgarle a los desarrollos teóricos del curso una significación de naturaleza física, por ejemplo su vinculación con los conceptos relacionados al electromagnetismo o a la mecánica de fluidos.

En particular, estamos interesados en el Teorema de la Divergencia, por ser una generalización del Teorema Fundamental de Cálculo (en sus versiones bi y tri dimensional). Además, este resultado sustancial del Cálculo Vectorial, involucra una gran cantidad de conceptos y nociones del mismo. Su complejidad desde el punto de vista epistemológico y los hechos didácticos implicados en su aprendizaje, así como la fenomenología asociada, hacen fundamental el estudio del tratamiento del Teorema de la Divergencia.

Dado el papel protagónico de los libros de texto en el sistema de enseñanza, nos interesan las propuestas pedagógicas expuestas en ellos para contribuir al proceso de aprendizaje del **TD**. Por lo tanto, esta investigación es referente al proceso de ***difusión del saber*** mediante la figura de libro de texto -para lo cual hemos seleccionado tres libros de texto-específicamente se aborda el tratamiento del TD en Ingeniería. Este escrito presenta resultados de una investigación de tesis de maestría (Moreno, 2008).

Referencias teóricas

La aproximación *socioepistemológica*, busca explicar cómo se aprende, cómo se enseña y qué se enseña, para lograr desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, vía el rediseño del discurso matemático escolar. En particular, nuestra investigación estará centrada en la cuestión *¿qué se enseña?*

Especialmente, nuestra investigación estudia las diferencias entre el objeto del saber (el TD como saber científico matemático) y el objeto de enseñanza (el TD como saber a enseñar). Concretamente nos limitaremos a analizar libros de texto.

Es oportuno destacar que aunque entre las actividades propuestas por los textos y las que se concretan en las aulas existe un puente que es el docente, en este trabajo no se indaga, por ejemplo, sobre los criterios que siguen los docentes al momento de seleccionar actividades. El único dato con el que se cuenta es que ellos, raramente usan diseños propios para las actividades o bien raramente realizan una selección critica de los materiales, sino que los extraen de los textos.

Por lo tanto, los libros de texto son formas de presentación relativamente nuevas, producto de su natural evolución, del proceso de transposición didáctica, y que además han borrado las fuentes o motivos del origen de sus conceptos, así como también las transformaciones que se han dado en ella.

Metodología de investigación

La estructura metodológica de esta investigación se desarrolló de la forma siguiente:

- Un examen de las diversas investigaciones, sobre la didáctica del análisis, referente al cálculo diferencial e integral en una o más dimensiones;
- Inspección del origen del Teorema de la Divergencia de acuerdo a los resultados de Gauss, de Ostrogradskii y de Green, así como su naturaleza mediante la fenomenología asociada a la mecánica de fluidos y el electromagnetismo;
- Un Análisis de tres Libros de Texto de Cálculo Vectorial más populares en la carrera de Ingeniería Electromecánica del Instituto Tecnológico de Acapulco (ITA). No obstante, debido a la particularidad del Teorema de la Divergencia, ha sido necesario rediseñar una metodología que cumpla nuestras expectativas que, por un lado, evidencie la estructura, y por otro, los distintos enfoques conceptuales de los autores. Por lo tanto, la metodología empleada –una adaptación de las metodologías de González y Sierra (2004) y de Castañeda (2003)- comprende dos tipos de análisis: uno *estructural* y el otro *conceptual*.
- Finalmente, abordamos conclusiones de los resultados del análisis de los libros de texto. Así como algunas consideraciones referentes a la enseñanza del Calculo Vectorial.

Resultados de la investigación

Observamos, en nuestra investigación, que los libros de texto abordados, tomando como referencia al Teorema de la Divergencia, acusan deficiencias tanto en los aspectos conceptuales como en aquellos relacionados con la debida contextualización de los saberes. En consecuencia, algunos de los cursos del ciclo básico se reducen a una repetición de procedimientos mecánicos, y olvidan la importancia de una reflexión teórica seria y de una motivación previa que señale el tipo de problemas aplicados hacia los cuales dichos procedimientos apuntan. Entre otros, algunos de los resultados son los siguientes:

- El uso de la tecnología es poco aprovechado para la comprensión de este tema. Por ejemplo, el Teorema de la Divergencia potencia una resignificación –del tipo geométrico y físico- del concepto de divergencia adquirido a partir de su definición. A este respecto, sólo uno de los libros rescata esta idea (Stewart, 2004).

- La visualización es una parte poco explorada en los tres libros de texto. Los gráficos que surgen como parte de la explicación del teorema y su demostración –en el caso de explicitarla- sólo hacen referencia a la región donde se integrará, haciendo caso omiso del proceso inmerso en la igualdad propuesta en el Teorema de la Divergencia.

- En los tres libros, la mayoría de los ejemplos y/o ejercicios imponen énfasis en la ventaja operativa de la conversión de una integral de superficie a una integral de volumen, o viceversa. Los ejercicios propuestos en los libros de texto raramente obligan a tomar decisiones sobre los procedimientos que se utilizan para hallar la solución. Tienen la intención de mecanizar ciertos procedimientos que luego pueden ser utilizados en la resolución de problemas. Además de que no hay ejercicios que pongan a prueba la *necesidad* de las hipótesis del teorema, reduciéndose así a la ejercitación del teorema como una simple *regla* cuya implementación convierte un tipo de integral a otro. Los problemas siempre tienen una sola respuesta correcta. Sólo se aprende una forma correcta de solucionar cada problema: la que el libro expone como ejemplos.

- En los libros analizados, los ejemplos y/o ejercicios de aplicaciones siempre aparecen al final del discurso intentando dotar de sentido al teorema, pareciendo esto un tanto artificial. La mayoría de los problemas están descontextualizados de la realidad porque plantean situaciones artificiosas y utilizan datos a temporales. Hace falta ejemplos y/o ejercicios, en la medida de lo posible, sacados de la realidad y contextualizados a la época tecnológica actual.

- Algo muy rescatable y loable de dos de los libros (Stewart, 2004; Thomas, 2006) es: a) su *proyecto de investigación histórica* al que incluiríamos, de igual forma, investigación sobre el origen del Teorema de la Divergencia y sus personajes involucrados; y de manera complementaria, los *proyectos aplicación tecnológica*, los cuáles se pueden enriquecer con un diseño de actividades que lleven al lector a explorar de forma sistemática la geometría y los variacional de los conceptos y teoremas implicados.

- Excepto en un libro de texto (Marsden y Tromba, 2004) es hasta el último capítulo que introducen todas la herramientas necesarias para establecer el teorema (campos vectoriales, divergencia de un campo, superficie parametrizadas e integral de superficie). En cambio, el otro libro introduce la divergencia desde el capítulo 4, convirtiéndose en un elemento no tan extraño para el lector al llegar al capítulo 8 (donde de enuncia el Teorema de la Divergencia).

Sin embargo, existe el riesgo de que la distancia –en términos de la aparición- entre las definiciones, los teoremas involucrados y el teorema mismo, dificulte una visión sistémica del Teorema de la Divergencia.

- Una constante en los tres libros de texto analizados es la complejidad implicada en el significado-interpretación de las expresiones simbólicas empleadas en el enunciado del Teorema de la Divergencia.
- En los tres casos, las definiciones siempre aparecen a priori, de ahí se articula la estructura lógica de enunciados que llevan a la enunciación del Teorema de la Divergencia. De ahí que nos surjan preguntas como: ¿Será posible hacer un libro de texto de cálculo dónde las definiciones y teoremas se establezcan a posteriori, es decir, como interpretación de fenómenos estudiados previamente (a manera de modelación matemática)? ¿Qué tan factible sería cambiar la *aplicación* por *modelación*? ¿Rescataría esta nueva visión los significados inmersos en el Teorema de la Divergencia ocultados por el proceso de Transposición Didáctica?

Conclusiones

Desde el análisis del libro de texto, tomando en cuenta el carácter protagónico de éste el diseño de clase, concluimos que el tratamiento del TD se presenta con carácter más bien teórico-algorítmico que vinculado a la fenomenología extra-matemática implicada en el mismo. Este tipo de tratamiento, en general, propicia que los contenidos del Cálculo Vectorial parezcan desvinculados del cuerpo de materias específicas de la carrera.

Podemos concluir que la matemática debe ser presentada a los alumnos como un conjunto de conocimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que continuarán evolucionando en el futuro. La elaboración de los conceptos y procedimientos es el resultado de un largo proceso. La historia de las matemáticas muestra cómo aparecen las teorías matemáticas, habitualmente en el contexto de resolución de un problema o grupo de problemas y su evolución; la presentación final en los libros de texto enmascara este proceso. No solamente sucede esto con los conceptos, sino también con los procedimientos: la historia manifiesta, por poner un ejemplo, cómo ha variado la exigencia de lo considerado como una demostración rigurosa, “lo que hoy puede ser clasificado como un argumento no riguroso, fue aceptado hace doscientos años como tal; esto nos puede ayudar en nuestra enseñanza a comprender las dificultades de los estudiantes en orden a establecer lo que es una demostración” (Sierra, 2000, p.96).

Otra reflexión, es que la exploración ***de la historia*** le puede ayudar al profesor en la presentación del contenido, también a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado en el desarrollo del conocimiento, así como “dar la visión de la actividad matemática como una actividad humana incardinada en el contexto socio-cultural de cada época”. Y por otro lado, para los alumnos, la historia de la matemática puede sentar las bases para un cambio de visión sobre las mismas, en la que “las matemáticas abandonen su condición de torre de marfil, de edificio acabado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje” (Sierra, 2000, p.96).

En esta misma dirección, dada la importancia del Cálculo Vectorial en las asignaturas de la especialidad Electromecánica en Ingeniería, en alguna medida los atributos del *quehacer científico* deberían imponer su espíritu en las clases de matemáticas. Deberíamos encontrar relación entre las actividades resueltas en los libros de texto y los tópicos de las asignaturas de la especialidad. Los libros de texto proponen la realización de actividades en las que los rasgos del quehacer científico aparecen con baja frecuencia. Por otra parte, las estrategias de resolución aparecen muy pautadas mediante los ejemplos lo que permite concluir que, por un lado, no se da espacio a la iniciativa y a la creatividad del alumno y, por otro, se contribuye a distorsionar la imagen del científico, presentando su trabajo como algo muy estructurado y algorítmico. En palabras de Islas y Guridi (1999, p.283), “el rigor cuantitativo requiere imprescindiblemente del rigor cualitativo, conceptual, para llenar de significado una forma que, de otro modo, esta vacía de contenido fáctico”.

Esta investigación apela a la conexión entre teoría y realidad que debería promoverse en los estudiantes. Un puente muy prometedor a este respecto es *la visualización*. Tocante a este aspecto, la computadora permite establecer imágenes visuales de los fundamentos del Cálculo que enriquecen el repertorio de imágenes mentales dando al mismo tiempo una imagen de la Matemática como una actividad científica constructiva.

Las construcciones por parte del estudiante pueden ser inducidas por computadoras mediante el uso de software que permita manipular visualmente ideas matemáticas y reflexionar sobre ellas.

También, ofrecen la posibilidad de dar una existencia menos abstracta a ciertas ideas matemáticas para las que no se disponen de soportes físicos adecuados y que así se pueden manipular y tratar como objetos, o más allá del contexto visual, mediante la programación de construcciones matemáticas en un lenguaje computacional que actúe paralelamente a la construcción de los procesos matemáticos subyacentes.

Por lo anterior, sugerimos la explotación de los recursos tecnológicos para incitar el desarrollo de la visualización en el aprendizaje del Cálculo Vectorial, en particular del Teorema de la Divergencia. Por ejemplo, mediante las herramientas de simulación y modelación– ANSYS por mencionar alguna- que proveen un ambiente virtual para el aprendizaje ayudando en el entendimiento de los fenómenos físicos presentes en la mecánica de fluidos y su interacción con la medición de flujo (Moncada-Benavides y Morales-Montes, 2003; Vargas et al, 2005).

Así, la investigación planteada enfatiza la reconstrucción de una didáctica del Teorema de la Divergencia que permita al alumno hallar sentido y motivación para el estudio y comprensión de éste teorema. Apelamos a la creación de una *génesis ficticia* de los conceptos involucrados en el Teorema de la Divergencia con el propósito de facilitar su enseñanza. En otras palabras, es al docente que le corresponde realizar "una recontextualización y repersonificación del saber científico, [… buscando] situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar" (Brousseau, 1997).

Esto remarca la tendencia hacia la reconstrucción de una didáctica del Teorema de la Divergencia basada más en las intuiciones y en la vivencias cotidianas de los alumnos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto en sí (Cantoral, 1991).

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1997). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* (pp. 64-94). Buenos Aires: Paidós.

Cantoral, R. (1991) Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. *Mathesis* 7(2), 223-239.

Castañeda, A. (2003) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis doctoral no pulicada. Cinvestav, México.

González, M. y Sierra, M., (2004) Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias* 22 (3), 389-408.

Islas, S. y Guridi, V. (1999) El quehacer científico versus el quehacer áulico. Buscando rasgos del quehacer científico en libros de texto*. Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 281-290.

Marsden, J. y Tromba, A., (2004) *Cálculo Vectorial.* México: Pearson Addison Wesley.

Moncada-Benavides, D., y Morales-Montes, H., (2003) Aplicación práctica de la dinámica de fluidos computacional (DFC) en la medición de flujo de fluidos. *Tecnología, Ciencia y Educación* 18(2), 57-66.

Moreno, G. (2008) *El Teorema de la Divergencia en el Ámbito Escolar. Un Análisis de Libro de Texto en Ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Sierra, M., (2000) El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. En: A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del Siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. (pp. 93-96). España: Nivela

Stewart, J., (2004) *Cálculo Multivariable.* México: Thomson Learning.

Thomas, G., (2006) *Cálculo Varias Variables.* México:Pearson.

Vargas, W., Riaño, C., y Pineda, L. (2005) Ambientes Virtuales Para la enseñanza de la Mecánica de Fluidos: Algunos ejemplos simplificados aplicando ANSYS. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina. (15)*, 94-115.

UN ESTUDIO SOBRE EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR DEL ESTADO DE YUCATÁN

Martha Jarero, María Ordaz
Universidad Autónoma de Yucatán México
jarerok@uady.mx, arjona@uady.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio

Resumen. *Esta investigación consistió en analizar la forma en la que se desarrolla el discurso matemático escolar en tres colegios de bachillerato de un mismo subsistema educativo, en el estado de Yucatán, México; tomando como ejes orientadores los vértices del triangulo didáctico: el saber, qué se debe aprender y en qué forma; el profesor a través de su práctica y el estudiante en cuanto a sus creencias respecto a la matemática y su enseñanza así como las dificultades en el aprendizaje. Algunos de los resultados nos muestran que las reformas educativas demandan estudiantes críticos, reflexivos y autónomos; pero las prácticas tradicionales del profesor y los errores conceptuales y procedimentales en los estudiantes, nos plantean la necesidad de programas de formación docente orientados a replantear la enseñanza para centrarla en el aprendizaje y concebir el aula como un espacio de construcción y reconstrucción de significados.*
Palabras clave: discurso matemático escolar, currículo matemático, práctica, errores

Planteamiento del problema

Actualmente, la finalidad de la educación es la formación integral de los individuos, lo que significa entre otros aspectos que el alumno adopte un sistema de valores personales, incorpore métodos propios del conocimiento científico, participe crítica y reflexivamente en la cultura de su época y desarrolle actividades técnicas y culturales que favorezcan su capacidad de autoaprendizaje. Lo cual implica una educación de calidad donde se atienda el desarrollo de las capacidades y habilidades individuales tanto intelectual como artístico, afectivo, social y deportivo, al mismo tiempo que se fomenten los valores hacia una convivencia solidaria y comprometida, se forme a los individuos para la ciudadanía y se les capacite para competitividad y exigencias del mundo del trabajo.

El bachillerato es un nivel educativo considerado esencialmente formativo y dependiendo de la modalidades a las que se refiera asumirá objetivos precisos, por ejemplo el bachillerato general favorece la adquisición de conocimientos, métodos y lenguajes necesarios para cursar estudios de nivel superior mientras que el bachillerato tecnológico (bivalente), permite a los estudiantes continuar estudios superiores así como una preparación para incorporarse al mundo laboral. Las matemáticas que se estudian en este nivel están asociadas a la modalidad, así, en los generales son referidas a contenidos y métodos para estudios posteriores mientras que en los tecnológicos se privilegia como herramienta en la aplicación y solución de problemas cotidianos.

El Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán (COBAY) es un subsistema perteneciente al bachillerato general, y en el 2004 plantea una reforma curricular orientada a cubrir las necesidades académicas preparándolos para el ingreso a la educación superior y una formación para el trabajo. Aquí, las matemáticas pretenden desarrollar en el alumno capacidades para formular razonamientos matemáticos a partir de la observación, generalización y formalización de patrones, de plantear, modelar y resolver problemas. Lo anterior bajo un enfoque de enseñanza basado en el aprendizaje utilizando las tecnologías de la información y la comunicación.

Aunque el currículo es la base para la organización de la enseñanza, las reformas curriculares requieren ser asimiladas, entendidas por parte de administrativos y en especial por los profesores, para su implementación en el aula. Es por ello que nos interesa estudiar el discurso matemático escolar, esto es estudiar la forma en que es comunicado o presentado de manera verbal o no verbal, explícita o implícitamente un mensaje matemático en situación escolar (Cordero, 2005); con el fin de reconocer la forma en que se vive y se desarrolla la socialización e institucionalización de los saberes matemáticos en el aula, desde la perspectiva de la práctica docente, los recursos didácticos en los que se apoya y la generación de conocimientos logrados ante las propuestas didácticas de los profesores, así como sus relaciones con el currículo propuesto en planes y programas de asignatura del COBAY. Nuestro objetivo general es analizar el currículo matemático escolar del COBAY, en tanto su estructura y formas de comunicación.

Aspectos Metodológicos

Para estudiar el discurso matemático escolar, se recurrió a una investigación de carácter cualitativa, ubicada dentro del paradigma de investigación “Análisis del Currículum” y a fin de alcanzar nuestro objetivo, se organizaron estudios enfocados en los tres elementos mínimos del triángulo didáctico:

- Respecto al saber: Se desarrollaron estudios de carácter documental que buscaban por una parte, dar cuenta de las directrices que el currículo escolar de ciencias básicas en el nivel medio, ha seguido en las últimas décadas en México y sus tendencias futuras y por otra parte, al interior del estado de Yucatán, determinar las tendencias curriculares en matemáticas en el nivel medio superior.

- Respecto al profesor: Desarrollamos un estudio etnográfico del tipo de prácticas docentes que tres profesores realizan al interior de las aulas de matemáticas, recurriendo a observaciones no participantes en clase. Se aplicaron encuestas a todos los profesores del subsistema sobre sus creencias respecto a la enseñanza, y se realizó un análisis del discurso en los libros de texto de matemáticas que dichos profesores utilizan.
- Respecto al alumno: Se realizaron estudios de corte cualitativo sobre las dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al aprendizaje del concepto *función* en estudiantes del nivel medio superior, y sobre las actitudes que las personas (profesores, estudiantes, etc.) con el paso del tiempo y su paso por las aulas, llegan a establecer respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Resultados

Respecto al saber

Tras haber realizado el estudio sobre las tendencias del currículo de las ciencias básicas en el bachillerato mexicano, se estableció una proyección acerca de las posibles características que a mediano plazo podrían adoptarse. De donde, Balam (2007) reporta que, en el discurso sobre el currículo escolar del bachillerato mexicano, se estarán orientando los esfuerzos hacia:

- Una educación centrada en la generación de *Aprendizajes* duraderos y significativos en todos los niveles educativos.
- Promover prácticas educativas orientadas hacia el desarrollo de *formas y procesos de pensamiento científico y tecnológico.*
- La incorporación de las *nuevas tecnologías* de información y comunicación (TIC) en el currículo como medios y recursos para producir aprendizajes.
- Ofrecer a los estudiantes una *atención y educación integral* que sea acorde tanto a las necesidades sociales como las individuales en el aprendizaje, esto incluye considerar la cultura, los tiempos, ritmo y estilos de aprendizaje.

- Desarrollar trabajos colegiados sobre seguimiento y evaluación de los currículos.

En Yucatán, los cambios curriculares a nivel medio superior, se encaminan hacia una formación integral del estudiante promoviendo actitudes, valores, manejo de contenido, habilidades y destrezas para responder a los problemas o necesidades de la sociedad actual. En matemáticas se pretende un buen manejo y comprensión de contenidos y procedimientos para poder apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad y utilizarla en la solución de problemas (Canché, 2007). Si bien se reflejan cambios importantes en comparación con los planteamientos pasados, encontramos incongruencias entre las finalidades y propósitos de la reforma y lo estipulado en los planes y programas correspondientes a la reforma curricular.

En términos de contenidos matemáticos y su metodología, la forma de consecución de los aspectos actitudinales no se hacen explícitos, constituyendo un factor de confusión cuando se promuevan a nivel aula. Por otra parte, muchos de los contenidos que se presentan en el currículo actual coinciden con los del currículo anterior y en la estructura aun se prioriza el dominio de contenidos temáticos dentro de los programas de asignatura. En cuanto a la metodología, actualmente se considera que se sigue un enfoque constructivista, que intenta promover responsabilidad en el alumno con respecto a su aprendizaje, junto con la utilización de materiales diferentes destinados a cambiar la rutina dentro del aula. Pero aun falta conseguir otros aspectos importantes de la formación integral, mismos que pudiesen conseguirse utilizando medios tecnológicos adecuados.

Respecto al profesor

La práctica del profesor se definió por una metodología donde la actividad del aula se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo, exposición magistral como técnica habitual y uso del libro de texto como único material curricular. El profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades; orientando la asignatura hacia la adquisición de conceptos y reglas. El contenido matemático a movilizar en el aula es diferente en nivel de abstracción del contenido matemático formal pero no en estructura, y tiene una finalidad exclusivamente informativa.

El principal uso dado a los libros es como fuente de información para preparar las clases y basa su selección en la congruencia de los contenidos con el programa del curso, ignorando la propuesta del autor en cuanto al enfoque del libro.

La práctica en el aula y la forma de empleo dado al libro que hemos descrito nos refieren una tendencia didáctica tradicionalista, sin embargo, en el estudio realizado se rescató que las concepciones de los profesores los ubican en una práctica con tendencia investigativa (Jarero y Ordaz, 2007), donde la organización del programa que no está vinculado a un recorrido concreto, interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general.

Respecto al alumno

Según López y Sosa (2007) uno de los errores conceptuales que cometen los estudiantes al trabajar el concepto función es la confusión entre ecuación y función; lo cual se asocian con dificultades cognitivas, epistemológicas y didácticas, que sintetizamos a continuación.

A nivel cognitivo, los alumnos generan esquemas que responden a situaciones similares y al notar que las gráficas vistas en cursos anteriores (en los cuales se manipulaban ecuaciones) son muy similares a las que se abordan al estudiar funciones, generan un puente entre estos dos conceptos, por medio de la representación gráfica, por lo que definir a las funciones como ecuaciones de gráficas no parecería raro, bajo este razonamiento.

Una dificultad epistemológica es el hecho de que actualmente la enseñanza el concepto función ha tomado una dirección contraria a la génesis histórica del concepto, es decir, la forma última en que fue concebida precede, en la enseñanza, a su consideración como herramienta de la actividad matemática o extramatemática (Ruiz, 2000).

A nivel didáctico, podemos apuntar que durante la enseñanza de funciones los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas ligados al origen y la evolución epistemológica del concepto, induciendo a mirar al concepto como algo estático, eliminado aspectos de variabilidad y movimiento relacionados con éste, propuestas por Newton, Leibniz y Euler. Además, durante la enseñanza de los conceptos ecuación y función no suele explicitarse y hacer énfasis entre la diferencia que existe entre variables e incógnitas.

Otros de los errores reportados son: identificaban a gráficos, propios de la geometría, como funciones, no consideraban como funciones a aquellas que tiene la característica de tener un domino discreto, esto último lo podemos atribuir a dificultades de corte didáctico, pues los gráficos con los que han tenido un mayor contacto en su actividad escolar son los de trazo continuo (Ochoviet, Olave y Testa, 2006).

Para la mayoría de los estudiantes las matemáticas se tienen que enseñar porque ayudan al crecimiento profesional y creen que su enseñanza depende de los métodos, técnicas y recursos que el profesor utilice en clases. Con ello, se percibe que la formación académica del docente es el principal atributo en cuanto a las creencias del total de alumnos hacia la enseñanza de las matemáticas, es decir, los estudiantes creen que la enseñanza está fuertemente relacionada con el profesor como agente didáctico. Además, percibimos que dichas creencias son impulsadas por la cultura matemática establecida en la sociedad y por intereses académicos prospectivos.

Conclusiones

Esta investigación reporta las reformas educativas en el nivel medio, particularmente en cuanto al currículo de matemáticas en el estado de Yucatán. Y nos muestra la falta de relación o incompatibilidad entre éste y la práctica docente en el subsistema COBAY. Lo cual se manifiesta en dificultades en el aprendizaje de conceptos matemáticos, haciéndose evidente en errores conceptuales y procedimentales por parte de los estudiantes. En González (2000), se hace mención que aún cuando los nuevos programas estén bien fundamentados, técnicamente bien elaborados, no resultan viables pues se requiere que los profesores y las instituciones estén comprometidas con el mejoramiento del proceso educativo. Es allí donde las nuevas vertientes del currículo escolar implican modificar otros elementos que se encuentran inmersos en su desarrollo, tal es el caso de los programas de formación de profesores, pues en la actualidad se busca que el docente sea un facilitador del conocimiento en donde el alumno deje de ser pasivo y se comprometa con su propio aprendizaje, consecuencia de una planeación e interacción social de aprendizaje.

La visión prospectiva del currículo de matemáticas en el nivel medio indica la necesidad de un currículo con la capacidad de adaptarse a los cambios sociales, políticos, científicos y tecnológicos del país. Que sirva al estudiante para desarrollar un pensamiento científico, que brinde la oportunidad de entender mejor su entorno y que sea capaz de resolver problemas en diferentes contextos. Bajo esta visión se requieren prácticas educativas centradas en el aprendizaje, en el desarrollo de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático, científico y tecnológico. Entendiendo el aula como el espacio de socialización e institucionalización de los saberes, construcción y reconstrucción de significados, un lugar en donde plantean y comparte soluciones.

Podemos decir que el currículo de las ciencias básicas en el bachillerato tendrá como principal preocupación, la de generar en el alumno una autonomía de pensamiento, enriquecida mediante el debate y el trabajo cooperativo. Los retos serán enfrentados por todos aquellos involucrados en la educación de país, donde los diferentes subsistemas tengan la necesidad de replantear sus funciones con la obligación de mantener una aceptable calidad y funcionalidad educativa.

Respecto a la práctica del profesor, se obtuvo que sus concepciones lo orientan a una práctica investigativa, sin embargo, sus creencias los llevan a realizar una práctica tradicionalista, inclusive dejando de lado, las posibilidades mismas que ofrece el libro como recurso en la construcción del aprendizaje bajo la tendencia investigativa al usarlo sólo como fuente de información para sus clase (Jarero y Ordaz, 2007). Por lo cual, se requiere una propuesta de formación de formadores donde se modifiquen los esquemas de creencias, de tal forma que la práctica docente refleje un cambio hacia los nuevos roles que demanda el siglo XXI. Considerar que la formación matemática que deben recibir deberá plantearse bajo las nuevas formas y así enfocarlas en la preparación de los estudiantes para la socialización del saber matemático como instrumento de formación del individuo y para su aplicación en la resolución diaria de problemas (Gómez y Valero, 1997) y se plantea la necesidad de materiales didácticos acordes a los contenidos y enfoques planteados en este sistema educativo, que considere el contexto del estudiante y el desarrollo del pensamiento matemático.

Para lograr la disminución de las dificultades y errores cometidos en torno al concepto función, se sugiere tomar en consideración, entre otros aspectos, el señalar la diferencia entre variable e incógnita así como dar tratamientos alternativos del concepto (numérico, geométrico, etc.) con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y modelación de fenómenos. En síntesis, si se tiene una intencionalidad didáctica o investigativa, proponemos considerar los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, mediante actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y pensamiento variacional, así como el desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes.

Los resultados de este estudio nos señalan la necesidad de realizar cambios en el currículo, pero estos deben ser pensando en las necesidades sociales, culturales, científicas y tecnológicas nos atrevemos a decir no actuales, sino las que emergerán a corto y mediano plazo. A nuestro modo de ver, el bachillerato representa la oportunidad de tener acceso a la ciencia desde una temprana edad, de ahí que es reto de los diseñadores y de todos aquellos inmersos dentro de la educación, tratar de contribuir al desarrollo del pensamiento científico, tecnológico y conciencia social desde este nivel educativo, pues de lograrse se podrá mejorar la salida de nuevos profesionistas encargados de desarrollar y generar avances científicos y tecnológicos.

Referencias bibliográficas

Balam, A. (2007). *El currículo escolar mexicano de las ciencias en el nivel medio. Un estudio proyectivo.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Canché, E. (2007). *Un estudio del currículo matemático en sistemas educativos de nivel medio, una visión prospectiva.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Cordero, F. (2005). La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18. (pp. 477-482). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Gómez, C., Valero, P. (1997). *Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor.* Bogotá, Colombia. Consultado en Abril de 2007 de: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/CDRomRIBIE/CAL&PC/PDF/8-Creencia.pdf

González, J. (2000). Problemática de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias naturales. *Memorias del cuarto foro de proyectos integrales: enseñanza-aprendizaje de las ciencias. 1*(1): 61-63. México: SISIERRA.

Jarero, M.; Ordaz, M. (2007). Prácticas Discursivas y libros de texto. Un estudio de sus relaciones en las clases de matemáticas. G. Buendía (Presidente), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.131-140). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

López, J.; Sosa, L. (2007). ¿Funciones o ecuaciones? dificultades conceptuales y procedimentales. G. Buendía (Presidente), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.165-175). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Ochoviet, C.; Olave, M.; Testa, Y. (2006). Concepciones de los estudiantes acerca de la gráfica de una función lineal de dominio discreto. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 19, 485-490.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las matemáticas* [En línea] EUNA. Recuperado en febrero de 2007 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Libros/Desafio_Matematicas/index.htm

LOS EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS COMO HERRAMIENTAS PARA FACILITAR EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN CONCEPTUAL

Otilio B. Mederos Anoceto, Boris J. Mederos Madrazo
Universidad Autónoma de Coahuila. Universidad Autónoma de Cd. Juárez   México
oma8111@yahoo.es
Campo de investigación: Formación de profesores   Nivel: Superior

Resumen. *La generalización es una de las operaciones conceptuales que más se utiliza en la matemática. En el trabajo se presenta una organización del conocimiento escolar de siete de las veintitrés generalizaciones del concepto de derivada puntual de una función f, que no exceden la extensión del concepto de función real de una variable real; tomando como criterio de generalización el debilitamiento sucesivo de las exigencias sobre la existencia del límite de la función $Fc(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, $h\neq 0$, cuando h tiende a cero, o de las características topológicas de c con respecto al dominio de f.*
En el trabajo se hace, además, un análisis de la utilidad de la construcción de ejemplos y contraejemplos para facilitar la realización de los procesos de generalización; y se presenta un conjunto de tareas que también facilitan y dan orden a estos procesos.
Palabras clave: derivada, generalización, ejemplos, contraejemplos, mapas

Introducción

En nuestra práctica docente de pregrado, hemos observado que los estudiantes no saben aplicar correctamente las operaciones conceptuales, entre otras, la definición, la generalización y la clasificación. Un artículo sobre la operación clasificación relacionado con este trabajo se muestra en (Mederos y Martínez, 2007). Como profesores de distintos cursos de postgrado, maestría y doctorado, hemos constatado que estas deficiencias persisten en los alumnos. Hemos comprobado que no conocen estas operaciones porque en ninguna asignatura del currículo se definen estas operaciones ni se presentan tareas necesarias para su comprensión.

En este trabajo se presentan resultados que dan solución al problema de investigación siguiente: ¿cuáles son las tareas que facilitan la participación de los estudiantes en los procesos de generalización del concepto de derivada?

El objetivo de la investigación fue la determinación de un conjunto de tareas necesarias para facilitar la participación de los alumnos en los procesos de generalización conceptual; y mostrar como la aplicación de estas tareas facilita la realización y comprensión de siete generalizaciones del concepto de derivada puntual.

En el epígrafe 1.1 de la sección 1 se presenta una definición del concepto de generalización conceptual que se utiliza en el trabajo, y en el epígrafe 1.2 se proponen siete tareas, que son el resultado de haber aplicado diferentes conjuntos de tareas didácticas a los alumnos de la asignatura (optativa) "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Coahuila, (UAdeC), que son de utilidad para realizar el proceso de generalización, conducente a una generalización del tipo definido en el epígrafe 1.

Los ejemplos y los contraejemplos juegan un papel esencial en la determinación de relaciones entre las extensiones de dos conceptos subordinadas a un mismo concepto; por tal razón, la sección 2 se dedica a precisar el sentido de utilizar ejemplos ilustrativos y contraejemplos en Matemática, y a indicar como proceder para determinar la relación existente entre las extensiones de dos generalizaciones de un mismo concepto.

En el epígrafe 3.1, de la sección 3, se describe el comportamiento de dos grupos de estudiantes de la asignatura (optativa) "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática Aplicada de la UAdeC; al participar en los procesos que conducen a las tres generalizaciones del concepto de derivada puntual que corresponden al caso en que la función cociente incremental tiene una discontinuidad evitable de primera especie.

En el epígrafe 3.2 se presentan las cuatro generalizaciones de la derivada puntual que se obtiene cuando el límite o, al menos uno de los límites laterales, del cociente incremental en 0 es infinito; sin hacer comentarios sobre el comportamiento de los estudiantes por un problema de espacio.

La sección 4 se dedica a describir características de los estudiantes y de la asignatura que consideramos importantes para que se entienda la pertinencia de la aplicación.

La metodología que se utilizó fue el análisis del comportamiento de cada uno de los estudiantes de los dos grupos en los que se desarrolló la investigación.

La operación generalización de conceptos

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias generalizaciones, con el propósito de ampliar diferentes significados necesarios del concepto que se generaliza.

El proceso de generalización conceptual

Todo concepto tiene dos características muy importantes, su extensión y su contenido. Se denomina extensión de un concepto al conjunto E de todos los objetos que corresponden a ese concepto y contenido a una colección de propiedades $C=\{p_i,\ i\in I\}$, donde I es un conjunto, que cumplen todos los elementos de C y solo estos elementos. En el trabajo un concepto se indica mediante el par (E, C) formado por su extensión y su contenido, o simplemente por E.

A continuación se presenta de manera sintetizada una definición del concepto de generalización, tomada de la tesis doctoral escrita por (Martínez, 2003), "Dado el concepto ya formado (E1,C1) que se ha definido a partir del concepto (E,C), la operación que permite construir, a partir de (E1,C1), el concepto (F1,D1), debilitando, al menos, una de las propiedades de C1 y comprobando que C1 es más fuerte que D1 y que D1 es más fuerte que C, se llama generalización del concepto (E1,C1) subordinada a (E,C)". El proceso de construcción de (F1,D1) a partir de (E1,C1) recibe el nombre de proceso de generalización; y el concepto (E,C) se denomina concepto de partida de la generalización.

Tipos de tareas sobre la generalización de conceptos que se presentan en la matemática

En el trabajo matemático se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la generalización de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Dados un concepto (E_1,C_1) y un conjunto de propiedades D_1; determinar si D_1 es más débil que C_1.
2. Dado un concepto (E_1,C_1), obtener un debilitamiento D_1 de C_1.
3. Dado un concepto (E_1,C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir la generalización (F_1,D_1) de (E_1,C_1).
4. Dado un concepto (E_1,C_1); realizar varias generalizaciones de (E_1,C_1), determinando los debilitamientos de C_1 correspondientes.
5. Dados un concepto (E_1,C_1) y varias generalizaciones (F_k,D_k), k=1:m; establecer las relaciones conjuntistas entre las extensiones F_k, k=1:m; y construir mapas de extensiones y de contenidos.

6. Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (F_1,D_1) subordinados a un mismo concepto de partida (E,C); determinar si uno de ellos es una generalización del otro.

7. Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (E_2,C_2) subordinados al concepto (E,C) tales que $E_1 \subset E_2$, una colección de generalizaciones (F_i,D_i), i=1:m, de (E_1,C_1) y otra colección de generalizaciones (G_j,H_j), j=1:n de (E_2,C_2); determinar el mapa de las extensiones $\{F_i\} \cup \{G_j\}$ correspondientes a las dos colecciones de generalizaciones.

Para dar cumplimiento a una tarea del primer tipo es necesario demostrar que C_1 implica D_1; pero que D_1 no implica C_1. La segunda tarea es de mayor complejidad que la primera y se presenta cuando se quiere, por ejemplo, obtener un nuevo concepto que generalice algún significado del concepto que se desea generalizar.

El tercer tipo de tarea requiere la realización de un proceso de generalización consistente en considerar a D_1 como el contenido de un nuevo concepto, asociar a este contenido un conjunto F_1 formado por todos los objetos de E que satisfacen las propiedades de D_1, utilizar una notación adecuada para F_1 y emplear el par (F_1,D_1) para indicar el nuevo concepto, donde en lugar de F_1 se utiliza su notación. Cuando no hay dudas es usual utilizar la notación de F_1 para referirse al concepto (F_1,D_1).

En la sección 3 de este artículo se realizan varias generalizaciones del concepto de derivada determinando los debilitamientos necesarios, se establecen las relaciones conjuntistas de sus extensiones y se construyen algunos de los mapas correspondientes. Se muestra de esta forma cómo proceder para dar cumplimiento a tareas de los tipos 4, 5 y 6. Por un problema de espacio no se describe en el trabajo como se aplicó la tarea 7 al caso en que (E_1,C_1) y (E_2,C_2) son los conceptos de continuidad y derivada puntual, respectivamente.

Los ejemplos y los contraejemplos

Dados dos conceptos (E_1,C_1) y (F_1,D_1) subordinados a un mismo concepto (E, C) para determinar si (F_1, D_1) es una generalización del concepto (E_1,C_1) es necesario demostrar, o refutar, una o varias afirmaciones U (universales) de la forma: “todo elemento de la clase A pertenece a la clase B”. En la figura 1 se muestra un mapa de afirmaciones universales que puede utilizarse para determinar si (F_1, D_1) es una generalización del concepto (E_1, C_1).

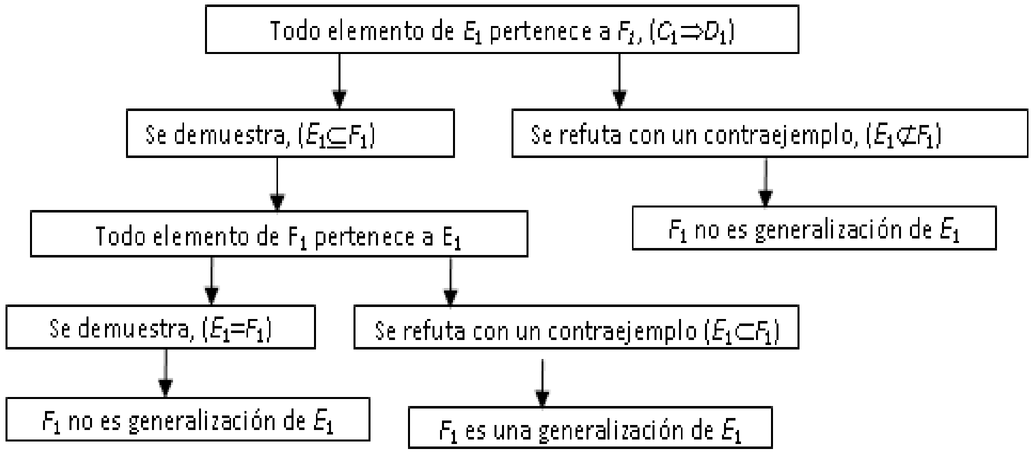


Fig. 1. Mapa de afirmaciones para determinar si F_1 corresponden a una generalización de E_1

La demostración de una afirmación universal sobre extensiones de dos conceptos se realiza trabajando con los contenidos correspondientes y utilizando métodos lógico-deductivos. Para refutar una afirmación tal es suficiente encontrar, o construir, un elemento de *A* que no pertenezca a *B*. Un elemento de A con esas características recibe el nombre de contraejemplo.

Para profundizar en esta dirección recomendamos el prefacio del libro: (Gelbaum y Olmsted, 1964). Una interesante investigación sobre producción de ejemplos y contraejemplos en análisis, por los estudiantes, fue desarrollada por: (Benbachir y Zaki, 2001)

Generalizaciones de la derivada puntual

Suponemos que se ha construido el concepto de derivada de una función f: $A \to \mathbf{R}$, $x \to f(x)$, $A \subseteq R$, en un punto c interior de A; en correspondencia con la idea siguiente: $f'(c)=\lim_{h\to 0}F_c(h)$, $F_c: A_c \to R$, $h \to F_c(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, (1), donde $A_c=\{h\in R: h\neq 0, c+h\in A\}$. Se supone, también, que se utilizan las notaciones F(A), C(c) y D(c) para las colecciones de las funciones definidas sobre A, continuas y derivables en c, respectivamente; y que se conoce la cadena de inclusiones $\varnothing \subset D(c) \subset C(c) \subset F(A)$ y los mapas de extensiones y de proposiciones correspondientes.

Se supone, además, que se conoce el concepto de derivada, *(D(c), C_1), D(c)={f ∈F(A): f satisface C_1},* C_1={p_0, p_1}, donde p_0 indica la propiedad: lím$F_c(h)$ cuando *h* tiende a 0, existe y es finito, y p_1 denota la propiedad: *c* es un punto interior de *A*.

Caso en que 0 es un punto de discontinuidad no evitable de primera clase de Fc

En este caso existen, son finitos y desiguales, los límites $\lim_{h\to o-} F_c(h) = l_1$ y $\lim_{h\to o+} F_c(h) = l_2$, (2). Utilizando los límites (2) y mediante las tareas del tipo 1), 2) o 3) se pueden obtener las generalizaciones del concepto *(D(c), C_1)* siguientes:

1) *Derivada lateral izquierda. (F_1, D_1), F_1=D_-(c)={f ∈F(A): f satisface D_1}, D_1={p_2, p_3}, p_2: límF$_c$(h)* existe y es finito cuando $h\to 0^-$ y p_3: *c* es un elemento de *A* tal que $(c-\delta,c]\subset A$ para un número real positivo δ

2) *Derivada lateral derecha.* (F_2, D_2), F_2= *D_+(c)={f ∈F(A): f satisface D_2}, D_2={p_4, p_5}, p_4: límF$_c$(h)* existe y es finito cuando $h\to 0^+$ y p_5: *c* es un elemento de *A* tal que $[c,c+\delta)\subset A$.

3) *Derivada lateral izquierda y derecha.* (F_3, D_3), F_3= *$D_\pm$(c)={f ∈F(A): f satisface D_3}, D_3*={p_2, p_3, p_4, p_5}.

Con estas tres generalizaciones se da cumplimiento a una tarea de tipo 4. Los estudiantes, recurriendo a mapas de afirmaciones como el de la figura 1, establecieron las relaciones $D(c)\subset D_\pm(c)=D_+(c)\cap D_-(c)$, $D_-(c)\cup D_+(c)\subset F(A)$, $D_+(c)\setminus D_-(c)\neq\emptyset$ y $D_-(c)\setminus D_+(c)\neq\emptyset$. El profesor realizó las primeras demostraciones, que eran triviales, y presentó funciones particulares con las que los estudiantes refutaron afirmaciones. De esta forma se probó que los conceptos *D_-(c), D_+(c) y $D_\pm$(c)* son generalizaciones del concepto *D(c),* y que *$D_\pm$(c)* es una restricción de *D_-(c) y D_+(c).*

Por ejemplo, para probar que el concepto de función con derivada lateral izquierda y derecha en *c* es una generalización del concepto de derivada en *c*, *$D_\pm$(c),* se demostró la afirmación: *toda función derivable en un punto c interior a su dominio es derivable a la izquierda y a la derecha en c*; y para que los estudiantes participaran en la refutación de la afirmación recíproca, el profesor presentó la función definida sobre *R* por $f(x) = x/(1+e^{1/x})$, si $x\neq 0$ y $f(0)=0$ y pidió a los estudiantes que determinaran las derivadas laterales. Más del 50% de los estudiantes determinó que $f'_-(0)=1$ y $f'_+(0)=0$, pero no todos comprendieron que esto era suficiente para refutar la proposición recíproca.

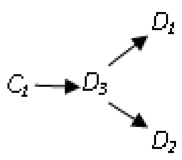


Figura 1

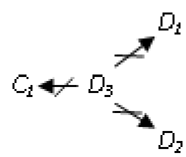


Figura 2

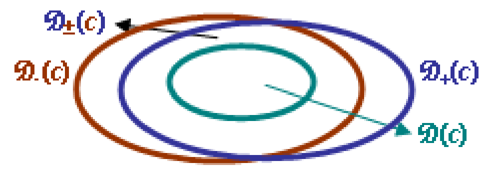


Figura 3

Con ayuda del profesor se construyeron una mapa de las implicaciones correspondientes a proposiciones que se demostraron, figura 2, un mapa de las implicaciones que no se cumplen correspondientes a las refutaciones, figura 3, y un mapa de las extensiones del concepto de derivada en *c* y de sus tres generalizaciones, figura 5. Las flechas en la figura 2 indican implicaciones y las flechas de la figura 3 implicaciones que no se cumplen. De esta forma se logró que los estudiantes participaran en tareas del tipo 5 y 6.

Caso en que el límite o, al menos uno de los límites laterales de Fc(h) en 0 es infinito

Las generalizaciones del concepto de derivada $(E_1,C_1)=(D(c),C_1)$ que no exceden la extensión de $(E,C)=(F(A),C)$ y que pueden realizarse aceptando que $límF_c(h)$ pueda ser $+\infty$, o $-\infty$, tienen como resultado los conceptos (F_4,D_4), donde $D_4=\{p_0,p_6\}$ y $F_4=D_{\infty}(c)=\{f\in F(A):f \text{ satisface } p_1 \text{ y } p_6\}$; (F_5,D_5), donde $D_5=\{p_2,p_7\}$ y $F_5=D_{\infty-}(c)=\{f\in F(A): f \text{ satisface } p_3 \text{ y } p_7\}$ y (F_6, D_6), donde $D_6=\{p_5, p_8\}$ y $F_6= D_{\infty+}(c)=\{f\in F(A): f \text{ satisface } p_5 \text{ y } p_8\}$, donde p_j) $limF_c(h)$ existe (finito o infinito), cuando $h\to 0$ para $j= 6$, $h\to 0-$ para $j=7$ y $h\to 0+$ para $j=8$; (F_8,D_8), $F_8= D_{\infty\pm}(c)=\{f\in F(A): f \text{ satisface } p_3, p_5, p_7 \text{ y } p_8\}$.

En la tabla de la figura 5 se presenta un resumen de los contenidos obtenidos por los estudiantes, con la mediación del profesor, al realizar los siete procesos de generalización. Para la comprensión de la tabla se debe tener en cuenta que: $f:A\to R$, $x\to f(x)$, $A\subseteq R$, $c\in A$, $F_c:A_c\to R$, $h\to F_c(h)=[f(c+h)-f(c)]/h$, $A_c=\{h\in R: h\neq 0, c+h\in A\}$. $(D(c), C_1)$, $C_1=\{p_0, p_1\}$, donde p_0 indica la propiedad: $límF_c(h)$ cuando h tiende a 0, existe y es finito, y p_1 denota la propiedad: existe un δ, $\delta>0$, tal que $(c-\delta, c+\delta)\subseteq A$, $f'(c)=lim_{h\to 0}F_c(h)$ y $D(c)=\{f\in F(A): f \text{ satisface } C_1\}$. Los números 2 y 4 de la primera fila de la tabla indican, respectivamente, notación y debilitamiento de la propiedad:

Se generalizaron los mapas de las figuras 2, 3 y 4 incluyendo en los dos primeros los contenidos D_i, $i=4,7$, y en el mapa de la figura 4 las extensiones $D_\infty(c)$, $D_{\infty-}(c)$, $D_{\infty+}(c)$ y $D_{\infty\pm}(c)$.

No	Generalización	2	Existencia de $\text{lím}F_c(h)$	Existe δ, $\delta>0$:	4
1	$(D_-(c),D_1)$ $D_1=\{p_2,p_3\}$	$f'_-(c)$	p_2: existe y es finito cdo. $h\to0^-$		p_0
				p_3: $(c-\delta,c]\subset A$	p_1
2	$(D_+(c),D_2)$ $D_2=\{p_4,p_5\}$	$f'_+(c)$	p_4: existe y es finito cdo. $h\to0^+$		p_0
				p_5: $[c,c+\delta)\subset A$	p_1
3	$(D_\pm(c),D_3)$ $D_3=\{p_2,p_3,p_4,p_5\}$		p_2 y p_4	p_3 y p_5	
4	$(D_\infty(c),D_4)$ $D_4=\{p_1,p_6\}$	$f'_\infty(c)$	p_6: existe (finito o infinito) cdo. $h\to0$	p_1	p_0
5	$(D_{\infty-}(c),D_5)$ $D_5=\{p_3,p_7\}$	$f'_{\infty-}(c)$	p_7: existe (finito o infinito) cdo. $h\to0^-$.	p_3	p_2
6	$(D_{\infty+}(c),D_6)$ $D_6=\{p_5,p_8\}$	$f'_{\infty+}(c)$	p_8: existe (finito o infinito) cdo. $h\to0^+$.	p_5	p_4
7	$(D_{\infty\pm}(c),D_7)$ $D_7=\{p_3,p_5,p_7,p_8\}$		p_7 y p_8	p_3 y p_5	

Fig. 6. Las siete generalizaciones de la derivada puntual hasta ahora obtenidas.

Características de los estudiantes y de la asignatura

La asignatura "Matemática Educativa" de la carrera de Matemática aplicada de la UAdeC se desarrolla en el séptimo semestre. Los alumnos que la cursan han aprobado varios cursos de cálculo y de análisis matemático. Para alumnos con estas características es posible diseñar las actividades para que participen en los procesos de generalización del concepto de derivada puntual.

En la primera versión de la asignatura hubo una matrícula de 7 alumnos y en la segunda de 4. Se diseñaron actividades para el trabajo individual y para trabajo grupal, que permitieron al profesor arribar a las conclusiones que se presentan en las conclusiones generales. Los alumnos conocían los conceptos de derivadas laterales finitas puntuales, pero no podían explicar adecuadamente por qué eran generalizaciones del concepto de derivada puntual. No todos los alumnos conocían los conceptos de derivada infinita.

La única experiencia que tenían los alumnos en la construcción de mapas de extensiones y de contenido de colecciones de conceptos, era con los conceptos de continuidad y continuidad lateral puntual. No conocían la diferencia entre un ejemplo y un contraejemplo, y no tenían experiencia en la solución de problemas en los que se necesitara la construcción de un contraejemplo, o su determinación mediante la realización de una búsqueda bibliográfica orientada.

Conclusiones generales

En esta investigación se escogieron siete procesos de generalización del concepto de derivada puntual de funciones reales de variable real como campo de trabajo. Como resultado de la primera aplicación al grupo de 7 estudiantes se determinaron siete tareas que facilitaron y guiaron la participación de los estudiantes de los dos grupos en estos procesos. Los estudiantes confrontaron dificultades al tener que demostrar proposiciones.

Como resultados de la aplicación de las tareas se concluyó que los estudiantes de los dos grupos: 1) comprendieron el significado de un proceso de generalización y aprendieron a utilizar herramientas para realizarlos, 2) construyeron mapas de contenidos y extensiones de los conceptos generalizados, que constituyen estructuras de organización y elaboración importantes, 3) aprendieron a plantear proposiciones que tenían que demostrar o refutar; cosa esta última, que pocas veces habían hecho en su carrera, 4) aprendieron a utilizar contraejemplos como herramientas para refutar proposiciones y ejemplos para probar que extensiones conceptuales no eran vacías.

Referencias bibliográficas

Benbachir, A y Zaki, M. (2001). Production d´examples et de countre-examples en analyse: etude de cas en première d´université. *Educacional Studies in Mathematics 47*, 273-295.

Gelbaum, B. y Olmsted, J. (1964). *Counterexamples in Analysis.* San Francisco: Holden-Day, INC.

Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior.* Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Facultad de Matemática, Física y Computación. Universidad Central "Marta Abreu", Santa Clara, Cuba

Mederos, O. y Ruiz, A. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Revista "NÚMEROS"*, 67, 42-51.

RESIGNIFICACIÓN DE LOS CAMPOS DE PENDIENTES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN UN CONTEXTO ELECTRÓNICO

Edgar Javier Morales Velasco, Hipólito Hernández Pérez
Cimate de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas   México
emv_dj@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología   Nivel: Superior

Resumen. *En la actualidad los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica privilegian resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos y la gráfica de la solución analítica, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En este trabajo se pretende explorar los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva. En la investigación se diseñará una situación didáctica para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación basados en la aproximación socioepistemologíca*.
Palabras Clave: situación didáctica, prácticas sociales, socioepistemología

Problemática

En la revisión realizada a los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica se encuentra que se privilegia resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos, es decir por métodos algebraicos, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que le permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En los cursos y textos de ecuaciones diferenciales ha predominado el enfoque de la solución analítica, pero también existen textos que le dan un enfoque gráfico y visual como los textos de Lomen y Lovelock (2000), Stewart (2002), en el caso de la ingeniería electrónica se ha privilegiado el método cuantitativo, es decir, el método algebraico y la gráfica de la solución analítica, pero carecen de los aspectos gráfico y visual de los campo de pendientes. Respecto a este contexto que se da en la ingeniería electrónica, Cordero (2000) menciona que en las soluciones de las ecuaciones diferenciales se ha privilegiado el contexto algebraico donde las soluciones de las distintas clases de ecuaciones diferenciales son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en series, expresiones integrales entre otras. El privilegio del contexto algebraico deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales. Además Cordero dice que los estudiantes están convencidos de que existe una receta que permite la integración algebraica exacta de cada clase de ecuaciones diferenciales. También, él indica que desde un punto de vista epistemológico se encuentra el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y por otro se encuentra el desarrollo de la tecnología; en cuanto a este último se refiere a las calculadoras, computadora y graficadores.

Objetivo

Por tal motivo en este trabajo exploramos en una primera etapa el aspecto gráfico y visual de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como un contexto que permita la resignificación de las ecuaciones diferenciales en la ingeniería electrónica. El objetivo es diseñar una situación didáctica en el contexto de los circuitos electrónicos, para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación.

Antecedentes

En las revisiones realizadas a los libros de texto de análisis de circuitos eléctricos usados en electrónica, por ejemplo, tenemos a Bobrow (1993), Conejo (2004), Hayt y Kemmerly (1990) estos presentan el análisis de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo orden con constantes agrupadas. Los autores mencionan que los resultados de estas ecuaciones diferenciales también pueden ser utilizados por otros contextos, por ejemplo el ingeniero mecánico interesado en el desplazamiento de una masa soportada por un resorte y sometida a un amortiguamiento viscoso, también por el interesado en el comportamiento de un péndulo simple. Los autores muestran el siguiente ejercicio:

Suponga que tenemos el circuito RL en serie que se muestra en la figura1. La red se excita por una tensión escalón unidad, donde $R = 4\ \Omega$, $L = 2\ H$, $V(s) = 3U(t)$ y suponemos un valor inicial de la corriente (en $t = 0$) de 5 amperios.

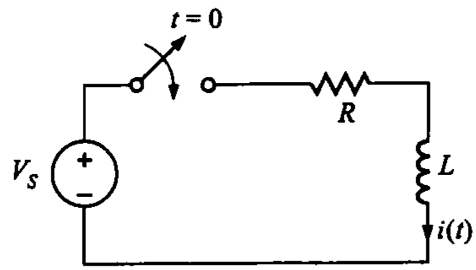


Figura 1. Circuito RL.

La solución que se muestra es: Por la segunda ley de Kirchhoff se escribe la ecuación de malla en el dominio del tiempo, $2\frac{di}{dt}+4i=3u(t)$ se convierte al dominio de la frecuencia tomando la transformada de Laplace de cada término, $2[sI(s)-i(0)]+4I(s)=3/s$, y luego de una serie de procedimientos algebraicos presenta la respuesta de la ecuación diferencial. $I(t)=0.75u(t)+4.25e^{-2t}u(t)$.

Como se puede observar en la mayoría de los textos de circuitos eléctricos se privilegia la solución analítica de las ecuaciones diferenciales. El uso de los campos de pendientes en el análisis de las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos podría permitir al alumno un mejor entendimiento respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales.

Los conocimientos que se aprenden están influenciados por los medios y las herramientas utilizadas para el aprendizaje y la enseñanza. En el caso particular de la Matemática esto no deja de ser cierto y la incorporación de herramientas computacionales a los procesos educativos influye indiscutiblemente en los significados que se le otorgan a los objetos matemáticos, fenómeno que siempre ha sucedido con otros tipos de tecnologías utilizadas. En este trabajo particular los software que podrían ser considerados son los que se inscriben dentro de la categoría de *software para Geometría Dinámica* (Larios, 2006). Las características principales que diferencian una aproximación utilizando este software con respecto a una que considera la tecnología papel-y-lápiz, además del hecho evidente y simplista de estar utilizando computadoras son:

* Los macros que posibilitan definir rutinas o cadenas.

* La de construir lugares geométricos.

* La transformación continua en tiempo real llamada comúnmente “arrastre”.

El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Este tipo de software ofrece oportunidades para explorar situaciones geométricas bajo un ambiente que permite llevar a cabo indagaciones que de otra manera podrían ser muy restrictivas y que sólo están al alcance de aquellos que ya tienen un entrenamiento especial (los matemáticos, por ejemplo) o bien que tienen una mayor capacidad de imaginación espacial que los demás. El software permite de manera controlada y física, por medio del ratón, la transformación de construcciones respetando las relaciones geométricas y proporcionando una respuesta visual por medio de la pantalla de la computadora (Larios, 2006). En este trabajo, se pretende explorar los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva que debido a la sencillez de su manejo, brinda la oportunidad de que la adaptemos al tema de campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales. Si bien es cierto existen otros programas o las mismas calculadoras con capacidades para la graficación de los campos de pendientes que hacen lo mismo con el sólo hecho de introducir la ecuación, la ventaja de Cabri es que existe un procedimiento de construcción que ayuda a la comprensión del tema y a recordar algunos conceptos de cálculo (Buendía, Cruz, Poirier, Hernández, Velasco y Megchún, 2006).

Marco Teórico

Nuestro marco teórico se basa en investigaciones como el de Cantoral (1996) que menciona que la matemática educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero sí existen fuertes vínculos entre sí. No constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la matemática educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. La vieja visión de que la didáctica de la matemática era sólo una colección de trucos para el “bien enseñar”, se ha visto modificada por aquel espacio en el cual los estudios de investigación en el campo están siendo usados para construir unidades de conocimiento organizado que puede ayudar las prácticas sociales de referencia. En Cordero y Flores (2007) mencionan que la aproximación socioepistemologíca nos ha señalado que las prácticas sociales con referencia al conocimiento matemático son un elemento insoslayable en las explicaciones de los fenómenos didácticos. Es decir, que para entender la construcción del conocimiento escolar es necesario formular epistemologías de prácticas sociales. Éstas brindarán indicadores para desarrollar tales prácticas en el sistema didáctico. El planteamiento anterior integra componentes para tratar a las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como prácticas en lugar de representaciones. El conocimiento matemático escolar en la aproximación socioepistemologíca se concibe como un conocimiento que se resignifica al paso de la vivencia institucional, lo que hace que la actividad humana o las prácticas sociales sean las generadoras de tal conocimiento, ya que éstas son propias de las formas de organización de los grupos humanos, donde se manifiestan sus pensamientos, significados y argumentaciones, todos ellos orientados por las intenciones para alcanzar los consensos requeridos. Al igual que Buendía (2004) señala que la socioepistemología se refiere al análisis de las relaciones epistemológicas entre prácticas sociales y el conocimiento matemático. Es necesario estudiar cómo se constituye el conocimiento desde una perspectiva de la actividad en la que se involucra un individuo como parte de la comunidad y tomar en cuenta no sólo la producción matemática final, sino las herramientas y los argumentos que el estudiante pone en juego. La socioepistemología debe significar el reflejo de cualquier individuo al hacer matemáticas y en segundo lugar, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esta actividad. En este trabajo pretendemos mostrar la resignificación de las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos como práctica social. Para ello, se diseñarán secuencias que tiene como propósito que el alumno construya un significado de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos a través de la graficación de los campos de pendientes usando Geometría Dinámica. Con el marco anterior tratamos de hacer epistemología de prácticas sociales que cumpla con la intencionalidad que demanda el ingreso de un saber al sistema didáctico y porque debe ser consistente con las formas de organización de los grupos humanos. Su *función* consiste en buscar las bases para que la reorganización matemática (responsabilidad de la matemática educativa) sea coherente y pertinente con los fenómenos didácticos en cuestión. Para ello, su *forma de operar* consiste en interpretar el fenómeno didáctico a través de relaciones complejas que abarcan, a parte de la epistemológica, dimensiones cognitivas, didácticas y sociales.

Diseño de la situación didáctica

Para llevar a cabo nuestra investigación, la metodología a seguir proporciona un mecanismo de validación interna, como la ingeniería didáctica. Su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza, Lezama y Farfán (2001). Siguiendo esta propuesta de la ingeniería didáctica se realizó una fase de planeación estableciendo el propósito que alcanzaríamos en la investigación. Como segundo paso se diseñó la situación didáctica la cual se aplicó a los estudiantes. En nuestra fase experimental, a un grupo de estudiantes de tercer semestre de ingeniería se dividió en 4 equipos de cuatro integrantes y 3 equipos de 3 integrantes, a los cuales se les aplicó la situación didáctica.

Se les solicitó que explicaran que es una “pendiente”; lo que ellos respondieron fue:

Argumento 1: es la inclinación α de dicha recta con respecto a un eje de referencia, se obtiene mediante la función tangente $m = tg\alpha$.

Argumento 2: es la inclinación que existe si se trazara una línea entre dos puntos en el plano cartesiano.

Argumento 3: La derivada de la función en un punto.

Luego mediante una gráfica se les pide que encuentren una relación geométrica de la inclinación de los segmentos con los signos de las pendientes y que la explicaran, en esta parte lo que se busca es que los alumnos relacionen la inclinación de las rectas con el signo de la pendiente, por lo que la mayoría de los equipos si lograron hacer esta relación; cabe mencionar que los equipos para establecer su respuesta comentaban de los términos de la inclinación de la recta, de máximos y mínimos.

Argumento 1: cuando el signo de la magnitud de la pendiente es positivo indica que la pendiente se inclina hacia la derecha eje (+ x), cuando el signo es negativo indica que la pendiente es constante y se inclina sobre la izquierda (- x).

Argumento 2: cuando $0 < \alpha < 90º$ el signo de la pendiente es positivo si solo si el eje de referencia es el eje x, el signo de la pendiente es negativo si solo si $180º < \alpha < 90º$, cuando el eje de referencia es el eje x.

Posteriormente los alumnos calculan una serie de pendientes con la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ que servirán para construir el campo de pendientes, todos los equipos lograron obtener las pendientes, excepto al dibujarlas ninguno de los equipos dibujo completo el campo de pendientes, argumentaban que eran muchos y se volvía un tanto tedioso estarlas dibujando a mano; es en esta parte donde el software Cabri Geometry II nos es de utilidad ya que facilita el trazado de las pendientes en menos tiempo y menos tedioso como argumentan los alumnos. Posteriormente se les pide que encuentren la antiderivada de la expresión que utilizaron para crear el campo de pendientes, en esta parte también los alumnos muestran la respuesta que se esperaba: $y = x^2 + c$. Al final de la situación se les pregunta a los estudiantes si el campo de pendientes trazado genera las familias de curvas de la solución de la antiderivada; ellos responden:

Argumento: si la genera porque al trazar el campo de pendientes se interceptan las pendientes positivas y negativas que generará familias de parábolas, es decir $y = x^2 + C$.

Para la siguiente situación didáctica el grupo anterior se seleccionó solo a tres equipos, el equipo A con 3 integrantes, el equipo B con 2 integrantes y el equipo C con 2 integrantes, se les proporcionó un circuito RL como el que se muestra en la figura 1 donde R = 2Ω, L = 1H, V_s = 8V y cuya ecuación diferencial esta definida por $\frac{dI}{dt} = 8 - 2I$ con la condición inicial de t = 0. De los tres equipos solo dos equipos pudieron dibujar el campo de pendientes, al concluir la situación didáctica los equipos dan una explicación haciendo un análisis del campo de pendientes:

Argumento del equipo A: No concluyeron bien.

Argumento del equipo B: Vemos que la ecuación diferencial tiene un comportamiento exponencial, llegando a cierto valor para *(I)* la familia de curvas que podemos ver se vuelven constantes.

Argumento del equipo C: Para nosotros vemos también que la familia de curvas tiene un comportamiento exponencial, conforme crece el tiempo *t* la familia de curvas tiende a un valor constante por lo que el valor de las pendientes comienza a disminuir, es decir, la corriente *(I)* al llegar a este valor constante permanece sin variación aunque el tiempo aumente.

En nuestra fase de validación observamos que el propósito de la situación didáctica si cumplió con nuestro objetivo, cabe mencionar que en la segunda situación didáctica el equipo C nos muestra un argumento mas detallado del comportamiento del circuito eléctrico solo con el análisis del campo de pendientes.

Conclusiones

Podemos concluir en este trabajo que abordar a las ecuaciones diferenciales de forma cualitativa con ayuda de software como el Cabri es interesante, porque facilita el trazo de las pendientes en menor tiempo, al trazar el campo de pendientes nos recuerda conceptos de cálculo, además de que aprendemos mayor información de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la rapidez de crecimiento o decrecimiento de las pendientes, su comportamiento en el tiempo, de forma visual. En cambio, resolver una ecuación de forma algebraica nos deja una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales como argumenta Cordero (2000) y Artigue (1999) en sus obras. Por tanto, los argumentos vertidos por los estudiantes proporcionan elementos para resignificar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1999). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bobrow, L. (1993). *Análisis de Circuitos Eléctricos*. México: McGraw Hill interamericana de México, S. A. de C. V.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G., Cruz, C., Poirier, P., Hernández, H., Velasco, E. y Megchún, J. (2006). *La tecnología en el aula de Matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales.* Chiapas: Talleres gráficos de la Universidad autónoma de Chiapas.

Cantoral, R. (1996). *Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Conejo, A. (2004). *Circuitos Eléctricos para la ingeniería*. España: Edigrafos.

Cordero, F. (2000). *Un acercamiento gráfico a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (1), 7-38.

Hayt, W. y Kemmerly, J. (1990). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: Editorial McGraw Hill.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (3), 361-381.

Lezama, J. y Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4,* (2), 161-193.

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México: CECSA.

Stewart, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México: Thomson.

CANTIDAD DISCRETA Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE NIÑOS (7-9) CON AUDICIÓN DIFERENCIADA Y LENGUAJE LIMITADO: ESTUDIO DE CINCO CASOS

Ignacio Garnica Dovala, Hilda Eneyda González Ortiz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN México
igdovala@hotmail.com, hgonzalez@cinvestav.mx
Campo de investigación: Otros - Educación Especial Nivel: Básico

Resumen. *La presente investigación en curso, se desarrolló en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL), institución dedicada a la atención de niños sordos, bajo la filosofía del oralismo. Centrada en la percepción visual en el sentido de la compensación de la teoría de Vygotski (1997) y en la identificación de los elementos cognitivos: la memoria, la atención y la acción sobre los objetos presentes durante el desarrollo de tareas que implican nociones relacionadas con el concepto de cantidad discreta. Se realizó en cuatro fases: las dos primeras se orientaron al reconocimiento de las formas de comunicación y enseñanza que se desarrollan en el aula en las condiciones reales planeadas por la institución, y las últimas dos a la profundización en el estudio clínico de cinco casos. Se reportan resultados positivos relacionados con la adquisición de las nociones referidas y los relativos a las formas de comunicación y enseñanza.*
Palabras clave: audición diferenciada, lenguaje, cognición, cantidad discreta

Antecedentes

El objetivo fundamental del Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje (IMAL) es conducir al niño sordo hacia la adquisición del sistema lingüístico. Las condiciones colegiadas de las dos instituciones –Cinvestav (Centro de investigación y de estudios avanzados) e IMAL− propiciaron los espacios pertinentes para la realización del presente *estudio* con los objetivos de analizar y construir alternativas relacionadas con el pensamiento matemático, ante la privación de la percepción auditiva y el consecuente lenguaje limitado. Para tal efecto se diseñó un Plan Integral (Garnica, 2006) constituido por tres programas específicos: Docencia-Investigación [D/I], que opera en el "Aula de matemática educativa"; Entorno Familiar [E/F], que opera en el "Aula-entorno. Escuela para padres" y Formación Docente [F/D], que opera dentro del área de "Didáctica Especial" del plan de estudios de la Licenciatura en la Terapia de la Audición, la Voz y el Lenguaje oral y escrito del IMAL; Lo que se presenta en esta ocasión se ubica fundamentalmente en el programa D/I.

Pregunta de investigación

La investigación se centra en identificar relaciones entre elementos cognitivos: el lenguaje oral y escrito, la memoria, la atención, la representación mediada por las acciones sobre los objetos, y la adquisición de la noción de *cantidad discreta*. El desarrollo cognitivo de los niños sordos y el lenguaje, como medio de comunicación, fueron puntos referenciales, sin perder el foco de estudio: *la adquisición de nociones de cantidad discreta.* Para lo cual se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué caracteriza a los procesos cognitivos relacionados con las nociones de cantidad, implícitas en actividades dentro del aula, cuando la percepción auditiva no es completa?

Objetivos

Ante la pregunta planteada se precisan los siguientes objetivos: a) reconocer los modos de expresión del pensamiento matemático de los niños con déficit de audición, dentro del aula, durante el proceso de adquisición de las nociones del concepto de cantidad discreta. b) comprender las formas de comunicación en los procesos de enseñanza en el aula.

Perspectiva teórica y Método

El concepto de cantidad discreta se construye a partir de las nociones de relación de correspondencia, seriación, equivalencia y conteo, Fuson (1983) explica que apuntar el objeto es muy importante, para el niño en la concepción de contar, restando importancia a la correspondencia palabra-objeto. Considera que es evidente, para el niño, que cada objeto en una serie debe recibir una y sólo una palabra contada, que sus errores son de ejecución más que de comprensión. Sin embargo, en la práctica, es difícil asegurar cuando es un error de ejecución y aún más complicado descubrir si su naturaleza es de conocimiento o entendimiento.

En la investigación se utilizó la entrevista Clínica, considerando aportaciones del método clínico revisado o método exploración crítica utilizado por colaboradores de J. Piaget (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1975). Se basó fundamentalmente en las técnicas de *la observación* y *la entrevista,* entendida ésta última como la *interacción* mediada por la dualidad *pregunta/respuesta,* caracterizada por la utilización de objetos físicos con el fin de observar las acciones sobre ellos por parte del sujeto e inferir lo relacionado con "representaciones mentales" implícitas, es decir, el interrogatorio verbal se fortaleció mediante un procedimiento mixto en el cual la secuencia de *pregunta/respuesta* y argumento mantuvieron un vínculo estrecho con la *acción* del niño *sobre los objetos*. Fue necesario educar el oído de la investigadora para identificar los sonidos proferidos por los entrevistados e interpretar sus expresiones orales (oralizados por la institución, es decir que se les enseñó a hablar). El diseño de las tareas consideró el principio básico de la operación de objetos como fuente de información asociada a la dualidad *pregunta/respuesta.* Se complementó el sentido del método mediante la técnica de *observación,* consistente en el registro sistemático de acciones sobre objetos, de conductas verbales, corporales y las disociadas durante la realización de la tarea en el proceso de entrevista. Tres fueron los fundamentos de la *entrevista* y de la *observación*: a) el lenguaje limitado consecuencia de la audición diferenciada; b) las nociones del concepto implícitas en las acciones sobre los objetos y c) la *compensación* en el sentido de Vigotsky, a considerar la percepción visual y el énfasis en la retención y la atención en el desarrollo de las tareas. Se entrevistaron cinco alumnos de preescolar identificados como: *A, Ab, C, G y M*

Desarrollo

La investigación se organizó bajo los lineamientos del órgano operativo de la investigación en curso."Sistema IMAL" (Ojeda, 2006) (véase Figura.1), el cual determinó la operatividad de los programas del Plan Integral que derivaron del Seminario de Investigación: *percepción, cognición y lenguaje en Matemática Educativa*.

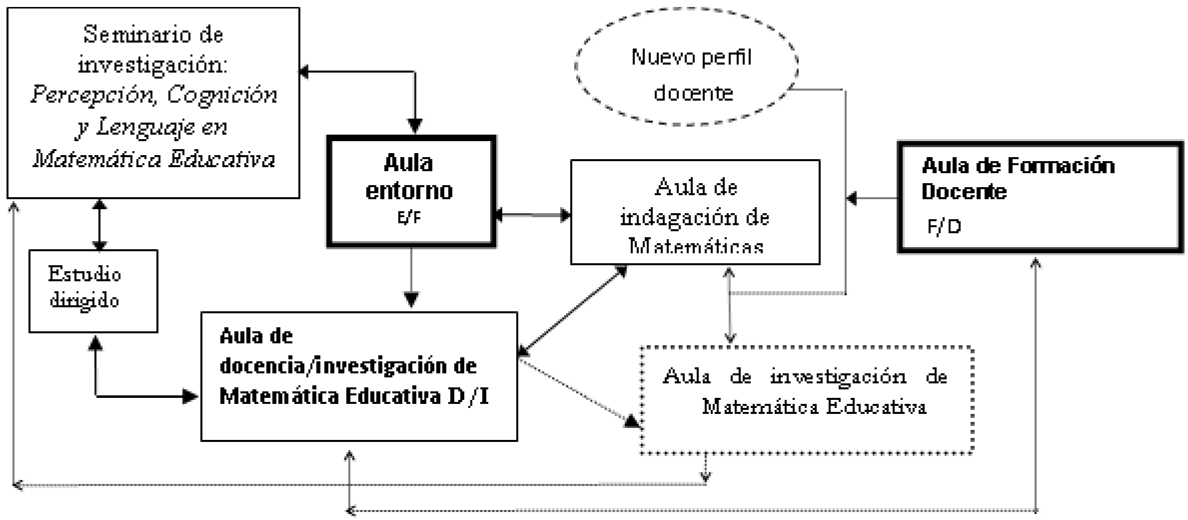


Figura 1. Órgano operativo de la investigación en curso. Sistema IMAL

Durante el desarrollo se intervino en tres escenarios: en el Aula de Matemática Educativa, en el Aula/entorno-Escuela de Padres (Barrientos, 2007) y en el Aula de Formación Docente. En relación al primero, la participación de la investigación propició la pregunta de indagación y la modificación del proceso de enseñanza. En el segundo se incorporó a los padres de familia a las actividades del aula y se les orientó en el desarrollo de tareas en el ámbito familiar con la finalidad de que su intervención favoreciera la aplicación de las entrevistas en los *actos de comunicación oral* relativos a la "*pregunta/respuesta*". Finalmente, en el tercero se inició un proceso de indagación con la docencia en formación, mediante la conducción de los contenidos de la asignatura "*Problemas en la adquisición de conceptos lógico-matemáticos"* de la Licenciatura de Terapia de la Audición, la Voz y el Lenguaje Oral y escrito, la conducción orientó las prácticas de las estudiantes al proceso indagatorio de la enseñanza realizada en el aula de matemática educativa.

Las cuatro fases de la investigación

Primera fase. Se diseñaron e implementaron tareas grupales con los objetivos siguientes: observar las acciones dentro del aula en condiciones reales de enseñanza, familiarizarse con las expresiones de los alumnos y conocer las formas de comunicación docente-alumno (véase Figura 2).

Figura 2. Sesión grupal.

Figura 3. Conteo de colecciones por percepción visual

Segunda fase. Se advirtieron las necesidades de enseñanza y se inició un trabajo de *estudio dirigido* orientado al proceso de indagación-docencia. El *estudio* en cuestión propició nuevas estrategias de enseñanza, consistentes, entre otras en: dar a los alumnos libertad para resolver las tareas propuestas; modificar las formas de conteo, sustituyendo el conteo uno a uno por un conteo con colecciones, privilegiando la percepción visual (véase Figura 3); proponer tareas de comparación entre colecciones para dar sentido a las expresiones “más que”, “menos que” e “igual que” e incorporar tareas de agregación de hasta cuatro colecciones.

Estas modificaciones de la enseñanza favorecieron el desarrollo de la investigación al sistematizar la propuesta de tareas relacionadas con las nociones implícitas en el concepto de cantidad discreta y obtener de las respuestas de los alumnos elementos susceptibles de ser analizados.

Tercera fase. Consistente en la aplicación de entrevistas para identificar su percepción auditiva y constancia ante preguntas relacionadas con los elementos constitutivos de la noción de cantidad discreta y los elementos cognitivos de *memoria*, *atención* y *acción sobre los objetos*. Derivado de este proceso se determinó la constitución de la población en dos grupos. El grupo I formado por los casos: *A, Ab* y *C* y el grupo II por los casos: *G y M* para la selección se consideró el nivel de adquisición de la noción de cantidad discreta y su nivel de percepción auditiva. En el grupo I, *A* fue el alumno con mayor ganancia auditiva; *Ab* el de menor y *C* está entre los dos anteriores; los tres son anacúsicos, condición importante a considerar para comprender la comunicación durante el intercambio de experiencias. Los alumnos del Grupo II (*G y M)* fueron seleccionados por las respuestas en relación a su proceso de adquisición de la noción de cantidad discreta. En cuanto a la ganancia auditiva, *G* es candidata a implante coclear y *M*, por su parte, tiene buena ganancia auditiva, pero padece alteración neuronal (según historia médica) y presentó conductas disociadas de la tarea planteada.

El grupo I dio respuestas constantes ante tareas de mayor dificultad que las resueltas por los casos del grupo II.

Cuarta fase. Consistió en la aplicación de las entrevistas *Clínicas*, se implementó con privilegió en la percepción visual considerando la compensación ante el déficit auditivo; en relación a las nociones de cantidad discreta se propuso trabajar con colecciones en tareas que intervienen en la adquisición del concepto formal: conteo, agregación, relación de correspondencia, seriación y clasificación y en relación a la audición diferenciada en la interpretación de expresiones relacionadas con el pensamiento matemático considerando sus modos de expresión y producción (oral y escrita) referidos al campo (relacionados con el mundo) de los fenómenos percibidos. Los criterios para el análisis de la información fueron: la ausencia de percepción auditiva, la percepción visual como *compensación* en el sentido de Vigotsky, los elementos cognitivos: *memoria, atención* y *acción sobre los objetos* y las nociones adquiridas de cantidad discreta.

Resultados

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron del proceso de análisis de la información empírica, a partir de la tipificación de los cinco casos en dos grupos. El foco de la investigación centró el análisis en la adquisición de las nociones de cantidad discreta, razón por la cual los resultados en cuestión se presentan bajo tres consideraciones: a) la percepción auditiva diferenciada, b) la percepción visual y c) los elementos cognitivos identificados (*memoria de trabajo, atención y acción sobre los objetos).*

a) La percepción auditiva diferenciada, los cinco casos son sordos profundos sin embargo las ganancias auditivas son diferenciadas mismas que reportan resultados distintos en la solución de la tarea. La constancia de respuestas positivas influyó en la determinación de la tipificación de los grupos.

b) La percepción visual como compensación en el sentido de Vigotsky, el complejo mecanismo de compensación se ve favorecido por las tareas que privilegian la percepción visual al dar seguridad a los sujetos e incrementar la constancia de respuestas positivas.

c) Elementos cognitivos (memoria, atención y acciones sobre los objetos), gran parte de la comunicación se establece bajo la interpretación de la acción sobre los objetos, dejando evidencia de los procesos cognitivos: memoria y atención.

Los resultados se presentan por grupo.

Cantidad discreta y su adquisición en relación con la percepción auditiva diferenciada

Conteo Tareas relacionadas con conteo de colecciones abiertas y cerradas de más de veinte objetos y hasta cincuenta para el grupo I, (véase Figura 4) para el grupo II, conteo de colecciones abiertas menores de doce objetos.

Figura 4. Conteo de colecciones mayores de veinte por agregación. Grupo.

Figura 5. Expresión corporal ante una respuesta correcta.

Relación de correspondencia. Grupo I Hacen comparaciones entre colecciones diferenciando las que tienen más de las que tienen menos y las que son iguales. El grupo II compara colecciones menores de diez objetos. En expresiones figurales la relación de correspondencia está presente a través de elementos que evidencian la relación entre los objetos de dos colecciones.

Agregación. El grupo I hace agregaciones de colecciones mayores de diez objetos, con colecciones ocultas. El grupo II no aceptó el trabajo con agregación de colecciones ocultas, hace agregaciones de colecciones visibles menores de cinco objetos.

Cantidad discreta y su adquisición en relación con la percepción visual como compensación en el sentido de Vigotsky.

La adquisición de nociones de cantidad discreta es favorecida cuando se privilegia la percepción visual, en los cinco casos, fue notoria la seguridad que adquieren al ver congruencia entre lo que perceptualmente escuchan y lo que perciben visualmente, (véase Figura 5).

Cantidad discreta y su adquisición en relación con elementos cognitivos identificados

Durante el desarrollo de las tareas fue evidente que la memoria de trabajo y la atención estuvieron presentes, en los cinco casos, hay evidencia de que recordaron situaciones que apoyaron las respuestas a preguntas planteadas. Atendieron a las acciones sobre los objetos y dieron respuestas que evidenciaron la interpretación realizada.

Memoria de trabajo. El grupo I, recuerda la cantidad de colecciones ocultas, (véase Figura 6). El grupo II, observa la cantidad de hasta cinco colecciones y las relaciona con los numerales correspondiente.

Figura 6. Recuerda cantidades ocultas. Grupo I.

Figura 7. Fija su atención en los objetos, Grupo II.

Atención. Ambos grupos atienden a la tarea propuesta, se distinguen en el tiempo, el grupo I atendió tareas de hasta 45', mientras que el grupo II tuvo un tiempo de atención de 20' en promedio, (véase Figura 7).

Acciones sobre los objetos. Las acciones sobre los objetos relacionadas con la tarea, manifestaron lo que el sujeto no pudo expresar con palabras, la secuencia de sus acciones se interpretó como la respuesta a los cuestionamientos planteados.

Conclusiones

La investigación presenta un avance importante en el desarrollo de nociones de cantidad discreta. Por ejemplo, el desarrollo del proceso de agregación le da, a los alumnos, los elementos para avanzar en la adquisición de la noción de suma. Es indiscutible que el algoritmo es el reto inmediato al incorporarse a la escuela regular, sin embargo, las respuestas dadas durante las entrevistas dan cuenta de procesos *interiorizados* de agregación.

Las tareas que privilegian la percepción visual favorecen el proceso de adquisición de la noción, sin menospreciar la táctil-cinestésica. El alumno adquiere seguridad cuando hay congruencia entre lo que ve y lo que interpreta auditivamente, a través de las acciones sobre los objetos y las expresiones corporales. Entre más elementos perceptuales pueda asociar a la información mayor será su comprensión.

El resultado de la investigación demuestra la adquisición de nociones de cantidad discreta de alumnos con percepción auditiva diferenciada, y muestra que ésta se favorece cuando las formas de enseñanza se modifican considerando los procesos de compensación en el sentido de Vigotsky, este esquema compensatorio, le da condiciones de interacción, sin embargo tiene en contra el entorno familiar y social. Un resultado evidente es el desfase entre su edad cronológica y su edad cognitiva. Si recibieran la misma estimulación que los niños normoyentes, supuestamente su desarrollo cognitivo no tendría por qué ser diferente.

Referencias bibliográficas

Barrientos, M (2007). *Actividades para la adquisición de nociones matemáticas. Experiencias en el Aula-entorno de la Escuela de Padres de Niños sordos del Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje.* Tesina para obtener el diploma de la Especialidad en Lingüística Aplicada a la Adquisición de una Primera Lengua.

Fuson, K. (1983). The Acquisition of Early Number. Word Meanings: En Herbert P. Ginsburg (Ed.) *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Garnica, I. (2006). *Memoria del seminario de Estudios sobre "El conocimiento matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada".* Reunión organizada los días 21 y 28 de junio del 2006 por los colaboradores del Cinvestav en el IMAL (en prensa).

Inhelder, B.; Sinclair, H. y Bovet, M. (1975). *Aprendizaje y estructura del conocimientos.* España: Ed. Morata, S.A.

Ojeda, A.M. (2006). Introducción a la lógica de los programas de indagación, investigación y docencia en el aula de Matemática Educativa. En *Memoria del Seminario Estudios sobre el conocimiento matemático ante la percepción y el lenguaje*. (IMAL-Área de Ciencias de la Cognición, DME-Cinvestav del IPN. México.

Vygotsky, L. (1997). *Fundamentos de defectología.* Obras escogidas. Madrid: Visor.

UN ESTUDIO SOBRE LA DESARTICULACIÓN ENTRE LA SEMEJANZA Y LA TRIGONOMETRÍA EN EL BACHILLERATO

Patricia del Carmen Navarro, Martha Cristina Villalva Gutiérrez
Universidad de Sonora México
pnavarro@astro.uson.mx, mcris@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico Nivel: Medio Superior

Resumen. *Se reporta parte de una investigación que trata sobre el estudio local de la proporcionalidad geométrica y su articulación con el resto de los temas –particularmente la trigonometría– que conforman el curso de Matemáticas III del plan de estudios de escuelas preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora. En este extracto, se proponen algunos constructos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que fundamentaron el estudio, y que en este documento tienen el propósito de darle sentido a la presentación del Marco Epistemológico de Referencia, el cual fue pieza clave en el estudio mencionado, tanto para determinar el nivel de articulación existente, como para contar con una base para proponer acciones específicas acordes a la articulación propuesta, de tal modo que mediante ellas fuera factible una construcción funcional de los conocimientos geométricos.*
Palabras clave: articulación, semejanza, trigonometría, teoría antropológica de lo didáctico

El problema

La institución educativa en la que se ubicó el análisis específico sobre la desarticulación existente entre los temas de semejanza y función trigonométrica, pertenece al sistema de escuelas preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora. En particular se centra en el área de "Geometría y Trigonometría" que corresponde al curso de Matemáticas III.

En el curso de Geometría y Trigonometría, la semejanza queda abandonada después de estudiarse brevemente. No parece ser el principio de una cadena de conocimiento que llega a la función trigonométrica, ésta parece surgir espontáneamente como organización auto-tecnológica. Pero formalmente la función trigonométrica está estrechamente vinculada con la semejanza.

Tal vez un motivo para esta desarticulación se debe a que históricamente la relación trigonométrica apareció posterior a la semejanza y en un contexto diferente. La semejanza está documentada como objeto de estudio en Los Elementos de Euclides. En cambio, la relación trigonométrica parece surgir como herramienta para cálculos astronómicos en los trabajos de Hiparco (190-120 a.C.), quien elaboró tablas mostrando la relación arco-cuerda, para realizar el cálculo de la posición de un planeta. Otros astrónomos griegos y navegantes islámicos utilizaron las cuerdas como herramientas, sin elaborar una teoría matemática que las contuviera. (Boyer, 1991). Posteriormente, Ptolomeo (100-170 d.C. aprox.) utilizó los elementos de Euclides para mejorar las tablas de Hiparco. Después trabajó en triángulos planos. En este proceso se gestó la idea de relaciones trigonométricas inversas. Así, introdujo las relaciones entre cuerdas y arcos como cuestiones de estudio matemático además de usarlas como auxiliarles en sus trabajos de astronomía.

Lo cierto es que en la matemática sabia la geometría y la trigonometría están relacionadas indisolublemente, y el hecho de que se estudien en la institución escolar de manera desvinculada redunda en perjuicio de la razón de existir de ambas en el currículo.

Se propone entonces, una organización matemática que tome en cuenta la articulación formal de la semejanza y la trigonometría, sin que esto signifique ofrecer una transposición más cercana a la matemática sabia y menos didáctica. El propósito es mantener la secuencia lógica de los temas para que la semejanza conserve su razón de existir en el currículo

Desde la óptica de la transposición didáctica, como lo expresa Javier García (2005), un primer referente institucional para el análisis de la organización matemática existente, lo constituyen los Planes y Programas de Estudio. Un obstáculo importante en el análisis inicial de esta investigación, lo constituyó la ausencia de un currículo detallado para los estudios de matemáticas en este sistema de preparatorias, pues en los existentes, no se describen la posición institucional en torno a los mismos: los objetivos o competencias a desarrollar, las áreas, sectores y temas en los que se organiza el estudio de las matemáticas, la metodología sugerida o los criterios de evaluación.

Al carecer de un referente institucional vía los programas de estudio para analizar la organización matemática institucional, se propuso localizarlo vía el análisis de los textos sugeridos por las escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora, considerándolos como una fuente de información alterna ya que son más que proveedores de recursos didácticos: son la institución que dicta las organizaciones a estudiar y determina las praxeologías que seguirán el profesor y los alumnos.

Componentes teóricos

A continuación e describen brevemente algunos de los principales componentes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Ives Chevallard, la cual se enmarca en el Programa

Epistemológico de Investigación de la Escuela Francesa en la que contribuyen, desde la visión española, Josep Gascón y Marianna Bosch (Chevallard et al. 1997; Chevallard 1999). De esta manera, esperamos que el breve reporte que en este documento se expone adquiera cierta claridad.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) parte de que toda actividad humana puede describirse con un modelo único: ***la praxeología.*** (Gascón et al, 2004).

Esto es, para realizar una labor hay que saber cómo hacerla, es decir, utilizar una técnica, *la praxis*. Si no se conoce la técnica es necesario crearla. La creación de la técnica o su uso continuo puede llevar –o no- a un conocimiento de por qué funciona, esto es, una tecnología. La tecnología es el *logos,* el saber sobre la praxis. *El saber hacer y el saber, forman la praxeología*.

El estudio es una de las actividades humanas y puede, por tanto, examinarse tomando como unidad de análisis la praxeología.

Tareas (t_i). La noción de praxeología se clarifica a partir de la agregación de tareas en tipos y géneros:

- A las labores específicas a realizar, en particular a las relacionadas con el estudio de las matemáticas les llamamos tareas. Una tarea es la acción sobre un objeto particular, como demostrar el teorema de Tales.
- Un tipo de tareas (T) es la acción que puede recaer sobre un diverso tipo de objetos: Demostrar teoremas de geometría.
- Los géneros de tareas son aquellas en las que las que se menciona la acción pero no se especifica el objeto sobre el que ésta recae. Ej.: Demostrar.

Técnica ($\hat{o}_i$). Asociada a un tipo de tareas existe una manera de realizarlas, una técnica. La técnica puede funcionar para una parte del tipo de tareas, esto es, tiene un alcance determinado. Cuando se agota una técnica es necesario crear otra más compleja, hacerla evolucionar.

Tecnología (θ). La tecnología permite explicar por qué una técnica es correcta y justificar su uso. Además, si se maneja adecuadamente, puede dar lugar a nuevas técnicas.

Teoría (Θ). La teoría explica las tecnologías como la tecnología explica la técnica. Es un nivel más profundo de explicación, más cerca del saber sabio.

Praxeologías. Como se dijo antes, la relación entre tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría constituye una praxeología la cual tiene dos componentes: el saber y el saber hacer. El primero tiene relación con la tecnología y la teoría, el segundo con la práctica.

Podemos clasificar las praxeologías según el predominio del saber que se manifieste en ellas:

- Puntuales. La praxeología se llama puntual si se refiere a un solo tipo de tareas en la que rara vez se hace uso de la tecnología.
- Locales. La agregación de estas organizaciones puntuales alrededor de una tecnología da lugar a una praxeología local.
- Regionales. Cuando se refieren diversas tareas, técnicas y tecnologías que están centradas en una teoría, las praxeologías son regionales.
- Globales. La combinación de praxeologías regionales que integra varias teorías en una institución dada.

La construcción del MER

En una institución escolar dada, existe siempre una manera de trasladar el saber sabio a los estudiantes. A la concreción resultante de dicha acción, la Teoría Antropológica de lo Didáctico le da el nombre de *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER), el cual podrá ser explícito o quedar sobrentendido. Pero para el investigador que encuentra un problema y quiere proponer una solución, es indispensable tener este modelo claramente formulado. De otra manera no tiene una base firme tanto para analizar las organizaciones didácticas que le interesan como para proponer una organización alternativa. Igualmente, el modelo es necesario para estudiar el saber matemático antes de transformarlo en saber a enseñar.

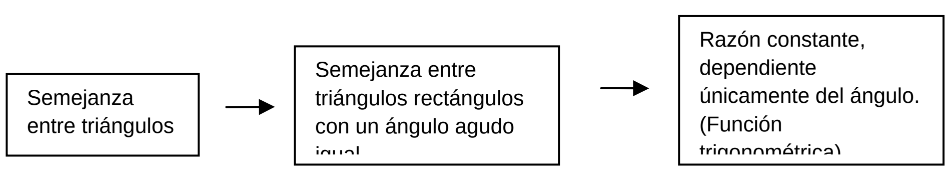
Este modelo es una actividad de estudio hipotética. En palabras de Bolea et al: "…es "hipotética" en el sentido de que no existe ni ha existido nunca como organización matemática escolar" (Bolea et al, 2001).

En consecuencia, con el fin de analizar las organizaciones matemáticas de semejanza de triángulos y de la función trigonométrica, se propuso un modelo epistemológico de referencia (MER en adelante). El MER constituyó también una propuesta alternativa a las praxeologías vigentes, así como un referente para el diseño de una actividad de estudio con la que se ejemplificó la aplicación de las aportaciones de la Teoría Antropológica en el trabajo docente:

Se propuso diseñar una secuencia de tareas que se realizaran con técnicas que fueran desde la semejanza entre triángulos hasta la función trigonométrica. Esta conexión se pudo conseguir manteniendo la igualdad entre los ángulos como el centro de la atención.

Esta secuencia diseñada tiene la característica de que las técnicas utilizadas van creciendo en complejidad y respondiendo siempre a la teoría de la semejanza. Además, pudo ser ampliada hasta cubrir un número de tareas lo suficientemente grande como para llegar a generalizar la constancia de la razón entre los lados de un triángulo rectángulo cuando el ángulo agudo se mantiene sin variación.

Lo anterior resultó en un campo de problemas que requieren más de una técnica pero respaldadas por la misma tecnología. Es decir, en una praxeología local. La intención fué que se estableciera una conexión permanente entre la semejanza y la razón trigonométrica de manera que el estudiante fuera capaz de distinguir las situaciones en las que el uso de esta función sea la herramienta adecuada aunque sean problemas que enfrente por primera vez.



El esquema propuesto es muy sencillo:

- Tareas que se resuelvan con técnicas de semejanza.
- Tareas que se puedan resolver con técnicas de semejanza pero en las que éstas resulten muy costosas.

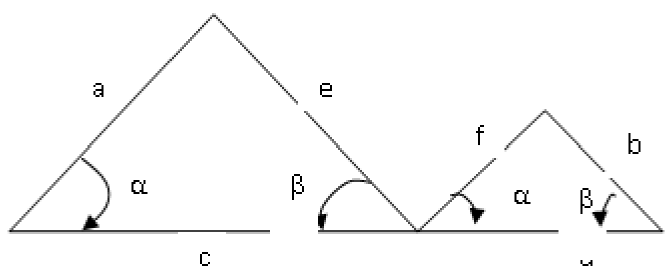
- Tareas en las que se identifique la constancia de la razón entre triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual.
- Tareas que se resuelvan con uso de la razón trigonométrica.

La modelización de las tareas no se diferencia mucho de las clásicas. La aportación que intenta esta propuesta estriba más bien en el orden de la secuencia, que tiene la característica de vincular semejanza y trigonometría. Esto da una razón de ser al estudio de estas organizaciones matemáticas y la posibilidad de reconocer situaciones en las que éstas faciliten la técnica adecuada para resolverlas.

Es necesario partir de tareas que llamen a las técnicas que proporciona la tecnología de la semejanza. El siguiente desarrollo esquematiza la propuesta:

1. Si se tienen dos triángulos semejantes y si de uno de ellos se desconoce un lado, se puede utilizar la proporción entre sus lados correspondientes para calcular su medida.

t_1 Utilizar la proporcionalidad de los lados de dos triángulos semejantes para encontrar la medida de un lado desconocido



$\hat{o}_1$ La técnica para resolver esta tarea es plantear las ecuaciones derivadas de la proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes.

$$\frac{a}{e}=\frac{d}{f}, \qquad \frac{c}{e}=\frac{d}{f}, \qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$a=\frac{ed}{f} \qquad c=\frac{ed}{f} \qquad a=\frac{cb}{d}$$

□□□La técnica anterior es respaldada por la tecnología de los casos de semejanza entre triángulos. Dos triángulos son semejantes si tienen:

a) dos ángulos iguales.

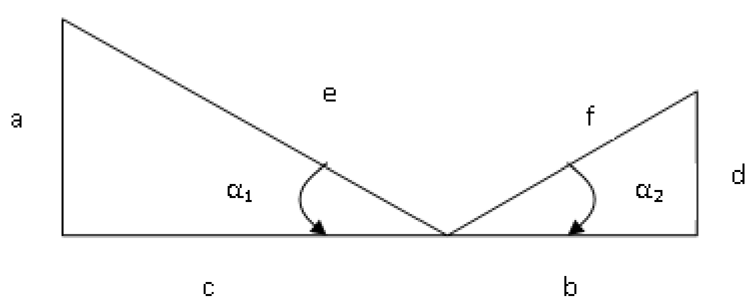
b) dos lados proporcionales e igual el ángulo entre ellos.

c) tres lados proporcionales.

En esta organización didáctica, el paso siguiente es una actividad (tarea $\mathbf{t_2}$) que utilice la técnica anterior pero aplicada al caso particular de triángulos rectángulos. De esta manera, la tecnología sigue siendo □□

$\mathbf{t_2}$ Calcular la medida del lado de un triángulo rectángulo dado uno de sus ángulos agudos.

Para el caso de los triángulos rectángulos, la semejanza queda establecida si tienen un ángulo agudo igual. Entonces, para cada ángulo agudo y para cada par de lados, existe una razón fija.



La técnica es similar y la tecnología es la misma de t_1, pero para cada □:

$\frac{a}{e} = \frac{d}{f}$ =constante, $\frac{c}{e} = \frac{b}{f}$ =constante $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ =constante

Lo cual permite que la técnica evolucione a una menos costosa que $ô_1$ ya que elimina la necesidad de tener dos triángulos semejantes.

$ô_2$: $\frac{a}{e} = k_1$ $\frac{c}{e} = k_2$ $\frac{a}{c} = k_3$
$a = k_1 e$ $c = k_2 e$ $a = k_3 c$

Una vez establecido que la razones entre los lados de un triángulo rectángulo permanece constante para un ángulo dado, tiene sentido darle un nombre a cada una de estas razones y se puede manejar una técnica que las utilice:

Sean ***k_1= sen*** ▯▯▯▯▯ ▯***k_2= cos*** ▯ y ***k_3 = tan*** ▯▯

$ô_3$: $a = e \, sen \propto, \; c = e \cos \propto, \; a = c \tan \propto$

En este proceso de evolución de técnicas para las tareas del mismo tipo (T_2), se puede apreciar que la praxeología tiene siempre como teoría la semejanza entre triángulos (▯▯, su tecnología es el conocimiento de los casos de semejanza (▯▯. El uso de las funciones trigonométricas aparece como una economía de procedimiento, dado que se ha reconocido como un caso particular de los casos de semejanza. Además, alcanza una gran variedad de cuestiones problemáticas. En otras palabras, se ha construido una praxeología local, [T_2/$ô_2$/ô▯▯▯▯▯▯].

Esta praxeología local puede evolucionar hacia una regional, que dejará de lado su origen geométrico una vez que haya sido puesta en funcionamiento en un espectro amplio de problemas.

Resultados del análisis de textos

Además de la separación de los temas de semejanza y trigonometría en diferentes capítulos, en el desarrollo de cada tema, los libros que se analizaron, Fuenlabrada (2004) y Guzmán (2005), exhiben primero la tecnología, después exponen y ejemplifican la técnica ya construida y finalmente aparecen las tareas. Se identifican algunas praxeologías puntuales, sin embargo, los problemas o tareas siempre se pueden resolver con la técnica dada, no hay lugar para la exploración y es poco probable que ocurra el momento de la evaluación. En otras palabras, este orden detiene el tiempo didáctico ya que entorpece la concatenación de los diferentes momentos de estudio.

Es posible que la desarticulación de semejanza y trigonometría en los libros esté relacionada con la necesidad de utilizar la primera en la demostración de teoremas que tratan las propiedades de los polígonos y que aparecen inmediatamente después del tema de triángulos. Esta puede ser una razón válida para separar los temas. Pero la semejanza de triángulos tendría que ser retomada para darle un sustento tecnológico a la función trigonométrica. No se requiere mucho tiempo para abordar por segunda vez la semejanza y enfatizar los teoremas que justifican el carácter funcional de la razón trigonométrica. De esta manera se resolvería el problema operativo del curso y se salvaría la articulación.

Referencias bibliográficas

Bolea, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2001) *Recherches en didactique des mathématiques 21* (3), 247-304.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos,* Universitat Ramón Llull, Universitat Autónoma de Barcelona. En prensa

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics.* Recuperado el 2 de noviembre de 2008 en www.fractus.uson.mx/papers.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Madrid: Horsori.

Chevallard, Y. (1999), El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19 (2)*, 221-266

Fuenlabrada, S. (2004) *Geometría y trigonometría.* México: McGraw Hill.

García, J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2002). *El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas.* Universitat Autónoma de Barcelona. En prensa

Gascón, J. (2003) Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. *Revista SUMA 45*, 25-34.

Gascón, J. 2004. *Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro,* Comunicación invitada en las Xornadas sobre Educación Matemática (Santiago de Compostela, 16-18/09/2004).

Guzmán, A. (2005) *Geometría y trigonometría.* México: Publicaciones Cultural.

EL TALENTO ESPECIAL DE LOS NIÑOS EN MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO CUALITATIVO

Erika Marlene Canché Góngora, Ma. Guadalupe Simón Ramos
CINVESTAV-IPN México
emcanche@cinvestav.mx, gsimon@cinvestav.mx
Campo de investigación: Estudios socioculturales Nivel: Básico

Resumen. *La atención a la diversidad escolar es uno de los temas de creciente interés en nuestro país. Particularmente, la falta de investigación y de reconocimiento gubernamental de los niños con algún talento especial ha propiciado la incertidumbre en el aula. Tal situación tiene como consecuencia la necesidad de estudios de contexto que permitan la identificación y el tratamiento escolar de esta población.*

Este trabajo tiene como finalidad presentar un estado del arte acerca de algunas investigaciones y proyectos llevados a cabo en torno a estos niños. Todo esto, con la finalidad de poder encontrar aquellas características que nos permitan identificar a un niño mexicano con talento en matemáticas.

Palabras clave: talento, superdotación

Introducción

La educación es comúnmente entendida como el proceso de socialización de las personas pertenecientes a una sociedad donde se desarrollan capacidades intelectuales, habilidades, destrezas y técnicas en los estudiantes.

Partiendo de cuestiones generales: *Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La educación elemental será obligatoria. […] La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos, y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz. (Naciones Unidas, Declaración Universal de los Derechos humanos, artículo 26).*

Para la UNESCO la educación se concibe, a grandes rasgos, como un continuo de prestaciones y esfuerzos para dar respuesta a las diversas necesidades de los alumnos, de forma que puedan alcanzar los fines de la educación.

A su vez, la escuela es conocida como el lugar o edificio donde se enseña y se aprende. Sin embargo, es muy poco conocida la complejidad que se encuentra inmersa en ella; las actitudes de los docentes, la falta de formación para atender a la *diversidad*, la homogeneidad de la enseñanza, la escasez de profesionales de apoyo y de recursos, y la rigidez de los currícula y los criterios de evaluación, se convierten en verdaderos obstáculos, los cuales necesitan ser vencidos para tener entornos educativos eficaces y que respondan a las necesidades del medio.

Con lo anterior queremos decir que institucionalmente, e incluso gubernamentalmente, la educación pretende una formación integral del sujeto, sin embargo, los fines difícilmente se cumplen, ya que a nivel del aula las problemáticas son más particulares y aun no se tienen respuestas para todos los casos.

Diversidad escolar

Muchos de los sistemas educativos siguen dando respuestas homogéneas a personas con necesidades muy diversas, es decir, han permitido que aquellas personas con capacidades, tanto inferiores como superiores, sean excluidas del panorama educativo.

Por ejemplo, existe la creencia de que por tener capacidades superiores, se obvia la ayuda a alumnos que pueden alcanzar su máximo potencial. Este tipo de estudiantes, también necesitan, entre otras cosas, adaptaciones del currículum y entornos de aprendizaje.

Por lo anterior, hablar de diversidad escolar implica el reconocimiento de todos los involucrados, es decir, considerar la diversidad de las escuelas, de los profesores y de los alumnos. Los principales factores que propician esta diversidad son del tipo social, económico, cultural, religioso, étnico, geográfico, etc. En particular, tanto alumnos como profesores presentan realidades particulares, por ejemplo, el alumnado tiene diferentes capacidades, motivaciones, intereses, así como también, diferentes ritmos de aprendizaje.

Actualmente existe mayor reconocimiento y mayor conciencia sobre la necesidad de considerar en la educación a todos aquellos alumnos que presentan diferentes necesidades educativas. Según la UNESCO, la escuela debe dar respuesta a las necesidades individuales y grupales de los sujetos respetando sus características, pero que al mismo tiempo permita adaptarles a la sociedad en la que se desarrollan; es decir, será una escuela en la que se responda a la diversidad característica de los grupos humanos.

Ante esta situación, se han creado e implementado distintas estrategias para tratar de enfrentar la diversidad en las escuelas. Entre estas estrategias, podemos mencionar, aquellas de aprendizaje, de conducta y las curriculares. Por las de aprendizaje resaltan las de *aprendizaje cooperativo*, las cuales intentan animar a los estudiantes para que trabajen juntos promoviendo la interacción, así como el intercambio de ideas o experiencias. Las de conducta se refieren a aquellas destinadas a propiciar la *interacción social,* cubriendo aquellos aspectos sobre destrezas y habilidades de convivencia social. Por último, están las curriculares que se refieren a la *flexibilización de contenidos, autorregulación del aprendizaje, la autoevaluación*, esencialmente.

Particularmente, en el desarrollo de este trabajo, nos centraremos en el extremo superior de nuestros estudiantes, aquellos con algún tipo de talento.

¿Talento o superdotado?

El talento se concibe generalmente como el *potencial* que puede tener una persona en el desarrollo de un conjunto de habilidades/competencias a lo largo de su vida.

Sin embargo si realizamos una revisión más específica es posible observar en la literatura que existen diversos términos y aproximaciones para denominar y describir a aquellos alumnos con algún tipo capacidades por encima de la media. Los términos más utilizados son los de talento y superdotado. Es importante considerar que existen otros términos que se utilizan como sinónimos, dentro de la literatura que revisamos, como el de sobresaliente y sobredotado.

Para la UNESCO el concepto de talento académico alude a aquellos alumnos que tienen capacidades excepcionales en un ámbito específico, mientras que la superdotación afecta a varios ámbitos o áreas; esto es, conciben una diferenciación entre estos términos. En nuestro caso, utilizaremos el término talento, considerando que en la actualidad es más provechoso el desarrollo de talentos que de sobredotados.

Por otro lado se han realizado análisis conceptuales del término talento y entre las cuales se han identificado términos como talento *actual* y talento *potencial*, los cuales eluden a aquellos estados evidenciados por una persona. El primero se refiere a aquél talento ya desarrollado, mientras que el segundo, a aquél en vías de desarrollarse.

Identificación de un talento

La mayoría de las investigaciones realizadas sobre el tema corresponden al proceso de identificación de capacidades superiores, en el siguiente apartado mencionamos algunas de las principales corrientes al respecto.

El proceso de identificación constituye el primer paso (y el más complicado, puesto que el talento no es una característica fija e inmutable) para abordar la atención educativa de los alumnos con talento, de tal modo que se les permita desarrollar al máximo sus capacidades y sean de gran beneficio a la sociedad. (Ball, et. al, 2004). Sin embargo en México, a diferencia de Europa, aún no hay una legislación específica en cuanto a este tema, es decir, no se especifican gubernamentalmente de forma explícita medidas educativas dirigidas a responder a sus necesidades.

Los cambios en la concepción del talento han influido notablemente en los procesos de su identificación, pudiendo afirmar que se ha transitado desde una concepción más global a un mayor énfasis en los talentos específicos. Se han formulado modelos como los de Renzulli (1978) o Gardner (1993), por mencionar los más conocidos, para la identificación del talento.

El primero utiliza los resultados de pruebas de Coeficiente Intelectual y de aptitudes, así como opiniones de los profesores, para posteriormente formarlos mediante un programa de enriquecimiento curricular por medio de actividades de diversos tipos, abandonando la idea de medir de manera psicométrica a un sobredotado, esto por el carácter restrictivo de las pruebas. Distingue 3 características o rasgos esenciales que definen a la persona sobresaliente, lo que lo lleva a formular su "concepción de los 3 aros". Estos tres aros están conformados por 3 grupos que interactúan en el individuo sobresaliente: *Capacidad por encima de la media, Altos niveles de creatividad y Compromiso con la tarea.* Lo importante, dice, es el grado de interacción entre ellas. A este modelo, integra la importancia de la interacción social, la escuela, la familia – los factores ambientales – como características ligadas a la superdotación (Rayo, 1997, citado en Covarrubias n.d).

El modelo de Gardner (1993), se centra en la examinación de diferentes *campos cognitivos* como lenguaje, música, movimiento, numeración, ciencia, ciencias sociales, arte y relaciones sociales, además de los estilos de aprendizaje del alumno. Considera que todos lo seres tenemos todas las inteligencias solo que en mayor o menor grado, y que talentosos serán los que destaquen en una u otra inteligencia.

Gardner (1993) enfatiza el hecho de que todas las inteligencias son igualmente importantes y, según esto, el problema sería que el sistema escolar vigente no las trata por igual sino que prioriza las dos primeras de la lista, (la inteligencia lógico - matemática y la inteligencia lingüística) hasta el punto de negar la existencia de las demás.

En 1971 la Universidad de John Hopkins, en Baltimore Estados Unidos puso en marcha el SMPY (Study of Mathematical Precocius Youth) con el objetivo de identificar y posteriormente proveer de los recursos necesarios a aquellos jóvenes talentos en matemáticas.

Según Rodríguez (2004) el SPMY parte de dos conceptos fundamentales: la "búsqueda de talentos" relacionada directamente con la identificación y el "test diagnóstico" seguido de instrucción prescriptiva, relacionados con la intervención educativa.

Este estudio partió inicialmente en el área de las matemáticas y luego se extendió al lenguaje y a las ciencias.

A su vez, otros autores como Sternberg (1981) y Goleman (1999) han desarrollado teoría sobre capacidades superiores centrándose en definir *componentes de la inteligencia*. El nivel de pertenencia de cada persona de estas "características" determinará sus capacidades sobresalientes.

Robert J. Sternberg, psicólogo estadounidense profesor de la Universidad de Yale, en su Teoría triárquica de la inteligencia, estableció tres categorías para describir la inteligencia:

- Inteligencia componencial-analítica: la habilidad para adquirir y almacenar información.
- Inteligencia experiencial-creativa: habilidad fundada en la experiencia para seleccionar, codificar, combinar y comparar información.
- Inteligencia contextual-práctica: relacionada con la conducta adaptativa al mundo real.

Para ello parte de diversos problemas y cuestiones por los que *trata de conocer la capacidad del alumno para aprender, no el conocimiento que posee.* Lo esencial en este modelo de evaluación es su orientación al análisis de las estrategias cognitivas y metacognitivas teniendo en cuenta el contexto, la experiencia y la cultura de la población a la que se aplica.

Daniel Goleman psicólogo estadounidense, publicó en 1995 el libro *Emotional Intelligence*, "Inteligencia emocional". Para Goleman (1995) la inteligencia emocional es la capacidad para reconocer sentimientos propios y ajenos, y la habilidad para manejarlos. Considera que la inteligencia emocional puede organizarse que en cinco capacidades: conocer las emociones y sentimientos propios, manejarlos, reconocerlos, crear la propia motivación, y manejar las relaciones.

Tratamiento de los niños con capacidades y aptitudes sobresalientes en México

En México no hay un consenso conceptual respecto a la población con capacidades y aptitudes sobresalientes. No se cuenta con instrumentos estandarizados que permitan identificar a niños con talento. A pesar de que se han llevado a cabo investigaciones alrededor de esto, los resultados no han sido publicados. Una investigación en este sentido es la que se llevó a cabo por parte de la Universidad de Guadalajara en el 2002 con relación a los instrumentos de identificación dentro del proyecto de investigación de innovación "Un modelo de intervención educativa para alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes".

La inquietud por atender a los niños con aptitudes sobresalientes se inicia en 1982, bajo la iniciativa de la Dirección General de Educación Especial, la cual, a partir de un trabajo sobre la estandarización de la escala de inteligencia Wechsler para el nivel de primaria, identificó niños con capacidad intelectual "muy superior" en el Distrito Federal. A partir de este trabajo se promovió la realización de investigaciones con el fin de caracterizar a la población sobresaliente de edad escolar en la capital de la República. Lamentablemente, no se cuenta con los resultados de estas investigaciones.

Si bien se registran intentos por avanzar en este tema tan importante, no se ha podido concretar nada al respecto. En ciertos años se han realizado propuestas de programas para la atención de niños y adolescentes sobresalientes, pero sin consolidación. El más significativo fue el programa

CAS (Capacidades y Aptitudes Sobresalientes) por medio del cual se logro despertar el interés en este tema en varios estados de la República pero no se han logrado Se ha planteado que cada estado de la República diseñe su estrategia de acción, sin embargo hasta este momento aún se está trabajando para definir las principales líneas de acción debido a que cada estado pone en marcha proyectos que utilizan marcos teóricos que no son adecuados para la población mexicana.

Como parte del Programa Nacional de Fortalecimiento de la Educación Especial y de la Integración Educativa de la SEP, en el periodo 2006-2007, como complemento a la formación continua de los profesionales que tienen a su cargo la educación especial, se lanzan una serie de talleres y cursos, nacionales y estatales que consideran entre algunos de sus principales temáticas la atención a los estudiantes sobresalientes desde nivel preescolar hasta secundaria. Lo más relevante de este programa de formación continua, es que la atención a los estudiantes sobresalientes esta considerada casi a la par que la atención a estudiantes con alguna discapacidad.

Dentro de los objetivos estratégicos del Programa Nacional de Fortalecimiento de la Educación Especial y de la Integración Educativa de la subsecretaria de educación básica, alineados al plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, se contempla garantizar que la población con necesidades educativas especiales vinculadas a la discapacidad y las aptitudes sobresalientes, accedan a servicios de calidad que propicien su inclusión social y su desarrollo pleno.

En la actualidad, el entorno ha cambiado un poco y se ha estado hablando de niñas y niños con algún tipo de talento en México. Podemos mencionar programas implementados, unos por el gobierno y otros por instituciones educativas, que atienden a niñas y niños con la idea central de potenciar el talento que poseen, sin embargo dichas iniciativas aún carecen de investigación previa sobre el tema.

Como conclusión a lo anterior se deduce que en México aun falta un largo camino por recorrer en términos del tratamiento de los alumnos con capacidades sobresalientes. Para comenzar, hace falta hacer *explícito* de manera gubernamental el reconocimiento de esta población y su educación. Si esto lo comparamos con lo que los países más cercanos a México, en cuanto a clasificaciones de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) vemos que algunos de ellos tienen desde hace varios años estrategias para orientar y educar a los niños talento. Falta, de igual manera, investigación que haga referencia a temas relacionados y que den respuesta a las necesidades que México tiene al respecto.

Propuesta

La situación anterior provoca la necesidad de realizar investigación que atienda la diversidad, en particular, la atención de los niños con un talento especial.

Por otro lado, la capacidad de proceder de los estudiantes con un especial *talento en matemáticas* atrae la atención de la sociedad pues las necesidades tecnológicas del mundo actual demandan que se de una atención especial a aquellos que constituirán el eje principal del progreso técnico de nuestro país

En una investigación realizada por De Guzmán (n.d) se plantean algunas características generales de los especialmente dotados específicamente para Matemáticas. Entre las cuales se destaca de forma general: la habilidad para la resolución de problemas, la interpretación, transferencia y comunicación de ideas matemáticas y de un modo particular; habilidades propias del razonamiento matemático como lo son la generalización, deducción e inducción.

Pero es importante resaltar que todas estas características y otras que se derivan del trabajo de Renzulli (1978) o de Gardner (1983), entre otros, no se pueden aplicar directamente a los niños mexicanos puesto que, entre otros factores, el entorno cultural, educativo y familiar no es el mismo.

Por lo cual, en un futuro, este proyecto de investigación se dará a la tarea de identificar las características que definan a un talento mexicano en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Agudo, C., Fernández-Gaytán, L. y Mateos, R. (2006). Atención educativa al alumnado con sobredotación intelectual. *Práctica Docente*, *3*. Recuperado el 28 de marzo de 2008 de http://www.cepgranada.org/~jmedina/articulos/n3_06/n3_06_33.pdf

Ball, M., Benavides, M., Betancourt, J., Blanco, R., Castro, E., de Souza, D., Gutiérrez, L., Gutiérrez, M., Marshall, M., Martínez, P., Maz, A., Ríos, C., Rodríguez, L., Segovia, I., Soriano, E., Torralbo, M., Valadez, M., Vergara, M., Villarraga, M. y Villegas, J. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Recuperado el 31 de marzo de 2008, de http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/educacion_ninos_talento_iberoamerica.pdf

Bernal, E., (1997). Perspectivas multinacionales de la superdotación y la educación de los niños superdotados: la trilogía española. *Ideacción 10*. Recuperado el 28 de marzo de 2008 de http://www.centrohuertadelrey.com/rv/18/10-bernal.pdf

Covarrubias, P., (sf). La *concepción de los tres aros de Joseph Renzulli.* Recuperado el 4 de Septiembre de 2008, de http://www.redsobresalientes.com/documentosPDF/DEFINICI%D3N_DEL_SOBRESALIENTE_RENZULLI.pdf

Del Caño, M., (2001). Formación inicial del profesorado y atención a la diversidad: alumnos superdotados, *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *10*, 135-146

De Guzmán, M. (sf). *El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas.* Recuperado el 1 de Abril de 2008 de la base de datos de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

EURIDYCE (2006). *Medidas educativas especificas para promover la sobredotación en los centros escolares europeos*. Dirección General de Educación y Cultura. Disponible en http://www.eurydice.org

Gardner, H. (1993). *Inteligencias Múltiples.* Barcelona: Paidós.

Goleman, D. (1999). *Inteligencia emocional.* España: Kairos.

Organización de las Naciones Unidas (1948). *Declaración Universal de Derechos Humanos. Artículo 26*. Disponible en: http://www.un.org/es/documents/udhr/index.shtml

Renzulli, J.S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan, 60* (3), 180-184

Sternberg, R. (1981). A componential theory of intellectual giftedness. *Gifted Child Quarterly, 25 (2),* 86-93.

SEP (2003). *Una Propuesta de Intervención Educativa para Alumnos y Alumnas con Aptitudes Sobresalientes*. México. Disponible en:

http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/sitio/start.php?act=sobresalientes&sec=ava

FORMACIÓN DEL CONCEPTO LÍMITE MEDIANTE DOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN: REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y EL USO ALGEBRAICO

Noé Camacho Calderón, Catalina Navarro Sandoval, Miguel Díaz Cárdenas, Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero México
noeilyn_21@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Medio

Resumen. *Uno de los problemas centrales que se presentan, para abordar el tema de límite, es sin duda cuando nos enfrentamos al concepto de infinito. Generalmente el docente al enseñar el concepto de infinito utiliza metáforas didácticas basadas en conjuntos muy grandes, esto para fijar la idea de infinitud. De acuerdo con la real academia española, esto permite crear la noción de infinito en un lenguaje cotidiano, lo que lleva a generar una mala formación de este concepto, dentro de un lenguaje matemático, ya que la imprecisión del lenguaje cotidiano hace ver al concepto de infinito muy vago y se aleja de la idea matemática como unidad total (Ortiz, 1994). El interés de nuestro trabajo se centra precisamente en el diseño de actividades, donde el estudiante pueda realizar y observar un proceso infinito, a través de ejemplos geométricos donde se presente la situación límite (proceso infinito culminado), permitiendo la formación del concepto de límite.*
Palabras clave: tendencia, proceso infinito, formación, situación límite

Antecedentes

Respecto al tema de límite se han realizado diversas investigaciones, de las cuales hemos detectado al menos cuatro campos, el epistemológico, el cognitivo, de corte histórico y el didáctico, en este último se han realizado investigaciones donde el estudio de interés, se centra sobre algunas nociones que estudiantes y profesores tienen respecto al concepto de límite, sin embargo pocas son las investigaciones que se interesan en estudiar el proceso enseñanza-aprendizaje sobre dicho concepto dentro del aula, dado que el interés de nuestro trabajo se enfocará a contribuir en el campo didáctico, se realizó un análisis de algunas investigaciones sobre dicho concepto, dentro de las cuales se encuentran De la Torre (2002) y Páez (2005) donde se menciona que son notorias las deficiencias de la enseñanza de las matemáticas, en los distintos niveles de escolaridad, desde el básico elemental hasta el superior. Particularmente problemáticos son los conceptos asociados con la noción de infinito y de acuerdo con la investigación de Juter (2005) se menciona que los estudiantes experimentan a menudo dificultades cognoscitivas cuando se encuentran en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, esto debido a que se centran en la solución de problemas y no en la teoría. En este mismo sentido la investigación de Dubinsky (1996) señala que no existe ninguna investigación que se preocupe por ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que tienen con el proceso aprendizaje del concepto de límite. Por ejemplo, en la investigación que realiza Sánchez y Contreras (1997), dentro de los resultados obtenidos, se puede apreciar que los profesores necesitan de un material didáctico para poder comprender e interiorizar el concepto de límite. Sin embargo, la investigación de Fernández (2000) encuentra que el uso de un asistente matemático (software), puede a portar a la enseñanza de la matemática una mejor comprensión del alcance de sus métodos y su empleo y en consecuencia una mayor motivación para el estudiante. Por otro lado, la investigación de Miranda (1999), Blázquez y Ortega (2001), reportan que es necesario utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones desde el principio de la enseñanza, para evitar que los alumnos obtengan visiones sesgadas de los conceptos.

A partir de este análisis surge nuestra hipótesis de trabajo, consideramos que los estudiantes necesitan ejemplos del tipo geométrico, para poder visualizar el proceso infinito en límites del tipo $lím_{x\to\infty} f(x)$, apoyados por un asistente matemático y así como el uso de registros de representaciones gráficas y algebraica, antes de abordar el tema de límite en el contexto de las funciones y a partir de aquí puedan llegar a formar el concepto de límite.

Problemática y fundamentos

La problemática que detectamos está presente en las dificultades que presentan los estudiantes (no toman en cuenta el proceso infinito, lo ven como una sustitución) en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, en particular límites en el infinito, al momento de trabajar con esta noción, de acuerdo a los planes y programas de estudio y libros de texto, éste se aborda de manera algebraica y gráfica (se cae en uso abusivo de lo algorítmico), no se trabaja con representaciones geométricas donde el estudiante pueda visualizar el proceso infinito, es decir, el concepto de límite no se trabaja en otro contexto, sólo se trabaja en el contexto de las funciones, limitando a los estudiantes a una formación aceptable del concepto.

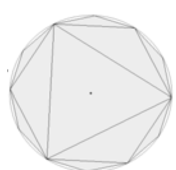
Por lo que, el objetivo central de este trabajo es diseñar actividades donde el estudiante interactué con representaciones geométricas, involucrando representaciones gráficas y algebraicas, para llevar a cabo la formación del concepto de límite. Para el diseño de las actividades se tomó en cuenta a las teorías de Rubinstein (citado en Davýdov, 1982) y Duval

(1999), para describir si el estudiante puede llegar a transformar la información que se manipula en un registro a otro registro de representación, es decir si se presenta un cambio de conocimiento Duval (1999). En este mismo sentido lo que señala Rubinstein se tomará en cuenta para definir los rasgos esenciales que se llevan a cabo en la formación de un concepto, consideramos que para la formación del concepto de límite, los rasgos esenciales son los siguientes:

1. Tendencia (proceso infinito), infinito potencial.
2. Asegurar la tendencia $|x - a| < \varepsilon$
3. Proceso infinito culminado (abstracción), infinito actual.
4. La situación límite.

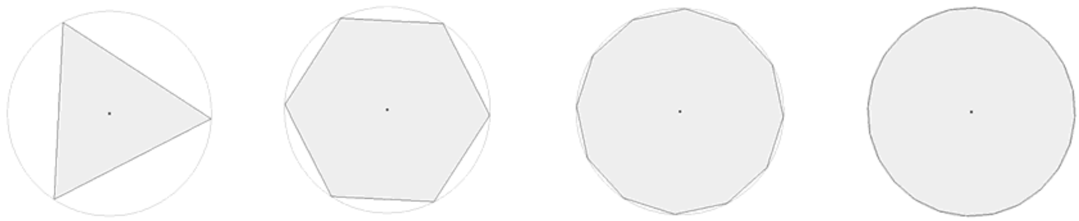
El primer rasgo esencial significa que debe haber una tendencia hacia algo, es donde entra en juego el infinito potencial. Por ejemplo:

- Si inscribimos un polígono regular con un número *n* cualquiera de lados en una circunferencia tenemos;



Podemos observar que el perímetro del polígono tiende al perímetro del círculo.

- El segundo rasgo va de la mano con el primero, es decir, se debe asegurar (por ejemplo, en el caso del polígono regular con un número *n* cualquiera de lados inscrito en un círculo, y haciendo variar a *n* infinitamente), que la diferencia del
  Perímetro de las dos figuras va disminuyendo, hasta que llega a ser menor que cualquier número positivo tan pequeño como se elija en esta caso $|P_c - P_p| < \varepsilon$.



- En el tercer rasgo esencial es donde entra en juego el infinito actual, prescindiendo de la dificultad para llegar a ese algo y abstrayendo así que el proceso culmina en ese algo, es decir $P_c = P_p$.

- El cuarto rasgo esencial es donde se lleva a cabo la situación límite, es decir, la situación de un proceso infinito culminado.

Una vez identificado los rasgos esenciales se lleva a cabo el diseño de las actividades las cuales son las siguientes:

El objetivo de estas actividades es propiciar la interacción del alumno en distintos registros de representación, con la intención de obtener los rasgos esenciales del concepto de límite que le permitan formar dicho concepto.

Diseño

Actividad 1

El objetivo de esta primera actividad, es introducir al estudiante, a identificar la tendencia de un proceso infinito, presentándose, la etapa de análisis.

Dada una hoja de papel, corte la mitad y guarde la otra parte, ahora de la mitad de hoja que quedo, corte otra vez a la mitad y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

1. Explique qué sucede en la operación número 10.

2. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte de la hoja que se va cortando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va cortando?

Actividad 2

El objetivo de esta actividad, es que el estudiante logre identificar la representación geométrica de la actividad 1, ayudándole a encontrar los rasgos esenciales y producir el cambio del conocimiento expresado en la actividad anterior, se sigue presentando la etapa de análisis permitiendo la etapa de la síntesis.

A) 1. Dado un cuadrado de área 1, ilumine la mitad, ahora de la mitad del cuadrado que quedo sin iluminar, ilumine la mitad y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

2. Explique qué sucede en la operación número 10.

3. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte del cuadrado que se va iluminando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va iluminando?
   c) si se sumarán todas esas partes de áreas, ¿A qué sería igual el área total?

B) 1. Imagínese que tiene un círculo, ilumine un tercio, ahora ilumine un tercio de uno de los tercios sobrantes y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

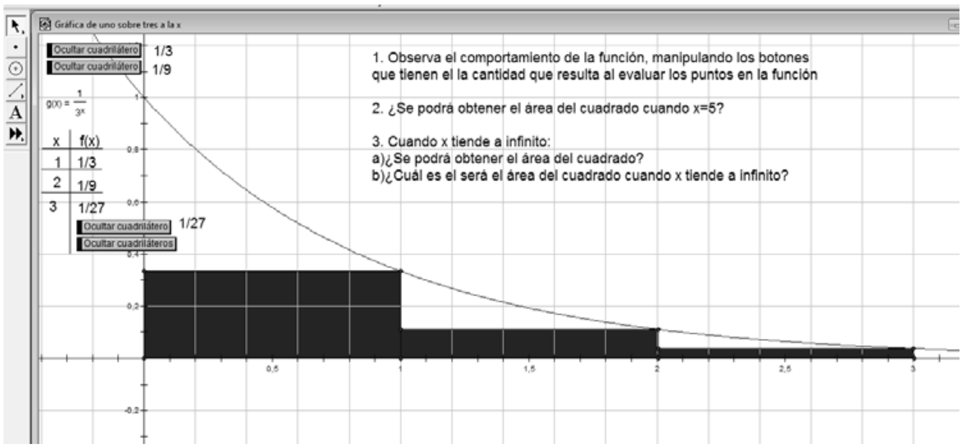
2. Explique qué sucede en la operación número 10.

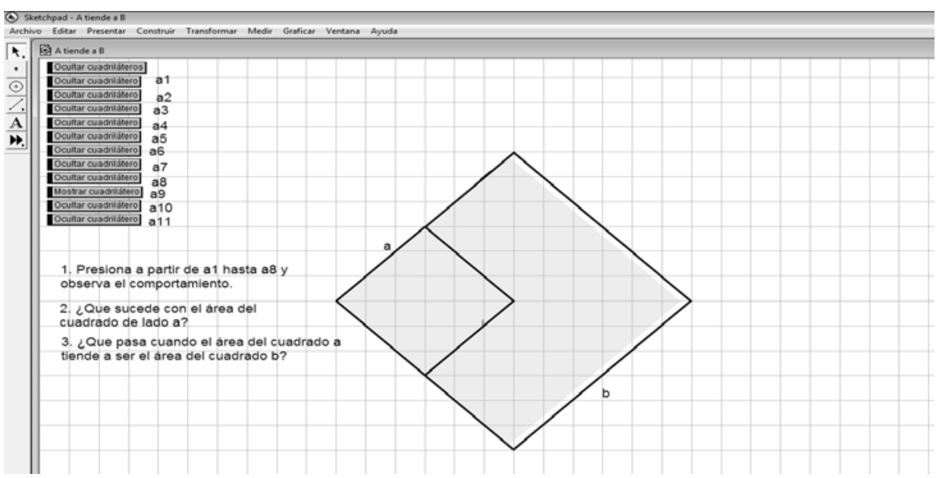
3. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte del círculo que se va iluminando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va iluminando?

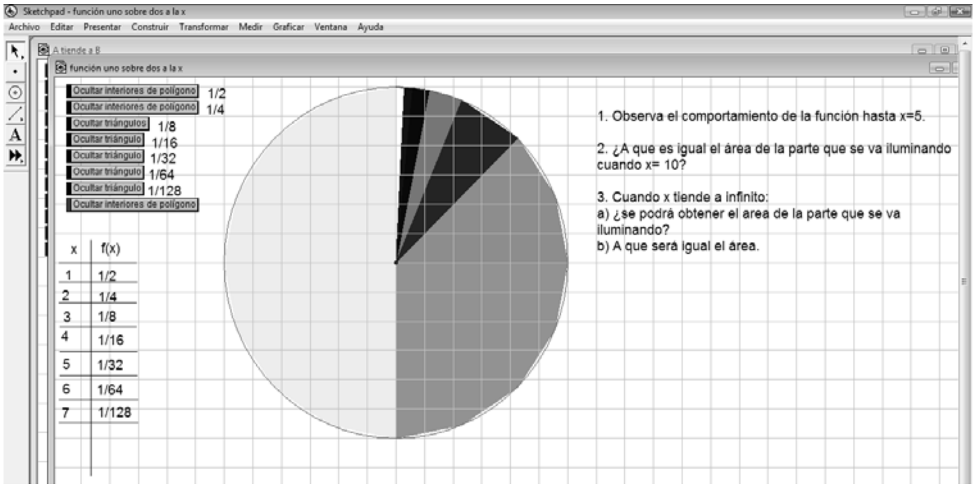
c) si se sumarán todas esas partes de áreas, ¿A qué sería igual el área total?

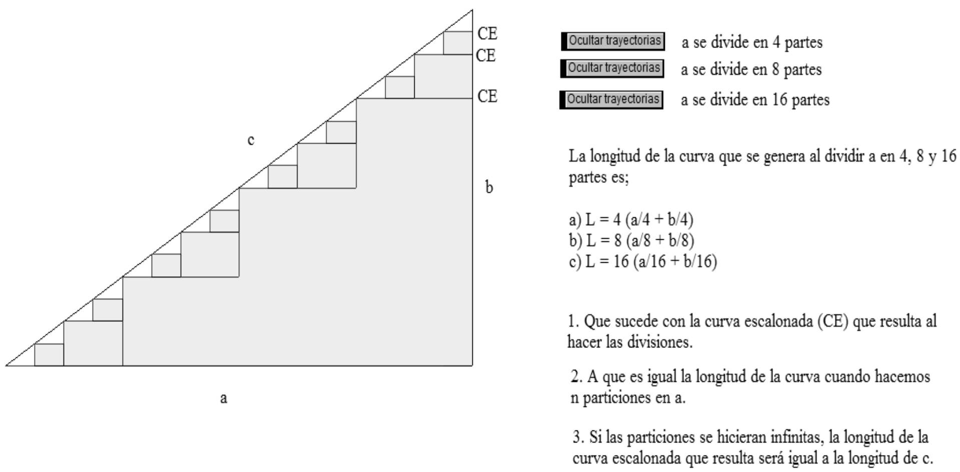
Actividad 3

El objetivo de la actividad 3, es permitir al estudiante la abstracción de los rasgos esenciales que le permitan llegar a la situación límite, es decir, la etapa de la formalización.









A manera de resultados

Cabe mencionar que como la investigación se encuentra en proceso, nos encontramos hasta el momento en la etapa de validación de estas actividades, se aplicó una prueba piloto a un grupo de estudiantes de la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero, a partir de la cual observamos en los resultados obtenidos, que los estudiantes si lograron identificar los rasgos esenciales para identificar la situación límite a la que se quería llegar, en la etapa de formalización pudieron identificar que no toda tendencia nos llevará a un límite, lo cual nos deja claro que ideas intuitivas de límite pueden a veces llevar a contradicciones con conceptos matemáticos válidos.

Consideramos importante que al momento de enseñar el concepto de límite, es necesario que se presenten actividades de este tipo (en este contexto) al estudiante para ayudarlo a entender el concepto de límite en el contexto de las funciones.

Referencias bibliográficas

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de Representación en la Enseñanza del Límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(3), 219-236.

Dubinsky, E. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior 15*, 167-192.

De la Torre (2002). Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Obtenido en marzo 17, 2008, de http://matematicas.udea.edu.co/~edumath/LINKS/presentacion.htm.

Paéz, R. (2005). *Reconstrucción del Concepto de Límite*. Obtenido en marzo 28, 2008, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2728884.

Davýdov, V. (1982). *Tipos de Generalización en la Enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. *Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 3*(2), 171-187.

Juter, K. (2005). Limits of functions- how do students handle them? *Online Jurnal Abstract Information – Sabinet Online, 11-20.*

Miranda, R. (1999). *Estado que guarda la Noción de Límite en Estudiantes de Secundaria. Trabajo del 50% de maestría.* Unidad Académica de Chilpancingo.

Ortiz, R. (1994). El Concepto de Infinito. *Boletín 1*(2). Cuaderno titulado Las Paradojas en Matemáticas. México.

Sánchez, C. y Contreras, A. (1997). La Relación Didáctica Profesor-Estudiante en la Enseñanza del Concepto de Límite de una Función. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* 59-63. México.

EVALUANDO EL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Adriana Correa Zeballos, Berta Chahar, María Esther Nieva, Gregorio Figueroa, Ricardo Gallo, Lisa Holgado
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia- Universidad Nacional de Tucumán
Argentina
czeballos@fbqf.unt.edu.ar, bchahar@fbqf.unt.edu.ar
Campo de investigación: Estudios Socioculturales
Nivel: Superior

Resumen. *En las universidades la deserción estudiantil ha originado numerosos estudios y no pocos debates. El informe de la Comisión ad hoc (2005) de la UNT, revela excesiva permanencia y alta deserción. En una primera etapa, se analizó el rendimiento académico en el ciclo básico de la Facultad de Bioquímica de la UNT (Correa Zeballos, Chahar, Holgado, Figueroa, Sued, Nieva, 2006) identificándose factores asociados a esta problemática. En una segunda etapa se plantea como objetivo mostrar una metodología de estudio del desempeño académico en toda la carrera, tratando de determinar si los factores identificados son los mismos o difieren total o parcialmente. En esta presentación se hace el seguimiento de la cohorte 1997, utilizando una metodología de estudio de cohorte retrospectivo y aplicando distintos índices y tasas, de donde se infiere que el rendimiento académico de la cohorte analizada no se ajusta a los tiempos previstos en el plan de estudio, revelando baja tasa de egreso. Esto nos permitirá, proponer nuevas estrategias de enseñanza, particularmente de la Matemática por su carácter formativo.*
Palabras clave: rendimiento académico, evaluación, deserción, rezago, graduación

Introducción

Entre los problemas que enfrentan las instituciones de educación superior, en la actualidad, figuran la deserción y el rezago de los estudiantes a lo largo de las carreras de grado. ¿Es éste un problema asociado a la eficiencia del sistema educativo? Se sabe que la deserción y el rezago están relacionados con el contexto social, cultural y económico de la región y también con el sistema educativo, pero no sabemos en qué medida incide en la eficiencia del mismo (Nieva, 2003).

En el ámbito institucional el bajo rendimiento académico de los estudiantes representa un costo elevado para las universidades, revela además bajos indicadores de eficiencia institucional.

Este trabajo aspira a ser un avance sobre esta problemática, para ello se analiza el desempeño académico de la cohorte 1997 de alumnos de la carrera de Bioquímica de la Universidad Nacional de Tucumán. La cohorte está constituida por estudiantes de la región noroeste de Argentina.

Objetivo

Evaluar el rendimiento académico de la cohorte 1997 a lo largo de carrera de Bioquímica de la UNT.

Marco Teórico

Es conocida la preocupación del Estado por el alto índice de deserción universitaria y dado su interés volcamos las opiniones de Tatti (2007) y Navarra (2003) sobre el tema.

Según Tatti (2007) las autoridades deben buscar estrategias que acerquen la escuela media a la universidad para que no se conviertan en dos universos aislados, a efectos de brindar al alumno herramientas de estudio que le permitan orientar sus opciones vocacionales, mejorar las condiciones de ingreso y su rendimiento académico.

Para el segundo de los autores citados, hace algunas décadas los estudiantes dudaban entre una carrera u otra, mientras que, en la actualidad, esta disyuntiva está siendo reemplazada por una compleja sintomatología vocacional, representada por la fragilidad y la falta de consistencia en los intereses, la apatía y la desmotivación, las conductas fóbicas ante el aprendizaje, las dificultades para aprender (independientemente del nivel intelectual), el abandono de los estudios, la sobre exigencia interna, el temor ante el mundo exterior, la desvalorización de los propios intereses, la desconexión emocional y la desubicación frente a la realidad.

Como "medida del rendimiento académico" en la Universidad se debieran abordar tres dimensiones: éxito, retraso y abandono. Estudios realizados señalan que la selección tiene que ver más con las aptitudes intelectuales que con los aspectos motivacionales en el examen de ingreso, pero dentro del Sistema Educativo, la motivación y el compromiso con el estudio son las variables que tienen peso al determinar el rendimiento en la enseñanza superior. En general se muestra un escaso interés político y científico por la problemática de los estudiantes en los primeros años de las carreras, pero existen numerosos estudios sobre el rendimiento académico y las tasas de abandono. (Germani y Sautú, 1965), (Latiesa, 1992).

En estudios anteriores realizados en el ciclo básico en la Facultad de Bioquímica de la UNT sobre la deserción estudiantil (Nieva, 2003, op.cit.), (Correa Zeballos, 2006, op.cit.) se detectó que esta problemática se relaciona con las condiciones individuales del alumno: conocimientos previos, hábitos de estudio, nivel económico y educativo de los padres, adaptación a la vida universitaria y disponibilidad de tiempo, entre otras, y con el contexto institucional, que incluye aspectos tan variados como: las propuestas de enseñanza, la relevancia de los planes de estudio, la orientación académica y el acceso al material de estudio. Estas conclusiones coinciden, en gran parte, con investigaciones realizadas por otras universidades y con la bibliografía consultada. La Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) corrobora las expresiones anteriores al publicar los resultados de la evaluación externa de la Universidad Nacional de San Juan, señalando la magnitud del problema y descartando las explicaciones simplistas, como las derivadas únicamente de la situación económica.

Por otra parte, como "medida de la eficacia del Sistema Educativo", el análisis cuantitativo de la deserción sólo da cuenta del efecto, que no aporta ninguna luz acerca de las acciones que lo produjeron. En algunos estudios se registra una mayor tendencia al abandono en las instituciones que no tienen examen de ingreso (Parjanen, 1979), (Levy-Garboua, 1986), pero no se explicitan análisis posteriores al ingreso de los procesos vinculados con el logro de los objetivos educacionales.

Metodología

Estudio de tipo retrospectivo, descriptivo que se aplicó a la cohorte 1997 de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Se confeccionaron tablas y gráficos.

Tratamiento y análisis de los datos

La matriz de datos diseñada para esta investigación se ajusta a las siguientes premisas:

- Para la carrera de Bioquímica se hace el seguimiento de la cohorte 1997 a lo largo de la carrera.
- Cada fila de la matriz está reservada para un estudiante que haya ingresado en la cohorte estudiada, que representa la unidad de análisis.

- Las columnas de la matriz se reservan para las variables, que se desprenden del marco teórico. Estas variables se dividen en dos grandes grupos:

  - las que se obtienen directamente de la base de datos existente en la facultad

  - las que se calculan a partir de éstas.

- El año i "académico" que se considera aquí es el que abarca desde el 1 de abril del año i, hasta el 31 de marzo del año (i + 1). Por ejemplo: las materias aprobadas por el alumno en el año 2000, son las aprobadas desde el 1 de abril de 2000 hasta el 31 de marzo de 2001. De igual modo se procederá con las restantes variables.

Variables que se obtienen de la base de datos reorganizada

R = Número de exámenes rendidos por el alumno en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión, con i = 1997, 1998,…, 2005

A = Número de exámenes aprobados por el alumno en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión.

Z = Número de aplazos en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión.

M = promedio de las notas de exámenes rendidos en el año i.

C = Número de materias exigidas por la currícula hasta el año i.

Indicadores construidos a partir de la base de datos reorganizada

P = Proporción de materias aprobadas hasta el año i, que se calcula mediante la siguiente fórmula

$$P = \frac{\sum_{j=1997}^{i} A_j}{C_i}$$ con i = 1997, 1998, …, 2005

E = Eficiencia en el año i de cada alumno, que se calcula mediante la siguiente fórmula

$E = \frac{A}{R}$ Para esta variable se considera al grupo de alumnos que rindió por lo menos una materia.

La tabla siguiente presenta una muestra de la matriz de datos de la investigación, informando a modo de ejemplo, el seguimiento de diez alumnos de la cohorte a lo largo de dos años.

Matriz de datos de alumnos de la cohorte 1997

Alumno	Año 1997							Año 1998							...
	R	A	Z	M	C	P	E	R	A	Z	M	C	P	E	...
1	2	0	1	1	6	0	0	2	0	1	1	12	0	0	...
2	8	2	1	2,13	6	33	0,66	2	0	0	0	12	17	-	...
3	3	2	0	3,67	6	33	1	6	2	2	3	12	33	0,5	...
4	2	1	0	3	6	17	1	2	1	0	2	12	17	1	...
5	4	1	2	2,25	6	17	0,33	4	2	0	3,25	12	25	1	...
6	0	0	0	0	6	0	-	0	0	0	0	12	0	-	...
7	4	3	0	6,5	6	50	1	6	5	0	7,83	12	67	1	...
8	0	0	0	0	6	0	-	0	0	0	0	12	0	-	...
9	5	4	0	3,8	6	67	1	4	2	1	3,75	12	50	0,66	...
10	1	0	1	2	6	0	0	4	1	2	2,5	12	8	0,33	...

Fuente: Datos reorganizados a partir de la información de sección alumnos

Resultados

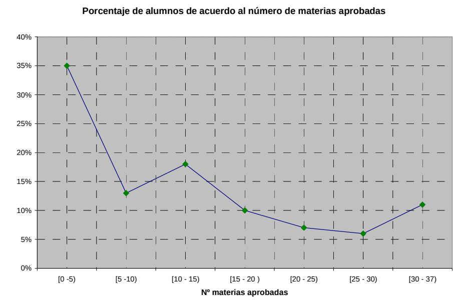
Se presenta el análisis de tres de las variables consideradas: Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de materias aprobadas, Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de aplazos y Eficiencia en los exámenes. Para esta última variable el análisis se registra año a año.

Tabla 1: Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de materias aprobada.

Nº materias aprobadas	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 -5)	135	35 %
[5 -10)	49	13 %
[10 - 15)	70	18 %
[15 - 20)	37	10 %
[20 - 25)	28	7 %
[25 - 30)	21	6 %
[30 - 37)	41	11%
Total	381	100 %

Fuente: Base de datos de Sección Alumnos

Gráfico 1: Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de materias aprobadas.



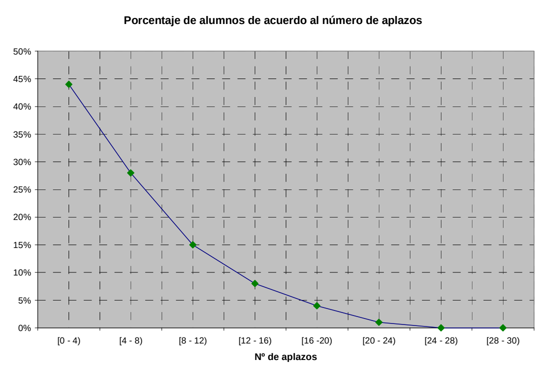
Se observa que el 11% de los alumnos que inician la carrera logran completarla en los nueve años de seguimiento de la cohorte, mientras que el 35% sólo rinden hasta 4 materias en el mismo período.

Tabla 2: Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de aplazos

Nº de aplazos	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 - 4)	167	44%
[4 - 8)	108	28%
[8 - 12)	56	15%
[12 - 16)	30	8%
[16 -20)	14	4%
[20 - 24)	4	1%
[24 - 28)	1	0%
[28 - 30)	1	0%
Total	381	100%

Fuente: Base de datos de Sección Alumnos

Gráfico 2: Porcentaje de alumnos de acuerdo al número de aplazos



Se puede apreciar que el porcentaje más alto (44%) se da entre alumnos que tienen entre 0 y 3 aplazos, siendo mínimo el porcentaje de estudiantes con más de 20 aplazos.

Tabla 3: Eficiencia año 1997

Eficiencia 97		
Eficiencia 97	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	5	6%
[0.2 , 0.4)	4	5%
[0.4 , 0.6)	6	7%
[0.6 , 0.8)	11	13%
[0.8 , 1)	56	68%
Total	82	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 3: Eficiencia año 1997

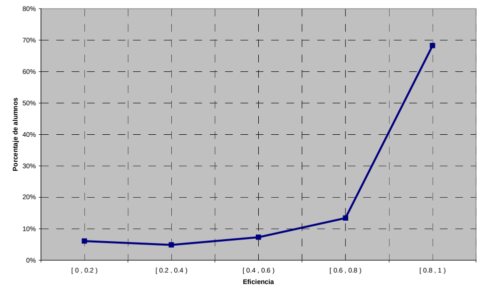


Tabla 4: Eficiencia año 1998

Eficiencia 98		
Eficiencia 98	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	1	1%
[0.2 , 0.4)	1	1%
[0.4 , 0.6)	0	0%
[0.6 , 0.8)	31	33%
[0.8 , 1)	62	65%
Total	95	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 4: Eficiencia año 1998

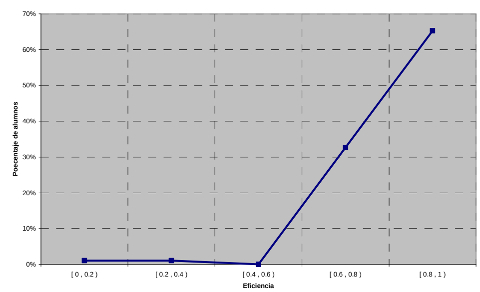


Tabla 5: Eficiencia año 1999

Eficiencia 99		
Eficiencia 99	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	4	4%
[0.2 , 0.4)	7	7%
[0.4 , 0.6)	12	13%
[0.6 , 0.8)	18	19%
[0.8 , 1)	54	57%
Total	95	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 5: Eficiencia año 1999

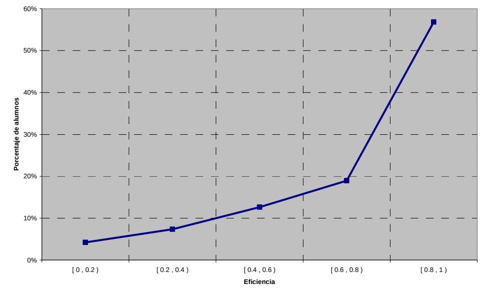


Tabla 6: Eficiencia año 2000

Eficiencia 00		
Eficiencia 00	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	4	4%
[0.2 , 0.4)	5	5%
[0.4 , 0.6)	14	15%
[0.6 , 0.8)	24	25%
[0.8 , 1)	48	51%
Total	95	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 6: Eficiencia año 2000

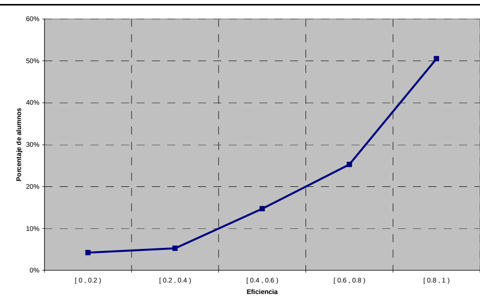


Tabla 7: Eficiencia año 2001

Eficiencia 01		
Eficiencia 01	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	8	10%
[0.2 , 0.4)	4	5%
[0.4 , 0.6)	11	14%
[0.6 , 0.8)	4	5%
[0.8 , 1)	52	66%
Total	79	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 7: Eficiencia año 2001

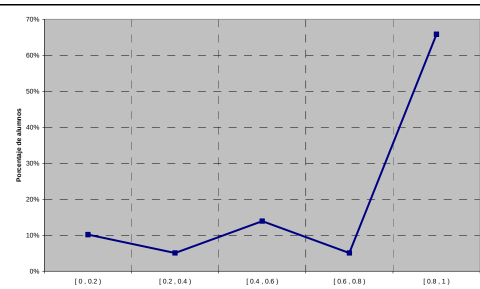
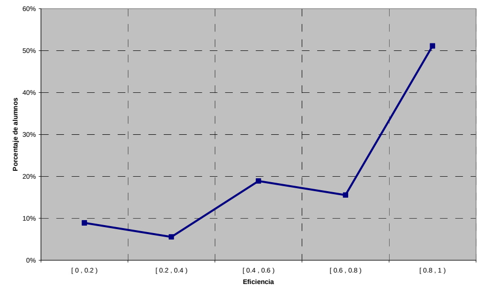


Tabla 8: Eficiencia año 2002

Eficiencia 02		
Eficiencia 02	**Nº de alumnos**	**Porcentaje de alumnos**
[0 , 0.2)	8	9%
[0.2 , 0.4)	5	6%
[0.4 , 0.6)	17	19%
[0.6 , 0.8)	14	16%
[0.8 , 1)	46	51%
Total	90	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 8: Eficiencia año 2002



Del análisis de estas tablas y gráficos se puede apreciar una notable eficiencia de los estudiantes en los exámenes, pero en contrapartida no logran avanzar y cumplir con lo establecido por el plan de estudio en cuanto al número de materias aprobadas por año.

Conclusiones

Del análisis de la información se desprende que el desempeño académico de los estudiantes de la cohorte 1997 no se corresponde con lo establecido por el plan de estudio. Los estudiantes aprueban aproximadamente la mitad de las materias estipuladas por el plan, mostrando notable efectividad en los exámenes, lo que caracteriza a este grupo de estudiantes como una cohorte con fuerte rezago y consecuente baja tasa de egreso. De acuerdo a estos resultados se deberían implementar acciones tendientes a mejorar la articulación con el nivel medio, ampliando los cursos de nivelación; intensificar la orientación vocacional, reforzando el conocimiento de la carrera y lograr una mejor ambientación de los estudiantes a la vida universitaria a través de tutorías y programas de becas, entre otros.

Referencias bibliográficas

Correa Zeballos, M., Chahar, B., Holgado, L., Figueroa, G., Sued, C. y Nieva, M. (2006). Estudio preliminar de la deserción y el rezago en una facultad de ciencias. *XIII Enseñanza de la Matemática* *en carreras de Ingeniería.* Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.fio.unam.edu.ar/emci.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid, UNESCO: Santillana.

Germani, G. y Sautu, R. (1965) *Regularidad y origen social en los estudiantes universitarios*. Trabajos e Investigaciones del Instituto de Sociología, Colección Estructura 3 / 4. Recuperado el 21 de diciembre de 2007, de http://www.iigg.fsoc.uba.ar/germanit.htm - 27k

Latiesa, M. (1992). *El factor educacional como causa potencial de la deserción en primer año de la universidad.* Recuperado el 21 de diciembre de 2007, de http://www.monografias.com/trabajos31/factor-educacional-causa.../factor-educacional-causa-desercion-universid.-46k-

Levy-Garboua, L. (1986). *Selección e ineficacia en la Enseñanza Superior.* En M. Latiesa (Comp.) Demanda de educación superior y rendimiento académico. Madrid: CIDE.

Navarra, G. (2003). Los nuevos problemas vocacionales. Diario La Nación. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.lanacion.com.ar/03/09/13/sl_527073.asp

Nieva, M. E. (2003). Factores asociados la deserción. Un estudio explicativo. *II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería*. Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.fi.uba.ar/inmat/tef/Nieva.pdf.

Parjanen, M. (1979. Learning, Earning and Withdrawing. On Social Factors Afecting Higher Educational and Professional Career. Tampereen. Tampereen Yliopisto. *Acta Universitatis Tamperensis 104: Ser.* A

Tatti, V. (2007). El Gobierno busca una estrategia contra la deserción universitaria. *Diario Clarín*. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.clarin.com/diario/2003/09/07/s-04401.htm

Universidad Nacional de Tucumán. Comisión ad hoc. (2005). La UNT en crisis. *Contexto*, 287. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.contexto.com.ar/nota.asp.

CÓMO INTERVIENEN LAS ESTRUCTURAS DEL LENGUAJE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS ESCRITOS VERBALMENTE

María Guadalupe Lomelí Plascencia
ITESM Campus Guadalajara México
glomeli27@gmail.com
Campo de investigación: Lenguaje matemático Nivel: Medio

Resumen. *La intención de este estudio fue identificar dificultades ocasionadas por la mediación del lenguaje en la solución de problemas. Particularmente, en los procesos que los alumnos de preparatoria realizan para modelarlos y cuáles elementos del lenguaje causan dificultades en este proceso. Se revisó, aplicando el método clínico, si los alumnos daban indicios de comprensión del problema, si los conceptos incluidos les eran familiares, cómo explicaban el planteamiento del problema, cómo justificaban lo que realizarían para resolverlo, si era claro qué se iba a lograr al realizar cierto procedimiento, y si lo que manifestaban (verbalmente) que iban a realizar sí fue lo que realizaron por escrito.*
Palabras clave: lenguaje, problema, conceptos, comprensión

En el proceso enseñanza aprendizaje de las Matemáticas suelen encontrarse problemas de diversa índole, uno de los más frecuentes es el que se genera por las dificultades con el lenguaje. Éste se hace evidente en diferentes momentos durante el trabajo en el aula, por ejemplo, cuando se pide a los alumnos que lean su libro de texto y a cambio se recibe el comentario "ya leí, pero no entiendo" o cuando se requiere la "traducción" de lo expresado con símbolos, es decir, de lenguaje algebraico al verbal.

Esto necesariamente hace que, como profesor, se piense que los alumnos no comprenden correctamente lo que leen. Verificar la comprensión, no es tarea fácil, porque es una operación mental que puede manifestarse de diferentes formas, pero una muy sencilla es que el alumno pueda expresar lo que leyó, de manera fluida y si es posible, dar ejemplos referentes al tema. De acuerdo con Ander-Egg (1999, p. 55) comprensión es el "conocimiento más o menos profundo del significado de algo…la operación por la cual un sujeto conoce lo que le es comunicado y puede servirse de las ideas, habilidades o destrezas que le han sido transmitidas."

Otra manifestación de la falta de comprensión, se presenta cuando los alumnos deben resolver problemas de aplicación, expresados en palabras, que implican por ejemplo, ecuaciones de primer o segundo grado y sistemas de ecuaciones, incluso con los meramente aritméticos. Son capaces de resolver operaciones algebraicas, ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas, pero tienen dificultad para poder construir la(s) ecuación(es) que modela(n) la situación de interés.

Se piensa que dicha dificultad puede deberse, entre otras, a que hay palabras cuyo significado desconocen o comprenden deficientemente, por lo que las pasan por alto y puede suceder que sean clave para resolver el problema, por ejemplo, cuando se habla de enteros consecutivos y no se conoce el significado de "consecutivos". Esas palabras frecuentemente son conceptos matemáticos.

El estudio de los conceptos matemáticos requiere de especial atención, ya que su buen uso facilita el trabajo matemático práctico, pero quizá no se les da la importancia o el tratamiento adecuado. De acuerdo con Vergnaud (citado en Carraher, Carraher y Schliemann, 2000), "los conceptos implican un conjunto de situaciones que les dan significado" (p. 152) y frecuentemente es lo que hace falta, que los conceptos matemáticos se deriven de un proceso de aprendizaje significativo para los alumnos.

Otra posibilidad es que pueden estar presentes conceptos que interpretan erróneamente y que dan lugar a una ecuación diferente a la necesaria, como confundir área con perímetro; en algunos otros casos, sucede que la traducción de lenguaje verbal al algebraico es incorrecta, porque asocian las palabras con una operación que no corresponde, como al mencionar "el doble de una cantidad" y en lugar de interpretar $2x$, se interpreta como $x+2$, o x^2. Llega a suceder que la pobreza de vocabulario también ocasiona conflictos, por ejemplo, pensar que la palabra "trivial" hace referencia a un concepto matemático por la simple razón de contener la sílaba "tri".

En cualquiera de las modalidades anteriores intervienen "los elementos que muchos entienden como los componentes básicos del pensamiento: los conceptos" (Martínez, 2006, p. 1), la compresión de un concepto permite hacer uso adecuado de él y poder ubicarlo en contextos diferentes al que se aprendió, pero que sean válidos, es decir, si un concepto se comprende es mucho más probable que se realice la transferencia del conocimiento.

Con frecuencia los alumnos de cualquier nivel educativo encuentren serias dificultades para resolver problemas de aplicación y la mayoría de las veces no se debe a que el alumno ignore cómo resolver una operación, ecuación o sistema, sino a lo complejo que le resulta determinar la ecuación o sistema que modele el problema planteado.

Es posible que esa complejidad se deba a que se pide a los alumnos un tipo de razonamiento que requiere instrumental simbólico más elaborado que el que poseen, pues además de manejar correctamente los números y signos, también necesita mayor grado de abstracción para hacer un uso eficiente de las literales.

Para lograrlo, requiere aplicar elementos que van más allá de lo meramente operativo, como menciona Alcalá (2002, p. 159) "…la mayoría de las dificultades que tienen los aprendices en la escuela, pueden considerarse de carácter semiótico", pues la matemática está impregnada del mundo de los signos.

Existen varios trabajos que sustentan que el lenguaje matemático constituye un eje para el aprendizaje de esta ciencia.

Se presentan a continuación, conceptos fundamentales para el desarrollo de este trabajo, lo que se entiende por cada uno de ellos, como una acotación de la interpretación teórica de los términos que se emplean.

Estructura lingüística*:* Palabra, frase o enunciado que tiene sentido y orden correcto desde el punto de vista de la sintaxis y de la semántica, de tal forma que comunica ideas.

Funciones del lenguaje: Según Cauty (2001), cualquier lenguaje cumple funciones de identificación de objetos y relaciones; clasificación, tratamiento y transformación de la información; programación y control de acciones.

Lenguaje algebraico: Forma de expresar matemáticamente, por medio de la combinación de signos, números y operadores, de manera formal, relaciones de tipo cuantitativo en las que intervienen variables y constantes.

Lenguaje matemático: Sistema simbólico con características y significados propios, que comunica y representa aspectos relacionados con las Matemáticas, tales como medir, comparar, valorar, relacionar, ordenar y clasificar; consta de conceptos, signos, operadores, gráficos y reglas para expresar ideas, de manera formal e informal.

Lenguaje verbal: Conjunto de sonidos articulados, pertenecientes a un código, que se emplean para formar palabras, frases y enunciados, con los que el ser humano comunica ideas, pensamientos y sensaciones.

Problema: De acuerdo con Woolfolk (1999), un problema es una situación en la que se intenta alcanzar cierta meta y se debe encontrar un medio para lograrlo. Mientras que Ander-Egg (1999) afirma que es una dificultad teórica o práctica, cuya solución es incierta. Cuestión que se trata de aclarar o resolver, planteada en forma interrogativa. Toda situación considerada como difícil de resolver, de ser dominada o solucionada.

Significado: Representación subjetiva de todo aprendizaje, el registro intelectual personalizado que cada individuo construye en su proceso de aprendizaje, en su proceso de apropiación del conocimiento ya existente (Alcalá, 2002).

Signo: Huellas gráficas de todo tipo, sonidos ordenados, iconos, elementos visibles y/o audibles.

Solución de problemas: Arte y técnica de lograr ciertos resultados en respuesta a una situación determinada, Woolfolk (1999).

En el aprendizaje de las Matemáticas intervienen varios factores, entre ellos están los mediadores y de manera determinante el lenguaje, que es considerado como el principal mediador (Vygotsky, 1996).

Para entender y comunicar ideas mediante un lenguaje, es necesario el pensamiento representacional, es decir, conocer a través de mediadores, tanto para entender, como para comunicar ideas, tales mediadores pertenecen al entorno simbólico en el que se crece como seres sociales, en cada momento se participa de la cultura de la sociedad a la que se pertenece (Alcalá, 2002).

Montoya (s/f) expone tres posturas respecto a la relación que hay entre lenguaje y pensamiento, en la primera se afirma que para Chomsky el lenguaje es antes que el pensamiento y no sólo eso sino que la capacidad mental se determina por el lenguaje. En contraparte están quienes señalan que primero es el pensamiento y luego el lenguaje, como una forma de liberarlo; entre sus exponentes se encuentra Piaget; por último, la tercera postura, dada a conocer por Vygostky, menciona que tanto el lenguaje, como el pensamiento, están ligados entre sí.

El lenguaje y el pensamiento forman una unidad dialéctica, en momentos avanzan paralelamente y en otros pueden entrar en contradicción, por ejemplo, cuando una forma verbal no adecuada impide el curso del pensamiento.

Pensamiento y lenguaje se relacionan, aunque en momentos avanzan paralelamente, su desarrollo no lo es, por lo que se puede afirmar que tienen diferentes raíces genéticas, esto propicia que no haya una correlación definida y constante entre ellos (Vygotsky, 1996). El lenguaje se desarrolla bajo las mismas leyes de las demás operaciones mentales, generalmente en cuatro etapas (Vygotsky, 1996). La primera es la fase primitiva o natural, corresponde al lenguaje preintelectual y al pensamiento preverbal. La segunda etapa se caracteriza porque el niño experimenta con lo que hay a su alrededor, ejercitando la inteligencia práctica. Verbalmente puede operar con cláusulas subordinadas.

En la tercera etapa se distinguen signos externos, operaciones externas que se llevan a cabo para solucionar problemas internos. Aquí el lenguaje es egocéntrico. La cuarta etapa es llamada de “crecimiento interno”, ya opera con relaciones inherentes y signos interiorizados. Es la etapa final del lenguaje interiorizado.

El desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje, es decir, por las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia sociocultural del niño (Vygotsky, 1996). El pensamiento y la palabra se relacionan, no como un hecho, sino como un proceso, como un continuo ir y venir del pensamiento a la palabra y viceversa, este proceso sufre cambios que pueden considerarse como desarrollo en el sentido funcional.

La práctica de cualquier actividad desarrolla habilidades, competencias, conocimientos y vocabulario, entre otros. De igual manera, durante el proceso educativo, los estudiantes, con la colaboración de profesores y compañeros, se apropian de un lenguaje que les permite involucrarse en las actividades propuestas y obtener los resultados esperados.

Una de las características del lenguaje matemático es la precisión, no ser ambiguo, es decir, que cada significado sea perfectamente definido; que a cada término o símbolo, sólo se le atribuya un significado y que cada significado sólo corresponda a un término o símbolo, lo cual no sucede en el lenguaje común, en el que una misma palabra puede tener diferentes significados y la misma idea se puede expresar de maneras diferentes.

Como sustento teórico de este estudio se afirma que el lenguaje es el principal mediador en el pensamiento, por lo cual se considera una variable determinante en el aprendizaje de las Matemáticas. El lenguaje, en este caso, puede ser visto desde dos enfoques, uno como el andamiaje que ofrece por ser el materno y el otro, como el que se necesita específicamente en la materia de Matemáticas. La Matemática puede ser concebida como lenguaje, es decir, como un sistema simbólico complejo, pero de rasgos peculiares (Alcalá, 2002)

El buen uso del lenguaje materno posibilita a los alumnos la comprensión de las instrucciones y contenidos en términos generales, mientras que el lenguaje matemático les permite transitar de las expresiones verbales a las algebraicas, sin tener dificultades. Los problemas para el alumno empiezan cuando "…las Matemáticas son tan incomprensibles como una lengua extranjera que no hablen" (Pimm, 1990, p. 25).

Por lo antes mencionado, es importante considerar que cada elemento que el profesor utiliza para comunicar Matemáticas, en cada una de las variantes del lenguaje, ya sea verbal, escrito o dibujado, debe cumplir con el cometido de llegar de manera significativa al alumno, que tenga sentido para él, pues de lo contrario, serán ideas que permanecerán flotando en el ambiente de la clase sin contribuir a una adecuada comunicación, sino al enrarecimiento del ambiente y a un monólogo que limita el aprendizaje.

Se realizó la investigación con alumnos de preparatoria de primer y segundo semestre, a quienes se entrevistó aplicando el método clínico, las entrevistas fueron video grabadas para su análisis posterior. En los grupos participantes se formaron tres estratos conforme a un puntaje obtenido de un cuestionario para identificar habilidades de lenguaje. En las entrevistas participaron alumnos de cada estrato.

Durante la grabación, los alumnos resolvían problemas similares a los que se trabajaron en el salón de clase, de acuerdo a su programa académico de Matemáticas, que se pudieran resolver con procedimientos aritméticos, aplicando ecuaciones de primer o segundo grado. Por ejemplo: "Martha y su hermana fueron de compras, entre las dos gastaron $ 3 453, pero Martha gastó el doble que su hermana, ¿cuánto gastó cada una?"

Cada uno de los alumnos fue entrevistado individualmente, recibieron el problema al inicio de la entrevista y se les pidió que fueran diciendo en voz alta qué harían para resolver el problema y por qué. Conforme ellos expresaban qué harían, se les preguntó acerca de sus decisiones, por ejemplo: "¿por qué consideras que debes aplicar una ecuación?, ¿cómo sabes que vas a necesitar dos variables?, ¿con qué operación asocias el doble de algo?, ¿qué indica la variable?, ¿qué es una variable?" etc.

Las preguntas iban encaminadas a conocer qué estaba entendiendo el alumno, cuidando de no hacer cuestiones que lo indujeran a dar cierta respuesta, pues antes que nada, el foco de interés era obtener evidencias de su pensamiento, del por qué de sus decisiones y cómo es que guía la elección de su procedimiento durante el proceso de solución de los problemas que se acostumbra vea en clase.

Se encontró que los alumnos confunden y olvidan conceptos fácilmente, por ejemplo, en sistemas de ecuaciones mencionan los nombres de los métodos y no el concepto de sistema de ecuaciones, difícilmente pudieron explicar qué era o en cuáles casos se aplica un sistema de ecuaciones, a pesar de ser un tema que ya antes se había revisado en clase y también forma parte de programas educativos previos.

Se les dificulta definir la variable, cuando se les pregunta acerca de la variable, inmediatamente responden que "es la x" y la asocian con un sustantivo, más que con una característica cuantificable del mismo.

En otros casos hay dificultades ocasionadas por la pobreza de la lengua materna y con mayor notoriedad de lenguaje propio de las Matemáticas, pues si se desconoce el significado de palabras como consecutivo, paralelogramo, producto, es un motivo para que el alumno plantee de manera incorrecta la ecuación que represente el problema que se pretende solucionar.

Si el alumno no resuelve un problema, frecuentemente se debe a obstáculos ocasionados por el lenguaje y no a dificultades matemáticas.

Uno de los hallazgos más interesantes es que existen dos categorías en las dificultades, una lo que dice y otra es que escribe, pues se encontró que algunos de los alumnos no aplican adecuadamente los conceptos al momento de hablar acerca de ellos, por ejemplo "ecuaciones dobles" en lugar de sistema de ecuaciones, aunque sí los aplican y operan adecuadamente; mientras que otros de los alumnos no escriben lo que expresan verbalmente, por ejemplo, mencionan el uso de una ecuación para resolver un problema, pero al momento de realizar el procedimiento, lo que escriben son operaciones aritméticas en las que ellos han "adivinado" el valor de la variable y ese proceso de adivinación es suficiente para que ellos argumenten el uso de ecuaciones.

Para atender los problemas que se derivan del mal uso del lenguaje matemático, no es posible elegir una sola estrategia ya que son varios los aspectos que intervienen y diferentes las manera de manifestarse, sin embargo, existen dos estrategias didácticas que pueden ser de gran valor para atender esta problemática: el trabajo cooperativo y la enseñanza recíproca, ambas planeadas para poner mayor énfasis en la solución de problemas aritméticos y algebraicos.

El trabajo cooperativo permite al alumno avanzar a su ritmo pero también integrarse más rápidamente al del grupo, de tal manera que los resultados sean mejores que si lo hace individualmente.

Combinada con el trabajo cooperativo se puede implementar la enseñanza recíproca, esta técnica fue desarrollada por Annemarie Sullivan Palincsar y por Ann L. Brown (1985), (citado en North Central Regional Educational Laboratory. *Reciprocal Teaching),* con la intención de ayudar a los alumnos a entender mejor lo que leen, se presenta en forma de diálogo inicialmente entre el profesor y los alumnos pero luego, el papel que cumple el profesor lo puede realizar alguno de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Editorial Graó.

Ander-Egg, E. (1999) *Diccionario de Pedagogía*. Buenos Aires: Editorial Magisterio del Río de la Plata.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (2000) *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Editorial Siglo Veintiuno Editores.

Cauty, A. (2001). Matemáticas y lenguajes. ¿Cómo seguir siendo amerindio y aprender la matemática de la que se tiene y se tendrá necesidad en la vida? En A. E. Lizarzaburu y G. Z. Soto (Eds.). *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina* (pp. 49-87). Madrid: Morata.

Castro-Arévalo, H.G. (s/f). *Las Matemáticas son otro cuento*. Colegio Departamental Mixto Puerto Salgar Cundinamarca Colombia. Consultado el 5 de diciembre de 2003 en: http://www.geocities.com/cuentomatematico/index.htm#inicio

Damisa, C. (s/f). *Matemática y lenguaje*. Obtenido el 5 de diciembre de 2003 de http://www.anep.edu.uy/iinn/Recursos/Revista1/Revista1Texto3.htm

Larios, V. (1997). Algo sobre el rigor del lenguaje. *Revista Gaceta COBAQ 14 (124)*, 8-13.

Maier, H. (1999). El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje matemático y lenguaje común. *Cahiers de Didactique des Mathématiques, Tesalónica*, 3, 86-118.

Martínez, F (2006). *La adquisición de conceptos*. Obtenido el 27 de febrero de 2007 http://www.sc.ehu.es/yfwsemab/2005_2006/Manrique.pdf

Montoya, V. (s/f). *¿Primero está el lenguaje o el pensamiento? Lenguaje y pensamiento.* (parte III) Consultado el 6 de julio del 2004 en: http://www.espaciologopedico.com/articulos2.asp?Id_articulo=447

Ortega Dato, J. F. y, Ortega Dato, J. A (2001). *Matemáticas: ¿un problema de lenguaje?* Universidad de Castilla-La Mancha. Área de Matemáticas España.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata.

North Central Regional Educational Laboratory. *Reciprocal Teaching.* Consultado el 29 de julio de 200en: http://www.ncrel.org/sdrs/areas/issues/students/atrisk/at6lk38.htm

San Diego County Office of Education *Reciprocal teaching: a reading strategy* Consultado el 29 de Julio de 2004 en: http://www.sdcoe.k12.ca.us/score/promising/tips/rec.html

Ulloa R, (2004). *Lectomatemáticas y lectoescritura, influencia en el aprendizaje de las Matemáticas.* Departamento de Matemáticas, Sección de Matemática Educativa, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías. México

Vygotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Woolfolk, A. E. (1999). *Psicología Educativa* (7a. Ed.). México: Prentice-Hall

COMPRENSIÓN DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN EL BACHILLERATO UNIVERSITARIO

María del Socorro Rivera Casales; Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav, IPN. México
msrivera@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Medio

Resumen. *La presente investigación, de carácter cualitativo, concierne a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria, donde se imparte la asignatura Estadística y Probabilidad hasta el 6º grado como materia optativa y con carácter teórico, para todas las áreas de orientación vocacional. La investigación, documental en su primera etapa, se refiere al programa de estudios de la asignatura y al principal libro de texto que recomienda. De entre los resultados, la incongruencia entre programa y texto en cuanto a secuencia, el planteamiento en el libro de texto de ejemplos y de ejercicios carentes de referentes, principalmente para la aplicación de "fórmulas", evidencia en la propuesta institucional la falta de diversidad que compromete el objetivo de la asignatura como introductoria a estocásticos para los estudiantes de todas las áreas.*
Palabras clave: comprensión, estocásticos, bachillerato

Introducción

El programa *Estadística y Probabilidad* de la Escuela Nacional Preparatoria, que se imparte hasta el 6º grado como materia optativa y con carácter teórico para las áreas: I Físico Matemáticas e Ingenierías, II Ciencias Biológicas y de la Salud, III Ciencias Sociales, IV Humanidades y Artes, muestra cambios significativos en la estructura y secuencia de los contenidos y en su enfoque metodológico, basado en la solución de problemas. Por medio de los contenidos propuestos, pretende que el alumno conozca, comprenda y aplique la estadística descriptiva, la simbología de los conjuntos, y el concepto de probabilidad en el planteamiento de problemas.

Las preguntas de la investigación planteadas en nuestro proyecto se refieren a la caracterización de la propuesta para el estudio de estocásticos en el bachillerato universitario, así como de la comprensión de estudiantes de preparatoria de ideas fundamentales de estocásticos, resultante de su enseñanza en el aula.

Fundamentos Teóricos

Desde un enfoque epistemológico, Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales de estocásticos como guía de un currículo en espiral y recomendó fomentar la intuición probabilística. La intuición es un desarrollo cognitivo basado en la experiencia, por tanto, educa los procesos de aprendizaje intuitivo de las personas de modo que sigan más estrechamente los cánones del método científico (Hogarth, 2002). La intuición, además, juega un papel muy importante en el pensamiento (Fischbein, 1975). La investigación epistemológica de conceptos básicos de probabilidad revela la naturaleza teórica de conceptos matemáticos, como resultado de la interacción entre objeto, signo y concepto (Steinbring, 2005).

Lógica de la investigación y métodos

La investigación se propone en el orden cualitativo (Eisner, 1998). Su organización y lógica se divisan en el planteamiento de un conjunto de estrategias de enseñanza de estocásticos en el aula de preparatoria, en la modalidad de *aula alterna* (Ojeda, 2006). El proceso de la investigación está constituido por tres etapas:

- *Primera etapa: Propuesta institucional.* Se someten a examen el programa de estudio de estadística y probabilidad en el bachillerato universitario (ENP, 1996, clave1712).

- *Segunda etapa: Aula alterna*. Curso como escenario de investigación, con la participación de un grupo de estudiantes de 6º grado de preparatoria, el docente titular de matemáticas y la investigadora. Un acuerdo colegiado establecerá la vinculación docencia-investigación que permita el acceso al aula **real,** la aplicación de instrumentos y el uso de la técnica de video para la recopilación de datos**.** La interacción con el docente se basará en la selección de situaciones específicas, familiares a los estudiantes, para la enseñanza de ideas de estocásticos implicadas en ellas, y en estrategias para esa enseñanza. Interesa en particular la introducción de ejercicios de aplicación orientados a cada una de las Áreas I, II, III, IV, para las que prepara el plan de estudios de la escuela nacional preparatoria.

- *Tercera etapa: Entrevistas semiestructuradas individuales.* Interrogatorio individual en cámara de Gesell por la investigadora a cuatro estudiantes, en sesiones videograbadas.

Para todo el proceso, la célula de análisis (Ojeda, 2006) establece los criterios para examinar los datos recopilados: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), otros conceptos matemáticos, recursos semióticos (gráficos), términos empleados referentes a la estadística y a la probabilidad, tipo de situaciones propuestas que implican las ideas fundamentales de estocásticos.

Un estudio exploratorio con 25 estudiantes de bachillerato antecedió a las etapas segunda y tercera, que ha informado sobre el diseño de cuestionarios y de guiones de entrevista para aplicar en ellas.

Resultados

Aquí se presentan sólo los resultados de la primera etapa y del estudio exploratorio.

Primera etapa. El examen de la propuesta institucional resulta en una consideración deficiente de ideas fundamentales de estocásticos con los medios utilizados para la enseñanza. Se ha identificado la limitación de correspondencia entre el programa de estudio y lo propuesto en los libros de texto (ver Tabla 1).

Propuesta institucional	Libro de texto
Primera unidad. Estadística descriptiva	**(Infante, 1991)**
Introducción. Variables. Datos. Clasificación y construcción de bloques estadísticos. Organización de los datos por medio de tablas. Tipos de gráficas. **Introducción a la sumatoria. Análisis de datos de una variable: medidas de tendencia central y de localización. Medidas de dispersión o variabilidad. Análisis descriptivo de datos divariados: Correlación.**	**Introducción (p. 11). Métodos tabulares y gráficos para la organización y presentación de datos (p. 17). Cálculo y selección de medidas descriptivas (p. 47). Variables aleatorias y sus distribuciones. Momentos. (p. 127).**
Segunda unidad. Conjuntos	**(Cárdenas,1973)**
Conjuntos. **Idea intuitiva (por extensión y por comprensión).** **Conceptos básicos y simbología. Subconjuntos.** **Conjunto universal. Conjunto vacío. Operaciones con conjuntos. Cardinalidad de la unión, de la intersección y su complemento.**	**Conceptos preliminares. (p. 13)** **1. Conjuntos** **2. Subconjuntos** **3. Operaciones con conjuntos** **4. Producto cartesiano** **9. Cardinalidad y conjuntos finitos**
Tercera Unidad: Probabilidad	**(Infante, 1991)**
Espacio muestral. Experimentos y eventos. **Principio fundamental del conteo. Análisis combinatorio. Conceptos de probabilidad. Eventos.** **Teoremas de la probabilidad. Variables aleatorias: discretas y continuas. Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas.**	**Experimentos aleatorios, espacios muestrales y eventos. (p. 102). Población y muestra.** **Probabilidad. Probabilidad condicional.** **El teorema de Bayes y las probabilidades subjetivas.**

Tabla 1. Distribución paralela de los temas de la propuesta institucional y el libro texto sugerido como bibliografía básica.

El análisis de la bibliografía básica y de la propuesta institucional reveló la poca importancia que se otorga en el bachillerato universitario a la enseñanza de estocásticos en general (Rivera, 2007) y se otorga prioridad a otros contenidos matemáticos. La Tabla 2 resume el análisis de la propuesta institucional.

Ubicación	Primera Unidad: Estadística descriptiva**.** **Introducción. Variables. Datos. Clasificación y construcción de bloques estadísticos. Organización de datos por medio de tablas. Tipos de gráficos. Introducción a la sumatoria. Análisis de datos de una variable: medidas de tendencia central y de localización. Medidas de dispersión o variabilidad. Análisis descriptivo de datos divariados: Correlación.**
Propósito	**Que el alumno sea capaz de diferenciar, organizar, representar gráficamente e interpretar el significado que un conjunto de datos tiene en relación con un fenómeno relativo a su entorno social, para vincular la estadística con su realidad.**
Situación que se plantea	**Organizar, diferenciar ,representar e interpretar datos**

Ideas de estocásticos	**Medida de probabilidad. Espacio muestra. Adición de probabilidad. Regla del producto e independencia. Combinatoria. Variable aleatoria. Ley de los grandes números. Idea de muestra.**
Otros conceptos matemáticos	**Operaciones aritméticas, orden, números reales.**
Recursos semióticos	**Figuras y diagramas. Gráficas. Simbología matemática. Lengua natural**
Términos para la referencia de estocásticos	**Clase o intervalo. Medidas de tendencia central. Frecuencia.**
Ubicación	Segunda Unidad: Conjuntos**.** **Conjuntos: Idea intuitiva (por extensión y por comprensión). Conceptos básicos y simbología.** **Subconjuntos. Conjunto universal. Conjunto vacío.** **Operaciones con conjuntos. Cardinalidad de la unión, de la intersección y del complemento.**
Propósito	**Que el alumno reafirme los conocimientos sobre conjuntos y sus operaciones básicas, previamente adquiridos, para que los apliquen en problemas de análisis combinatorio y probabilidad.**
Situación que se plantea	**Análisis combinatorio y probabilidad**
Ideas de estocásticos	**No contiene ideas fundamentales de estocásticos.**
Otros conceptos matemáticos	**Operaciones aritméticas, orden, números reales, figuras geométricas.**
Recursos semióticos	**Gráficas. Simbología matemática. Lengua natural.**
Términos para la referencia de estocásticos	**Unión, intersección y cardinalidad.**
Ubicación	Tercera Unidad: Probabilidad. **Espacio muestral. Experimentos y eventos. Principio fundamental de conteo. Análisis combinatorio.** **Concepto de probabilidad. Eventos. Teoremas de probabilidad. Variables aleatorias: discretas y continuas.** **Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas.**
Propósito	**Que el alumno sea capaz de identificar a la probabilidad como un instrumento confiable en la inferencia y toma de decisiones.**
Situación que se plantea	**Probabilidad clásica.**
Ideas de estocásticos	**Medida de probabilidad. Espacio muestra. Adición de probabilidad. Regla del producto e independencia** **Combinatoria. Equiprobabilidad y simetría. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria. Ley de los grandes números. Idea de muestra.**
Otros conceptos matemáticos	**Operaciones aritméticas, conjuntos, orden, números reales.**
Recursos semióticos	**Tablas de frecuencia, gráfica.**
Términos para la referencia de estocásticos	**Eventos, posibilidad, probabilidad, muestra, frecuencia, azar, permutación, combinación**

Tabla 2. Análisis de la Propuesta Institucional (Programa de Estudio de la ENP, 1996, clave1712)

El programa de estudios plantea un acercamiento tradicional, formal, de los contenidos de Estadística y de Probabilidad. A modo de ejemplo, presentamos un problema que presenta el libro de texto (Infante 1991, pag.104) que ilustra la identidad objeto/signo.

> *En una caja hay 6 cubos iguales enumerados. De a uno a la vez se extraen al azar todos los cubos de las cajas. Hallar la probabilidad de que los números de los cubos extraídos aparezcan en un orden creciente.*

El problema demanda la aplicación del enfoque clásico de probabilidad. Se refiere a una situación de la que no se hace explícita alguna aplicación que pudiera tener en un ámbito particular. La presentación de la situación de referencia (en lengua natural y un numeral) es del mismo tipo que la presentación del concepto cuya aplicación se demanda (en lengua natural) (ver Figura 1).

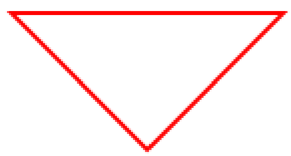


Figura 1. Aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de la prsentación de los contenidos de probabilidad en el libro de texto

La situación presentada podría haber dado lugar a un acercamiento frecuencial a la probabilidad solicitada, mediante 60 repeticiones (por ejemplo) de la extracción al azar sin reemplazo de un boleto de la urna hasta agotarlos, registrar los resultados e identificar aquéllos en los que se hubieran obtenido los boletos en orden creciente, para proceder a la identificación de su frecuencia relativa y motivar así la aplicación del enfoque clásico de probabilidad.

En consecuencia, se plantea en la presentación de los contenidos en el libro de texto una deficiencia de relación entre objeto, signo y concepto (Steinbring, 2005).

Resultados del estudio exploratorio

La segunda etapa incluye la aplicación a los estudiantes de un cuestionario exploratorio después de la enseñanza en el aula y la realización de tres entrevistas semiestructuradas.

Cuestionario exploratorio. Este instrumento consiste en ocho reactivos de preguntas abiertas en secuencia de acuerdo a la propuesta institucional, y en dos versiones "A" y "B", diferentes sólo en el orden de los reactivos para evitar copia de las respuestas individuales. Se han diferenciado los reactivos por área.

El cuestionario se aplicó a un grupo de 25 estudiantes, ocho orientados hacia el Área I, cinco hacia el Área II, 12 hacia el Área III y ninguno del Área IV, en una sesión de 1 hora 40 minutos, en el aula de matemáticas de su plantel. En general, el cuestionario fue difícil para los estudiantes (Rivera, 2008). A manera de ejemplo, presentamos uno de los reactivos incluidos en el cuestionario presentado en la Tabla 3.

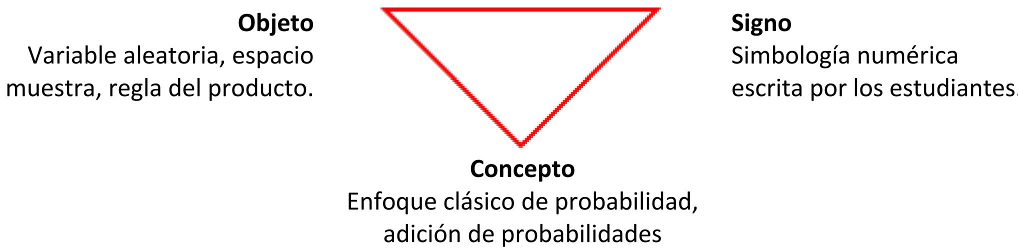
> *Se lanzan un dado blanco y uno negro. Encontrar la probabilidad de que la suma de los números superiores de cada dado sea 7 y que el número del dado negro sea mayor que el del dado blanco.*

El reactivo demanda la aplicación del enfoque clásico de la probabilidad. La Tabla 4 resume su análisis.

Características	**Cuestionario exploratorio versión "A" reactivo 2, cuestionario exploratorio versión "B" reactivo 7.**
Ubicación	Unidad III. Probabilidad
Contenido	Principio Fundamental del Conteo. Análisis combinatorio Concepto de probabilidad.
Propósito	Resolver e interpretar problemas del principio fundamental del conteo y probabilidad clásica.
Situación que se plantea	Conexión aleatoria de elementos no desgastados.
Términos para referirse a estocásticos	Aleatoria, probabilidad
Ideas de estocásticos por identificar	1. Medida de probabilidad. 2. Espacio muestra 3. Adición de probabilidad 4. Regla del producto e independencia 5. Combinatoria 6. Variable aleatoria
Otros contenidos matemáticos	Números naturales, operaciones aritméticas
Formas para representar situaciones y datos	Lengua natural, expresiones matemáticas, signos, gráficos.

Tabla 3. Análisis de los reactivos 7"A" y 2"B"

La Figura 2 ilustra la aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de las respuestas de los estudiantes.



La Figura 2. Aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de las respuestas de los estudiantes.

La Tabla 4 resume la frecuencia de identificación por los estudiantes de ideas fundamentales implicadas en el reactivo. Es de señalar la dificultad en distinguir entre los valores de la variable aleatoria y los eventos correspondientes; esto es, los estudiantes confundieron las ideas de espacio muestra y de variable aleatoria. Esta dificultad se reveló aún más extrema que la ya tradicional de falta de identificación de la idea de independencia.

Criterios de análisis	No. de alumnos
1.Medida de probabilidad	**15**
2.Espacio muestra	**0**
3.Adición de probabilidad	**1**
4.Regla del producto e independencia.	**8**
5.Combinatoria	**11**
6.Variable aleatoria	**18**
7.Números naturales	**15**
8.Operaciones aritméticas	**13**
9.Lengua natural	**6**
10.Expresiones matemáticas	**18**
11.Signos	**5**
12.Gráficos	**0**

Tabla 4. Frecuencia de respuestas a los reactivos 2”A” y 7”B” (25 alumnos)

Conclusiones

El análisis del libro de texto con el programa de estudio (primera etapa) augura una enseñanza lineal, sin la promoción de la intuición probabilística. Estas limitaciones anuncian una visión incompleta de una cultura matemática básica, más cuando la propuesta institucional debe atender áreas de conocimiento.

El análisis del cuestionario exploratorio aplicado después de la enseñanza (parte de la segunda etapa) muestra falta de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en la solución de cada uno de los reactivos. Al igual que en la propuesta se augura una enseñanza lineal, de los estudiantes se prevee en el mejor de los casos desempeños de aplicación mecánica de algoritmos para la resolución de ejercicios.

Las entrevistas semiestructuradas, parte de la tercera etapa, están en proceso de análisis. Proveerán datos adicionales para profundizar sobre la comprensión de los estudiantes de ideas fundamentales de estocásticos resultante de su enseñanza.

Referencias bibliográficas

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra Superior*. México: Trillas.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological view on stochastics fundamental ideas. *Educational Studies of Mathematics 6*, 187-205.

Hogarth, R. (2002). *Educar la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. Barcelona: Paidós

Infante, G. (1991). *Métodos de enfoque interdisciplinario*. México: Trillas.

Ojeda, A. (2006), Estrategia para un perfil nuevo de docencia: *Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual.* México: Santillana-Cinvestav del IPN, pp. 195-214.

UNAM. (1996). *Programa de estudios de la ENP* (1996, clave 1712). México: UNAM.

Rivera, S. (2007). Enseñanza y comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos en el nivel medio superior. *XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Red Cimates, Yucatán. México, p.50.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. EUA: Springer.

LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS. UNA APROXIMACIÓN ETNOGRÁFICA AL DISCURSO ESCOLAR ASOCIADO A LA NOCIÓN DE SEMEJANZA EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante
CIMATE, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero — México
nolascohh@hotmail.com
Campo de investigación: Discurso matemático escolar — Nivel: Medio

Resumen. *Este reporte de investigación centra la atención a la negociación de significados en la clase de geometría en el nivel medio superior, cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de semejanza. Uno de los obstáculos en la evolución de este concepto ha sido la relación entre los aspectos figurativo y numérico. El marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación es el análisis conversacional (AC) y el enfoque interaccionista. Aquí expondremos un segmento de análisis que ilustra estos aspectos en el desarrollo de una clase en particular. Consideramos un modelo de investigación cualitativa, basada en el método etnográfico, en donde el episodio que en este reporte presento forma parte de un conjunto de observaciones de clases y de entrevistas, como parte del trabajo interpretativo.*
Palabras clave: semejanza, negociación de significados, etnografía

Introducción

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que se han ocupado de comprender la práctica del profesor de matemáticas. Algunos trabajos están orientados a identificar la influencia de los diferentes dominios del conocimiento del profesor en relación con la práctica (Aubrey, 1996; Escudero y Sánchez, 1999). Otros trabajos adoptan un carácter más sociocultural, partiendo de una perspectiva de la enseñanza que "implica comprender y negociar significado a través de la comunicación" (Herbst, 2006, 2002; Martin, Soucy, Wallace y Dindyal, 2005). Estas investigaciones han tratado de describir e interpretar la actividad de los profesores, buscando regularidades en las interacciones que desarrollan profesores y alumnos en la práctica cotidiana.

También desde la teoría de situaciones didácticas algunos investigadores (Hersant y Perrin-Glorian, 2005; Laborde y Perrin-Glorian, 2005) analizan las prácticas del profesor en clases ordinarias. En este enfoque, las técnicas de enseñanza empleadas por el profesor ayudan a comprender sus acciones; su caracterización y estudio son objetos de investigación. Otras perspectivas se apoyan en el análisis empírico de la interacción en el aula y del complejo conjunto de relaciones que se genera entre profesor-alumno-contenido, colocando el énfasis en la relación profesor contenido (Bromme y Steinbring, 1994; Steinbring, 2005).

Diversos estudios desde la perspectiva interaccionista y la etnografía (Voigt 1995; Bauersfeld, 1995; Krummheuer 1995; Eisenhart, 1988) definieron formatos o patrones de interacción del maestro y los estudiantes en el que la funcionalidad del discurso en el salón de clases y los significados matemáticos son construidos interactivamente.

En este trabajo de investigación se busca al analizar la práctica educativa que es comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje en la interacción educativa en el aula y poder explicar cómo se producen. Esto es, cómo es posible que la conjunción de actuaciones e intervenciones del profesor y alumnos en interacción, comunicándose, haciendo preguntas, argumentando un conjunto de descripciones; produzca aprendizajes.

Construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que en este trabajo describiremos como discurso. El discurso incluye tanto la comunicación oral o escrita entre los participantes (Candela, 1999). Así, el estudio de la forma en la que maestro y alumnos participan en la interacción nos ayuda a entender cuáles son las condiciones de significación que se crean en una clase ordinaria cuando se pretende enseñar la noción de semejanza.

El marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación es el análisis conversacional (AC) y el enfoque interaccionista. De acuerdo al enfoque interaccionista, la construcción individual de los significados tiene lugar en la interacción con la cultura de la clase mientras que al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura (Cobb y Bauersfeld, 1995). Esta aproximación se apoya en el supuesto de que se generan diferentes prácticas en el aula, si se toma a las matemáticas como un conjunto de verdades objetivas, como algo existente y documentado objetivamente, o si se ve la práctica en el aula como un proceso de matematización compartida, guiada y convenios que emergen de la misma práctica (Voigt, 1994). El estudio del discurso desde la perspectiva de análisis conversacional (Garfinkel, 1967) las interacciones discursivas se estudian no sólo por su contenido gramatical, sino por su significado en el contexto de la secuencias con otros turnos de intervención. Así, la negociación del significado incluye tanto contenidos académicos que se van construyendo con cada intervención como las acciones por medio de las cuales se realiza esta negociación.

Metodología

La investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo, basado en el método etnográfico (Erickson, 1986). El enfoque etnográfico, permite obtener información relevante del contexto de la clase, que es importante para nuestra interpretación. Esta metodología permite realizar un estudio secuencial de las situaciones de enseñanza (Reséndiz, 2006). La perspectiva etnográfica que consiste en describir y reconstruir analíticamente los escenarios y grupos que protagonizan y participan en las prácticas educativas, poniéndolas en un registro lingüístico que permita a sus lectores representárselos tal como apareció ante la mirada del investigador.

Los registros de las observaciones se hicieron tan completos como la dinámica del trabajo del grupo lo permitió. Se debe considerar que éstos representan un intento por describir lo que sucedía en el aula en ese momento, lo que hacía el maestro y lo que hacían los alumnos, además de la interacción discursiva que fue posible registrar. De manera complementaria, se echó mano de tecnología de audio y video a fin de tener datos lo más fieles posible. El audio se grabó con tres micrófonos, uno colocado en la mesa del profesor y, dos colocados en la parte trasera del aula para intentar captar las intervenciones de los alumnos de la parte posterior. Además del audio y video se tomaron registros etnográficos, los cuales aportan elementos interesantes de lo sucedido en el salón de clases en relación con la temática discutida.

En esa dirección, los episodios que en este artículo presento forma parte de un conjunto de observaciones de clases y de entrevistas, como parte del trabajo interpretativo.

Algunos resultados obtenidos

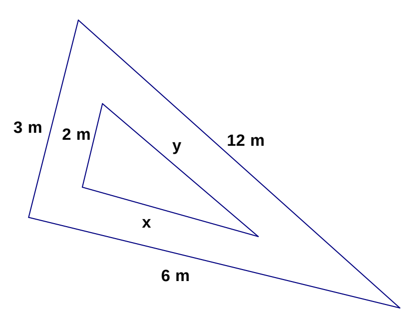
El profesor Alfonso participante en el episodio que a continuación se va a desarrollar, tiene una experiencia docente de seis años en la educación media superior. Manifiesta una cierta preocupación por mejorar su propia formación, participando en diferentes cursos y diplomados ofrecidos por la Facultad de Matemáticas, la Universidad Autónoma de Guerrero y la Asociación Local de Profesores de Matemáticas. Su predisposición a participar en toda clase de iniciativas que pudiesen aportarle alguna mejora en su labor profesional, fue la razón principal por la que se presto a participar en este estudio.

El profesor Alfonso entiende el concepto "semejanza" como un modo de conectar la visión numérica con imágenes gráficas, que implica que los alumnos comprendan las imágenes gráficas como algo proporcional. Esta forma de concebir la semejanza que enfatiza lo numérico-algebraico se hace evidente en la selección de los ejercicios planteados a los estudiantes. El uso y los diferentes roles que éstos juegan en la enseñanza les permiten visualizar la proporcionalidad que hay en la semejanza. Entre las ideas en que Alfonso desea hacer hincapié en sus explicaciones, destaca la importancia de que los alumnos reconozcan figuras semejantes.

En el segmento siguiente se aprecia la preocupación por parte de los alumnos por no poder resolver el problema planteado. El profesor busca facilitar el contenido al alumnado por medio de explicaciones y justificaciones ligadas a proporciones, con el interés de propiciarles la reflexión sobre el problema. En el transcurso de la clase, maestros y alumnos deben negociar significados matemáticos. Los conflictos potenciales durante dicha negociación son minimizados a través de rutinas y obligaciones, tal como se aprecia en el siguiente diálogo:

Extracto 5.3

P: Ahí está la figura ¿cuánto vale "x"?, ¿cuánto vale "y"? (cuestiona al grupo, mientras borra el pizarrón) y ¿cuál es la razón? Recuerden que la razón es el cociente de dos cantidades. ¿Qué pasó?, ¿ya? (dice a un alumno que se dirige a él mostrando su libreta, a quien pregunta) ¿cuánto te da la razón?



Ao: No le entiendo (en voz alta).

P: ¡Shhh! ¿ya tienen su resultado? (el profesor ignora por un momento al alumno)

As: No.

P: ¿Cómo?, ¿no le entiendes?

Ao: No, no le entiendo.

P: La información aquí está (señala las hojas que les entregó).

Aa: ¡Profe! (una alumna se levanta y se dirige al profesor).

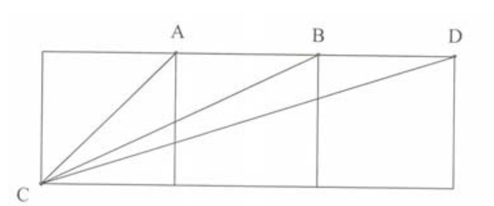
Ao: No le entiendo.

P: Permíteme (el profesor se percata de que los estudiantes no han comprendido el problema). ¡A ver compañeros! Yo siento que les será de gran utilidad la explicación que les voy a dar sobre las proporciones de un triángulo. Miren, lo van a poder resolver todos, sólo si ponen atención. A(grupo-1)

En el segmento anterior se observa la dificultad que tuvieron los alumnos al interpretar el problema planteado por el profesor, ya que esta aproximación al concepto no está dentro la relación intrafigural, sino las figuras están en disposición homotética. Podemos percatarnos que los alumnos presentan más dificultades al resolver problemas que están en tal posición.

En el siguiente segmento, el profesor seleccionó el problema con la finalidad de que el alumno resolviera el problema de diversos triángulos semejantes en diversas posiciones y que también identifique, cuándo dos triángulos son semejantes y cuándo no.

Extracto 5.5



P: A ver compañeros, así es la figura que ustedes están analizando. El triángulo ABC y el triángulo ADC, ¿son semejantes? Empezamos, ¿quién quiere participar? A ver, tu argumento Jonathan.

Ao: No son semejantes.

P: No son semejantes, ¿por qué no son semejantes estos triángulos?

As: Porque sus lados no son iguales (risas).

P: El argumento, ¿por qué no nos convences al decir que no son semejantes?

Ao: Tales de Mileto dice en su teorema que para que un triángulo sea semejante debe pasar una línea paralela en uno de sus lados, y ahí no hay ninguna línea paralela.

P: No, pero tú la puedes trazar. Él dice que no por su argumento. A ver, compañero, ¿son semejantes o no son semejantes?

Ao: No son semejantes.

P: El compañero también dice que no son semejantes, ¿por qué? (se dirige al alumno).

Ao: Por sus ángulos.

P: Pero este ángulo (A) es igual a este (B).

As: No.

P: No, bueno, son diferentes (escribe en el pizarrón), ¿en qué te basas para decir que son diferentes?

Ao: Porque la abertura… (lo interrumpe el profesor).

P: Pero, yo quiero que alcancen a observar lo siguiente.

Aa: Sí, son iguales.

P: Permíteme un poco. Nosotros no estamos hablando para nada de este triángulo (BDC), voy a remarcar con verde los triángulos de los que hablamos, del triángulo ABC y del triángulo ADC para que se distinga mejor. De esos dos triángulos, del rojo y del verde. Entonces no tiene caso que consideremos el ángulo (B) ¿o sí? A (grupo-1)

El segmento muestra que se producen algunas modificaciones de las explicaciones con base en la interacción propiciada por la búsqueda de la complementariedad entre las versiones de los alumnos y del profesor. De los análisis de las interacciones profesor-alumno, se encontró que las intervenciones del profesor tienen doble función: de solicitar explicaciones y de tratar de orientarlas regulando el curso de la clase.

Por otro lado, la negociación en el aula puede ser encubierta por un poder asimétrico entre el profesor y los estudiantes. Ciertamente, las adaptaciones del maestro y de los alumnos son motivadas por diferentes intensiones y adquieren diversas formas. Los estudiantes intentan responder de manera acertada a los cuestionamientos del profesor, adaptan sus respuestas en función de las intenciones del docente, tratan de identificar las expectativas del profesor que difieren de sus conocimientos previos para ajustarlas a las condiciones de la clase de matemáticas. A pesar de que el profesor intenta de modo consciente influir en el contenido matemático en juego, también se interesa en el proceso de desarrollo de la adaptación de las respuestas de los estudiantes.

Conclusiones

En el salón de clases, las explicaciones de los maestros se enmarcan en dos momentos de conversación que tienen finalidades muy claras: en el primer momento se crea el contexto inicial de partida y en el segundo se plantean ciertas preguntas y tareas que el alumno debe resolver. Una vez garantizado el punto de partida inicial, se encuentra que lo que caracteriza al profesor en el desarrollo de la explicación es el planteamiento de una serie de preguntas, la cual regularmente obtiene poca o nula participación de los alumnos. Podemos decir, que una base contextual del discurso en clase la forman un bloque de normas que definen las actividades educativas necesarias para el éxito de la participación de parte de los alumnos en el discurso educacional. Utilizamos el término *contextua*l para referirnos a todo lo que los participantes en una conversación conocen y comprenden.

En el caso analizado, no se propicia una interacción maestro-alumno que favorezca la comunicación y la negociación de significados. “La riqueza de la construcción de significados en la interacción, más que un proceso que parte de la diversidad de opiniones, termina como un proceso donde se negocian y articulan significados […]” (Reséndiz, 2004, p. 196). La construcción de significados permite evolucionar el contenido en juego, de tal suerte que condiciona el funcionamiento estable de una clase.

Hasta aquí hemos pretendido presentar, tanto la perspectiva teórica y metodológica en la que se sitúa nuestro trabajo, como algunos elementos de nuestros resultados que hemos obtenido.

Creemos que, gracias a la orientación cualitativa y etnográfica nos ha sido posible ver la importancia del análisis del discurso en el aula y comprender los complejos procesos a través de los cuales los distintos participantes contribuyen a la construcción de significados en el contexto escolar.

Referencias bibliográficas

Aubrey, C. (1996). An investigation of teacher mathematical subject knowledge and the processes of instruction in reception classes, *British Educational Research Journal, 22 (2)*, 181-197.

Bauersfeld, H. (1995). Language games in mathematics classroom: Their function and their effects. En Cobb y Bauersfeld (Eds.). *Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures*. Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 27*, 217-248.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula: los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México: Paidós.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The coordination of Psychological and sociological perspectives in mathematics education, En P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom culture*, (pp. 1-16) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Eisenhart, M. (1988). The ethnography research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education 19 (2),* 99-114.

Ericksson, F. (1986). Métodos cualitativos en investigación sobre la enseñanza. En M. Wittrock (Ed.) *La investigación de la enseñanza II* (pp. 195-301). Barcelona: Paidós

Escudero, I y Sánchez, V. (1999). Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Quadrante 8*, 85-110.

Garfinkel, H. (1967). *Studies in Ethnomethodology.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher, *Journal for Research in Mathematics Education 33(2)*, 176-203.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks, *Journal for Research in Mathematics Education 37(4)*, 313-347.

Hersan M. y Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of and ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations, *Educational Studies in Mathematics 59*, 113-151.

Krummheuer (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning, interaction in classroom culture* (pp. 229-269) Hillsdale, NJ, USA: Lawence Erlbaum Associates, Publishers.

Laborde, C. y Perrin-Glorian, M. (2005). Introduction teaching situations as object of research: Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics 59*, 1-12.

Martin, T; Soucy, S; Wallace, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educational Studies in Mathematics 60*, 95-124.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Disertación doctoral no publicada. Cinvestav- IPN, México, D.F, México.

Resendiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 435-458.

Steinbring, H. (2005). Analyzing mathematical teaching-learning situations the interplay of communicational and epistemological constraints, *Educational Studies in Mathematics 59*, 313-324.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning, interaction in classroom culture* (pp. 163-201) Hillsdale, NJ: Lawence Erlbaum Associates.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics, *Educational Studies in Mathematics 26*, 275-298.

ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Fermán Arellano Cabezas1, Asuman Oktaç1-2
1 Cinvestav – IPN México
2 Pontificia Universidad Catolica de Valparaíso Chile
ferman.arellano@gmail.com, oktac@cinvestav.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *Frecuentemente, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas movilizar diversos registros de representación de una misma gestión. Sin embargo, el tratamiento de conversión de una representación en una representación de otro registro no es fácil y en ocasiones hasta imposible. Al respecto, Duval (1988) señala: "cuando se efectúa la conversión ecuación* $\rightarrow$ *gráfico no surge ninguna dificultad, pero todo cambia cuando se hace la conversión inversa". Este aporte es muy sobresaliente e induce a investigar la naturaleza de esta problemática. En este sentido, nuestro trabajo de investigación está enfocado en identificar algunas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia el registro gráfico con el algebraico. Para ello, se aplicaron actividades donde se exponen algunos valores visuales de la gráfica, con el fin de establecer una correspondencia entre esos valores visuales de la recta y su respectiva escritura algebraica, así como, establecer un sistema para las diferentes categorías de tres rectas en el plano.*
Palabras clave: ecuaciones, gráficas, representación

Problemática de investigación

Algunas investigaciones en Didáctica del Álgebra Lineal, por ejemplo Mora (2001), Eslava y Villegas (1998), reportan que a los alumnos se les dificulta asignar un sistema de ecuaciones lineales a un gráfico dado. Al plantear ejercicios como: ¿cuál es el sistema de ecuaciones lineales con dos variables para el gráfico?, muchos de los estudiantes no pueden asignar el sistema adecuado.

Por lo general, en cursos de álgebra en el nivel medio superior se prioriza el manejo eficiente de los procedimientos y algoritmos de carácter algebraico, brindando escasa o nula importancia a las representaciones gráficas. El uso de gráficas se remite a ejemplificar algunas de las propiedades analizadas sin explotar la riqueza de significados que la representación gráfica nos puede ofrecer. Estas circunstancias propician que los estudiantes tengan dificultades de interpretación al enfrentarse con preguntas en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos.

Abordar el estudio de este problema, teniendo como marco de referencia la teoría de "Registros de representación semiótica" desarrollado por R. Duval, nos permitió analizar los argumentos y concepciones que presentan los estudiantes al resolver actividades donde se establece implícitamente una correspondencia entre cada modificación de la recta y cada uno de los términos que conforman su expresión algebraica correspondiente.

Objetivo de la investigación

Tomado en cuenta lo anterior, el objetivo de nuestra investigación es identificar aquellas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica, y aquellas que se relacionan con el concepto de sistema.

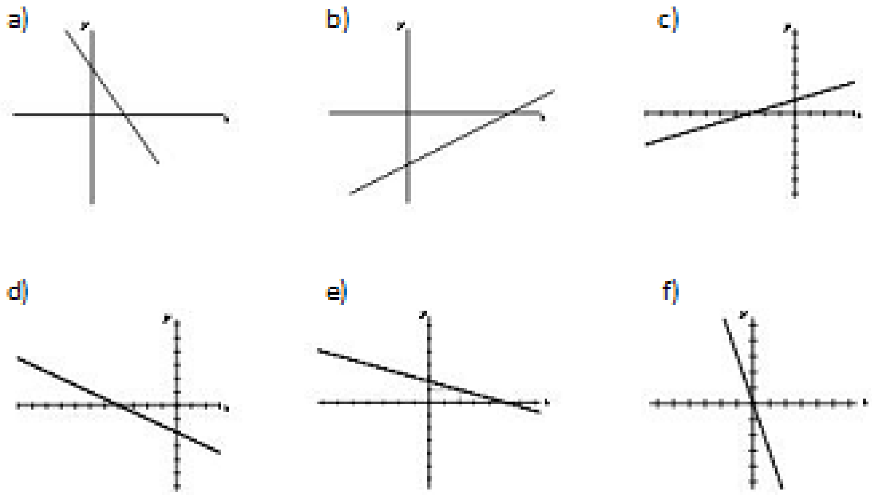
Metodología

Se aplicaron las actividades a seis estudiantes de nivel medio superior cuyas edades variaban entre 16 y 18 años: Jessica y Roberto cursaban el segundo semestre, Daniel y Bruno el cuarto semestre y Alex y Sergio el sexto semestre. Los antecedentes académicos de los estudiantes de segundo semestre son: Funciones lineales, Ecuaciones lineales, Sistemas de ecuaciones lineales. Los de cuarto semestre: Geometría, Sistemas de coordenadas y lugares geométricos, La recta y su ecuación cartesiana. Los de sexto semestre: Cálculo diferencial e integral.

Para la recopilación y análisis de datos se desarrolló una entrevista clínica. Durante su aplicación se les indicó a los estudiantes que al considerar erróneo algún procedimiento no se borrara, con el fin de observar así las diferentes estrategias que utilizaban en intentar resolver cada actividad.

Las actividades que se aplicaron fueron las siguientes:

1. Adivina mi ecuación



El propósito de esta actividad es identificar las dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de asignar la ecuación correspondiente a cada gráfica (las cuales exponen diferentes valores visuales).

2.

a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas paralelas.

b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas idénticas.

c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica muestre sólo un punto de intersección entre las rectas.

3.

a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica forme un triángulo con las intersecciones de sus rectas.

b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos rectas.

c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos intersecciones.

El propósito de las actividades 2 y 3 es identificar las dificultades que puedan presentar los estudiantes al construir sistemas de ecuaciones lineales que generen cada una de las diferentes categorías de tres rectas en el plano.

4. Escribe dos ecuaciones lineales con dos variables cuyas gráficas intersequen a:

a) Los ejes *x* y *y* positivos

b) El eje *x* negativo y el eje *y* positivo

c) Los ejes *x* y *y* negativos

d) El eje *x* positivo y el eje *y* negativo

El propósito de esta actividad es identificar y analizar las dificultades que pueden presentar los estudiantes respecto a las unidades simbólicas de la escritura algebraica y las modificaciones pertinentes de las variables visuales del gráfico.

Resultados y discusiones

En este apartado presentamos trabajos de algunos estudiantes y extractos de entrevistas, para ilustrar las dificultades que muestran los estudiantes.

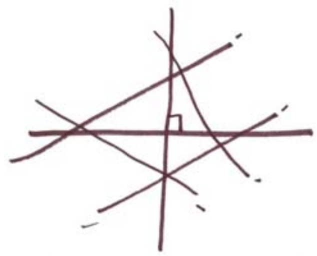
Actividad 1:

Alex concluye cada inciso con la ecuación $y = mx + b$, argumentando:

Alex: Bueno, creo que es de todas las pendientes, o sea cualquier recta que cruce a cualquier eje x ó y, sí, mientras no tenga 90° *creo que ésta es la ecuación.*

Entrevistador: ¿Puedes mostrarme las rectas que representa esta ecuación $y = mx + b$ *?*

Alex: Sería así,



son ésas las posibles rectas.

Cuando se le pregunta ¿qué es pendiente?, Alex contesta: "es cualquier recta que no cumple con los 90°, por ser pendiente la recta, su ecuación es $y = mx + b$ ya que la pendiente está dada por dicha ecuación".

De esta manera observamos cómo Alex confunde la pendiente como una recta y no como la inclinación de la recta.

También se observa que no pueden establecer la ecuación para un gráfico que no tiene "escalas" en los ejes coordenados:

Bruno: es (x, y), debido a que cualquier punto se mueve en ella.

Daniel: diría que x más un número real es igual a y, sería $x + \Re = y$*, y así voy dando valores.*

De esta manera, se observa que no se realiza una discriminación de las unidades significantes en el registro de partida (el gráfico) y en el registro de llegada (algebraico), esto impide establecer una correspondencia entre las unidades simbólicas de la escritura algebraica y los valores de las variables visuales. Y en consecuencia, pasar de una representación a otra.

Actividades 2 y 3:

Al inicio de estas actividades hubo desconcierto ante la palabra "sistema":

Daniel: ¿de tres ecuaciones?

Entrevistador: sí.

Daniel: ¿cada una debe ser una recta diferente?

Entrevistador: entonces ¿cuál el sistema de tres ecuaciones?

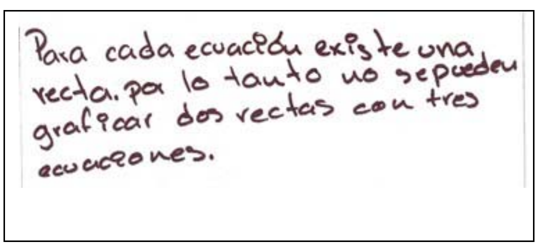
Jessica: ¿el sistema de qué?

Alex: ¿son tres ejemplos diferentes o cómo?

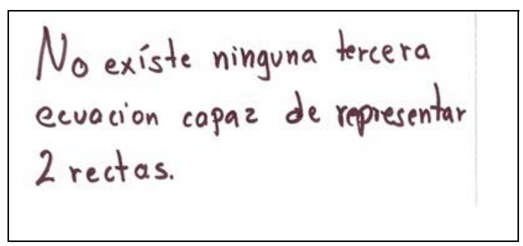
Roberto: ¿tres ecuaciones con dos variables a qué se refiere?

Además, mostraron dificultades para interpretar una de las diferentes categorías de tres rectas en el plano con un sistema de tres ecuaciones lineales:

Bruno:


Para cada ecuación existe una recta. por lo tanto no sepueden graficar dos rectas con tres ecuaciones.

Alex:

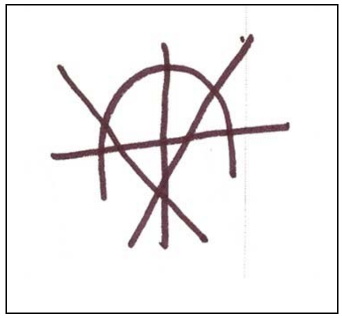

No exíste ninguna tercera ecuación capaz de representar 2 rectas.

De igual manera, Jessica no concibe que exista un sistema de tres ecuaciones lineales que represente dos rectas en el plano:

Jessica: ¿para qué quieres tres ecuaciones si sólo se hace con dos?, o una de éstas no dé recta, sino otra cosa.

Entrevistador: ¿cómo sería?

Jessica: (bosqueja)

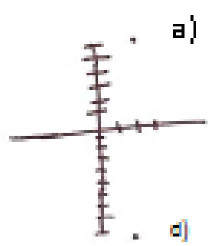


¿se piden dos rectas, no?

Actividad 4:

Jessica interpreta la solución como la ubicación de un punto (*x*, *y*) en el plano cartesiano, relacionando los signos de las coordenadas del punto con los signos de los ejes indicados en cada inciso. Ella escribe: $\begin{array}{lll} y+3=0 & x+2=0 & ---c) \\ y-6=0 & x-2=0 & ---a) \\ y-5=0 & x+12=0 & ---b) \\ y+9=0 & x-3=0 & ---d) \end{array}$, y argumenta: eso es más fácil, pues únicamente hay que despejar y dejas sola a *y*, *x*, y ya te sale (señala *x* y *y* en cada ecuación).

Jessica: esto es: a) $\begin{array}{l} y=+6 \\ x=+2 \end{array}$*, d)* $\begin{array}{l} y=-9 \\ x=+2 \end{array}$*,*



Con base en sus argumentos observamos como Jessica presenta dificultades para expresar una ecuación lineal con dos variables. También presenta dificultades para construir una ecuación que interseque un lugar específico del plano, al interpretar esta condición como establecer un punto coordenado (x, y). Esto nos condujo a realizar la siguiente pregunta: ¿Qué es una ecuación lineal?

> *Jessica: pues es, hacer una operación con dos números que no se conocen, y hay que saber cuál es su valor.*

Consideramos que esta forma de concebir a una ecuación lineal impidió que esta estudiante contestara de manera correcta la actividad.

Nota. Sólo un estudiante pudo contestar correctamente las actividades, éste manifestó un manejo eficiente entre los dos registros de representación. Además, un buen manejo de técnicas para encontrar la pendiente de la recta y un reconocimiento preciso del coeficiente a y de la constante b, en la ecuación $y = ax + b$.

Conclusiones

Los resultados poco satisfactorios que muestran los estudiantes para pasar del registro gráfico al algebraico, se debe a la no discriminación de las variables visuales pertinentes y una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades simbólicas de la escritura algebraica. Cabe mencionar que el único medio para llegar a discriminar es mediante la **observación**, que permite la identificación de relaciones o la organización de relaciones (ciertas formas, comportamientos) entre las unidades significantes que constituye a una representación semiótica.

De esta manera, la construcción de la expresión algebraica a partir de la información que proporciona la gráfica, demanda desarrollar tratamientos que favorezcan la identificación de los elementos gráficos (relaciones cualitativas en la representación gráfica), para luego construir la expresión algebraica.

Otra de las causas que impide pasar de un registro a otro es, que aún prevalece un encerramiento a un registro de representación, este encerramiento conduce un obstáculo; en el momento en que la mayoría de alumnos salen del contexto en el cual se realizó el aprendizaje, se muestran incapaces de manejar los conocimientos adquiridos.

De esta manera se omite todo tipo de actividades que den luz de la relación que existe entre dos o más registros, particularmente, la relación entre un gráfico y la expresión algebraica de su ecuación correspondiente.

En este sentido, consideramos de suma importancia "construir la expresión algebraica a partir de una gráfica", con base a una interpretación global, es un tema relevante que debe ser incluido en los programas de matemáticas en el nivel medio superior. Así como, disponer de varios registros de representación semiótica de una misma gestión, y poder realizar una coordinación entre estos registros, deben adquirir atención.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Eslava, M. y Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar Sintético y Analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. Tesina de Diplomado no publicada, UAEH. Hidalgo.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav–IPN, México, D.F, México.

UN ESTUDIO SOBRE LA RECTA TANGENTE EN PUNTOS DE INFLEXIÓN DESDE LA ARTICULACIÓN DE SABERES

Anna Tarasenko, Carlos Rondero Guerrero, Oleksandr Karelin, Juan Alberto Acosta Hernández
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
anataras@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, skarelin@uaeh.reduaeh.mx
acostah@uaeh.reduaeh.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Algunos de los resultados previamente estudiados con el mismo método del cálculo de la recta tangente, fueron obtenidos sólo para funciones cóncavas o cuando la pendiente m es igual a cero. Ahora se propone una generalización del método para el cálculo de la recta tangente de diferentes tipos de funciones elementales en puntos de inflexión, y cuando* $m \neq 0$. *El procedimiento se basa en ideas de simetría para poder construir una función auxiliar cóncava que tiene la misma pendiente de la función original a la que se le aplica el esquema anteriormente señalado. Este método ayuda a relacionar conceptualmente la derivada de una función en un punto dado, con el cálculo de los puntos mínimos, máximos y de inflexión, sin aplicar métodos de derivación.*
Palabras clave: tangente, inflexión, pendiente, articulación

Antecedentes

En trabajos anteriores (Rondero, Karelin & Tarasenko, 2004), (Karelin, Rondero, & Tarasenko, 2005) se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para gráficas de funciones elementales cóncavas sin el uso de la derivada.

La idea general es: si a la gráfica de una función, $y = f(x)$ cóncava se le resta la gráfica de la recta tangente $y = mx + b$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, entonces en el punto $x = x_0$, la función auxiliar $F(x) = f(x) - [mx + b]$ tendrá un punto máximo ó mínimo local.

Por medio de tal función se identifican relaciones entre los puntos extremos de la misma y los puntos de tangencia de la función original $f(x)$.

En estos trabajos previos, se han analizado funciones cóncavas y se distinguen dos casos:

a) Cuando la función auxiliar $F(x) = f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}]$ en el punto $x = x_0$ tiene un punto mínimo, entonces se cumple la desigualdad,

$$(*)\ F(x) \geq F(x_0)$$

ó $f(x)-[mx_{x_0}+b_{x_0}]\geq f(x_0)-[m_{x_0}x_0+b_{x_0}]$

b) Si en el punto $x=x_0$ hay un punto máximo para la función, entonces se cumple la desigualdad,

$$(**)\ F(x)\leq F(x_0)$$

ó $f(x)-[m_{x_0}x+b_{x_0}]\leq f(x_0)-[m_{x_0}x_0+b_{x_0}]$

De donde se desprende el resultado general: La recta $R(x_0,y_0): y=m_{x_0}x+b_{x_0}$ es tangente en el punto (x_0,y_0) para $y=f(x)$, si y sólo si, una de las desigualdades (*) ó (**) se cumple.

Para construir la recta tangente $R(x_0,y_0): y=m_{x_0}x+b_{x_0}$ es necesario hallar m_{x_0} de (*) o de (**) y calcular b_{x_0}, por medio de la expresión, $b_{x_0}=f(x_0)-m_{x_0}x_0$.

Sin embargo, es necesario aclarar que el método propuesto funciona para todos los puntos excepto para los puntos de inflexión.

En trabajos posteriores, (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2007) se estudió el caso de las funciones $y=f(x)$ que tienen un punto de inflexión en (0,0) y con la pendiente $m=0$. Para ello usando simetría, se construyó la función transformada

$$y=\tilde{f}(x),\quad \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ -f(x), & x<0\end{cases},$$

que es cóncava y por tanto la recta $y=0$, será la recta tangente para la función $y=f(x)$ en el punto de inflexión (0,0). En este caso, para esta función transformada redefinida de este modo se puede aplicar el método mencionado en (Rondero, Karelin, Tarasenko, 2004), (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2005), mediante el cual ambas rectas tangentes para la función inicial y la función transformada coinciden.

Método propuesto para funciones con punto de inflexión. Caso general.

Consideremos las funciones $y=f(x)$ con $x\in D,\ D=[a,b]$ para las cuales en cada punto $(x_0,y_0),\quad x_0\in D$ de su gráfica $L:\{(x,y(x))\}$ existe una y sólo una recta

$R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0) y no tiene otros puntos comunes con la gráfica L en una vecindad del punto (x_0, y_0).

Sea $y = f(x)$ una función con un punto de inflexión en (0,0).

Si la función auxiliar, $y = F(x),\ F(x) = f(x) - mx$ para un número m tiene en (0,0) la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre de recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

Sea $y = f(x)$ una función con un punto de inflexión en (0,0).

Si la función transformada $y = \tilde{F}(x)$ para la función auxiliar

$y = F(x), \quad F(x) = f(x) - mx$, es

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \geq 0 \\ -F(x), & x < 0 \end{cases}$$

para un número m (es cóncava) y tiene en (0,0) la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

Subrayamos la unicidad de la recta tangente.

Ejemplo

Construir la recta tangente para la gráfica de la función

$y = f(x), \quad f(x) = x^3 - 5x^2 + x$ en el origen $(0,0)$.

La función auxiliar es

$y = F(x), \quad F(x) = f(x) - mx = x^3 - 5x^2 + x - mx$.

Y la función transformada para la función auxiliar es,

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \geq 0 \\ -F(x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx, & x < 0 \end{cases}.$$

Es necesario ahora encontrar el número m, tal que la función $y = \widetilde{F}(x)$ sea cóncava y tenga la función $y = 0$ como su recta tangente.

Para el caso en que $m = 1$, se tiene que la función transformada de la función auxiliar $y = \widetilde{F}(x)$ tiene forma

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - x, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 5x^2, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2, & x < 0 \end{cases}.$$

Mostramos que $y = \widetilde{F}(x)$ es cóncava con la pendiente $p = 0$ en el punto $(0,0)$..

Según nuestro esquema formamos la función auxiliar para la función transformada de la función auxiliar de la función inicial $y = f(x)$

$$y = \widetilde{F}(x) - px = \begin{cases} x^3 - 5x^2 - px, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - px, & x < 0 \end{cases}.$$

Si se cumple la desigualdad,

$$\widetilde{F}(x) - px \geq 0$$

o bien,

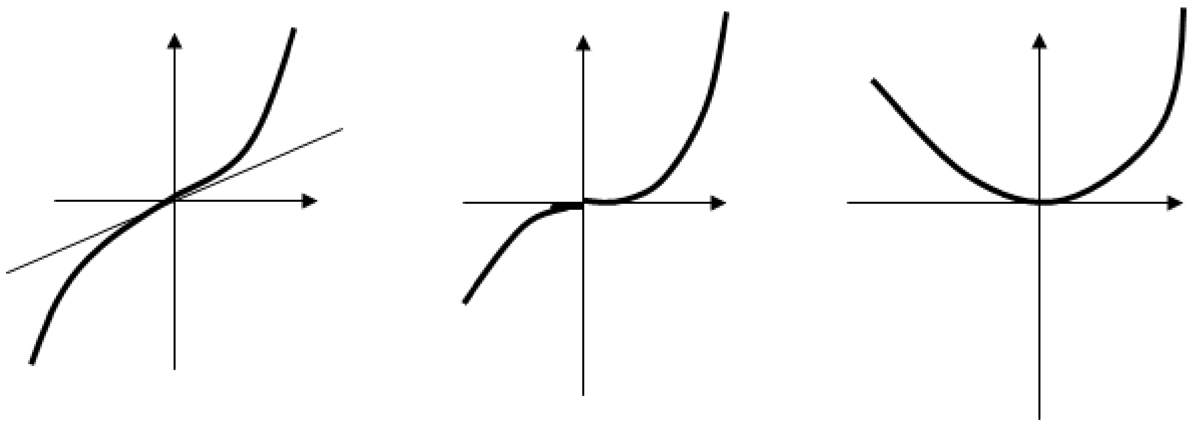
$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 - px \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - px \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

para $p = 0$ alrededor del origen $x = 0$. En realidad, si factorizamos x, se tiene,

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 \geq 0, & x < 0 \end{cases}, \begin{cases} x^2(x-5) \geq 0, & x \geq 0 \\ x^2(-x+5) \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

En el caso $m = 1$, las gráficas correspondientes de las funciones involucradas son de la forma siguiente,

$y = f(x)$ $\qquad$ $y = F(x)$ $\qquad$ $y = \tilde{F}(x)$



Cuando $p \neq 0$ esta desigualdad no se cumple alrededor del origen $x = 0$. En realidad se cumplen estas otras desigualdades,

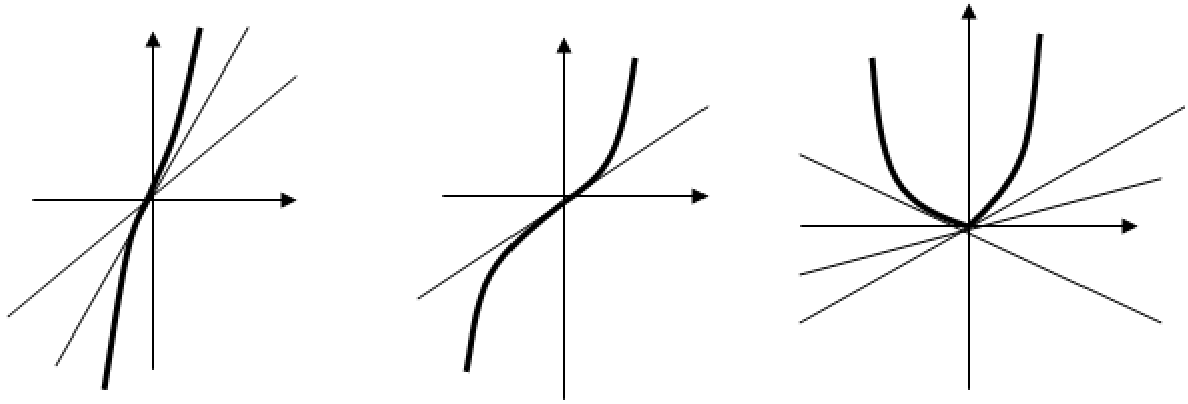
$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 - px \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - px \geq 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(x^2 - 5x - p) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - p) \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ahora investigamos el caso en que $m \neq 1$.

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), \ x \geq 0 \\ -F(x), \ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx, & x < 0 \end{cases}$$

Mostramos que la función $y = \tilde{F}(x)$ no tiene la recta tangente en el origen.

$y = f(x)$ $\qquad$ $y = F(x)$ $\qquad$ $y = \tilde{F}(x)$



Si ahora aplicamos el método de reducción al absurdo, es decir consideramos que $y = px$ es la recta tangente para $y = \tilde{F}(x)$, entonces se tiene la función auxiliar,

$$y = \tilde{F}(x) - px = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx - px, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx - px, & x < 0 \end{cases}$$

Según la definición se cumple una de las dos desigualdades,

$\tilde{F}(x) - px \leq 0$ ò $\tilde{F}(x) - px \geq 0$ (*)

Si factorizamos x obtenemos,

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - p), & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - p), & x < 0 \end{cases}$$

Mostramos que si la desigualdad (*) se cumple para $p = l$

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - l) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - l) \geq, & x < 0 \end{cases} \left(\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - l) \leq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - l) \leq, & x < 0 \end{cases} \right)$$

Entonces la desigualdad se cumple y para otro $p = s, \quad s \neq l$

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - s) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - s) \geq 0, & x < 0 \end{cases} \left(\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - s) \leq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - s) \leq 0, & x < 0 \end{cases} \right)$$

La desigualdad (*) se cumple cuando

$$\begin{cases} 1 - m - p > 0 \\ -1 + m - p < 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 - m > p \\ -1 + m < p \end{cases}, -1 + m < p < 1 - m$$

$$\left(\begin{cases} 1 - m - p < 0 \\ -1 + m - p > 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 - m < p \\ -1 + m > p \end{cases}, 1 - m < p < -1 + m \right)$$

Entonces es suficiente escoger un número $s, \quad s \neq l$ del intervalo

$(-1 + m, 1 - m)$. $((1 - m, -1 + m))$.

Obtenemos una contradicción respecto de la unicidad de la definición de la recta tangente.

Sin embargo, sin perder generalidad se puede pasar de un punto arbitrario (x_0, y_0) al origen $(0,0)$. Sea $y = f(x)$ una función con el punto de inflexión en (x_0, y_0). Si la función $u = u(z), \quad u(z) = f(z + x_0) - y_0$ tiene en el punto (0,0) la recta tangente $u = mz$, entonces la recta $y = mx + b$, donde $b = f(x_0)$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0).

Conclusiones

Es de resaltarse la versatilidad del método del cálculo de la recta tangente para el tratamiento de funciones elementales.

Hemos venido mostrando la evolución de nuestro método en los diferentes trabajos previos, desde casos muy particulares hasta el caso general de funciones suaves, es decir que tienen derivadas.

Hay una clara articulación conceptual en este método con el tratamiento de desigualdades y además entre los conceptos principales del cálculo elemental, como puntos extremos, concavidad y puntos de inflexión, entre otros.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. y Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley.

Edwards, C. H.(1979). *The Historical development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko, A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de puntos críticos y derivadas de algunas funciones. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.821-828). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2005). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.386-392). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). La construcción de la recta tangente en puntos de inflexión: un método alternativo en la articulación de saberes. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp.198-203). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

ELEMENTOS DE ALGUNAS TEORÍAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA. UNA EXPERIENCIA DE ANÁLISIS: ¿ADHERENCIA O NUEVAS VISIONES?

Karla Margarita Gómez Osalde, Irma Daniela Viramontes Acuña, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
kmgomez@cinvestav.mx, iviramontes@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos una reflexión sobre el quehacer de la Matemática Educativa. Enfocamos la atención a la conformación de los grupos de investigación (GI) y a la diversidad de marcos teóricos que viven en la Matemática Educativa. Al construir un marco de referencia del sistema educativo de México, nos obligó a cuestionar el tipo de marco teórico que los GI emplean en la Matemática Educativa. Llamamos la atención que en general los GI, en Latinoamérica, viven un "fenómeno de adherencia" al soslayar cualquier marco de referencia de sus sistemas educativos.*
Palabras clave: socioepistemología, matemática educativa, marcos teóricos, marco de referencia

Introducción

Si bien la problemática de la enseñanza de las matemáticas no es propia de los últimos tiempos, es actual la creación de una disciplina llamada Matemática Educativa la cual se encarga de las necesidades y demandas de dicha problemática. Vale la pena mencionar que "…el nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado *Didáctica de las Matemáticas*, *Didactique des Mathématiques*, *Didaktik der Mathematik*, por citar algunas de las escuelas más dinámica" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 30). En la década de los años 70's surge un movimiento en el mundo al respecto, el cual trae como consecuencia el nacimiento de diferentes escuelas de pensamiento en diversas regiones, que desde su perspectiva han tenido la necesidad de definir y redefinir elementos característicos propios. A través del tiempo estas escuelas se han consolidado como marcos teóricos. Las edades de éstas son un poco más de treinta años. De aquí la tarea de realizar un trabajo que nos permita distinguir entre estas diferentes perspectivas, buscando sus adherencias y las nuevas creaciones (Cordero, 2008).

La Matemática Educativa es quien se encarga del "…estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad…" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 29), estos fenómenos didácticos, como cualesquier otros fenómenos, no se solucionan, sino mas bien se entienden, predicen, estudian o modelan con la finalidad de dar respuesta al sistema educativo.

Son los diferentes marcos teóricos, correspondientes a la Matemática Educativa, que proporcionan una interpretación científica de estos fenómenos didácticos, la cual depende de la problemática fundamental que han declarado. Las fuentes, donde cada marco teórico toma sus datos, varían de acuerdo a lo que se desee evidenciar. Hacen específico el marco, por ejemplo, al seleccionar las "habilidades", o las "representaciones", o las "prácticas", se favorecerán diferentes fuentes, tanto dentro o fuera del aula.

Sin embargo, de qué naturaleza son los fenómenos didácticos para crear un marco teórico que hable de habilidades, o de representaciones, o de prácticas sociales. ¿Qué tipo de explicación científica se necesita para estudiarlos e interpretarlos? ¿Cuál es en si, el marco de referencia educativo que subyace a la creación de dichos marcos? O bien, ¿cómo elegir un marco teórico apropiado que ayude a dar respuesta al sistema educativo en cuestión?

En este sentido es importante entender el funcionamiento de cada marco teórico según una caracterización del sistema educativo en cuestión, de tal manera que nos sirva de marco de referencia para elegir adecuadamente el marco teórico que nos ayudará a dar explicaciones científicas coherentes. Si existiera tal marco teórico, tendríamos que adherirnos a éste. En caso contrario, necesitamos construir una variedad del marco o una nueva visión, que nos permita dar explicaciones *ad hoc*.

En el presente trabajo se reflexiona en cómo los grupos de investigación abordan algunos marcos teóricos empleados dentro del campo de la matemática educativa: la teoría antropológica de lo didáctico, teoría de situaciones didácticas, teoría socioepistemológica, teoría ontosemiótica, teoría de representaciones semióticas y la teoría APOE. Todas ellas elegidas en función de sus usos sistemáticos en las investigaciones de los grupos. El objetivo principal es tener una visión amplia de la Matemática Educativa a través de reflexiones sobre los marcos teóricos mencionados con anterioridad, así como establecer relaciones y diferencias básicas, y con ello de alguna manera hacer explícito lo que subyace en cada una.

Se concretó una *tabla dinámica* (2007), la cual consiste en identificar seis elementos por cada marco teórico, presentados en forma esquemática: problemática fundamental, fenómeno didáctico, problema didáctico, pregunta de investigación, evidencia, ya sea teórica o empírica, y los resultados. Consideramos necesario enfatizar el hecho de que al encontrarnos inmersos en una disciplina donde sus resultados no son absolutos con respecto de las ciencias duras, sino que por el contrario, van modificándose conforme a resultados de investigaciones posteriores, no se pretende generalizar estos resultados, sino tan solo compartir ciertos elementos que se mencionan en los marcos teóricos según cada teoría y así, poder articular y estar en la misma sintonía al referirnos a cada una de ellas.

Elementos de algunos marcos teóricos de la matemática educativa

Para profundizar en los paradigmas que definen a los diferentes marcos teóricos en Matemática Educativa, teniendo en cuenta que las teorías no explicitan, o más aún, no consideran la existencia de aspectos claves, nos cuestionamos: ¿qué es lo que subyace en cada marco teórico?

La experiencia de análisis obtenida en esta reflexión, consistió en haber formulado los seis aspectos principales de los marcos teóricos mencionados anteriormente. Todo ello conformó un eje para lograr el objetivo perseguido. El grupo de maestría del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, generación 2007-2009, se dio a la tarea de discutir, interpretar y organizar estos puntos por cada marco teórico de tal manera que permitiera un estudio comparativo de los paradigmas que apoyan la construcción de cada teoría.

En cada teoría se encontró o interpretó la declaración de su problemática fundamental, y cómo de esta forma centra su atención en determinados elementos que le permitirán, de una u otra manera, explicar y dar evidencias de los fenómenos didácticos que pueden distinguir. Cada teoría influirá en el tipo de resultados según la centración de su objeto de estudio, destinado ya sea al objeto matemático, o a las habilidades de los estudiantes, o a las representaciones que necesariamente los participantes tienen que construir, o a las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático.

Aunque se acepta el hecho de que cada una de las teorías existentes tiene aportes en la disciplina en el mundo, lo que se cree indispensable es tomar conciencia sobre el tipo de respuestas que ofrecen. No podemos pensar que cualquier marco teórico nos proporciona explicaciones de los fenómenos didácticos de la misma manera, es decir, es un error pensar que para determinada problemática identificada, cualquier marco teórico nos proporciona respuestas adecuadas. Al contrario, identificar el paradigma que subyace en cada marco nos da idea de la manera que se explican la construcción del conocimiento y podemos elegir la teoría conveniente para dar respuesta a nuestra propia problemática.

Precisamente el paradigma en el que se basan para explicar la construcción del conocimiento es lo que subyace en cada teoría. D'Amore (2005), citando a Kutschera (1979), describe dos categorías en que las teorías pueden ser divididas según la forma de concebir el significado: las teorías realistas y las teorías pragmáticas.

La diferencia esencial entre estas categorías es sobre la preexistencia o no preexistencia del objeto. No quiere decir que una teoría debe definir si está en una categoría u otra, o que estas categorías son excluyentes.

Las teorías realistas sostienen que el conocimiento preexiste al objeto. Los humanos accedemos a él por medio de relaciones de signos o entidades. Se maneja una idea platónica de los objetos matemáticos: los objetos existen, solo tenemos que acceder a ellos. ... Y es también obvio que tal visión implica un absolutismo del conocimiento matemático en cuanto sistema de verdades seguras, eternas, no modificables por la experiencia humana, ya que le preceden o, al menos, le son extrañas e independientes... (D'Amore, 2005, p. 4)

Las teorías pragmáticas sostienen la posición de que el conocimiento tiene influencia de los entornos, de lo institucional. Un conocimiento que no es autónomo, si no por el contrario, depende de la influencia social. Se cree que el conocimiento va a la par del ser humano, por tanto, el conocimiento va a depender del contexto y del uso, va a variar según la circunstancia y el uso específico, va a ser diferente según la comunidad.

Lo que debemos reflexionar sobre cada teoría es en qué medida o en qué forma toman en cuenta el contexto, la sociedad, la actividad humana, los usos para generar conocimiento, el conocimiento mismo, o ¿dicho conocimiento es independiente de todos estos elementos? Es elegir sobre hablar del individuo, o analizarlo en la escuela, o tal vez, más allá, el individuo en la sociedad.

El papel de los conceptos, de los objetos matemáticos, de los significados, del conocimiento, etc., dependerá de la filosofía que define el marco. El foco de atención o la dimensión en que se tome en cuenta cada elemento varía en cada teoría.

Por lo que pudimos apreciar, los marcos teóricos tienen diferentes visiones, diferentes paradigmas. Existen quienes manejan visiones del estilo cognitivo, otros donde el foco de atención es lo institucional, otros que se encargan de aspectos socioculturales.

Cualquier grupo de investigación puede tomar una teoría e interpretarla, sin embargo, es importante entender que las teorías nacen en una región específica, para responder a necesidades propias de dicha región. Vale la pena preguntarnos cómo son utilizadas dichas teorías por las comunidades que no las construyeron, ni son originarias de la región. Es decir, cómo la usan, qué modifican, qué trastocan, qué tan fieles son a la teoría, si se trastoca la teoría a qué se debe. Si es necesario trastocarla, ¿solo es una consecuencia de que dicha teoría no nazca en el seno de esta comunidad? ¿Hasta qué punto, las modificaciones son obligadas?

La dimensiones de los cuestionamientos anteriores conllevan pensar en un marco de referencia del sistema educativo que correlacione la creación de los marcos teóricos a las comunidades de investigadores y a sus culturas, que ponga más cerca las problemáticas existentes en la educación, así como las necesidades primarias en su materia educativa.

Un marco de referencia de la educación mexicana

El marco de referencia (2008) tiene como objetivo proporcionar una visión, general y fundamentada, del estado de la educación en México.

Como grupo de investigación en Matemática Educativa creemos que es necesario reconocer y explicitar las realidades educativas de las diferentes escuelas de pensamiento, con la finalidad de situar las soluciones de nuestras problemáticas según esas realidades.

Así, el marco de referencia, realizado con base en el análisis de Andere (2006) y en el Consejo de Especialistas en Educación (2006), lo dividimos en cuatro ejes: sistema educativo mexicano, desarrollo productivo, desarrollo social y desarrollo científico y tecnológico. Los cuales nos permitieron tomar dirección en la caracterización del mismo.

En cada uno de los ejes se desarrollan diferentes aspectos haciendo explícita una historia sobre el sistema educativo. Con base en ello, el Consejo de Especialistas en Educación (2006) asegura que son tres elementos, relacionados sistemáticamente, necesarios para alcanzar una educación de calidad: equidad, cohesión social y productividad.

La profesionalización, la gobernabilidad y el financiamiento son estrategias que nos encaminarán hacia los tres elementos antes mencionados, necesarios para la calidad educativa. Esta educación de calidad, debe ser el eje rector que mueva todo el escenario, es decir, todos los planes, programas educativos, estrategias, etc., deben ser con base en la calidad educativa.

Pero, ¿qué es la calidad educativa? Creemos, como grupo de investigación, que la calidad en educación debe estar inmersa implícitamente en todos los procesos, de manera que se propicie un aprendizaje permanente que transforme la realidad de todos sus actores, o sea, un saber de carácter funcional, que permita emplear los conocimientos construidos según las necesidades requeridas en un contexto social determinado (no solo en la escuela), además de generar nuevos conocimientos a la par de los diferentes usos que las mismas personas otorguen a los saberes empleados.

¿Adherencias o nuevas visiones?

El marco de referencia anterior, de alguna manera, proporciona una visión, general y fundamentada del estado de la educación en México. El marco mismo tipifica la educación mexicana y tal vez nos ofrece indicadores para tipificar la educación latinoamericana: la ausencia de un programa educativo que produzca un saber funcional, en nuestro caso, de la matemática (Cordero y Flores, 2007), donde el modelo de aprendizaje sea permanente y no terminal. La noción de permanencia deberá atender el medio desigual del aprendiz y su heterogeneidad para abandonar el supuesto de homogeneidad en el modelo de aprendizaje que es inexistente en nuestra realidad educativa.

¿Cuál será entonces el marco teórico o los marcos teóricos de la Matemática Educativa que nos permita rendir cuentas de la tipificación descrita anteriormente del sistema educativo? ¿Podemos adherirnos a alguna teoría de las ya existentes, o debemos adaptarlas a nuestras características, es decir, crear nuevas visones que permitan atender necesidades educativas propias?

La respuesta, en definitiva, no es fácil. Seguramente se requerirán estudios sistemáticos para abordar profundamente el tema en cuestión. Sin embargo, la tipificación educativa nos señala tres aspectos principales: el saber funcional, el aprendizaje permanente y la heterogeneidad del medio. Si ponemos en juego estos tres elementos, por ejemplo, a priori no sabríamos por qué adherirnos a una visión teórica que atiende la problemática como un problema de "habilidad de representaciones". No obstante, algún tipo de respuesta ofrece a la problemática, pero no puede ser la orientación de la disciplina, si bien no podríamos decir en toda Latinoamérica, por lo menos no en México. Requerimos de constructos o modelos teóricos cuyo paradigma esté más hacia una filosofía pragmática, que involucre las variables sociales y sus repercusiones en el sistema educativo, que nos permite proporcionar evidencias y resultados, tomando como objetivo principal los tres aspectos mencionados. Comprendemos que no podemos continuar importando marcos teóricos y pretender que se ajustan a las necesidades mexicanas solo por el simple hecho de que dichos marcos nacieron para responder necesidades diferentes a las nuestras. Las culturas son diferentes y, por tanto, los resultados serán diferentes. Debemos conocer las prácticas sociales que norman la construcción del conocimiento, el cotidiano donde vive el conocimiento con su heterogeneidad y permanencia.

Referencias bibliográficas

Andere, E. (2006). *México sigue en riesgo: el monumental reto de la educación.* México: Editorial Planeta.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 6 (1)*, 27-40.

Consejo de Especialistas en Educación. (2006). *Los retos de México en el futuro de la educación.* México: SEP.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10(1)*, 7-38. México.

Cordero, F. (2008). Las teorías en Matemáticas Educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencia o variedad? *XXXV Semana de la Matemática*. Valparaíso, Chile. 1-3 de Octubre de 2008.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México*. México: Reverté.

Generación 07-09 de la maestría Área de Educación Superior. (2007). Tabla Dinámica de Teorías. *Seminario de metodología de la investigación del Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa.* Cinvestav-IPN. México, DF. Semestre II, 2007. (Paper)

Generación 07-09 de la maestría del Área de Educación Superior. (2008). Marco de Referencia de la Educación Mexicana. *Seminario de Metodología de la Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa.* Cinvestav-IPN. México, DF. Semestre I, 2008. (Paper)

LA ONTOSEMIÓTICA Y LA ECOLOGÍA DE SIGNIFICADOS QUE DESARROLLAN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AL RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ruth Rivera1, Álvaro Encinas1, Maximiliano De Las Fuentes1, Ramiro Ávila2
1Universidad Autónoma de Baja California México
2Universidad de Sonora
riveracastellon@gmail.com
Campo de investigación: Resolución de Problemas Nivel: Superior

Resumen. *Se desarrolla una investigación que tiene como objetivo central caracterizar los objetos matemáticos previos necesarios para que el estudiante de ingeniería pueda abordar una gama de problemas que se resuelven utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. En este trabajo se presenta un análisis ecológico utilizando algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2003), a fin de indagar cuales son los significados institucionales de los objetos matemáticos, cuáles son las relaciones implícitas y explicitas de los elementos y los significados que se ponen en juego cuando los estudiantes de ingeniería se enfrentan a la resolución de éstos problemas. El análisis tiene como propósito caracterizar la complejidad ontosemiótica de problemas de libros de texto y los conflictos potenciales que puedan producirse en los estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, México.*
Palabras clave: ontosemiótica, análisis semiométrico, análisis ecológico

Introducción

Actualmente las diferentes universidades del mundo, se encuentran ante el reto de formar ingenieros con una formación más sólida en el área básica, para que aborden problemas de diseño y aplicación tecnológica. En la mayoría de las licenciaturas de ingeniería, el 25% de la carga curricular está compuesto por cursos del área de matemáticas. El curso de ecuaciones diferenciales se considera una asignatura clave para todas las ramas de la ingeniería siendo el enlace que relaciona los cursos de cálculo con problemas propios de la disciplina. Las ecuaciones diferenciales permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; como crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos eléctricos, etc. El presente trabajo está inserto en una investigación de mayor alcance donde el objetivo central es establecer las relaciones entre los diversos significados de los objetos matemáticos (ecología de significados), que se ponen en juego cuando un estudiante de ingeniería intenta resolver problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden. La investigación se realiza mediante el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

Este reporte corresponde a una primera etapa, donde se realizó un análisis de problemas típicos de crecimiento y temperatura, correspondientes a ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello se utilizaron algunas herramientas teórico-metodológicas de dicho enfoque, para caracterizar la complejidad ontosemiótica e identificar los conflictos potenciales que puedan producirse en los estudiantes.

Marco Teórico

El estudio se realizó desde el enfoque Ontosemiótico de la Cognición para la Instrucción Matemática (EOS), el cual se basa en una concepción pragmática u operacional del significado, un acercamiento antropológico que considera la matemática como una actividad humana, que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones por lo que todo conocimiento es relativo a una institución. (Godino y Batanero, 1994, Godino, 2002, 2003)

El EOS considera dos herramientas de análisis: *Semiométrico* y *Ecológico.* En un estudio semiométrico (Contreras y Ordoñez, 2006) se requiere caracterizar aquellos problemas que se presentan a los estudiantes para generar el significado propio de las ecuaciones diferenciales; como son el tipo de representaciones, los conceptos y argumentos utilizados; el lenguaje, etc. *El ecológico*: está centrado en lo que rodea al objeto. Para analizar, interpretar y resolver el campo de problemas de las ecuaciones diferenciales, debemos tomar en cuenta que no son un objeto aislado, requieren de conocimientos previos, de los conceptos que se ponen en juego para comprenderlas.

El Análisis Ecológico consiste en revisar las relaciones implícitas y explicitas dentro de los elementos que aparecen cuando un estudiante trata de resolver problemas. Cuáles son los significados que él pone en juego, o bien, utiliza para dar explicación a los nuevos conceptos que aparecen en dicho ejercicio; por ejemplo el caso de una expresión matemática, un signo, etc. Se considera conflicto semiótico a la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción, puede explicar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes y las enseñanzas implementadas. (Godino, 2003).

A continuación se presenta un grafico que muestra un esquema de las acciones principales del análisis ontológico semiótico:

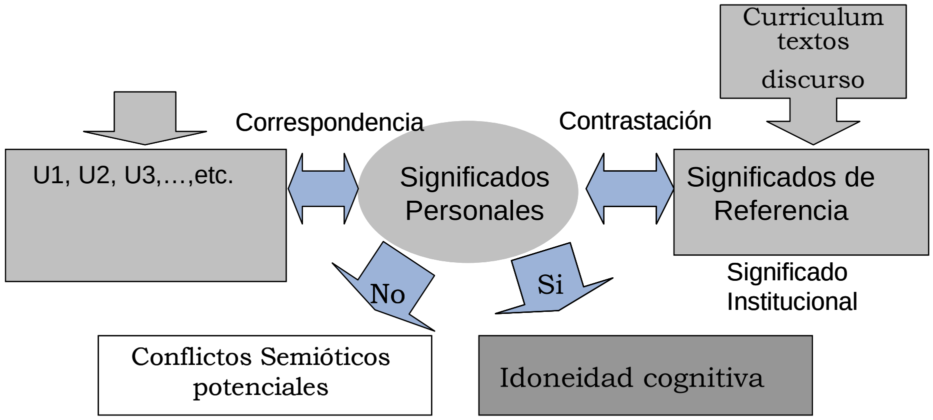


Fig. 1 Análisis Ontológico-semiótico

Los elementos primarios del EOS son: El lenguaje, las situaciones-problémicas, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos. Los elementos anteriores, de acuerdo al rol de lenguaje con que participan pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal-institucional, Elemental-sistémico. (Godino y Batanero, 1994).

Método

Se seleccionaron problemas típicos, de crecimiento y de temperatura, del texto de Ecuaciones Diferenciales de Zill (2003, pp. 96-97). Lo anterior debido a que es uno de los más utilizados por los profesores que imparten este curso en la Facultad de Ingeniería. Para el análisis de los problemas, cada uno de ellos, se ha dividido en unidades de análisis, que están relacionados con los elementos primarios del EOS: *El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado en el texto, si se introducen notaciones y de que tipo, grafico, numérico, etc. *Las situaciones*, como son presentados o como son abordados los ejemplo de problemas en el texto. *Las acciones o procedimientos*, que hace el texto para resolver ejemplos tipo. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino y Batanero, 1994). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

La tabla 1, muestra en la primera columna las unidades de análisis; la segunda describe el tipo de elemento de significado y en la última columna aparecen las observaciones correspondientes. El criterio para definir cada unidad de análisis, fue el cambio de elemento de significado, el cambio de notación, el uso o identificación de una propiedad, o la descripción, sistematización y validación.

Análisis

A continuación se presenta la tabla 1, como resultado del análisis realizado a uno de los problemas de Crecimiento.

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_0	Crecimiento y Decaimiento	Elemental-Sistémico	Titulo de la introducción
U_1	El problema de valor inicial: $\frac{dx}{dt} = kx$, $x(t_0) = x_0$ (1)	Situación-problémica sistémica, que se puede subdividir en: U_{1-1} lenguaje natural + U_{1-2} lenguaje simbólico	El autor hace mención a un concepto revisado en una unidad anterior (conocimiento previo). Utiliza una situación sistémica. No explicando los términos involucrados.
U_2	en donde k es una constante de proporcionalidad	Concepto expresado en lenguaje natural	El autor asume que el estudiante comprende lo que significa *constante de proporcionalidad*, lo cual no siempre es cierto.
U_3	Se emplea como modelo de distintos fenómenos en los que intervienen crecimiento o decaimiento o desintegración	Situación sistémica expresada en lenguaje natural	Aquí el autor le asigna un sentido a la expresión anterior (un uso)
U_4	Haciendo mención a la primera sección del texto “en biología se ha observado que en cortos periodos, la rapidez de crecimiento de algunas poblaciones (como bacterias o animales pequeños) es	Se define la situación en lenguaje natural utilizando dos conceptos. Se puede subdividir en: U_{4-1} rapidez de crecimiento	El autor menciona dos conceptos asumiendo que el estudiantes los sabe interpretar y relacionar: Rapidez y proporcionalidad

	proporcional a la población presente en el tiempo t.	U_{4-2} proporcional a la población presente	
	Descripción	**Tipo**	**Observaciones**
U_5	Si conocemos una población en cierto tiempo inicial arbitrario t_0 la solución de (1) nos sirve para predecir la población en el futuro –esto es, para $t>t_0$.	Situación general expresada en lenguaje natural	El autor pretende reforzar las afirmaciones anteriores en forma general de cuando usar la ecuación (1) y para que nos sirve.
U_6	Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t=1h, la cantidad medida de bacterias es 3/2 P_0. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.	U_{6-1} Situación problema Especifico expresada en lenguaje natural U_{6-2} rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) (concepto)	El autor supone que el lector deberá interpretar este problema presentado en lenguaje natural e identificar y relacionar los datos con la expresión utilizada para su resolución
U_7	**Solución**: primero resolveremos la ecuación diferencial (1) reemplazando el símbolo x por P	Procedimiento expresado en lenguaje natural	Falta información: por qué se están cambiando las variables? No menciona la relación entre el caso general con lo particular.
U_8	Si $t_0=0$, la condición inicial es $P(0)=P_0$ A continuación usaremos la observación empírica que $P(1)=3/2P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k	Proposiciones expresadas en lenguaje natural	Escrita de esta manera la información no es fácil para el lector reconocer los datos del problema.
U_9	Observe que la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt}=kP$, es separable y lineal al mismo tiempo.	Proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	Se motiva al lector a relacionar el modelo matemático con dos de los métodos vistos previamente.
U_{10}	Cuando se escribe en la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dP}{dt}-kP=0$, Se aprecia por inspección, que el	U_{10-1} Procedimiento expresado en lenguaje natural U_{10-2} proposición expresada en lenguaje simbólico. U_{10-3} proposición	El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por el lector. El registro simbólico también.

	factor integrante es e^{-kt}	expresada en lenguaje natural y simbólico	
U_{11}	Al multiplicar ambos lados de la ecuación por este termino, e integrar, se obtiene $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P]=0 \quad y \quad e^{-kt}P=c$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Se asume que el lector reconoce el método anterior y se omiten los pasos completos del procedimiento de resolución de la ecuación.
U_{12}	Por consiguiente, $P(t)=Ce^{kt}$ ahora sustituiremos las condiciones iniciales del problema, cuando t=0, $P(0)=P_0$, por lo que $P_0 = Ce^{0} \Rightarrow P(t)=P_0e^{kt}$.	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	En esta parte se presentan las sustituciones de las condiciones iniciales, para obtener la solución particular del problema
	Descripción	**Tipo**	**Observaciones**
U_{12}	Cuando t =1, $P(1)=3/2P_0$, luego entonces $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^{k(1)} \Rightarrow \frac{3}{2}=e^{k(1)}$ por lo que $k=Ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0.4055$, con lo cual nos queda la siguiente ecuación $P(t)=P_0e^{0.4055t}$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Los procedimientos son claros pero de nuevo se valen de algunas simplificaciones que para el estudiante no son obvias, se da por hecho que se cuenta con el dominio de algunas reglas de los logaritmos y/o exponenciales.
U_{13}	Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias despejamos t de $3P_0=P_0e^{0.4055t} \Rightarrow 0.4055t=Ln3$, y así tenemos: $t=\frac{Ln3}{0.4055}\approx 2.71 horas$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Aquí de nueva cuenta se presentan los procedimientos, con las omisiones mencionadas en el la unidad anterior.

Tabla 1. Análisis de un problema tipo

Conclusiones

A partir del análisis mostrado en la tabla 1, del problema de crecimiento de bacterias podemos concluir lo siguiente:

a) Conocimientos Previos de la materia: en los libros de texto de cálculo se dice que la expresión $\frac{dy}{dx}$, es un símbolo inseparable y que significa entre algunas cosas una razón de cambio, más sin embargo en el contexto de las ecuaciones diferenciales el autor separa este cociente sin los argumentos suficientes.

b) Conocimientos del Contexto (Biología, Física, Química, etc.): un error u omisión muy frecuente en los libros de texto de ecuaciones diferenciales, es que el autor supone que el lector conoce una gran variedad de contextos de aplicación para la presentación de sus problemas. Siendo este punto donde se da comúnmente un conflicto entre los significados del lector y los del autor.

c) Manejo adecuado del lenguaje: el lenguaje natural que utiliza el autor no esta escrito en una forma lo suficientemente clara y precisa.

d) La descripción de los procedimientos: los procedimientos desarrollados no son argumentados y presentan omisiones. Los pasos descritos para la resolución del problema, presentan laguna o brincos, de procedimientos que para el estudiante no son obvios. Además falta argumentar el por qué de los pasos descritos en tal procedimiento.

De lo anterior se percibe que del análisis semiótico o de significados que se ha aplicado y desarrollado en este trabajo es un recurso de utilidad para la investigación en didáctica de las matemáticas. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad, tales como el uso de términos y expresiones; nos arroja luz sobre los conflictos de significado y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Referencias bibliográficas

Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 9(1), 65-84.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14 (3)*, 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un Enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22 (2/3)*, 237-284.

Godino, J. D., (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada. Obtenido enero 2, 2007 en http//www.ugr.es/local/jgodino

Zill, D. (2003). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelado*. México: Thomson.

EVALUACIÓN DE REPORTES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: USO DE LA RÚBRICA

Adriana Gómez Reyes, Liliana Suárez Téllez
CECyT 13, CFIE; Instituto Politécnico Nacional México
orodelsilencio@yahoo.com.mx, lsuarez@ipn.mx
Campo de investigación: Evaluación Nivel: Medio

Resumen. *Los instrumentos de evaluación necesitan repensarse para que cumplan con el objetivo de proporcionar información sobre el logro de los aprendizajes, con toda la complejidad que se requiere actualmente. Uno de los propósitos de este trabajo de investigación es desarrollar y adecuar algunas herramientas para evaluar el aprendizaje al elaborar reportes de resolución de problemas. En este trabajo se reporta el uso de la rúbrica como instrumento para evaluar una experiencia de aprendizaje aplicada a estudiantes de diversas escuelas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en la Ciudad de México. Dicha aplicación se realizó como parte de los cursos normales, aplicados por los profesores de los grupos.*
Palabras clave: evaluación, resolución de problemas, rúbrica, elaboración de reportes

Introducción

Se toma como punto de partida un planteamiento que centra su atención en la escritura de los estudiantes al momento de reportar el trabajo matemático realizado en una tarea en equipo. Por un lado Suárez (2000) identificó la función de reportes realizados por estudiantes durante la resolución de problemas en equipo, como un medio que ayuda a hacer explícitas las ideas, los argumentos y los procedimientos de los estudiantes, ayudando a que ellos mismos realicen actividades de metacognición al tener la oportunidad de revisar su propio proceso de resolución de problemas. Y por otro lado, se identifica como un medio para el profesor o el investigador interesado en observar el desempeño de los estudiantes.

Por ser la resolución de problemas un trabajo que enfrenta a los estudiantes con situaciones novedosas, permite observar su creatividad y las habilidades desarrolladas por los estudiantes para aprovechar los conocimientos previos.

Diversos materiales didácticos (véase, por ejemplo IPN, 2004b) señalan la necesidad de considerar explícitamente la autoevaluación del aprendizaje al realizar reportes que reflejen el proceso de resolución de un problema; además incluyen recomendaciones para realizar dichos reportes: que se realice mientras se resuelve el problema, que se elabore una conclusión que refleje las diferentes ideas generadas a lo largo del proceso, aun cuando estas se hayan abandonado posteriormente.

Hipótesis

Esta investigación revisa el uso de la rúbrica para hacer más objetiva la evaluación de los reportes de resolución de problemas. Se considera además como esta herramienta da a los estudiantes información importante sobre su desempeño.

Marco conceptual

En su trabajo Suárez (2000) hace énfasis en el doble beneficio de los reportes al aprendizaje de los estudiantes, al fungir como mediadora entre la generación de ideas y la resolución de problemas, y al obligarlos a organizar dichas ideas.

Según IPN (2005), la evaluación es la observación, recopilación y análisis de la información que permita tomar decisiones con respecto al aprendizaje logrado por los estudiantes. Su finalidad es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. La asignación de una calificación debe ser solo un reflejo del análisis realizado sin ser en sí la finalidad de la evaluación.

De acuerdo con Pellegrino, Chudowsky y Glaser (2001), los instrumentos de evaluación usuales corresponden a concepciones anteriores del aprendizaje y necesitan adoptarse instrumentos diferentes para que cumplan con el objetivo de proporcionar información sobre el logro de los aprendizajes, con toda la complejidad que se requiere actualmente. Gómez (2007) reporta la necesidad de una amplia variedad de instrumentos que cubran el amplio abanico de conocimiento y habilidades que se pretende sean adquiridas por los estudiantes.

La evaluación que se explora en esta investigación analiza el uso de las descripciones expuestas por Suárez (2008), por esta razón es necesario desarrollar y adecuar algunas herramientas para evaluar el aprendizaje a través de los reportes de resolución de problemas. En este trabajo se reporta en particular el uso de la rúbrica como instrumento para evaluar los reportes de resolución de problemas presentados por los estudiantes.

La rúbrica tiene la característica de hacer objetiva la evaluación de los reportes de resolución de problemas al identificar claramente las características principales o criterios a observar. Por otro lado requiere establecer previamente la escala y los requerimientos correspondientes a cada una de dichas características, logrando la estandarización de la evaluación.

Otra de las grandes ventajas de las rubricas es que muestra a los estudiantes cual es el dominio que se espera obtengan del aprendizaje que se está evaluando. Se recomienda construir la rúbrica junto con los estudiantes para que participen en el análisis de la actividad volviéndose participes de su evaluación y responsables de su propio aprendizaje, según Flores y Gómez (en prensa).

Suárez (2008) ha mostrado que los estudiantes no movilizan inmediatamente sus recursos algebraicos, lo que los obliga a que usar descripciones que varían en verbales, icónicas, gráficas, numéricas y finalmente algebraicas. En el presente trabajo se presenta la rúbrica que evalúa la comprensión de la gráfica que logran los estudiantes.

Desarrollo de la experiencia

Se aplicaron varias actividades que implican situaciones de movimiento, todas extraídas por Flores (2007) de los Paquetes Didácticos desarrollados por la Academia Institucional de Matemáticas del IPN (2004a, 2004c). Para el análisis se eligió el reporte presentado en la imagen 1, correspondiente a una Actividad de Aprendizaje (AA) titulada Acércate más, que involucra una situación de modelación del movimiento con uso de sensores y calculadoras graficadoras.

> *"- AA 'Acércate más', actividad de aprendizaje que consiste en partir de la gráfica de la posición de una persona para problematizar la presencia simultánea de tres órdenes de variación a partir de preguntas sobre la posición (la función, f(x)), la velocidad (la primera derivada, f'(x)) y la aceleración (la segunda derivada f''(x)))." (Flores, 2007, 64).*

De los análisis realizados se observan algunas de las características distintivas. Los estudiantes que no están habituados a la entrega de reportes privilegian la escritura de los procedimientos, no hay cuidado en explicar las ideas, los planes fallidos o los resultados, para ellos el resultado sólo es la gráfica o el valor que obtienen. Por otro lado, cuando los estudiantes saben lo que se valora, lo consideran, esforzándose más en comunicar estas ideas. Son más cuidadosos para dejar evidencias de su comprensión, del uso de estrategias y de la verificación de la solución; avanzando así al desarrollo de competencias de metacognición y control.

Se utilizan diferentes rúbricas, cada una para evaluar algunos aspectos observados en el reporte elaborado por los estudiantes. Elaboradas por las autoras y algunas de ellas utilizadas en otras investigaciones como Gómez (2007) y Flores y Gómez (en prensa). Estas rúbricas no son exclusivas, pueden utilizarse en diferentes actividades; pueden variar o modificarse de acuerdo a la actividad específica, al momento en que se realiza la actividad y a los estándares establecidos por el profesor o en conjunto con los estudiantes.

ESTÁNDARES CRITERIOS	EXPERTO	AVANZADO	APRENDÍZ
Visión global de la gráfica	Reconocen que no todos los trazos son rectos, pero además identifican en que casos se tienen rectas o cuando estas son horizontales.	Al trabajar con el sensor reconocen por que no todos los trazos son rectos.	Logran hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición.
Visión puntual de la gráfica	Distinguen e interpretan los intervalos entre, rápido, más rápido, lento o más lento; así como los extremos relativos.	Distinguen e interpretan los intervalos entre rápido, más rápido, lento o más lento	Identifica pequeños intervalos donde cambia de dirección o velocidad.
Pendiente	Relacionan pendiente con velocidad, encontrando sentido a la pendiente negativa como cambio de dirección.	Relaciona pendiente con velocidad, (independiente del nombre que le dé)	No identifica la pendiente.
Relación gráfica de posición y de velocidad.	Identifica los extremos relativos de la gráfica de posición con las raíces de la gráfica de velocidad.	Relaciona el signo de la velocidad con la pendiente de la posición.	No relaciona ambas gráficas.

Tabla 1 - Gómez (2007)

La tabla 1 corresponde a la rúbrica de uso de las gráficas, elaborada por Gómez (2007) para actividades donde se trabaja con gráficas y modelación de movimiento, por lo que los criterios considerados corresponden al uso y comprensión de las gráficas, aspecto a observar en este tipo de trabajo, describiéndolas de acuerdo a los estándares que clasifican el trabajo realizado como experto, avanzado o aprendiz.

Análisis

Desde el punto de vista de aprendizajes que se quieren lograr, se analiza el reporte siguiente que se refiere a la AA mencionada anteriormente. La cuál se reporta en la investigación de la maestra Flores (2007)

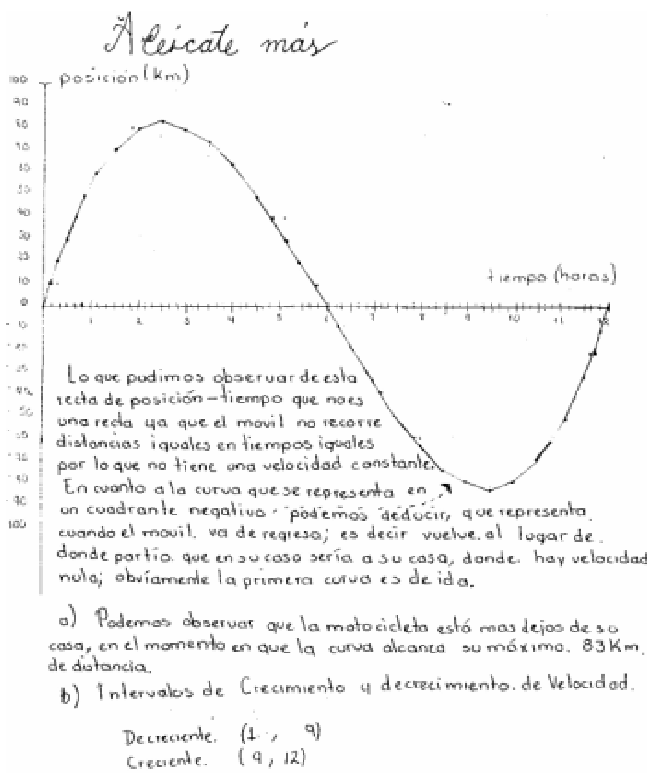


Imagen 1 - Flores (2007)

Para referirse a la gráfica los alumnos (imagen 1) mencionan “*recta de posición-tiempo*”, pero aclaran que “*no es una recta*” y lo justifica explicando “*no es una recta ya que el móvil no recorre distancias iguales en tiempos iguales*”. Le dan un sentido a la curva negativa “*en cuanto a la curva que se representa en un cuadrante negativo,* (y la señala), *podemos deducir, que representa cuando el móvil va de regreso: es decir vuelve al lugar de donde partió, que en su caso sería su* *casa, donde hay velocidad nula; obviamente la primera curva es de ida*.” En los últimos párrafos (imagen 1) el equipo contesta las preguntas planteadas en la actividad de aprendizaje que se refieren a una lectura de puntos e intervalos sobre la gráfica: el punto en el que se encuentra más alejado de su casa y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad.

Uso de las rúbricas para analizar el desempeño de los estudiantes

La rúbrica presentada en la tabla 1 se utiliza para analizar dicho desempeño como se muestra a continuación, revisando cada uno de los criterios a través de los estándares que se establecieron en la misma herramienta.

ESTÁNDARES CRITERIOS	EXPERTO	AVANZADO	APRENDÍZ
Visión global de la gráfica	Reconocen que no todos los trazos son rectos, pero además identifican en que casos se tienen rectas o cuando estas son horizontales.	Al trabajar con el sensor reconocen por que no todos los trazos son rectos.	Logran hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición.
Visión puntual de la gráfica	Distinguen e interpretan los intervalos entre, rápido, más rápido, lento o más lento; así como los extremos relativos.	Distinguen e interpretan los intervalos entre rápido, más rápido, lento o más lento	Identifica pequeños intervalos donde cambia de dirección o velocidad.
Pendiente	Relacionan pendiente con velocidad, encontrando sentido a la pendiente negativa como cambio de dirección.	Relaciona pendiente con velocidad, (independiente del nombre que le dé)	No identifica la pendiente.
Relación gráfica de posición y de velocidad.	Identifica los extremos relativos de la gráfica de posición con las raíces de la gráfica de velocidad.	Relaciona el signo de la velocidad con la pendiente de la posición.	No relaciona ambas gráficas.

Tabla 2 - Gómez (2007) modificada

En cuanto a la *visión global de la gráfica* reconocen que los trazos no son rectos, incluso se menciona en el reporte como usan la palabra "recta" pero explican que su gráfica no es una recta; por lo que su trabajo en este rubro se clasifica como un trabajo *experto*, como se indica en la Tabla 2.

Para la *visión puntual de la gráfica*, se observa que describen el cambio de sentido del movimiento, e incluso reportan intervalos de crecimiento y decrecimiento (aunque tengamos que revisar con cuidado los límites de estos intervalos); sin embargo no hablan de velocidades, ni distinguen cuando el movimiento es más lento o más rápido. En este rubro se identifica el trabajo como *aprendiz* (tabla 2).

Al no presentarse referencia a la *pendiente* se clasifica el trabajo como *aprendiz* para este criterio (tabla 2).

No se hace más referencia a la velocidad, que cuando habla de velocidad nula, por lo que el trabajo en la *relación entre posición y velocidad* es también de *aprendiz* (tabla 2).

Así las rúbricas muestran a los estudiantes, a manera de retroalimentación, hacia donde deben avanzar para lograr un nivel de expertos en cada uno de los criterios evaluados.

Conclusiones

Los reportes de resolución de problemas pueden ser bastante desordenados, sobre todo cuando los estudiantes no están acostumbrados a presentar este tipo de trabajo, según observa Gómez (2007). Por lo que la necesidad de hacer la evaluación objetiva es importante.

Diversas investigaciones, como Flores y Gómez (en prensa) o Pellegrino et al (2001), hacen referencia al uso de herramientas alternativas para la evaluación de aprendizaje, como pueden ser la Bitácora COL, la Rúbrica, la Matriz de Resultados, la Lista de Cotejo. Cada una de estas herramientas presenta ventajas importantes que necesitan estudiarse para aprovecharlas al máximo.

En esta investigación se utilizó la rúbrica para evaluar los reportes de resolución de problemas observando que su evaluación está apoyada por los estándares establecidos, volviendo se más objetiva, y la retroalimentación que se logra con las rúbricas motiva y orienta a los estudiantes para que puedan completar el aprendizaje requerido. Se usan distintas rúbricas especializadas en diversos aspectos del trabajo, incluso para evaluar competencias que no son estrictamente matemáticas como son el trabajo en equipo o el uso de la tecnología.

La relación y organización de las ideas que reporta Suárez (2000) se hace notar en la rúbrica como instrumento de evaluación, apoyando sobre todo la organización de los aprendizajes logrados.

Referencias Bibliográficas

Flores, C. (2007). *Variaciones simultáneas de primer y segundo ordenes en una situación de graficación y modelación de movimiento.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA. IPN. México.

Flores, H y Gómez, A (2007). El problema de la evaluación. Material no publicado para el curso *Planeación didáctica para el curso de Matemáticas II.* CCH. UNAM. México.

Flores, H y Gómez, A (en prensa). Aprender Matemática Haciendo Matemática, la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. México

Gómez, A. (2007). *La evaluación en actividades de aprendizaje con uso de tecnología.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA. IPN. México.

IPN (2004a). *Álgebra. Libro del Estudiante*. México: IPN.

IPN (2004b). *Geometría Analítica. Libro del Profesor.* México: IPN.

IPN (2004c). *Geometría Analítica. Libro del Estudiante.* México: IPN.

IPN (2005). *La evaluación de los aprendizajes*. Departamento de desarrollo curricular, Dirección de Educación Media Superior (DEMS). México: IPN.

Pellegrino, J; Chudowsky, N y Glaser, R. (Eds.) (2001). Knowing What Students Know: The Science and Design of Educational Assessment. *National Research Council.* EUA.

Suárez, L. (2000). *El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas.* Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación. Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México.

EL ESTADO ACTUAL DEL CURRÍCULUM MATEMÁTICO ESCOLAR

Onofre Hernández Altamirano, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero México
onofre_2@hotmail.com, cdolores@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Otro - Análisis Curricular Nivel: Básico y Medio

Resumen. *En este documento se presentan los resultados de un proyecto de investigación que actualmente está en proceso. En esta investigación pretendemos encontrar respuesta a la pregunta relativa a qué estado guarda el currículum matemático escolar en la actualidad en México. La última reforma curricular del bachillerato (2004) y de la secundaria (2006) está orientando la enseñanza de la matemática hacia el desarrollo de competencias mientras que la introducida en 1993 se enfocaba hacia la resolución de problemas. El currículum actual enfatiza el uso de la matemática en las situaciones cotidianas mientras que las anteriores eran proclives a transmitir contenido o resolver problemas intramatemáticos.*
Palabras clave: currículum matemático escolar, modelo para el análisis del currículum

Antecedentes

Al revisar las investigaciones que se han realizado en torno del currículum matemático escolar nos hemos encontrado con que hay escasas publicaciones que lo hayan tomado como objeto específico de estudio. En cambio existe una considerable abundancia de trabajos que estudian al currículum en un sentido general.

Algunos escritos están referidos al estudio de cómo afecta el nuevo cambio curricular al profesorado (Ávila, 2001, 2004; Horruitiner, 2006), es decir las nuevas orientaciones didácticas, los nuevos enfoques etc. Hay otros escritos que se refieren al estudio de los nuevos enfoques, tendencias y orientaciones que están en el currículum matemático o que pudieran estarlo (Alsina, 2000; Riera, 2004; Díaz-Barriga, 2005; Díaz, 2006). Hay escritos que hacen duras criticas a los resultados obtenidos por las evaluaciones (Berliner, 2005 citado en Coll y Martín, 2006) y otros que muestran los efectos inesperados y negativos de las reformas que ponen el acento de forma prioritaria o exclusiva en la evaluación de los estándares de aprendizaje (Darling-Hammond, 2003; Haymore Sandholtz, Ogawa y Paredes Scribner, 2004; Sheldon y Biddle, 1998; citados en Coll y Martin, 2006).

Según Salomón (2003) (citado por Coll y Martín, 2006) los resultados obtenidos en conjunto con los de las evaluaciones proporcionan información para conducir y orientar los procesos de revisión y actualización del currículum y, a través de ellos, mejorar la eficacia y la calidad de la educación escolar.

En ese sentido consideramos que las investigaciones anteriormente cobran importancia, y nos han proporcionado elementos importantes, los cuales pusimos en consideración en nuestro análisis. Sin embargo encontramos que en nuestro país existe poca investigación en este campo, en particular investigaciones que tomen como objeto de estudio al currículum matemático escolar.

Problema y objetivo

En México, en los últimos años en cuanto a las evaluaciones acerca de la calidad de la educación no se han obtenido buenos resultados, esto lo indican los organismos internacionales de evaluación (PISA, 2003,2006), y los organismos de evaluación nacional (ENLACE, 2007, 2008). Las evaluaciones han revelado que los alumnos de nuestro país tienen una fuerte deficiencia en los conocimientos matemáticos. Frente a estos resultados la Secretaria de Educación Pública ha lanzado nuevas reformas curriculares, con el fin de que las instituciones que se encargan de educar a los niños y jóvenes, estructuren los planes y programas de estudio y con esto poder alcanzar mejores resultados. Según los estudios realizados por la DGETI (1988) en la mayor parte de las escuelas de México los programas son actualizados por los docentes, quienes en los nuevos programas tratan de plasmar en forma concreta su experiencia académica adecuando los contenidos a las necesidades reales de los alumnos y a las posibilidades de su impartición y tiempos, en función de los objetivos de cada área de conocimiento. Desde nuestra perspectiva consideramos que los estudios hechos por los profesores es más una actividad práctica que producto de un análisis científico, donde se ha privilegiado la empiria. En la actualidad en algunas universidades de nuestro país como la nuestra los profesores son los que se encargan de actualizar los planes y programas de estudio.

Consideramos que hacen falta organismos estatales que realicen investigaciones en esta dirección, que se dediquen a realizar investigaciones curriculares regionales, no sólo para diagnosticar, sino que, sobre la base de estas investigaciones, elaborar una propuesta de reorientación del currículum. No se trata sólo de conocer el estado que guarda el currículum sino de conocer para transformar y de este modo mejorar la educación matemática. Con base a lo anteriormente dicho, en este trabajo tratamos de encontrar respuesta a una pregunta relativa a cuál es el estado del currículum matemático escolar en la actualidad en México, con el objetivo de elaborar un análisis acerca dicho estado. Los resultados de este trabajo, pueden sentar las bases para futuras investigaciones, y proporcionar a los investigadores y diseñadores del currículum elementos que guíen las nuevas reformas curriculares.

Marco Teórico y metodológico

Nuestro trabajo se fundamenta principalmente en dos elementos teóricos: acerca de lo que se asume como currículum en general y acerca de lo que se asume como currículum matemático escolar. Es por eso que en este apartado presentamos el siguiente análisis, comenzando por adoptar una definición de currículum y una definición de currículum matemático escolar.

Existen varias concepciones acerca del currículum, en este trabajo vamos a considerar las que han caracterizado tres investigadores. Ruiz (2001) identifica tres categorías, el *currículum como producto*, este es considerado como el documento escrito que contiene como elementos mínimos los fines y propósitos educativos, una selección y organización de contenidos, las tareas académicas a realizar y un sistema de evaluación; *currículum como proceso*, este requiere del análisis profundo del contexto social, económico, político y educativo en el cual está inserto; *currículum como práctica social y educativa*, se refiere desde el propio modelo curricular, en su aplicación en la vida académica de la escuela, y en su evaluación, siempre bajo una perspectiva crítica y globalizadora.

Alsina (2000) señala que diversos investigadores coinciden en distinguir cuatro tipos, *el currículum oficial* viene dado en el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben superarse; *el currículum potencial* queda determinado en publicaciones docentes, libros de textos, materiales, etc.; el currículum impartido es el que efectivamente el profesorado desarrolla en la clase o a lo largo del curso; *el currículum aprendido*, es el que efectivamente queda adquirido por el alumnado y aún podríamos distinguir aquí el factor temporal de retención u olvido de lo aprendido.

Zabalza (2006) identifica seis tipos, *el currículum formal* se refiere al conjunto de documentos o disposiciones en las que se recogen las propuestas oficiales del trabajo formativo a desarrollar, tanto las generadas desde los gobiernos, como las elaboradas por cada institución y las de los profesores concretos; *el currículum real*, es realmente lo que se hace, es decir las actividades curriculares realmente llevadas a cabo; *el currículum ofrecido*, se refiere a lo que los estudiantes han aprendido a través de lo que se les ofrece, es decir lo que un grupo de sujetos han aprendido de acuerdo a una acción; *el currículum asimilado*, se refiere a lo que efectivamente cada estudiante logra asimilar, es decir lo que un estudiante es capaz por si solo asimilar de acuerdo a un plan; *el currículum informal o complementario,* se refiere a las actividades que no forman parte del programa académico formal, pero forman un importante papel en la formación de sujetos a los que se les ofrecen estas oportunidades de desarrollo personal y de adquisición de nuevas competencias, estas actividades las desarrollan las instituciones formativas, como son seminarios, obras de teatro, cursos de tecnología; *el currículum nulo*, lo conforman todos aquellos contenidos formativos que están presentes, o podrían estarlo, en otras instituciones y en estudios similares de otros países, pero que no se incluyen por falta de espacio, por razones estratégicas o curriculares de diverso tipo.

Desde nuestro punto de vista ciertas definiciones comparten similitudes y están interrelacionadas entre si, por ejemplo en las investigaciones de los tres autores analizadas observamos que, el currículum como producto, el oficial y el formal ambos se refieren a al currículum formativo, es decir el proyecto formativo que se pretende desarrollar en una institución educativa, los investigadores logran clasificar las concepciones de currículum de acuerdo a sus características particulares, las cuales logran diferenciar uno de otro. Por otro lado, Coll (2007) señala que el currículum pretende responder cuatro preguntas básicas: ¿Qué enseñar?, qué dimensiones del desarrollo se pretende potenciar a través de la escuela; qué contenidos de aprendizaje se pretende que los sujetos vayan adquiriendo; qué experiencias formativas se les va a ofrecer a lo largo de la escolaridad; ¿Cuándo enseñar?, cómo se va a ordenar temporalmente el acceso de los estudiantes a los aprendizajes; qué contenidos y qué experiencias se les van a ofrecer-exigir en cada etapa de la escolaridad ¿Cómo enseñar?, bajo qué condiciones metodológicas y de disponibilidad de recursos se ha de realizar el recorrido formativo diseñado. Esas condiciones metodológicas se refieren tanto a los principios de procedimiento que regirán todo el proceso (por ejemplo: atención a la diversidad, no discriminación por razón de sexo, apertura al entorno, etc.), como a las orientaciones didácticas aplicables al desarrollo de cada etapa y de cada área; ¿Qué, cómo y cuándo evaluar?, qué mecanismo de comprobación es aconsejable poner en marcha de cara a constatar si el proceso en curso es coherente con las expectativas que con respecto a él se han establecido (tanto en lo que se refiere a las intenciones señaladas como a las condiciones marcadas al proceso educativo)

En cuanto al currículum matemático escolar, las definiciones que se le atribuyen se sustentan en lo que se conoce como currículum en general. Sólo citaremos dos definiciones. Rico y Sierra (1997) cuando habla del currículum de matemáticas se refieren a los planes y programas de formación relativos a matemáticas, estos como producto de la actividad social y cultural de una comunidad, que responden y se ajustan a determinados condicionamientos intelectuales, pero también satisfacen criterios éticos y políticos. Y otra definición por el NCTM (1991) el cual define al currículum de matemáticas como un plan operativo que detalla que matemáticas necesitan conocer los alumnos, cómo deben alcanzar los alumnos estos objetivos curriculares, qué deben hacer sus profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen su conocimiento matemático y el contexto en el que se desarrolla el proceso enseñanza-aprendizaje.

Para los propósitos de este trabajo adoptamos como marco teórico fundamental la definición que de currículum plantea Alsina (2000), Ruíz (2001) y Zabalza (2006). En el oficial, como producto y formal, pero relativas a matemáticas como se menciona en Rico y Sierra (1997) y en la NCTM (1991). De manera que nuestro análisis gira en torno a preguntas tal cómo: ¿Qué enseñar? ¿Cuándo enseñar? ¿Cómo enseñar? ¿Qué, cómo y cuándo evaluar?

En síntesis la primera proporciona información sobre los objetivos generales (estos definidos en términos de capacidades que el estudiante debe lograr al termino de cada etapa) y contenidos de la enseñanza. La segunda recoge información de cómo están ordenados y secuenciados los objetivos y contenidos. La tercera recoge información de cómo está la planificación de actividades de enseñanza, las cuales van a permitir lograr los objetivos. La cuarta da información de cómo verificar o juzgar si los objetivos se logran o no.

Con base en esto usamos el siguiente modelo para realizar el análisis del currículum matemático escolar. Dicho modelo lo estructuramos por medio de unidades de análisis de la siguiente manera.

Modelo para analizar el currículum matemático escolar oficial

Resultados preliminares

El currículum matemático escolar (CME) actual tiene dos características fundamentales:

1. Reforma de 1993. La Educación Básica (Primaria y Secundaria) que se caracteriza por su incidencia en la resolución de problemas. En consecuencia pone mayor importancia en desarrollar capacidades y habilidades en el estudiante para emplearlas en la resolución de problemas. Privilegia los contenidos conceptuales y procedimentales, dándole menor importancia al contenido actitudinal.

2. A partir de 2004 - 2006 para la secundaria y el Nivel Medio Superior, se centra en el alumno y en las normas de competencia laboral, donde la tecnología forma una parte fundamental para el desarrollo de las mismas. En consecuencia se pretende desarrollar un saber hacer (habilidades), con un saber (conocimiento) y la valoración de ese hacer (Valores y actitudes)

¿Qué enseñar? El contenido curricular actual

En la Reforma Curricular actual: en cuanto al contenido se pretenden desarrollar tres tipos (conceptual, procedimental y actitudinal). Sin embargo, aun se sigue privilegiando el desarrollo del conceptual, procedimental.

¿Qué enseñar? Los objetivos curriculares. Comparación

El CME de 1993, define sus objetivos en términos de habilidades, capacidades y acciones, mientras que en el CME actual en la secundaria y Bachillerato se definen casi igual sólo le agregan las actitudes y valores.

¿Cómo enseñar?

El CME actual, se establecen pocos aspectos normativos con carácter obligatorio, sin embargo se sugiere un conjunto de orientaciones didácticas: enseñanza mediante situaciones problemáticas, resolución de problemas, desarrollo de estrategias y habilidades, el trabajo en equipo, el uso de las tecnologías de la información, se sugiere al profesor leer materiales didácticos desarrollados por la comunidad de matemáticos educativos.

¿Cuándo enseñar?

La organización de los contenidos conceptuales tiene un orden lógico que corresponde al desarrollo disciplinario, se especifican los tiempos en los cuales se debe desarrollar cada contenido.

¿Cómo evaluar?

La evaluación se considera como un proceso continuo y flexible, mencionan tres tipos: diagnostica, formativa, sumativa.

Los cambios curriculares producidos en los últimos años en nuestro país obedecen a dos razones:

1. la adaptación a la realidad actual
2. Para subsanar errores.

La primera caso, motivado por las políticas de la globalización y el sector productivo y el mejoramiento de la calidad de la educación.

En el segundo caso, factores múltiples e interacciones desconocidas provocan errores que deben ser subsanados. El cómo y el cuándo responden a los dos criterios nombrados con anterioridad.

El CME actual, ha traído consigo nuevos planteamientos, a los que nos tenemos que adaptar o nos estamos adaptando. Pero no todos aceptan los cambios, esto provoca conflictos y dificultades que afectan el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J. M. *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XXI.* (13-21). España: Editorial Graó, de IRIF, S.L

Ávila, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre las reformas a las matemáticas. *Perfiles educativos* 23(93), 59-86

Ávila, A. (2004). Entre la costumbre y las profesiones de la innovación. La enseñanza de los números en primer grado. *Educación Matemática* 16(002), 21-48.

Coll, C. y Martín, L. (2006). Vigencia del debate curricular. Aprendizajes Básicos, competencias y estándares. *Ponencia presentada en el contexto de la Segunda Reunión del Comité Intergubernamental del Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe (PRELAC)*. Santiago de Chile: UNESCO. (Coll, C. y Martín, L., 2006)

Coll, E. (2007). *Psicología y currículum.* México: Editorial Paidos.

COSNET, (2004). *Reforma curricular del bachillerato tecnológico. Programa de estudios.* Subsecretaria de Educación e Investigación Tecnológica. SEP. Primera edición, México D.F.

COSNET, (1988). *Reforma curricular del bachillerato tecnológico.* Programa de estudios de tronco común. Subsecretaria de Educación e Investigación Tecnológica. SEP. Primera edición, México D.F.

Díaz, A. (2006). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles educativos* 28(111), 7-36

Díaz-Barriga, F. (2005). Desarrollo del currículo e innovación: Modelos e investigación en los noventa, *Perfiles educativos* 27 (107), 57-84.

El Proyecto PISA de la OCDE. (s.f.). Recuperado el 14 de septiembre de 2007, de dirección electrónica. (http://www.ince.mec.es/pub/pisa.htm)

Horruitiner, P. (2006). El reto de la transformación curricular. *Revista Iberoamericana de Educación* 3(40), 1-13.

NCTM, (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.*Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Rico, L y Sierra, M. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria.* España: editorial Síntesis.

Riera, E. (2004). Perspectivas curriculares en América Latina. *Revista Ciencias de la Educación* 1(23), 193-204.

Ruiz, E. (2001). *Propuesta de un modelo de evaluación curricular para el Nivel Superior. Una orientación cualitativa*. México: Formación Gráfica

SEP. (1993). *Plan y programas de estudio*. *Secundaria*. México: SEP.

SEP. (1993). *Plan y programas de estudio*. *Primaria*. México: SEP.

SEP. (2006). *Plan y programas de estudio. Secundaria*. México: SEP.

SEP., DGB, (2004). *Reforma curricular del bachillerato general. Programas de estudio de matemáticas.* Subsecretaria de educación superior e investigación científica. México D.F.

ENLACE (2007). Resultados de la Evaluación Nacional de logro Académico en centros escolares. México: SEP Consultado el 14/8/08 en: http://www.enlace.sep.gob.mx/

ENLACE (2008). Resultados de la Evaluación Nacional de logro Académico en centros escolares. México: SEP. Consultado el 4/10/08 en: http://www.sep.gob.mx/wb/sep1/bol2320808

Zabalza, M. (2006). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional.* Madrid: Narcea.

DESARROLLO DE INTUICIONES PARA EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO: ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA LA MEDICIÓN DE LA DISPERSIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Manuel Alfredo Urrea Bernal, Irma Nancy Larios Rodríguez
Universidad de Sonora México
maurr@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Formación de profesores, Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística
Nivel: Medio superior y Superior

Resumen. *El presente trabajo forma parte del proyecto "Dificultades y significados que presentan estudiantes y profesores respecto de las ideas básicas relacionadas con la Probabilidad y la Estadística". En particular, lo que aquí se reporta es el análisis de una de las acciones que forman parte de la estrategia de capacitación de un grupo de profesores del nivel medio superior y superior, esta acción consiste en la aplicación de una serie de actividades didácticas que se presentan a profesores en un curso taller, con el propósito de identificar el tipo de razonamiento que utilizan al tratar de medir la dispersión de un conjunto de datos y de promover el desarrollo de intuiciones al tratar de resolver situación en las que tenga que poner en juego las ideas fundamentales relacionadas con probabilidad y estadística.*
Palabras clave: intuiciones, razonamiento, probabilístico, profesores, estadística

Introducción

La reforma curricular que se ha estado impulsando en la Universidad de Sonora en los últimos años de manera explícita manifiesta la intención de centrar el proceso educativo en el desarrollo integral de los estudiantes.

Lo anterior por sí mismo plantea un cambio en el trabajo que debe realizar el profesor, porque tendrá que desarrollar estrategias didácticas pensando fundamentalmente en las acciones que debe desarrollar el estudiantes para que genere el conocimiento disciplinar que se contempla en el programa de materia.

Otro factor que se plantea en la reforma es el uso de nuevas tecnologías de la información y la comunicación, tanto en el proceso de enseñanza como en de aprendizaje, lo cual implica en muchos profesores un cambio en su forma de planear e impartir sus cursos.

La reforma curricular se realizó en todos los programas de licenciatura que ofrece la Universidad y como el Departamento de Matemáticas atiende los cursos de matemáticas de los programas de licenciatura, estos cambios repercuten en el quehacer de los profesores ya que en los nuevos planes de estudio se plantea centrar la atención del proceso educativo en el estudiante, lo cual genera un compromiso institucional respecto al tipo de trabajo que deben realizar los profesores, como representantes institucionales ante los estudiantes, ya que es el responsable de concretar lo que se propone en dichos planes de estudio, sin haber recibido la actualización y capacitación correspondiente.

Los aspectos considerados en el desarrollo del trabajo, como identificación del problema, objetivo y consideraciones teóricas, se presentan brevemente en las siguientes secciones.

Problemática de investigación

Los cambios en el modelo curricular de la Universidad generaron la discusión colectiva del personal docente de la Institución en general, y en particular este ambiente propició la integración de un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas, que trabajan en el Área de Ciencias Sociales impartiendo los cursos de Estadística, para discutir en torno a la estructura que tienen ahora los planes de estudio y tratar de entender el rol que deberán asumir ante estos cambios. Al interior de este grupo de trabajo se planteó el problema de diseñar una estrategia para promover su capacitación y actualización para enfrentar los retos que les representa el nuevo modelo curricular.

Es importante reconocer la situación de las instituciones del nivel medio superior y superior en México, en las que la mayor parte de su planta docente son profesionistas formados para desarrollar una actividad profesional diferente a la docencia y que por diversas razones se dedican a la docencia.

Nuestra institución no es ajena a esta problemática, en el grupo de profesores al que estamos haciendo referencia en este trabajo esta situación está presente y podemos encontrar licenciados en matemáticas, ingenieros en las diferentes ramas, biólogos, geólogos, etc.

La problemática general consiste en el diseño de una estrategia de capacitación que se ajuste a las necesidades de la planta docente, con formaciones profesionales tan diversas. La parte central de la estrategia consistió en que los profesores diseñaran actividades que una vez revisadas por el colectivo de profesores se aplicaron a ellos mismos bajo una estrategia similar a la que ellos deberán aplicar en el aula con sus estudiantes. En particular en este trabajo se presentan algunas actividades que se les aplicaron a los profesores en el proceso de capacitación, pero que además se han utilizado para capacitar a profesores del nivel medio superior.

El objetivo de diseñar e implementar estas actividades con los profesores es que una vez que han trabajado con ellas durante el proceso de capacitación, generar la reflexión sobre lo que sucedió en este proceso para ir relacionándolo con lo que establece en los nuevos planes de estudio.

Referente teórico

Uno de los aspectos que consideramos para el diseño de la estrategia de actualización y capacitación de los profesores es el de poner en juego sus intuiciones, al tratar de resolver una situación problema en la que parecen algunas de las ideas fundamentales de estocásticos propuestas por Heitele (1975) como variable aleatoria, muestra, espacio muestra, ley de los grandes números, etc. Uno de los propósitos es identificar aquellas intuiciones que sean incorrectas y promoviendo el desarrollo de nuevas intuiciones correctas, en el sentido que lo propone Fischbein (1975).

En este trabajo la identificación y desarrollo de las intuiciones de los profesores se considera muy importantes, porque se parte de la convicción que hay factores como los conocimientos, intuiciones y creencias de los profesores que intervienen como referente en la planeación, ejecución y evaluación del curso que imparte.

Siendo los elementos antes mencionados los que se identifican con el significado institucional de los objetos matemáticos en términos de lo que establece Godino (2003).

Lo anterior se da a pesar de que los programas de materia desglosan de manera explícita y estructurada los contenidos disciplinares que habrán de trabajarse en el curso.

Por otra parte, asumimos que en la estrategia de capacitación de los profesores deberán plantearse situaciones o problemas de áreas relacionadas y de interés de los profesores, esto último en función del área en la que desarrollan su actividad docente, que sería el equivalente a plantearle a los estudiantes situaciones o problemas de su área de interés según el perfil profesional en el que se están formando. Lo anterior toma como referente la estrategia para enseñanza de la Estadística que se presenta en Batanero (2001), en ella se les propone a los estudiantes un proyecto de acuerdo a sus características particulares como edad, conocimientos previos, tiempo disponible y de acuerdo a su interés.

Desarrollo del proyecto

La estrategia de capacitación consistió de varios momentos y sus respectivas acciones, las siguientes acciones son las que marcaron los diferentes momentos en los que se desarrolló el trabajo:

- Se organizaron sesiones de trabajo en las que se el objetivo fue realizar la lectura y discusión de los lineamientos en los que se sustenta la reforma de los nuevos planes de estudio
- Se revisaron los nuevos planes de estudio de las carreras del área de Ciencias Sociales
- Se revisaron los programas de materia de los cursos de Estadística de los programas docentes del área de Ciencias Sociales
- Se realizaron lecturas de artículos especializados en lo que tratan aspectos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje
- Se diseñaron situaciones didácticas tratando de incluir aquellas que resultaran de interés para los estudiante del área
- Con la pretensión de acercarnos lo más posible a situaciones cercanas a su quehacer profesional se tuvieron reuniones de trabajo con profesores de los Departamento del Área de Ciencias Sociales, el objetivo de esas reuniones fue tratar de identificar problemáticas de interés para sus estudiantes en las que la Estadística juega un papel importante.

Una vez diseñadas las actividades didácticas, se organizó un foro en el que cada profesor hace una presentación de las actividades que propone, el colectivo de profesores tiene la posibilidad de cuestionarlo sobre aspectos que pueden no estar claros y/o para hacer sugerencia que ayuden a mejorar dicha actividad. Es importante mencionar que las actividades propuestas formarán un documento que llamamos Material Didáctico, el cual serán entregado a los profesores que impartan el curso como un apoyo didáctico.

La parte en la que se centra este trabajo corresponde al uso de algunas de las actividades del Material Didáctico para la capacitación de los profesores del grupo o para capacitar a otros profesores del nivel medio superior o superior, interesados en la enseñanza de la Probabilidad y/o Estadística (en el nivel medio superior es común que en el mismo curso se vean los contenidos de Probabilidad y Estadística, y también es válida esta observación para los cursos del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora).

Se organizó un curso-taller dirigido a profesores del nivel medio superior y superior, la estrategia didáctica que se utilizó en este curso-taller fue la siguiente:

- Primero se les propone a los profesores que resuelvan individualmente alguna de las actividades didácticas, procurando que dicha actividad se ubique en el área de interés de los participantes. Uno de los propósitos de este momento es identificar los significados que utilizan los profesores de las ideas fundamentales que deben poner en juego al resolver la situación.
- Posteriormente se organizan en equipo y se les pide que intercambien resultados obtenidos y estrategias utilizadas. En este momento se espera que los profesores tengan la oportunidad de poder argumentar a favor de sus estrategias y/o resultados, además de comparar las estrategias y resultados propuestos por otros compañeros del equipo, lo cual le permite tener la posibilidad de enriquecer sus significados.
- Finalmente se promueve que los equipos hagan lo propio pero ante el grupo completo.

Uno de los objetivos más importantes es orientar la reflexión del grupo sobre las estrategias utilizadas por ellos para resolver dichas actividades, en ello asume un papel fundamental el instructor del curso, haciendo énfasis en los aspectos relacionados con las actividades de aprendizaje que ellos realizaron, en particular en las intuiciones incorrectas y significados incompletos que ponen en juego, así como en dificultades que tuvieron al tratar de resolver el problema.

Este último aspecto en particular resulta muy enriquecedor en el contexto de la formación y actualización de los profesores, entre otras cosas porque les permite identificar aquellos aspectos que se le pudieran estar dificultando a los estudiantes o para estimular la autocritica respecto a los significados incompletos o incorrectos que pudiera estar promoviendo entre sus estudiantes, por supuesto de manera involuntaria.

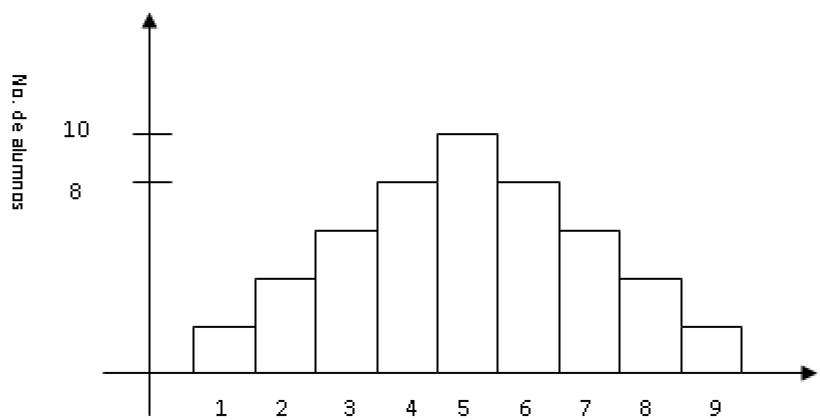
En este esquema, es que se presenta en un primer momento una actividad que permite tener una especie de diagnóstico para establecer el punto de partida de los profesores que participan en el curso taller. La actividad inicia con algunos cuestionamientos al grupo sobre cierto tipo de situaciones probabilísticas y/o estadísticas, y a partir de las respuestas que dan identificamos el tipo de significados y/o dificultades que presentan respecto a las ideas básicas relacionadas con la variación aleatoria.

Una de las actividades que se plantea, en esta etapa, es la siguiente:

Situación 1

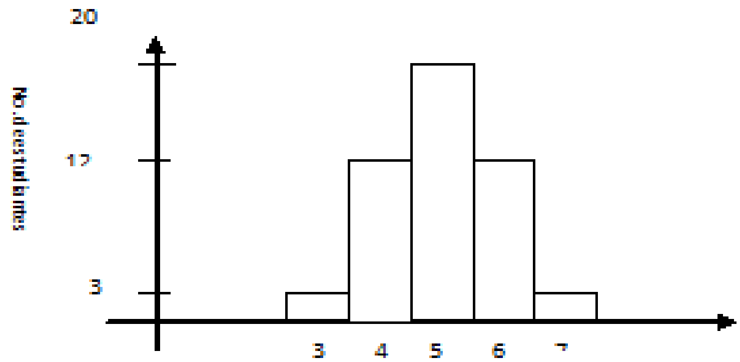
Las gráficas siguientes muestran los resultados obtenidos en el primer examen parcial de Estadística, en dos grupos atendidos por el mismo profesor y a los que se les aplicó el mismo examen de 10 reactivos.

Grupo 01



No. de reactivos correctos

Grupo 02



No. de reactivos correctos

a) ¿A cuántos estudiantes se les aplicó el examen en el grupo 01 y en el grupo 02?

b) Basándose en la información proporcionada, determine en cuál de los grupos se obtuvo mejor aprovechamiento.

c) ¿En qué basas tu respuesta para determinar quien tiene mejor aprovechamiento?

d) ¿Cuál es promedio de número de reactivos correctos de cada grupo?

e) ¿Es suficiente, para comparar a los dos grupos, el utilizar solamente la media aritmética? Argumente su respuesta.

f) ¿Qué significa, en términos del aprovechamiento, que la media aritmética de los dos grupos sea la misma?

g) ¿Por qué, a pesar de tener la misma media aritmética, las gráficas no son similares?

h) ¿En cuál de los dos grupos obtuvieron los estudiantes un aprovechamiento más homogéneo?

Esta es una situación que ubicamos en el contexto educativo ya que está dirigida a profesores, por otra parte a través de ellas se espera que los profesores pongan en juego sus conocimientos y habilidades que se necesitan para responder este tipo de situaciones con la información proporcionada en una gráfica, por ejemplo se requiere que identifique la variable, identifique la frecuencia, utilice alguna medida de tendencia central, calcule la media, relacione la media con el comportamiento global de los datos e identifique a partir de la gráfica los diferentes niveles de dispersión de la variable número de reactivos correctos en cada grupo.

En esta actividad, es importante señalar que la primer pregunta que se plantea en el inciso a) surge de las observaciones que hicieron los profesores que participaron en el proyecto de capacitación motivado por la reforma curricular que se dio en la Universidad de Sonora. Cuando estos profesores aplicaron a sus estudiantes actividades con esta estructura, se dieron cuenta que éstos identificaban la mayor frecuencia como el número de estudiantes a los que se les había aplicado el examen; es decir, los estudiantes decía que al grupo 01 se les aplicó el examen a 10 estudiantes y a 20 del grupo 02.

Cuando se les pide a los profesores, que participaron en el curso-taller, que respondan a lo que se les pregunta en el inciso a) la mayoría de ellos responden igual que los estudiantes.

Al tratar de resolver lo que se les pide en el segundo inciso, se presentan situaciones de diferente estilo en la respuesta que dan los profesores (para el grupos 01):

- Dicen no identificar cuál es la variable y cuál es la frecuencia.

- Para calcular la media suman los números del uno al nueve y dividen entre nueve9.

- Para calcular la media suman los números del uno al nueve y dividen entre 10.

- Para calcular la media suman los números del uno al nueve y dividen entre 50.

Este tipo de respuestas nos permitió generar una discusión en el grupo con el propósito de contrastar los diferentes resultados y estrategias que se pueden generar al tener una acercamiento individual con la situación a resolver, porque cada quien pone en juego sus conocimientos, intuiciones y estrategias.

Por otra parte, se reflexionó sobre el papel que juega la socialización de las respuestas obtenidas y las estrategias utilizadas por cada quien, y sobre la forma en cómo con los argumentos que dan los compañeros podemos ir enriqueciendo nuestros conocimientos, estrategias e intuiciones.

Finalmente, se hace una reflexión en torno a la importancia que tiene el hecho de que mejoremos en estos aspectos, pero no sólo desde la perspectiva de mejoría personal sino desde la óptica que los profesores son los responsables de promover el significado que la institución ha plasmado tanto en los planes de estudio como en los programas de materia.

Al aplicar estas actividades también se pretende que los profesores reflexionen sobre la importancia de identificar la variabilidad de un grupo de datos respecto a un parámetro o respecto a la variabilidad de otro grupo de datos; además para promover la necesidad de búsqueda de una estrategia para medir la variabilidad de un conjunto de datos respecto a un parámetro, que en algún momento se pueda cuantificar o para poder compararla con la variabilidad de otro conjunto de datos con respecto al mismo parámetro.

Conclusiones

Podemos separar las conclusiones en dos partes:

- De los participantes en el proyecto de capacitación

Podemos decir que la experiencia de participar en la capacitación de profesores, ajenos al proyecto, permitió en alguna medida sensibilizarse para tratar de entender lo que sucede con sus estudiantes de licenciatura cuando tratan de resolver este tipo de situaciones y dan el mismo tipo de respuesta que profesores en activo tanto del nivel medio superior como superior.

Además esta experiencia ha servido para enriquecer las actividades que originalmente se diseñaron para utilizarse como material didáctico de apoyo para los profesores.

- De los participantes al curso-taller

Un aspecto que se manifiesta, en un buen número de profesores, es la solicitud al responsable del curso-taller de que les proporcione una fórmula para resolver el problema, lo que pudiera estar reflejando la orientación que se les da normalmente a los curso de Probabilidad y Estadística que ellos imparten, en el sentido de dar mucho peso a los aspectos operativos, y no en la búsqueda de un equilibrio entre los aspectos operativos y cualitativos de los conceptos matemáticos.

Este último aspecto es muy importante porque refleja el tipo de significado institucional que pueden estar promoviendo estos profesores al impartir sus cursos de matemáticas, y en particular los cursos de Probabilidad y Estadística.

El material didáctico que se formó con las actividades propuestas por los profesores es un material de apoyo muy importante para el titular del curso, es un material flexible que tendrá que estarse revisando constantemente para enriquecerlo a partir de las observaciones que hagan de él los usuarios.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001) *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Granada, España.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Granada, España.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6,* 187-205.

Secretaría de Educación Pública. (2004). *Reforma Curricular del Bachillerato Tecnológico. Programas de estudio. Matemáticas*. México, D.F., México. SEP.

UN ESTUDIO DE CONCEPCIONES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Mayra Virginia Castillo Montes
Universidad de San Carlos de Guatemala Guatemala
mayracastillomyahoo.com
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Superior

Resumen. *En la investigación realizada se indagaron los dominios cognitivos y de representación que manifiestan los estudiantes de ingeniería acerca del concepto de función. Para tal efecto se desarrollaron tres estudios complementarios que incluyen: la revisión bibliográfica acerca de la evolución histórica del concepto de función y los obstáculos de aprendizaje asociados con ella; análisis de la visión del concepto transmitida por el sistema de enseñanza por medio de los programas y libros de texto utilizados y, la exploración de las concepciones de los estudiantes por medio de un cuestionario aplicado a una muestra de 368 alumnos de los primeros dos años de 10 carreras de ingeniería. La investigación permitió caracterizar las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función y evidenció que las concepciones manifestadas a nivel declarativo no siempre son consistentes con las mostradas al utilizar el concepto en la modelación y solución de situaciones problema.*
Palabras clave: concepciones, concepto, función, representación

Introducción

El concepto de función es uno de los más importantes conceptos matemáticos estudiados en las diversas carreras de ingeniería a lo largo de cuatro cursos de matemática que incluyen contenidos de precálculo, cálculo diferencial e integral en una y varias variables. Además, se estudian diversidad de aplicaciones tanto en áreas básicas como física, estadística y química, así como en otras específicas del campo profesional de cada especialidad.

Paralelamente a su valor formativo y a su gran potencial como herramienta modeladora de fenómenos de distinta naturaleza, se reconoce una alta complejidad en el aprendizaje del concepto de función debido a la multiplicidad de sus registros de representación, a la variedad de contextos en los que puede aplicarse y al enfoque algorítmico que muchas veces predomina en su tratamiento didáctico.

En el contexto de la formación matemática del profesional de ingeniería, dicha complejidad deriva en la observación de obstáculos de aprendizaje del concepto de función para cuya solución didáctica no se encontraron estudios previos acerca del tema, realizados en el contexto de la educación superior guatemalteca, particularmente referida a las carreras de ingeniería.

A partir del 2005, fecha en que se realizó el presente estudio, con base en los resultados obtenidos y con el apoyo de la Dirección General de Investigación de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se abrió una línea de trabajo investigativo que pretende vincular la investigación educativa con la docencia al proponer secuencias didácticas que permitan plantear soluciones a la problemática identificada.

Fundamentos teóricos

La investigación se abordó con base en un estudio de Ruiz (1998), que proporciona el sustento metodológico y la adopción conceptual de *concepciones* (del sujeto) en su sentido local, como significaciones y representaciones variadas que los alumnos asocian con un objeto matemático que es único, en este caso el de función, como producto de su interacción en sistemas didácticos o con su entorno. En vista del carácter interno de las concepciones que un sujeto elabora, el estudio se restringe al análisis interpretativo de un sistema de prácticas (textuales, graficas, orales) evidenciado en la solución de las situaciones exploratorias propuestas. Del mismo estudio se adopta la caracterización propuesta de las concepciones de los sujetos, en las cuales intervienen:

- Los invariantes que se reconocen como elementos esenciales del objeto matemático.
- El conjunto de representaciones simbólicas que se asocian y utilizan para resolver situaciones problema vinculadas con el concepto.
- El conjunto de situaciones que el sujeto asocia con el concepto matemático, es decir, en las cuales considera apropiado su uso como herramienta.

Las posiciones teóricas acerca de las representaciones semióticas se toman de los aportes de Duval (1998) y de los estudios realizados por Hitt (1996) y Dolores (2002), en los cuales se evidencia que los sistemas de representación pueden ser de carácter numérico, gráfico, algebraico, analítico, pictórico y verbal. Con base en los resultados de los trabajos de Gatica (2002), se analizó el tratamiento didáctico dado al tema en los programas de los cursos en estudio y en los respectivos libros de texto utilizados.

Referente a la forma de representación predominante, investigaciones realizadas por Tall (1988) con estudiantes anglosajones, evidencian una marcada tendencia a conceptualizar una función como una expresión algebraica, la cual aparece asociada con la dificultad para identificar funciones cuando no se cuenta con una fórmula algebraica. Este hecho se torna particularmente importante al conjugarlo con los aportes de Kleiner (1989) y Ponte (1990) en los cuales se establece que dicha concepción corresponde a las definiciones dadas por Bernoulli y Euler en el siglo XVII, en las cuales se asociaba fuertemente el concepto de función con una expresión analítica.

Otros aportes teóricos importantes surgen del trabajo de De La Rosa (2003) en el cual indaga las concepciones de profesores mejicanos del nivel medio acerca del concepto de función y reporta que además de la tendencia a conceptualizar las funciones como expresiones analíticas, se tiene muy arraigada la idea que las funciones deben representarse por una sola expresión algebraica. Esto permite explicar las dificultades detectadas en el presente estudio para identificar funciones definidas por partes en forma algebraica, así como para su utilización en la modelación de situaciones problema.

La revisión bibliográfica realizada permitió adoptar como bases teóricas importantes los siguientes resultados:

- El manejo adecuado del concepto de función implica "*el dominio de las distintas representaciones del concepto, la evocación de las mismas sin ninguna contradicción y de manera casi espontánea*" (De La Rosa, 2003, p. 122).
- En cuanto a la resolución de problemas "(…)*La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas (u otras) es una condición sine qua non para dar sentido al concepto de función en su totalidad*" (Sierpinska, citada por Ruiz, 1998, p. 64)

La conjugación de estos resultados permite establecer cuándo y en qué medida el concepto de función ha sido adquirido y resalta la necesidad de presentar al estudiante de ingeniería situaciones problema diversas que propicien la construcción global del concepto.

Objetivos

1. Caracterizar el dominio cognitivo de las concepciones que manifiestan los estudiantes de ingeniería, acerca del concepto de función.
2. Identificar las concepciones que permanecen y las que evolucionan a través del tránsito de los estudiantes por cuatro cursos de matemática.

Metodología

1. Población y muestra: la población objeto de estudio estuvo constituida por cuatro sub poblaciones consideradas independientes, cuyos tamaños se describen a continuación junto a los respectivos tamaños muestrales.

Población	Tamaño poblacional	Tamaño muestral
Estudiantes Matemática Básica 1	1264	95
Estudiantes Matemática Básica 2	1143	94
Estudiantes Matemática Intermedia 1	876	86
Estudiantes Matemática Intermedia 2	1175	93
Total	4458	368

Fuente: Centro de Cálculo, Facultad de Ingeniería. USAC.

2. Elaboración de instrumento de recolección de datos: con base en la revisión bibliográfica acerca de las tareas que comprenden el dominio cognitivo del concepto de función y otros instrumentos utilizados para su exploración, se elaboró cuestionario y se discutió con los profesores que imparten los cursos en estudio. Dicho instrumento constaba de tres partes: en la primera se buscaba que los alumnos explicitaran sus concepciones en forma verbal, dieran ejemplos y propusieran ejercicios para el aprendizaje del concepto. La segunda parte proponía representaciones analíticas y gráficas solicitando que se identificaran los casos en que fuesen

funciones y se justificara la respuesta dada. En la tercera, se propusieron situaciones problema que incluían variación geométrica, con respecto al tiempo y en la vida cotidiana.

3. Validación del instrumento: mediante un muestreo aleatorio simple se seleccionó una muestra piloto de 93 alumnos distribuidos en los cuatro cursos como se indica a continuación:

Curso	Tamaño muestral piloto
Matemática Básica 1	23
Matemática Básica 2	19
Matemática Intermedia 1	34
Matemática Intermedia 2	17
Total	93

Para determinar la confiabilidad del instrumento elaborado se utilizó el modelo del coeficiente alfa de Cronbach, y con ayuda del paquete estadístico SPSS se obtuvo como resultado que $\alpha = 0.7072$, a partir de lo cual se consideró que la prueba era confiable y que podía utilizarse para evaluar la muestra definitiva.

4. Análisis de información: se analizaron los programas de los cursos y los libros de texto utilizados por los alumnos y se realizó un análisis de contenido de las repuestas dadas a cada situación propuesta. A partir de las tablas de frecuencias de las variables en estudio, se realizaron cruces entre las clasificaciones correspondientes a cada curso, con el objetivo de identificar la evolución de las variables durante el proceso de aprendizaje. Luego, se realizó un análisis factorial y de correspondencia de las respuestas dadas por los estudiantes en las situaciones de reconocimiento de funciones a partir de su representación gráfica y de su representación algebraica. Lo anterior se completó con la aplicación de análisis de cluster, en busca de identificar agrupaciones de los datos obtenidos.

Resultados obtenidos

Del análisis de programas y libros de texto de los cursos

1. En el primer curso de matemática el concepto de función se presenta como transformación entre los números reales o subconjuntos de ellos, con privilegio de las representaciones algebraica y gráfica. La aplicación del concepto se realiza en contextos de variación respecto al tiempo y en situaciones geométricas.
2. En el segundo curso el concepto de función se vincula con los temas de continuidad, límites, derivadas e integrales definidas, con énfasis en los dominios gráfico, algebraico y de aplicación, principalmente en situaciones problema que incluyen variación con respecto al tiempo.
3. En el tercer curso, el concepto de función se estudia relacionado con diversas técnicas de integración, tanto en integrales definidas como indefinidas. Se enfatiza el dominio algebraico del concepto.
4. En el último curso se estudian funciones de varias variables y técnicas de integración para integrales dobles y triples, en diferentes sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y polares).
5. En los libros de texto utilizados hay escasez de ejemplos y ejercicios que requieran el tránsito entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, ya que usualmente se privilegia la utilización de alguno de ellos, que en general es de tipo algebraico o gráfico.
6. En los ejemplos y ejercicios propuestos se detectó que existe énfasis en el tratamiento algebraico del concepto de función, el cual en general deriva en la realización de procedimientos algorítmicos.
7. El concepto de función en sí mismo se estudia únicamente en el primer curso, en los tres restantes se supone completado su aprendizaje y se enfatiza la ejecución de procedimientos algorítmicos para el cálculo de límites, derivadas e integrales.

Del análisis de respuestas dadas por los estudiantes

1. Las concepciones acerca del concepto de función que fueron identificadas se pueden clasificar de la siguiente manera: algoritmo de cálculo, expresión algebraica, representación gráfica, asociación (correspondencia entre conjuntos numéricos) y transformación.
2. La concepción respecto al concepto de función que se manifiesta con mayor énfasis en los alumnos del primer curso de matemática es de tipo numérico, observándose que ésta desaparece paulatinamente en el tránsito de los estudiantes por los cursos superiores. Paralelamente a dicho descenso, se observa un incremento de la manifestación del dominio algebraico del concepto, la cual es predominante en la última etapa.
3. Los alumnos de ingeniería presentan dificultades para transitar entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, mostrándose en particular escasamente desarrollada la habilidad para modelar problemas utilizando funciones, aún en los estudiantes del último curso analizado.
4. El análisis factorial permitió categorizar las representaciones algebraicas y gráficas propuestas para su identificación, en cinco clases: a) representaciones gráficas de funciones definidas por partes, b) funciones constantes, c) representaciones algebraicas de funciones racionales, d) representaciones que no son funciones y d) representaciones identificadas por su forma.
5. El análisis de cluster evidenció una fuerte semejanza entre las agrupaciones construidas individualmente para cada curso y la agrupación observada en la muestra total. Este hecho evidencia que el comportamiento de los estudiantes ante las situaciones propuestas es independiente del curso en el cual se ubican.

Conclusiones finales

1. El tratamiento didáctico dado al concepto de función en los textos analizados, aporta elementos que condicionan las concepciones de los estudiantes de ingeniería acerca de dicho concepto, lo cual se manifiesta en los ejemplos y ejercicios que proponen, argumentos con que justifican sus procedimientos y situaciones en las que emplean el concepto.

2. Es posible afirmar que las concepciones de los estudiantes de ingeniería acerca del concepto de función, no evolucionan significativamente en el tránsito de los alumnos por los diversos cursos de matemática, como sería de esperarse. Las concepciones más arraigadas son: como fórmula algebraica y como representación gráfica.

3. Las expresiones verbales del concepto de función son elaboraciones que los estudiantes realizan de forma personal, en las que predomina la idea que una función es una asociación entre conjuntos numéricos.

4. En los alumnos de ingeniería existe diversidad de concepciones respecto a la noción de función, manteniendo cada una de ellas un carácter local, fragmentado y compartimentado. Por lo cual se considera incompleto su aprendizaje.

Avances en el proyecto

A partir de la socialización de los resultados obtenidos con los profesores de matemática de la Facultad de Ingeniería y de otras unidades académicas, se continuó trabajando en esta línea investigativa con la indagación de las concepciones de los profesores- que en su mayoría son ingenieros- acerca del concepto de función. Además, se trabaja en el ensayo de secuencias didácticas que pretenden vincular las diferentes representaciones del concepto de función y fortalecer su aplicación en la modelación de fenómenos propios de la práctica de las diferentes especialidades de las carreras de ingeniería.

Referencias bibliográficas

De La Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente*. Mosaicos Matemáticos 1,* 121-133.

Dolores, C. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (I)* (pp. 75-81). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1998). Registros de presentación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa, II*, 173-207

Gatica, N. (2002). El concepto de función en textos universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (I)* (pp. 131-136). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 245-264.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept. *The College Mathematics Journal, Volumen 20 (4)*.

Ponte, J. (1990). The history of the concept of function and some educational implications. *Educacao e Matematica No. 15*

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Universidad de Jaén.

Tall, D. (1988). *Concept image and concept definition.* USA.:University of Warwick.

UN ESTUDIO DEL TRATAMIENTO DE DATOS CON RUIDO EN LOS SISTEMAS ESCOLARES

Jaime Arrieta Vera, Carmelinda García Benítez
Universidad Autónoma de Guerrero México
karmelinda27@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *El tratamiento de datos con ruido en situaciones escolares propicia construcciones cognitivas diferentes a las que son desarrolladas cuando se trabaja en situaciones deterministas. Este trabajo, por una parte, da cuenta de cómo las comunidades privilegian las respuestas aproximadas sobre las respuestas puntuales a situaciones cotidianas, por otra parte, da evidencias de que en la escuela la aproximación no es común. Sin embargo, los actores que trabajan con un diseño basado en la modelación de datos experimentales, datos con ruido, construyen herramientas y argumento propios a la situación planteada. Así, el interés de esta investigación es averiguar que argumentos y herramientas matemáticas desarrollan los estudiantes cuando se les plantean situaciones que contienen ruido en los datos con respecto de una teoría.*
Palabras clave: datos con ruido, aproximación, modelación

Introducción

En contextos no escolares es común enfrentarse a situaciones donde la toma de decisiones se realiza con datos insuficientes o que no se tiene certeza sobre ellos. Es común enfrentarse a situaciones donde la respuesta no es única y exacta, donde se tiene que tomar la decisión considerando factores no explícitos como la experiencia, para ello se acude a la aproximación recurrentemente.

En la escuela la situación es otra, los problemas "reales", que plantean los libros de texto tradicionales, son problemas donde se tiene una solución única, los estudiantes no se enfrentan a problemas que no tienen solución o que admiten más de una solución; en este tipo de problemas los estudiantes no interactúan con problemas con datos insuficientes o en donde algunos de los datos que se proporcionan son irrelevantes; en ellos los datos son redondos, no se trabaja en problemas con datos que tienen ruido e implican situaciones azarosas. En una breve revisión hecha a libros de texto de los distintos niveles educativos, primaria, secundaria y bachillerato, dan evidencia de este hecho. Ante estas situaciones las respuestas generalmente son las puntuales y se desdeñan las aproximaciones.

Sin embargo, diversas investigaciones (Arrieta, 2003, Álvarez, Galeana y Mendoza, 2002; Méndez, 2006), sugieren que en la modelación de diversos fenómenos surge una cuestión poco abordada en el sistema escolar, el tratamiento de datos con ruido. Cuando un estudiante aborda una situación en la cual los datos contienen ruido, debe utilizar herramientas adicionales o diferentes a las usadas cotidianamente en la escuela, y debe argumentar acerca del por qué y cómo las usa.

El ruido es inherente a la modelación de fenómenos, es decir, la modelación lo que persigue es construir un ente, llamado modelo, que permita entender y predecir el fenómeno sin ser su copia exacta, por tanto los datos del modelo no necesariamente coinciden con los datos del fenómeno. Así, llamamos "ruido en los datos" a la diferencia entre los datos obtenidos directamente del fenómeno y los obtenidos a partir del modelo propuesto por alguna teoría.

Nuestro interés se centra en los argumentos y las herramientas matemáticas, en el contexto escolar, que surgen cuando los datos planteados en una situación contienen ruido con respecto de una teoría. En este sentido planteamos una situación donde la actividad propuesta está centrada en la modelación de datos con ruido, y la atención la enfocamos a los argumentos que esgrimen y los consensos que establecen, es decir en el proceso discursivo, en los métodos y herramientas con las que predicen y construyen modelos, en las formas de proceder y de aceptar o no situaciones escolares constituidas.

Metodología

El enfoque teórico bajo el cuál se desarrolla esta investigación es la perspectiva socioepistemológica y la línea de investigación donde se inscribe es la que estudia la relación entre práctica social y construcción del conocimiento. Desde esta perspectiva no solo nos interesan las circunstancias en que los conocimientos emergen sino los contextos en los que estos viven. Es así, que nos interesa la relación entre las prácticas escolares con las prácticas de diversas comunidades

La investigación la desarrollamos en dos escenarios, el primero en comunidades no-escolares y el segundo al interior de la escuela. En el primero, nuestro interés es investigar el proceder de diferentes comunidades ante situaciones de su vida cotidiana, donde aproximar es recurrente. Es así que determinamos las comunidades y las prácticas de nuestro interés, realizamos observaciones de campo y entrevistas a diferentes actores.

En el escenario escolar, puesto que nuestro interés es indagar acerca de las construcciones y argumentos matemáticos generados por los estudiantes al enfrentarse a situaciones que contiene ruido en los datos con respecto de una teoría, ponemos en escena diversas variantes de un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal (Arrieta, 2003) y analizamos el discurso y las producciones de los actores.

El nombre del diseño es "*La elasticidad de los resortes*" y consideramos las siguientes variantes: "*Lo lineal sin ruido*", "*Lo lineal con ruido*", "*La elasticidad de los resortes (presencial)*", "*La elasticidad de los resortes (virtual)*". En el diseño "*Lo lineal sin ruido*" se parte de una tabla de datos dados sin ruido, mientras que en el diseño "*Lo lineal con ruido*" los datos que se proporcionan contienen ruido. Respecto al diseño "*La elasticidad de los resortes (presencial)*", se inicia con la experimentación del fenómeno y el proceso se efectúa con los datos que se obtienen directamente de la experimentación, en el diseño "*La elasticidad de los resortes (virtual)*" la experimentación se da utilizando un software que simula el laboratorio y la práctica de la elasticidad de los resortes.

Puesta en escena	Escuelas	Modo de trabajo y participantes	Diseños abordados
1	Conalep	Estudiantes de primer semestre. Dos equipos con cinco estudiantes cada uno.	Lo lineal sin ruido - Lo lineal con ruido
2	Cobach	Estudiantes de cuarto semestre. Tres equipos con tres integrantes por equipo	Lo lineal sin ruido - Lo lineal con ruido
3	Cetis 41	Estudiantes de cuarto semestre. Tres equipos con tres integrantes por equipo	La elasticidad de los resortes (presencial) - La elasticidad de los resortes (virtual)
4	Facultad de Matemáticas, Cd. Altamirano	Profesores en servicio. 23 estudiantes distribuidos en cinco equipos	Lo lineal sin ruido - Lo lineal con ruido
5	Atoyac de Álvarez	Profesores en servicio. 13 estudiantes distribuidos en 4 equipos	Lo lineal sin ruido - Lo lineal con ruido

Tabla 1. Los actores y los escenarios

Los estudiantes que participan en la puesta en escena de los diseños se organizan en equipos por simpatía o afinidad entre ellos. La recolección de evidencias se hizo a través de una cámara de video, así como las producciones de los estudiantes en lápiz y papel.

Resultados y discusión. La aproximación en comunidades no escolares

Uno de los resultados de la investigación es que en diversas comunidades se acude recurrentemente a la aproximación ante situaciones cotidianas. En seguida se muestra una selección de de una entrevista a un pailero que construía un tanque de agua cilíndrico.

El pailero corta la lamina para las dos tapas de acuerdo a la medida que le proporciona el cliente y, después, corta la lámina rectangular que constituirá la pared del cilindro. La altura del rectángulo la toma de la medida que le piden.

Entrevistador: ¿Cómo es que calculas la longitud de la lámina para el tanque de agua?

Sr. José: Aja, tomo el diámetro, de aquí a aquí (señala la tapa del tanque), en pulgadas,…si debe ser en pulgadas y luego lo multiplico por ocho y ¡Ya!... lo que da son los centímetros de la placa

Entrevistador: O sea, son los centímetros de la longitud de la placa

Sr. José: Si

Entrevistador: Pero, ¿por qué?

Sr. José: Pues porque así es, así me lo enseñaron y así resulta

Entrevistador: Pero, no queda exacto

Sr. José: Bueno,… pero yo no quiero exacto, tienes que ver lo que se lleva el soplete y la soldadura que vas a poner, es aproximado, pero… así me sirve

Una persona que ejerce su práctica utiliza la aproximación de manera cotidiana, valorando los múltiples factores que afectan sus decisiones, en este caso, “lo que se lleva el soplete y la soldadura que vas a poner”. Casos como éste se encuentra en diversas comunidades, otro ejemplo es la persona que realiza la limpieza de una alberca, estima la cantidad de agua que contiene y el grado de suciedad, y a partir de estás estimaciones aproxima la cantidad de cloro que será necesaria para tenerla limpia.

Las situaciones con datos incompletos o con incertidumbre son comunes en la vida cotidiana de los actores de diversas comunidades, sin embargo en la escuela la aceptación de estas situaciones no es inmediata.

La no aceptación de las situaciones con ruido en la escuela

En el escenario escolar, cuando los estudiantes participan en una situación con ruido emergen las prácticas escolares constituidas al no aceptar la situación. En el episodio siguiente, que es parte de la puesta en escena con estudiantes del COBACH, se ilustra este hecho.

La puesta en escena se diseñó en dos momentos, en el primero los estudiantes participaron en el diseño "*Lo lineal sin ruido*", donde los estudiantes construyeron después de un proceso, entre otras cosas, un modelo algebraico de la forma $y = ax + b$ para realizar sus predicciones, donde *a* es la cantidad de milímetros que se estira el resorte por cada gramo y *b* es la posición inicial de la regla. Al trabajar el diseño "*Lo lineal con ruido*", los integrantes del equipo A buscaron inmediatamente la razón de cambio para dar el modelo algebraico (figura 1).

Episodio 1. ¡Tu resorte no sirve!

Linda: *¿Qué pasó muchachos?, ¿cómo van?*

Alumno: *No*

Linda: *¿Qué no?*

Alumno: *Es que el resorte no es constante, no se comporta como en el caso anterior*

Linda: *Pero, ¿por qué dices eso?*

Alumno: *Mira, varía, ¡primero es 1.6, luego 1.45, 1.53, 1.55, otra vez 1.55 y luego 1.558!*

Linda: *Y entonces, ¿qué pasa?*

Alumno: *¡Tu resorte no sirve!*

Linda: *¿Por qué no sirve?*

Alumno: *Porque no se estira siempre lo mismo, va cambiando.*

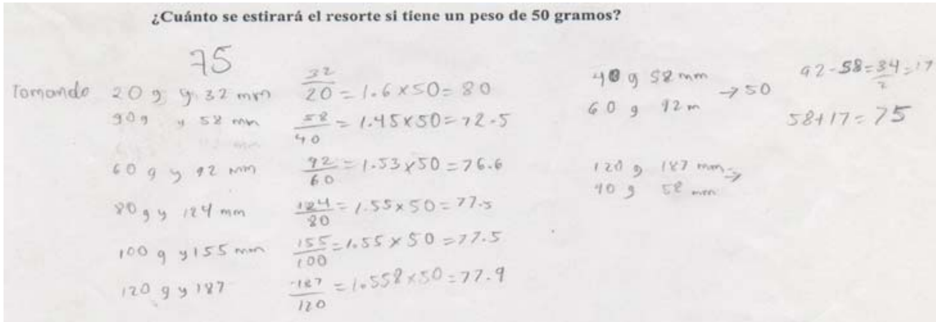


Figura 1. Los estudiantes del equipo A intentan buscar la razón de cambio

El no encontrar un patrón de comportamiento de los datos provoca que los estudiantes se nieguen a creer en la veracidad de los datos, llegando a la conclusión de que es el resorte el que está mal, el que no sirve. La situación no se acepta.

Hasta ahora hemos ejemplificado situaciones en las cuales los actores niegan o eluden el ruido en los datos, sin embargo hay situaciones donde se niegan las respuestas por no ser enteras o no estar a tono con la forma de los datos. El siguiente episodio es parte de la puesta en escena del Conalep (puesta en escena 1)

Episodio 2. Siento que no me debe dar con punto decimal

Linda: *¿Ya sabes cuánto se va a estirar cuando tenga un peso de 50 gramos?*

Alumna 1: *Si, pero…*

Linda: *¿Qué pasó?*

Alumna 1: *Me salió 69.6*

Linda: *¿Y luego?*

Alumna 1: *Siento que no me debe dar con punto decimal*

Linda: *¿Por qué?*

Alumna 1: *Porque los datos que tú me diste son enteros, entonces no me suena lógico que me haya dado un decimal…*

Esta misma estudiante sigue haciendo cálculos y operaciones, finalmente se siente muy feliz cuando obtiene como respuesta el 73, ahora sí, ya había obtenido un número entero. La aceptación no sólo se refiere a situaciones con ruido en los datos que se proporcionan, también en la aceptación de los resultados que obtienen. En este caso, porque el resultado es un número decimal.

La experimentación y la aceptación del ruido

Hemos formulado que el ruido en los datos viene a ser inherente a la modelación de los fenómenos. Esta tesis se manifiesta cuando los estudiantes del Cetis 41 (puesta en escena 3) participan en el diseño *"La elasticidad de los resortes (presencial)"* –*"La elasticidad de los resortes (virtual)"*, los estudiantes asumen el ruido como algo natural, y en donde hay que recurrir a la aproximación.

Episodio 3. Bueno, es que la liga no se estira siempre lo mismo

Linda: *Entonces muchachos, ¿cómo queda la ecuación?*

Alumno: *Es aproximadamente* $y = 1.5x + 12$

Linda: *¿Por qué dices aproximadamente?*

Alumno*: Bueno, es que la liga no se estira siempre lo mismo, pero con lo que hemos visto, parece que si sigue una forma lineal.*

El grupo en consenso asume que ese es el modelo que describe el comportamiento del estiramiento de la liga.

Métodos y construcciones

Por otro lado hay otros actores asumen que ese ruido existe y que hay que encontrar métodos y construcciones que permitan explicar el fenómeno.

En la puesta en escena 4, los profesores trabajan en el diseño "*Lo lineal sin ruido*", y posteriormente al participar en "*Lo lineal con ruido*" construyen diferentes procedimientos en su intervención.

Episodio 4. Métodos de ajuste de datos

***Linda**: Maestros, ya estuvimos trabajando por equipo, ahora vamos a exponer al grupo que es lo que hicimos, ¿quién quiere pasar primero?*

(Se nombra a un representante de cada equipo)

***Linda**: Bueno, la pregunta es: ¿cuánto se va a estirar el resorte cuando le coloquemos 50 gramos de peso?*

***Representante del Equipo 1**: Mire, nosotros vimos que 50 está a la mitad de 40 y 60, entonces el estiramiento debe estar entre 58 y 92, entonces restamos 92-58, nos da 34, y eso lo dividimos entre 2, queda 17, ya entonces sumamos 58+17 y nos queda 75. Pero, después, razonando de la misma manera, si 50 esta a la mitad de 40 y 60, también está a la mitad de 32 y 124, hacemos lo mismo, restamos 124-32, queda 92, eso lo dividimos entre 2 y da 46, se lo sumamos a 32, ¡y nos da 78!*

***Linda**: ¿Alguien más hizo algo diferente?*

***Representante del Equipo 2:** Nosotros usamos regla de tres:* $\frac{20}{50}=\frac{32}{x}$ *, entonces,* $32*50=1600$ *y luego* $\frac{20}{1600}=80$

***Linda:** ¿Alguien más?*

***Representante Equipo 3**: Nosotros graficamos y nos damos cuenta de que casi es una línea recta. Entonces le ponemos una línea recta que más se acerca los datos (ajuste gráfico de datos).*

***Linda**: ¿Quién más?*

***Representante Equipo 4**: Mire maestra, por la forma en la que están los datos, exactamente no se puede calcular el resultado, lo que podemos hacer es aproximar.*

***Linda**: Bien, ¿y cómo le hacen?*

***Representante Equipo 4**: Nosotros lo hicimos por promedios.*

… Entonces, si promedio se estira 31 mm. por cada 20 gramos, pues se va a estirar la mitad por 10 gramos, esto es 15.5, y ya así $15.5 * 5$ *es igual a 77.5. ¡Pero podemos encontrar otro valor! Si a 92 le restamos 15.5 nos queda 76.5*

***Representante del Equipo 5**: Maestra, nosotros también sacamos el promedio pero fue de las constantes de proporcionalidad y eso lo multiplicamos por 50 y nos da el mismo resultado que el sacó después, 76.5*

***Linda**: Ya tenemos muchos resultados y la mayoría diferentes, entonces, ¿cuánto se estirará el resorte cuando tenga 50 gramos?*

***Representante del Equipo 4:** Como ya le dijimos maestra, no podemos dar una cifra exacta, sólo aproximaciones.*

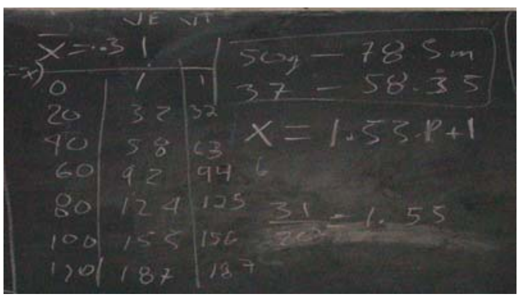
En esta ocasión los profesores hacen uso de los métodos de bisección, regla de tres y promediación tanto de los estiramientos como de las razones de cambio para ofrecer un resultado, aunque están concientes de que este resultado sólo es aproximado.

Presentamos, ahora, el trabajo realizado por los actores de la puesta en escena 5, la experiencia fue muy enriquecedora por la variedad de métodos y argumentos que utilizaron al desarrollar el tema. Presentamos de manera sintética en la tabla 2 las diferentes construcciones que realizaron.

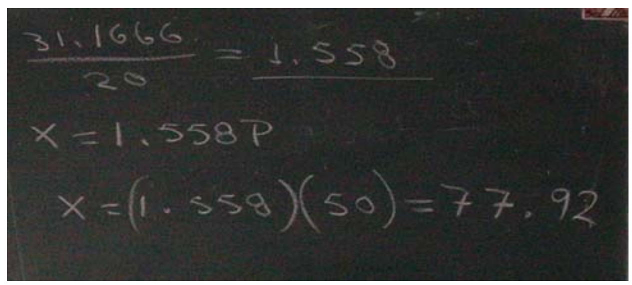
En esta experiencia utilizaron el promedio de los errores como una herramienta para discriminar modelos, para determinar que modelo era el más aproximado a los datos, ya que los dos equipos estaban seguros que su modelo propuesto era el mejor.

		Equipo 1		Equipo 2	
	Valores experimentales	Diferencias de los estiramientos	Valores teóricos	Diferencias de los estiramientos	Valores teóricos
Peso	Estiramiento		Estiramientos		Estiramientos
			1	32	
20	32	26	32	26	31.16
40	58	34	63	34	62.32
60	92	32	94	32	93.48
80	124	31	125	31	124.64
100	155	32	156	32	155.8
120	187		187		186.96
	Suma de las diferencias	155		187	
	Promedio de las diferencias	31		31.16666667	
	Estiramiento por gramo	1.55		1.558333333	

Tabla 2



Modelo obtenido por el Equipo 1: ***x =1.55p+1***



Modelo obtenido por el Equipo 2: ***x = 1.558p***

Figura 2. Modelos obtenidos por los profesores

Conclusiones

Encontramos en algunas comunidades no-escolares que las situaciones con ruido en los datos son habituales y que se recurre frecuentemente a la aproximación, mientras que en los sistemas escolares las situaciones más comunes son las situaciones deterministas donde se privilegia las respuestas puntuales, particularmente en los libros de texto.

Cuando es planteada una situación con ruido en la escuela en ocasiones no es aceptada por los actores (profesores y estudiantes), sin embargo, en situaciones experimentales presenciales éste sí es aceptable y se recurre a la aproximación.

Los actores ante situaciones con ruido en los datos construyen herramientas diferentes a situaciones sin ruido en los datos (dan lugar a la emergencia de construcciones cognitivas diferentes a las construcciones escolares usuales), algunos de los método usados son el ajuste gráfico de datos (Álvarez, et al., 2002) y la promediación de diferentes parámetros. En ninguno de los casos reportados es utilizada la regresión lineal para ajustar los datos.

Es así, que aportamos evidencias a nuestra tesis de que el uso de datos con ruido en el sistema escolar posibilita el desarrollo de habilidades y procedimientos distintos a los utilizados tradicionalmente, además de revelar al alumno fenómenos, hechos y aplicaciones de nuestra vida cotidiana, en ocasiones olvidada o deformada en el ámbito escolar.

Referencias bibliográficas

Álvarez, S. Galeana, A. y Mendoza, J. (2002). *La incertidumbre como base epistemológica de diseño de situaciones de aprendizaje en el aula.* Tesis de Maestría no publicada. CIIDET, México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav, IPN. México.

Méndez. M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilíneal: modelando un sistema de resortes.* Tesis de Licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

EL DIAGNÓSTICO DE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA COMO ELEMENTO DE UN MODELO DIDÁCTICO QUE FAVORECE EL PROCESO DE APRENDIZAJE EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Aída María Torres Alfonso, Dámasa Martínez Martínez
Universidad Central de Las Villas Cuba
aida@uclv.edu.cu
Campo de investigación: Comprensión matemática Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo forma parte de una investigación realizada en la Universidad Central de Las Villas donde se concibe el desarrollo de la comprensión matemática mediante un modelo didáctico con enfoque sistémico e interdisciplinar desde el inicio del curso escolar, que interrelacione el diagnóstico inicial, las situaciones didácticas y la evaluación formativa como componentes de este modelo que favorece el proceso de aprendizaje. Estableciéndose las dimensiones del diagnóstico inicial, proponiéndose una metodología para determinar los niveles de comprensión matemática con los cuales arriban los estudiantes a la enseñanza superior, que es la base a tener en cuenta por los profesores para el diseño de situaciones didácticas durante todo el curso escolar.*
Palabras clave: comprensión matemática, diagnóstico, niveles de comprensión

Introducción

En ocasiones en la Educación Superior, aceptamos como un hecho que los estudiantes que arriban a nuestras aulas dominan los contenidos del nivel precedente, sin embargo, al menos en el ámbito cubano, se ha podido, mediante investigaciones realizadas constatar el predominio en las aulas de los niveles precedentes de enseñanza: la secundaria y preuniversitaria, de un proceso con carácter esencialmente instructivo, cognoscitivo, en el cual se centran las acciones mayormente en el profesor y no en los estudiantes (Rico y Silvestre, 2003), entre otras cuestiones reflejan que el alumno aprende de forma reproductiva, estando bastante afectado el desarrollo de habilidades y de reflexión crítica y autocrítica en los estudiantes. Por lo que estos, no siempre, se involucran en el proceso y en ocasiones el estudiante transita de un grado a otro con una preparación insuficiente para enfrentarse al nuevo nivel. Reconociéndose en este reporte de investigación de referencia, que es necesario transformar el proceso de enseñanza aprendizaje, para lograr las metas que nos proponemos como formadores de las nuevas generaciones.

En el caso de universidad cubana, la determinación del nivel de aprendizaje real con que ingresan los estudiantes y las acciones docentes para resolver ese problema desde el contenido mismo de los programas de estudio, según Horruitiner (2006), es el aspecto menos trabajado y por tanto, de mucha actualidad.

No son pocas las ocasiones, en las que algunos profesores universitarios nos cuestionamos porque un estudiante al transitar de un nivel a otro o de un año a otro, no cumple con los requerimientos del conocimiento más elemental que debía tener y en sentido general sucede porque en realidad no "comprende" ese conocimiento, pues lo único que para el estudiante tiene sentido es memorizarlo, porque de lo contrario no podría "aprobar" el curso.

En nuestro caso siguen siendo las asignaturas de ciclo básico, entre las que se encuentra la Matemática, obstáculos que deberán vencer los alumnos en su empeño por lograr éxito en su formación universitaria. Por tanto, ante la prioridad de transformar el escenario didáctico en la clase de matemática universitaria; el objetivo de este trabajo consiste en fundamentar una metodología para determinar los niveles de comprensión matemática con los cuales arriban los estudiantes a la enseñanza superior, que le permita a los profesores del primer año universitario, el diseño de situaciones didácticas que favorezcan el aprendizaje de la Matemática.

Desarrollo

Fundamentos teóricos para el desarrollo del diagnóstico de la comprensión matemática en estudiantes universitarios

La comprensión humana suele considerarse uno de los problemas fundamentales en la investigación de áreas tan consolidadas como la filosofía, la epistemología o la psicología. Durante las últimas décadas la preocupación por su estudio también se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática, al reconocerse de forma mayoritaria la conveniencia de garantizar entre los alumnos un aprendizaje comprensivo de las matemáticas, principalmente porque aporta ventajas de formación intelectual, reduce las dificultades derivadas del carácter jerárquico de la propia disciplina matemática, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables hacia las matemáticas, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos (Rico, 2001; NCTM, 2000), entre otras razones

El concepto mismo de comprensión matemática plantea complejos interrogantes: ¿de qué manera desarrollan la comprensión los alumnos?, ¿cómo valorar hasta qué punto comprenden un tema?, ¿cómo podemos, los docentes, propiciar el desarrollo de la comprensión?, ¿cómo podemos evaluar sus progresos y proporcionarles retroalimentación? ¿cómo están relacionados en el proceso, comprensión y aprendizaje?

En el campo de la Didáctica de la Matemática se considera a los *objetos matemáticos* como entidades que surgen al realizar sistemas de prácticas correspondientes a un campo de problemas. (Godino y Batanero, 1994)

En Font (2003) se asume que *comprender un objeto matemático* consiste en ser capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor y reconoce además que las bases psicopedagógicas que han inspirado el currículo de los actuales sistemas educativos, en sentido general, entienden la comprensión como un proceso mental que es un punto de vista que responde a una concepción epistemológica divergente, aunque no contrapuesta a la asumida por el autor en este trabajo.

En este trabajo se concibe la comprensión matemática como un proceso que se desarrolla a medida que el estudiante transita de un nivel de comprensión a otro, siendo capaz de comunicar la actividad matemática que realiza en diferentes contextos.

Asumiendo la definición de comprensión matemática de Vicent Font referida anteriormente y por tanto, para las autoras, el estudiante universitario habrá comprendido un objeto matemático cuando desarrolla la capacidad de poder comunicar el uso de ese objeto matemático en diversas situaciones didácticas que le presenta el profesor, en las que requerirá utilizar diferentes notaciones y convertir una representación en otra de manera natural, cuestión que como proceso se desarrolla en forma de espiral y el estudiante transita de un nivel a otro en función del nivel de comprensión alcanzado y las posibilidades y potencialidades que reconoce él, su profesor o el grupo para alcanzar un nivel de comprensión ascendente.

Teniendo esto en consideración, se convierte el diseño y aplicación de un diagnóstico de la comprensión matemática a los estudiantes; que no solo abarque los conocimientos precedentes, si no también sus motivos, obstáculos para el éxito, preferencias académicas e investigativas; la base que permitirá diseñar situaciones didácticas en función de los niveles de desarrollo de un estudiante o de grupos de ellos, de manera tal que se favorezca el desarrollo integral verdadero de su personalidad durante la carrera y sentar las bases en el primer año de su formación profesional.

La teoría de situaciones didácticas

El principio metodológico fundamental de la teoría de las situaciones es definir un *conocimiento matemátic*o mediante una *situació*n, donde el objeto básico de estudio es el sistema didáctico.

Pero además, el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas: alumno - saber. El problema principal de investigación es el estudio de las *condiciones en las cuales se constituye el saber* pero con el fin de su *optimización*, de *su control* y de su *reproducción* en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al *objeto* de la interacción entre los dos subsistemas, que es precisamente la *situación - problema* y la gestión por el profesor de esta interacción.

El resultado de este enfoque nos lleva a considerar la situación escolar como un *sistema* y a modelar las relaciones entre dos de sus subsistemas: el sistema *enseñante* y el *sistema enseñado* a partir de las relaciones entre ellos, se trata entonces de "describir precisamente estos subsistemas por las relaciones que mantienen en el juego" (Brousseau, 1986, p. 75).

Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento. Las situaciones son *específicas* del mismo. Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la *devolución de la situación al alumno.*

Enfoque Histórico Cultural

Se tienen en consideración además, los referentes teóricos generales del Enfoque Histórico Cultural, el cual fundamenta que el proceso de enseñanza aprendizaje, no puede realizarse sólo teniendo en cuenta lo heredado por el alumno, sino también se debe considerar la interacción sociocultural, la socialización, la comunicación, por lo que la influencia *de los otros*, es uno de los factores determinantes en el desarrollo individual. Se es consecuente además con la afirmación de Vigotsky: *El único tipo de instrucción adecuada es el que marcha adelante del desarrollo y lo conduce…Sigue siendo necesario determinar el umbral más bajo en que la instrucción puede comenzar, (estado de desarrollo actual) puesto que se requiere un cierto mínimo de madurez de las funciones. Pero debemos considerar también el nivel superior, (estado de desarrollo potencial) la educación debe estar orientada hacia el futuro. (Vigotsky, 1981, 118)*

Se asume por tanto, basado en este referente teórico, que en un primer año universitario, debe entenderse la zona de desarrollo próximo como la distancia que media entre el estado de desarrollo actual del estudiante, es decir, donde él es capaz de realizar la actividad matemática propuesta por el profesor por si solo y el estado de desarrollo potencial que sería el que pudiese alcanzar con ayuda de mediadores del proceso, entiéndanse otros estudiantes, profesores, amigos, la familia, medios didácticos, actividades sociales y académicas.

En la propuesta, el diagnóstico de la comprensión matemática en estudiantes de un primer año universitario, debe concebirse como un conjunto de situaciones didácticas que constituyen un sistema de tareas, ejercicios y problemas que propicien en ellos una cadena de desempeños de comprensión de amplia variedad y complejidad creciente, que posibilite la descripción de la zona de desarrollo próximo de cada estudiante. Es imprescindible no obstante, que tanto los alumnos como los profesores asuman conscientemente este primer eslabón en el proceso de enseñanza aprendizaje del primer año, para poder lograr una participación activa en el mismo. Lo que les permitirá a los estudiantes autovalorar el nivel de comprensión matemática con la que han accedido a la Universidad y se comprometan con la trayectoria de su proceso de aprendizaje.

Diagnostico inicial de la comprensión matemática en estudiantes universitarios

Cuando el propósito general de los profesores de un primer año universitario consiste en desarrollar en sus estudiantes la comprensión de los objetos matemáticos puestos en juego, a criterio de las autoras se hace necesario e imprescindible conocer el nivel comprensivo real con el cual arriban los estudiantes al primer año universitario partiendo de la concepción de comprensión matemática asumida en la investigación.

Por lo que se diseñó un diagnóstico de la comprensión matemática, con enfoque integral y que permitiera describir la zona de desarrollo próximo de cada estudiante.

La relación entre indicadores y parámetros de dicho diagnóstico puede tener mayor o menor extensión, en función de la experiencia del colectivo de profesores que diagnostica, en función de las características del alumno, del centro, del contexto, etc., pero básicamente debe atender a los aspectos siguientes:

- ✓ Comportamiento de la capacidad observacional como antecedente del proceso de razonamiento: sensaciones, percepciones y representaciones.
- ✓ Comportamiento de la actividad racional que de manera esencial abarca el análisis, la síntesis y la generalización.
- ✓ Comportamiento de las asociaciones internas, las cuales condicionan la comprensión profunda y no sólo la comprensión formal o reproductiva que se produce sobre la base de asociaciones externas.
- ✓ Habilidades y procedimientos en la solución de problemas prácticos.

Se propone entonces valorar más el proceso y sus cualidades, que las propias operaciones que la propia actividad matemática le impone realizar a los estudiantes del primer año, principalmente si pretendemos que el conocimiento sea significativo y derivado de un pensamiento activo, no como lo postula la enseñanza tradicional que en realidad propicia conocimientos sobre la base de un pensamiento pobre, que por eso, entre otras causas, tiende a olvidarse, no comprenderse y no usarse activamente.

Orientaciones metodológicas para desarrollar el diagnóstico inicial de la comprensión matemática en estudiantes de primer año.

Se concibe desde los primeros contactos que el profesor tiene con los estudiantes, teniendo en cuenta tanto la dimensión afectiva como la cognitiva y se aplica en diferentes tipos de actividades donde se diagnostiquen los niveles de comprensión inicial de cada estudiante, y sus potencialidades, preferencias, inquietudes científicas y laborales; lo que sentaría las bases para la ejecución de un modelo didáctico que favorezca el desarrollo de la comprensión matemática universitaria. (Torres y Martínez, 2006)

En la dimensión cognitiva

Apunta a la obtención de información sobre cuáles son las características, limitaciones y posibilidades del estudiante en cuanto a la realización y comunicación de la actividad matemática, es por tanto, obtener información sobre sus hábitos relacionados con el saber pensar, saber razonar, saber relacionar o explicar las características de los objetos matemáticos, así como saber aplicarlos.

Se trata en definitiva de obtener información mediante el diseño de situaciones didácticas que ayuden a predecir y luego trazar acciones, en función del posterior desarrollo de la comprensión matemática en los estudiantes.

- ✓ Se pide a los estudiantes que busquen ejemplos, aplicaciones y contraejemplos, de algunos de los temas en los cuales ya se ha diagnosticado no comprende completamente.
- ✓ Comenzar con pruebas de evaluación en la cual se empleen ejercicios similares a las que se emplearon para acceder a la universidad o que se encuentran en los libros de texto de la enseñanza precedente.
- ✓ Continuar el diagnóstico con actividades de comprensión que pongan en juego el pensamiento del estudiante para ir constatando los niveles de comprensión que presenta cada estudiante.

Un ejemplo de la aplicación de esta metodología, incluyó actividades que fueron aplicadas en el curso escolar 2007-2008 en tres carreras de la Universidad Central de Las Villas, mediante entrevistas a los estudiantes y valoraciones individuales y colectivas de los resultados obtenidos, con el objetivo de diagnosticar las *potencialidades* reales de cada estudiante de comparar, analizar, argumentar, abstraerse, sintetizar información e interpretar diferentes representaciones de un objeto matemático dado, y con esta información las autoras establecieron el sistema de ayudas a cada estudiante para guiar su tránsito por su zona de desarrollo próximo que lo conducirá del nivel de comprensión real al potencial.

En la dimensión socioafectiva

Se diagnosticará el proyecto personal de cada estudiante, su capacidad de interesarse por la carrera que estudia en la universidad y su valoración de las posibilidades que tiene de éxito: este aspecto se orienta a desarrollar la autoestima, la imagen y las valoraciones positivas en los alumnos.

Diagnosticaremos los niveles de sociabilidad para evitar falta de unidad y se promueva un ambiente de ayuda y colaboración: este aspecto se orienta a desarrollar en cada estudiante las actitudes de trabajo en colectivo y la responsabilidad personal ante su formación universitaria.

Los aspectos concebidos en ambas dimensiones representan indicadores de los aspectos cualitativos del diagnóstico inicial de los niveles de comprensión, son además los que con mayor exactitud pueden servir de criterios comparativos de cambio, es decir, de donde deben partir los juicios para lograr la evaluación continua personalizada que estamos proponiendo se debe concebir durante el resto del curso escolar.

Al aplicar este diagnóstico inicial de la comprensión matemática en 10 estudiantes de Licenciatura en Matemática, se detectaron dudas en cuanto a las posibilidades de éxito en 4 de ellos, pues según declararon no les gusta la Matemática. El resto de los estudiantes reconocieron tener compromiso de graduarse, de superación de postgrado e incluso de pertenecer al claustro de profesores de la universidad, pero que necesitaban orientación por parte de los profesores.

Al comenzar la primera entrevista, teniendo los resultados correspondientes de un test aplicado, solo dos estudiantes habían resuelto algunos de los problemas planteados y tres reconocieron el principio de inducción y las funciones como herramientas para resolver dos de los problemas planteados. Luego del intercambio con la profesora la mayoría (8), reconoció que eran cuestiones que podían enfrentar y resolver, se les orientó y de manera gradual cada uno de ellos y en función de sus intereses y posibilidades, presentó algunas de estos problemas resueltos.

La entrevista que se realizó con los resultados de un cuestionario posterior, determinó los niveles de creatividad matemática en cuanto a objetos matemáticos que son estudiados en la enseñanza precedente. (Torres y Martínez, 2008)

Los resultados de este diagnóstico inicial de la comprensión matemática, permitió al colectivo de profesores del primer año de Licenciatura en Matemática, el diseño de situaciones didácticas que favorecieran el proceso de comprensión matemática en los estudiantes y a ellos una participación activa y consciente en su proceso de aprendizaje.

Conclusiones

Al persistir en muchos de los estudiantiles que arriban a las aulas universitarias resultados académicos de baja calidad, desmotivación por estudiar matemática, la creencia de que no pueden vencer y el espíritu de conformarse con aprobar, entre otras cuestiones, a juicio de las autoras, la transformación del proceso de enseñanza aprendizaje del primer año, requiere necesariamente de un diagnóstico inicial de la comprensión matemática, pero con enfoque integral que tenga en consideración no solo los conocimientos precedentes, sino las estrategias de aprendizaje que conocen, sus preferencias matemáticas y sus potencialidades.

Los resultados expuestos en este trabajo conforman el resultado investigativo de las autoras por más de diez años de experiencia como docentes de primer año universitario lo cual les permitió aplicar la técnica de observación participante durante todo el proceso.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2)*, 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematic.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.

Font V. (2003). Processos mentals versus competencia. *Biaix, 19,* 33-36..

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, *1*(1), 21-31.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25,* 77-87.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Horrutinier, P. (2006) *La Universidad Cubana: Modelo de formación*. Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En: M. S. Wiske. (Ed.) *La Enseñanza para la Comprensión - Vinculación entre la investigación y la práctica,* (pp. 215-256). Barcelona, España: Editorial Paidós.

Rico, L (2001). Análisis conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro,* 179-193. Granada, España: Editorial

NCTM de Estados Unidos. (2000). *Estándares curriculares* . Versión al español realizada por la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática. Sevilla. España.

Rico, P y Silvestre, M. (2003). Proceso de enseñanza aprendizaje, En *Compendio de Pedagogía*. Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Torres A, y Martínez D. (2006). Dimensiones de un modelo didáctico para desarrollar comprensión en la matemática universitaria. *Memorias del IV Encuentro sobre la enseñanza de la matemática y la informática*. La Habana, Cuba.

Torres Alfonso, A., Martínez Martínez, D. (2008). Developing the understanding by means of a didactic model that favors the mathematical creativity. *Proceedings of The Discussion Group 9: Promoting creativity for all students in Mathematics. The 11´ International Congress on Mathematical Education: ICME 11,* México.

Vygotsky, L. (1981). *Pensamiento y lenguaje.* Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

LA IMPORTANCIA DE LAS REPRESENTACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA DISCRETA

Patricia Có, Mónica del Sastre, Erica Panella
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario — Argentina
Facultad Regional Rosario. Universidad Tecnológica Nacional
co@fceia.unr.edu.ar, delsas@fceia.unr.edu.ar, panella@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Visualización — Nivel: Superior

Resumen. *Las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados "reales" o "físicos" (Duval, 1999).*
Siendo docentes de la asignatura Matemática Discreta (primer año de Ingeniería en Sistemas de Información) constatamos cómo la utilización de los contenidos visuales presentes en las ideas y conceptos matemáticos, cuya representación es intuitiva, resulta muy ventajosa al presentar y manipular tales conceptos.
En este trabajo reflexionamos acerca de la especial importancia del uso de representaciones (principalmente gráficas) en la enseñanza y el aprendizaje de aquellos contenidos de la asignatura que, creemos, tienden a ser abordados con un excesivo formalismo.
Palabras clave: matemática discreta, relaciones, representaciones gráficas

Marco referencial

Las representaciones constituyen actualmente un tema de gran importancia y complejidad para la Educación Matemática, sobre el cual existe una gran cantidad de publicaciones. Hablar de representación supone hablar de conocimiento, significado, comprensión y modelización. Estas nociones integran el núcleo central no sólo en Educación Matemática, sino en otras disciplinas como la Epistemología, Psicología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo (Godino, Font, D´Amore, 2007). Esta diversidad de intereses por la representación es la razón de distintos enfoques y formas de concebirla. Siguiendo en la línea de estos autores, podemos decir que desde el punto de vista cognitivo la compresión de un objeto matemático se entiende básicamente en términos de integración de representaciones mentales. Esta integración es la que asegura la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto.

Muchas investigaciones han tenido (y tienen) por objetivo el estudio de las representaciones internas porque consideran que la compresión de los alumnos está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede propiciar estableciendo conexiones y traducciones entre distintos tipos de representaciones externas.

Duval (1999) sostiene que el conocimiento conceptual es el invariante de múltiples representaciones semióticas y que sólo tomando en consideración diferentes registros de representación podemos organizar las propuestas didácticas. La contribución teórica de este autor se inscribe dentro de la línea de investigación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis) al lenguaje, en sus diversas manifestaciones.

Actualmente el papel que juegan las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos ha sido objeto de estudio por parte de investigadores procedentes tanto del campo de la Didáctica de la Matemática como del campo de la Psicología. Estos estudios se han realizado desde marcos teóricos diferentes y en muchos casos enfrentados.

Dentro de las investigaciones en la enseñanza de la Geometría se destaca como especialidad autónoma la dedicada a la visualización espacial, ya que está fuera de duda que la capacidad de visión espacial es una componente necesaria para el aprendizaje de la Geometría tridimensional. No obstante, la visualización es una habilidad que no sólo interactúa con la Geometría, sino también con la Aritmética, el Álgebra, el Cálculo. De este modo la aptitud de visualización es una componente esencial del aprendizaje de la matemática en general.

Nuestra percepción es prioritariamente visual y así no es de extrañar en lo absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización. Y aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndolos adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre objetos, un apercibimiento directo de la situación relativa de las partes de su objeto de estudio.

La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la trasmisión y comunicación propias del quehacer matemático (Guzmán, 1996).

Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas del que fue culpable la corriente hacia la "matemática moderna", hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría.

Por ello parece más importante para la actividad docente en vez de transmitir la reseña de una demostración, comunicar las ideas inherentes de una manera inteligible y convincente. Sostenemos que un formalismo extremo no está en consonancia ni con la práctica matemática ni con la filosofía de la matemática actual.

Los resultados matemáticos publicados para una audiencia de matemáticos se presentan en forma de teoremas y demostraciones. Una persona con una formación parcial en matemática puede creer que la naturaleza de la matemática es un cuerpo de conocimiento altamente estructurado regido por leyes lógicas. De aquí puede percibirse que ser competente en matemática es equivalente a ser capaz de crear la forma, la prueba rigurosa. Creemos sin embargo que no se trata de pasar al extremo opuesto y erradicar por completo el formalismo de la enseñanza de la matemática. El aprendizaje es un proceso más dinámico que estático. El progreso de los estudiantes se mide en la adquisición de un nivel más profundo de ideas y habilidades, de aquí la validez, en un determinado momento, del razonamiento formal o informal sólo se puede juzgar en la medida que procure una mayor comprensión de la matemática. El punto de partida para la comprensión es la idea suministrada por la experiencia de cada día. Para conseguir una base para progresar en conocimiento matemático, esta idea debe desarrollarse y hacerse explícita. Esto requiere un grado de formalismo. Debe crearse un lenguaje: definir símbolos, especificar reglas de manipulación, delimitar el alcance de las operaciones matemáticas. Debe enseñarse con la mayor precisión de modo que pueda separarse lo esencial de lo no esencial y conseguir una mayor generalidad. Pero esto tiene su precio. Alejado del contexto intuitivo original, el estudiante puede perder perspectiva de la realidad y llegar a ser un manipulador de símbolos. Como una de las alternativas a la demostración formal, adquiere una gran importancia el fenómeno de la *visualización* (Guzmán, 1996). La comunicación ordinaria en matemática es una mezcla de lenguaje natural, formal y gráfico lleno de connotaciones intuitivas, visuales y sobreentendidos que no podemos pasar por alto. Tiene, pues, sentido el considerar la visualización como punto de partida del trabajo docente a pesar de los obstáculos y objeciones que se le han puesto. La posibilidad de que pueda conducir a error no invalida su eficacia y potencia en los procesos de comunicación y construcción de conocimiento matemático.

Algunas reflexiones desde la propia práctica

En nuestra experiencia como docentes de Matemática Discreta, asignatura del primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información (Facultad Regional Rosario - Universidad Tecnológica Nacional) nos preocupa indagar cómo la utilización de los contenidos visuales presentes en las ideas y conceptos matemáticos, cuya representación es intuitiva, puede facilitar la presentación y manipulación de tales conceptos.

Concretamente, nos referimos a la reflexión sobre la importancia que adquiere el uso de representaciones (principalmente gráficas) en la enseñanza y el aprendizaje de aquellos contenidos de la asignatura que, consideramos, tienden a ser abordados con excesivo formalismo.

Así por ejemplo en el tema *Relaciones*, que es central en la currícula de la asignatura, la posibilidad de aprovechar las representaciones gráficas para propiciar aprendizajes significativos se da naturalmente a partir del hecho de que muchas relaciones admiten formas gráficas de representación: dígrafos, gráficas, diagramas de Hasse.

En un dígrafo por ejemplo, el análisis del cumplimiento de las propiedades de una relación en un conjunto se simplifica sensiblemente. Así, el explorar la validez de la propiedad reflexiva queda reducido a la búsqueda de “bucles” en cada vértice. Análogamente, la identificación de una relación de equivalencia a través de su dígrafo es prácticamente instantánea. Más aún, el concepto de partición de un conjunto se hace mucho más asimilable dado que el dígrafo de una relación de equivalencia se muestra “segmentado”, “partido”, como un rompecabezas con sus piezas levemente separadas como se puede apreciar en el siguiente dígrafo:

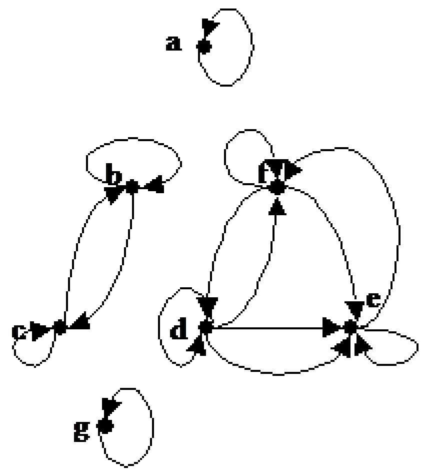


Figura 1. Dígrafo de una relación de equivalencia

Podemos ver en el dígrafo de la Fig. 1 que sin dejar de exhibir el todo pueden distinguirse sus partes, y con ello se allana sensiblemente el camino que conducirá a la institucionalización del concepto.

También es posible representar a una *relación* con una matriz booleana. Podemos entonces insistir en nuestras clases en que los alumnos observen constantemente la coherencia entre el número de *unos* en la matriz, de *flechas* en el dígrafo y de *pares ordenados* en el conjunto que define a la relación, resignificando de esta forma los símbolos matemáticos y favoreciendo el aprendizaje de los conceptos a partir de una mayor utilización e interacción entre distintos registros de representación. Coincidimos con Duval cuando afirma que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados “reales” o “físicos” (Duval, 1999).

Una *relación de orden* se representa habitualmente con un dígrafo especial denominado Diagrama de Hasse en el que se explicita el “orden” en un sentido ascendente. Por este motivo, a partir del diagrama se facilita la determinación de las cotas superiores e inferiores de un subconjunto dado. La identificación de las mismas es casi intuitiva observando los elementos de la parte superior o inferior del gráfico, respectivamente. Creemos que esto sucede debido a que la palabra superior (inferior) está asociada, en el lenguaje coloquial, a lo que está "más arriba" ("más abajo").

El diagrama de la Fig. 2 corresponde al conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}\}$.

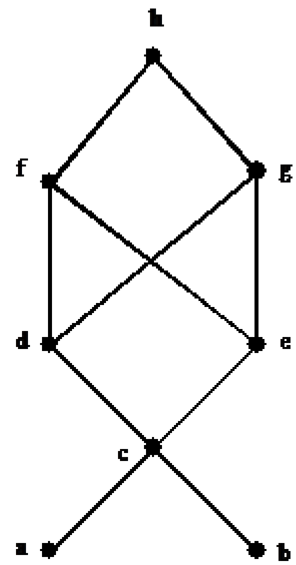


Figura 2. Diagrama de Hasse de una relación de orden parcial

Muy fácilmente a partir del diagrama podemos determinar que las cotas superiores del subconjunto $\mathrm{B} = \{\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$ son los elementos f,g y h, mientras que sus cotas inferiores son c, a y b.

En el caso del *árbol* (tipo especial de relación de orden), su dígrafo adopta una forma bastante reveladora de la correspondencia que existe entre la definición de sus elementos constitutivos y el significado común de las palabras que los designan: raíz, ramas, hojas, altura, etc.

Por ejemplo, el árbol $\mathrm{T} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{a}, \mathrm{c}), (\mathrm{c}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{e}), (\mathrm{b}, \mathrm{g})\}$ con raíz *a* y hojas *g*, *d*, *e,* altura 2, puede representarse como se muestra en la Fig. 3:

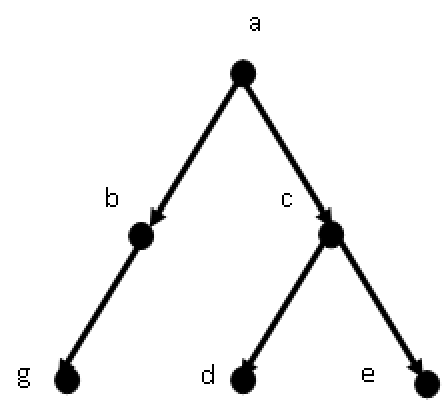


Figura 3. Dígrafo del árbol T

Entonces es habitual y operativo que tanto docentes como alumnos utilicen el siguiente gráfico que facilita la identificación de las "raíces" y las "hojas" a visitar, así como el orden en que debe hacerse la visita.

Consideraciones finales

En nuestras clases hemos notado que el hecho de propiciar exploraciones, análisis y argumentaciones sobre las representaciones gráficas otorga al alumno mayor seguridad y confianza a la hora de elaborar justificaciones formales. En este sentido las representaciones gráficas son utilizadas como elementos predictivos de gran valor en los procesos áulicos a la vez que, creemos, juegan un rol fundamental en la comprensión y resignificación del lenguaje lógico formal necesario para la actividad matemática.

Si admitimos que los conceptos matemáticos tienen más de una forma de representación, nuestras prácticas deberían orientarse a enfatizar estas formas de representación múltiple y lograr que los alumnos puedan transitar de una representación a otra de manera fluida. Sabemos que esto no se logra fácilmente como pudiera parecer a primera vista pero vale la pena intentar un cambio en esa dirección.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali : Universidad del Valle.

Godino, J.; Font, V. y D´Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2-7.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

¿ARTEFACTO O INSTRUMENTO? ESA ES LA PREGUNTA

Alejandro Del Castillo Escobedo, Gisela Montiel Espinoza
CICATA-IPN México
alejandro.delcastilloescobedo@gmail.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio

Resumen. *Existen ejemplos del uso de instrumentos en disímiles situaciones; el ábaco en la primaria o el chelista interpretando una pieza musical. En el aula la tecnología, puede resultar un instrumento para que los estudiantes examinen situaciones y problemas desde diversos ángulos, visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas. La tecnología perturba fuertemente el ambiente de trabajo y nos lleva a modificar los planteamientos clásicos en el salón de clases. El enfoque instrumental busca encontrar remedio a ello ubicando las potencialidades y las restricciones de la tecnología para una nueva actividad matemática que, a su vez, genere una reorganización del conocimiento de los estudiantes. La génesis instrumental estudia la construcción hecha por el estudiante al interactuar con un artefacto, convirtiéndolo en instrumento, así el estudiante se lo apropia haciéndolo parte de su actividad matemática.*
Palabras clave: artefacto, génesis instrumental, instrumento, instrumentación, instrumentalización

Introducción

El hombre, en los inicios de la humanidad, emplea un artefacto para defenderse y atacar a sus enemigos; toma una piedra astillada y la convierte en un instrumento de supervivencia: su primera arma; el mundo se ha transformado vertiginosamente desde la aparición de esa piedra astillada hasta las novedades tecnológicas que hoy tenemos a nuestro alcance.

Los artefactos, como objetos materiales, han sido compañeros de las matemáticas desde tiempos muy remotos. Euclides en el libro IV de sus Elementos indica la forma de dibujar con regla y compás algunos polígonos regulares (Joyce, 1996). En el salón de clases de matemáticas se usan objetos manipulables constantemente. El ábaco, por ejemplo, ha sido usado en las escuelas para ejecutar operaciones aritméticas.

Definiendo conceptos.

Como *máquina* entenderemos un aparato complejo, que se puede considerar que esta relativamente alejado en su interacción con el hombre, pero más consonante con la manufactura industrial o procesos similares.

Una *herramienta* es un dispositivo que originalmente nos provee de una ventaja (generalmente mecánica) al ejecutar una tarea. Entenderemos por herramienta al aparato que está disponible para dar sustento a la actividad humana. Un teléfono celular, un taladro, el lenguaje de los tarahumaras, el lenguaje que usamos nosotros, son ejemplos de herramientas.

Cuando nos referimos a una herramienta y no consideramos al usuario y sus usos, estaremos hablando de un *artefacto*. Para Rabardel (1995, p.49) un artefacto es una *"cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano".*

El término de *instrumento* se usa para designar el artefacto en situación, delimitado por un uso, en una conexión instrumental a la acción del sujeto, como medio de éste.

Moreno (2002) expresa que si durante una ejecución ya no podemos distinguir entre el pianista y el piano, se puede afirmar que el piano forma parte del pianista. El artefacto se ha tornado en un instrumento. Si se habla de tecnología, y en particular, de software, se pretende que éste se convierta en un instrumento matemático en las manos del alumno, buscando generar en su cabeza una reorganización conceptual. Cuando el artefacto se torne en instrumento, estaremos ante los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción.

Un ejemplo de lo anterior, mostrado en nuestro cartel, muy artístico por cierto, es cuando Van Gogh utiliza cañas, talladas como una pluma de ganso. La caña *se convierte en el instrumento* de sus dibujos. Le da la *posibilidad* de profundizar sus hojas y de inspirar los contornos. Este *artefacto* le permite imitar el *gesto* ancho de los pintores japoneses, que no utilizan la caña, sino el pincel. Particularmente flexible, la caña da origen a una *manera de hacer*, que traduce todo un vocabulario de *signos*: punteados, plumeados, redondeados y sobre todo los remolinos que se convierten en una de las técnicas principales del pintor. (Exposición Van Gogh 2003, Arles, Francia)

La noción de instrumento es ligada a una tarea, que es asociada a su vez con un objeto. Así el instrumento autoriza al usuario a actuar sobre el objeto. La noción de instrumento aparece en los trabajos de Rabardel y está asociada con dos otros elementos: un objeto y un sujeto. Más tarde Rabardel precisa su definición del instrumento:

> *"La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas*

y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse" (Rabardel, 1995, p.72) .

Para (Trouche, 2005) un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de una artefacto. En nuestro cartel mostramos como la gente (albañil) usa el artefacto (cuchara) para varios propósitos y por lo tanto crea sus instrumentos personales. Así el sujeto construye su propio instrumento, él se lo apropia, lo que hace al instrumento reutilizable en situaciones análogas. A través de esta conservación, el instrumento es un forma de capitalizar la experiencia acumulada (cristalizada dicen algunos autores). En este sentido, todo instrumento es conocimiento.

Marco Teórico

La transposición informática

Las computadoras son hoy en día consideradas tan relevantes en la matemática educativa que uno de los seis principios para las matemáticas escolares establecidos por los estándares de la NCTM afirman que la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en la matemática que es enseñada y amplia el aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 2000, p. 24).

En ese documento también se hace una reflexión sobre estos auxiliares de la enseñanza: "*La tecnología no debería ser usada como un reemplazo para las intuiciones y los entendimientos básicos; más bien, podría y debería ser usada para fomentar esas intuiciones y entendimientos*" (NCTM, 2000, p. 24). "*El uso efectivo de la tecnología en el salón de clases de matemáticas depende del maestro … la tecnología no remplaza al maestro de matemáticas*" (NCTM, 2000, p. 25).

Nuestra investigación se apoya en lo que Balachef (1994) denomina *transposición informática*, buscando de clarificar qué tipo de objetos de enseñanza se crean en el ambiente computacional, cuando este es desarrollado en el aula y, en consecuencia, qué tipo de aprendizaje surge en los sistemas didácticos. Se trata de un proceso complejo en el que a los contenidos propiamente matemáticos se añaden los de carácter informático correspondiente a la interface.

Balachef (1994, p. 16) define la transposición informática como:

"El trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la puesta en práctica de esta representación por un dispositivo informático".

El ambiente informático permite al usuario operar de una forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos.

Clasificar las *restricciones* ligadas a las *potencialidades* en el uso de un software facilita, para el investigador, la realización de un análisis a priori de las distintas formas en que tal software propone realizar un tipo de tareas.

Trouche (1997), distingue tres tipos de restricciones del medio informático: internas, de comando y de organización. Las primeras no se consideran ligadas a la tarea específicamente, ya que vienen predeterminadas (naturaleza del microprocesador, capacidad de la memoria, estructura de la pantalla). Las de comando están asociadas a la sintaxis de los propios comandos, las cuales pueden modificarse —dentro de ciertos límites— para obtener un cierto resultado (ejemplo, la existencia de paréntesis para las funciones). Por último, las de organización que están ligadas al teclado y a la pantalla, es decir, a la estructuración de las informaciones y de los comandos disponibles, también pueden ser modificadas por el usuario para obtener los resultados deseados (por ejemplo, la accesibilidad del símbolo ∞).

El usuario no cuenta con una total libertad para utilizar como él pretende un artefacto dado. Como

lo señalan Luengo y Balachef (1998), su uso está, relativamente, preestructurado por el artefacto en sí mismo. En la figura se observa un utensilio de cocina diseñado para zurdos, ¿Cómo se sirve un vaso de leche (caliente, por supuesto) un diestro?. Y como señala Yerushalmy (1997), el artefacto abre nuevas posibilidades para el aprendizaje y la conceptualización.

Si hablamos de la potencialidades tenemos que una de las principales potencialidades de un Ambiente de Geometría Dinámica, ambiente que se muestra en el cartel, es la de poder generar y apoyar experiencias cualitativas de dependencia funcional basadas en las metáforas fundamentales del movimiento y el tiempo, para el desarrollo significativo de la idea de función, 462 haciendo énfasis en la idea de variación o más precisamente de la covariación, esto es, una relación entre dos variaciones.

Por otra parte, Trouche (2002, p. 200) afirma: "*Es sin embargo, difícil separar las potencialidades de las restricciones: las dos están íntimamente mezcladas, toda facilidad que se le ofrece al usuario constituye al mismo tiempo una incitación a realizar un tipo de acción antes que otra*".

La génesis instrumental

El proceso de un artefacto que se convierte en un instrumento en las manos de un usuario - en nuestro caso el estudiante – se denomina la *génesis instrumental.*

La génesis instrumental, es mostrada en nuestro cartel como una evolución en curso, no trivial y que lleva mucho tiempo. Una relación bilateral entre el artefacto y el usuario es establecida: mientras el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (*instrumentalización*), las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (*instrumentación*).

Trouche (2004) afirma que un instrumento puede considerarse una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto (o parte de él) y de una componente psicológica (la organización de la actividad con un fin dado). El instrumento es entonces el producto de una historia: El usuario a partir de un artefacto, construye un instrumento, en un entorno determinado, para realizar una tarea específica. Esta historia, que se denomina *génesis instrumental*, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo.

Como se menciono anteriormente esta génesis contiene dos entidades, una primera que se refiere a la apropiación del artefacto y de sus propiedades: la instrumentalización; la otra se refiere en la construcción de los esquemas de uso: la instrumentación.

La instrumentalización

En el curso del proceso de instrumentalización, el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto, derivadas de su primera uso. El sujeto se adapta al artefacto. El sujeto puede también construir nuevas funciones del artefacto, así es el artefacto el que se adapta a las necesidades del usuario.

Este proceso que dirige el sujeto, implica varias etapas:

Una etapa de descubrimiento y de la selección de las teclas relevantes (para nuestro cartel, en el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD))

Una etapa del personalización (uno ajusta el AGD a sus necesidades personales)

Una etapa de transformación de la herramienta, inclusive con modificaciones no previstas por el diseñador: modificación de la barra de menú, creación de los atajos del teclado, creación de herramientas personales.

> *La instrumentalización es la expresión de la actividad específica de un sujeto: sobre lo que el usuario piensa en relación para que fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado: la elaboración de un instrumento ocurre en su uso. La Instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento (Trouche, 2005, p.148).*

La instrumentación

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los diseños de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores. De la misma forma que la utilización de las señales psicológicas influye sobre los pensamientos del sujeto, la génesis instrumental permite hacer evolucionar las concepciones del sujeto relativo al objeto contemplado por el instrumento. Las concepciones evolucionan por la adaptación a las dificultades de las herramientas y también por la consideración de las potencialidades.

El progresivo descubrimiento del sujeto de las propiedades (intrínsecas) de los artefactos va acompañado de la adaptación de sus esquemas, así como los cambios en la significación del instrumento resultante de la asociación del artefacto con los nuevos esquemas.

El nacimiento de estos esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas (que dan así un nuevo significado a los artefactos), la adaptación de los esquemas (que contribuyen a sus cambios en el significado), constituye esta segunda dimensión de la génesis instrumental: el proceso de instrumentación.

En nuestro cartel y mediante un ambiente SAC (Sistema Algebraico Computarizado) mostramos que el sujeto debe adaptar su percepción a las gráficas que el artefacto le muestra.

Esta investigación hace uso de la tecnología y toma como marco a la Génesis Instrumental y se pretende adquirir elementos de cómo la tecnología se integra al estudiante para que construya conocimiento matemático. A partir de este marco la investigación nos proporciona elementos de estudio de cómo nuestro artefacto, el Ambiente Gráfico Dinámico, se convierte en un instrumento producto de la génesis instrumental, y suponemos de hipótesis que el manejo de este ambiente, basado en los esquemas de uso apropiados, permite esta construcción del instrumento de tal manera que se integra al estudiante.

Metodología

Comprobaremos nuestra hipótesis con el análisis cualitativo bajo la perspectiva del marco teórico ya comentado. En la investigación se estudian situaciones de simulación del movimiento en un ambiente gráfico dinámico con estudiantes del Nivel Medio Superior de un C.B.T.i.s. de quinto semestre. Estas simulaciones junto con el uso de las gráficas, tablas y la dualidad instrumentación-instrumentalización nos dan elementos que permiten la integración del instrumento por el estudiante. Esto es, generar y apoyar experiencias cualitativas de dependencia funcional basadas en las metáforas fundamentales del movimiento y el tiempo, para el desarrollo significativo de la idea de función.

De esta manera se pretende descubrir indicadores de una integración tecnológica al estudiante que le permita cimentar su conocimiento matemático.

Conclusión

Este cartel se acoge al seno de la aproximación instrumental, un marco teórico que abarca elementos de la ergonomía cognoscitiva (Verillon y Rabardel, 1995) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992).

Sólo con los materiales concretos no se generaría aprendizaje de las nociones matemáticas, es necesario que el alumno interactué con ellos en un ambiente organizado. Esta interacción es objeto de estudio dentro de la Matemática Educativa y nuestro interés en este trabajo.

En este cartel se presentaron cuatro distintos instrumentos y sus correspondientes historias:

Uno enclavado dentro de la actividad humana y que tiene poca relación con el quehacer educativo: La *cuchara* (bellota) de un albañil. El otro relacionado con el pincel de un pintor Los otros dos, más cercanos a nuestro entorno: un software de geometría dinámica que tiene como finalidad dibujar diagramas geométricos variables sobre la pantalla de la computadora (o de la calculadora); y un software SAC (Sistema Algebraico Computacional) que consta generalmente de tres paquetes de software para manipulación simbólica, resolución numérica, y graficación.

Referencias bibliográficas

Balachef, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(172), 9-42.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 77-111.

Joyce, D. (1996). *Los elementos de Euclides*. Recuperado el 11 de Octubre del 2008, disponible en: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.

Luengo, V. y Balacheff, N. (1998). Contraintes informatiques et environnements d'apprentissage de la démonstration en géometrie. *Sciences et Techniques Educatives*, 5(1), 15-45.

Moreno L. (2002, enero). Instrumentos Matemáticos computacionales. En *Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Ministerio de Educación, República de Colombia, Bogota, Colombia.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, Virgina.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Armand Colin.

Trouche L. (1997). *A propos de l'apprentissage de functions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin y L. Trouche (Eds.). *Calculatrices Symboliques. transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique* (pp. 187-214). Grenoble, Francia.:La Pensée Sauvage.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.). *The didactical Challenge of Symbolic Calculators, turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). Springer Netherlands.

Verillon P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.

Yerushalmy M. (1997). Reaching the unreachable: technology and the semantics of asymptotes. *International Journal Computer Learning*, 2, 1-25.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE BACHILLERATO Y SECUNDARIA ALREDEDOR DEL CONCEPTO DE MEDIANA

Silvia Azucena Mayén Galicia, Carmen Batanero Bernabeu
Universidad de Granada España
smayen@correo.ugr.es
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística
Nivel: Básico, Medio

Resumen. *En este trabajo presentamos el estudio semiótico de las respuestas de estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato con el fin de detectar conflictos semióticos sobre la comprensión del concepto de mediana. Se observa mayor dificultad en ambos grupos al resolver estos problemas de un cuestionario sobre medidas de tendencia central. Utilizamos el Enfoque Onto-Semiótico propuesto por Godino y colaboradores. Clasificamos las respuestas en categorías de los conflictos semióticos encontrados y comparamos los resultados en ambos grupos de estudiantes.*
Palabras clave: comprensión, conflictos semióticos, estimación, media, mediana

Introducción

Las medidas de posición central han suscitado gran interés dentro de la investigación en educación estadística que describen errores y dificultades en estudiantes de diversas edades, incluso en alumnos universitarios. Estas investigaciones se han orientado preferentemente sobre la media aritmética, sin embargo, en el análisis exploratorio de datos, enfoque recomendado actualmente en el currículo mexicano de matemáticas para la secundaria y el bachillerato, se da peso a los estadísticos de orden como la mediana y también se introducen algunas de sus representaciones gráficas, como el gráfico de caja.

El propósito de este trabajo es analizar las respuestas de los estudiantes al resolver un problema de mediana a partir de la interpretación de un gráfico e identificar conflictos semióticos en el aprendizaje de este concepto que pudieran dar origen a diversas dificultades en su resolución. Por otra parte, centramos nuestro interés en la mediana por sus escasas investigaciones previas, Cobo (2003) y Mayén (2006), en las que se ha observado mayor dificultad en ambos grupos de estudiantes.

Nuestro estudio está fundamentado en el modelo teórico del "enfoque ontosemiótico" (EOS) de la cognición matemática (Godino, 2003), y por lo tanto, hemos seguido su método de análisis.

Finalmente presentamos un resumen de las categorías de respuestas encontradas en el total de la muestra y por nivel educativo.

Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2003), considera el significado de los objetos matemáticos como altamente complejo, delimitando diversos *elementos de significado:* campos de problemas, definiciones, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos, que intervienen en las prácticas matemáticas ligadas con dichos objetos. Godino señala que en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados), y un punto crucial de la enseñanza es lograr que los alumnos dominen la semántica (además de la sintaxis) de estos símbolos. La noción de función semiótica se entiende como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes: Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo); un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor); un criterio o regla de correspondencia, esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido. En ocasiones el significado que el profesor o investigador quiere atribuir a una expresión no es interpretado correctamente por el alumno y se produce el *conflicto semiótico.* En estos casos el error se produce no por una falta de conocimientos, sino por no relacionar adecuadamente los dos términos de una función semiótica, como mostraremos en el ejemplo que analizamos en este trabajo.

Método

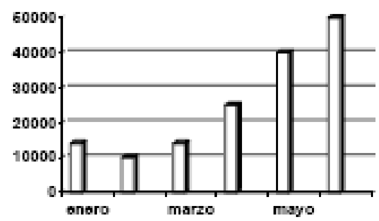
Muestra

La muestra está compuesta por 643 estudiantes mexicanos: 481 de Bachillerato, de diferentes Cecyts del Instituto Politécnico Nacional y 162 de Educación Secundaria. Los estudiantes de Bachillerato son de sexto semestre, de 17 y 18 años de edad y los de Secundaria, de tercer grado y de entre 14 y 15 años. Ambos grupos habían estudiando *medidas de tendencia central* (media, mediana, moda) como parte de los temas de estadística en ese mismo curso en que se les aplicó el cuestionario.

Problema propuesto y método

El problema que se analiza, tomado de Zawojewski (1986), se centra en la estimación directa de la media a partir de un gráfico y en el cálculo de la mediana a partir del mismo gráfico. Los elementos de significado que contiene son principalmente algorítmicos, y la dificultad que se presenta está en su representación (lectura del gráfico). El ítem requiere utilizar dos propiedades: *la mediana y media pueden no coincidir con los datos, y el cálculo de la media y el de la mediana no son operaciones internas*.

Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



a) *Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.*
b) *Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.*

Figura 1. Problema propuesto

Para resolver el inciso b) del ítem, en primer lugar el alumno debe reconocer los datos del problema pasando del formato gráfico al numérico, con lo que obtendría la siguiente serie de valores aproximados: 13.000, 10.000, 13.000, 25.000. 40.000, 50.000. Posteriormente, debe ordenar los datos: *10.000, 13.000, 13.000, 25.000, 40.000, 50.000.*
Puesto que se trata de un número par de valores, la mediana corresponde al valor de la media de las variables que ocupan los lugares centrales, es decir: *13.000+25.000/2=19.000*

Dividimos a continuación la solución en unidades para realizar el análisis semiótico. Como vemos, se requieren conocimientos de los conceptos de variable, valor de la variable, escala, significado de los dos ejes, además de los conceptos de frecuencia y mediana.

Unidad	Contenido	Funciones semióticas
U1	El alumno debe reconocer los datos del problema pasando del formato gráfico al numérico, con lo que obtendría la siguiente serie de valores aproximados: *13.000, 10.000, 13.000, 25.000. 40.000, 50.000*	• Lectura de un gráfico (procedimiento); • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto); • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala); • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico relacionando dos tipos de representación del valor de la variable.
U2	Posteriormente, debe ordenar los datos: *10.000, 13.000, 13.000, 25.000, 40.000, 50.000*	• Visualizar el conjunto de datos como un todo; • Concepto de mediana como estadístico de orden; • Operación de ordenación (procedimiento); orden de números reales (concepto).
U3	Puesto que se trata de un número par de valores, la mediana corresponde al valor de la media de las variables que ocupan los lugares centrales, es decir: $\frac{13.000 + 25.000}{2} = 19.000$	• Mediana como valor central de una serie de datos aislados (definición de la mediana); • El valor central se refiere a la variable y no a la frecuencia; • Debe resolver el caso de indeterminación y hallar la media de los dos valores centrales; • Concepto y algoritmo de la media.

Tabla 1. Análisis de solución correcta al problema

Resultados

Una vez recopiladas las respuestas de los estudiantes iniciamos un proceso de categorización. Posteriormente realizamos el análisis semiótico de las respuestas típicas de cada categoría para inferir los objetos y procesos matemáticos que el estudiante utiliza en su resolución. A continuación, analizamos un ejemplo de las respuestas más frecuentes (categoría C1.1) y presentamos también la tabla de análisis semiótico para mostrar el método seguido en dicho análisis. Así mismo, describimos brevemente las categorías de conflictos hallados en el ítem, donde el primer valor se refiere a su frecuencia y el segundo al porcentaje en el total de los estudiantes.

Cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados (128, 20%). Los datos se presentan en forma de gráfico, y la mayoría de los estudiantes obtiene los valores numéricos de la variable para realizar el cálculo a partir de ellos, llevando a cabo, por lo tanto, una lectura correcta entre los datos (Tabla 2).

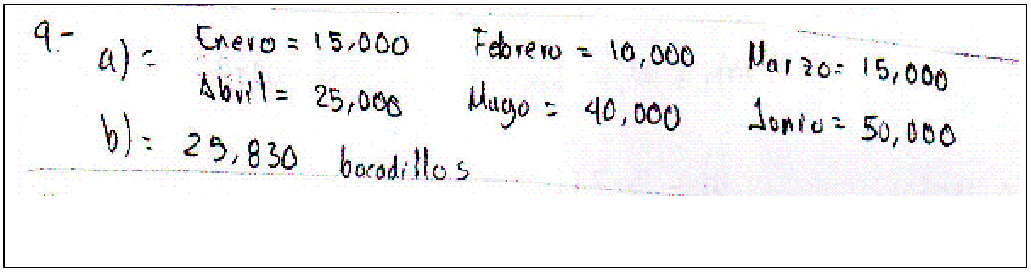


Figura 2. Ejemplo de respuesta de la categoría 1.1

Unidad	Contenido	Funciones semióticas
U1	a) Enero=15.000 Febrero=10.000 Marzo=15.000 Abril=25.000 Mayo=40.000 Junio=50.000	• Lectura de un gráfico (procedimiento); • Diferencia entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto); • Reconoce la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala); • Pasa de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable.
U2	b)= 25,830 bocadillos	• Cálculo correcto de media con datos aislados; • Definición correcta de media; • *Conflicto* al confundir media y mediana; • No llega a la respuesta correcta.

Tabla 2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Uso de la media con conflicto al realizar el algoritmo (5, 08%). Se interpreta bien el gráfico, ya que se hace una estimación aproximada de valores y se obtiene el resultado correcto de la media. Sin embargo, se ordenan dichos valores, se suma el total de los datos, y ahora se dividen por dos, por lo que parece no tener claro el algoritmo de la mediana. Podemos decir que aparece un conflicto al no distinguir entre media y mediana.

Error al interpretar la gráfica. (4, 0,6%). Se asignan erróneamente los valores de la variable mostrando falta de capacidad en la lectura de gráficos, incluso al nivel literal (Curcio, 1989). Como en el anterior, el conflicto es confundir media con mediana, a menos a nivel terminológico. Por otro lado, no se asocia la media al conjunto total de datos, sino que se calculan medias parciales de los valores dados. Falla en la idea de distribución.

Al conflicto de la categoría C1 se agrega otro que consiste en dividir por dos la media obtenida (3, 0,5%). Con respecto a la mediana, aparece otro conflicto, pues aunque el alumno ordena los datos y comienza bien el algoritmo, al tratar de resolver el caso de indeterminación no toma los valores centrales correctos, sino que suma los valores segundo y penúltimo de los datos obtenidos del gráfico y los divide por dos. Posteriormente, vuelve a calcular la media de los últimos datos, considerando el resultado como mediana.

Interpretar como mediana el valor central del rango de la variable (62, 9,6%). Se intercambian la escala con el valor de la variable, considerando las marcas de la escala (frecuencias) como valores de la variable. Ejemplo: *"mediana 25000 aprox".*

Confundir frecuencia con valor de la variable (63, 9,8%). Se observa un error al interpretar el gráfico, al utilizar como valores de la variable los números que aparecen en la escala vertical, por ejemplo "*30000",* que sería el valor intermedio del eje de las ordenadas, por lo que se podría asumir que se confunde variable con unidad estadística.

Realizar una estimación correcta de datos y dividir cada uno por dos, es decir, obtener medianas parciales (15, 2,3%). Supone una interpretación incorrecta de mediana como asociada a cada dato y no al conjunto de datos como un todo. Además hay una ausencia de la idea de distribución de datos.

Calcular la mitad de cada valor de los datos, y sobre los valores hallados obtener la mediana como centro del rango (1, 0,2%). Como en el conflicto anterior, se comienza encontrando la mitad de cada dato, y para ello se divide cada uno de los valores estimados por dos. A su vez, para encontrar la mediana, se toma la mitad de los dos valores centrales (segundo y penúltimo hallados de esta manera) y se obtiene su promedio.

Cálculo correcto de mediana a partir de la frecuencia acumulada (1, 0,2%). La solución es muy compleja y supone la comprensión de un gran número de conceptos: formar correctamente la tabla de frecuencias acumuladas, obtener el total de datos y dividir por dos, y posteriormente encontrar el intervalo al que corresponde el valor mediano. Sólo la hemos encontrado en uno de los estudiantes.

Utilizar la moda (21, 3,3%). Se presenta un conflicto en estos estudiantes que confunden los conceptos de moda y mediana, al menos terminológicamente, aunque realizan una interpretación correcta del gráfico y también el cálculo correcto de la moda a partir del mismo. Ejemplo: *"R=15000"*

La respuesta no tiene relación con las medidas de tendencia central (80, 12,4%).

Obtener el número medio de bocadillos diarios cada mes (1, 0,2%). Se interpreta correctamente el gráfico, sin embargo, se desconoce el cálculo para llegar a la mediana, dado que se toman los datos asignados a cada mes y se divide cada uno por 30.

Obtener el número medio de bocadillos diario a lo largo del periodo (2, 0,3%). No se hace una estimación de datos para obtener la media, y en su lugar se toman los valores de la escala (unidad estadística), se suman y al total obtenido se divide por 30 (días del mes). En cuanto a la mediana, se considera el resultado anterior y se vuelve a dividir por 30. Error al no interpretar bien el gráfico y confundir media y mediana.

No contesta (70, 10,9%).

En la Tabla 3 presentamos frecuencia y porcentaje de respuestas según el nivel escolar. Entre las diferencias más notorias, observamos que casi la cuarta parte de los estudiantes de bachillerato utilizan la media para resolver el ítem, mientras que de secundaria, sólo un 16%. En el uso de la mediana, la mitad de ambos grupos al menos la reconocen. Por otra parte, son pocos los estudiantes que resuelven con la moda, los que dan respuestas que no tienen relación con medidas de centralización y los que no contestan.

	Nivel				Total	%
Respuesta	Secundaria	% de nivel	Bachillerato	% de nivel		
Media	26	16,0%	114	23,7%	140	21,9
Mediana	84	51,9%	245	50,93%	329	51,2
Moda	6	3,7%	15	3,11%	21	3,3
Otro	22	13,6%	61	12,68%	83	12,9
No contesta	24	14,8%	46	9,56%	70	10,9
Total	162		481		643	

Tabla 3. Frecuencia y porcentajes de respuestas clasificadas por nivel escolar

Los conflictos semióticos que hemos detectado en estos estudiantes, indistintamente de su nivel de estudios, se pueden clasificar en diferentes grupos:

Conflictos terminológicos: Los estudiantes confunden los términos *mediana* con *media* y en menor frecuencia con *moda* (calculan la media en vez de mediana, incluso correctamente). *Conflictos conceptuales*: Conflicto en la definición de la mediana, porque se interpreta como centro del conjunto de datos sin ordenar, como centro del rango de la variable, como centro de la escala de la representación gráfica o incluso cuando se asigna la mediana a un solo dato o una parte de los datos y no a todo el conjunto. *Conflicto de comprensión de representaciones:* Se asocia principalmente al lenguaje gráfico, donde los alumnos confunden los valores de la variable con las divisiones de la escala o variable y la unidad estadística. *Conflictos procedimentales:* No resuelven el caso de indeterminación.

Conclusiones

Este estudio muestra que estas ideas no han sido sencillas para los estudiantes de nuestra muestra, y que se producen numerosos conflictos semióticos al trabajar con la mediana, que confirman y amplían estudios previos y llevados a cabo en otros contextos, Cobo (2003) y Mayén (2006). Las respuestas que hemos obtenido del ítem son muy variadas, y la mayoría se centra en el cálculo correcto de la media, por lo que es evidente que los estudiantes tienen mayor conocimiento de este concepto, sin embargo, hay una tendencia importante de confundir media y mediana, y en menor proporción con la moda. Otros errores que más destacan en este tipo de problemas se presentan al confundir los elementos que representan cada eje del gráfico, es decir, el de la variable (número de bocadillos) con la unidad estadística (mes), y el de interpretar como mediana el valor central del rango de la variable.

Todos estos conflictos (algunos con frecuencia apreciables) han aparecido al analizar el ítem del cuestionario y llaman la atención a la necesidad de tener en cuenta la dificultad del concepto de mediana en sus diversas representaciones para los estudiantes y reforzar su enseñanza. También sugiere el interés de continuar la investigación, proponiendo otras tareas relacionadas con la mediana o bien diseñando una enseñanza que permita mejorar la comprensión de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO,* 25, 41-58.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Mayén, S. (2006). *Comprensión de medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato.* Trabajo de Investigación Tutelado. Universidad de Granada.

Zawojewski, J. (1986). *The teaching and learning processes of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency.* Tesis Doctoral no publicada. University Northwestern. Evanston, Illinois.

LOS MODELOS EXPONENCIALES: CONSTRUCCIÓN Y DECONSTRUCCIÓN

José Trinidad Ulloa Ibarra. Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Nayarit. México
Universidad Autónoma de Guerrero
jtulloa@nayar.uan.mx, jaime.arrieta@gmail.com
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo de investigación que se presenta forma parte del trabajo "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico", un estudio que toma como base teórica a la socioepistemología, mismo que se incorpora como un apartado del trabajo global denominado "Las prácticas sociales en la construcción social del conocimiento". En el reporte se trabaja con elementos para analizar la constitución de las prácticas en comunidades de profesionales de la pesca, así como su deconstrucción, lo cual puede llegar a constituirse en una base sólida para diseños de aprendizaje útiles en la formación del profesionista de estas áreas.*
Palabras clave: modelos, deconstrucción, prácticas sociales, socioepistemología

Introducción

La relación entre la biología y la matemática ha sido fructífera para ambas desde que alguien, por primera vez, se dio cuenta de la posibilidad de modelar los fenómenos biológicos mediante entes matemáticos (Sánchez, Miramontes y Gutiérrez., 2002). Se atribuye a Leonardo de Pisa, *Fibonacci*, ser uno de los precursores de la modelación matemática, en 1219 en el *Liber Abacci* propuso un problema cuya solución se daría en términos de ecuaciones para la dinámica de una población.

El presente trabajo se encuentra en la línea de investigación que intenta dilucidar acerca de la relación entre las prácticas sociales y la construcción de los conocimientos (Arrieta, 2003), una de las tesis centrales de esta línea sostiene que los conocimientos emergen de las prácticas de las comunidades, que viven ligados a dichas prácticas y, en este sentido, ligados a sus intencionalidades. Es parte del proyecto "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial: en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico".

La investigación tiene diversos antecedentes, los trabajos acerca de la modelación como práctica social son uno de los principales. Uno de los aspectos fundamentales de esta línea de investigación consiste en situar el estudio de las prácticas de modelación en una comunidad, en un lugar y en un tiempo.

La comunidad de estudio, es la conformada por los profesionales de la pesca, en la que se consideran tanto a los biólogos pesqueros como a los ingenieros pesqueros; siendo éstos el punto de partida. Al observar el currículo de la carrera del ingeniero pesquero, podemos darnos cuenta que la modelación se estudia en diferentes momentos, sin embargo es claro que al igual que en otras comunidades hay una separación de los conocimientos del aula con las prácticas de las comunidades como profesionistas y, por ende, de las intencionalidades, de esta manera ha nacido el mito del conocimiento por el conocimiento, el conocimiento que vale por sí mismo.

Esto no lleva a resaltar que, la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio. Se ha impulsado, en muchos casos por falta de recursos y en otros por desidia o intencionalmente, la enseñanza de las ciencias en un aula aislada, sin laboratorios, sin interacción con las problemáticas de diferentes comunidades de profesionales, ingenieros, arquitectos, etc. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades. La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

Evolución de las Prácticas Sociales

Las prácticas de modelación que se han elegido se enfocan en las prácticas que se desarrollan en las comunidades de biólogos e ingenieros pesqueros en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. En especial nos centraremos en los fenómenos en los que se trabaja con Modelos Determinísticos - Estáticos. Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, de la misma forma se ejercen en el plano profesional y en los problemas cotidianos actuales.

Las actividades de modelación las distinguimos de quienes la usan con la finalidad de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de ésta. Reproducimos y analizamos prácticas de modelación con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula.

Nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas bien en los modelos numéricos, bien en modelos gráficos o analíticos (Arrieta, 2003).

Una de las prácticas más usuales de los Ingenieros y Biólogos Pesqueros cuando realizan investigación es la recolección de datos y a partir de estos plantean tesis o las refuerzan empíricamente lo cual se muestra en la figura No. 1.

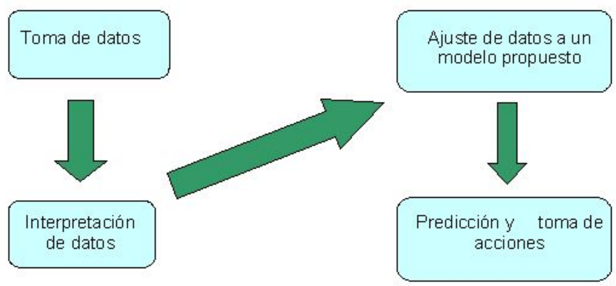


Figura 1. La práctica de modelación en las comunidades de profesionales de la pesca

Una experiencia de modelación

La práctica de la comunidad mostrada en la figura No. 1, en la que se aprecia que los actores ajustan los datos a modelos preestablecidos sin considerar las condiciones propias de los mismos, tales como: especie, edad de la misma, temporada de captura, lugar de captura, etc., ha creado situaciones como el caso que describiremos a continuación y que hemos llamado el caso "Belmont". En el cultivo de micro algas, el alimento vivo (fitoplancton y zooplancton) es esencial durante el desarrollo larvario de peces, crustáceos y moluscos, (Rodríguez y Reprieto, 1991)

Secuencia del Cultivo:

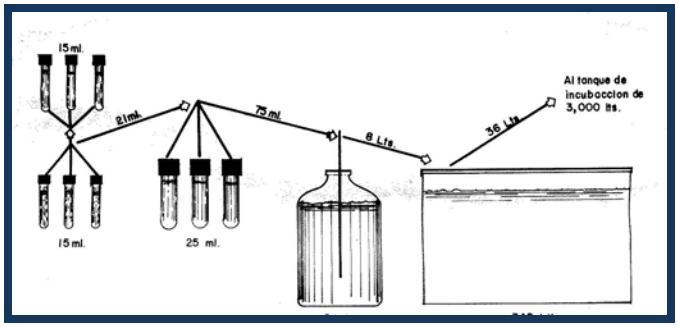


Figura 2. Secuencia de cultivo de micro algas

Cada 24 horas se obtuvieron muestras de 40 ml de la microalga, que fueron fijadas con una solución de lugol. El conteo de microalgas se hizo con un hematocitómetro marca Fuchs-Rosenthal de 0.2 mm de profundidad y los datos obtenidos se expresaron en células por mililitro. La tasa constante de crecimiento se estimó utilizando el modelo matemático que describe la fase de crecimiento exponencial:

$N_t = No\ e^{Ke\ t}$ (1)

La tasa de crecimiento Ke se estima en intervalos de tiempo unitarios usando logaritmos naturales, aunque en algunas ocasiones se emplean logaritmos de base dos (k) o diez (K10) (Guillard, 1973).

Las tablas que se muestran a continuación presentan mediciones reales del cultivo de microalgas y nos servirán para establece como es que los actores en el medio profesional tienen establecidas sus prácticas, las cuales en ocasiones como la que relatamos no son siempre las mejores; es decir partiremos de este caso para realizar la deconstitución de las prácticas.

Sustrato	Tiempo Días	Garrafón 1 Cel / ml	Garrafón 2 Cel / ml	Garrafón 3 Cel / ml	Promedio Cel / ml
BAYFOLAN	0	90000	88000	91250	89750
	1	142500	131250	143250	139000
	2	411250	405000	412500	409583
	3	680000	678750	688750	682500
	4	1702500	1700000	1700000	

Tabla No. 1. Cultivo de microalgas en un medio de cultivo

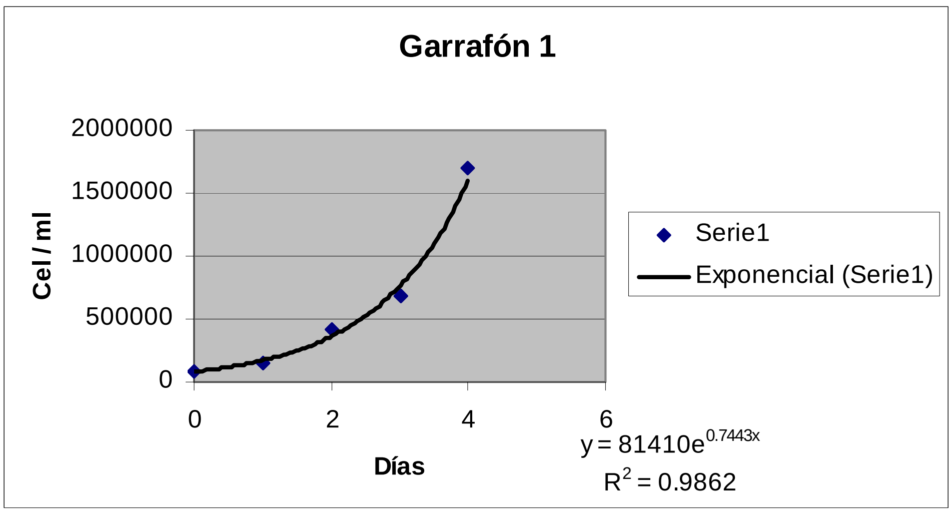


Figura No. 3. Modelación con Excel de los datos reales

Al hacer una comparación de los datos reales, con los datos obtenidos a mediante el uso de modelos pre establecidos utilizando un Ke = 0.4367 y la modelación de los datos reales, podemos observar grandes diferencias, las cuales se muestran a continuación:

Tiempo (días)	**Reales**	**Fórmula**	**Modelo**
0	90 000	90 000	81 410
1	142 500	139 283	171 365
2	411 250	215 554	360 719
3	680 000	333 589	759 301
4	1 702 500	516 260	1 598 300

Tabla No.2. Comparativo de los datos del garrafón 1

Como se puede observar la diferencia entre los datos reales y la predicción con base en la fórmula y el modelo encontrado mediante el uso de Excel existe una gran diferencia, siendo éste modelo el más adecuado, en términos de la tecnología del cultivo ya que el alimento que se proporcione para el crecimiento del cultivo será en función de la población existente, (Belmont 2003).

La realización de la práctica de la comunidad en personas que inician su desarrollo profesional trae consigo una serie de problemas, por lo que es conveniente realizar no solo la *deconstitución* de las mismas, sino su *deconstrucción*.

Como ejemplo de lo anterior citaremos la experiencia de Belmont, a quién se pidió relatara su experiencia.

Nombre: *José José Francisco Belmont Hidalgo.* ***Edad:*** *32 años*

¿En qué escuela estudiaste la licenciatura? *Facultad de Ciencias del Mar*

¿Qué licenciatura cursaste? *Biología en Acuacultura*

¿Qué materia te gusta más? *Biología.* ***¿Te gustan las matemáticas?*** *No mucho*

¿Trabajas? *Si. ¿* ***Qué haces en tu trabajo****? Asesorando Productores*

¿Utilizas las matemáticas en el desempeño de tu trabajo? *Si.*

¿Con qué frecuencia? *A cada instante*

¿Has solucionado problemas inherentes a tu desempeño profesional, mediante el uso de las matemáticas? *Claro, me he salvado de que me corran*

¿Qué otros trabajos relacionados con tu profesión has desarrollado? *Supervisor de impacto ambiental*

¿Necesitaste algo o mucho de matemáticas para desarrollarlos? *El primero bastantes y el otro muy rara vez.*

¿En qué procesos o prácticas de tu profesión las matemáticas te sirvieron para solucionar problemas?

En el momento que más problemas tenía e incluso perdería mi trabajo como consecuencia a la mortalidad que venía registrando en las postlarvas de camarón, pues a la hora de alimentarlas no tenía el suficiente alimento para darles el número de células por mililitro que se requería, esto porque en el cepario (lugar donde se lleva el cultivo de microalgas), se me caía el cultivo de estas, no calculaba el momento en el cual leería de desdoblar el cultivo(cambiar de recipiente con mayor cantidad de agua y nutrientes.

¿Qué área de las matemáticas utilizaste?

Empecé a hacer el conteo diario de las células y las registre en una bitácora, posteriormente agregue los datos a Excel y comencé a graficar estos datos obtenidos, al observar la grafica observe que me salía una curva de crecimiento potencial, lo cual era lógico la interpretación de esta curva puesto que se inicia con un cierto No. De células y conforme pasa el tiempo se aumenta este No. De células, pero mi problema no estaba en los dos primeras partes de la curva sino en la etapa final, ya que no podía descifrar el tiempo en el que la cepa se me caía (moría), fue hasta entonces que me di cuenta que al pedirle la formula a la grafica pude dar con el enigma que se me estaba planteando, porque una vez hecho y conociendo la modelación,(cabe señalar que no soy matemático) logre dar con el número exacto en días antes de que la cepa se me cayera., de ahí para acá solucione mi problema salve hasta cierto punto el sustento de mi familia y logre obtener buena producciones a partir de ahí.

NOTA:- Normalmente una vez que se conoce y se tiene práctica se puede determinar esto a base de la coloración del agua, indicándonos que entre más oscura este el agua mayor número de células hay en el cultivo.

¿Estas prácticas pueden fallar en ocasiones?, en caso afirmativo describir por qué fallan.

No es aplicable para todo tipo de especies de células varía este al igual que el modelo de Von Bertalanffy, que fue en uno de los que me apoye no aplico para este tipo de cultivos, por lo tanto no *hay nada más placentero que hacer su propio modelito para cada cosa evitando con esto pérdida de tiempo y dinero*

Los resultados

El concepto de deconstrucción según el diccionario de la Real Academia Española es la acción y efecto de deconstruir. Desmontar un concepto o una construcción intelectual por medio de su análisis, mostrando así contradicciones y ambigüedades. El término deconstrucción es la traducción que propone Derrida del término alemán Destruktion, de Heidegger. Derrida estima esta traducción como más pertinente que la traducción clásica de "destrucción" en la medida en que no se trata tanto, dentro de la deconstrucción de la metafísica, de la reducción a la nada, como de mostrar cómo ella se ha abatido.

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como, un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida.

De este modo podemos dividir la deconstrucción de la siguiente manera:

1. La búsqueda de las intenciones (el ¿por qué las emplean así? y el ¿por qué funcionan?)
2. Los argumentos que los validan (¿Qué sustento tienen? ¿De dónde proviene?)

Conclusiones

En las investigaciones realizadas por el grupo de investigación de la línea llamada las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, se han dado evidencias de la existencia de prácticas del uso de las matemáticas, que no siempre son reconocidas por los actores de la comunidad, además se ha mostrado también que no son las mismas prácticas, por lo que, la hipótesis que gira alrededor de investigaciones desarrolladas a la par de esta es, que la deconstrucción de prácticas, puede ser un vínculo entre las comunidades extra escolares y comunidades escolares.

Consideramos que mediante la deconstrucción de las prácticas se podría encontrar la esencia de las mismas para reconstruirlas mediante diseños de aprendizaje, y así llevarlas al sistema educativo, esto sería el vínculo entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares de las matemáticas.

Algunas dificultades que se presentan ante este estudio es el hecho de no pertenecer a la comunidad en donde se ejerce la práctica, lo cual provoca dificultades para entender las herramientas usadas en las comunidades, así como para encontrar la intencionalidad de esta práctica. Sin embargo se espera mostrar evidencias acerca de esta hipótesis, y encontrar una forma adecuada para investigar este problema.

En general creemos que una de las características de las prácticas sociales, la intencionalidad, se modifica de acuerdo al ejercicio de la práctica, lo cual establece una relación determinante entre ésta y la constitución de las prácticas, esto tiene que ver con la evolución de las prácticas y a su vez con la deconstrucción de las mismas.

Consideramos que para la deconstrucción de las prácticas es necesario conocer la intencionalidad de la práctica, consideramos la posibilidad de que en algunas comunidades existan prácticas constituidas que tengan una si bien es cierto que tienen una intención, esta no es la misma que al inicio de la práctica.

Con respecto a lo anterior creemos que las prácticas pasan por un ciclo, primero son prácticas sociales por que generan entre otras cosas organización social, luego mediante el ejercicio de ésta, evolucionan de manera que en algún momento llega a su constitución, esto se determina por que durante este proceso de evolución las intenciones de la práctica cambian.

Por lo expuesto anteriormente creemos que la experiencia y la deconstrucción de las prácticas sociales pueden ser un vínculo entre las dos esferas en las cuales se enmarca nuestra problemática.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aul*a. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Belmont, J. (2003). *Algunos aspectos poblacionales y reproductivos de Oreochromis aureus en la presa el Salto, Sinaloa.* Tesis de Licenciatura no publicada. UAS, México.

Cadima, E. (2003). *Manual de evaluación de recursos pesqueros. Documento técnico de pesca.* Roma: FAO

Chavance, P. Flores, H. D., Yañez – Arancibia, A y Amescua., L. F. (1984). *Ecología, biología y dinámica de poblaciones de Bardiellan chysoura*, *en la laguna de Términos, Sur del Golfo de México*. *An. Inst. Ciencias del Mar y Limnología 21, 153 – 159* Universidad Nacional Autónoma de México. Mer.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida (Ed), *¿Cómo no hablar? Y otros textos. Suplementos Antrhopos, 13,* 86 – 89.

Guillard, J. A. (1973). *Manual de Métodos para la Evaluación de las Poblaciones de Peces.* España: Editorial ACRIBIA.

Rodríguez, F. y Reprieto, J. (1991). *Cultivo de Camarón Azul (Litopennaeus stylirostris) STIMPSON*. CICTUS, Sonora, México.

Sánchez F.; Miramontes, P. y Gutiérrez, J. (2002). *Clásicos de la Biología Matemática.* México: Siglo XXI editores.

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS ACERCA DE LA PROBABILIDAD

María Inés Rodríguez, Héctor L. Agnelli
Universidad Nacional de Río Cuarto Argentina
mrodriguez@exa.unrc.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Superior

Resumen. *Con la finalidad de analizar las concepciones y formas de razonar de los alumnos acerca de la probabilidad, se realizó una encuesta en un curso introductorio de Estadística destinado a estudiantes de ciencia biológicas y del profesorado de matemática. Las preguntas se orientaron a indagar su comportamiento ante la concepción de la probabilidad desde un punto de vista clásico, frecuencial o subjetivo. Estos conocimientos previos con que el alumno llega al curso de estadística pueden convertirse en obstáculos para la enseñanza de la probabilidad y dificultar, luego, el aprendizaje de los conceptos propios de la inferencia estadística. En el desarrollo del presente trabajo se describen los enfoques probabilísticos denominados clásico, frecuencial y subjetivo, así como sus implicaciones para la enseñanza de la estadística. Se describe la encuesta y se muestran los resultados obtenidos, los que ponen en evidencia la necesidad de orientar esfuerzos para clarificar las distintas interpretaciones de la probabilidad, más que en los aspectos algorítmicos del tema.*
Palabras clave: probabilidad, interpretaciones: clásica, frecuencial, subjetiva

Introducción

Como señala Shaughnessy (2002), "nuestros estudiantes no son páginas en blanco, esperando que la teoría normativa de la probabilidad descienda de nuestra boca. Los estudiantes ya tienen sus propias heurísticas, sesgos y creencias acerca de la probabilidad y estadística". Por lo tanto a la vez que esta situación plantea un problema para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de probabilidad y estadística, también nos señala la importancia de conocer cuáles pueden ser algunas de estas concepciones previas.

Para aportar al conocimiento de esta situación, en particular sobre las concepciones y formas de razonamiento acerca de la probabilidad con que llegan los alumnos a un curso inicial de estadística, se realizó una encuesta a estudiantes de ciencias biológicas y con fines comparativos se administró la misma encuesta a estudiantes del profesorado de matemáticas antes de tomar su primer curso de probabilidades. Las preguntas formuladas están orientadas a indagar su comportamiento ante problemas cuya resolución implica concebir la probabilidad desde un punto de vista clásico, frecuencial o subjetivo. Una encuesta similar a la presentada fue utilizada por Albert (2003).

Antecedentes

En los cursos introductorios, la enseñanza de la estadística puede desarrollarse sobre la base de tres concepciones fundamentales de la probabilidad: clásica, frecuencial y Bayesiana. Batanero y Díaz (2007), sugieren no limitarse a una sola ya que ellas están ligadas dialécticamente. Las diferencias fundamentales entre estas tres perspectivas radica en la manera de asignar probabilidades y en la interpretación de los valores de probabilidad obtenidos después de realizar cálculos. Es importante distinguir entre asignar y calcular probabilidades. Para el cálculo de probabilidades se aplican las propiedades derivadas de la construcción axiomática de la probabilidad, pero estos cálculos dependen de asignaciones iniciales de probabilidad o de la adopción de ciertos modelos distribucionales, o de ambos. Así, por ejemplo, cuando una característica observable en una situación experimental se modela como una variable aleatoria que sigue una distribución binomial, la probabilidad de un evento se calcula usando la función de densidad correspondiente, pero el valor de la probabilidad del éxito (p) debe ser asignado inicialmente de alguna manera.

La interpretación clásica que se atribuye a Laplace, aunque ya aparece en los trabajos de Pascal, Bernoulli, Huygens, y Leibniz, asigna igual probabilidad a todos los resultados posibles. De esta forma, la probabilidad de un evento es el cociente entre el número de maneras en que puede ocurrir y el número de resultados posibles. La aplicación de esta interpretación queda reducida a espacios muestrales finitos y con resultados equiprobables.

La interpretación frecuencial asume que el experimento es repetido muchas veces bajo condiciones similares y la probabilidad de un evento es estimada por la frecuencia relativa de su aparición en el conjunto de resultados experimentales. Así expresada esta interpretación tiene cierta similitud con la interpretación clásica, ya que otorga igual peso a cada miembro de un conjunto de eventos y, simplemente, calcula la proporción de los favorables en el total de los resultados producidos. La diferencia esencial es que el enfoque frecuencial tiene en cuenta los resultados producidos por el experimento, mientras que el enfoque clásico tiene en cuenta los resultados posibles de un experimento. Para poder aplicar la interpretación frecuencial se debe asumir que la situación aleatoria se repite bajo condiciones similares, es decir no abarca los sucesos aleatorios de ocurrencia única en el tiempo, Batanero (2005). Si bien esta interpretación extiende la interpretación clásica a situaciones en las que los resultados no son equiprobables, su definición genera problemas. Ejemplo, si una moneda se tira una vez, la frecuencia relativa de cara es 0 ó 1, cualquiera que sea su sesgo. Si se tira dos veces, las frecuencias relativas podrían ser 0, ½, 1. Es decir, la "separación" entre los valores de las frecuencias relativas estará dada por *1/n*. Surge así, el problema de cuál es el número *n* adecuado para la asignación de probabilidades. Exponentes frecuentistas han sido Venn (1876) y von Mises (1957).

La interpretación subjetiva considera la probabilidad como una medida numérica de la creencia que tiene una persona acerca de la ocurrencia de un evento. La persona asigna una probabilidad de manera que refleje su creencia acerca de la verdad o falsedad del evento. Este es el enfoque más general, que se aplica a eventos que pueden no ser equiprobables y a los que no pueden repetirse bajo las mismas condiciones. De esta manera, la probabilidad está referida a la incertidumbre y no únicamente a la repetición de experimentos. La incertidumbre significa, en muchas situaciones, conocimiento incompleto y no ausencia absoluta de conocimiento. Esta interpretación es personal, pues diferentes personas pueden tener distintas opiniones y en consecuencia, asignar al mismo evento diferentes probabilidades. También la probabilidad depende de la información que posea la persona al momento de emitir su juicio; si dispone de nueva información, su asignación de probabilidad puede variar. La formalización de la probabilidad subjetiva, fue realizada por De Finetti (1972), para quien la incertidumbre debe ser expresada por una distribución de probabilidad, siendo ésta la característica esencial de la metodología estadística Bayesiana.

La probabilidad y la inferencia estadística

Moore (1997), en un trabajo en el que analiza la conveniencia de enseñar inferencia estadística clásica o Bayesiana, debate en el que obviamente subyace la cuestión de si asignar más o menos importancia a la interpretación de probabilidad frecuencial o a la subjetiva, expresa, "Como es usual, en los primeros cursos la barrera principal es la probabilidad. Tanto la estadística clásica como la Bayesiana están basadas en el concepto de probabilidad y en ambos casos este concepto puede ser presentado con mayor o menor grado de formalidad. Creo que en cualquier nivel de formalismo el razonamiento Bayesiano requiere una más compleja noción de probabilidad y una maquinaria probabilística mayor que la necesaria para la inferencia estándar." Para sustentar esta opinión argumenta, "Las dificultades acerca de las ideas probabilistas han sido documentadas tanto por los psicólogos, quienes investigan cómo las personas piensan las chances, como por los investigadores en educación, quienes estudian los efectos de nuestra intervención (enseñanza) sobre el pensamiento de los estudiantes. El mejor trabajo psicológico conocido es el de Tversky y Kahneman (1982), quienes muestran que: los juicios intuitivos acerca de las probabilidades marginales, conjuntas y condicionales no son probablemente coherentes, esto es, pueden no satisfacer las restricciones de la teoría de probabilidad." También Falk y Konold (1992), señalaron que la intuición de las personas al aprender de su experiencia y revisar sus creencias, es consistente con el análisis Bayesiano. Por su parte, Lêcoutre (2006), cuestiona seriamente el énfasis que desde la educación matemática se da a la interpretación frecuencial ignorando la concepción subjetivista, abogando por no mostrar a las mismas como opuestas, sino como complementarias.

Metodología

Para recopilar datos sobre la forma de razonar de los estudiantes, se formularon nueve preguntas, tres para cada tipo de interpretación de la probabilidad, que fueron contestadas en el aula el primer día de clase. Se solicitó que las respuestas fuesen razonadas, expresadas numéricamente y además justificadas brevemente, estipulándose una duración de 45 minutos para concretar las mismas.

Si bien en los planes de estudio de la escuela media está previsto el desarrollo de temas vinculados con la probabilidad y la estadística, estos forman parte de la asignatura matemática y no necesariamente, por diversas razones, son cubiertos en todas las escuelas. Esta situación es expuesta por los mismos profesores cuando realizamos actividades académicas destinadas a darle continuidad a su formación. En este grupo, menos del 8% de los alumnos confirmó haber recibido algunas nociones de probabilidad en el secundario. Por otra parte, indagando en los textos de estudio mas utilizados en este nivel educativo, como por ejemplo, Kaczor (2002) y Camuyrano (2003), hemos comprobado que los mismos desarrollan el enfoque probabilístico clásico y frecuencial, pero no el subjetivo.

Cuestionario

Interpretación clásica.

Pregunta1. Supongamos que Usted elige de la caja de la Figura 1, una bolilla al azar ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla numerada con 5 o mayor que 5?

Pregunta 2.-Suponga que Usted elige de la caja de la Figura 2 un objeto al azar. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un rectángulo?

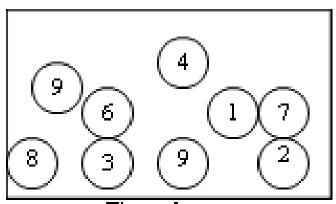


Figura 1

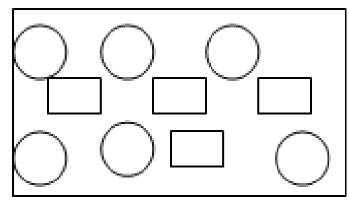


Figura 2

Pregunta 3.- Supongamos que Usted tiene un juego como el que muestra la Figura 3. La aguja se impulsa y gira libremente alrededor del punto O hasta que se detiene. ¿Cuál es la probabilidad de que al detenerse lo haga dentro del área sombreada?

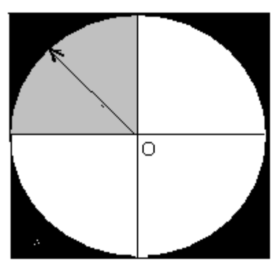


Figura 3

Estas tres preguntas pertenecen al tipo clásico. La diferencia entre la primera y la segunda está dada por la forma de los objetos. Por lo tanto esta situación será útil durante el desarrollo del curso para motivar la necesidad de utilizar dispositivos, ajenos a los objetos y al individuo, para generar extracciones aleatorias. La pregunta número tres, si bien se puede responder teniendo en cuenta que el sector elegido es uno de los cuatro sectores posibles en los que puede detenerse la aguja, la situación planteada también será útil para mostrar, más adelante, que para calcular algunas probabilidades es necesario medir en lugar de contar.

Interpretación frecuencial

Pregunta 4.- Suponga que Usted tira una moneda 20 veces y sale 19 veces cara y una cruz. Si Usted tira la misma moneda una vez más ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

Pregunta 5.- Si esta mañana se produce en el hospital local un nacimiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?

Pregunta 6.- Suponga que elige al azar un estudiante de primer año de su carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

La respuesta a la pregunta 4 podría deberse a la desatención total a la información suministrada, o bien teniéndola en cuenta. Al ignorar la información, la respuesta, asumiendo que la moneda es equilibrada (dato no suministrado), la probabilidad de cara sería ½. Y si se asume la información, se podría asignar una probabilidad basada en la frecuencia relativa 19/20 = 0.95. Este problema es interesante para discutir los tamaños de muestras necesarios para estimar probabilidades a partir de frecuencias relativas, ya que si el número de repeticiones no es elevado, y no se presta atención a las rachas y fluctuaciones del proceso estocástico, se puede reforzar un sesgo, ya caracterizado en la literatura de investigación, conocido como creencia en la ley de los pequeños números (Tversky y Kahneman, 1982, p. 23-31). En la pregunta 5, a diferencia de la anterior, se pide la asignación de probabilidad sin proporcionar información numérica en el enunciado. Una posible respuesta puede derivar de la referencia a la composición poblacional de niños y niñas de la ciudad y dar una estimación de probabilidad basada en la frecuencia relativa; otra posible respuesta es asignar probabilidad a partir de que sólo existen dos resultados posibles, varón o mujer. Esta última situación, da lugar al así denominado por Lêcoutre (1992) sesgo de equiprobabilidad. Éste consiste en asignar la misma probabilidad a todos los resultados asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso para aquéllos en que no es aplicable el principio de indiferencia o donde no hay una simetría física. Aunque para la pregunta 6 tampoco se proporcionan datos, sí se conoce que las mujeres representan el 80% aproximadamente de los estudiantes de las carreras incluidas en esta encuesta.

Interpretación Subjetiva.

Pregunta 7.- ¿Cuál es la probabilidad de que Boca gane su próximo partido contra Gimnasia y Esgrima de La Plata el próximo fin de semana?

Pregunta 8.-¿Cuál es la probabilidad de que Ud se gradúe en la UNRC en 4 años o menos?

Pregunta 9.- ¿Cuál es la probabilidad de que Usted se case antes de los 25 años?

Para la pregunta 7, se podría esperar que, si se dispone de información acerca de cómo se venían desempeñado los equipos, sería razonable asignar probabilidades teniendo en cuenta esa información. Dadas las características del curso y del evento, se esperaría que los alumnos contaran con poca información y esto podría originarles dificultades en expresar la probabilidad a partir de sus creencias. La pregunta 8 se podría responder mediante una interpretación frecuencial basada en la proporción de estudiantes que se gradúa en los tiempos establecidos y asumir que el tiempo que requiere la graduación no está influenciado por las condiciones personales. Alternativamente, se puede responder la pregunta desde la situación personal de cada individuo. La pregunta 9 es la que mejor configura la característica de que el evento es no repetible en condiciones similares en el tiempo y su concreción está determinada por el comportamiento personal.

Resultados

Interpretación clásica. Las respuestas a las tres primeras preguntas relativas a la interpretación clásica la respondieron correctamente el 87% de los estudiantes. De cualquier manera, de éstos el 28% expresaron la probabilidad como un número entre 0 y 1; el otro 72% expresó la probabilidad como un porcentaje. Todos los que contestaron correctamente llegaron a una expresión numérica considerando la cantidad de resultados posibles finita (cuatro cuadrantes en el caso del círculo) y estos resultados equiprobables. Por otra parte, es notable que varios alumnos distinguieron entre sacar la bolilla numerada con el 5 (no existente en la caja), evento al que asignaron probabilidad nula, y las bolillas numeradas con valores mayores que 5, evento al cual asignaron probabilidad 50%.

Interpretación frecuencial. Pregunta 4: Un 43% de los alumnos optó por asignar probabilidad 50%. El resto hizo una asignación de probabilidad basada en la información disponible pero, de ellos, sólo el 14% calculó correctamente la frecuencia relativa. Pregunta 5: La mayor parte de los alumnos dio como respuesta 50%. Pregunta 6: La mayoría de las respuestas tuvieron en cuenta la interpretación frecuencial y la asignación de probabilidades se expresó por valores tales como 80%, 90%, 99%, como atribuíbles a probabilidad "alta". Una cantidad importante de respuestas asignaron probabilidad ½ al dicotomizar la situación en: "mujer" o "varón". Entre éstas, parece oportuno citar la respuesta: "si bien la mayoría son mujeres la probabilidad es 50%", ya que si bien el estudiante posee información él no utiliza para asignar probabilidades.

Interpretación Subjetiva. Pregunta 7: El 70% de los estudiantes contestaron a la pregunta asignando probabilidad ½ ó ⅓. Para el primer caso consideraron los resultados posibles ganar o perder y, para el segundo, ganar, empatar o perder. Pero en ambas situaciones consideraron a los resultados equiprobables. El 20% dio una respuesta que refleja sus creencias y el resto no contestó. Pregunta 8: La mayoría (67%) contestó sobre la base de su opinión y asignó probabilidades "altas" o "bajas"- pero no valores numéricos- al evento y también hubo casos con respuesta 100% o 0%. En algunas respuestas con probabilidades altas se justificaban esos valores a partir de las expectativas de concretar la graduación. También el 12% de los alumnos dicotomizaron la situación en: "me gradúo" o "no me gradúo" considerando nuevamente la equiprobabilidad, respondieron 1/2. Pregunta 9: Las respuestas a esta pregunta presentaron las diferencias más notables entre los alumnos de matemáticas y los de biología. En el primer grupo, las respuestas fueron "objetivas", en el sentido de emplear algún mecanismo de cálculo para generar la respuesta, e iguales a ½, respondiendo al esquema "me caso" o "no me caso", una respuesta llamativa fue 2/25. En el grupo de biología, las respuestas fueron marcadamente subjetivas. Hubo respuestas atribuibles a la interpretación frecuencial: "la probabilidad es baja porque la mayor parte de la gente se casa después de los 25 años".

Conclusiones

En general los estudiantes no distinguen las tres interpretaciones de probabilidad. Si bien con relación a las preguntas vinculadas con la interpretación clásica las respuestas fueron correctas, es notorio que se asume de manera automática la equiprobabilidad de los resultados y esto conduce a asignaciones de probabilidad incorrectas cuando se pasa a situaciones donde no está presente la simetría.

Si bien no se presentan problemas en la asignación de probabilidades bajo la interpretación clásica, parece conveniente utilizar más tiempo, en reflexionar acerca de que no necesariamente los resultados de los experimentos dicotómicos son equiprobables; que la probabilidad puede ser expresada como un número; y que implementar extracciones equiprobables requiere en algunos casos usar mecanismos aleatorios ajenos al sujeto, como por ejemplo el uso de tablas de números aleatorios o rutinas aleatorias en un computador.

Es marcado el déficit en la asignación de probabilidades desde el punto de vista frecuencial. Es conveniente, por lo tanto, enfrentar al alumno a diversas situaciones en las que tenga que estimar probabilidades a partir del cálculo de frecuencias relativas. Esta interpretación es la más común en los cursos de inferencia estadística, ya que constituye la herramienta necesaria para interpretar las distribuciones muestrales, intervalos de confianza y valores de p en las pruebas de significación.

El creciente desarrollo teórico y el auge en las aplicaciones de la metodología Bayesiana, basada en la interpretación subjetiva, hacen necesario prepararse para enseñar la misma en los cursos introductorios. Dado que los resultados pusieron en evidencia las dificultades que tienen los alumnos en traducir sus apreciaciones a valores numéricos de probabilidad, sería oportuno ejercitar la asignación de probabilidades subjetivas mediante experimentos de calibración como los descriptos en el libro de Berry (1996).

Referencias bibliográficas

Albert, J. (2003). College Students´ Conceptions of probability. *The American Statistician 57*, (1), 37- 45.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3)*, 247-263.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada, Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Berry, D.A. (1996). *Statistics: A Bayesian Perspective*. Belmont: Duxbury Press.

Camuyrano, M. B., Net, G. y Aragón, M. (2003). *Modelos matemáticos para interpretar la realidad*. Buenos Aires: Estrada.

De Finetti, B. (1972). *Probability, Induction and Statistics*. Chichester: Wiley.

Falk, R. y Konold, C. (1992). The Psychology of Learning Probability. En F. Gordon y S. Gordon (Eds) *Statistics for the Twenty-First Century 26,* 151-164.

Kaczor, P.; Schaposchnik, E. F.; Cicala, R. y Diaz, B. (2002). *Matemática I.* Buenos Aires: Santillana

Lêcoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 557-568.

Lêcoutre, B. (2006). People intuitions about randomness and probability. *Statistical Education Research Journal 5(1)*, 20-35.

Moore, D. (1997).Bayes for Beginners? Some reasons to hesitate. *TAS 51 (3)*, 254- 261

Shaughnessy, M.(2002). *Investigación en Probabilidad y Estadística: Reflexiones y Orientaciones.* Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Tversky, A.; Kahneman, D.; Slovic, P. (eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Venn, J. (1962). *The logic of the chance*. New York: Macmillan

Von Mises, R. (1957). *Probability, Statistics and Truth.* New York: Macmillan.

UNA MIRADA A LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ESTADO ACTUAL Y PERSPECTIVAS

Carmen Luisa Méndez Fabret, Juan Raúl Delgado Rubí
Universidad de las Ciencias Informáticas. Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" — Cuba
menlui@uci.cu
Campo de investigación: Resolución de problemas — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se expone el resultado de un estudio realizado con el objetivo de conocer la evolución, el desarrollo y el impacto de diferentes experiencias en la aplicación de la resolución de problemas en centros de la comunidad de países que participan en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme).*
Se presenta un análisis documental de diversas propuestas que abordan esta temática; se analizan diferentes enfoques de la enseñanza por problemas, poniendo énfasis en el que asume los trabajos de Polya, Schoenfeld, y seguidores como referente teórico; se valora el comportamiento, el estado actual y las perspectivas atendiendo a metodologías empleadas, introducción de recursos cognoscitivos, desarrollo de actitudes, y de manera general la contribución de la resolución de problemas al éxito en el aprendizaje independiente de la matemática.
Palabras clave: Resolución de problemas, enseñanza, aprendizaje

Introducción

A mediados del pasado siglo, salieron a la luz las ideas del profesor G. Polya, con la publicación en el año 1945, de su obra, *How to solve it*; desde entonces, el interés por la enseñanza de la resolución de problemas en diversas partes del mundo, ha sido cada vez mayor.

En los países de Latinoamérica, la educación a través de la resolución de problemas también ha estado en el centro del quehacer investigativo. Numerosas ponencias, talleres, cursos y conferencias especiales presentadas en eventos científicos y en publicaciones especializadas de Matemática Educativa, así lo corroboran. Uno de estos eventos es la edición anual de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme).

La historia de la resolución de problemas en la comunidad latinoamericana de Matemática Educativa es anterior a la primera edición de Relme (Morelia, 1997), pues en sus predecesoras, las Reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa ya había sido abordada como temática. En Relme 11 la resolución de problemas ya aparece registrada como campo de investigación en la tabla de categorías del evento.

Tras varios años investigando en la resolución de problemas, resulta interesante poder responder algunas interrogantes sobre esta temática como por ejemplo: ¿Cuál ha sido el comportamiento de las diversas experiencias llevadas a la práctica en nuestros países?, ¿en qué estado de desarrollo se encuentran las investigaciones en esta temática?, ¿a qué nuevos desafíos se ha de enfrentar la investigación actual en este campo dentro de nuestra área geográfica?

En el presente trabajo se expone el resultado de un estudio bibliográfico que intenta mirar retrospectivamente el camino transitado en las Relme en cuanto al tema resolución de problemas y extraer experiencias que puedan ayudar a responder las interrogantes planteadas.

La metodología empleada tuvo en cuenta el análisis de trabajos presentados y publicados en la temática resolución de problemas en las Actas Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), con énfasis en las actas de los últimos seis años, ALME 16 al 21, o sea desde el 2002 al 2008, las ediciones de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), así como otros documentos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame).

Se trabajó con una muestra de 63 trabajos de varios países: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, México, Perú, Uruguay, Venezuela y España. El trabajo de España fue coautorado con investigadores de Cuba y Venezuela.

Se procedió a elaborar un resumen con hechos y observaciones que fueron extraídos de los reportes de investigación y otros documentos consultados y que en correspondencia con los objetivos de la investigación pudieran ofrecer información sobre el estado del arte de la resolución de problemas en el contexto latinoamericano y caribeño.

Ricardo Cantoral, en su conferencia magistral "La Relme a sus veinte años" dictada en Camagüey, Cuba (Cantoral, 2007), divide la Relme para su estudio en etapas. En la tercera etapa, que él llama *La institucionalización o de la visibilidad internacional,* hace referencia a la fuerza adquirida en esta etapa por la enseñanza basada en problemas o en proyectos y la enseñanza problémica"

En ese mismo evento Luis Campistrous en su conferencia magistral "Principales tendencias que se revelan en los trabajos presentados en las Relme" (Campistrous, 2007) en alusión a la resolución de problemas planteó:

"… los trabajos relativos a la resolución de problemas y demostraciones (que en cierto momento eran muy abundantes) presentan una tendencia decreciente. Algo interesante es la tendencia creciente de los trabajos relativos a algoritmos y el desarrollo de habilidades de cálculo...” (Campistrous, 2007, p. 339)

Lo planteado por estos investigadores, sirvió de motivación y contribuyó a acrecentar el interés y la comprensión de la necesidad de profundizar en las posibles causas que pudieran explicar el fenómeno que se acaba de describir.

La Resolución de Problemas es un campo muy amplio por lo que cualquier estudio resulta de gran complejidad. Debido a la diversidad de aristas que tienen las investigaciones en esta área, resulta necesario precisar qué se ha de entender por resolución de problemas.

La resolución de problemas tiene una rica historia, tan antigua como la existencia misma de la humanidad, pero en la enseñanza de la Matemática, a pesar de las ideas expresadas por G. Polya en su *How to solve it* y otros textos que le siguieron, no es hasta la década del 80 cuando comienza a tener auge.

G. Polya fue el primero en proponerse enseñar conscientemente el proceso de resolución de un problema. Su obra tuvo como objetivo fundamental llevar al salón de clases procedimientos, principios y recursos en general, propios del quehacer matemático. El aporte principal lo constituye el modelo planteado por él basado en las conocidas cuatro etapas:

I Comprender el problema.

II Elaborar un plan de solución.

III Ejecutar el plan.

IV Análisis de la solución obtenida.

En su criterio, lo más importante es lograr que el individuo aprenda a realizar conscientemente el tránsito por este camino, lo cual requiere del estudio de los métodos de solución llamados heurísticos; este es otro de sus innegables resultados.

El término resolución de problemas no es privativo de la Matemática, pero la relación entre ésta y la resolución de problemas parece estar implícita tanto en las creencias populares como en determinados modelos pedagógicos.

Este vínculo se hace especialmente evidente a partir de los años ochenta. El objetivo fundamental de las matemáticas en la mayoría de los currículos occidentales pasa a ser que "el estudiante se convierta en un resolutor competente de problemas", (Schoenfeld, 1985, 1992 citado en Puy, 1994, p. 54)

El surgimiento de las Relme coincide con esta etapa de auge de la resolución de problemas como propuesta en el aprendizaje de las matemáticas. Especialmente en Latinoamérica, eso se va a reflejar en las investigaciones en este campo, que toman como referencia importante la obra de Polya a la cual se ha hecho referencia, las publicaciones del Nacional Council Teachers of Mathematics (NCTM) de los EE.UU y el trabajo de Alan Schoenfeld.

El aporte más significativo de Schoenfeld, investigador y educador matemático de la Universidad de Berkeley en California, es que a partir de reconocer las ideas de Polya, destaca sus limitaciones y desarrolla aspectos asociados a las cuatro dimensiones que en su criterio influyen en el proceso de resolver problemas:

- Dominio de conocimiento o recursos.
- Los métodos heurísticos.
- Las estrategias metacognitivas.
- El sistema de creencias

Otra figura importante dentro de esta tendencia es la de Miguel de Guzmán, quien fuera presidente del International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) durante varios años.

Como se puede observar los principales exponentes de esta teoría no son precisamente latinoamericanos, sin embargo, de manera general en los trabajos consultados se aprecia la gran influencia que sobre ellos han ejercido los trabajos de estos investigadores.

Existen otros enfoques o modelos que involucran a la resolución de problemas, tales como la Enseñanza problémica (EP) y el Aprendizaje Basado en Problemas (PBL por sus siglas en inglés). Dichos enfoques poseen características epistemológicas y psicológicas muy cercanas a lo que en este trabajo se presenta como Resolución de problemas (RP). Estos se proponen alcanzar mejores resultados en el aprendizaje que los modelos de enseñanza tradicionales; consideran el aprendizaje como un proceso y al estudiante como un ente activo y aunque poseen diferencias entre ellos, muchas veces aparecen entremezcladas y resulta muy difícil separarlas, lo que de alguna manera puede influir en los resultados del estudio realizado.

Otra precisión importante se refiere a las diferentes perspectivas desde donde puede ser abordada la resolución de problemas. Es muy ilustrativa y se ajusta a los intereses de este trabajo la clasificación propuesta por Freddy E. González, investigador venezolano, expuesta en su conferencia "La investigación en resolución de problemas: Vigencia y Perspectiva" (González, 2001) en ella se presentan tres perspectivas (la estructural, la didáctica y la cognitiva) para el abordaje de la resolución de problemas como campo de investigación en el contexto de la Matemática Educativa.

a) **Perspectiva estructural**. Comprende las investigaciones que asumen a los problemas propuestos como su objeto de estudio, se trata de trabajos en los que el interés principal está referido a las características específicas del problema. (tipo, extensión, ubicación de las incógnitas, relaciones entre sus elementos.) y cómo estos se asocian a los que intentan resolverlos.

b) **Perspectiva didáctica:** La resolución de problemas como medio, modelo y fin del trabajo en el aula de matemática.

c) **Perspectiva cognitiva:** La resolución de problemas desde la perspectiva de los procesos superiores de pensamiento (cognitivos y meta cognitivos) que son activados por el estudiante de matemáticas cuando se enfrenta a la acción de resolver un problema, concebido éste como una tarea intelectualmente exigente.

Es muy difícil que las perspectivas aparezcan totalmente aisladas. Sin intentar separarlas en esta investigación, el énfasis se ha puesto en la perspectiva didáctica o sea en discutir aspectos y principios generales de la propuesta de aprender y enseñar matemáticas bajo la óptica de la resolución de problemas.

Observaciones extraídas de experiencias expuestas en trabajos consultados

Entre los 63 trabajos consultados en esta investigación se destacan los siguientes puntos de coincidencia:

- El reconocimiento de la resolución de problemas como una habilidad que debe ser cultivada por la escuela desde sus estadios más tempranos. (Valle y Morales, 2005).
- Es posible mejorar las estrategias para la resolución de problemas, pero ello requiere elaborar propuestas en las cuales se creen espacios para la discusión y el análisis en torno a los procedimientos para resolver problemas utilizando métodos grupales y materiales didácticos motivadores.
- En todas las experiencias áulicas donde se ha intentado enseñar a resolver problemas, que se reportan, se comprueba que este trabajo es útil y que los estudiantes se sienten más motivados con actividades de este tipo.
- La evaluación de los procedimientos seguidos en la resolución de problemas permite conocer los errores que comete el estudiante y a partir de allí qué conceptos están bien aprendidos y cuáles son necesarios repasar para mejorar la práctica docente.
- El éxito de los resolutores de problemas exitosos está ligado íntimamente al dominio de diferentes formas de representar un problema y a la habilidad para traducir estas representaciones, es decir, a la comprensión del enunciado del problema, su habilidad para construir representaciones apropiadas, utilizar estas representaciones para estructurar y ejecutar un plan así como para realizar actividades meta cognitivas. (Villegas, García y Castro, 2005)
- Los estudiantes realizan las resoluciones de problemas fundamentalmente en un registro gráfico-geométrico y la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aun cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores. (Rechimont, Ferreyra, Andrada y Parodi, 2008)
- Se debe atender la infraestructura epistemológica. Desarrollar conciencia sobre cómo se llevaron a cabo los procesos de indagación y conjetura y cuáles son las experiencias (Milevicich y Lois, 2008).
- El uso de software debe estar encaminado a apoyar el aprendizaje a través del razonamiento, para facilitar la comprensión de los conceptos a estudiar, o para modificar el tipo de actividades habituales a realizar.

- Existe una concordancia muy débil entre las creencias de los alumnos y sus competencias frente a la resolución de un problema propuesto.
- Los sujetos no utilizan conocimientos del contexto cuando resuelven problemas verbales aritméticos en la sala de clase. (Ventura y Freitas, 2007), por lo que debe incorporarse la resolución de problemas en asignaturas y disciplinas no matemáticas.
- Se sugiere la aplicación generalizada del trabajo colaborativo dada la alta incidencia en el reconocimiento de su efectividad el desarrollo de experiencias metacognitivas referidas al reconocimiento, planteamiento y discriminación de estrategias diversas para solucionar problemas matemáticos. (Barahona, Orrego, Galdames, Salazar, Lobos y Brunand, 2003)
- La resolución de problemas en los programas de estudio para el tercer ciclo y para la educación diversificada no es considerada como una estrategia metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Es necesario introducir la enseñanza de la resolución de problemas en la formación de profesores.
- La lectura comprensiva del enunciado del problema es un requisito indispensable para poder avanzar en la enseñanza de la resolución de problemas.

Algunas tendencias

El sistema de creencias es, entre las dimensiones propuestas por Schoenfeld, la dimensión más trabajada.

Se incursiona en todos los niveles de enseñanza, pero muy pocos estudios se realizan en los niveles elementales. La mayor presencia es en la enseñanza media y superior, en la formación de profesores y en las carreras de ingeniería.

Aumenta el número de trabajos que tratan de incorporar la tecnología en la resolución de problemas, aunque todavía no se llegan a explotar todas las potencialidades.

Se percibe un avance en cuanto a la comprensión del rol del docente como mediador del proceso de enseñanza aprendizaje y como constructor de tareas que propicien la formación de situaciones problémicas.

Se observa un énfasis en la utilización de modelos matemáticos y la conexión de los problemas con las situaciones cotidianas y otras disciplinas.

Existen avances, por lo menos a nivel documental, respecto a la necesidad de incorporar la resolución de problemas en el diseño de los currículos.

Mirando hacia adelante

El futuro de la resolución de problemas apunta hacia el uso de recursos tecnológicos especialmente informáticos. Aún es insuficiente, pero en pleno ascenso, el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TICs) en el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas, pero si se explotan adecuadamente y se exploran las potencialidades de esta para obtener nuevos aprendizajes.

El uso de tecnología puede ayudar a la correcta conceptualización, pero ella por sí misma no garantiza avances sustanciales en los niveles de calidad en el aprendizaje de las matemáticas; ello requiere acciones deliberadas y debidamente planificadas por el docente.

Por una parte, y teniendo en cuenta las palabras pronunciadas en la reunión de Clame realizada en el marco de Relme 20 en Camagüey Cuba, por Rosa María Farfán, debemos leernos más a nosotros mismos y tener en cuenta las experiencias cultivadas en nuestros países; por otra, debemos además, contrastar lo que hacemos con enfoques de otras latitudes y realidades, pero que pueden ser tomadas en cuenta para descubrir puntos de coincidencia que pueden ayudar a enriquecer el trabajo, como refiere de Faria (2008).

Conclusiones

Con la realización de este trabajo se ha podido constatar que el desarrollo alcanzado en la temática de la resolución de problemas como propuesta para aprender matemática ha ido ganando en claridad en lo que respecta al qué y al para qué se enseña la resolución de problemas, pero no así con el cómo se enseña. Aún son muy pocos los trabajos que describen o abordan estrategias o metodologías sobre cómo deben actuar los protagonistas en un actividad educativa bajo el paradigma de la resolución de problemas.

Este estudio permitió: apreciar la necesidad de integrar las investigaciones en esta temática y realizar acciones conjuntas que permitan formalizar e introducir resultados científicos y metodológicos sistematizados, que vayan consolidando un cuerpo teórico de conocimientos y formas de hacer que caractericen la enseñanza de la resolución de problemas en el contexto latinoamericano y puedan servir de basamento bibliográfico para la formación de profesores en nuestra región.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2007). La Relme a sus veinte años. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp.325-331). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Campistrous, L. (2007) Principales tendencias que se revelan en los trabajos presentados en las RELME. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp.332-337). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

CLAME. (1996) *Primer Aviso.* Comité Nacional Organizador Relme 11 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XI.

González, F. (2001). La investigación en Resolución de problemas. Vigencia y Perspectivas. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. (p. 177). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

De Faria, E. (2008) Resolución de problemas en los programas de estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp.973-982). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Del Valle, M. y Morales, E. (2005) El desarrollo intelectual y la resolución de problemas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.215-221). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Villegas, J.L., Roberto, J. y Castro, E. (2005) El papel de las representaciones en el éxito de la resolución de problemas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.231-237). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Rechimont, E., Andrada, N. y Parodi, C. (2008) La comprensión de un concepto matemático y los registros de representación semiótica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp.220-228). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Milevicich, L. y Lois, A. (2008) La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral mediante el uso de ordenador. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp.963-973). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Ventura, M. y Freitas, M. (2007) Resolución de problemas con el conocimiento del mundo real. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp.288-293). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Barahona, I., Orrego, C., Galdames, E., Salazar, D., Lobos, R. y Brunar, L. (2003) Aporte del trabajo colaborativo en el desarrollo metacognitivo para la resolución de problemas en alumnos de séptimo año de la enseñanza básica. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (I)* (pp.586-592). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

UNA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE LA OPERATIVIDAD DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Rebeca Flores García, Gustavo Martínez Sierra
CICATA – IPN México
rebefg@gmail.com
Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad Nivel: Básico

Resumen. *En este artículo se da a conocer un avance de investigación vinculado con la noción de fracción y los distintos significados asociados a ella, además de cómo influyen los mismos en la manera de operarlas. Se pretende indagar cuántos de esos significados trascienden al momento de operar con las fracciones. También se pretende mostrar algunas evidencias que existen acerca de la conexión entre los múltiples significados y la inclusión de unos en otros.*
Palabras clave: construcción, significado, operatividad, fracción, socioepistemología

Introducción y justificación

El escrito pretende manifestar las inquietudes que existen en torno a los significados que giran alrededor de la noción de fracción, la cual es reconocida como una de las más complejas nociones a construir al ser enseñada y que es introducida en el nivel básico en México. Se presenta un estado del arte que revela información acerca de los significados que le han asociado, así como el surgimiento de vínculos con otras nociones.

De acuerdo con el Programa de estudio para la escuela secundaria en México (SEP, 2006): *el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo podrá ser importante cuando los alumnos lo puedan usar de manera flexible, para solucionar problemas. De ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, ya sea en términos de lenguaje, como de representaciones y procedimientos.*

A través de una breve indagación en el programa referido se tiene que 31 de los 103 temas incluidos corresponden a la noción de fracción y a la operatividad correspondiente; por ejemplo:

- Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

- Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.

- Enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria, utilizando la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y vinculando diferentes formas de expresarla.

-Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales, así como resolver problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos.

-Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos, utilizando operadores fraccionarios y decimales.

Por otra parte, en el Libro para el Maestro – material de apoyo para el docente- (SEP, 2001) se menciona que uno de los temas más conflictivos tanto para el maestro en cuanto a su enseñanza como para el alumno en su aprendizaje es precisamente el de fracciones.

Preguntas de investigación, objetivos y marco teórico

Por lo anterior, se coloca la atención a tal tipo de hecho y desarrollamos en la actualidad un proyecto de investigación denominado: Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios, con el cual se pretende responder a las preguntas:

¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción?

¿Cómo utilizarlos para construir un significado en la operatividad de los números fraccionarios?

¿Existe algún modelo que integre los distintos significados de la noción de fracción para su enseñanza?

Entre los objetivos del estudio se encuentran:

- Caracterizar los significados surgidos a partir del estudio desarrollado en el ámbito escolar.
- Determinar cuántos y cuáles de esos significados trascienden en la operatividad con los números fraccionarios buscando establecer una propuesta que integre los distintos significados para su enseñanza.

Su tratamiento estará basado en una Aproximación Socioepistemológica a través de sus dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Como lo menciona Montiel (2005) citando a Cantoral (2002), en esta Aproximación Socioepistemológica se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquél que mira y atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre la epistemología y los factores sociales.

Algunos referentes conceptuales necesarios corresponden a las nociones de: construcción, significado, operación y relación (especialmente la noción de relación de equivalencia); por lo que, elementos de soporte teórico provienen tanto de la matemática misma (nociones formales) como de aquellas teorías desarrolladas acerca de la Matemática y su enseñanza; entre éstas, algunas abordadas por: Piaget, D'Amore, Chevallard, Brousseau y de investigaciones relacionadas:

Piaget (Moreno, SF), es quien establece que la idea medular del pensamiento epistemológico es el constructivismo, en el que a lo largo de su desarrollo, el sujeto va elaborando no sólo conocimientos sino también estructuras mediante las cuales alcanza ese conocimiento. El sujeto construye su conocimiento del mundo y construye su propia inteligencia. En ese sentido la epistemología genética se propone revelar cómo la interacción entre el sujeto y el objeto genera el conocimiento.

D'Amore (2005) hace referencia a comprender y significar un concepto:

> *El comprender el concepto habrá de ser reflexionado como el acto de adquirir su significado, resaltando que tal acto será posiblemente un acto de generalización y de síntesis de significados en relación con elementos particulares de la 'estructura' del concepto siendo esta una red de significados de los enunciados considerados. En los que estos significados particulares habrán de ser adquiridos con actos de comprensión. La metodología de los actos de comprensión se preocupa por el proceso de construir el significado de los conceptos.*

La noción de objeto matemático, propuesta por Chevallard (1991) y retomada por D'Amore (2005):

> *Procede de un sistema de práxis donde se manejan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones; dicho de otro modo: aquello que es posible dibujar o escribir.*

Por su parte Brousseau, et al (2008) afirman que:

> *Al presentar a los conceptos matemáticos a través de Situaciones Didácticas específicas, se incluye la presentación de objetos con diferentes estructuras matemáticas en diferentes roles y en ambientes diferentes antes de que éstas sean reconocidas como isomorfas. De tal forma que muestra a las fracciones como medida, como razones y como funciones lineales de manera separada, y no al mismo tiempo como lo presenta la currícula tradicional.*

Destacándose así dos puntos importantes al crear situaciones didácticas, ya que *busca:*

Ofrecer a los profesores:

- *Recursos de enseñanza de nociones matemáticas más cercanas a su definición actual y a los usos que aquellas de las formas estándares y*
- *Obtener el aprendizaje de esta matemática como un efecto de actividad matemática más auténtica en la parte correspondiente a los estudiantes.*

Investigaciones relacionadas

En la actualidad estamos realizando una exploración acerca del estado del arte, el cual de acuerdo con Fandiño (2005) y otros, reportan investigaciones en las que se incluyen las tendencias sobre las que giraban y giran actualmente dichos trabajos.
Fandiño describe tres períodos: de 1960 a 1980, de 1980 a 1990 y de 1990 hasta la actualidad.
Respecto al periodo de 1960 a 1980 se tuvo una gran cantidad de estudios con alumnos de entre 14 y 18 años; particularmente en los Estados Unidos sobresalen los estudios relacionados con el concepto de fracción, estudios relacionados con operaciones entre fracciones y dificultades relacionadas con ellas y los estudios vinculados con las diferentes interpretaciones de la idea de fracción.

De este periodo los aportes alcanzados por Kieren, evidencian la existencia de siete significados para el término “fracción” mostrando; que una de las principales dificultades para su aprendizaje, ligada tanto con el concepto como con las operaciones es precisamente esa multiplicidad de significados.

En el periodo de 1980 a 1990 se desarrollaron trabajos bajo cuatro directrices:

1. Aprendizaje en general, 2. Aprendizaje de operaciones con fracciones, 3. Comparaciones entre los valores de las fracciones y/o números decimales y las dificultades en la expansión de los números naturales a las fracciones o a decimales y 4. Problemas relacionados con las diferentes interpretaciones de la noción de “fracción”.

En este periodo aparecen dos cuestiones centrales que habrán de proporcionar un panorama más amplio en torno a las investigaciones presentadas:

- Aparecen artículos de Guy Brousseau (citado por Fandiño, 2005), relacionados con la enseñanza de los números decimales, basado en experiencias durante la década de los 70’s en una escuela primaria de Francia. Sus escritos son fundamentales para la evolución de la Educación Matemática y demuestran una nueva metodología “la epistemología experimental”, dando lugar a una nueva idea de investigación en Educación Matemática. Asimismo, en sus artículos el autor define el conjunto D de números decimales como una extensión de N lo cual permitirá el pasaje a los números racionales, estudiando transitoriamente su historia y sus características algebraicas. Es necesario hacer mención de lo trascendente que es su aportación en ese sentido, ya que le da continuidad a su investigación alcanzando a establecer en 1986, como lo menciona Montiel (2005) la Teoría de Situaciones Didácticas; sentando así las bases para una disciplina científica encargada de analizar y teorizar sobre los fenómenos didácticos que brotan de la interacción sistémica del profesor y el estudiante respecto de un saber matemático escolar específico.

- Una contribución importante de un proyecto desarrollado en Estados Unidos a partir de 1979 hasta el 2000, donde un grupo de investigadores pusieron en marcha el Proyecto del Número Racional, generando más de 90 artículos hasta el 2003. El eje rector de esta investigación es el de los números racionales y todo lo que les acompaña en el campo del “razonamiento proporcional”, incluye referencias explicitas y significativas para las fracciones.

De 1990 a la actualidad se observaron investigaciones referidas a áreas más específicas (para estudiantes de entre 6 y 14 años de edad), tales como fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones como: fracciones y números racionales y fracciones y números decimales.

Sobresalen trabajos desarrollados por Valdemoros (citada por Fandiño, 2005), quien proporciona una amplia diversidad de perspectivas sobre el lenguaje de las fracciones, centrando su atención en la construcción del significado a través de diferentes sistemas simbólicos y referentes a los materiales y a los modelos concretos.

En este periodo también se deja abierta la posibilidad de profundizar acerca del uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las fracciones, los decimales y los racionales, para lo cual Fandiño propone revisar el trabajo de Chiappini G., Pedemonte B., Molinari M. (citado por Fandiño, 2005), como uno de los más recientes dedicados a esta área.

En su obra, Fandiño (2005) destaca los siguientes significados para la noción bajo estudio:

1. La fracción como parte de un todo a veces continuo, a veces discreto.
2. La fracción como cociente.
3. La fracción como razón.
4. La fracción como operador.
5. La fracción en probabilidad.
6. La fracción en los puntajes.
7. La fracción como número racional.
8. La fracción como punto de una recta orientada.
9. La fracción como medida.
10. La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo.
11. La fracción como porcentaje.
12. La fracción en el lenguaje cotidiano.
13. La conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud.

14. La conceptualización signo – objeto de Duval.

Como es posible ver, el escrito presentado corresponde a un avance de investigación que se encuentra en proceso y que se encuentra vinculado con la noción de fracción y los distintos significados incorporados a él, además de cómo estos intervienen en sus operaciones. Asimismo se pretende investigar cuántas de esos significados se extienden al realizar operaciones con fracciones, para posteriormente evidenciar las vinculaciones entre los significados y en lo posible identificar la existencia de un modelo de enseñanza que los integre.

Conclusión

En resumen, la intención es encontrar –entre otras y como ya se advirtió- la respuesta a la tercera pregunta que en el trabajo se ha planteado: ¿Existe algún modelo que integre los distintos significados de la noción de fracción para su enseñanza?

Por lo que hasta ahora se ha encontrado, si bien no todos los significados de la noción referida son conectados, para algunos autores como Brousseau (2008) ha quedado evidenciada una "ruta" para conseguir a partir de fracciones y números decimales acceder a los números racionales; pareciendo ser a través de tres nociones: medida, razón y funciones lineales.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 153- 176

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté.

Fandiño, M.I. (2005*). Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Bologna, Italia.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA – IPN, México.

Moreno, L. (SF). *Apuntes de Epistemología genética*. Copia manuscrita.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (2001). *Libro para el maestro. Educación Secundaria*. México.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (2006). *Programas de Estudio 2006*. *Educación básica, Secundaria, Matemáticas*. México.

EVALUACIÓN: ¿ARTICULACIÓN ENTRE LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA EN LA UNIDAD DE APRENDIZAJE DE LENGUAJE Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO?

Romy Adriana Cortez Godinez, Carlos Ernesto Ponce Ocegueda, Juan Felipe Flores Robles, Selene Muñoz Carrillo, Claudia Maria, Reynaga Luna
Universidad Autónoma de Nayarit México
romyadric@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación es de carácter correlacional y tiene como propósito determinar el impacto en aula, de las prácticas evaluativas de los profesores de Lenguaje y Pensamiento Matemático de la Universidad Autónoma de Nayarit UAN tras participar en un taller sobre modalidades, técnicas y estrategias de evaluación constructivista en matemáticas. Su implementación obedece a la diagnóstica desarticulación entre la evaluación promovida en el modelo académico de la UAN y la que se realizaba en el aula (Cortez y Ponce, 2007), así como en el interés institucional de contribuir con el diseño de técnicas y procedimientos que permitan evaluar los aprendizajes y todos los procesos que existen detrás de ellos.*

Se utilizó estadística descriptiva y se determinó la asociación e independencia, además se analizaron las impresiones de los estudiantes. Los resultados revelan que existe evidencia considerable sobre la práctica en el aula de estrategias evaluativas constructivistas.

Palabras clave: profesores, constructivismo, evaluación

Investigación

El diseño de técnicas y procedimientos que permitan evaluar los aprendizajes y todos los procesos que existen detrás de ellos es una de las demandas del modelo académico de la Universidad Autónoma de Nayarit UAN (Universidad Autónoma de Nayarit, 2004), de ahí que se implementó una capacitación a los profesores del Tronco Básico Universitario TBU sobre la evaluación constructivista y diversos tópicos de su competencia; siendo el impacto de ésta en las prácticas reales de evaluación en la unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático, objetivo de la presente investigación.

Justificación

Derivado del diagnóstico a la prácticas evaluativas de los profesores de Lenguaje y Pensamiento Matemático del TBU, quedó al descubierto la desarticulación existente entre la evaluación que se promovía en el modelo académico de la UAN y la que se realizaba en el aula (Cortez y Ponce, 2007); por lo anterior y con el propósito de dar cumplimiento a las actividades de mejoramiento y actualización profesional establecidas por la institución en su Plan de Desarrollo Institucional 2004-2010 (UAN et. al., 2004) se diseñó e implementó una capacitación con para todos los profesores adscritos al TBU acerca de la evaluación constructivista y su implementación diferenciada en las unidades de aprendizaje: Lenguaje y Pensamiento Matemático, Sociedad e Identidad Universitaria, Desarrollo de Habilidades del Pensamiento, Gestión de la Información e Ingles I.

Así, se ha considerado trascendente estudiar el impacto de dicha capacitación en las prácticas reales de evaluación en la unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático, el estudio planteado proporcionará evidencias de las prácticas evaluativas del profesor, además brindará información útil para evaluar a los docentes en la UAN.

Sustento teórico

Bajo el marco de interpretación constructivista, la evaluación al interior de la UAN se concibe como un proceso encaminado al mejoramiento del proceso educativo. Y en él intervienen aprendizaje y enseñanza, de tal forma que se puedan considerar todas actividades, operaciones y procesos congnitivos.

Al respecto Díaz-Barriga y Hernández (2002) señala que todos aquellos recursos cognitivos y afectivos que los estudiantes utilizan durante la construcción de aprendizajes, son conductas que muestran la ocurrencia de algún tipo de aprendizaje, no obstante su detección requiere de diversas estrategias y técnicas, de ahí que exista una gran cantidad de propuestas sobre estos.

De acuerdo con López e Hinojosa, 2001; Díaz-Barriga y Hernández, 2002 las estrategias y técnicas más comunes para evaluar el aprendizaje de los alumnos son:

a) *Entrevista*: es un intercambio verbal cara a cara; proporciona información concerniente al nivel de comprensión, procesos de razonamiento, pensamiento metacognitivo y retención.

b) *Bitácora*: permite que los estudiantes documenten y reflexionen sobre sus experiencias de aprendizaje; registra entradas cortas concernientes a la materia que está siendo estudiada.

c) *Diarios de reflexión:* es un auto reporte en el cual el alumno puede incorporar las observaciones personales, sentimientos y opiniones, eventos y experiencias (Johnson & Johnson, 2002).

d) *Portafolios*: carpeta personal que recopila todas las evidencias que en conjunto informan del abasto y calidad de la actuación académica del estudiante; resume logros y fortalezas de autor. Las evidencias más habituales son: evaluaciones, actividades resueltas, comentarios sobre el curso, ejemplos de trabajos, investigaciones acerca de los temas a tratar (Linn y Gronlund, 2000).

e) *Autoevaluación*: se aplica con la finalidad de conocer cómo percibe el alumno su propio proceso de aprendizaje; mediante ésta el alumno: emite juicios de valor sobre sí mismo, analiza y describe sus actividades, características y la variedad de causas de sus éxitos y fracasos, evalúa todo el proceso, así como su propio interés, dedicación, atención, preparación anterior, actitud frente a la materia, ritmo de trabajo y progreso en su desarrollo (Coll, 2004).

f) *Observación*: "es la mejor forma de acceder a algunos aspectos del aprendizaje y el desarrollo" (Linn y Gronlund, 2000, p. 313), toda vez que permite explorar ambientes, describir, identificar y comprender.

g) *Co-evaluación:* participan todos los alumnos que intervienen en las actividades, entre todos evalúan el comportamiento que tuvieron entre ellos, lo que permite que el alumno pueda comparar el aprendizaje que el cree tener y el que consideran sus compañeros que tiene, es una valoración recíproca.

h) *Evaluación del desempeño:* permite evaluar habilidades que no son fácilmente observadas; entre estas habilidades destacan aquéllas que involucran la emisión de juicios independientes, pensamiento crítico, toma de decisiones, hábitos de trabajo y actitudes y habilidades sociales

i) *Examen*: es una técnica de evaluación altamente estructurada y controlada que consiste que mide el grado de maestría o de rendimiento o aprendizaje logrado por los alumnos.

j) *Resolución de problemas:* llevan a los estudiantes a establecer jerarquías, investigar y fundamentar sus aportaciones u operaciones con información lógica y relevante.

k) *Mapas conceptuales*: analiza el manejo que tienen los alumnos de temáticas o conceptos complejos.

l) *Exploración a través de preguntas:* estima el nivel de compresión de los alumnos sobre algo que se está abordando.

En este mismo sentido Balbás (s/f) sugiere una lista más amplia de actividades que permiten evaluar el aprendizaje de los alumnos: elaborar propuestas, proyectar futuras leyes, diseñar planes de acción o campañas, análisis y solución de casos, proyección de diapositivas, entrevistas, estudios sobre empresas: redacción y resolución de casos, obras de teatro o relatos, creación de representaciones artísticas y comunicativas, creación de informes literarios, proyectos informáticos, creación de presentaciones audiovisuales, creación o interpretación de música, diseño y ejecución de experimentos controlados, presentaciones orales, simulaciones, juicios y debates, servicio comunitario, experiencia laboral y de voluntariado, investigaciones, intercambios culturales, estudio de la comunidad, informes sobre investigaciones, bibliografías comentadas, diarios personales, solución de problemas, aplicación de métodos, análisis de textos, leyes, elaboración de resúmenes, exámenes, resolución de guías, elaboración de mapas conceptuales, portafolios, entre otras. No obstante, muchas de las actividades señaladas por Balbás están contenidas en las estrategias descritas anteriormente, de ahí que sea bajo la postura de las primeras el desarrollo de la presente investigación.

Metodología

La investigación se concibió bajo un enfoque mixto, con carácter de correlacional; el estudio se condujo analizando a una muestra de docentes Lenguaje y Pensamiento Matemático antes y después de someterse al tratamiento mediante la prueba t para datos pareados; además se correlacionó la percepción de profesores y alumnos con respecto a las prácticas evaluativas del curso -ciclo agosto- diciembre 2007- a través del índice de correlación de Spearman y se determinó la dependencia de los mismos con un nivel de significancia de 0.05. De igual forma se analizaron las descripciones más representativas realizadas por los estudiantes.

Los instrumentos que se utilizaron fueron de corte cuantitativo y cualitativo, siendo el primero de rendimiento óptimo con el propósito de determinar el dominio cognitivo de los profesores sobre la evaluación constructivista, mientras que el cualitativo fue de rendimiento típico para investigar la descripción que hacen los estudiantes de las prácticas evaluativos que realiza su profesor; para la construcción de ambos se atendió la propuesta de Abad et. al. (2004), sobre la redacción de un test, además se tomó como marco de referencia las modalidades, estrategias y técnicas de evaluación señaladas por Balbás, (s/f); López e Hinojosa, 2001; Díaz-Barriga y Hernández, 2002; y UAN, 2006. Para cada test se calcularon los índices correspondientes.

Resultados e implicaciones

Resultado de la organización y tratamiento de la información, y como se muestra en el gráfico 1, se observó un incremento en el dominio docente de prácticas de evaluación constructivistas después del experimento.

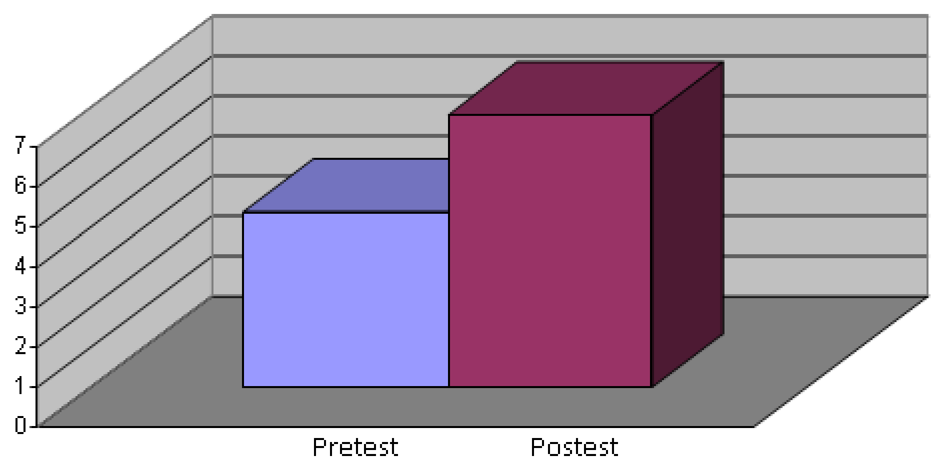


Gráfico 1. Comparativo de medias

Si bien el aumento de la media tras el experimento aporta evidencia significativa para afirmar que la evaluación en la unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático se está consolidando de manera constructivista, se procedió a correlacionar y establecer la independencia de dicha información con los datos proporcionados por los estudiantes.

Con un valor de significancia de .05 se tiene un coeficiente de correlación por rangos ordenados de .500, es decir, una correlación positiva media, y así lo confirma la prueba de independencia que con una chi-cuadrada de 12.91 con 2 gdl que al aplicar la regla de decisión, determina la dependencia entre la percepción de los estudiantes en función de la práctica docente.

Por lo anterior se concluyó un impacto positivo en las prácticas evaluativas de los profesores de lenguaje tras su participación en la capacitación, toda vez que las evidencias muestran el dominio de las modalidades, técnicas y estrategias de evaluación constructivista promovidos por la institución y su uso frecuente en el aula. No obstante, la bondadosa articulación encontrada entre la teoría y la práctica de la evaluación, se observó la persistencia de ciertas prácticas tradicionales de evaluación y errores de conceptualización sobre las técnicas constructivistas, de ahí que resulta necesario advertir la necesidad de dar seguimiento a las prácticas educativas de los profesores, así como capacitación y actualización constante.

Referencias bibliográficas

Abad, F., García, C., Gil, B., Olea, J., Ponsoda, V. y Revuelta, J. (2004). *Introducción a la Psicometría. Teoría Clásica de los Test y Teoría de la Respuesta al ítem*. Madrid: Universidad Autónoma Madrileña.

Balbás, C., (Ed.). (s/f). *Evaluación en el salón de clases. Material de trabajo.* México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior CENEVAL.

Coll, C. *Psicología de la educación y prácticas educativas mediadas por las tecnologías de la información y la comunicación: una mirada constructivista*. México. (En prensa).

Cortez, R. y Ponce, C. (2007). *Diagnóstico de las prácticas Evaluativas en el Nivel Superior de la Universidad Autónoma de Nayarit.* México: Universidad Autónoma de Nayarit.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje constructivista*. México: McGraw-Hill.

Johnson, D. y Johnson, R. (2002). *Meaningful assessment: A manageable and cooperative process.* Boston: Allyn and Bacon.

Linn, R. y Gronlund, N. (2000). *Measurement and assessment in teaching*. Upper Saddle River: Merril–Prentice Hall.

López, B., e Hinojosa, E. (2001). *Evaluación del aprendizaje: alternativas y nuevos desarrollos.* México: Trillas. ITESM, Universidad Virtual.

Universidad Autónoma de Nayarit (2004). *Nuevo Modelo Curricular.* México: Universidad Autónoma de Nayarit.

Universidad Autónoma de Nayarit (2004). *Plan de Desarrollo Institucional 2004-2010 (Síntesis).* México: Universidad Autónoma de Nayarit

ANÁLISIS DE UN PROCESO DE ESTUDIO SOBRE LA ELIPSE MEDIANTE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Yaritza Pérez Justo, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
yaritza_perez@hotmail.com, marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se propone analizar un proceso de estudio sobre la elipse, mediante los criterios de idoneidad didáctica en un curso de segundo año de Educación Diversificada y Profesional, el cual se fundamenta bajo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003), donde se destaca la importancia de la idoneidad epistémica, cognitiva y mediacional. El esquema metodológico a seguir combina aspectos tanto cuantitativos como cualitativos. El diseño de la investigación comprende distintas fases, cada una en relación con los objetivos específicos planteados por el autor.*
Palabras clave: elipse, idoneidad didáctica, ontosemiótico

Introducción

El estudio de lugares geométricos como las secciones cónicas, en especial, la elipse proporciona una serie de recursos en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría, cuyo desarrollo se considera primordial para la formación de los futuros bachilleres. Es importante destacar que a la hora de explicar este contenido en el aula de clase, se aborda el estudio analítico de dichas curvas, obviándose por completo el análisis geométrico. Por ende, el propósito de esta investigación es analizar un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica, propuestos en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, en un curso de segundo año de educación diversificada y profesional en Liceo Nacional "José Félix Ribas", es importante destacar que en este trabajo se presenta un avance de la investigación que se encuentra a nivel de proyecto y está estructurado de la siguiente manera: el problema, objetivos de la investigación, el marco teórico y el marco metodológico.

El Problema

Planteamiento del Problema

La enseñanza de las secciones cónicas corresponde al segundo año de la educación diversificada y profesional, cuyo desarrollo se considera primordial en la formación de los futuros bachilleres y en la aplicación de otras ciencias como la astronomía, mecánica, física, biología. A pesar de que este saber está relacionado con el entorno del estudiante, es de difícil comprensión para ellos, situación comprobada por Urdaneta (2005); además, que el mismo ha tenido un estudio analítico a la hora de impartirlo en clase, olvidándose por completo del análisis geométrico; por lo cual, su enseñanza tenía carácter repetitivo y memorístico. En este sentido, Contreras A, Contreras M y García (2002), señalan que es necesario realizar una interrelación entre la geometría sintética y la analítica para el desarrollo del tema donde se realicen representaciones gráficas y se aborden aspectos teóricos. Por consiguiente, esta investigación tiene un enfoque teórico – práctico, es decir, se busca mejorar el proceso de enseñanza de la curva y poner en funcionamiento nuevas estrategias de aprendizaje.

La elipse, por su aplicabilidad, es una cónica en la que intervienen otros elementos de la matemática tales como: ecuaciones cuadráticas, gráficas de funciones, valor numérico de un polinomio, factorización, aplicación de propiedades en el conjunto de los números reales en especial la división de fracciones; construyendo en sí misma un valioso instrumento al docente que desea consolidar en los estudiantes otros conocimientos previos.

Uno de los problemas que se presentan al abordar este estudio es la comprensión matemática, incluyendo tanto el saber matemático como el saber enseñarlo. No obstante, para poder realizar una clase donde se de un proceso de enseñanza aprendizaje, de manera significativa, es necesario contar con una pedagogía y didáctica adecuada, con esto fomentar en el participante un interés verdadero a la matemática y tratar que la interrelacione con su contexto y su vida profesional.

El estudio de la elipse en el segundo año de la educación diversificada no se deslinda de las cuestiones antes planteadas. La experiencia docente de la investigadora en la enseñanza de esta noción, le ha permitido constatar las dificultades que enfrentan los estudiantes al momento del tratamiento didáctico. Entre ellas mencionamos, conflictos en el uso de la simbología (uso de variables x o y), errores de significados, problemas para efectuar cálculos numéricos en el conjunto de los números reales (adición, multiplicación, división, sustracción, potenciación y radicación), obstáculos en la representación gráfica de la elipse de centro en el origen y en un punto (h, k), eje focal, eje mayor, lado recto, eje menor y en la identificación de los focos.

Otro problema que se evidencia esta relacionado al docente, en cuanto al uso y adecuación de materiales manipulativos en el proceso de enseñanza aprendizaje, es así que el material presentado al estudiante adquiere significado al entrar en relación con conocimientos anteriores. Pero, para que esto suceda, el contenido que debe aprender el participante ha de tener significado en sí mismo, además, ser potencialmente útil para el estudiante.

En las investigaciones abordadas por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), se han introducido un conjunto de descriptores que pueden ayudar en el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático, los cuales permiten establecer un puente entre una didáctica descriptiva – explicativa y su aplicación. En este sentido, y por lo expuesto en párrafos anteriores, cabe plantearse las siguientes interrogantes que se clasifican en idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva e idoneidad mediacional, propuestas por Godino y otros (2006).

Idoneidad Epistémica:

¿Qué relación guarda la Elipse con otros contenidos matemáticos?

¿Qué se pretende enseñar sobre la elipse en el segundo año de educación diversificada y profesional?

Idoneidad Cognitiva:

¿Los alumnos poseen conocimientos previos necesarios para el estudio del tema?

¿Qué dificultades de comprensión poseen los diversos contenidos presentes en la elipse para los futuros bachilleres?

¿Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos pretendidos?

Idoneidad Mediacional:

¿Será idóneo el uso de las tecnologías de la información y comunicación en el proceso enseñanza de la elipse?

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Analizar un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica, propuestos en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, en un curso de segundo año de educación diversificada y profesional.

Objetivos Específicos

1. Realizar un estudio epistemológico de la elipse, que precise los componentes del significado referencial. Para ello será necesario determinar la naturaleza del objeto de estudio a lo largo de la historia y su aplicación en otras ciencias.

2. Analizar y valorizar el uso de un software de Geometría dinámica (geogebra) en el proceso de estudio de la elipse en un grupo de 15 estudiantes del segundo año de ciclo diversificado y profesional mención ciencias del liceo nacional "José Félix Ribas", ubicado en La Victoria-Estado Aragua.

3. Caracterizar los significados personales de la elipse en un grupo de 15 estudiantes del segundo año de ciclo diversificado y profesional mención ciencias, referidos en el objetivo especifico N°2.

Marco Teórico

El marco teórico que sirve de soporte a este trabajo de investigación, se desarrolla en dos partes fundamentales: los antecedentes de investigación y las bases teóricas.

Antecedentes

En cuanto a los antecedentes, siguiendo la línea ofrecida por el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) presentado por Godino y otros (2006), se clasifican en tres criterios parciales de idoneidad con el objetivo de analizar un proceso de estudio.

Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.

Del Río (1996), realiza un trabajo basado en los problemas que fundamentaron el origen de las cónicas, es decir, centrado en los aspectos científicos relativos a los lugares geométricos siguiendo la evolución histórica del objeto matemático, con el fin de fundamentar algunas decisiones y propuestas de carácter didáctico sobre su enseñanza y aprendizaje en la secundaria.

De acuerdo a Contreras (2002), Apolonio veía la elipse como la sección de un cono por un plano no perpendicular a su eje. Para mostrar cómo el método sintético de construcciones de la elipse realizado por Apolonio fue utilizado por Descartes, muchos siglos después, al obtener la ecuación cartesiana de la cónica.

Idoneidad cognitiva: Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados

Mata (2006), en una investigación realizada a estudiantes de nivel medio, analiza sobre el razonamiento en el aprendizaje de las secciones cónicas. Uno de los hallazgos importantes de este estudio es que al aplicar el modelo de Van Hiele (1957), el estudiante realmente efectúa un proceso de razonamiento por medio de experiencias de aprendizaje que resultan de las actividades específicas que el docente diseña. Y en base a ese proceso de razonamiento el participante genera la comprensión sobre los objetos matemáticos en estudio.

Contreras A, Contreras M y García (2002), proponen un estudio sintético – analítico de las construcciones con la elipse que consideran motivador y formador para los alumnos de educación diversificada.

En efecto, estos autores comprobaron la continuidad y la complementariedad existentes entre ambas técnicas, mostrando, además, la posibilidad de coordinar las mismas y aflorando, por tanto, la falsa división curricular entre dos geometrías.

Idoneidad mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje

Castro (2004) realiza una investigación en el contexto de la educación colombiana, para indagar sobre el uso del computador en la clase de matemática con el propósito de explorar la configuración de un modelo de enseñanza que hiciera uso de las potencialidades del computador en propiciar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la ampliación de su campo semántica, vía el uso de un software.

Iglesias (2000), plantea que el uso de paquetes electrónicos ha facilitado la visualización de conceptos matemáticos, lo cual parece tener una amplia repercusión sobre la enseñanza de la geometría. En este sentido, se valora el papel de la visualización matemática en la construcción y manipulación del conocimiento geométrico y, por ende, es recomendable que los participantes partan de la exploración de los cuerpos geométricos y las construcciones con regla y compás.

Murillo (2005), señala que la integración y utilización de las tecnologías de la comunicación e información en el proceso educativo de las matemáticas, propone determinar los posibles beneficios que su manejo conlleva, a la vez que se diseñan metodologías y entornos interactivos multimedia de aprendizaje, que produzcan mejoras en el proceso de enseñanza aprendizaje del participante.

Bases Teóricas

La didáctica de la matemática se interesa por el estudio exhaustivo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el sistema educativo, es decir, los significados que le atribuyen los estudiantes a los términos, conceptos, proposiciones y propiedades matemáticas. Además, de los grados de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio; es por ello que esta investigación basa su enfoque teórico en el modelo ontológico - semiótico de la cognición e instrucción matemática, (Godino, 2003), donde se plantea que la investigación debe articular las diversas dimensiones que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el seno de los sistemas didácticos.

Según Godino y otros (2006), la búsqueda de fenómenos didácticos no representa tanto a encontrar relaciones de casualidad en los acontecimientos como determinar criterios de idoneidad en los procesos de cognición e instrucción matemática. En este sentido se han introducido la noción de idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático con la intención de orientar el análisis y valoración de tales procesos. Dicha idoneidad se concibe como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

Marco Metodológico

Tipo de Investigación

Esta investigación se centra en un enfoque de estilo descriptivo y exploratorio en su fase preliminar, para luego pasar al enfoque interpretativo y explicativo en su última fase. Se basa en un modelo metodológico mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos

El diseño de esta investigación comprende las siguientes fases:

1.- Realizar un estudio epistemológico de la elipse, que precise su origen, evolución histórica y aplicación en otras ciencias, e identificándolos problemas y obstáculos que dieron origen a esta noción.

2.- Analizar y valorizar el uso de la tecnología de la información y comunicación en el proceso de estudio de la elipse en la educación diversificada y profesional, en este sentido, se estudia el grado de disponibilidad de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio.

3.- Determinar las dificultades de comprensión que poseen los diversos contenidos presentes en la elipse para los futuros bachilleres.

Población y Muestra

Población

La población de interés en la investigación, son los participantes del segundo año del nivel de educación media diversificada y profesional que cursan la asignatura de matemática

Muestra

La muestra será un grupo de quince (15) participantes del liceo Nacional "José Félix Ribas" ubicado en La Victoria, cursantes segundo año del nivel de educación media diversificada y profesional, donde se realizara una análisis cognitivo y didáctico del objeto matemático

Técnica de Recolección de datos

La recolección de datos se realizará mediante la observación no participante, en la cual se realizará el análisis de una clase de segundo año de educación diversificada, que imparte un profesor de la asignatura de matemática. Además, se aplicará un cuestionario, el cual se efectuará al final de la clase, para analizar los elementos de significados de la elipse, en este sentido, se pretende determinar lo aprendido, los errores, y las dificultades presentadas por los estudiantes, en la comprensión de la elipse.

Reflexiones Finales

En este trabajo se ha introducido la noción de idoneidad didáctica que puede ayudar en el análisis y valoración de un proceso de estudio de la elipse, la cual permite establecer un puente entre una didáctica descriptiva y explicativa. La intención de esta investigación es encontrar dispositivos idóneos para la enseñanza y el aprendizaje de la elipse, teniendo en cuenta la idoneidad epistémica, cognitiva y mediacional, con el propósito de evaluar la pertinencia de un proceso de instrucción matemática y determinar pautas para la mejora e implementación del contenido.

Finalmente, los resultados de esta investigación podrían contribuir con el mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje tanto de la elipse como de otros tópicos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Castro, F. (2004). *El Computador en la Clase de Matemática un Enfoque Semiótico.* Departamento de ciencias Básicas, Pontificia Universidad Javeriana. Cali, Colombia.

Contreras, A. y Contreras M, García. (2002). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5 (2), 111-132.

Del Río, J. (1996). *Lugares Geométricos Cónicas.* España: Síntesis.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: un enfoque ontológico – semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Godino, J., Bencomo, B., Font, V. y Wilhemi, M. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradígma* 27(2), 221-252.

Iglesia, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Asistido por Computadores*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay - Venezuela

Mata, F. (2006). *Análisis Sobre el Razonamiento en el Aprendizaje de los Conceptos de la Geometría Analítica. El caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele*. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Murillo, J. (2005).*Implementación del Software de Geometría Dinámica en la Enseñanza de la Asignatura*. Departamento de Matemáticas y su didáctica. Universidad de la Rioja.

Urdaneta, J. (2005). *Significados Institucionales de la Parábola en el Segundo Año del Nivel Diversificado y Profesional*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Rómulo Gallegos. San Juan de los Morros, Venezuela.

ALGUNAS INCONGRUENCIAS CONCEPTUALES SOBRE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

Carlos Rondero, Anna Tarasenko, Juan Alberto Acosta
Universidad Autónoma de Estado de Hidalgo. (México) México
acostah@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.edu.mx
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Desde la perspectiva de este trabajo se considera a la noción de linealidad como un elemento fundamental en la construcción del saber matemático. Esta noción cumple una función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada. Se tienen evidencias históricas y epistemológicas de este relevante hecho, a partir de escenarios históricos acerca de su evolución. Desde un punto de vista didáctico se han identificado algunas incongruencias conceptuales. Se busca precisar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate epistemológico de la noción de linealidad, posibilita su resignificación en la Didáctica de la Matemática.*
Palabras clave: linealidad, epistemología, didáctica

Introducción

En esta investigación se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. Se tienen evidencias históricas y epistemológicas de que dicha noción cumple una función articuladora que se muestra a través de la evolución de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios vectoriales, entre otros, así como el vínculo entre sus diferentes significados que les son inherentes (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2007). Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. En particular en este trabajo se reportan ciertas incongruencias conceptuales de la noción de linealidad, desde una perspectiva epistemológica y didáctica. Este tipo de incongruencias se presentan cuando en la definición de un concepto dado, no se hacen explícitas las filiaciones epistemológicas con otros conceptos previos articulados por una misma noción.

Partiendo de la identificación de cuatro escenarios históricos en cuanto a la evolución de la noción de linealidad (Acosta, Rondero, Tarasenko y Karelin, 2008) se toman en consideración las filiaciones y rupturas epistemológicas alrededor de la noción de linealidad, se da cuenta de inconsistencias conceptuales que tienen fuertes implicaciones en la matemática escolar. En lo que se refiere al primer escenario se identifican las culturas ancestrales la egipcia, china y babilonia, donde de la proporción directa y de la progresión aritmética son el sustento de una actividad sociocultural relevante como lo es el cobro de impuestos. El segundo se ubica en la Grecia clásica, con referencia a Euclides y Arquímedes quienes emplearon la proporción directa para sustentar muchos de sus resultados geométricos. Es en este momento histórico donde aparecen las primeras definiciones de recta. Ubicamos al tercer escenario en la época en que aparecieron los trabajos de Fermat y Descartes quienes a partir de lo realizado por Apolonio siglos antes, definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, donde la proporcionalidad toma la forma analítica $b\,x = a$, y se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad. Finalmente la última de estas referencias históricas se da a partir de mediados del siglo XIX, donde inicia la estructuración del Álgebra Lineal, a través de la incorporación de diferentes saberes matemáticos cuyo elemento de articulación conceptual es precisamente la linealidad.

Enfoque teórico referencial

Desde una perspectiva histórica epistemológica, una primera referencia es que la aritmética babilónica posibilitó hacer cálculos astronómicos y mercantiles, además de áreas y volúmenes, donde la proporción directa es la noción preponderante que aparece en todos ellos, Filloy (2003).

En la civilización egipcia, se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a, b* y *c* son constantes y *x* variable desconocida. En Boyer (1991) se lee que el método de solución, que aparece en el *Papiro de Rhind,* se conoce en la actualidad como el *método de la falsa posición*.

En Struik (1986), se hace referencia a un libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* ubicado en la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) donde aparecen porcentajes, proporciones y problemas de aplicación de impuestos; así como usos de *"la regla de tres"* y de progresiones aritméticas y geométricas, aborda el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población y se ocupa de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000).

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos para la estimación de áreas y volúmenes. La noción de linealidad surge incipientemente, desde que aparecen las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, empleadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

Ya en la Grecia clásica Euclides afirma que por dos puntos pasa una recta y que ésta es única, además la proporcionalidad directa se emplea en el cálculo aproximado del área de un círculo a través del cuadrado de su diámetro. Por otra parte, tomando ideas de Anaxágoras en referencia a las razones y proporciones, Eudoxio de Cnido (408 – 355), define indirectamente la igualdad de dos razones $a: b$ y $c: d$ (Hofmann, 2002).

En el primer postulado del primer libro *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999).

Desde el análisis de la evolución de las nociones referidas, en este segundo escenario la noción de linealidad, empieza a tener una ruptura epistemológica con la noción de proporcionalidad, ya que la connotación abstracta se expresa a través de los postulados y demostraciones de teoremas geométricos.

En la tercera etapa, Descartes (1596 – 1650) construye el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, incorporando a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás. Fermat y Descartes, dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos, en particular a la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x, proponiendo a la recta que pasa por el origen, de la forma $b\,x = a\,y$, y plantearon $a\,x + b\,y = c$ como la ecuación de la recta en su forma general (Hofmann, 2002).

A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales (x, y) a un lugar geométrico (en términos modernos, $f(x,y)=0$) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Acosta, Rondero, Tarasenko y Karelin, 2008).

El cuarto escenario, ubicado a partir del siglo XVIII, es donde inicia de manera incipiente del Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de *n* ecuaciones con *m* incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad. Uno de los primeros casos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX, Dorier (2000, p. 6-8).

En siglo XVIII, Cramer publicó un tratado titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques.* Este documento es el primero donde aparece una notación para la escritura de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes no específicos. Aunque en 1693, Leibniz había escrito una carta con contenidos semejantes, la cual se publicó por primera vez en 1850. En el libro de Cramer (Dorier, 2000, p. 8-9) se presenta una regla para obtener la solución de sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, como función de sus coeficientes, empleando lo que ahora se conoce como determinantes. El concepto de rango, empezó a tomar forma dentro de la teoría de determinantes entre 1840 y 1879. En referencia a Frobenius (1875) (Dorier, 2000, p.10) se puede decir que es de los primeros autores en definir en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y n–uplas, vinculándolo con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada. Al considerar a las ecuaciones y a las n-uplas como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad. Frobenius da un gran aporte hacia el concepto moderno de vector. Define el concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* a un sistema dado, esto es, que un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los componentes de los elementos de cualquier base de soluciones del sistema inicial (Dorier, 2000, p. 10).

Incongruencias conceptuales

Un estudio histórico-epistemológico como el que se ha esbozado, es una muestra de la evolución conceptual de las nociones de proporcionalidad y linealidad, con lo cual se rescatan elementos epistemológicos que en principio es posible incorporarlos a la didáctica de la matemática.

Por otra parte, se desprende un elemento de análisis de carácter didáctico en referencia a lo que propicia incongruencias conceptuales y sobre la forma en que se instalan las nociones de proporcionalidad y linealidad, desde la matemática elemental a la matemática avanzada, al no hacer explicitas las filiaciones entre ambas nociones, esto a su vez repercute en la articulación del *corpus de saberes* que constituyen al Álgebra lineal, incidiendo directamente en su aprendizaje. Cabe señalar que al constituirse un corpus más amplio, se deja de lado una gran parte de los antecedentes conceptuales, que en esencia se identifican por medio de un rescate histórico y epistemológico. En el caso de la noción de linealidad, se pierden algunos de sus significados anteriores, todo lo cual propicia la existencia de incongruencias conceptuales.

Una primera incongruencia que se puede resaltar es la que se da entre la proporcionalidad directa y la función lineal, al tratar de generalizar la proporcionalidad $y = \frac{b}{a}x$, a una nueva forma dada por la llamada función lineal $f(x) = ax + b$, con $x \in \Re$, es decir hay una ruptura epistemológica de lo proporcional a lo lineal, en el sentido de la aparición del término independiente en la expresión de la función.

Otra incongruencia se presenta al abordar desarticuladamente a la función lineal, en el sentido cuando *b ≠ 0,* no cumple con la correspondiente definición de transformación lineal $T(c_1x + c_2y) = c_1T(x) + c_2T(y)$, en el entendido de que sólo la función *f(x)= a x*, es la que satisface esta definición (Golubitsky y Dellnitz , 2001).

Para el caso de dos vectores v_1 y v_2 definidos en R^n, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó

$c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, si $c_2 \neq 0$. De manera tal que la dependencia lineal de dos vectores en el espacio R^n, es posible relacionarla conceptualmente con su carácter colineal, en el sentido de que cualquiera de ellos se expresa como el producto de un escalar por el otro vector, esto es, uno es múltiplo del otro. Dicha consideración es poco empleada en la didáctica del Álgebra lineal, lo que podría ayudar a instalar y entender mejor el concepto de dependencia lineal.

En el caso de tres vectores v_1, v_2 y v_3, linealmente dependientes en R^n, además de poder representar uno cualquiera de ellos en términos de los otros dos, por ejemplo

$$v_1 = -(\frac{c_2}{c_1})v_2 - (\frac{c_3}{c_1})v_3 \text{, con } c_1 \neq 0$$

estos tres vectores presentan la propiedad de ser coplanares, es decir, son vectores paralelos a un mismo plano. Cabe aclarar que en cierta forma, la característica de colinealidad se extiende a la de coplanariedad, todo ello se desprende a su vez de la condición de dependencia lineal, la cual es un concepto que surge de la propia noción de linealidad.

Al generalizar al caso de n vectores definidos en R^n, con $n > 1$, es posible analizar cómo se relacionan en este caso la proporcionalidad y la dependencia lineal. Los *n* vectores $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$, son linealmente dependientes si y sólo si, la combinación lineal,

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots. + c_n v_n = 0}$$

se cumple cuando al menos uno de los coeficientes es distinto de cero.

En tal caso para un $c_k \neq 0$, se tiene que,

$$v_k = -(\frac{c_2}{c_k})v_2 - (\frac{c_3}{c_k})v_3 - \ldots. - (\frac{c_{k-1}}{c_k})v_{k-1} - (\frac{c_{k+1}}{c_k})v_{k+1} - \ldots. - (\frac{c_n}{c_k})v_n,$$

se presenta una extensión de la proporción directa, que podría ser llamada *"proporcionalidad generalizada"*, en el sentido extendido de que término a término aparece la proporción directa, aunque se pierde el sentido original de la misma. Esto se interpreta usualmente como el hecho de que, cuando los vectores son linealmente dependientes entonces es posible representar uno de ellos como una combinación lineal de los otros.

Por último, otro tipo de incongruencia conceptual se da en el caso de los operadores lineales que generan a su vez a las ecuaciones diferenciales lineales como puede ser el caso, *L= aD+b,* donde *D* es el operador derivada *d/dx*, *a* y *b* son constantes reales.

Este argumento usualmente no se discute en la matemática escolar y por tanto se deja de instalar en los estudiantes esta forma de conceptualizar la noción de linealidad, que como se ha intentado mostrar, es un eje conceptual transversal en toda la matemática**.**

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se genera al operar L sobre una función y(x), es decir,

$$L[y(x)] = (aD+b)\,[y(x)]= aD[y(x)]+b[y(x)]= ay'+by,$$

la cual puede ser homogénea o no homogénea, según se iguale a 0 ó a g(x).

Cabe señalar que en este caso la linealidad se centra precisamente en el operador y no en alguna de las variables que intervienen en la propia ecuación diferencial. Esta característica de linealidad se ve reflejada al encontrar la solución general ψ_g de una ecuación diferencial lineal no-homogénea, dada a su vez como combinación lineal de la solución general ψ_h de su correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea y la solución particular ψ_p de la ecuación diferencial lineal no-homogénea, esto es,

$$\psi_g = \psi_h + \psi_p$$

esta representación de la solución general, es posible obtenerla precisamente por el hecho relevante de que la ecuación diferencial es generada por el operador lineal *L*, de modo tal que a su vez se cumple,

$$L(\psi_g) = L(\psi_h + \psi_p) = L(\psi_h) + L(\psi_p) = g(x)$$

Conclusiones

Se ha tratado de mostrar que en la didáctica se dejan de lado los significados que anteceden al concepto de linealidad los cuales forma parte del corpus de saberes del Álgebra lineal, lo que propicia la presencia de incongruencias conceptuales.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes características que tienen su expresión en los conceptos que genera y que a su vez aportan nuevos significados a la misma (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2007).

Una de las rupturas epistemológicas que mayor repercusión tiene en la didáctica, es la que se manifiesta entre la usualmente llamada función lineal, $f(x) = ax + b$ y el concepto de transformación lineal $T(c_1 x + c_2 y) = c_1 T(x) + c_2 T(y)$ ya que sólo *f(x)=ax,* la satisface.

Respecto a las filiaciones epistemológicas de la noción de linealidad, es de resaltarse que su explicitación tiene implicaciones conceptuales de carácter cognitivo y didáctico. Algunas de tales filiaciones se manifiestan en conceptos como función lineal, transformación lineal, dependencia lineal y ecuación diferencial lineal entre otras.

En este trabajo se dan evidencias, sobre todo histórico-epistemológicas, de algunas incongruencias conceptuales que se presentan en relación a la noción de linealidad y que se ven reflejadas en el aprendizaje ciertas áreas de la matemática como son el Álgebra lineal y las Ecuaciones diferenciales.

Es posible identificar el fenómeno didáctico de las incongruencias conceptuales en relación a otras nociones matemáticas, lo cual puede incidir en su aprendizaje

Se concibe que la evolución epistemológica de las nociones matemáticas como es este caso la linealidad, aporta elementos que repercutan en su instalación didáctica en diferentes momentos de la trayectoria escolar de un estudiante.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. y Karelin, O. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria del HPM 2008, ICME,* México, D.F., México

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). El papel de la linealidad como noción articuladora en la didáctica. *Memoria de la XI EIME, UAY, México*

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Dorier, J. (2000). *On the teaching of linear algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. (2003). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa Editorial.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas*. (2ª ed.). Serie Maestros del Pensamiento Científico. México: Instituto Politécnico Nacional.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2ª ed.). La matemática en sus personajes. España: NIVOLA.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics.* Nueva York: Wiley.

Categoría 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN AL CAPÍTULO DE PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Hugo Parra Sandoval

Esta vigésima segunda edición del Acta latinoamericana de Matemática Educativa muestra de manera significativa los aportes de nuestro movimiento de docentes e investigadores para superar los problemas educativos matemáticos de nuestra región. Este aporte de los trabajos aquí presentados se caracteriza por la variedad de temas y los diferentes enfoques teóricos presentes en prácticamente todos los niveles educativos.

En relación a los diferentes niveles educativos, sobresale el hecho de que más de la mitad de ellos dedican su atención al nivel medio, seguido del nivel superior y en menor medida el nivel de educación básica. La distribución aquí presentada permite afirmar que los niveles preuniversitarios ocupan un puesto importante en la preocupación del colectivo que asiste a la RELME. En el caso particular de los trabajos en el nivel medio, indica que se es testigo de un interés por atender una población que no siempre es tomada en cuenta por nuestras sociedades, como es la adolescencia. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por Rosas y Gutiérrez quienes plantean a estudiantes próximos a ingresar al nivel de educación superior y que no han cursado cálculo, el estudio del concepto de serie infinita. Este estudio revela la similitud de las argumentaciones de los estudiantes de educación media y superior respecto a la temática planteada, lo que hace ver la relevancia de abordar la transición entre ambos niveles educativos. En el nivel superior se tienen diversos trabajos, uno de ellos es el realizado por Campero y Trigueros, quienes presentan las características de un proyecto de evaluación de una propuesta didáctica en este nivel, relacionado con el cálculo de variaciones y la teoría de control. En cuanto a la educación básica, se tiene un primer trabajo realizado por Minelli, Trejo y Valdemoros; ellos abordan la problemática de la enseñanza de las fracciones planteadas como reparto y utilizando la resolución de problemas. Otro trabajo en este nivel educativo es el presentado por Valle, Rivera y Arrieta quienes estudian las interacciones en el aula bajo el enfoque del aprendizaje colaborativo.

Finalmente, en lo que a la cobertura de los niveles educativos se refiere, no se puede dejar de lado la ausencia de trabajos que estudian problemas de la matemática educativa en el nivel inicial (0 a

5 años). Esta realidad lleva a un reto: abordar los problemas del nivel inicial y por consiguiente, plantear soluciones a los mismos, sobretodo porque se atiende una población igualmente desasistida por buena parte de nuestro sistema educativo como es la de los niños entre cero y cinco años.

Otro aspecto a destacar en los trabajos presentados es la diversidad de los tópicos matemáticos educativos que se abordan. En ese sentido resalta el hecho de una alta presencia de trabajos relacionados con la geometría. Así tenemos el trabajo de Gulfo y Amaya donde inician a los alumnos en el aprendizaje de la geometría a través del origami. Otros autores como Mendoza, Nesterova, Ulloa y Ortega sugieren el estudio de la geometría a través de actividades como la solución de problemas o la modelación utilizando las TIC, este último planteamiento también lo asumen los trabajos de Flores y el de Zaldívar, Espinosa y Cabrera. La trigonometría es igualmente estudiada, y al respecto tenemos los trabajos de Estrada, Camelo y Dalia quienes desarrollan su trabajo en torno a las razones trigonométricas y el trabajo de Maldonado, Rodríguez & Santana, que plantea situaciones alternativas al problema de transitar desde la medición en grados a radianes.

Otro tópico que sobresale es el referido a la estadística. Se tiene el trabajo de González, Espinoza y Chaves en el que abordan la estadística utilizando como estrategia la resolución de problemas. El segundo trabajo aborda la problemática de la enseñanza de la estadística desde la perspectiva de la formación de profesores; al respecto Rodríguez, Nancy, Urrea y Figueroa proponen a un grupo de educadores el diseño de actividades relacionadas con este tema y a partir de dichas actividades analizan las acciones y actitudes de los profesores en dicho proceso. En este mismo orden tenemos el trabajo de Carballo y Ojeda, quienes desarrollan el problema del azar y sus implicaciones epistemológicas. Finalmente el trabajo presentado por Laya, Viteri, Sanoja, Rondón y Matute plantea desde el juego, alternativas para el estudio de las probabilidades.

En el marco de la diversidad de los problemas matemáticos educativos esbozados también hallamos el estudio que se inicia en la educación media de la función logarítmica. En ese sentido Ferrari y Farfán presentan un trabajo el que su propósito fue el de generar un ambiente que favoreciera la emergencia de lo logarítmico en estudiantes del bachillerato y hacen un análisis al respecto. Dos trabajos se complementan con éste; el primero de ellos es el presentado por

Ortega, Nesterova y Mendoza quienes proponen una manera de trabajar la función exponencial y logarítmica utilizando diversas representaciones semióticas y con el auxilio de las TIC. El segundo, va al campo de la aplicación de los logaritmos; Romero, Ferrari y Galicia plantean a los estudiantes experimentar el grado de pH en algunos productos utilizando una escala logarítmica. En el mismo ámbito de la aplicación, se tiene en esta sección el trabajo de Sampedro, Gutiérrez y Pérez quienes presentan una estrategia que vincule la matemática con los estudios de técnico profesional; por otra parte, Muñoz, Ortiz, Hernández y Martínez presentan diversas aplicaciones matemáticas en el campo profesional de la ingeniería mediante la enseñanza por proyectos.

La modelación también tiene su espacio. Al respecto tres trabajos abordan su estudio; los trabajos de Flores y Suárez, el de Sosa y Aparicio y el de Ordoñez. Todos resaltan la importancia de la modelación como herramienta fundamental en las futuras labores profesionales de los estudiantes.

Hecho este recorrido por los trabajos que esta sección presenta, podemos resaltar el hecho de observar mayoritariamente un esfuerzo por abordar el estudio de las situaciones de aprendizajes de objetos propiamente matemáticos, lo cual reafirma la identidad de nuestros trabajos con la matemática educativa. Esta atención en los objetos de estudio matemáticos no significa el verlos aisladamente. Las situaciones de aprendizaje presentadas en gran parte de los trabajos de esta sección, se abordan entrelazando diversos tópicos matemáticos entre sí y con aspectos de la cultura en general, lo que muestra que existe una tendencia de nuestra práctica social como educadores e investigadores de la problemática de la matemática educativa hacia la integración y la interdisciplinariedad.

Finalmente, se resalta una tercera característica en los trabajos presentados, la variedad de teorías utilizadas. Ello muestra la vitalidad y el interés por crecer y hallar nuestra identidad académica en un continente culturalmente plural. Sin embargo, esta diversidad tiene un aspecto común, concebir el aprendizaje como un proceso de construcción personal y socialmente integrado a nuestras necesidades e intereses como sociedad latinoamericana, tal y como lo reafirman diversos trabajos que consideran en sus bases teóricas a la socioepistemología, la semiótica y las teorías cognitivas como la APOE y del Pensamiento Matemático Avanzado entre otras.

Para concluir se invita al lector a prestar atención a los diversos trabajos aquí presentados, no sólo con la mirada puesta en hallar elementos para una investigación específica, sino con la mirada de aquel que desde su praxis educativa matemática busca en estas lecturas un alimento para transformar la realidad, de manera tal que su trabajo contribuya en la construcción de una comunidad de educadores latinoamericanos conscientes de su responsabilidad histórica.

INTERACTUANDO CON EL CONCEPTO FUNCIÓN EN SITUACIONES DE MODELACIÓN

Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán. México
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Medio

Resumen. *A decir de algunos especialistas en matemáticas y matemática educativa, lograr que los estudiantes tengan un entendimiento profundo del cálculo y con ello, contribuir al desarrollo de futuros ingenieros, matemáticos y científicos en general, precisa del favorecimiento de formas de pensamiento y lenguaje de naturaleza variacional, asociados al concepto función. En este sentido, en el presente escrito se describen algunas ideas y referentes teóricos que motivaron y guiaron la producción de un cuaderno de estudio sobre dicho concepto, como es el caso de la modelación matemática en tanto actividad y práctica matemática.*

Palabras clave: funciones, modelación matemática, práctica escolar, material

Introducción

La matemática escolar es entendida como el resultado de las transformaciones de la matemática científica con el fin de hacerla un saber sociocultural susceptible de ser enseñado y aprendido. En este sentido y desde nuestro particular punto de vista, la matemática en tanto ciencia deductiva, axiomática, se genera a partir de los planteamientos y búsqueda de soluciones a situaciones que le son propias o bien, relativas a otros campos disciplinares. La matemática escolar en cambio, se genera a partir de la necesidad específica de educar matemáticamente a la sociedad en su conjunto. Por tanto, es posible distinguir al menos dos tipos de actividades matemáticas: la actividad matemática científica y la actividad matemática escolar. La primera, encierra un conjunto de acciones complejas que el matemático pone en juego ante determinadas situaciones, por ejemplo, estimar, medir, razonar, argumentar, reconocer modelos y estructuras, entre otras. Por su parte, la segunda se orienta más al entendimiento del lenguaje y las estructuras de la matemática misma (Cordero, 2005). De esta manera, las formas en que los estudiantes habrán de comprender y proceder en el ámbito escolar, serán típicamente diferentes de aquellas que se esperan realicen en ámbitos distintos a este. Se dice pues, en un sentido amplio, existe un problema de transferencia de los saberes.

Es así que, partiendo de este contexto y apoyados en la idea de que el sujeto y el objeto de conocimiento se construyen mutuamente a través de la actividad, presentamos en este escrito, algunas de las ideas y consideraciones teóricas-prácticas que motivaron y guiaron el proceso de producción de un cuaderno de estudio referente al concepto función real de variable real para estudiantes de bachillerato.

Se trata de un material impreso cuyo contenido se desarrolla esencialmente en dos ejes:

i. *La modelación matemática* de fenómenos y situaciones en donde hay presencia de variaciones y cambios con el fin de poder dar una descripción cuantitativa y cualitativa de los mismos.

ii. El estudio de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, como es el caso de las funciones y sus propiedades en la formulación de modelos matemáticos.

Presencia del concepto función en los libros de texto

La presencia del concepto función (de variable real) en los libros de precálculo o de introducción al cálculo, suele "justificarse" desde lo que hemos denominado: discurso escolar intramatemático. Dicho en otras palabras, aun cuando los autores refieran la importancia de las funciones en las ciencias y sus obras proporcionen ejemplos o ejercicios aplicativos en estas, lo cierto es que la estructura, tratamiento y discurso desplegados en torno a dicho concepto, se rige bajo una visión deductiva de las matemáticas. Esto es (en el mejor de los casos), se orienta el pensamiento hacia una forma de razonamiento lógico deductivo, que se hace visible en la presentación secuencial de definiciones, propiedades y ejemplos de conceptos matemáticos. Si bien este tipo de razonamiento, es una forma de pensamiento matemático, también es cierto dejan fuera acciones como el establecimiento de relaciones matemáticas en situaciones específicas, la generalización de observaciones, la argumentación y la generación de ejemplos por inducción, para la formulación de conjeturas imprevistas que, a la postre, también son formas matemáticas de pensar, empero, poco favorecidas en los textos.

Según (Chevallard, 1998) las transformaciones para adaptar los saberes matemáticos a libros de texto se verifican, entre otras acciones, a través de procesos de delimitación, fragmentación y despersonalización de esos saberes, produciendo su descontextualización, así como su desvinculación de la red de problemáticas que les otorgan sentido y significados, y que los fueron constituyendo como objetos matemáticos del saber.

Esto puede observarse en las formas en que se introduce y trata el concepto de función en los libros, donde es posible identificar definiciones más o menos análogas a las siguientes:

- Una función es *una regla (de correspondencia) que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento llamado f(x), de un conjunto B.*

En palabras de Freudenthal (1983), citado en Ruiz (1998), esta definición de carácter lógico-formal, oscurece el significado esencial de una función, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo estático.

- "*y es una función de la variable x, definida en un intervalo tal que a < x <b, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y*"

Ambas definiciones, provienen de los trabajos desarrollados por matemáticos como Cauchy, Dirichlet y Cantor, quienes en la corriente de conformar sistemas axiomáticos para las distintas ramas de las matemáticas en el siglo XIX, intentaron dar una definición formal de función. De esta manera y en mayor o menor medida, los resultados de estos trabajos, las restricciones que impone el funcionamiento del sistema didáctico y la economía de los tiempos, han perneado el discurso escolar del concepto función en los libros de texto, desligándolo de todo proceso de producción, y dejando a un lado la evolución del mismo. Se ha desatendiendo su origen y reducido al mínimo su utilidad y pertinencia, mostrándose como un saber anónimo, bajo el aspecto de verdades innatas (Chevallard, 1982).

La modelación matemática

En nuestro material, centramos la atención en la práctica de modelación matemática como objeto de estudio y como práctica escolar, donde el entendimiento de la modelación no se reduce a una habilidad cognoscitiva individual (Blomhoj y Hojgaard, 2003), sino como parte constitutiva de la práctica matemática, concretamente, la práctica matemática escolar. Así, se intenta promover y favorecer el estudio de situaciones fenomenológicas donde el énfasis es puesto en la variación de las variables, a fin de dotar de significados a la función.

La *matematización* de fenómenos de distinta naturaleza, influenciados o generados por *variables* o magnitudes que van cambiando de un estado a otro, normados por *prácticas sociales* como la *predicción*, ha regido la construcción de conceptos matemáticos durante varios siglos. Sucede que en ciertas situaciones se requiere conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se precisa entonces, determinar el valor que tomará una variable que depende de otra (variable independiente) cuando ésta cambia de un estado a otro. Sin embargo, restringidos para manipular el tiempo según nuestros designios, se recurre a la práctica predictiva, es decir, saber cuál es el valor que tomará nuestra variable después de transcurrido cierto tiempo a partir de un modelo matemático de la situación o fenómeno. De modo que, considerando valores iniciales es posible describir y cuantificar la forma en que ellos cambian y cómo cambian sus cambios (Cantoral y Farfán, 2000).

La necesidad de predecir, estimar y aproximar los cambios o variaciones en fenómenos de la física y de la mecánica de los cuerpos celestes, como el fluido de líquidos (Newton), la transmisión del calor (Fourier) y la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace y otros), concitaron la generación de modelos matemáticos para describir y explicar tales fenómenos a partir del desarrollo de conceptos matemáticos del Cálculo y el Análisis matemático (Cantoral, 2001).

Se sabe (Hernández, Muñoz, y Buendía, 2007) que prácticas sociales como la predicción y la interpolación en la modelación matemática de fenómenos, favorecen la reconstrucción del cálculo escolar. Bajo esta idea se aborda el estudio de funciones en esta propuesta, utilizándolas como una herramienta matemática que permita entender, describir y explicar fenómenos y situaciones de distintas disciplinas científicas y de la cotidianeidad, que su vez vaya fortaleciendo la estructura conceptual del estudiante y su entendimiento del Cálculo.

Aspectos didácticos asociados al aprendizaje de funciones

En Kieran (1995), citado en Monzoy (1998) se considera que describir el mundo es describir el cambio y al hacerlo se crean objetos viables en los que las funciones son un tipo especial de dependencia de algo que varía libremente a algo que varía bajo ciertas restricciones, esto supone que en el estudio de funciones, los alumnos deben desarrollar ideas y estrategias variaciones. Por ello, consideramos en la modelación de las situaciones propuestas en el material, los siguientes aspectos para su estudio.

a) *La noción de predicción.* Esta noción se construye socialmente a partir de actividades cotidianas en las que se requiere determinar el valor de una variable con el paso del tiempo, cuando un fenómeno cambia de un estado a otro. Esto requiere de la construcción de un instrumento que permita mirar la variación continua para representarla en el contexto matemático (Cantoral y Farfán, 2000).

b) *Estudio de la variación, ¿cómo cambia lo que cambia?* En la matematización de las situaciones se pone atención en identificar qué, cómo y cuánto cambia lo que cambia, mediante el análisis de la variación de los valores de las magnitudes o variables que intervienen en la situación o fenómeno, esto permite describir las variaciones (directa, inversa, periódica, constante, con "rapidez", creciente, decreciente, etc.) y, por consiguiente, caracterizar los distintos tipos de funciones.

c) *Análisis e interpretación local-global, cualitativa-cuantitativa de gráficas de funciones.* Entre las acciones para generar un modelo matemático, se hace necesario saber interpretar gráficas de funciones, de modo tal, que sea posible analizar aspectos globales, locales, cualitativos y cuantitativos.

   Analizar una situación o fenómeno *localmente* consiste en centrar la atención en zonas, intervalos o puntos específicos de la gráfica que lo representa. Por el contrario, analizar *globalmente* significa centrar la atención en la totalidad de la gráfica o bien, en zonas o intervalos muy prolongados. Cuando se hace una descripción o análisis detallado, ya sea de la forma o comportamiento gráfico, se dice que el análisis es *cualitativo*. En cambio, si el análisis gráfico se realiza con un enfoque numérico o referente a cantidades o valores, se le llama análisis *cuantitativo*.

d) *La construcción de gráficas.* Establecer relaciones entre las operaciones algebraicas y su representación gráfica provee de significados geométricos a las operaciones con funciones y conocer el comportamiento tendencial de sus gráficas. Tener una idea sobre los comportamientos gráficos de un conjunto básico de funciones resulta oportuno al momento de interpretar gráficas y obtener sus expresiones algebraicas o fórmulas. Para ello es importante conocer las transformaciones que sufre la gráfica de una función a partir de la información que brinda la variación de parámetros, la multiplicidad de raíces, reflexiones y simetrías con respecto a los ejes de coordenadas.

Enfoque y estructura del material

Cada actividad ejemplificativa así como los ejercicios y tareas propuestas en el material, constan de la descripción verbal, numérica, gráfica, analítica e icónica sobre elementos de estudio de una función en tareas de construcción, interpretación local-global o cualitativa-cuantitativa y de visualización para estimar, describir y predecir situaciones fenomenológicas, siguiendo la estructura mostrado en la figura 1.

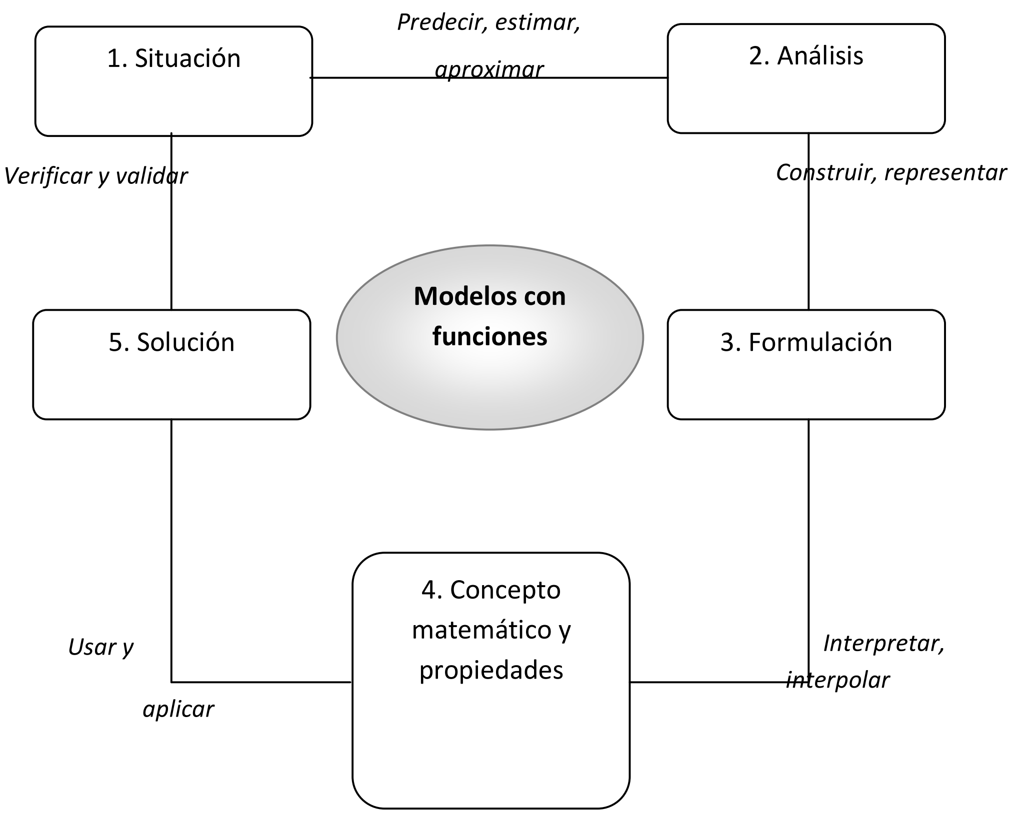


Figura 1. Estructura seguida en las situaciones de modelación

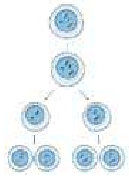
Modelación de situaciones o fenómenos con funciones

En este apartado se ilustra, mediante la modelación matemática de un proceso biológico, el tratamiento didáctico que del concepto función se hace en esta propuesta.

1. Situación

Descripción de una situación o fenómeno en el que se requiere estimar, predecir o aproximar valores del mismo, a partir de la información y datos iniciales sobre este, que se dan de forma verbal, gráfica o numérica.

Se describe una situación de reproducción celular, conocido como *meiosis,* en el que una célula cumple su ciclo en 24 horas, es decir, la célula diploide inicial se convierte en 4 células haploides. Se requiere predecir, ¿cuántas células se tendrán después de 5 días?



2. Análisis

Entendimiento del contexto, su interpretación y la identificación de variables, tanto del fenómeno como del contexto.

Para generar el modelo matemático del proceso, se consideran:

i) Las variables que intervienen: el tiempo en que se reproduce cada célula y el número de células producidas;

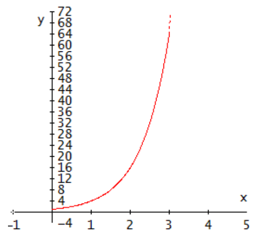
ii) La relación entre variables, es decir, la forma en que se reproducen las células.

3. Formulación del modelo

Tareas de análisis, construcción, interpretación o interpolación para generar una representación matemática del fenómeno.

Se construye una tabla o gráfica con valores iniciales del proceso, a fin de obtener una expresión analítica que lo modele, mediante el análisis de la variación de los datos.

Día	Reproducción de células
0	1
1	4
2	16
3	64
⋮	⋮
5	?



4. Uso y aplicación del concepto matemático y sus propiedades Presentación del contenido (concepto, relaciones matemáticas, propiedades o procedimiento) y establecimiento de una conexión con la pregunta planteada en la descripción de la situación.	Del análisis de variación, se observa que: ▪ Las imágenes de la función que modela la situación crecen rápidamente conforme aumenta el número de días transcurridos ▪ Cada día se tendrán 4 veces el número de células que se tenían el día anterior Estos aspectos caracterizan la función exponencial $y = 4^x$ (modelo analítico), x representa el número de días transcurridos.
5. Solución y validación Interpretación de los resultados matemáticos para la explicación del fenómeno. Determinación del grado de exactitud del modelo y comparación de la predicción con los datos iniciales.	La solución del problema se obtiene sustituyendo x = 5 en la expresión analítica, resultando que después de transcurridos 5 días, se tendrán 1024 células producidas. Posteriormente, se valida el modelo contrastando los datos iniciales y se predicen otros valores de la situación.

Recomendaciones

Los procesos de transformación que sufren los saberes matemáticos cuando adquieren el estatus de objetos de enseñanza, nos hacen mirar en la preparación didáctica del estudio de funciones en el cuaderno, las ideas germinales de su desarrollo conceptual. De modo que, atendiendo a la génesis, desarrollo y evolución del concepto función, se recomienda considerar en su tratamiento didáctico, los siguientes aspectos: la matematización de fenómenos; la práctica de predicción, como mecanismo de construcción del conocimiento matemático en situaciones de variación y cambio; la cuantificación del cambio y la noción de función, como relación entre variables y como regla de correspondencia.

Es preciso, también, en orden de entender el comportamiento tendencial de las funciones, promover un análisis puntual y global de sus gráficas, y de sus transformaciones.

A partir de la experiencia expuesta, advertimos la necesidad de promover, tanto en procesos instruccionales como programas de curso y materiales "didácticos", un entendimiento conceptual de función como una forma de relacionar cantidades variables; que permite por un lado, resolver problemas de otros campos disciplinares y por otro, constituir una práctica escolar que guía los procesos de construcción del conocimiento relativo a funciones.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M., Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática 16(2)*, 105-125.

Blonhoj, M., Hojgaard, T. (2003). Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications 22(3),* 123-139.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México, D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, R. Rodríguez y A. Garza (Eds) *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique. (Versión original en francés, 1991).

Chevallard, Y., Joshua, M. (1982). Un exemple d'Analyse de la transposition didactique - la notion de distance. *Recherches en didactique des mathematiques, 3(2)*, 157-239.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 8 (3)*, 265-286.

Hernández, H., Muñoz, G., Buendía, G. (2007). La modelación matemática en el contexto de ingeniería civil a través de la interpolación y la predicción. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 567-572). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Monzoy, J. (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. En Hitt, F., Sentíes, M., Pérez, E. y Cortés, C. (Eds). *Memorias del IX Seminario Nacional de Microcomputadoras en la Educación Matemática* (pp. 45-53). México: Escuela Normal Superior de México.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA CON EMPLEO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

María Inés Ortega Arcega, Elena Nesterova, Saydah Mendoza Reyes.
Universidad Autónoma de Nayarit México
maijua9@hotmail.com
Campo de investigación: Lenguaje matemático Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se reportan los resultados de la aplicación de la propuesta didáctica para el aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica. La propuesta se basó en las ideas de la teoría constructivista y la teoría de representaciones semióticas (Sandoval y Díaz Barriga, 2002; Pozo, 1999; Duval, 1998; Pluvinage, 1998); se diseñó un manual para el uso del software Winplot, un cuaderno de trabajo y se seleccionaron tópicos de lectura. Para determinar si existe una relación lineal entre el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades y sus resultados de aprendizaje se realizó una análisis de correlación.*

Los resultados señalan que el empleo de diferentes registros de representación semiótica fueron un factor muy importante en al aprendizaje de los participantes.

Palabras clave: función exponencial y logarítmica, registros de representación semiótica

Desarrollo

La enseñanza de las matemáticas que prevalece en la Universidad Autónoma de Nayarit consiste en exposición, por parte de profesores, de procedimientos algoritmo-algebraicos para resolver problemas, sin llegar a una comprensión plena de los conceptos matemáticos involucrados por parte de los alumnos. Lo anterior motivó una búsqueda de los métodos efectivos de la enseñanza y el aprendizaje para que los alumnos logren comprender las funciones exponencial y logarítmica y aplicar sus conocimientos en la solución de problemas. En la enseñanza de las funciones suele dársele más peso a los procedimientos analíticos y de algoritmización, dejando de lado argumentos visuales por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. El concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría (Cantoral y Farfán, 1998). La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores.

En este sentido Sandoval y Díaz Barriga, 2002; Duval, 1998 señalan que en una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se estructuran en la interacción entre el sujeto y el objeto-concepto que se forma. Por su parte Pluvinage (1998) afirma que existen tres tipos de objetos en relación con sus diferencias ontológicas: objetos físicos, culturales y matemáticos. El triángulo *significante-significado-referente* sólo es relevante para los objetos físicos, los demás objetos necesitan otros esquemas semánticos. Los objetos matemáticos son aquellos donde ningún objeto real se puede considerar como un representante perfecto. Se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes (lenguaje natural, algebraico-simbólico, gráfico-geométrico, numérico, etc.) para tener una idea de dicho objeto. Por lo anterior resultó trascendente el diseño y aplicación de una propuesta didáctica para el aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica.

El experimento se diseñó para nueve sesiones, tal como se describen a continuación.

Sesión 1. Practicas con Winplot en la construcción de las graficas de funciones. El objetivo fue introducir a los alumnos al manejo del programa. Ejemplo

Grafica en winplot $\log_3 x$, *destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de diálogos para cambiar los intervalos.*

Sesión 2. Actividad 1. Breve Historia de las funciones exponencial y logarítmica y sus aplicaciones en la ciencia. La intención de ésta sesión fue motivar y despertar el interés del estudiante para el aprendizaje de las funciones.

Buscar en la red libros que muestren las diferentes aplicaciones de las funciones y exponer sus resultados ante el grupo.

Sesión 3. Actividad 2. Función exponencial y sus propiedades. El objetivo, dar conocer la función y sus propiedades (la forma analítica grafica y verbal).

Determina y describe en forma analítica, verbal y gráfica el dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes de coordenadas de la función:

$m = y \cdot h$, ***b)*** $z = y * y$, *si* $y = 2^x$ *y* $h = 2^{2x}$

Sesión 4. Actividad 3. Traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbal de la función exponencial y sus propiedades. El propósito analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones exponenciales y pasar con facilidad de una representación a otra.

Resuelve en forma analítica y verbal intersecciones, dominio, rango, carácter de crecimiento la función $y = 3^{2x}$. *¿De que otra forma se puede representar?*

Sesión 5. Actividad 4. Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, grafico y verbal). Al finalizar la actividad los alumnos deberán definir y graficar la función logarítmica a partir de su formula.

Sean las funciones $y = \log_5 x,\ \mathrm{y} = \log_6 x$.

Resuelve analíticamente comprueba graficando.

¿En que punto se cortan ambas funciones? ¿En que intervalo del dominio se encuentra una función por encima de la otra. Y por debajo en que zona?

Sesión 6. Actividad 5. Traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbal de la función logarítmica y sus propiedades.

¿Cual es la inversa de $y = \log_4 x$ *?, expresa en forma verbal y gráficamente.*

Sesión 7 y 8. Actividad 6 y 7. Solución analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

La investigación se llevó a cabo de manera pre-experimental y transversal con un grupo del tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de la UAN en el curso Cálculo Diferencial, siendo la variable independiente *el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades con diferentes registros de representación semiótica* y *sus resultados de aprendizaje* la variable dependiente. Para determinar la existencia entre ambas se examinó en términos del coeficiente de correlación. De esta manera, la hipótesis nula se plantea bajo el criterio de que el coeficiente de correlación de la población r, es igual a cero y la hipótesis alternativa, el coeficiente de correlación de las variables es diferente de cero se utilizo la prueba *t* Student, la cual sigue una distribución t con grados de libertad, donde *r* es el coeficiente de correlación de la muestra y *n* el número de observaciones (datos). Se considero un nivel de significativo del 5%.

La recopilación de los datos del experimento se realizó mediante la observación directa del desempeño de los estudiantes en las actividades en el aula (variable dependiente). En relación a la variable dependiente, la recolección de los datos se realizó mediante un examen final, que estuvo constituido por veinticinco ítems, se califico en una escala del 1 al 100, cada ítems tenía un valor de 4 puntos.

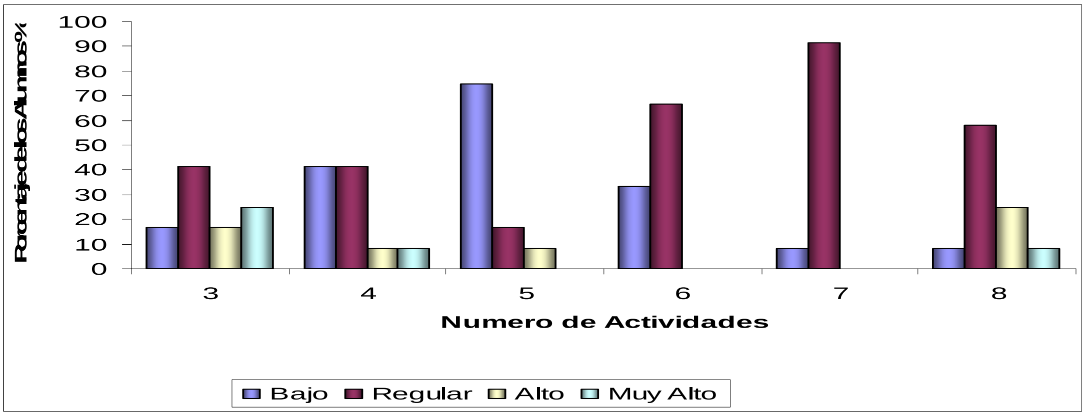
Derivado de la propuesta experimental, se observó que durante la *Sesión 1.* Los alumnos realizaron sin problema la actividad; con respecto a la *Sesión 2.* Los alumnos no presentaron problemas aplicados a la función logaritmo, algunos argumentaron que no hallaron aplicaciones y otros que no las entendieron. Las preguntas de los alumnos estuvieron enfocadas en la construcción de la función logaritmo algunas de ellas fueron ¿como sacar las escalas de demonio y rango si las grafico en papel?, ¿Por qué en los problema de aplicación la expresión algebraica viene dada?, ¿por que no se genera con un problema? En la *Sesión 3 y 4* los estudiantes pretendían utilizar el programa winplot para graficar, argumentando que les era más fácil resolver el problema observando la grafica. No obstante fue necesario limitar el uso del software pues en la parte de a objetivo de las sesiones era que trabajaran solo en forma analítica; la *Sesión 5* los educandos se mostraron fuera de contexto dado que no había realizado la actividad extractase, para la *Sesión 6* los jóvenes utilizaron los conocimientos de las sesiones anteriores para resolver ejercicios de análisis de la función logaritmo, aunque los alumnos no tenían ningún conocimiento de logaritmos la representación más utilizada por ellos fue la analítica. La sesión se prolongo a una hora más de la programada. Las sesiones 7, 8 y 9 se realizaron sin complicaciones aparentes.

Análisis de datos y recomendaciones

De acuerdo con la información obtenida, se organizó de tal manera que la siguiente figura expresa una comparación entre los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos a través del cuaderno de trabajo durante las sesiones 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

En el histograma se pude observar que en la actividad 3 el nivel de aprendizaje es regular. En las actividades 4 y 5 baja el nivel de aprendizaje y vuelve a subir a partir de la actividad seis.

Figura 1. Histograma de los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos.



Niveles de aprendizaje: Bajo < 60 – Regular 60 a 79 – Alto 80 a 89 - Muy alto 90 a 100

El análisis de las respuestas dadas por los alumnos al examen final permitió describir el resultado final de aprendizaje. Para llevar a cabo el análisis las preguntas se agruparon por ítems de la siguiente forma: definición, operación, representación analítica – gráfica; ejercicio de análisis de las funciones exponenciales y logarítmicas y representación gráfica – analítica, analítica gráfica de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Tabla 1. Registro de los datos de evaluación de la posprueba.

Alumnos / **Categorías**	**I**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1. La existencia del valor igual a cero de la función exponencial	4	4	4	4	4	4	0	4	4	0	0	4
2. Rango de la función exponencial	4	4	4	4	0	4	0	4	4	4	0	0
3. Dominio de la función exponencial.	4	4	4	4	4	4	0	4	4	4	0	4
4. La Intersección de la gráfica de la función exponencial con el eje *Oy*.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4
5. Valor de la función exponencial para x =1.	4	4	4	4	4	4	4	0	4	0	0	0
6. Carácter de crecimiento de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

7. Multiplicación de funciones exponenciales.	4	4	0	4	0	4	0	4	4	4	4	4
8. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica.	4	4	0	4	4	4	0	4	4	0	0	4
9. Puntos nulos de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4
10. El dominio de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	0
11. El rango de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4	4	0
12. La gráfica de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4	4	4
13. El producto de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
14. La identificación de las gráficas de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4
15. Determinación de una función exponencial por su valor dado.	0	0	4	0	0	4	4	4	4	4	4	4
16. La expresión analítica de la función logarítmica dada en forma gráfica.	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	4	4
17. Determinación de los valores de una función logarítmica dada en la forma gráfica.	0	4	4	0	0	4	4	4	4	4	0	0
18. Determinación de los valores de una función logarítmica dada en la forma gráfica.	0	4	4	0	0	4	4	4	4	4	0	0
19. Bosquejo de las graficas de las funciones logarítmicas.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
20. Punto de intersección de las gráficas de las funciones logarítmicas.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
21. Comparación de las gráficas de las funciones logarítmicas.	0	0	4	4	4	0	4	0	0	4	4	4
22. Determinación de una función logarítmica por su valor dado.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

23. Expresión analítica de una ecuación representada en la forma grafica.	4	4	4	4	0	4	0	0	0	0	0	4
24. Solución analítica de la ecuación logarítmica.	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	4
25. Solución gráfica de la ecuación logarítmica.	4	4	4	4	0	4	0	0	0	0	0	4
Puntaje total por la actividad	84	92	92	84	68	88	64	72	72	76	60	76

Se observa que en el conjunto de ítems, definición y propiedades, la mitad de los alumnos dieron respuestas correctas. El rango y el valor de $x = 1$ de la función exponencial fueron los errores comunes en esta parte del examen. En el tercer grupo de ítems definición y propiedades de la función logarítmica, el 67% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas o no contestaron, los errores que se observaron fueron el dominio de la función. Hubo confusión en los dominios y rangos de las funciones exponencial y logarítmica.

En las representaciones analíticas – gráficas de la funciones exponencial y logarítmica el 91% de los alumnos dieron respuestas correctas. En los ejercicios de análisis de la función exponencial y logarítmica, el 66% y el 58% respectivamente de alumnos contestaron correctamente. Los errores más comunes fue la conversión de función logarítmica a función exponencial.

En los ítems donde se evalúan la ecuación exponencial representación gráfica-analítica y ecuación logarítmica representación analítica –gráfica, la mitad de los estudiantes dieron respuestas correctas, la otra mitad procedió a resolver como una función exponencial o logarítmica según fuera el caso, es decir, las respuestas que deberían ser ecuaciones las daban como funciones.

De igual manera se aplicó una encuesta de opinión que fué de 12 preguntas que correpondieron a las siguientes categorias de análisis: uso de Winplot ítem del 1 al 3; lecturas ítem del 4 al 6; actividades ítem del 7 al 10 y apoyo del investigador e infraestructura 11 y 12 ítem; de donde se tiene que la mayoría de las respuestas de opinión sobre el uso de Winplot como apoyo para graficar y analizar los problemas correspondientes se agrupan en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que el uso de la computadora fue favorable para el aprendizaje y para realizar las actividades.

La información se sistematizó en la siguiente tabla.

Tabla 2.Datos sobre las respuestas de los alumnos al cuestionario.

Alumnos / **Preguntas**	**l**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
¿Consideras que el uso del programa Winplot favoreció tu aprendizaje?	4	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	3
¿Consideras que el uso del programa Winplot mejoró tu participación en clase?	4	4	5	4	3	4	4	4	5	3	3	4
¿Te agradó usar el programa Winplot?	4	4	5	3	5	4	4	4	5	5	4	3
¿Consideras que las lecturas favorecieron tu aprendizaje?	5	5	3	3	4	5	4	4	5	4	5	4
¿Te agradó leer las lecturas?	3	3	3	2	3	4	4	3	5	3	5	2
¿Consideras que las lecturas mejoraron tu participación en clase?	3	3	2	3	3	4	4	3	5	4	5	3
¿Consideras que el haber realizado las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica favoreció tu aprendizaje?	4	4	4	4	4	5	4	4	5	4	5	5
¿Consideras que las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica mejoraron tu participación en clase?	4	4	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5
¿Te agradó realizar las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica?	3	3	4	4	4	5	4	5	5	4	5	4
¿El tiempo destinado para cada actividad fue adecuado?	3	3	4	1	3	4	5	3	4	5	4	4

¿El apoyo del investigador durante las actividades fue útil?	5	5	3	2	3	5	4	3	5	4	3	4
¿La infraestructura del laboratorio de cómputo, como apoyo para el desarrollo del curso fue adecuado?	3	3	5	2	4	4	5	3	5	4	3	5
Puntaje total por la actividad	15	13	14	18	15	18	11	17	10	14	6	13

Las respuestas de los alumnos a la pregunta si las lecturas favorecieron su aprendizaje el 33 % consideró mucho y el 42% bastante. Sin embargo, las respuestas sobre si hubo agrado en las lecturas y si mejoro su participación en clase se agrupan en bastante y regular.

Las opiniones sobre las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica la mayoría de las respuestas se agrupa en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que la opinión de la mayoría de los estudiantes fue favorable ya que mejoró el interés por el tema y favoreció el aprendizaje. En relación al tiempo destinado por actividad, apoyo del investigador e infraestructura las categorías se agruparon en mucho bastante y regular.

Conclusiones

Los resultados obtenidos con el coeficiente de correlación y la prueba *t* reflejaron que las actividades de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica fueron un factor muy importante en al aprendizaje de los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la UAN. Se rechazó la hipótesis nula y se aceptó la hipótesis alternativa.

Con la propuesta se pone de manifestó como el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje, esto puede deberse a diferentes razones, dos de ellas son: que permite a los alumnos se formen una imagen conceptual, pudiendo escoger la representación más adecuada para cada problema y que compensa las limitaciones de unas representaciones con otras.

De la encuesta de opinión se puede concluir que las lecturas, los materiales y las actividades motivaron a los estudiantes y mejoró su interés por aprender. El uso del software Winplot fue de gran ayuda en el aprendizaje de los alumnos pues beneficio la parte visual de las funciones. También pudo observarse que el docente influye de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes cuando prepara materiales adecuados, evalúa cada actividad y realiza con sus alumnos un análisis de los errores.

Las actividades realizadas incorporan nuevos procedimientos de análisis en temas de matemáticas. Procedimientos que no sólo son útiles para la resolución de las funciones exponenciales y logarítmicas sino también para abordar otros temas. El método gráfico modifica los procesos de pensamiento de los alumnos. Éstos pasan de realizar un proceso que en su mayoría es mecánico (cuando llegan a la solución por métodos algebraicos), a un proceso de observación y deducción.

Los alumnos deben interpretar la información dada por el gráfico y conectarla a sus conocimientos previos de modo que puedan expresarla en términos algebraicos o en lenguaje natural para justificar las preguntas que se le formulan. Para lo cual necesitan, comprender lo que representan los signos o símbolos matemáticos y su relación con el objeto matemático representado. Enfrentar a los alumnos con situaciones sencillas como las aquí propuestas, les hará más fácil el camino para coordinar, sin contradicciones, diferentes registros de representación.

Las dificultades detectadas son: manejo pobre de conceptos y procedimientos de aritmética y álgebra básica, escaso uso de diferentes sistemas de representación semiótica para resolver problemas de las funciones exponencial y logarítmica y para el aprendizaje conceptual de las funciones. También se detectó la dificultad que tienen para coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en otro registro.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42,14(3)*, 854-856.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sandoval, C.I. y Díaz Barriga, A.E. (2002). Ecuaciones diferenciales de 1er orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica. *Memorias de la XII semana regional de investigación y docencia en matemática* (pp. 189-196). México: Universidad de Sonora.

Pozo, J. I. (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Sexta edición. España: Ediciones Morata.

INTERACCIONES EN EL AULA BAJO UN MARCO COLABORATIVO; LA SIMULACIÓN DE UN FENÓMENO

María Eulalia Valle Zequeida, Magdalena Rivera Abrajan, Jaime Arrieta Vera
Unidad Académica de Matemáticas, Unidad Autónoma de Guerrero México
mevzy@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Básico

Resumen. *En el presente trabajo se reportan algunos de los resultados obtenidos hasta el momento en nuestra investigación, la cual esta insertada en la línea de investigación de la construcción social del conocimiento; la problemática que abordamos es la necesidad de lograr un trabajo colaborativo en la clase de matemáticas en la educación básica, teniendo como base un diseño de aprendizaje basado en la simulación del crecimiento de un robot. Se llevó a cabo una exploración del diseño, con estudiantes de quinto grado de primaria, donde encontramos ciertas características del proceso del trabajo en equipos, las cuales podrán ayudarnos a formular las bases del trabajo colaborativo en la clase de matemáticas. Centramos principalmente nuestra atención en las interacciones, la argumentación y la construcción de consensos durante el proceso, como herramienta principal en la construcción de conocimiento matemático en el aula.*

Palabras clave: trabajo colaborativo, interacciones, argumentos y consensos

Introducción

Las nuevas reformas educativas basadas en un modelo educativo por competencias enfatiza la construcción y el desarrollo de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que permita a los estudiantes insertarse adecuadamente en la estructura laboral y adaptarse a los cambios y reclamos sociales (SEP, 1993).

Es por eso que el profesor se ve en la necesidad de implementar propuestas educativas y técnicas de enseñanza innovadoras para el éxito de esta empresa, que permita la existencia de interacciones entre los elementos actuantes (alumnos, objeto de estudio y profesor) permitiendo mediante estas interacciones que los alumnos construyan sus conocimientos.

La perspectiva teórica que asumimos, la Socioepistemología concede esencial importancia, en la construcción del conocimiento, a los contextos sociales.

Desde esta perspectiva las cuestiones cognitivas se reflejan en los actos, y pueden ser estudiadas en el discurso de los actores. La importancia de las interacciones que existen en el discurso, viene dadas, por los consensos a los que se llegan, las convenciones que se crean, así como los argumentos que presentan los actores para convencer y hacer respetar su posición acerca de cierto conocimiento (Rivera, 2005).

Es por ello que en este proyecto, nos interesamos en el papel fundamental de las interacciones y la construcción de argumentos y herramientas por parte de los actores.

El trabajo colaborativo se fundamenta en varias disciplinas científicas, sin embargo, tomando en cuenta nuestra perspectiva teórica nos centraremos en las contribuciones al aprendizaje colaborativo de Vigotsky, El alumno debe ser visto como un ente social, protagonista y producto de las múltiples interacciones sociales en que se ve involucrado a lo largo de su vida escolar y extraescolar.

Los conocimientos, habilidades, etc., que desde el principio fueron transmitidos y exorregulados (regulados por otros); después el educando los interioriza y es capaz de hacer uso de ellos de manera autorregulada. En este sentido el papel de la interacción social con los otros (maestro, padres, niños mayores, iguales, etc.) es considerado de importancia fundamental para el desarrollo cognoscitivo y sociocultural. (Vygotsky citado en Ferreiro, 2006)

Problemática

Una de las técnicas de enseñanza que se realizan en el aula es el trabajo en equipos, con esto se pretende que los participantes interactúen entre ellos con el objeto de estudio y con el profesor, que respeten sus roles y funciones para lograr objetivos comunes y que además durante el proceso todos los miembros del equipo logren de forma homogénea construir sus conocimientos.

Sin embargo, al no tener un precedente de las características que deben cumplir los grupos colaborativos, en la mayoría de los casos, no se da realmente una colaboración entre ellos y por consecuencia los objetivos de la actividad no se cumplen, volviéndose al final un trabajo individual, generando un aprendizaje individualista o tradicional sin que el alumno logre validar o consensar su conocimiento. Así nuestra problemática es la que surge de la necesidad de lograr un ambiente colaborativo en la clase de matemáticas en la educación básica, para ello se adecuó un diseño de aprendizaje basado en la simulación del crecimiento de un robot (Moreno 2004).

Nuestra hipótesis es que mediante la construcción de un ambiente colaborativo en la clase de matemáticas en el nivel básico, los alumnos mediante diversas interacciones construyan socialmente su conocimiento.

En este sentido, nuestra propuesta es caracterizar el proceso que llevan los actores en la clase de matemáticas del nivel básico hasta lograr un ambiente colaborativo como tal.

Observaremos y analizaremos el proceso que siguen los estudiantes hasta logar un trabajo colaborativo, tomando como unidad de análisis *trabajo colaborativo-interacciones en el aula-argumentación.*

Marco Teórico

Para los fines de la investigación, es importante dejar en claro lo que aceptaremos como “colaborativo”. En Fiorentini (2004) se hace una clara diferencia de lo que es “colaboración” y “cooperación”, en la *cooperación*, unos ayudan a los otros (co-operan), ejecutando tareas cuyas finalidades generalmente no resultan de la negociación conjunta, mientras que en la *colaboración*, todos trabajan conjuntamente (co-laboran) y se apoyan mutuamente, tratando de alcanzar objetivos comunes negociados por el colectivo del grupo. Así mismo, en Ferreiro (2006) menciona que es el aprendizaje cooperativo el medio para lograr la calidad de la educación, la existencia en la sociedad, vivir y compartir con otros, es fuente y condición de desarrollo de los procesos psicológicos superiores, distintivos y comunes al hombre.

Como podemos darnos cuenta estos dos autores crean una disyuntiva, “colaborativo” o “cooperativo”, sin embargo existe una analogía en cuanto a los principios, procesos y objetivos, que deben de cumplir los respectivos ambientes.

En esta investigación aceptamos el término “colaborativo” y los siguientes principios, para el desarrollo del diseño:

- Los grupos colaborativos deben de estar conformados por elementos que participen de manera voluntaria y espontánea, afines, heterogéneos, que incluyan alumnos de ambos sexos, procedencia social, niveles de habilidad y capacidades físicas.

- El profesor deberá de fungir como mediador: el maestro aprende mientras enseña y el alumno enseña mientras aprende.
- Que los elementos de este conozcan y valoren su dependencia mutua con los demás, por medio de tareas que promuevan una interdependencia positiva, pedirse cuentas individual y grupalmente, emplear material de trabajo de manera compartida para la creación de una meta grupal.

Dentro de un ambiente colaborativo se propician interacciones entre los actuantes (alumno, profesor, objeto), se da la intersubjetividad planteada por Vigotsky como condición necesaria para llevar dentro lo que esta “afuera” es decir aprender (Ferreiro 2006).

Es en estas interacciones es donde se generan argumentos que los alumnos utilizan como una herramienta para “convencer” al profesor, a sus compañeros e incluso a ellos mismos de manera reflexiva en torno un tema, de esta manera se conforma en discurso escolar, en (Edwards y Potter citado en Candela, 1999) menciona que según el habla se le considera como llevar a cabo una construcción contextual de las concepciones. Por medio de estos argumentos es que los alumnos pueden llegar a consensos que llevan a que en el proceso construyan conocimientos, en (Candela 1999) nos dice que es este proceso de comunicación sociocultural en el que se construyen significados, compartidos así como versiones paralelas y alternativas del contenido.

Diseño de Aprendizaje

El diseño de aprendizaje esta basado en la simulación de la evolución de un fenómeno, particularmente de la evolución del crecimiento de un robot “Centi”, este diseño se adapto del que presenta (Moreno 2005). Se realizó una exploración con alumnos de quinto grado de primaria de la escuela pública “Primer Congreso de Anahuac”, la puesta en escena se llevo a cabo el día 15 de junio del 2008, se recabó evidencia impresa y audiovisual del desarrollo de la actividad.

En este, se plantea un robot formado por cierta cantidad inicial de cuadritos, cada parte de su cuerpo crecerá ***n*** cuadritos cada ***m*** días, donde ***n y m*** serán obtenidas por sorteo, el diseño consta de tres actividades las cuales van aumentando su grado de complejidad.

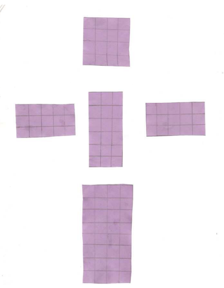
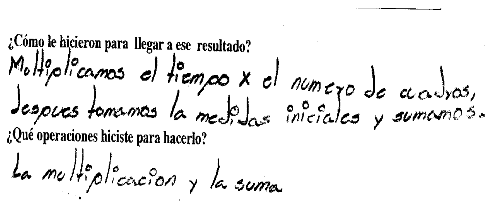
En este diseño se busca que los alumnos observando las relaciones que hay en el crecimiento del robot respecto al tiempo y cantidad de cuadritos que aumenta, construyan herramientas matemáticas (regla de tres, relaciones, proporcionalidad, etc.)

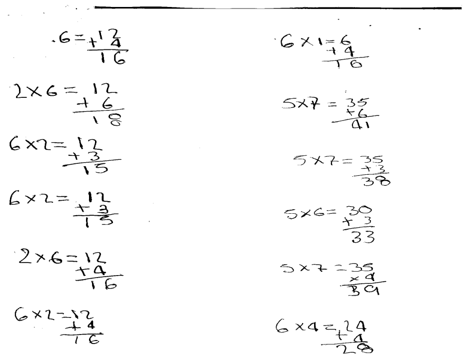
Análisis de resultados

En la exploración del diseño, se recabaron evidencias auditivas y visuales de cómo los actores interactúan en el aula, y por medio de diferentes argumentos llegar a consensos, para construir herramientas matemáticas que contribuyan en la solución del problema.

En la siguiente tabla se trata de caracterizar los resultados:

Aspectos	Trabajo colaborativo	Exploración
Forma de organización	Los elementos básicos para que se de un grupo colaborativo es que • Los elementos sean afines. • Que no haya jerarquía entre ellos • Reparto de Tareas • Que exista respeto	Los alumnos se reunieron de manera espontánea, ya que anteriormente habían trabajado juntos, sin embargo, desde el inicio uno de los tomó las riendas del grupo. En las tareas poco a poco se fueron acomodando en sus obligaciones , el líder tomo las hojas de actividades a su cargo, y los demás se quedaron con los recortes para la construcción del robot, y las operaciones, otros solo comentaban algunas cosas respecto a lo que se tenia que contestar en las tablas de resultados
Interacciones	Las actividades deben de ameritar generar interacciones entre ellos, además de que por las características del grupo se deben de dar de manera	Las interacciones predominaron entre los tres elementos que se deslindaron de los recortes, pero se destaco la opinión del que fungía como líder por sobre de los demás Sin embargo hubo interacciones entre ellos que

	espontánea.	hacían que al final contestaran las preguntas
Argumentación	Los argumentos generados en dichas interacciones pueden ser de manera verbal, impresa o incluso gesticular Con el propósito de convencer a sus demás compañeros y de esta forma poder llegar a consensos entre ellos	Al principio en la Fig. 1 construyeron el robot con cuadritos de papel, de esa manera contestaron la primera pregunta.  **Actividad 1** Supongamos que cada una de sus partes crece 2 cuadritos cada día, ahora Determinaremos cuanto creció en 6 días, Fig. 1 Cuando el grado de complejidad aumento, decidieron que era tedioso hacer el robot y fueron directamente con las operaciones Fig. 2  ¿Cómo le hicieron para llegar a ese resultado? Moltiplicamos el tiempo x el numero de cuadros, despues tomamos la medidas iniciales y sumamos. ¿Qué operaciones hiciste para hacerlo? La multiplicacion y la suma
Consensos	Estos se llegan con la aceptación y convicción de todos sus miembros.	Una de las dificultades fue decidir si utilizarían recortes para armar el robot o se irían directamente a las operaciones, sin embargo llegaron a un acuerdo. Estos fueron planteados por tres elementos del equipo, los otros dos los aceptaron como correctos, esto se vio reflejado por los argumentos.
Herramientas matemáticas construidas en	El propósito de esta actividad era que llegaran a encontrar una relación que	A partir de la segunda actividad optaron por buscar las relaciones por medio de operaciones (suma, multiplicación, división)

la actividad.	había entre el crecimiento de el robot en cuanto a el tiempo y la cantidad de los cuadritos "la regla de tres" sin embargo se les daba la opción de que en un principio lo hicieran por medio de recortes con papel y de esa manera poder observar el crecimiento	Quizá no llegaron a concretar de que se trataba de la regla de tres , pero en esencia siguieron los pasos En la Fig. 3  se muestra algunas operaciones que plantearon para resolver la actividad 1 Las demás actividades las hicieron con calculadora.
Conclusión de la actividad		Conforme se iba avanzando en la actividad , los alumnos participaban un poco mas, refutando algunas de las opiniones que el líder exponía

Conclusiones

Como se mencionó al principio es una investigación aun en proceso, y si bien hasta este momento solo hemos hecho una exploración del diseño de aprendizaje, este nos dio algunos aportes que nos servirán para replantearlo y ponerlo posteriormente en condiciones similares e incluso distintas, los principios que encontramos son:

El maestro aprende mientras enseña, el rol que debe desempeñar es de mediador, se debe de tomar en cuenta que todos los integrantes del equipo son capaces de desarrollar tareas de liderazgo, además de que todos los integrantes del grupo deben tener las mismas posibilidades de acceso a materiales y recursos para llevar a cabo con eficacia el trabajo individual.

La formación de los grupos colaborativos debe de ser formado por el profesor en el inicio, basado en la heterogeneidad de conocimientos, habilidades, valores, modos de actuar y pensar previos, así como habilidades sociales y conductuales, género, edad, etc.

Los objetivos del grupo dependen del trabajo de coordinación que realicen sus integrantes, donde cada miembro se considera responsable no solo de su propio aprendizaje, sino también del aprendizaje de los demás miembros.

En esta exploración observamos que, los alumnos tomaron una postura tradicional, y predominó la opinión del líder del equipo, sin embargo poco a poco, los argumentos de los demás elementos fueron tomando fuerza, de tal forma que se generó discusiones y argumentaciones hasta llegar al consenso.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula.* México: Editorial: Paidós

Ferreiro, R. (2006). *El ABC del aprendizaje cooperativo*: México: Editorial Trillas

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar prácticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente. En M. Borba y M. Godoy (Eds), *Pesquisa Quialitativa em Educacao Matematica* (pp. 47-97). Rio Claro, Brasil: Coleçao “Tendências em Educação Matematica”

Moreno, E. (2004). Simulación de la Evolución de Fenómenos: Una Práctica Social Bajo un Marco Cooperativo. En J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educati*va, (pp.583-588) Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Rivera, M. (2005). *La algoritmia; una práctica en las comunidades de ingenieros es sistemas computacionales*, Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero.

SEP (1993). *Planes y programas de estudio de educación básica*. México: SEP.

ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos
Universidad Joseph Fourier (Francia) México
ITESM Campus Monterrey
ruthrdz@itesm.mx
Campo de investigación: Modelación Matemática Nivel: Medio

Resumen. *Este artículo trata de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en los cursos de física y de matemáticas. En el 2002, un nuevo currículo para el bachillerato en Francia acentuó el papel de las matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias. Una descripción del proceso de modelación es presentada, así como el análisis de los manuales comúnmente usados en estos cursos. Este análisis revela el proceso de transposición del "proceso de modelación" practicado por los expertos y el proceso que es adaptado finalmente a la escuela. La implementación de una situación experimental con tareas no habituales permite la identificación de la influencia de las praxeologías en los procesos de los estudiantes. La vinculación de algunas dificultades presentes al abordar la situación con la transposición del proceso de modelación también es discutida en este artículo.*

Palabras clave: modelación, física, ecuación diferencial, praxeología

Introducción

Hoy día, la sociedad tiene nuevas expectativas sobre las habilidades de los jóvenes. En particular, algunos estudios internacionales han establecido la importancia del desarrollo de habilidades individuales para modelar y solucionar problemas con contextos de la vida real (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2007). En el 2002, los nuevos programas de estudio de preparatoria para las clases de Física y Matemáticas en Francia acentuaron el papel de las Matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias.

Este trabajo tiene un propósito doble: Por un lado estudiar cómo “vive" el proceso de modelación en el sistema escolar y por otro identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real.

“Modelando” la modelación matemática

El primer paso es establecer una descripción del proceso de modelación que será nuestra referencia en este trabajo. Esta descripción fue construida considerando las definiciones usadas por Blum y Niss (1991) y Henry (2001). La descripción final del proceso de modelación considerada para este trabajo está representada en la Figura 1 (para más detalles ver Rodríguez, 2007):

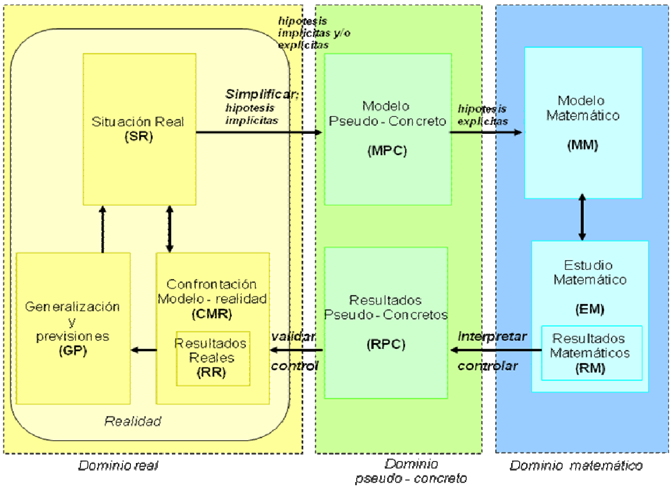


Figura 1: Descripción del proceso del modelación de referencia

En base a la descripción del proceso de "modelación matemática" establecida, fueron analizados algunos manuales comúnmente usados en clases de Física y de Matemáticas. Los resultados de este análisis permitieron caracterizar el proceso de modelación propuesto a "ser enseñado" en el último año de bachillerato.

La transposición didáctica

Este estudio usa la noción de *praxeología* como un instrumento útil para analizar libros de texto. Esta noción fue tomada de la Teoría Antropológica de Chevallard. Una praxeología tiene cuatro componentes (Artaud, 2007): una clase de tipo de tareas T a la que el alumno es usualmente enfrentado; una técnica τ , la cual establece una manera de realizar determinada clase de tareas; una tecnología θ, para cada técnica, la cual establece "el discurso" que justifica y explica la técnica y una teoría Θ, que es "el discurso" que justifica y explica la tecnología. En una primera revisión de los programas de estudio así como de los manuales a analizar, la noción de “Ecuación Diferencial” (ED) fue escogida como nuestra herramienta para modelar con el fin de poder realizar nuestro análisis.

El primer resultado: El análisis de los libros

El análisis de tres libros de texto comúnmente usados en clase de matemáticas permitió la identificación de los tipos de tareas siguientes: establecer una ecuación diferencial que modela una situación real en términos pseudo-concretos (T_{ED}), encontrar una solución general de la ED

(T_{SG}), encontrar una solución particular usando una condición inicial (T_{SP}) y responder una pregunta, formulada en términos pseudo-concretos, en base a los resultados matemáticos obtenidos (T_{RP}).

La tarea TED “establecer una ED para modelar una situación real” raras veces es solicitada a los estudiantes ya que los ejercicios proporcionan la mayoría de las veces el modelo. En algunas ocasiones esta tarea se reduce a “justificar” que un modelo dado por el enunciado es efectivamente el modelo correcto. También se observó que en clase de Matemáticas, "resolver" una ecuación diferencial significa hacer uso un teorema antes demostrado por el profesor en clase para proponer una solución a la ED. Como la escritura del modelo matemático es una etapa importante en el proceso de modelación y este primer análisis pone en evidencia la ausencia de este tipo de tareas en la clase de Matemáticas, entonces el dominio del estudio se extendió a la clase de Física. Tres manuales de la clase de Física fueron analizados, en particular el capítulo "Circuito Resistencia-Capacitor (RC)" de manera análoga a los libros de texto de Matemáticas. Algunos tipos de tareas identificadas en los libros de texto de la clase de Física son: representar un diagrama de circuito eléctrico (usualmente RC), (T_{CE}); establecer una ecuación diferencial que modele el voltaje en el capacitor UC(t) presente en el circuito (T_{ED}); encontrar una solución particular (verificando que una función proporcionada en el enunciado del ejercicio) es la solución de la ecuación diferencial (T_{SP}), determinar la corriente eléctrica i(t) en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor $U_C(t)$ (TEC).

Aunque el proceso de modelación es llevado a cabo de manera más amplia en la clase de Física que en la clase de Matemáticas, algunos hechos importantes fueron observados: el tipo de tarea T_{CE} "Representar un esquema de circuito eléctrico" aparece en los libros de texto, ésta no es una tarea comúnmente asignada a los estudiantes. La tarea TED "Establecer un modelo matemático (ED)" es usualmente asignada a los estudiantes pero los pasos para hacerlo son proporcionados en el ejercicio. En general se observa que en ambas clases existen pocos ejercicios para confrontar al estudiante a la transición entre las etapas Resultados Pseudo-Concretos a la Confrontación Modelo-Realidad. Henry (2001) establece que ésta es una transición importante a ser considerada desde un punto de vista didáctico si se desea enseñar la modelación en clase. Lo anterior nos ha conducido al diseño de una situación experimental para lograr enfrentar a los alumnos a diferentes transiciones entre etapas normalmente ausentes en el ámbito escolar.

Una breve descripción de la situación experimental

El segundo objetivo de este trabajo es identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real construido con base en los resultados del análisis de libros. Tres características de diseño de esta situación experimental son: enfrentar a los estudiantes a la transición de Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la construcción del Modelo Físico; no proporcionar ninguna guía a los estudiantes en cuanto la escritura del Modelo Matemático; enfrentar a los estudiantes a la transición entre la etapa Resultados Pseudo-Concretos $\longrightarrow$ Confrontación Modelo-Realidad.

En la situación experimental diseñada se pretende enfrentar a los estudiantes a modelar el funcionamiento de un desfibrilador cardíaco. Este dispositivo electrónico aplica un choque eléctrico a un ser humano para restaurar el ritmo de su corazón. Una breve descripción sobre el funcionamiento de este dispositivo es incluida en el texto introductorio de la situación en términos pseudo-concretos y físicos (eléctricos). A continuación, analizaremos las primeras dos de las cinco preguntas que conforman la situación experimental.

Instrucción de la Pregunta A:

Tenemos que modelar el desfibrilador como un circuito eléctrico (similar a aquellos estudiados en clase). Dibuje un circuito eléctrico y realice el diagrama justificando su elección

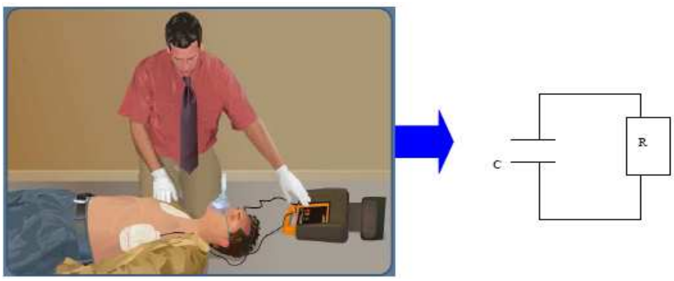


Figura 2: Respuesta posible a la pregunta A

Una respuesta posible (y correcta) a esta pregunta es el diagrama de un circuito RC como el mostrado en la Figura III, donde la resistencia R representa al cuerpo del paciente mientras que el capacitor C al dispositivo desfibrilador.

Instrucción de la Pregunta B

Establezca un modelo (una ecuación diferencial) para la evolución del voltaje en el desfibrilador. Justifique las leyes empleadas para el establecimiento del modelo.

Una respuesta posible (y correcta) para esta pregunta es la ED: $\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{RC}U_C=0$.

Características de la experimentación

La experimentación fue realizada con 25 estudiantes de último año de preparatoria en tres diferentes instituciones francesas. La experimentación fue llevada a cabo después de la enseñanza del tema Circuitos Eléctricos. Se solicitó a los estudiantes trabajar por pareja la resolución de la situación durante aproximadamente una hora.

Análisis de la Pregunta A

Una regularidad encontrada en las respuestas a la pregunta A es la dificultad de los estudiantes en proponer un diagrama con todos los elementos de un circuito eléctrico como resistencias y capacitores. A este respecto identificamos la aparición de algunas configuraciones que denominamos "híbridas" ya que mezclan elementos de naturaleza pseudo-concreta con elementos de naturaleza puramente física. La dificultad de insertar una resistencia como parte del circuito eléctrico para remplazar al paciente aparece en la mayor parte de las respuestas. A pesar de que la palabra "resistencia" aparece en el texto de la actividad, no hace ninguna referencia específica a un término físico. Este hecho puede ser observado en las respuestas proporcionadas por dos parejas de estudiantes:

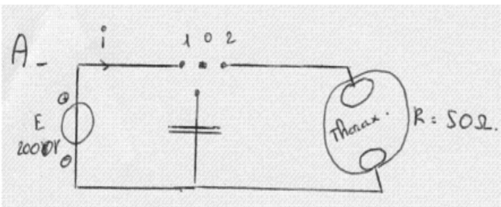


Figura 3

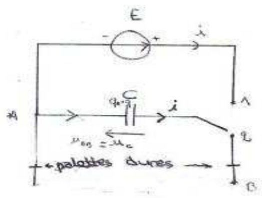


Figura 4

En la figura 3 el tórax del paciente es representado por un círculo grande y los electrodos por círculos más pequeños. Incluso si la leyenda "R = 50 Ω " se refiere a una resistencia, es notable la dificultad para los estudiantes de usar la representación convencional para la resistencia (rectángulo). En la figura 4, los electrodos son representados por los estudiantes ("palettes dures" en francés) pero en este caso, los estudiantes no hacen ninguna referencia a la posible presencia de una resistencia en el circuito. Creemos que los estudiantes no pueden concebir al paciente como una parte del circuito ya que el paciente como ser humano no tiene para ellos ninguna naturaleza eléctrica y por lo tanto no puede representarse en términos eléctricos.

Algunos otros estudiantes propusieron un esquema de modelo físico como el mostrado en la siguiente figura 5. En esta figura, el diagrama de los estudiantes podemos ubicarlo en el Dominio Pseudo-Concreto ya que los elementos mostrados en el diagrama no corresponden a las representaciones de elementos físicos normalmente presentes en un circuito eléctrico. Esta respuesta nos cuestiona sobre la comprensión de los estudiantes de la pregunta planteada. Esta dificultad puede ser ubicada en la transición entre la Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la escritura del Modelo Físico.

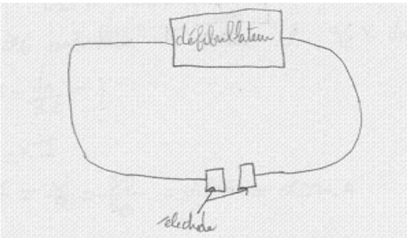


Figura 5

Respecto a las praxeologías observadas en los libros de textos, ninguna técnica fue identificada para realizar este tipo de tareas; sin embargo esta transición Situación Real/Modelo Pseudo-concreto a Modelo Físico parece constituir un paso importante desde el punto de vista de la modelación.

Análisis de la Pregunta B

Para esta pregunta, varias dificultades fueron identificadas al momento de proponer una ecuación diferencial para modelar la variación del voltaje en el capacitor presente en el circuito. Algunos estudiantes olvidaron las leyes de la Física para hacer esto así como la manera de establecer una relación entre las magnitudes implicadas. Sin embargo, también se observó el uso de leyes o principios físicos enunciados de manera incorrecta. Algunos estudiantes establecen una ED para modelar la carga q(t) en el capacitor, esto es: $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=0$. Es importante mencionar lo anterior ya que esta manera de proceder no fue observada como técnica existente en los manuales analizados; sin embargo parece "natural" para los estudiantes el establecer esta ecuación diferencial.

Otra dificultad observada es la elección por estudiar la carga o la descarga del capacitor sobre la resistencia. El interés en este caso debía ser el estudiar la descarga del desfibrilador en el paciente, pero un número importante de estudiantes no parece considerar este hecho. En muchos casos, la pregunta C permite la validación del modelo inicialmente propuesto en B y esto ayuda a los estudiantes a modificar la ecuación diferencial propuesta. Gracias a la tarea de verificar si una función (dada en el ejercicio) es o no solución de la ED, ellos pueden validar la respuesta a la pregunta B y eventualmente corregir el modelo propuesto en B. Esta dificultad evidencia la poca o nula relación para los estudiantes entre los fenómenos físicos estudiados (la situación real descrita) y la modelación propuesta (ecuación diferencial). La realización de los estudiantes de la situación experimental ilustra la importancia de una comprensión adecuada del fenómeno a modelar y del rol del modelo "pseudo-concreto" concebido por los alumnos para el establecimiento de los modelos físico y matemático adecuados para estudiar el fenómeno descrito por la situación.

Conclusión

Los resultados de este estudio coinciden con el trabajo de Chevallard (1991) respecto a la distancia existente entre el proceso de modelación que finalmente se pretende enseñar (saber a enseñar) en los cursos de matemáticas y física en preparatoria y el proceso de modelación de los expertos (saber sabio). La descripción del proceso de modelar propuesta como referencia en este trabajo puede ser modificada con base en algunos aspectos observados en las actividades de los estudiantes. Es recomendable una discusión entre expertos de la comunidad de Matemática Educativa sobre las diferentes concepciones de modelación y elegir aquella que deba ser llevada al ámbito escolar. Esta descripción de modelación puede variar dependiendo del campo científico donde una situación específica esté inmersa. Un hallazgo relevante de este trabajo es el enfatizar la importancia de la construcción de un modelo pseudo-concreto adecuado para establecer el modelo físico y matemático pertinente a la problemática en cuestión. Así mismo, se encuentra absolutamente necesario que esta transición entre etapas sea llevada al ámbito escolar. La riqueza de la retroalimentación de una tarea sobre otra en la situación experimental para desarrollar una solución apropiada a cada pregunta planteada es también un hallazgo que este estudio evidencia. Lo anterior es una característica a tener en cuenta en el diseño de futuras actividades para el aprendizaje de la modelación. Es recomendable el diseño de actividades donde todas las fases del proceso de modelación estén presentes si realmente se pretende que el alumno desarrolle habilidades en este rubro. Así mismo, la necesidad de cursos de capacitación para los profesores de ambas disciplinas respecto a la enseñanza de modelación es un aspecto que se debe considerar a este respecto.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classrooms. *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 371-378). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics 22(1)*, 37-68.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

OCDE (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow´s World Executive Summary 55*. Extraído el 13 de octubre de 2008 desde http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Rodriguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis de Doctorado no publicada, University Joseph Fourier.

DIAGNÓSTICO DEL DESARROLLO DE HABILIDADES DE MODELACIÓN

Jesús A. Mendoza Varela, Josefina M. Cribeiro Díaz, J.C. Ortiz
Universidad Autónoma de Coahuila México
avarelapgr@hotmail.com, j_cribeiro@hotmail.com, jortiz@mail.uadec.mx
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *En el marco de la Maestría de Matemática Educativa de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, el presente trabajo aborda la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en Cinética Química con estudiantes de un grupo regular de cuarto semestre de Ingeniería Química y Licenciatura en Química. Basado en la teoría de resolución de problemas, zona de desarrollo próximo, etapas de actividades mentales y diferentes registros de representación se diseñaron hojas de trabajo para ayudar a los estudiantes con dificultades en el planteamiento y resolución de problemas mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de reacciones químicas de orden primero, segundo y n. Se utilizó Matlab para entender el comportamiento cinético de reacciones de orden "n". Se hizo un análisis cualitativo de las habilidades de los estudiantes para modelar y resolver problemas, también se hizo un análisis cuantitativo expresado en tablas. El 70 % de los estudiantes mostró un avance muy satisfactorio.*

Palabras clave: modelación, solución de problemas, ecuaciones diferenciales

Antecedentes

Hablar de capacidades de modelación y resolución de problemas es tema de creciente interés en Matemática Educativa, desde la instrucción elemental hasta nivel universitario. Pocos estudios se han realizado con el objeto de estudiar las capacidades para resolver problemas en estudiantes de carreras experimentales tal es el caso de Ingeniería Química.

El hecho de que la realidad en las aulas de matemáticas, en la mayoría de las universidades se incline por una enseñanza de carácter normativo, en la que el profesor considera que el estudiante aprende por imitación, siendo un receptor pasivo del discurso del docente, obliga a reflexionar en la necesidad de que el profesor de matemáticas universitario cambie su papel y llegue a plantearse que en una misma clase puede haber estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje, susceptibles de ser motivados si la enseñanza se orientara a sus cualidades específicas de aprendizaje. Se necesita reflexionar, tanto en el ámbito personal como institucional, acerca de la problemática actual de la docencia universitaria.

Si bien es cierto que el estudiante aprende matemáticas principalmente mediante interacciones de objetos y sujetos, vale la pena preguntarse ¿por qué en las escuelas de enseñanza superior cursos tales como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias privilegian el lenguaje operativo y descuidan el aspecto de aplicación social?

La enorme importancia de las Ecuaciones Diferenciales en las matemáticas, y especialmente en sus aplicaciones, se debe principalmente al hecho de que la investigación de muchos problemas de ciencia y tecnología puede reducirse a la modelación y solución de tales ecuaciones**.** En la enseñanza de la Ingeniería Química esta asignatura constituye uno de los cursos más importantes en su formación profesional. Sin embargo, el tratamiento algorítmico de solución de ecuaciones impide a los alumnos visualizar el amplio espectro de aplicaciones principalmente en procesos químicos y cinéticos.

La Cinética Química es un área de la Química que estudia el comportamiento de las reacciones químicas en función del tiempo y la velocidad con que transcurren, analiza los factores que la afectan y trata de comprender la forma en que las reacciones se producen. Por otra parte, la Cinética formal aborda el estudio de las ecuaciones cinéticas desde un punto de vista meramente matemático. Existen diversos métodos para el estudio cinético de un reacción (método de aislamiento, método diferencial, método de velocidades iníciales, método integral y el método de vida fraccionaria. En el presente trabajo se utilizó el método diferencial en el cual se trabaja directamente con ecuaciones diferenciales, de esta forma el estudio del comportamiento de una reacción obliga forzosamente al alumno a hacer uso del manejo de ecuaciones diferenciales a fin de obtener la ecuación particular, el gráfico resultante y encontrar parámetros cinéticos como por ejemplo la velocidad de reacción, la constante de velocidad. De esa forma la Cinética Química puede servir como campo de aplicación en los cursos de Ecuaciones Diferenciales para estudiantes de especialidades de Química.

Problemática

A pesar de la importancia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en Ingeniería Química y de la Cinética Química en la formación profesional de los estudiantes de esta área, la enseñanza de este curso en la facultad de Ciencias Químicas perteneciente a la Universidad Autónoma de Coahuila se invierte el mayor tiempo en hallar la solución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de diferentes métodos, el uso de la transformada de Laplace y de teoremas de convolución, lo cual ocasiona desinterés de los alumnos ya que las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en su formación profesional no son tratadas. Más aun, no existe interés en las clases de matemáticas por desarrollar aptitudes matemáticas tales como independencia en la modelación y resolución de problemas de fenómenos químicos

Considerando que el estudiante aprende matemáticas principalmente mediante la interacción continua que tiene con los objetos y con los otros sujetos, pensamos que aprender matemáticas debe ser un proceso social donde los compañeros se apoyen entre si para dar solución a problemas de su área de estudios a la vez que aumentan sus estructuras metacognitivas. Por lo anteriormente mencionado, el presente trabajo se centra en estudiar las capacidades y habilidades matemáticas de modelación y resolución de problemas de Cinética Química mediante Ecuaciones Diferenciales que presentan los alumnos de Ingeniería Química y de la especialidad de Licenciatura en Química así como identificar los obstáculos que limitan a los estudiantes en desarrollar esas destrezas matemáticas.

Metodología de la investigación

El enfoque de la investigación fue de corte mixto, una parte cualitativa y otra de estudio estadístico respecto a los resultados obtenidos. Se consideraron tres fases: Fase de estudio y diseño, fase experimental y fase de análisis y conclusiones.

Fase de estudio y diseño

En la fase de estudio se seleccionaron los aspectos teóricos de aprendizaje que se iban a utilizar en la investigación. Se consideró trabajar en la ZDP zona de desarrollo próximo de los estudiantes (Vigotsky, 1979), definida como aquella donde es necesario suministrar el apoyo para que el alumno pueda llegar a realizar adecuadamente las tareas que se pretende que aprenda , primero con ayuda y luego por sí solo. Basado en la teoría de resolución de problemas (Polya, 1975), (Schoenfeld, 1983), etapas de actividades mentales (Galperin, 1982) y diferentes registros de representación para facilitar la comprensión (Duval, 1998) se diseñaron hojas de trabajo encaminadas a la modelación y solución de problemas mediante Ecuaciones Diferenciales

Ordinarias de reacciones químicas de orden primero, segundo y n. Se consideró utilizar Matlab para entender el comportamiento cinético de reacciones de orden “n”.

De acuerdo con (Douady, 1995) se buscó que el conocimiento matemático presentara una doble dimensión. En primer lugar de tener la posibilidad de utilizar ciertas nociones y teoremas matemáticos que sirvieran como herramientas para resolver problemas e interpretar nuevas cuestiones, las cuales al inscribirse en un determinado contexto de situaciones-problema permitiesen la evolución de las nociones matemáticas y, por tanto, fuesen generadoras de significado para dichas nociones. En segundo lugar, que esa noción matemática útil en la resolución de determinados problemas se descontextualizase pasando la noción del estatus de útil al de objeto del conocimiento.

Se consideró que la metodología de trabajo en el aula fuese de trabajo en equipo, utilizando el método de rejilla y buscando que los estudiantes transitaran por las diferentes etapas de actividades mentales hasta llegar a una discusión plenaria del trabajo realizado.

En la fase de diseño de acuerdo con (Cribeiro, 2006) se consideraron diez hojas de trabajo distribuidas de la siguiente forma: Para reacciones de primer orden: hoja general, hoja de apoyo, hoja de problemas, hoja de conclusión. Para reacciones de segundo orden: hoja general, hoja de apoyo, hoja de problemas, hoja de conclusión, hoja de generalización. Para reacciones de orden n: hoja con uso de Matlab

Las hojas denominadas generales se diseñaron con cuatro problemas referentes a reacciones de primer y segundo orden respectivamente. En cada uno de los casos se pide resolver problemas cinéticos que involucran el uso de ecuaciones diferenciales. En el primer problema se considera una reacción tipo de orden uno o dos en la forma $A \rightarrow P$ o $A+B \rightarrow P$ se les pide obtener el modelo general, construir e interpretar el gráfico de dicha reacción. El segundo problema es un caso particular de este tipo de reacciones aplicado en un contexto específico. El tercer problema es similar al primero de la hoja a diferencia que se dan reactivos específicos. Finalmente el cuarto problema consiste en expresar el comportamiento de una reacción de primer o segundo orden en un contexto específico.

Las hojas de apoyo se diseñaron de acuerdo a la idea de ZDP de Vigotski, considerando que los estudiantes no pudiesen responder satisfactoriamente las hojas generales en forma independiente. Siguiendo los planteamientos de Polya se hacen preguntas que los ayuden a comprender el planteamiento del primer problema de la hoja general hasta expresar mediante ecuaciones diferenciales el modelo. Para ayudarlos a diseñar un plan de resolución les pide consideren la posibilidad de utilizar ciertas nociones y teoremas matemáticos que sirvieran como herramientas para resolver los problemas de acuerdo a los planteamientos de Douady.

Las hojas de problemas buscan examinar el método de hallar la solución obtenida en la hoja de apoyo y analizar si se puede usar el resultado ó el método para el problema con reactantes específicos y los problemas de contextos específicos de la hoja general.

Las hojas de conclusión constan de las ideas principales referentes a reacciones de primer y segundo orden. En estas hojas se obtiene e interpreta de forma descontextualizada el comportamiento cinético de una reacción de primer o segundo orden.

La hoja de generalización tiene la finalidad de apoyar a los alumnos mediante una serie de preguntas operativas vinculadas a las hojas de trabajo anteriores, para que puedan comparar, analizar, generalizar y obtener la ecuación para reacciones de orden "n" a partir de reacciones de primer y segundo orden.

La hoja para reacciones de orden n mediante uso de Matlab se diseñó para familiarizar a los estudiantes con el uso de un paquete que le permite resolver problemas con cierto grado de complejidad para ser tratados en forma analítica.

Fase experimental

La investigación se efectuó en la Facultad de Ciencias Químicas de La Universidad Autónoma de Coahuila con estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias correspondiente al semestre Agosto-Diciembre 2007 en el cuarto semestre de Ingeniería Química y de Licenciatura en Química.

El grupo constó de 14 alumnos cuyas edades oscilan entre 19 y 23 años (4 pertenecientes a la especialidad de Licenciatura en Química, 10 alumnos de Ingeniería Química). Un grupo heterogéneo en cuanto al grado de asimilación de conceptos matemáticos y al desarrollo de habilidades matemáticas. La aplicación de las hojas de trabajo se efectuó del 12 de Noviembre al

23 de Noviembre 2007, en la etapa final del semestre de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Cada hoja se aplicó en una actividad de 2 horas clase (120 minutos).

Durante la aplicación de las hojas de trabajo se promovió primero el trabajo individual, posteriormente el uso del lenguaje como medio en el proceso de mediatización social entre sujetos de un equipo de trabajo. Para el trabajo grupal se utilizó el método de la rejilla. Se formaron tres equipos de trabajo, después de 45 minutos de trabajo, los equipos se intercambiaban sus miembros dando lugar a otros cuatro equipos, donde cada uno explicaba la forma de trabajo en el equipo en que estaba y se establecía una estrategia del nuevo equipo. Al finalizar cada hoja de trabajo se procedió a un trabajo en asamblea donde cada equipo socializaba con el grupo exponiendo a los otros equipos la forma en que ellos habían trabajado las hojas y resuelto los problemas. Al finalizar la clase cada estudiante entregaba la hoja al profesor para analizar los resultados individuales.

Análisis de resultados

Se hizo un análisis cualitativo de las habilidades de los estudiantes para modelar en cada sesión de trabajo y al final el análisis cuantitativo expresado en tablas estadísticas. Al inicio de la investigación la totalidad de los estudiantes tenían dificultades para analizar, representar, modelar y comunicar. Al final de la investigación el 70 % de los estudiantes mostró un avance muy satisfactorio respecto a las habilidades antes mencionadas. La metodología de aprendizaje individual, mediante hojas de trabajo y exposición; de aprendizaje grupal de interacción continua con sus compañeros mediante rejilla y discusión plenaria ayudó al desarrollo de las habilidades en la totalidad del grupo. Cabe destacar que el 30% de los estudiantes con hojas de trabajo evaluadas como insatisfactorios presentaron un grado de alto desarrollo de las habilidades estudiadas, dado que sus posibilidades de trabajo inicial eran nulas o bajas y al finalizar la investigación lograron evaluaciones de medio y alto en cada una de las preguntas.

Criterios de evaluación y análisis de cada hoja de trabajo

La clasificación evaluativa de cada problema fue de nulo, bajo, medio, aceptable y alto. Nulo, en caso de que no respondiese nada. Bajo, en el caso de que pudiese llegar a realizar algunos planteamientos para modelar tales como identificación de variables, interpretación del problema y relaciones entre variables. Medio, si podían hacer el modelo y hallar la solución. Aceptable, si expresaban el modelo en forma diferencial, hallaban la solución de la ecuación y la representaban gráficamente. Alto, si podían interpretar la solución en el problema planteado.

La evaluación de una hoja fue de satisfactorio en el caso de que todos los problemas fueran evaluados de nivel aceptable o nivel alto y de insatisfactorio en caso contrario.

Las hojas generales tuvieron evaluación de nulo en cada uno de los problemas por lo que para todos los alumnos su evaluación fue de insatisfactorio.

Las hojas de ayuda y de problemas fueron evaluadas de satisfactorio en diez de los catorce estudiantes, ocho con evaluaciones de alto en todos los problemas y dos con evaluación de aceptable en todos los problemas. No obstante que el procedimiento matemático para obtener la ecuación resultante requiere de desarrollo operativo, el 71.4% de los estudiantes presentan respuesta favorable a la hoja de apoyo para reacciones de segundo orden y logran satisfactoriamente obtener la ecuación resultante para reacciones del tipo $A+B \rightarrow P$, además construyen e interpretan correctamente su gráfico. Los cuatro estudiantes cuyas hojas fueron clasificadas como insatisfactorias respondieron dos preguntas en nivel bajo y dos en nivel nulo, en la de primer orden pero ya en la de segundo orden, tuvieron evaluaciones de bajo, medio y alto.

En las hojas de conclusiones y de generalización los estudiantes cuyas hojas se habían clasificado como satisfactorio mantuvieron esa evaluación y los cuatro estudiantes con evaluación de insatisfactorio aunque conservaron esa evaluación se pudo observar que en cada problema llegaban a calificar como medio o alto.

Análisis global de desarrollo de capacidades.

Capacidades cognitivas: Diez de los catorce estudiantes mostraron tener los conocimientos de Cinética Química y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias necesarios para resolver los problemas planteados en las hojas generales, sin embargo no podían orientarse para utilizar los conocimientos. Los cuatro estudiantes evaluados como insatisfactorios en las hojas de trabajo mostraron no tener los conocimientos básicos, sin embargo con el trabajo de las hojas y el grupal lograron al final de la investigación en las hojas de conclusiones y de generalización, comprender, argumentar, comunicar y utilizar dichos conocimientos con la ayuda de sus compañeros de equipo,.

Capacidades metacognitivas: Al inicio de la investigación se demostró que los estudiantes tenían poco desarrolladas las capacidades para reflexionar, comprender y controlar su propio aprendizaje, no contaban con estrategias para utilizar y aplicar los conocimientos que poseían por eso no pudieron resolver los problemas de las hojas generales, sin embargo con preguntas de orientación para buscar una estrategia de trabajo y preguntas sobre el contenido específico a utilizar, un 70 % de los estudiantes pudo dar respuesta satisfactoria a la modelación, solución de los problemas e interpretación de resultados en las hojas de apoyo y de problemas.

Aspectos transversales: En el transcurso de la investigación se pudo apreciar un desarrollo en todos los estudiantes de la capacidad de comunicar ideas, argumentar y trabajar en equipo para lograr mejores resultados. Estos aspectos quedaron evidenciados en los videos que se tomaron de todas las actividades. Al principio todos confrontaban dificultad para exponer los resultados de su equipo y la participación en asamblea era pobre, en las últimas clases se evidenció la independencia en el trabajo de cada uno de los estudiantes, su mayor facilidad para comunicar las ideas, argumentar sus criterios, analizar analogías, caracterizar las soluciones de reacciones de primer y segundo orden y llegar a generalizar.

Conclusiones y recomendaciones didácticas

Los métodos de trabajo utilizados en forma individual mediante hojas de trabajo y exposiciones, grupal con el método de la rejilla y discusión en asamblea resultaron efectivos para desarrollar independencia, comunicación de ideas, trabajo conjunto, cooperación, capacidad de abstracción, síntesis y generalización de ideas. Se consideran logros: el mejorar la capacidad de comunicación de ideas en forma significativa en todos los estudiantes mediante la rotación de los miembros de equipos, exposiciones y discusión en asamblea; el aumentar la capacidad de análisis de resultados mediante la orientación; el llegar a comprender mas del 70 % de los estudiantes el comportamiento cinético de las reacciones de orden n mediante el uso de Ecuaciones Diferenciales; el poder interpretar el comportamiento de una reacción cinética mediante una gráfica.

Los obstáculos identificados para la resolución de problemas fueron: la creencia arraigada de que resolver un problema es seleccionar fórmulas y usarlas adecuadamente y que los docentes deben de dar métodos de solución orientados a resolver problemas; la falta de metodología para enfrentar problemas; la carencia de capacidad de análisis ante nuevas situaciones; la imposibilidad de hacer uso de los conocimientos en aplicaciones concretas contextuales. La mayor dificultad presentada por los estudiantes fue la imposibilidad de crear una base orientadora ante nuevas situaciones, al proporcionarles la base orientadora en las hojas de apoyo fueron capaces de resolver los problemas, ya que poseían los conocimientos necesarios pero no podían utilizarlos.

Se recomienda destinar mas tiempo en los cursos de Ecuaciones Diferenciales a actividades de modelación y resolución de problemas de fenómenos químicos, así como promover el desarrollo de habilidades de visualización, análisis, modelación, resolución de problemas, argumentación, interpretación de resultados, reflexión. Se sugiere comenzar con hojas de trabajo y añadir trabajos de cursos sobre aplicaciones concretas.

Referencias bibliográficas

Borelli R. y Coleman C. (1998). *Ecuaciones Diferenciales. Una perspectiva de modelación.* México: Oxford University Press.

Cribeiro, J (2006). Importancia en Matemática Educativa, de la interrelación entre la Teoría Matemática, Técnicas Modernas de Cómputo y Problemas del Contexto Empresarial para motivar a Docentes y Estudiantes. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 39-60). México D.F.: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México D.F.: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTA-IPN,

Galperin, P. (1982*). Introducción a la Psicología***.** La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Gustafson G. B y Wilcox C. H. (1998). *Analytical and computational methods of advanced engineering mathematics***.** New York: Springer Verlag

Polya, G. (1975). *How to solve it*. Madrid: Editorial Tecnos.

Schoenfeld, A. (1983). *Ideas y tendencias en la Resolución de Problemas La Enseñanza de la Matemática a debate.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

VISUALIZANDO PROBLEMAS GEOMÉTRICOS CON EL CABRI GEOMETRE

María del Pilar Rosado Ocaña, Norma Esther Haas Ek
Universidad Autónoma de Yucatán México
rocana@uady.mx, normahaas@gmail.com
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo surge como una experiencia de aula, en la asignatura Geometría Plana y del Espacio que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán en el primer semestre de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. La problemática que se atiende es la débil interpretación que presentan los estudiantes en problemas de Geometría Plana. El objetivo es proponer un diseño de material con base en el uso del software Cabri que permitan al estudiante manipular figuras construidas con dicho software, de tal manera que despierten su interés, les permita argumentar los pasos a seguir en la resolución de problemas geométricos y así contribuir a mejorar la visualización (habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual) en este tipo de problemas. El trabajo se encuentra en desarrollo y en este documento se presentan los resultados de un diagnóstico aplicado a una muestra de estudiantes, así como algunos aspectos del diseño de actividades.*

Palabras clave: visualización, problemas, geometría plana, software cabri

Introducción

Una de las dificultades que se presenta en el salón de clases de Geometría Plana es la comprensión de ciertos conceptos y por consiguiente, la interpretación de problemas; la cual está relacionada con la falta de visualización de dichos conceptos; ya que tradicionalmente, la Geometría Plana se aborda de manera teórica en cuanto a los conceptos y pocas veces se representan geométricamente, lo cual refleja una falta de dominio en la resolución de problemas de Geometría en todos los niveles educativos. De ello surge el interés de realizar un trabajo con el apoyo del software Cabri; en particular, nos enfocamos en el programa de Geometría Plana y del Espacio que se cursa en el primer semestre de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY); con el objetivo de diseñar y elaborar un material de apoyo para dicho curso, utilizando el software Cabri II Plus, en el cual se privilegie el aspecto de la visualización al construir figuras geométricas que representen las condiciones establecidas de algunos problemas relevantes de la Geometría. Para ello, se llevó a cabo una evaluación diagnóstica acerca de la interpretación de algunos conceptos y problemas sobre demostraciones geométricas de algunos contenidos básicos en Geometría Plana, con cuatro estudiantes de segundo semestre de licenciatura, observándose algunas dificultades en las respuestas de dichos estudiantes. Cabe mencionar que el trabajo se encuentra en desarrollo y lo que se reporta en este artículo son los resultados de una evaluación diagnóstica aplicada a una muestra de estudiantes así como algunos aspectos relevantes del diseño de la propuesta. Se espera continuar con el diseño de actividades para ofrecer un material didáctico a los estudiantes de la asignatura de Geometría Plana y del Espacio en el nivel superior.

Problemática

La problemática que atiende este trabajo es la falta de comprensión de conceptos e interpretación de problemas geométricos, relacionada con la falta de visualización en Geometría Plana en el nivel superior. En diversos artículos se ha reportado que los estudiantes ingresan al nivel superior con deficiencias en contenidos matemáticos considerados como básicos para un estudiante que ingresa a una licenciatura; más aún cuando son alumnos que ingresan a una carrera en ciencias matemáticas. La Facultad de Matemáticas de la UADY no ha sido la excepción, ya que se ha observado, al paso de los años, que los estudiantes carecen de conocimientos básicos de las Matemáticas que son esenciales para el éxito académico en cualquiera de las seis carreras que se ofrecen en la facultad. Compartimos la opinión de Rodríguez (1990) cuando afirma que:

> *"Un curso de geometría en el nivel medio superior se desarrolla generalmente con un enfoque formal, axiomático, esperando que los estudiantes se capaciten en hacer demostraciones formales en geometría y, con esto, adquieran un pensamiento deductivo formal. Sin embargo, se ha visto que los estudiantes tienen dificultades en este modo de tratar la geometría, y los objetivos del curso no son alcanzados. Dichas dificultades pueden deberse a que los estudiantes no tienen la madurez matemática que este tipo de curso requiere".* (p.151).

En el caso de la Geometría Plana, en el nivel superior se ha observado que los estudiantes no tienen la madurez necesaria para formalizar las demostraciones de los teoremas o desarrollar problemas de demostración de propiedades de figuras, dadas ciertas condiciones establecidas como verdaderas. Consideramos que la visualización de las construcciones que satisfacen las condiciones de ciertos problemas, y la manipulación de las mismas son un factor determinante en el desarrollo de la visualización en los estudiantes.

Objetivo

El objetivo de este trabajo es proporcionar un diseño de material didáctico que contribuya a mejorar la visualización de conceptos y problemas de Geometría Plana en estudiantes del nivel superior, basado en el diseño de actividades que permitan al estudiante manipular figuras construidas con el software Cabri y de esta manera analizar diversas propiedades implícitas en las figuras dadas, lo cual no es posible de obtener en figuras rígidas. Ello constituye una de las ventajas de la Geometría Dinámica, ya que al poder manipular puntos, rectas, cambiar de posición y perspectiva a las figuras; manteniéndose siempre las condiciones iniciales dadas en los problemas, se perciben mejor otras características que a simple vista en una construcción con lápiz y papel no logran comprender la mayoría de los estudiantes en un curso inicial de Geometría en el nivel superior.

Marco de referencia

Los cursos de Geometría de los niveles medio y superior se desarrollan generalmente con un enfoque formal, axiomático, esperando que los estudiantes se capaciten en hacer demostraciones formales en geometría y, con esto, adquieran un pensamiento deductivo formal. Sin embargo, se ha visto que los estudiantes tienen dificultades en este modo de tratar la geometría, y generalmente los objetivos del curso no son alcanzados. Dichas dificultades pueden deberse a que los estudiantes no tienen la madurez matemática que este tipo de curso requiere (Rodríguez, 1990). De acuerdo a la literatura especializada, básicamente existen dos formas clásicas de entender la enseñanza de la Geometría: una, la geometría vista como la ciencia del espacio y otra, la geometría entendida como una estructura lógica.

Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2000), afirman que *"si pensamos en la geometría como la ciencia del espacio, podemos ocuparnos de contestar preguntas que nos permitan describir cómo es que los niños, los jóvenes, los adultos perciben su entorno, o bien saber qué códigos usan para descifrar y procesar información visual. Estas preguntas han preocupado a los investigadores de la Matemática Educativa desde hace algunas décadas"* (p.145) y forman parte de nuestras interrogantes previas al desarrollo de este trabajo. Las dos formas clásicas de entender la enseñanza de la Geometría plantearon la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, y surgen así nociones como *visualización y percepción espacial*. Lo que condujo a explorar la clase de habilidades visuales que se necesitan para aprender geometría. Más recientemente se ha incrementado el interés por estudiar la geometría en ambientes computacionales. (Cantoral, et. al. 2000).

> "*Una cuestión importante, ligada a la percepción espacial que no solo se reduce a la geometría, trata de la visualización en matemáticas. Generalmente se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente científico*" (p.146).

Aunado a ello, compartimos la reflexión de Laborde (2005) cuando afirma que "*Los ambientes de geometría dinámica tales como Cabrí Géomètre, que introducen el movimiento como metáfora de la variación de los objetos geométricos, provocan cambios profundos en los modos de representación habituales y los modos de pensamiento en Geometría".*(p.26)

Evaluación diagnóstica

Para fundamentar la problemática observada acerca de la falta de comprensión de conceptos y problemas de Geometría Plana, que presentan los alumnos del nivel superior; se aplicó una evaluación diagnóstica a cuatro estudiantes que habían cursado el primer semestre de licenciatura en la Facultad de Matemáticas de la UADY. El diagnóstico se estructuró en cinco partes: la primera abordaba diez definiciones de conceptos sobre geometría plana y del espacio; la segunda parte presentaba dos ejercicios en los que se pedía describir la manera de resolverlos utilizando conceptos, teoremas, etc., la tercera parte pedía la descripción del plan a seguir para la demostración de dos teoremas, la cuarta planteaba un problema de construcción con regla y compás y la quinta presentaba dos problemas para identificar las partes de la demostración inductiva.

Los resultados del diagnóstico, reflejaron que en la primera parte, los alumnos presentaron mayor dificultad en los reactivos 4, 8 y 9, seguidamente los reactivos 7, 10, 5 y 6, algunos de los cuales hacen referencia a conceptos de la Geometría Plana como son lados adyacentes, lados homólogos, circunferencias tangentes externamente y triángulos semejantes; respectivamente (números 4, 7, 5 y 6 en la Figura 1).

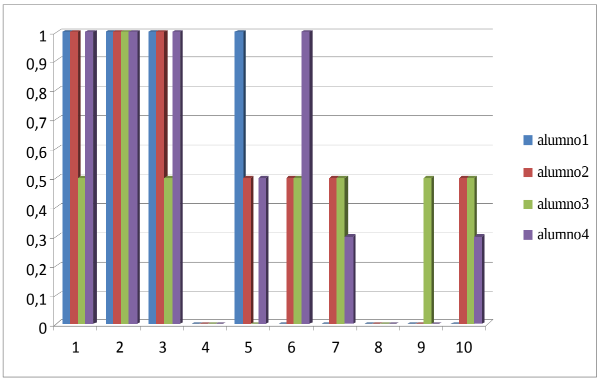


Figura 1. Diagnóstico (parte 1)

De los cuales se puede decir que ninguno de los cuatro estudiantes pudo describir los conceptos “lados adyacentes” y “lados homólogos”; y solamente un estudiante describió correctamente el concepto de circunferencias tangentes y otro describió correctamente el concepto de triángulos semejantes.En la segunda y tercera parte del diagnóstico, un alumno no pudo resolver un ejercicio relacionado con circunferencia y paralelas y dos alumnos resolvieron parcialmente el mismo; y en un problema de construcción con regla y compás, un alumno no pudo resolverlo y otro lo resolvió parcialmente (números 2 y 3 en la Figura 2).

En la cuarta y quinta parte dos alumnos presentaron dificultades, uno para demostrar un teorema (de geometría del espacio) y el otro no resolvió un problema sobre la concurrencia de las tres mediatrices de los lados de un triángulo, (números 2 y 3 en la Figura 3).

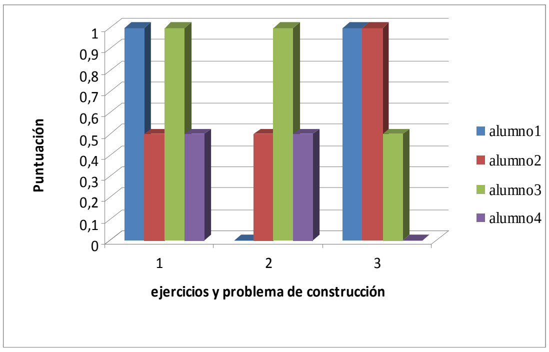


Figura 2. Diagnóstico (partes 2 y 3)

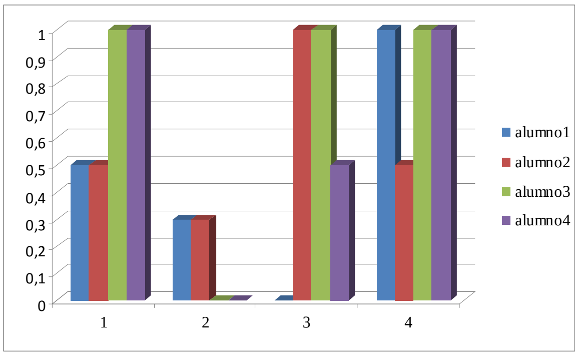


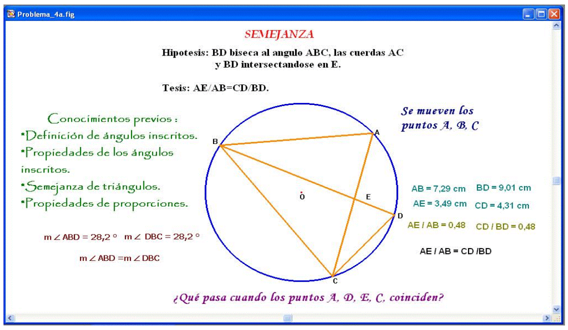
Figura 3. Diagnóstico (partes 4 y 5)

Desarrollo del trabajo

Con base a la información recabada del diagnóstico, se realizó una revisión de libros contenidos en la bibliografía del programa de la asignatura, para determinar los tipos de problemas que fueran de utilidad para el logro del aprendizaje significativo del alumno, así como los temas que involucran esos problemas. Con la selección de los problemas, se realizó la construcción de la figura que corresponde a la representación geométrica de dicho problema, aprovechando las ventajas que proporciona un software de geometría dinámica como lo es el Cabri; con el objetivo de que el alumno pueda manipular ciertos puntos y segmentos, cambiar de posición y tamaño las figuras y realizar las exploraciones necesarias haciendo uso de las herramientas del programa que le ayuden a desarrollar una visualización más profunda de los problemas que se les presenta y con base en ello puedan realizar una visión retrospectiva del problema y argumentar características y propiedades que de otra manera, en una figura rígida no serían fáciles de identificar. Así, se espera que el estudiante logre una mejor comprensión de los conceptos y problemas geométricos.

Las construcciones de las figuras correspondientes a las representaciones geométricas de los problemas seleccionados se realizaron de acuerdo a las propiedades o conceptos fundamentales que involucran estos problemas, de tal manera que al momento de manipular esta construcción se siga cumpliendo dichas propiedades sin que se distorsione la figura, aunque cambie de forma o tamaño.

A continuación se presenta las representaciones geométricas de algunos de los problemas seleccionados, correspondientes a los temas de semejanza, cuadriláteros (Hemmerling, 1971) y circunferencias (Wentworth, 2003); respectivamente (Figuras 4-9).



Figuras 4. Problema de Semejanza

En el problema anterior (Figura 4), puede observarse que se especifican los conocimientos previos necesarios para que el estudiante resuelva el problema planteado. Por otra parte, se especifican los puntos de la figura que pueden moverse para analizar las diferentes formas que surgen en la representación geométrica del problema. Puede observarse que utilizando la herramienta de medida de segmentos, el estudiante puede comprobar en qué casos se cumple la relación establecida, y además, se le plantea una pregunta para que analice un caso particular y de esta manera despierte su interés en el análisis retrospectivo del problema.

Presentamos la figura obtenida al manipular los puntos A, D y C en respuesta a la pregunta planteada anteriormente. Aquí se espera que el estudiante pueda argumentar por qué se sigue cumpliendo la relación establecida como tesis del problema. (Figura 5).

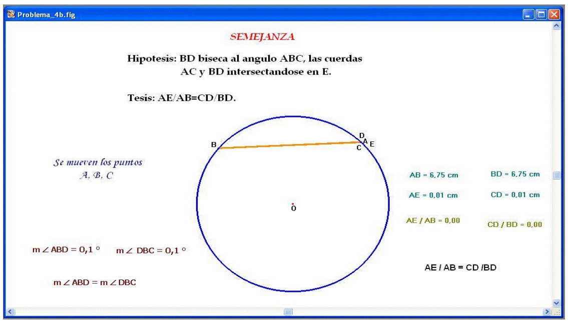


Figura 5. Problema de Semejanza (2)

De manera similar, se describen las representaciones geométricas de los problemas correspondientes a los temas de cuadriláteros y circunferencia, los cuales presentamos en las secuencias de Figuras 6-7 y 8-9, respectivamente.

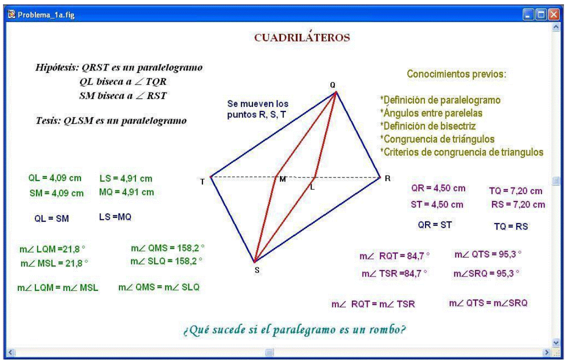


Figura 6. Problema de Cuadriláteros.

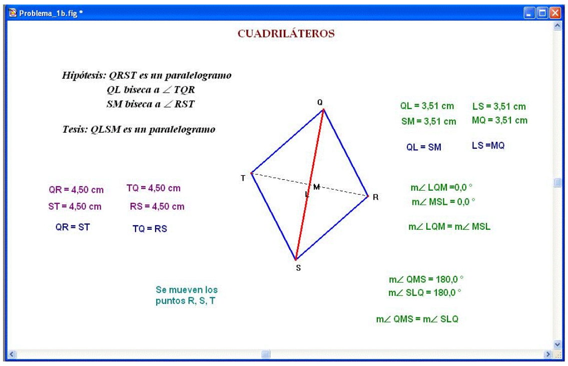


Figura 7. Problema de Cuadriláteros (2)

En la figura 6. Del problema de cuadriláteros, se plantea la pregunta: ¿Qué sucede si el cuadrilátero es un rombo? y en la figura 7 se presenta la figura resultante al mover los puntos del paralelogramo inicial hasta formar un rombo, lo que da lugar a que el paralelogramo resultante se convierta en una diagonal. Nuevamente, se espera que el estudiante pueda argumentar si se sigue cumpliendo la tesis del problema.

En el problema de circunferencia (Figura 8) se plantea la pregunta ¿cómo son las rectas PB y QC?, cuando los puntos B, O, C son colineales. Al manipular el punto C para que sea colineal con B y O, se obtiene la figura 9, en la que puede observarse que las rectas PB y QC son paralelas. En este caso se espera que el estudiante argumente si se sigue cumpliendo la condición establecida en el problema.

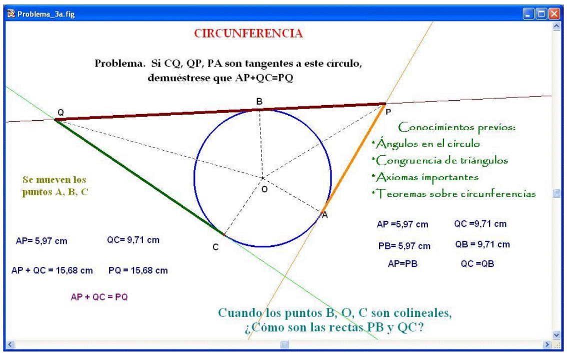


Figura 8. Problema de circunferencia

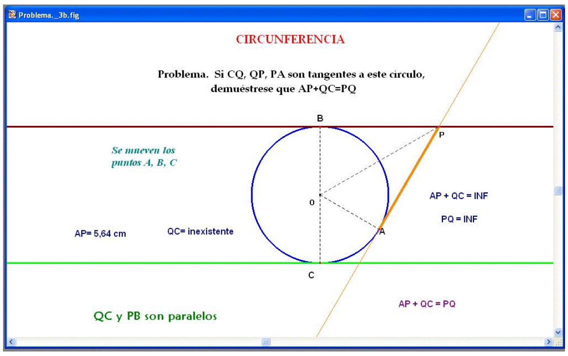


Figura 9. Problema de circunferencia

Conclusiones

Se considera que al inicio del curso de Geometría Plana, el profesor dé una introducción al uso del software Cabri, que incluya actividades de práctica de construcciones básicas para que al momento de presentarles el material para la visualización de problemas el estudiante tenga los conocimientos necesarios para interactuar con el software y logre visualizar propiedades "nuevas" para el estudiante.

Los problemas fueron seleccionados de tal manera que el alumno, al momento de interactuar con las representaciones geométricas de éstos, puedan construir un conocimiento significativo; ya que con el arrastre de estas figuras podrá manipular, explorar, y descubrir ciertas propiedades que están implícitas en los problemas y de esta manera, se contribuya a una mejor visualización de los problemas de Geometría Plana en el nivel superior.

El estado actual del trabajo descrito, es una propuesta en desarrollo, la cual se espera concluir en el presente ciclo escolar y proporcionar a los estudiantes de un grupo que curse la asignatura Geometría Plana y del Espacio, posteriormente se espera dar seguimiento a la propuesta realizando el análisis de los resultados que se generen con la aplicación de un instrumento apropiado, y de ser posible mejorar el material de apoyo propuesto.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Laborde, C. (2005). Geometría Dinámica en la Enseñanza de las Matemáticas: ¿Qué cambia para los alumnos y para los profesores?. En G. Bermúdez, M. Olave, C. Ochoviet, Y. Testa y A. Martínez. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* (p. 26) Montevideo, Uruguay: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rodríguez, R. (1990). *El modelo de Van Hiele del Desarrollo del Pensamiento Geométrico: Una experiencia en la Universidad Autónoma de Nuevo León.* Tesis de grado, Cinvestav, IPN, México.

Hemmerling, E. (1988). *Geometría Elemental.* México: Editorial Limusa.

Wentworth, J., Smith D. (2003). *Geometría Plana y del Espacio*. México: Editorial Porrúa.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES TOMANDO COMO BASE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Julio Moisés Sánchez Barrera
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM México
juliomoisessb@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Superior

Resumen. *El diseño tomó como base la teoría de "Situaciones Didácticas" de Guy Brousseau, quien sitúa a los estudiantes frente a un conjunto de actividades, pensadas de tal manera que el estudiante pueda tener una estrategia inicial con la ayuda de sus conocimientos previos, pero muy pronto, esta estrategia se muestra ineficaz por lo que se ve obligado a realizar los ajustes necesarios para obtener la respuesta óptima. De este modo se enfrenta a los estudiantes ante una situación que evoluciona de tal manera que el conocimiento por adquirir se aprenda y sea un medio eficaz para lograr el objetivo didáctico.*
El presente trabajo fue aplicado en un taller en RELME 21, en los estudiantes del propedéutico de la Maestría en Administración y de las Licenciaturas de Administración y Contaduría de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM.

Palabras clave: álgebra de funciones, situación didáctica

Objetivo

Mejorar el aprendizaje en los estudiantes cuando se enseñe el tema de álgebra de funciones, tomando como base las representaciones de las funciones en su forma sagital en conjuntos y poder articularlo en las diferentes representaciones semióticas: gráfica, tabular y analítica con aplicaciones a las áreas Económico-Administrativas.

Marco Teórico

Esté trabajo esta basado en la Ingeniería Didáctica, la cual esta basado principalmente en dos teorías: La Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998), que son los referentes de la Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica surge a principios de los años ochentas, en el seno de la Didáctica francesa de la matemática, según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias, de clase, diseñadas, organizadas, y articuladas coherentemente por un "profesor ingeniero" , para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo especifico de alumnos. Por lo tanto se considera que la Ingeniería Didáctica es un "producto" que resulta de un análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitivas, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis a priori en el cual se decide sobre que variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará, en este caso se incorpora una cuarta componente, que es la socio-cultural, que es ponerlo en escena.

Brousseau (1986) nos habla de una "génesis ficticia" de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aislan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo, y utilización. Considera a su vez, la necesidad de retomar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes, esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios y su evolución y uso de nuevos problemas.

Según Chevallard (1998), el conocimiento matemático no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que se ha denominado transposición didáctica. El "saber erudito" pasa a ser un "saber a enseñar", luego de ser validado por una "noosfera" que le confiere el status de conocimiento a ser aprobado en la escuela.

Brousseau (1986) desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas ideas generadas por Piaget, considera que un individuo aprende en la medida en que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva, por medio de un proceso de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Se considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en cuanto a su historia del saber.

El conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a situaciones didácticas que le son propuestas, en este sentido, aparece la idea de "devolución", acto seguido por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia. La devolución es la esencia del acto de comunicación entre el profesor y el alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos.

El docente debe proponer al alumno, una situación que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, la situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactué con el saber, es decir formule, pruebe y construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías que intercambie con otros. La situación debe ser fuente de aprendizaje, en ciertas ocasiones también debe ser criterio de validación de las estrategias puestas en juego.

Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando es capaz de utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya indicación intencional, denominándose a éstos "situaciones no didácticas", están regidas por el contracto didáctico, es decir, por las obligaciones implícitas que se establecen entre los actores del sistema didáctico, esto es la tríada docente-alumno-conocimiento. Define "situaciones didácticas", como aquéllas en las cuales el profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independientemente del sistema educativo. Brousseau, distingue diferentes tipos de situaciones a-didácticas, que son: acción, formulación y validación, así como institucionalización.

La situación a-didáctica de acción es aquélla donde el conocimiento se intercambia con una o varias personas a través de mensajes escritos u orales. Surgen nociones paramatemáticas, aquéllas que son utilizadas concientemente como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos, sin ser consideradas como objetos de estudio en sí mismas.

La situación a-didáctica de validación, es aquélla donde el conocimiento toma la forma de conocimiento totalmente admitido.

Por lo que surge el "contrato pedagógico", apunta a reglamentar los cambios entre dos partes que toma, por un periodo limitado, un sistema de derechos y deberes recíprocos; supone el principio de un consentimiento mutuo de las partes ya que se funda sobre el enunciado de reglas de juego a las que cada uno debe libremente someterse.

Brousseau (1986) construye la noción de contrato didáctico, para explicar las relaciones de profesores y alumnos las cuales son condicionadas por un proyecto social exterior a ambos que se les impone y que se les da razón de ser, y difiere del contrato pedagógico en que es perecedero, no establece como aquél, sino que evoluciona y se transforma a la par de los conocimientos puestos en juego.

El profesor de matemáticas tiene una dimensión social que se impone, le compete a él lograr el buen aprendizaje de cada alumno y asegurar la homogeneidad de la construcción de saberes y su coherencia a nivel de toda la clase. Esta dimensión social da al profesor una posición particular, es el eslabón entre los saberes sociales y los saberes construidos en la clase. El contrato debe garantizar la devolución, de no ser así, se producen las rupturas y la búsqueda de nuevos contratos se torna importante.

Brousseau, retoma las ideas de Bachelard, y considera que los errores no son solo efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas, sino que son efecto de conocimiento anterior que habiendo tenido su interés y éxito, se revelan falsamente o simplemente inadaptados. Los errores de este tipo no son erráticos ni imprevisibles, se constituyen como obstáculos.

La idea de obstáculo epistemológico tiene a sustentarse, en ciertos casos, en tres categorías como: errores en la enseñanza, insuficiencias en el sujeto cognoscente y como intrínsicos al propio conocimiento. Por lo tanto, Brousseau habla de sendos obstáculos de origen didáctico, ontogénico y epistemológico.

La superación de un obstáculo implica el diseño de acciones racionales que se plasmen en una situación didáctica susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno mediante un proceso dialéctico que permita confrontar las concepciones anteriores y recrear por lo tanto el nuevo conocimiento.

Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de la solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.). Juega entonces un papel esencial la elección y gestión de variables didácticas, tarea a cargo del profesor o del investigador, al igual que la identificación de los obstáculos inherentes al conocimiento.

Por lo tanto la Ingeniería Didáctica es un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad de los procesos de enseñanza y sobre todo el de aprendizaje en situación escolar.

Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ingeniería didáctica, a saber: análisis preliminar, diseño de la situación didáctica y su análisis a priori, experimentación y análisis de validación.

Análisis preliminar. Se analizan y determinan, desde una aproximación sistemática, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos, por lo cual se toma en consideración: el componente cognitiva, el componente didáctico y el componente socio-cultural.

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica. En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlan y se define la forma que las mismas serán gestionadas. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.

Experimentación. En esta etapa se procede a la "puesta en escena" de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis de validación: Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina, en qué medida, las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

Se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

Antecedentes

Para iniciar con el diseño de esta actividad, se tomó en cuenta como tratan los libros de texto y de consulta el tema de álgebra de funciones y como lo tratan los maestros en clase. Nos damos cuenta que este tema se trata como si fuera álgebra básica y no se le da la importancia que tiene dicho tema, cuando se ve al tratar este tema de álgebra de funciones.

Por lo que esta propuesta toma en cuenta que el estudiante ya tiene como conocimientos previos el álgebra elemental y también la teoría de conjuntos y que además para explicarle lo que es el producto cartesiano, una relación y una función una gran cantidad de libros y de maestros en clase toma en cuenta la forma sagital de la teoría de conjuntos.

Como se menciona en el párrafo anterior si el álgebra de funciones nos ayuda para que el estudiante comprenda lo que es una relación y diferenciarla cuando una relación se considera función, por que dejarlo olvidado cuando se trata el tema de álgebra de funciones y solo en los libros se ve favorecido para explicar el producto composición, considerada la operación en la que el estudiante tiene mayor grado de dificultad para comprender.

Presentación del diseño

El diseño se compone de ocho actividades.

Actividad 1

Utilizando la teoría de conjuntos, en especial la notación sagital, se les pide a los participantes que realicen, la suma, resta, multiplicación y división de funciones.

Actividad 2

Se les proporcionaron a los participantes los conceptos para que los comprenda y aplique en las demás actividades del álgebra de funciones.

Actividad 3

Mediante una aplicación de suma de funciones obtenga la función de egresos, partiendo de la representación sagital de la función de gastos fijos y la función de gastos variables.

Actividad 4

Obtener la función de utilidad, partiendo de las representaciones sagitales de la función de ingresos y la función de egresos que se obtuvo de la actividad 3.

Actividad 5

Se pide que obtengan la función inversa de dos funciones, la primera no va a tener función inversa, ya que al tratar de obtenerla el resultado es una relación y la segunda si va a dar origen a una función inversa, con esto el participante comprenderá el por que solo las funciones biyectivas tienen función inversa.

Actividad 6

De una función de oferta, en la que los elementos del primer conjunto nos representan los artículos y los del segundo conjunto su precio estando en su forma sagital, se le pide obtener su función inversa.

Actividad 7

Se le pide obtener el producto composición $P \circ R = J$ y $R \circ P = L$, de dos funciones P y R representadas en su forma sagital, con lo anterior se comprueba que el producto composición no es conmutativo y además se verifica las condiciones que se tienen que cumplir para el producto composición.

Actividad 8

Realizando las actividades que tienen de aplicación, considerar a las funciones sagitales como el método tabular de pares ordenados para la construcción de su gráfica en el plano cartesiano de:

La grafica de la función de gastos fijos de la actividad 3

La gráfica de la función de gastos variables de la actividad 3

La gráfica de la función de egresos de la actividad 3.

La grafica de la función de ingresos de la actividad 4.

La gráfica de la función de utilidad que se obtuvo de la actividad 4.

La gráfica de la función de oferta de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas (al primer conjunto que es el de los artículos).

La gráfica de la función inversa de la oferta, que se obtuvo de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas al precio de los artículos.

La gráfica del producto composición $P \circ R = J$

Conclusiones

En el análisis a posteriori de la actividad se logró que los alumnos comprendieran el por qué y el para qué se ve el tema de álgebra de funciones, tanto en Licenciatura como en el propedéutico de la Maestría en Administración.

El alumno entiende que pasa con cada una de las operaciones del álgebra de funciones, ya que durante la actividad comprende su diferente articulación de representaciones semióticas: el de la forma sagital, la tabular, la gráfica y su aplicación en el área Económico-Administrativas. Y de esta manera puede aplicarlo en su vida profesional cuando sea necesario.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady R., Moreno L., y Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires: FAMAF

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

Chevallard, Y., (1998). *La transposición didáctica.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y., Bosh M., y Gascón J. (2000). *Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: I.C.E. Universitat Barcelona y Editorial Horsori.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socio-epistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rondero, C. (2006). Propuesta didáctica acerca de la articulación de saberes matemáticos. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 151-162). México DF: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

PAQUETES DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS, REPORTE DE UNA EXPERIENCIA

Adriana Gómez Reyes, Beatriz Vargas Rosales
CCH Sur UNAM, CECyT 13 IPN
México
orodelsilencio@yahoo.com.mx, bvargas@ipn.mx
Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo
Nivel: Medio

Resumen. *Cuando trabajamos con materiales fuera de lo usual, para los estudiantes se hace evidente que la forma de trabajo es diferente, el enfrentarse a problemas cuya resolución no es inmediata, plantea retos y causa conflictos que el profesor debe manejar. Pero para el mismo profesor el trabajo con materiales innovadores es una diferencia importante. Cuando se utilizan por primera vez implica un reto para el profesor. El tener una larga trayectoria docente es una experiencia siempre útil pero no es suficiente. Así, el objetivo de este trabajo es reportar dicha experiencia; mostrando, además de los trabajos de los estudiantes, la experiencia de profesoras, trabajando por primera vez con los Paquetes Didácticos elaborados por la Academia Institucional de Matemáticas (del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional), en particular para Geometría Analítica, y cuando se tienen varios años de trabajo con estos materiales.*

Palabras clave: paquetes didácticos, trabajo en equipo, reportes de estudiantes, resolución de problemas

De acuerdo al Foro Mundial sobre la Educación; *Las necesidades básicas de aprendizaje abarcan tanto las herramientas esenciales para el aprendizaje como los contenidos básicos del aprendizaje necesarios para que los seres humanos puedan sobrevivir, desarrollar plenamente sus capacidades, vivir y trabajar con dignidad, participar plenamente en el desarrollo, mejorar la calidad de vida, tomar decisiones fundamentadas y continuar aprendiendo.* (UNESCO, 1990, artículo 1 párrafo 1) Así, los aprendizajes que requerimos logren los estudiantes, van más allá de la mecanización de procesos algorítmicos, hasta alcanzar la mejora de la calidad de vida y la toma de decisiones, entre otras competencias que tradicionalmente no se relacionaban con matemáticas. Esto implica un cambio en el trabajo cotidiano en el aula pues los aprendizajes requeridos son diferentes, lo cuál se refleja también en la siguiente cita, *Por consiguiente es necesario mejorar todos los aspectos cualitativos de la educación, garantizando los parámetros más elevados, para conseguir resultados de aprendizaje reconocidos y mensurables, especialmente en lectura, escritura, aritmética y competencias prácticas esenciales*. (UNESCO, 1990, artículo 1 párrafo 1) Uno de los puntos indispensables para lograr estos cambios es la elaboración y aplicación de materiales acordes a estas necesidades de aprendizaje. Para lograr una aplicación efectiva no basta con el tener los materiales a la disposición de profesores y alumnos, es necesario una efectiva capacitación en el marco del Modelo Educativo, y con una clara visión de las competencias que se espera alcanzar.

Tomando en cuenta estas conclusiones del Foro Mundial sobre la Educación, en el Plan Nacional de Desarrollo 1995-2000, se sugieren cambios de metodologías y actualización docente para operar un aprendizaje en los alumnos de manera que éstos sean constructores de su conocimiento; respondiendo a esta indicación el Instituto Politécnico Nacional, dentro de su programa de Desarrollo Institucional 2001-2006, propone la creación de un Nuevo Modelo Educativo, el cual está sustentado en el constructivismo; *es decir, los alumnos construyen su propio aprendizaje, y son el centro de atención en el proceso educativo; que el alumno construya, realice, forme e integre su propio conocimiento para lograr la posibilidad de construir su propio aprendizaje; con una educación flexible e innovadora,* (IPN, 2004; p 166).

En resumen y de acuerdo al Nuevo Modelo Educativo del IPN, la educación que se imparte en el Nivel Medio Superior debe:

- Estar centrada en el aprendizaje
- Promover la Formación Integral del Estudiante
- Responder a las necesidades de un mundo globalizado, dotando al estudiante de las competencias necesarias para:
    - Adaptarse rápidamente a los cambios (Aprender a Aprender)
    - Trabajar en equipo en forma respetuosa y con conciencia social y ecológica (Aprender a Estar y Aprender a Convivir)

Es necesario cambiar la forma de trabajo en el aula, y en consecuencia son necesarios nuevos materiales didácticos, uno de ellos es el Paquete Didáctico de Matemáticas (el primero fue Álgebra en 2001) propuesto y elaborado por la Academia Institucional de Matemáticas (AIM-NMS-IPN). Estos materiales están compuestos (a primera vista) por dos libros (uno para el estudiante y otro para el profesor) y un CD. Otros materiales que completan este paquete son los talleres de capacitación, el plan de evaluación, plan de seguimiento y la red de profesores encargados del seguimiento. Es un material de apoyo en el que se plantean problemas, para promover la reflexión y análisis por parte de los alumnos, a fin de que más que resolver ejercicios de manera mecánica (siguiendo una receta o procedimiento predeterminado), se enfrenten a situaciones novedosas, planteadas en un contexto cotidiano, cuya solución no sea inmediata y se logre haciendo uso de sus conocimientos previos y su creatividad en colaboración con sus compañeros.

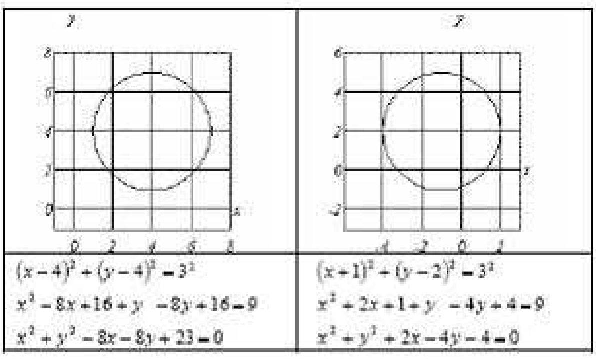
La finalidad de estos paquetes es por tanto, dotar tanto al estudiante como al profesor de materiales de calidad que permitieran aprovechar el conocimiento generado por las investigaciones en Matemática Educativa para lograr los objetivos planteados en las distintas materias del área de Matemáticas.

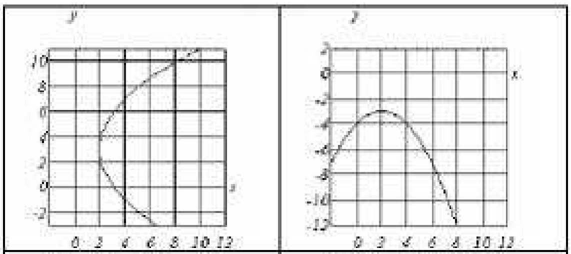
Es así como la Profesora Beatriz Vargas Rosales usó por primera vez con sus alumnos de 3er Semestre el Paquete Didáctico de Geometría Analítica en el ciclo 2007-2008 “A”, lo cual fue todo un reto ya que implicó un cambio radical en el cómo impartir clases de matemáticas, propiciando por vez primera la discusión y debate en el grupo, la realización de lecturas, así como el trabajo en equipo tal como se plantean las actividades en el libro.

Para ejemplificar esta situación se muestran el trabajo de las dos profesoras en el Tema de Identificación de Cónicas a partir de la Ecuación General de Segundo Grado.

- Primero se impartió la clase de manera tradicional, es decir, se les anotó en el pizarrón la fórmula del discriminante y sus reglas de uso, después se anotaron una serie de ecuaciones de 2° grado para que aplicando la fórmula, identificaran la cónica que representaba cada una de ellas.

  En la siguiente clase, se impartió el mismo tema (Identificación de Cónicas), pero utilizando el Libro del Estudiante de Geometría Analítica, para lo cual se realizaron las actividades indicadas en las páginas 99, 100, 101, 106 y 107 (IPN, 2005a), se muestra una parte de la actividad a manera de ejemplo, primero por parejas y luego por equipos de 4 personas que entregaron su reporte por equipo.





$(y-3)^2 = 4(2)(x-2)$	$(x-2)^2 = 4(-1)(y+3)$
$y^2 - 6y + 9 = 8x - 16$	$x^2 - 4x + 4 = -4y - 12$
$x^2 - 8x - 8y + 25 = 0$	$x^2 - 4x + 4y + 16 = 0$

Básicamente estas actividades constan de tres partes:

a) Analizar gráficas de cónicas y con base en ellas obtener su ecuación general.

b) Comparar las ecuaciones obtenidas para ver similitudes y diferencias entre ellas.

c) Escribir como se podría por simple inspección identificar cada tipo de Cónica.

Posteriormente se hizo el cierre de clase, discutiendo en forma grupal los resultados obtenidos por los equipos y consensando para obtener una conclusión Grupal.

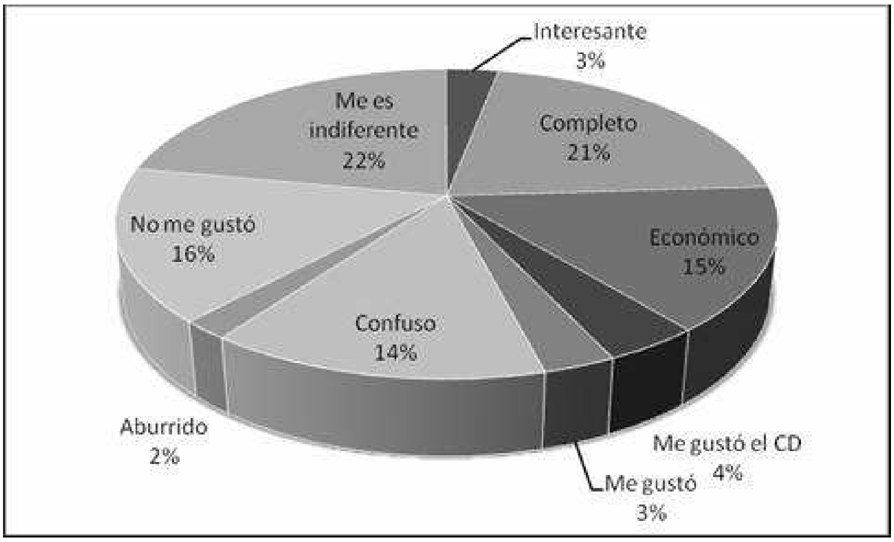
- En el caso de la otra profesora, durante las discusiones grupales correspondientes al desarrollo de los temas anteriores, se discutió la forma y las diferencias que tienen las ecuaciones de una y otra cónica.

  Así al introducir este nuevo tema se trabajó directamente en equipos las actividades antes descritas. Se les pidió que investigaran la fórmula del discriminante.

  En la siguiente sesión se discutieron las conclusiones que llegaron en cada equipo, en el cierre de clase, de la misma manera que el otro grupo. Y como parte de la conclusión se discutió el uso de la fórmula.

El día del examen, el grupo que se les dio la libertad a los alumnos de contestar ese tema con el método que más les gustara. En el grupo de la profesora que utiliza este paquete por primera vez, aproximadamente el 75% de los alumnos lo hizo como lo propone la actividad de los Paquetes Didácticos, es decir, por simple inspección, al cuestionarlos al respecto, expresaron que esta forma se les hizo más fácil y rápida, porque ya se la habían aprendido y no tenían que memorizar la fórmula (y sus condiciones), ni tampoco realizar cálculos. En el grupo en que se aplicó directamente la actividad antes de discutir la fórmula del discriminante el 100% del grupo los resolvió por simple inspección.

Se aplicó a los estudiantes una encuesta para ver que opinaban del Paquete Didáctico, obteniéndose los siguientes resultados.



En general al 46% les ha gustado utilizar el Paquete Didáctico, 32 % no les ha gustado y al 22% les es indiferente, sin embargo; algo que se hizo evidente al platicar con estudiantes de otros grupos que no usaron el Paquete de Geometría Analítica pero que habían usado el de Algebra, es que la forma en que el profesor los usó con ellos en el aula influyó de sobremanera en su deseo de seguirlos utilizando o no para sus cursos posteriores.

El analizar la primera aplicación, en contraposición con su uso repetido por varios cursos, nos permite visualizar fortalezas y necesidades para el mejor desarrollo del curso. De acuerdo a lo observado y los resultados obtenidos durante el semestre con el uso del Paquete Didáctico, la profesora que lo usó por primera vez, obtuvo las siguientes conclusiones:

a. Fomenta el Trabajo Colaborativo y la Creatividad de los Alumnos
b. Los alumnos más inquietos, resultaron ser los más creativos.
c. Es un gran reto para el profesor, ya que se debe generar un buen ambiente en el grupo para motivar y moderar la discusión grupal y el debate de manera positiva y respetuosa.

d. Requiere de mucho tiempo, tanto de preparación como durante en la clase (hubo ocasiones en las que un solo problema se llevaba dos sesiones)
e. Aprendieron juntos Alumnos y Profesora.

La profesora con mayor tiempo de aplicación reporta que al paso de los años, sigue considerando que se fomenta el trabajo colaborativo y la creatividad de los estudiantes, y que los alumnos y profesores aprendemos juntos. Pero en contraposición remarca:

A los alumnos inquietos les es más fácil mostrar sus avances, no tienen tantos problemas con el trabajo en equipo y con la comunicación dentro del equipo y ante el grupo, pero a los alumnos más integrados a una forma de trabajo individual y repetitivo les cuesta mucho trabajo.

a. El ambiente en el grupo es fundamental para el buen funcionamiento de este tipo de trabajo, por lo que el profesor requiere estar al pendiente de este aspecto muchas veces descuidado. El ambiente no depende plenamente del profesor, pero este siempre puede influir en su mejora.
b. El tiempo de preparación aumenta, cuando se presentan las actividades por primera vez, pero este trabajo disminuye y aumenta su efectividad si existe una academia que respalde al profesor. Las experiencias anteriores, tanto como las experiencias de otros profesores apoyan y evitan sorpresas a los profesores que inician en este tipo de trabajo.
c. El profesor requiere habilidades distintas a las tradicionales, no basta con preparar una exposición, sino que debemos aprender a moderar una discusión manteniéndola en un sentido positivo y ordenado, donde se le de libertad de opinión a los estudiantes sin perder la intensión inicial y apegándose al objetivo propuesto. Hay que aprender a elaborar y seguir un guión de discusión.

Como parte de las Competencias Generales que deben alcanzar los estudiantes de bachillerato, según la SEP, (referidos en IPN, 2005b), incluyen algunas correspondientes a la comunicación y al trabajo en equipo, correspondientes justamente a las que se observaron en la aplicación de las actividades propuestas por Paquetes Didácticos. Si se revisan los parámetros considerados a nivel internacional, podemos observar que en los estándares que plantea el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM) de los Estados Unidos (referidos en IPN, 2005b) también se destacan las habilidades de de comunicación y resolución de problemas que se fomentan con las actividades de los paquetes didácticos. Otro de los puntos destacados, tanto en las Competencias

Generales del Bachiller como en los Estándares del NCTM, es el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

En el Modelo Educativo, también se promueve el uso de las TIC, así como la investigación en educación. A este respecto los Paquetes Didácticos recomiendan actividades donde se usan dichas tecnologías, tiene una serie de actividades en Internet; y dejan abierta la puerta a proyectos que requieren un trabajo con más tiempo e investigación para su desarrollo, los que, a criterio del profesor, despiertan inquietudes y motivan a los estudiantes para continuar con un trabajo autónomo. Dependiendo de cada grupo, según muestra la experiencia a lo largo del tiempo, algunos grupos buscan el intercambio abiertamente con chat o foros que les abran espacios, por que ya no se conforman con el espacio del aula.

En el mismo sentido conforme el profesor se aventure en estos medios (TIC), puede ir dando las libertades para que los estudiantes propongan y formen estos espacios que requieren y a los que el modelo alude.

A manera de conclusión podemos afirmar que la formación a los profesores debe tender a la obtención de las habilidades que antes no se consideraban necesarias en un profesor y que el trabajo académico debe fortalecerse.

También se confirma la necesidad de que los Paquetes Didácticos se enriquezcan (como está planeado en el seguimiento de los materiales) con Historias de las Actividades, Instrumentos de Evaluación y otros documentos donde todos los profesores, expertos y novatos consigan un apoyo efectivo en la aplicación de estas (u otras) actividades novedosas.

Referencias bibliográficas

IPN (2004). *Un nuevo modelo educativo para el IPN*. 2ª. Reimp. México: Instituto Politécnico Nacional.

IPN (2005a). *Geometría Analítica. Libro del Estudiante.* México. Instituto Politécnico Nacional.

IPN (2005b). *Geometría Analítica. Libro del Profesor.* México. Instituto Politécnico Nacional.

Romano, S; Torres, J (2003). *La elaboración de paquetes didácticos para los cursos de matemáticas*. Extraído el 4 de abril 2008 desde http://www.comunidades.ipn.mx/riieeme/DesktopDefault.aspx?TabIndex=0&TabID=1&CommandID=2

UNESCO (1990). *Declaración Mundial sobre Educación para Todos*. Extraído el 15 marzo de 2009 desde http://portal.unesco.org/shs/es/ev.phpURL_ID=7140&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html

UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DEL TEMA DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS BASADO EN SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Saydah Mendoza, Elena Nesterova, Ricardo Ulloa, María Ortega
Universidad Autónoma de Nayarit. Universidad de Guadalajara México
saymar28@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Medio

Resumen. *La investigación tuvo como marco teórico el constructivismo. El experimento se efectuó con 25 estudiantes de La Escuela Preparatoria No. 1 de La Universidad Autónoma de Nayarit. Se abordaron problemas de aplicación de semejanza de triángulos donde el alumno tuvo que interpretar, identificar lados proporcionales y resolver por medio de proporciones estos problemas. Se diseñaron: una guía de estudio, material de apoyo, y un cuaderno de trabajo. Por otra parte, se evaluaron aspectos cualitativos en: un cuestionario de autoevaluación, evaluación al profesor y evaluación al material didáctico. Para determinar si hubo mejor aprendizaje por medio de la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) se realizó un análisis estadístico de prueba U de Mann Whitney (Siegel, 1985), y se encontró que el empleo del ABP no propició mejores resultados que el método convencional, por lo que los tratamientos causaron efectos semejantes y que la Hipótesis Nula H_0 no se rechaza.*

Palabras clave: aprendizaje basado en problemas, semejanza de triángulos, enseñanza y aprendizaje de la geometría

Introducción

El experimento se efectuó en 16 sesiones, una hora cada una con 25 alumnos de segundo año de la Escuela Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN). Por varios años, el estudio de la geometría en la enseñanza secundaria en Colombia fue poco o nada desarrollado en las aulas. En los últimos años, por diferentes razones, nuevamente se ha hecho hincapié en la necesidad de que los estudiantes reciban formación en esta área. La experiencia de los autores, uno, como profesor de matemáticas en secundaria, y otro, como investigador, hablan sobre las diversas dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y particularmente en el tema de semejanza (Gualdrón, 2006).

De ahí nace esta investigación con el objetivo de evaluar el efecto que produce la aplicación de la propuesta Aprendizaje Basado en Problemas en el aprendizaje del tema de semejanza de triángulos en el curso de Matemáticas II. Se tomó en cuenta la idea de Pozo (1990) que el aprendizaje se produce cuando hay un cambio relativamente permanente en la conducta o en los conocimientos de una persona como consecuencia de la experiencia. De acuerdo con Mierson

(1995), el estudiante se compromete con el proceso de aprendizaje y construye su comprensión de los nuevos contenidos al relacionarlos con sus conocimientos previos.

Según Tama (1989) el profesor (como mediador) debe apoyar al alumno para enseñarle:

- A pensar, para que desarrolle un conjunto de habilidades cognitivas que les permitan optimizar procesos de razonamiento.
- Sobre el pensar, para animarlos a tomar conciencia de sus propios procesos y estrategias mentales.
- Sobre la base de pensar, para que incorporen objetivos de aprendizaje relativos a las habilidades cognitivas.

La idea fundamental de Piaget (1999) fue que el conocimiento se construye únicamente de forma interna y los individuos son capaces de construirlo cuando se está en contacto con un medio y se tiene una predisposición para interactuar con él.

Materiales

- Material didáctico "Modelo Aprendizaje Basado en Problemas".
- Guía de estudio (introducción, objetivos, justificación, estructura, criterios de evaluación, metodología, cronograma de actividades, glosario y la bibliografía recomendada).
- Material de apoyo para las actividades de aprendizaje (documentación de la metodología del ABP, mapa conceptual, pregunta de investigación del proyecto de tesis, una lista de simbologías matemáticas, formulario de proporciones y, teoremas y definiciones de triángulos semejantes).
- Descripción de funciones del director y secretario de equipo.
- Problemas resueltos paso a paso para mostrar un panorama al alumno de cómo desarrollar de manera formal un problema de semejanza de triángulos.
- Cuaderno de trabajo.
- Hojas de registro para la recopilación de datos del experimento.

- Postest constó de tres problemas de aplicación y dos ejercicios.

Los instrumentos que se utilizaron para la evaluación del experimento, fueron:

- Actividades del cuaderno de trabajo realizadas por cada equipo.
- Postest para determinar el nivel alcanzado en el aprendizaje del tema en ambos grupos. Los criterios fueron: dibujo, argumentación, procedimiento y comprobación e interpretación de la respuesta, con un escalamiento tipo Likert con la puntuación:

  (0) Muy mal (1) Mal (2) Regular (3) Bien (4) Muy bien

- La encuestas de opinión (autoevaluación, evaluación al profesor como tutor, evaluación al material de apoyo y evaluación del director de equipo).

Métodos

Se describe a continuación el desarrollo de cada actividad:

Sesión 1. Introducción al proyecto de tesis y el ABP en Power Point

Tuvo como propósito darles a conocer a los alumnos los objetivos principales que fomenta la metodología del ABP, así como también las actividades y responsabilidades que debieran desarrollar tanto el alumno como el profesor. Posteriormente se entregó a cada alumno el material de apoyo y la guía de estudio.

Sesión 2. Proceso para la solución de un problema

Se les dio a los alumnos el material de las funciones del director y secretario, y el cuaderno de trabajo. El plan era realizar una actividad en pantalla donde el grupo tenía que resolver un problema de aplicación paso a paso según se indicaba en el cuaderno de trabajo, observando también, el trabajo del Director (realizada por el investigador) y el secretario (profesor externo a la investigación). Como el investigador ya conocía a los alumnos en cuestiones de conocimientos, seleccionó a cinco alumnos que fueran mejores en su clase y así a cada uno de ellos los nombró equipo 1, 2, 3, 4 y 5. Después seleccionó a otros cinco estudiantes poco mejores que los primeros, y se integraron a cada uno de los equipos ya mencionados. Y así, se continuó con la elección hasta llegar con los últimos cinco estudiantes con dificultades para aprender.

Sesiones 3 – 14. Actividades colaborativas (Apéndice F)

Los equipos fueron observados y evaluados cuidadosamente con la ayuda de la hoja de registro. Las actividades se concluyeron en doce sesiones, de las cuales, tres actividades (actividades 1, 2 y 5) se realizaron en dos sesiones, y el resto (actividades 3 y 4) en tres sesiones.

Sesión 15. Aplicación al examen postest

Se aplicó el postest al final del experimento, para evaluar el proceso de aprendizaje.

Sesión 16. Aplicación a la encuesta de opinión

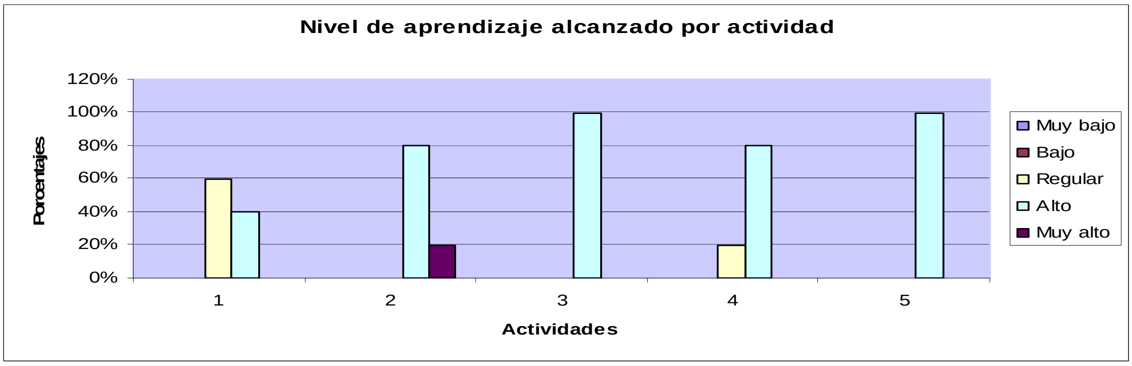
Se aplicó la encuesta al Grupo Experimental (GE) sobre la autoevaluación, evaluación al profesor y al material de apoyo para analizar sus opiniones.

Resultados

Análisis cualitativo del desarrollo de las actividades en solución de problemas.

Para el Grupo Control (GC), el proceso de aprendizaje no fue novedoso. A pesar de esta situación, los estudiantes asistieron puntuales y fueron participativos. Por otro lado, los equipos del GE estuvieron puntuales, y mostraron entusiasmo hacia sus demás compañeros de equipo. Durante el trabajo colaborativo, los equipos tuvieron diferente argumentación para resolver el problema, a saber, discutían entre ellos que la mejor forma de resolverlo era en base a la regla de tres; otros opinaban que era mejor por semejanza de triángulos. La concepción que se tiene en cuanto a la regla de tres y semejanza de triángulos es básicamente el mismo procedimiento que lleva al resultado, aunque para la investigación, realizar una proporción de lados conlleva al objetivo del proyecto.

Al final de las actividades, las representaciones de los equipos resultaron ser componentes importantes que permitieron conocer y discutir los distintos acercamientos a cada problema. Identificaron triángulos semejantes, hicieron trazos auxiliares, usaron proporcionalidad y comprobaron resultados. Durante las presentaciones de los equipos se detecta que los alumnos tienen la idea de identificar triángulos semejantes, más no dan argumentos del porqué esa relación de semejanza. Después de las exposiciones, algunos equipos defendieron su idea, y otros la modificaron. Con los porcentajes obtenidos de los estudiantes en los niveles de aprendizaje alcanzado en las actividades colaborativas, se presentan los datos en la figura 1.



Niveles por actividad: Muy bajo 0-4, Bajo 5-9, Regular 10-14, Alto 15-19, Muy alto 20

Figura 1. Nivel de aprendizaje alcanzado por actividad

La variación de porcentajes de los equipos, fue porque en su mayoría no escribían el resultado obtenido en términos del problema, y no verificaban el resultado obtenido. Al final de las actividades, con la ayuda de la encuesta de opinión, se deduce que los alumnos afirmaron que trabajar de manera colaborativa les propició mejores resultados de aprendizaje pues el explicarse entre ellos, respetar y cambiar ideas, fue lo que los orientaba a tomar mejores decisiones para la solución de las actividades.

Análisis cuantitativo del registro de datos de evaluación del postest

Los primeros tres problemas tuvieron como objetivo que los alumnos desarrollasen su intelecto para trazar el dibujo, para después analizar y utilizar las herramientas matemáticas más adecuadas y resolver. Los dos ejercicios restantes fueron figuras comunes con la finalidad de introducir los criterios de semejanza de triángulos propuestos en el material de apoyo. Algunos alumnos de ambos grupos expresaron que les fue difícil interpretar los problemas. Los aspectos que se evaluaron fueron: dibujo, argumentación, procedimiento y comprobación e interpretación de la respuesta, a excepción de los problemas 4a y 4b, que no se evaluó el dibujo pues ya estaba dado.

El alumno 25 del GE no se presentó al postest, por lo que se excluye del grupo. El alumno 2 también es excluido por sólo asistir el 30% de las sesiones, situación en la que no se puede decir que recibió el tratamiento. La muestra para el GE quedó con 23 alumnos. Se observa que los 27 alumnos del GC asistieron a dicha evaluación. Terminada la evaluación, se sumaron los puntos obtenidos por cada alumno, así, al sumar cada uno de los puntos alcanzados de los 23 estudiantes (1195) y al dividirse la suma obtenida entre el total de alumnos (23) se obtuvo un promedio de 51.9565 para el GE. Lo mismo se realizó para el GC que obtuvieron un promedio de 48.0740. A partir del problema 1, el 13% de los estudiantes del GC no realizaron el dibujo; el 35% no hicieron argumentación necesaria; el 48% no realizó el procedimiento y, un 78% no comprobaron el resultado obtenido.

Dificultades que presentaron los grupos en solución de problemas

Los errores cometidos en el postest de los dos grupos fueron, que confunden los lados correspondientes y por tanto escriben mal la proporción (GE = 13 errores; GC = 28 errores). Otro de los errores fue que presentan errores algebraicos (GE = 5 errores; y GC = 3 errores).

Análisis de las respuestas de la encuesta

Autoevaluación del estudiante (Datos evaluados en porcentaje)

De los alumnos encuestados, al 61% les gustó trabajar con la Metodología del ABP. La desventaja de trabajar con el método tradicional hace que el alumno se vuelva dependiente del profesor, es por esto que el 35% de los alumnos declararon que regularmente tuvieron dificultades para analizar la información sobre el tema, y un 43% calificó que su información fue poco oportuna para el trabajo a desarrollar. A pesar de ello, 48% declararon que trabajar en forma cooperativa fue más eficiente que trabajar solos ya que expresaban sus ideas con más confianza, terminando en una comunicación abierta, mientras que un 57% de ellos confirmaron que aprender en equipo no resultó difícil, pues construían juntos un nuevo aprendizaje.

Evaluación al profesor (Datos evaluados en porcentaje)

Para la evaluación del profesor, un 83% de los alumnos consideró que el profesor estuvo puntualmente a las sesiones. Los resultados arrojaron que un 57% de los alumnos coincidieron que el tutor mostró interés en las actividades del equipo y un 35% opinaron que ayudó a los equipos a formular preguntas y a tomar decisiones efectivas para la solución de los problemas. El 61% declaró que la orientación que el tutor proporcionó sobre la búsqueda de información cubrió las necesidades que requerían para su participación activa en el experimento, facilitó a un 39% el aprendizaje con las preguntas que les planteaba. 87% evaluaron que el tutor fue respetuoso y atento a las ideas de cada equipo, estimulándolos para progresar de manera adecuada hacia el logro de los objetivos.

Evaluación al material didáctico (Datos evaluados en porcentaje)

Para un 65% de los alumnos, el material proporcionado para el aprendizaje del tema fue adecuado para el desarrollo del curso, aunque para un 39% de ellos, los problemas no generaron mucho interés y por lo tanto, la investigación que realizaban fue poca para el equipo. El 48% consideró haber aprendido el tema mediante la solución de problemas; para un 52%, dichos problemas propiciaron discusión, lluvias de ideas y propuestas para poder resolverlos.

Resultados estadísticos

Para la investigación se consideraron las hipótesis:

H_1: El empleo de la estrategia de ABP, propicia mejores resultados de aprendizaje del tema de semejanza de triángulos”; H_1: $\mu_1 > \mu_2$

H_0: El empleo de la estrategia de ABP, no produce mejores resultados de aprendizaje del tema de semejanza de triángulos a los alumnos de segundo año medio superior: H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$

Donde:

μ_1 es la media de los datos obtenidos en el pos-test del GE (estrategia del ABP).

μ_2 es la media de los datos obtenidos en el pos-test del GC (método tradicional).

Para esta investigación se toma un nivel de significancia del 5%. La zona de rechazo tiene una magnitud dada por $\boldsymbol{\alpha}$ y una dirección dada por la hipótesis alternativa.

A continuación, se presenta una gráfica (Figura 2) para comparar los datos porcentuales de los resultados del postest de ambos grupos.

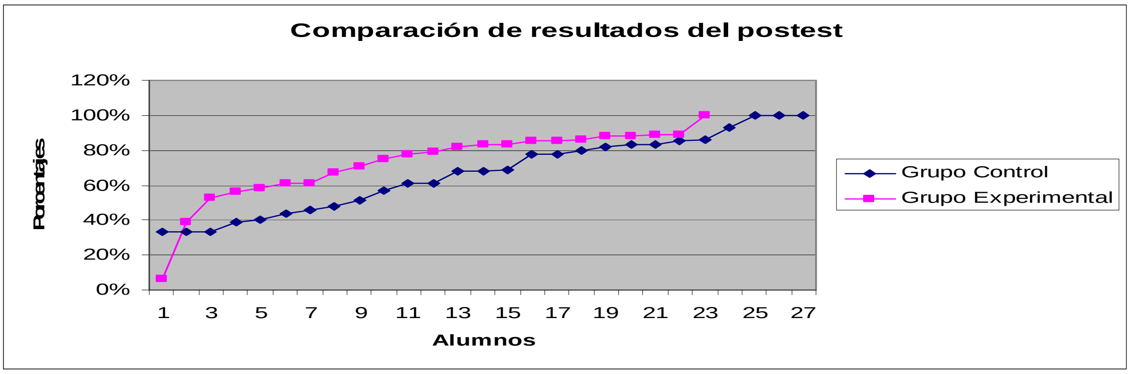


Figura 2 Comparación de resultados del postest.

Es necesario comentar que los resultados del GE fueron mejores numéricamente, pero estadísticamente los tratamientos fueron iguales.

Conclusiones

El objetivo del experimento fue determinar los efectos del empleo de la alternativa didáctica sobre los resultados de aprendizaje. A pesar de haber tenido la oportunidad de observar el trabajo de los dos grupos en las 16 sesiones del experimento, se deduce que la variable independiente (el empleo de la metodología del ABP) no propició mejores resultados, esto quiere decir que los tratamientos causaron efectos semejantes y que la Hipótesis Nula H_0 no se rechaza. Durante las actividades realizadas para ambos grupos se observaron algunos aspectos poco agradables en la minoría de los estudiantes, que se pueden clasificar como fuentes de invalidez interna. La primera fue la *maduración*, ya que los alumnos (en algunas sesiones) se mostraban desmotivados, aburridos, cansados, algunos con hambre, otros con sueño y poco se distraían entre ellos. Se considera también que la *inestabilidad* de los grupos fue otra fuente de invalidez que pudo haber afectado el resultado del experimento. Los principales factores que pueden describirse sobre la determinación de estas fuentes en el experimento, fueron:

- No se tenía una hora fija para realizar el experimento con los grupos, a veces era al final de sus clases y en otras, cuando el investigador terminaba su jornada de trabajo.
- La escuela no dispone de aulas extras, y cuando estaban presentes, el grupo y el investigador, se tenían que esperar hasta que se desocupara alguna.

- El aula que era desocupada, por lo general no estaba en buenas condiciones, hacían falta sillas, el investigador no contaba con un escritorio, el pintaron estaba en malas condiciones y desmotivaba el trabajo cuando se tenía que exponer en la sesión.

A pesar de lo que se observó durante las sesiones y fuentes de invalidez, en el análisis de resultados se registra que un 65% de los alumnos valoraron positivamente el material de apoyo, ya que dio a conocer los principales temas de semejanza de triángulos con ejemplos claros y una simbología que les ayudó a construir analíticamente el desarrollo del cada problema de las actividades. La mayoría de los alumnos consideraron favorablemente las actividades cooperativas, pues les permitió desarrollar su intelecto con base al conocimiento previo y al nuevo que generaban por equipo y por grupo.

Referencias bibliográficas

Gualdrón, É. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9° grado.* Valencia: Universidad de Valencia.

Mierson, Sh. (1995). Creating problems for PBL. *About Teaching, 47*. Obtenido el 8 de Marzo de 2009 desde http://www.udel.edu/pbl/cte/jan95-nutr.html

Piaget, J. (1999). *Psicología de la inteligencia.* Madrid: Psique.

Pozo, I. (1990). Estrategias de aprendizaje. En C. Coll, A. Marchesi y J. Palacios (Comps.). *Desarrollo psicológico y educación.* (pp. 199-224). Madrid: Psicología de la Educación.

Siegel, S. (1985). *Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta*. México: Trillas.

Tama, M. C. (1989). Critical thinking has a place in every classroom. *Journal of Reading 33(1),* 64-65.

EN BUSCA DE UNA ARTICULACIÓN EFICIENTE ENTRE MATEMÁTICA Y GEOLOGÍA

Lidia Beatriz Esper, Marta Inés Torres, Florencia María Plaza
Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Tucumán Argentina
liesper@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *La motivación e interdisciplinariedad juegan un rol fundamental cuando se enseña Matemática para no matemáticos. Como iniciación al trabajo interdisciplinario, fomentamos la participación activa de los alumnos en su aprendizaje, propiciando la intervención en actividades de investigación sobre Geometría del Esfuerzo y Geometría Fractal en Sismos. El objetivo que se persiguió apuntó a que el alumno alcance mayor comprensión de los contenidos, potenciando el análisis desde diferentes perspectivas, y se generen habilidades investigativas en los estudiantes de primer año de la carrera de geología. El proceso de enseñanza transcurrió en condiciones de trabajo individual y en pequeños grupos y se incorporó a la computadora como un instrumento para la resolución de problemas. Se seleccionó por su significatividad una experiencia áulica, y se realizó una reflexión sobre la misma.*
Palabras clave: articulación, motivación, geología, geometría del esfuerzo, geometría fractal

Introducción

El presente trabajo surge en el marco de un proyecto de investigación en el cual estamos interesadas en optimizar los logros en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas mediante el uso de distintos recursos didácticos, buscando introducir cambios a través de mecanismos, instrumentos y estrategias que puedan promoverlos, favorecerlos o inducirlos.

La investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática nos muestra que en las situaciones de aprendizaje los profesores nos basamos en las ideas de los alumnos y en nuestras propias construcciones de explicaciones, modelos, argumentos y evaluaciones para lograr un "buen" aprendizaje. Por otro lado, parece que se necesita un equilibrio entre el tiempo y el esfuerzo asignados a las habilidades de los alumnos para la indagación y, el tiempo y el esfuerzo dedicado a sus habilidades de argumentación (Gil y col., 1994).

En la curricula de las ciencias, las estrategias de reforma de la educación científica consisten en llevar a cabo un enfoque práctico tendiente a perfeccionar las habilidades de los estudiantes para la indagación. Pero se olvidan del razonamiento contextualizado y las habilidades de comunicación necesarias para entrelazar conjunta y coherentemente las pretensiones de los conocimientos de la ciencia (Kunt, 1993).

La preparación de los futuros profesionales con una formación integral de elevada calidad, entraña una concepción sistémica de la docencia-producción-investigación y la práctica de las universidades demuestran que el elemento que posibilita esta integración es la solución a los problemas profesionales concretos y en contexto.

Las estrategias que proponemos a los estudiantes para aprender no logran despertar su interés y entusiasmo en forma suficiente. Si se desea formar futuros profesionales capaces de asumir el compromiso de desarrollar tareas creativas e innovadoras, es preciso no tan solo instrumentar mecanismos de enseñanza que garanticen algo más que la sola transmisión de conceptos y métodos, sino también actitudes de cooperación, dedicación, voluntad de trabajo, buena disposición para responder a estímulos, afán de superación, etc.

Por esta razón consideramos que es conveniente que al seleccionar estrategias, tengamos en cuenta también aquellas que favorezcan la motivación, interdisciplinariedad y el desarrollo de la creatividad, ya que el trabajo con los contenidos científicos es una ocasión propicia para ello y de este modo contribuiríamos a facilitar el aprendizaje.

Desde un enfoque constructivista (Porlan, 1993) intentaremos mostrar que es posible diseñar actividades en donde los alumnos tengan que utilizar los conocimientos adquiridos en matemática y en otras áreas del currículo de geología, para lograr una aproximación mucho más adecuada a la "verdadera ciencia" (Esper, 2005). Tomamos como referente para este análisis, las teorías cognitivas de Ausubel (1978) y Vigotsky (1989) por ser éstas las que se centran en el aprendizaje producido en un contexto educativo.

Las teorías de aprendizajes nos muestran que cuando un concepto es relevante, persistente y transparente, se puede retomar en forma espiral y profundizar a medida que se avanza en la adquisición de conocimientos, sin perder de vista el aprendizaje significativo del tema que debe alcanzar el alumno en cada etapa. Además, es bien conocido que la utilización de la computadora permite abordar actividades en extensión y profundidad, con temas de complejo tratamiento formal, que faciliten el abordaje de los objetivos planteados; y que la revisión de la literatura científica sea una necesidad para el estudio independiente de las diferentes ramas del saber. No se pretende en este trabajo el montaje de un experimento con diferentes tratamientos. Sin embargo es importante la adquisición de habilidades inherentes al muestreo de cualquier investigación.

Cuando los alumnos expresan los resultados ocurre a menudo que no se discuten correctamente usando la literatura científica. Aquí se pretende que los estudiantes puedan obtener conclusiones a nivel elemental de lo que hayan expresado por escrito, en tablas y/o gráficos. Podrán usar la literatura consultada, criterios de especialistas o sus propios análisis, ya que se trata de un nivel mínimo.

Metodología

El proceso de enseñanza transcurrió en condiciones de trabajo en grupos –favoreciendo el trabajo cooperativo- a través del empleo de técnicas grupales especialmente dirigidas a lograr aprendizajes más significativos. La metodología utilizada también permitió resolver algunas situaciones problemáticas con la computadora, contar con guías tutoriales y apoyo docente.

La experiencia consistió, primero, en el tratamiento matemático de algunos temas geológicos, desarrollándose entre otros el que sustenta la teoría de la *Geometría del Esfuerzo*; la cual es la descripción del comportamiento de las diferentes fuerzas que actúan sobre la masa terrestre. En una segunda instancia, se abordo el tema de la *Geometría Fractal*, la cual describe mejor los objetos de la naturaleza. Ambos temas fueron desarrollados en cuatro clases teórico-practicas de dos horas cada una a los alumnos que cursaron Matemática II de la carrera de Geología de la Facultad de Ciencias Naturales e I. M. Lillo – UNT, en el periodo lectivo 2007.

Previo al primer encuentro, se entregaron distintas documentaciones referidas al primer tema en cuestión, con el objeto de que los alumnos realicen la lectura correspondiente y recurran al docente y/o experto en geología para la orientación o dudas presentadas:

- “Geometría del esfuerzo”, cap. 16, pp: 141-148, (Ragan, 1980).
- “Stress”, cap.5, pp: 43-72, (Davis, 1983).
- “Esfuerzo”, cap. 2, pp: 39-64, (Ramsay, 1981).

Primera fase: se formaron pequeños grupos, de no más de cuatro personas, para la discusión de los conceptos matemáticos involucrados en el material de lectura, con la presencia de un experto.

Se destacan los aspectos abordados:

- Conceptos vectoriales

Las fuerzas que actúan sobre un elemento de materia pueden ser de dos tipos. Las que surgen en el seno del material y son proporcionales a la masa de la sustancia (por ejemplo gravedad, fuerza centrífuga, magnética, etc) y se conocen como fuerzas Másicas o de Cuerpo (body forces) y se miden como unidades de fuerza por unidades de volumen, y las que se conocen como fuerzas de superficie actúan sobre la superficie del campo y se miden en unidades de fuerza por unidades de superficie. Estas fuerzas se denominan en geología esfuerzo (stress) y dan una medida de la intensidad de la reacción del material que se apoya sobre uno u otro lado de la superficie.

El estado de movimiento o equilibrio de un cuerpo depende de la interacción mecánica con otro cuerpo. Sabemos que la fuerza es la medida cuantitativa de esa interacción mecánica.

Si dos o mas fuerzas externas están compensadas de modo que la masa ni se acelera ni gira se dice que están en equilibrio. Ello requiere que la suma de las fuerzas y momentos sea cero.

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

- Concepto del calculo infinitesimal

El esfuerzo se define como el límite de la razón fuera- área a medida que el área se reduce.

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = S$$

- Conceptos matriciales y tensoriales

La magnitud y orientación del vector esfuerzo en un punto depende de la orientación de la superficie sobre la que actúa el vector esfuerzo.

El vector esfuerzo puede descomponerse como cualquier otro vector en tres componentes paralelos a los ejes coordenados, por lo tanto el esfuerzo en un punto queda completamente representado por los elementos de una matriz. Esta matriz se llama “matriz esfuerzo”. Los esfuerzos pueden ser compresivos o extensivos (compresión o tensión), intervienen nueve elementos, en tanto que en el caso de un vector solo tiene tres componentes. Tal matriz se conoce como tensor cartesiano de segundo orden. Por lo que el esfuerzo es un tensor.

Con el fin de desarrollar una descripción del estado del esfuerzo de una forma matemática, se define en principio tres ejes de coordenadas perpendiculares entre si: x, y, z. Se considera a los esfuerzos que actúan sobre las caras de un elemento cúbico de la sustancia cuando se aplica una fuerza y se supone que el estado de esfuerzo es perfectamente homogéneo. Los esfuerzos que actúan en cada cara pueden resolverse según tres componentes, un esfuerzo normal y un esfuerzo tangencial el cual puede resolverse según dos componentes paralelas a dos de los ejes de coordenadas. Este esfuerzo tangencial se conoce como esfuerzo de cizalla (shearing). En total hay nueve cantidades que actúan sobre las caras del cubo, las que se conocen como componentes del esfuerzo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Si se conocen todas ellas, entonces queda completamente definido el estado del esfuerzo del cubo elemental, pero no todas ellas son independientes puesto que el cubo está en equilibrio. Las dos fuerzas deben equilibrarse, por lo tanto no habrá ni movimiento ni rotación. Se analizó también el esfuerzo en dos dimensiones, es decir se lo consideró como un problema bidimensional y en este caso, se reduce a cuatro componentes del esfuerzo.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Segunda fase: Consistió en un trabajo práctico a cargo del profesor de la asignatura y siempre con la presencia de un experto. El objetivo de estas clases fue completar el estudio del tema, analizando situaciones concretas.

El marco teórico adoptado (Ausubel y Vigotsky) es el que nos permitió el diseño y la elaboración de las guías de actividades. El estudiante contó con tales guías donde se incluyó un resumen de lo visto y se la utilizó para la correcta elaboración de las tareas propuestas (etapa materializada), pero se las retiró una vez que se apreció que el alumno pudo realizarlas en forma independiente (etapa mental).

Tercera fase: se llevó a cabo una discusión plenaria donde cada grupo expuso (y posterior presentación) un informe parcial de las conclusiones obtenidas en la clase anterior, utilizando diferentes recursos didácticos: transparencias, afiches, etc.

Las "puestas en común" que siguen a la mayoría de las discusiones plenarias, tienen como objetivo hacer visibles más o menos inmediatos los resultados y conclusiones que, aunque parciales, podrían aportar algún grado de seguridad a las ideas y razonamientos de los alumnos.

Para el tema de la *Geometría Fractal*, el tratamiento metodológico fue análogo al anterior.

Previo al dictado del mismo, se entregaron distintas documentaciones referidas al tema, para que los alumnos realicen la lectura correspondiente:

- Cap. II y III, pp: 49-121 (Mandelbrot, 1975),
- Cap. III y IV, pp: 26-56 (Torres, 2001).
- Cap.IV, pp: 35-51 (Turcotte, 1992).

Primera fase: durante el desarrollo de la primera clase, se formaron pequeños grupos, de no más de 4 personas, para la explicación matemática de los conceptos involucrados en el material de lectura. Se presentaron las definiciones de fractal, factor de ampliación o escala, autosemejanza y dimensión fractal. Se analizaron algunos fractales como límite de poligonales y como límite de áreas.

Segunda fase: Utilizando distintos métodos y técnicas participativas en las clases prácticas y el uso de la PC, los alumnos trabajaron sobre la guía elaborada con actividades que involucraban los distintos tipos de niveles del proceso de asimilación: familiarización, reproducción, producción y creación, para asegurar la participación-acción del alumno. Y con el fin de afianzar ciertas habilidades se tuvieron en cuenta, en las mismas, las etapas: material o materializada, verbal y mental.

Tercera fase: Como aplicación al tema, se determinó la dimensión fractal de la actividad sísmica intermedia (70 - 300 km) entre 22º S - 28º S y 66º O - 68º O, donde la actividad sísmica dominante es una consecuencia directa de la subducción de la placa de Nazca bajo la placa Sudamericana.

Se usó la base de datos del USGS Nacional Earthquake Information Center, para un período de 68 años (1933-2001) y el análisis se realizó utilizando Excel y se corroboró con el software IASPEI (Algorithms for Earthquake Statistic & Prediction).

Se calculó la dimensión fractal para sismos de magnitudes pequeñas (menor que 4 en la escala de Richter) y medias (de 4 a 6 en la misma escala) tomando c = 1 y c = 1.5 respectivamente.

A través de esta actividad, el alumno ve la aplicación matemática a su especialidad, reconoce la noción de invarianza en escala, ley de potencia, propiedades de logaritmos, frecuencia acumulada, diagrama de dispersión, recta de regresión y coeficiente de correlación.

Al finalizar, cada equipo presentó un informe final de esta actividad investigativa.

Teniendo en cuenta el nivel académico de los estudiantes de 1º año de la carrera, y suponiendo que carecen de las habilidades investigativas, esta última actividad se la consideró como un trabajo investigativo concebido de manera tal que en la ejecución de sus acciones transitaran por las diferentes etapas del proceso de la investigación científica, a un nivel elemental durante el curso académico, sirviéndole la asignatura como vía para la integración académico-laboral-investigativa.

Se aplicaron encuestas durante el desarrollo de esta experiencia para valorar: metodología aplicada (distinta a la tradicional), comprensión de los temas, valoración de los problemas presentados, esfuerzo demandado por las tareas, adquisición de ciertas habilidades, conocimiento sobre computación, etc. Además se realizó la observación de la calidad en la redacción y exposición del informe científico-técnico elaborado por los estudiantes para evaluar las habilidades relacionadas con el mismo; y para evaluar continuamente las actividades del sistema didáctico propuesto, se utilizó el método de observación que permitió dar cuenta de los procesos mientras éstos se realizan, detectar errores dentro de la clase, conocer al grupo más de cerca, etc. (Anguera, 1983).

Conclusión

El abordaje de estas situaciones problemáticas, nos llevó a consultar a docentes especialistas en cada una de las áreas involucradas, con lo cual se logró una interdisciplinariedad entre cátedras.

El 60% de los alumnos opinan que han comprendido satisfactoria o muy satisfactoriamente los temas trabajados con esta modalidad, el 30% medianamente y reconocen que ha sido poco satisfactoria el 10%.

El 70% de los alumnos encuestados declaran que la modalidad de trabajo lo ha ayudado mucho en la interpretación y abstracción de situaciones problemáticas, el 30% considera que la ayuda ha sido escasa o nula.

El 75% de los alumnos dicen preferir esta metodología sobre la tradicional, el 20% se manifiesta por la no preferencia y el 5% no contesta.

La totalidad de los alumnos opinan que les demandó un esfuerzo mayor para la resolución de los ejercicios planteados y/o para la actividad investigativa. Los ejercicios planteados le parecieron interesantes a la mayoría (75%) de los alumnos encuestados, y triviales al resto.

Si bien la presencia de la PC sirve para reforzar la estructura de control presente en una estructura cognitiva, esto es parte importante para la construcción de un puente que va de una estructura cognitiva hasta la conceptualización formalizada de la noción involucrada.

El 85% de los alumnos posee conocimientos sobre computación, en general adquiridos durante la escuela secundaria, y solo un 10% declara no tener acceso a una computadora.

Todos los alumnos requirieron al menos ocasionalmente la orientación o apoyo del docente para resolver las aplicaciones planteadas. Lo que indica que la asistencia de la herramienta computacional no implica el reemplazo del docente, sino que funcionaría como un efectivo complemento.

Se mejoró algunas habilidades lingüísticas (capacidad de expresar claramente las ideas por escrito, comprender el lenguaje simbólico...) y habilidades de interpretación y traducción entre diferentes formas de expresión (capacidad del lenguaje verbal al gráfico, y del lenguaje gráfico al algebraico, así como la capacidad de realizar análisis crítico de la situación planteada).

Los estudiantes fueron capaces de comunicarse entre pares y con profesores, identificar problemas, buscar información pertinente; optar con racionalidad entre alternativas, trabajar en equipo y lograr un cambio de actitud, se sintieron involucrados en su aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Anguera, M.T. (1983). *Manual de prácticas de observación*, Madrid: Trillas.

Ausubel, D. (1978): P*sicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Davis, G. H. (1983). *Structural Geology Rock and Regions*. Nueva York: Plenum Press.

De Bono, E. (1989). *El pensamiento lateral.* Argentina: Paidos.

Esper, L.B. (2005). Fractales en las Ciencias. Geológicas. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Tucumán.

Gil, D. y Carrascosa-Alis, J. (1994). Bringing pupil´s learning closer to a scientific construction of knowledge: A permanent feature in innovation in science teaching, *Science Education 78*, 3.

Gutenberg B. y Richter Ch. (1944). Frequency of earthquakes in California. *Bull. Seism. Soc. Am. 34*, 185-188.

Kunt, D. (1993). Science as argument: Implications for teaching and learning scientific thinking. *Science Education 77*, 319-337.

Mandelbrot, B. (1997). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

Porlan, R. (1993). *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo enseñanza-aprendizaje basado en la investigación educativa*. Sevilla, España: Diado. Editorial S.L.

Ragan, D. (1980). *Geología Estructural*. México: Editorial Limusa.

Ramsay, J. (1981). *Plegamiento y Fracturación de Rocas*. México: Editorial Limusa.

Torres, M.I. (2001). *Métodos Estadísticos aplicados a la Sismología*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Tucumán.

Turcotte, D.(1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. New York: Cambridge University Press.

Vigotsky, L.S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial Crítica.

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS SUCESIVAS EN LA LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS DE ESFM-IPN, CON BASE EN EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Moisés Ricardo Miguel Aguilar, Maria Guadalupe Simón Ramos
CINVESTAV-IPN México
mmiguel@cinvestav.mx, gsimon@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento Variacional Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación recae bajo el marco teórico del Pensamiento y Lenguaje Variacional pues confiamos en que éste podría replantear el estudio de algunos elementos del cálculo que pueden contribuir a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional (ESFM-IPN). Presentamos a continuación algunos de los resultados que obtuvimos al enfrentar a los estudiantes de esta escuela a una secuencia de problemas que han sido planteados tradicionalmente sobre pensamiento y lenguaje variacional dentro del contexto gráfico (Cantoral y Farfán, 1998; Testa, 2004). Con la finalidad de encontrar evidencia que sustente la necesidad de una restructuración en los planes y programas de estudio. Así como de un cambio en el discurso matemático actual.*

Palabras clave: derivadas sucesivas, pensamiento y lenguaje variacional, límite

Introducción

Es conocido en el mundo de la ciencia que gran parte de los conocimientos en matemáticas han sido el resultado del desarrollo de otras ciencias, como por ejemplo, en Física, la mecánica de los trabajos de Newton dio origen al cálculo infinitesimal. Por su parte, Azcárate (1990), señala que el carácter de los programas vigentes (exhaustivos, excesivamente formales y totalmente separados de la vida cotidiana y de los planes de otras materias), así como la propia estructura de los estudios, ha inducido una enseñanza de las matemáticas en la que se ha descuidado un poco su papel como instrumento de conocimiento.

Es nuestro deseo con este trabajo, encontrar evidencia que nos muestre hasta qué grado esta situación se encuentra cercana a la realidad que se vive hoy en día en la ESFM, considerando que las materias de Cálculo se imparten sin hacer referencia a los problemas le que dieron origen ni a sus aplicaciones más significativas.

En el caso de la física en la *Licenciatura en Física y Matemáticas* se tiene un claro ejemplo de las necesidades y problemas a los que nos referimos, pero consideramos que la vinculación entre este tipo de materias y las que son propias de la matemática debería ser más cercana.

La cuestión aquí sería comprobar qué tan capaces son los estudiantes, con la formación que han llevado, de tomar su conocimiento en matemáticas y utilizarlo en situaciones que requieren más que el uso de definiciones y resultados teóricos

El pensamiento y lenguaje variacional en la ESFM-IPN

El exhaustivo ritmo de trabajo en la ESFM tiene tan acostumbrados a los estudiantes a tratar con los fenómenos de cambio. Tanto que no les permite detenerse a reflexionar en el hecho de que se utilizan ideas y procesos matemáticos para modelar fenómenos como: la desintegración de sustancias radioactivas, el movimiento de los planetas, la velocidad de las reacciones químicas, el crecimiento poblacional, entre muchos otros, aunque tratemos con estos en varios de nuestros cursos. En pocas palabras, en distintas áreas se utilizan modelos matemáticos en los que la clave de su estudio recae en la noción de cambio y éste nos conduce a la noción de variación cuyo estudio se realiza por medio del cálculo diferencial e integral, ramas de la matemática que se tratan con bastante rigor y profundidad en los cursos de Cálculo 1 y 2 de esta escuela.

El sentido de este trabajo recae, en que si se recurre a la noción de variación se podría replantear el estudio de algunos elementos del cálculo que pueden contribuir a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la ESFM.

Pensamos que la enseñanza del análisis elemental (cálculo) en la ESFM no promueve *directamente* como parte del currículo en matemáticas el estudio y el análisis de la variabilidad de fenómenos reales sujetos al cambio, hecho en el que varias investigaciones muestran que el estudio de las funciones encontraría una especial significación, estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos (Ruíz, 1994), además dicha situación tampoco favorece el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional, como se menciona en Cantoral y Reséndiz (2003); y en Dolores , Alarcón y Albarrán, (2002).

Dichas investigaciones muestran que, pareciera ser que la enseñanza de las matemáticas reduce el sentido personal que el educando pudiera tener de los conceptos, a un nivel de abstracción tan general que aleja la posibilidad de que pueda construir su significado objetivo. Y obstaculiza que resuelva muchos problemas relacionados con la modelación de procesos objetivos.

Lo dicho anteriormente no significa que los niveles rigurosamente teóricos deban ser omitidos del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que debe llegarse a ellos partiendo de las experiencias (sintetizadas y tratadas para lograr los objetivos de aprendizaje que se proponen) que la sociedad recorrió para llegar a formular la teoría. Lo cuál implica incorporar tiempo y actividades, así como un esfuerzo adicional en la docencia, en vez de las pobres exposiciones tradicionales. Se trata de aprovechar los lenguajes más empíricos de la matemática (los que se trabajan en el bachillerato son una buena muestra) para procurar la vinculación entre lo intuitivo y accesible al estudiante, y lo teórico que debe aprender.

El objetivo de los cursos en los que se imparte el análisis elemental, según el programa de estudios de la ESFM, es la justificación de las técnicas de cálculo infinitesimal aprendidas en cursos anteriores. Sin embargo, también se considera que es la oportunidad de enseñar a los alumnos a traducir ideas geométricas e intuitivas a un lenguaje claro y preciso, que muchas veces es la única manera de poder abordar determinados problemas matemáticos y físicos. Esta habilidad en parte podría complementarse recurriendo a las nociones de variación y cambio que anteriormente deberían haber desarrollado los estudiantes. Nociones, que se encuentran muy escasamente desarrolladas en estudiantes de nivel medio superior, superior e incluso en profesores de ambos niveles. Dichos estudios han basado sus explicaciones de estos problemas en la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variacional.*

El Pensamiento y Lenguaje Variacional es una línea de investigación que describe, genéricamente, un programa de investigación en marcha, no excluyente ni de orientaciones teóricas ni de acercamientos metodológicos, con el que se busca entender cómo es que se construye o se forma progresivamente entre los estudiantes dicho pensamiento. Entendemos por estudio del Pensamiento y Lenguaje Variacional como aquel que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos, propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que les da cabida. O sea, aquel que pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una orientación múltiple, por un lado se ocupa de las estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio y en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y se resuelven en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas tanto en la escuela como en el laboratorio (Cantoral, 1997)

Metodología

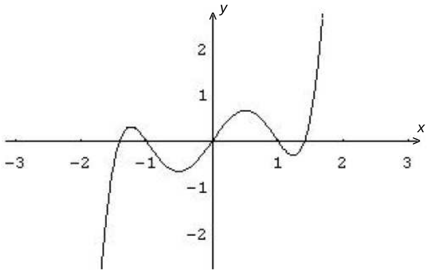
Lanzamos una convocatoria a todos estudiantes de todos los grados de la Licenciatura en Física y Matemáticas con el único requisito de que hubieran llevado el curso de Cálculo 2. Curso donde se aborda cálculo diferencial e integral. Se les invitó a resolver un cuestionario con diversas preguntas sobre la función y sus derivadas sucesivas. La respuesta de los estudiantes fue pobre pero la muestra final tuvo bastante riqueza pues incluyó estudiantes de todas las especialidades, tanto de la especialidad en física como de la especialidad en matemáticas.

El diseño de actividades se realizó con base en diseños que fueron aplicados en otros estudios, de los cuáles realizamos un análisis de los elementos que nos parecía importante incluir, con la finalidad de observar algunas concepciones que los estudiantes pudieran tener sobre la función, la derivada y sus derivadas sucesivas. Con el tiempo algunos de los diseños se fueron modificando y adaptando a las necesidades y conocimientos de nuestra población hasta obtener tres diseños finales, que consideramos, reflejan muy bien su papel dentro de nuestro estudio. Presentamos a continuación el análisis de una pregunta de cada uno de los diseños con las cuales nos proponemos presentar evidencia del objetivo de este trabajo.

Análisis de resultados

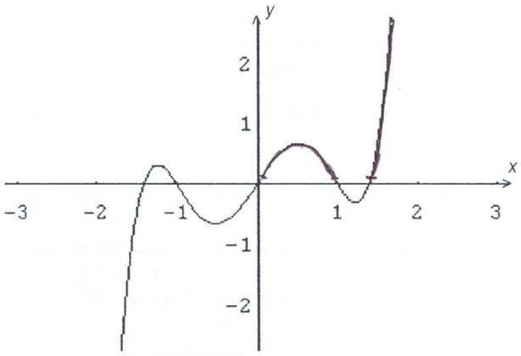
Presentaremos a continuación algunas de las preguntas que incluimos en el cuestionario junto con el objetivo por el cual se incluyó y la respuesta de los estudiantes.

A.4 Indique sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$.

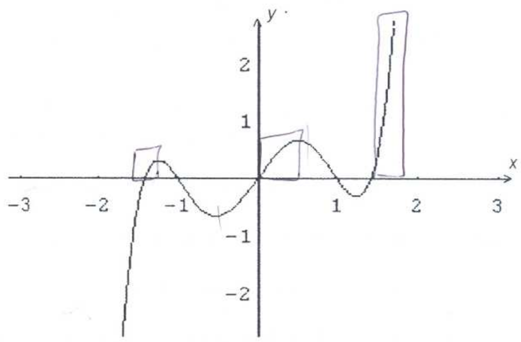


Grafica de la función f(x)

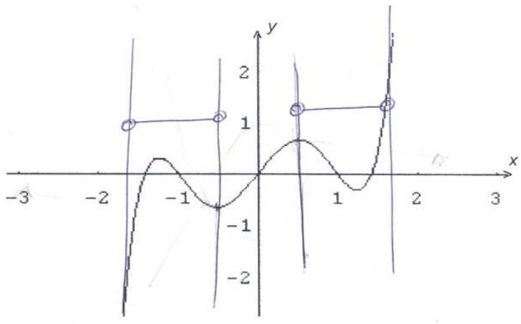
Algunas respuestas que dieron los estudiantes fueron:



Grafica de la función f(x)



Grafica de la función f(x)



Grafica de la función f(x)

Esta fue la cuarta pregunta de nuestro primer diseño, el cual nos resultaba muy importante pues la respuesta requería que se utilizaran estrategias de pensamiento y lenguaje variacional, es decir, necesitaban recurrir a un manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas pero solamente uno de los estudiantes lo pudo llevar a cabo.

Este estudiante tomó la función y obtuvo el gráfico de su primera derivada considerando la información que le proporciona la derivada acerca de crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, máximos y mínimos. Para dibujar a la segunda derivada ahora consideró a la primera derivada como la función original y de esta forma también pudo obtener el trazo de la tercera derivada (estos trazos los realizó en un dibujo aparte) e indicó en la gráfica las regiones donde *f'''(x)>0*.

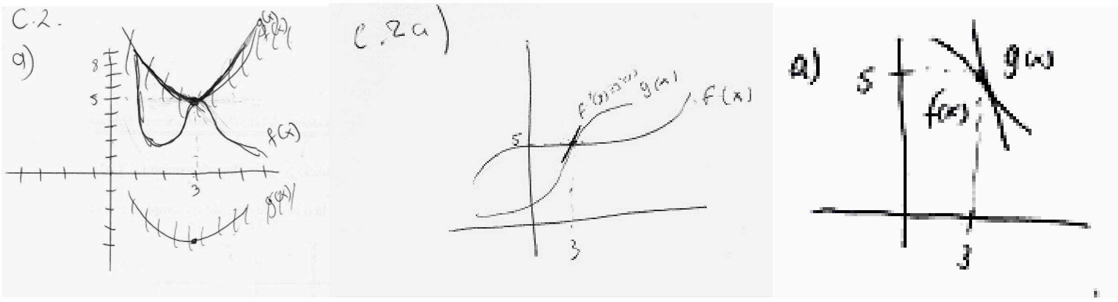
B.7 Podrías decir ¿Cuál es el significado geométrico del siguiente límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$?

Buscábamos que los alumnos hicieran evidente si pueden dar o no una representación gráfica al límite y el tipo de argumentos que utilizan para la construcción e interpretación de ésta, en especial la importancia e interpretación que den al cociente para la construcción de dichos argumentos. Estas fueron algunas de las respuestas que dieron:

> *"es la pendiente de la recta secante en el punto f(a)"*
>
> *"la pendiente de f(x) en el punto **a**"*
>
> *"es el límite de las rectas secantes a la gráfica de f siendo **a** un punto fijo sobre f y x variando cada vez más próximo a **a**".*
>
> *"pendiente de la recta tangente a f(x); razón de cambio"*
>
> *"se mide el cambio de la función en un cierto intervalo, la pendiente a la curva en ese punto"*

C.2 Sean *f* y *g* dos funciones reales, realiza en cada caso un esbozo, en un mismo sistema de ejes cartesianos, del gráfico de dichas funciones, en un entorno del punto en cuestión, de modo que se cumplan las condiciones dadas.

C.2a) $f(3) = g(3) = 5$
$f'(3) = g'(3) = -2$
$f''(3) = -4,\ g''(3) = 8$



En el primer caso el estudiante no solo no considera correctamente el signo de la derivada, sino que sus bosquejos indican que toma a la derivada como cero en los tres casos.

Sólo una estudiante tuvo problemas al trazar el bosquejo de ambas funciones considerando su segunda derivada. Sus dibujos muestran que no le ha dado un significado correcto al signo de la segunda derivada.

Es importante hacer notar que un estudiante además de haber bosquejado de una forma adecuada (de acuerdo a los aspectos considerados) al parecer considerar el valor concreto de la segunda derivada al haber tomado en cuenta también qué tan cóncava es cada una de las funciones, considerando el caso en que $|f''(a)|>|g''(a)|$ o el caso contrario $|f''(a)|<|g''(a)|$. Además muestra cómo al tener la misma primera derivada, las funciones son muy parecidas alrededor del punto en cuestión, de tal modo que casi se pueden confundir.

Conclusiones generales

El manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil (Cantoral, y Farfán, 1998).

- Las repuestas a la pregunta *A.4* indican que los estudiantes no pueden establecer un manejo simultáneo entre las derivadas sucesivas, lo cual índica que su concepción de derivada se muestra frágil.

- En *B.7* los estudiantes dan muestra del uso que hacen de sus recursos memorístico, de la falta de comprensión del lenguaje matemático además de su falta de comprensión de la noción de cambio implicita en la definición analítica de derivada.
- La pregunta *C.2* muestra que carecen de herramientas que les permitan pasar del lenguaje gráfico al lenguaje algebraico, indispensables para establecer el manejo silumtáneo entre las derivadas sucesivas.

Lo que nos hace pensar en la urgencia de una restructuración en los planes y programas de estudio de la ESFM-IPN, ademas de la importancia de incluir las nociones de variación, pues estas replantearían el estudio del cálculo y contribuiría a una reconstrucción del discurso matemático escolar en la ESFM.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Artigue Michéle. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1)*, 40-55.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Documento interno. D.F., México: Cinvestav del IPN.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, (pp.1-10)

Cantoral, R. y Farfán, R. Ma. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. Ma. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1)*, 27-40.

Cantoral, R., Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(2)*, 133-154.

Marcolini, M. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(1)*, 25-68

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D.F. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(3),* 225-250.

Farfán, R. Ma. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González, N. R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Testa, Z. Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

EL LOGARITMO A PARTIR DE LA CUADRATURA DE UNA FUNCIÓN

Blanca Estela Nazario Vázquez, Marcela Ferrari Escolá
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México
will33303@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Nuestra hipótesis de investigación fue formulada en términos de asumir que mediante un proceso de integración de funciones, tomando como argumentación la covariación entre progresiones aritméticas y geométricas los estudiantes, a través de interactuar en distintos marcos (aritméticos, geométricos y algebraicos), construyen y reconstruyen diferentes significados, entre ellos, el de nuestro interés, lo logarítmico. Donde también se establece una cierta relación entre la derivada y la primitiva de una función (Teorema Fundamental del Cálculo) y a la par una caracterización de funciones escolares. Nuestras actividades las desarrollamos en un ambiente de geometría dinámica haciendo uso del software Cabri II Plus. Nuestro trabajo se desarrolla bajo la visión socioepistemológica y tomamos como metodología a la ingeniería didáctica.*

Palabras clave: áreas, curvas, logaritmo, covariación

Al analizar la presencia de los logaritmos en la escuela, tal como nos menciona Ferrari (2001), existe una "dislexia" entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar propiciando cierto vaciamiento de significados de los mismos en los estudiantes. En general, los estudiantes realizan operaciones o cálculos con funciones mecánicamente, sin conocer la naturaleza de ésta, no le dan el significado esperado por los profesores a las expresiones, como en el caso de la función logaritmo.

Arrieta (2003) reporta que los estudiantes muchas veces se encajonan en lo *lineal*, prueba de ello es que cuando se les presenta una tabla de valores donde se les pide encontrar algún valor casi inmediatamente usan la regla de tres para cualquier caso, sin tener conciencia del tipo de crecimiento que está involucrado, quedándose en lo lineal y evidenciando por ejemplo lo cuadrático. Nos menciona que para construir un modelo numérico de lo lineal no sólo basta con manipular los datos de una tabla que describe un comportamiento lineal sino también distinguir lo que no es lineal, la contraparte.

De la propuesta que Ferrari (2001) hace de los logaritmos, buscando una aproximación a la construcción de los mismos, tomamos una parte que consideramos relevante, tanto para proveer al logaritmo de significados, como para reconstruir o construir algunos conceptos, por ejemplo, si tomamos como argumento principal la covariación entre progresiones aritméticas y geométricas, éstas permiten saber el tipo de función del que se está *hablando*, ya sea una polinómica o trascendente (logaritmo y exponencial). Entendemos en este trabajo a la covariación como la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Nos interesa que se perciba el tipo de crecimiento que sufre cada uno de los elementos que intervienen y aceptar la íntima relación que se establece entre ambos.

En este estudio socioepistemológico de los logaritmos, éstos se escapan del comportamiento que siguen las funciones polinómicas, en las cuales al considerar su crecimiento numérico desde una tabla de valores, la presencia de progresiones aritméticas tanto en su dominio e imagen nos permite hablar de una función lineal, mientras si se recorre a la primera, segunda, etc. diferencia de las ordenadas, hablaríamos de una cuadrática, cúbica, etc. respectivamente. Mientras tanto si tenemos en *juego* progresiones aritméticas y geométricas tanto en el dominio e imagen, se trata de funciones trascendentes, en particular, del logaritmo y la exponencial.

El objetivo general de nuestra investigación es:

Que los estudiantes:

-Caractericen a las funciones polinómicas y trascendentes (logaritmo y exponencial) a partir de la covariación de las progresiones aritméticas y geométricas.

-Establezcan una relación entre la derivada y la primitiva de una función a través de la interacción con diferentes tipos de funciones.

Para ello realizamos una secuencia de actividades con dicho objetivo, la cual se llevó a cabo, como primer acercamiento en la ciudad de Mérida, Yucatán. A continuación se detallan las actividades, aunque cabe mencionar que en este caso no se tomó a las exponenciales, debido a que este objetivo fue ampliado con este tipo de funciones después de esta experiencia.

Análisis preliminar

Este análisis se toma del análisis socioepistemológico y exhaustivo que realiza Ferrari (2001,2004, 2007). De donde a través del análisis *didáctico* se reconoce la problemática en cuanto a que en los libros de texto la noción de logaritmo aparece escindida de su significado original, de las controversias y consensos que suscitó. Respecto al análisis *cognitivo* resulta interesante que ni los alumnos ni los mismos profesores cuentan con muchos argumentos para definir a los logaritmos. En el aspecto *epistemológico*, al analizar el devenir de los logaritmos en la historia, brinda una enorme riqueza, debido a que se vislumbran los obstáculos inherentes al concepto, además de conocer las practicas sociales que llevaron a su construcción, las cuales contribuyen enormemente para realizar un rediseño del discurso matemático escolar, entrando también el aspecto *social*.

Diseño de la situación didáctica y su análisis a priori

Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.) (Brian, 1996, citado por Ruiz Higueras, 2000). En este trabajo las variables didácticas que estarán en juego son las particiones en el eje *x*, es decir, las progresiones geométricas y aritméticas, ya que esto le permitirá al alumno reconocer la función resultante, validando cuales la describen *mejor*.

Se parte de tres actividades, en cada una se exploraran las siguientes funciones:

- La función constante $f(x)=1$.
- La función lineal $f(x)=x$.
- La función hiperbólica $f(x)=\frac{1}{x}$.

La idea de iniciar así, primero con funciones polinómicas, es para que los estudiantes se percaten como el logaritmo quiebra con ese patrón de crecimiento, con ese *juego* que se da entre las progresiones, que por lo tanto ya no se trata del mismo tipo de función, sino ahora se está en el campo de las trascendentes. Debido a que nos interesa la argumentación entre la covariación de las progresiones aritméticas y geométricas, creímos conveniente formar dos grupos de trabajo que exploraran alternadamente dichas progresiones, con la finalidad de generar un ambiente rico en discusión.

En la *actividad 1*, tomamos la función $f(x)=1$. Se plantea con la finalidad de que los estudiantes se familiaricen con el uso del software Cabri II Plus. También se pretende que los estudiantes comiencen a envolverse con los distintos marcos (geométrico, numérico y algebraico) para generar argumentaciones, además consideramos que es una función que les permite hacer una vinculación de estos marcos.

Se dan las instrucciones para la construcción de la curva y el cálculo de áreas. También se les da una tabla de valores, para percibir mejor la covariación entre las progresiones, estableciendo que encuentren ya sea la diferencia o razón en la columna de las *y*, según crean conveniente. Esto se hace también con las siguientes funciones.

La *actividad 2* se trata de la función $f(x) = x$, donde ya con un poco de manejo de Cabri, aproximarse al área que se encuentra bajo la curva, ya que se pretende que por lo menos se percaten que se trata de una función cuadrática. Además de que vayan vinculando la progresión que les permita hablar mejor de ese tipo de funciones, la progresión aritmética. Lograr establecer que de acuerdo a la posición de las progresión aritmética que les da como resultado, digan de que función se trata, ya sea lineal, cuadrática, cúbica, etc.

En la *actividad 3* se toma la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con la que se busca *desequilibrar* la construcción que hasta el momento tienen, basada en la covariación entre progresiones aritméticas. Que se percaten que esta nueva función, el logaritmo, se escapa de este patrón de crecimiento. No se pretende que lleguen a la expresión algebraica como tal, pero se considera que es posible que los estudiantes logren percatarse que se trata del logaritmo, ya sea recordando el resultado de la integral, o debido a que ya pueden haber establecido que la función que les resulta es la primitiva y la derivada de esta última es la función de la que calcularon el área, por lo tanto pueden recordar que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $x>0$. Para finalmente establecer una diferencia entre las funciones polinómicas y trascendentes.

Experimentación

Impartimos un laboratorio didáctico en la XI Escuela de Invierno de Matemática Educativa realizada en Mérida, Yucatán, en donde se tomaron elementos de la geometría en un ambiente con Cabri II Plus, las funciones fueron sometidas a un proceso, la *integración*, tomándolo como “el área bajo la curva" basándose en progresiones aritméticas y geométricas, las cuales generan argumentos que permiten construir y reconstruir los significados que los estudiantes tienen de las funciones.

Este diseño de actividades surge de la tercera parte que Ferrari (2007) plantea como una de las fases para la construcción social del logaritmo. Es la etapa donde se plantea al logaritmo como *objeto teórico*, visto como la integral de la función $f(x)=\frac{1}{x}$. La construcción de la función logaritmo como la integral tomando como argumentación la covariación de las progresiones geométricas y aritméticas, contribuye a que los estudiantes identifiquen y diferencien al logaritmo de las funciones polinómicas, debido al patrón de crecimiento. Desde esta visión, partimos para la construcción de nuestras actividades, considerando que esto ayuda a que los estudiantes logren caracterizar a las funciones polinómicas y trascendentes, teniendo como argumento principal la covariación entre las progresiones aritméticas y geométricas. Además de lograr establecer la relación que existe entre la función graficada y la función obtenida, es decir, que los estudiantes se percaten que el "área bajo la curva de la derivada es la gráfica de la primitiva" (Aguilar, 2005).

La mayoría de los estudiantes que se inscribieron al laboratorio eran estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. El laboratorio didáctico se llevó a cabo tres días con sesiones de aproximadamente 3 horas. En todas las actividades tomamos una función del tipo $f(x)=kx^n$ donde particularmente consideramos $k=1$ y $x\geq 1$, solicitándoles a los estudiantes argumentar sus respuestas.

Análisis a posteriori y validación

Presentaremos los resultados de las actividades, se ubicarán de acuerdo al tipo de progresión que manejaron.

Para la *primera actividad*, los estudiantes, en general, presentaron pocas dificultades, algunas cuestiones relacionadas con el software y con el significado de algunas simbologías de la tabla.

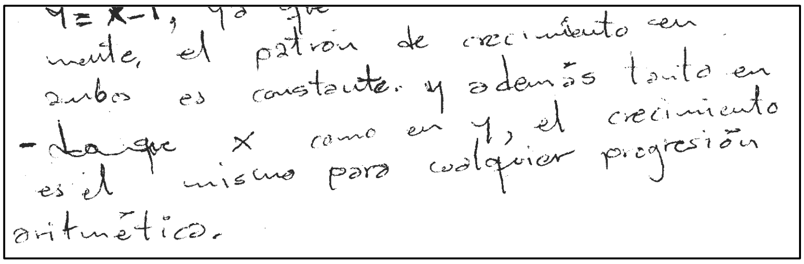


Figura 1

Para los estudiantes que tomaron una progresión aritmética, fue casi inmediato observar que se trataba de una función lineal menos una constante.

Los valores en la tabla les permitieron establecer sin muchos cálculos la expresión algebraica que describe dicho patrón de crecimiento.

Además logran percatarse de cómo crece cada columna y la relación entre ambas. En cuanto a los estudiantes que tomaron una progresión geométrica lograron percatarse de qué función se trataba, pero no hicieron hincapié en la progresión geométrica que les resultó, no teniendo aún elementos para caracterizarlas. Tanto los estudiantes que trabajaron con progresiones aritméticas y geométricas obtuvieron una expresión algebraica. *Figura 1.*

Respecto a la *segunda actividad* hubo más complicaciones para saber de qué función se trataba. A los estudiantes que trabajaron con la progresión aritmética no se les dificultó operar con ella y en consecuencia hallar la función, en este caso la cuadrática, consideramos que esto en parte se debe a que, generalmente en la escuela se trabaja con ese tipo de progresiones cuando se tabula y grafica. Mientras tanto los estudiantes que trabajaron con las progresiones geométricas presentaron dificultades para hallar la relación que existía en el crecimiento de cada variable, a pesar de ello un estudiante logró hacer un análisis muy interesante, como se describe a continuación.,

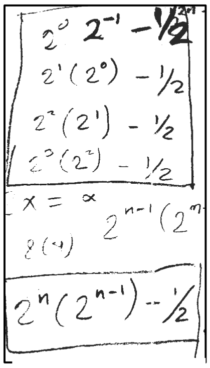


Figura 2

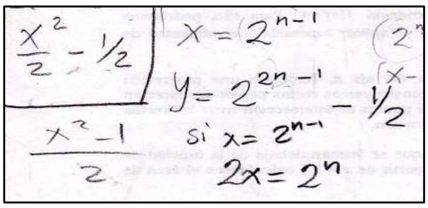


Figura 3

Este estudiante inició tomando valores en el eje de las *x* en progresión geométrica, logrando vincularlas a través de otro crecimiento una progresión aritmética con la cual iba obteniendo tanto los valores del dominio como los de la imagen, para después dejarlas en una sola función. Lo interesante de este caso es que logra relacionar a la progresión geométrica con otra, la cual se aproxima mucho a una progresión geométrica. *Figura 2 y 3.*

Respecto a la *tercera actividad* se percató un cierto *desequilibrio* debido a que en esta última actividad los estudiantes eligieron libremente con que progresión trabajar. Casi todos los estudiantes prefirieron la progresión aritmética, pero a estos estudiantes no les ayudó mucho tomar esta progresión ya que los valores obtenidos no presentaban algún patrón de crecimiento, por lo que solo se quedaron en la tabla de valores, no encontrando ninguna relación entre los valores de *x* y *y*. Presentándose así uno de los obstáculos previstos, debido a los diferentes patrones de crecimiento entre los tipos de funciones. *Figura 4.*

x	y	Δy	¿diferencia o razón?
1	0		
2	0.75	0.75	0.33
3	1.17	0.42	0.13
4	1.46	0.29	0.06
5	1.69	0.23	0.05
6	1.87	0.18	0.02
7	2.00	0.16	0.03
8	2.12	0.13	0.01
9	2.23	0.12	0.01
10	2.32	0.11	
		0.10	

0.9
0.8

Figura 4

x	y	Δy	¿diferencia o razón?
1	0		
2	0.75	3/4	
4	1.5	3/4	
8	2.25	3/4	
16	3.0	3/4	
32	3.75	3/4	
64	4.5	3/4	
128	5.25	3/4	
256	6.0	3/4	
512	6.75	3/4	

Figura 5

En cuanto a los estudiantes que tomaron una progresión geométrica, estos se sorprendieron al ver lo que les resultaba en las áreas, ya que obtuvieron una constante, teniendo así una progresión aritmética en la suma de áreas. Percatándose de que a diferencia de las otras funciones las cuales se describían mejor con las progresiones aritméticas en este caso era más apropiado tomar una progresión geométrica en el eje de las *x* y la cual traía como consecuencia una progresión aritmética en el eje *y*, teniendo así en *juego* dos progresiones distintas. *Figura 5.*

Varios de los estudiantes vincularon la integral de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ con el logaritmo, por ello es que sabían que esa era la función que relacionaba a la *x* y *y*, pero algunos argumentaron que no era fácil saber la expresión algebraica.

En general, los estudiantes argumentaron sorprenderse de los comportamientos entre las funciones, mencionando que jamás las habían tratado de esa manera. Hubo un quiebre importante en cuanto al tipo de progresiones que los estudiantes estaban acostumbrados a manejar, es decir, percibir que tomar intervalos en progresiones aritméticas para calcular el área bajo una curva no proporcionan mucha información para establecer la relación entre los patrones de crecimiento de la función logaritmo. Los argumentos que lograron dar son muy interesantes, aunque hubo algunas dificultades que fueron, desde la simbología y organización de la tabla, hasta dificultades de algunas nociones que nos interesaba que se enfatizaran más, es decir, como la idea de darle explícitamente mayor importancia a las progresiones para determinar cada tipo de función.

Reflexiones finales

Construir a las funciones desde esta perspectiva generó un ambiente rico, por un lado el uso del software Cabri II Plus, la participación por parte de los estudiantes, además de mirar al logaritmo como la cuadratura de una función, permitió a los estudiantes diferenciarla de las polinómicas, hallando a su vez otros argumentos para definirlas. Por los argumentos que se generaron en esta experiencia, observamos que los estudiantes establecen estas diferencias y además ciertas relaciones de los dos procesos de integral y derivada, haciendo inferencias para determinar la función resultante, considerando a su vez que al resultado no solo lo están contemplando como un número sino también como una función. A la par de realizar estas aproximaciones se percatan de que éstas son *mejores* cuando las particiones que se toman en el eje x son más pequeñas, tal como lo apoya Robutti (2003), cuando nos menciona que este tipo de acercamientos atiende la discontinuidad epistemológica, respecto al paso de finito al infinito, de discreto al continuo, marcado por la definición de la integral definida como el límite de sumas finitas. Tal como mencionamos anteriormente, con estas actividades se genera un quiebre entre lo escolarmente está construido, es decir, el manejo de progresiones aritméticas y el ingreso de progresiones geométricas, del cual se pretendía que a las primeras las asociaran al patrón de crecimiento que les da mayor información en las funciones polinómicas y que las segundas les provee de más argumentos para definir al logaritmo. Queremos recalcar que no pretendemos que se apropien del concepto de todas las funciones en sí, sino esto representa una parte de todo ese proceso, ya que como nos menciona Sierpinska (1992, citado por Ferrari, 2001), para decir que se entiende algo, debes establecer que es o que no es. En nuestro caso, se provee de algunos argumentos para decir cuando una función es de cierto tipo.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (2005). Un estudio del teorema fundamental del cálculo en el contexto área bajo la curva En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 437- 443). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa 17* (pp. 45-50). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferrari, M. (2007). *Construcción social del conocimiento matemático. La función logaritmo.* Memoria Predoctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. & Nazario, B. (2007). Regresando a la geometría para construir funciones. En Red de Cimates (Eds.) *Resúmenes. XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (p.11). México: Red de Cimates.

Robutti, O. (2003). *Real and virtual calculator: from measurements to definite integral*. Extraído en julio de 2007 desde http://www.didmatcofin03.unimo.it/pubblicazioni/TG9_Robutti_cerme3.pdf

Ruiz Higueras, L. (2000, julio). *Ingeniería Didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza–aprendizaje*. Documento presentado en la XIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Panamá, Panamá.

LA INTEGRACIÓN DE CONTEXTOS EN EL ESTUDIO DE SUCESIONES DE FUNCIONES

Valentina Badía Albanés, Concepción Valdés Castro
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana Cuba
valia@matcom.uh.cu, concha@matcom.uh.cu
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *El uso de sistemas algebraicos computacionales ha permeado la manera en que estamos realizando nuestra enseñanza. Está siendo aprovechada la posibilidad de apoyarnos en la computadora para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.*
En este trabajo presentamos algunos ejemplos, en el tema de la convergencia de sucesiones funcionales, para mostrar cómo se puede vincular la información obtenida de la visualización gráfica y la exploración numérica con el enfoque analítico tradicional. A través de esta integración de contextos pretendemos que el estudio de la convergencia de sucesiones funcionales sea realmente significativo, dejando una huella profunda no solo en este concepto concreto, sino también en la formación matemática del estudiante
Palabras clave: visualización, CAS, sucesiones de funciones, convergencia

Introducción

En algunos cursos de lo que podemos denominar Cálculo Avanzado, en ocasiones es necesario explicar a estudiantes relativamente noveles nociones relacionadas con la convergencia de sucesiones funcionales: convergencia puntual, uniforme o en la media. Para cualquier profesor que haya tenido que enfrentar esta tarea no es desconocido el alto grado de dificultad que ella presenta, especialmente si se pretende una verdadera asimilación de estos conceptos. En la Universidad de La Habana, nos hemos visto ante tal desafío, cuando impartimos los cursos de Análisis Matemático en las carreras de Matemática, Física y Computación. Este desafío nos ha motivado a la búsqueda de algún paliativo.

Actualmente existe una amplia literatura que analiza las ventajas e inconvenientes relacionados con el uso de los sistemas algebraicos de cómputo (CAS) en la enseñanza, así como las posibilidades que ellos brindan para integrar eficientemente los contextos numérico, gráfico y analítico y de esta manera mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.

El objetivo del presente trabajo es mucho más modesto: deseamos compartir con la comunidad de educadores matemáticos latinoamericanos una forma que estimamos eficaz para la enseñanza de algunas nociones relacionadas con la convergencia de sucesiones de funciones. Mediante ejemplos concretos, pretendemos describir un conjunto de tareas para realizar con el auxilio de algún CAS, que contribuyan a que los alumnos transiten y coordinen los diferentes registros de representación de los conceptos objeto de estudio.

Metodología

Nuestra propuesta la hemos basado en:

- Una revisión bibliográfica de los materiales a nuestro alcance sobre el uso de los CAS en la enseñanza, especialmente aquellos que versan sobre nociones relacionadas con el Análisis Matemático (Arcavi, 2003; Artigue, 2002; Badía A, 2001; Sárvari, 2005; Forster y Taylor, 2001; Ruthven y Hennessy 2002; Moreno y Shriraman, 2005).
- Un análisis de la forma de presentación, en los libros de texto disponibles, de las nociones de convergencia puntual, uniforme y en la media.
- La observación durante varios años de práctica docente de cuáles son las dificultades principales de los estudiantes en la asimilación de estos conceptos y algunas de las estrategias que contribuyen a una comprensión más profunda de los mismos.

A continuación presentamos un conjunto de tareas a realizar por parte de los estudiantes con algunos comentarios de aquellas cuestiones que es indispensable discutir en clase. En alguna de estas tareas el uso de un CAS será una ayuda muy valiosa, en otras su utilización es optativa y, en unas pocas, innecesaria e incluso contraindicada (Drijvers, 2002). Llamamos la atención sobre que, en los ejemplos propuestos el alumno se verá obligado a transitar por los contextos numérico, gráfico y analítico (Peschek y Schneider, 2002).

Estudio de la convergencia puntual y uniforme

En esta parte propondremos dos ejemplos donde se evidencian las diferencias en el comportamiento de las sucesiones uniformemente convergentes y las que no lo son. Estas tareas pueden ser propuestas con posterioridad a la formulación de la definición de convergencia uniforme, con el fin de favorecer a su comprensión, sin embargo, nos parece mucho más efectiva la discusión de los incisos a), b) y c) con antelación a una definición formal.

Ejemplo 1. Dada la sucesión de funciones: $l_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

a) *Obtenga los 10 primeros términos de la sucesión y realice su gráfico.*

Aquí es interesante notar que para poder apreciar realmente el comportamiento de la sucesión es necesario utilizar para todas las funciones la misma escala o, mejor aún superponer el gráfico de todas las funciones en una misma figura (ver gráfico 1). También puede ser muy instructivo realizar la animación de los gráficos obtenidos. En cualquier caso, se observa como, para valores de la abscisa no demasiados cercanos a 0, las curvas se van acercando cada vez más al eje *OX*.

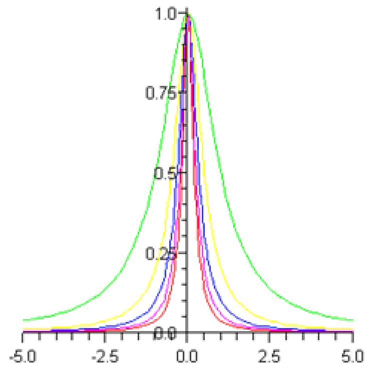


Gráfico1.

b) *Halle la función límite puntual.*

El cálculo de este límite no presenta dificultad alguna, sin embargo, si el alumno pretende utilizar el asistente matemático obtiene 0 como límite. Esto lo puede llevar a considerar a la función constante cero como límite, sin embargo, la función límite (discontinua), es:

$$l(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Este hecho puede aprovecharse para mostrar la necesidad de conocer las limitaciones de las herramientas computacionales y ser críticos con los resultados obtenidos.

c) *Considerando ε=0,001 y para x=1; 0,4; 0,2; 0,1; 0,01, investigue cuál es el menor valor de n que satisface la definición de límite.*

Para realizar estos cálculos de manera más eficiente, puede sugerirse la elaboración de un pequeño programa de modo que el cálculo se realice de forma automática. Los resultados (tabla 1), muestran que, a medida que el valor de *x* se acerca a 0, la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < 0{,}001$ es satisfecha por valores de *n* cada vez mayores.

x	1	0.4	0.2	0.1	0.01

Tabla 1.

Entonces pueden ser oportunas preguntas tales como ¿podremos encontrar un valor n a partir del cual se cumpla la desigualdad anterior y que sea válido para todo valor real de x? ¿y si nos limitamos a considerar las x del intervalo $[1,\infty)$? Tras la discusión de estas interrogantes aparece como necesaria la clasificación de la convergencia de las sucesiones de funciones en uniforme y no uniforme, por tanto, nos parece el momento idóneo para la formalización matemática de estas nociones.

d) *Demuestre que la convergencia no es uniforme en todo* $\Re$ *y sí lo es en un intervalo de la forma* $[a,\infty)$*, con* $a>0$.

Cuando se analiza detalladamente el comportamiento gráfico de las sucesiones se observa que todas las curvas aparecen "enganchadas" en el punto (0,1) y esto es lo que les impide "aplastarse" completamente sobre el eje de abscisas. De esta forma, se evidencia que el máximo valor de todas las funciones es 1 y, además, el problema para la uniformidad de la convergencia se presenta solo en los puntos cercanos al origen. Esta última afirmación es corroborada por los resultados numéricos obtenidos. A partir de una discusión de este tipo, es completamente natural la demostración analítica de la no uniformidad de la convergencia usando directamente la definición o a través del comportamiento de las funciones en una sucesión de valores de x (por ejemplo, de la forma $1/n$).

Con el segundo ejemplo que proponemos pueden realizarse tareas semejantes a las indicadas en el primero. Podría resultar instructivo realizar el análisis gráfico y de la tabla correspondiente con antelación al enunciado de la definición rigurosa, pero también podrían considerarse como una guía para orientar la intuición y buscar la mejor forma de probar formalmente la convergencia uniforme.

Ejemplo 2. Dada la sucesión de funciones: $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$

a) *Realice las tareas propuestas en a), b) y c) del ejemplo anterior*.

En este caso, las curvas obtenidas, cada vez se "aplastan" más sobre el eje de abscisas, a medida que *n* crece (ver gráfico 2), aún cuando todas las funciones poseen un punto de máximo relativo y otro de mínimo que se acerca cada vez más al origen.

Si la tabla de valores se realiza solo para los valores propuestos en el ejemplo 1, no será posible visualizar nada interesante.

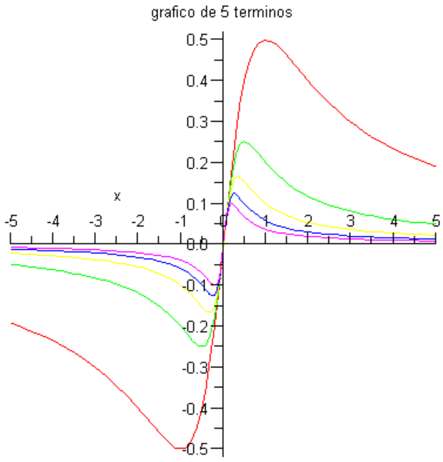


Gráfico 2.

Por ello es conveniente sugerir que se utilicen valores de *x* mucho más pequeños. De este modo se evidenciará que, independientemente del *x* considerado, el valor de *n* igual a 101 puede resultar suficiente.

x	0.1	0.02	0.0101	0.01	0.009	0.008	0.006

Tabla 2

Una tarea adicional podría ser la exploración para otros valores de ε más pequeños.

b) *Halle la función límite y demuestre que la convergencia es uniforme en todo* $\Re$.

Ni el gráfico ni la exploración numérica brindan una respuesta a esta tarea. Para ello es oportuno calcular, en dependencia de *n*, el valor máximo de las funciones $f_n(x)$ de la sucesión. Por esta razón la demostración debe hacerse en forma analítica. Sin embargo, los cálculos necesarios, como el hallazgo de la derivada o la resolución de la ecuación resultante al igualar esta derivada a cero, pueden ser auxiliados por el CAS que se esté utilizando. Por supuesto, más adelante, como ejercitación, pudieran proponerse ejemplos, donde la dificultad de algunos de estos cálculos se beneficiara más del uso de los programas computacionales.

Convergencia en la media vs convergencia puntual

El ejemplo siguiente muestra el apoyo que puede ser el uso de un CAS en la interpretación y mejor comprensión de las llamadas convergencias en la media. Hemos seleccionado aquella que hace más sencilla nuestra presentación, pero una ayuda semejante podemos obtener para las otras. Convendremos en decir que la sucesión $f_n(x)$ converge en la media a la función $f_n(x)$ en el intervalo [*a*,*b*] si se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left| f_n(x) - f(x)\right| dx = 0 .$$

Ejemplo 3. Analice gráfica y analíticamente el comportamiento límite de la sucesión de funciones: $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

En este ejemplo se puede orientar la realización de tareas similares a las realizadas antes, en particular, puede ser interesante, con vistas al estudio de las propiedades de la convergencia uniforme, observar que la no uniformidad de la convergencia esta vez se acompaña de una función límite continua, la función idénticamente nula. A continuación se propone

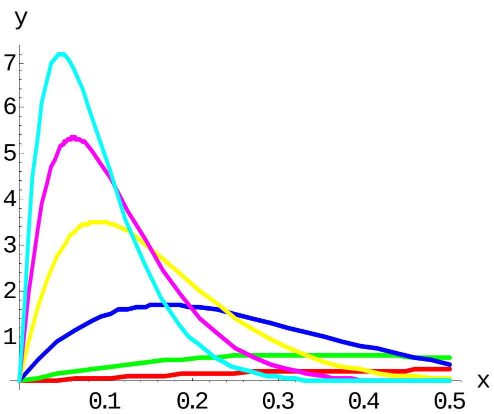


Gráfico 3.

Analice la convergencia en la media en el intervalo $[0,1]$.

Si esta sucesión de funciones convergiera en la media a la función constante cero, entonces las áreas bajo las curvas deberían hacerse cada vez menores. Sin embargo, una inspección cuidadosa de los gráficos de estas funciones (ver gráfico 3), permite conjeturar que esto no sucede así. Una manera de poner este hecho de manifiesto es realizando un estimado burdo de las áreas a través de un triángulo que permanezca enteramente por debajo de la curva. Así que la hipótesis es que no debe haber convergencia en la media en el intervalo $[0,1]$. La prueba de esta hipótesis debe efectuarse analíticamente mediante el cálculo de la sucesión de integrales la cual evidentemente

$$\int_0^1 n^2 x(1-x)^n dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)},$$

no tiene límite cero. Para el cálculo de esta integral puede utilizarse algún CAS, lo cual, adicionalmente, puede promover algunos análisis interesantes.

En el ejemplo anterior la sucesión de funciones converge puntualmente a cero y sin embargo no converge en la media. Por supuesto, también debe mostrarse a los alumnos algún ejemplo donde haya convergencia en la media, pero los ejemplos de este tipo más interesantes que hemos encontrado no son adecuados para el uso de los CAS y por ello se salen de los objetivos de este trabajo.

Convergencia en la media vs convergencia uniforme

Los dos ejemplos que se proponen a continuación permiten comparar la convergencia uniforme y la convergencia en la media.

Ejemplos 4 y 5. Analice gráficamente la convergencia uniforme y en la media de las sucesiones y demuestre analíticamente las conjeturas que haya realizado.

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n \quad y \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Después de la experiencia con los ejemplos anteriores, con solo este enunciado general, los alumnos pueden plantearse y resolver tareas similares. El comportamiento gráfico de ambas sucesiones funcionales se muestra en los gráficos 4 y 5, donde puede apreciarse que, en ambos casos, las áreas bajo las curvas se van haciendo cada vez más pequeñas con el aumento de *n*, lo

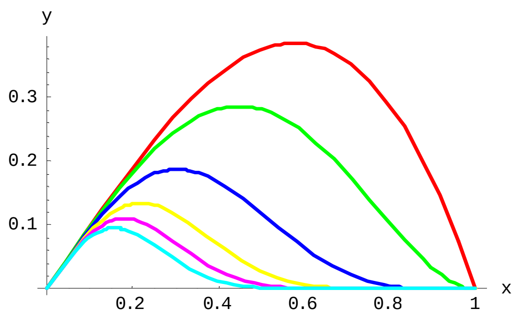


Gráfico 4.

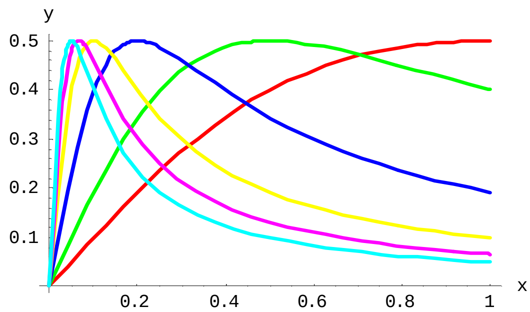


Gráfico 5.

que permite conjeturar que ambas convergen en la media a cero. Esta afirmación puede demostrarse mediante el cálculo de las integrales correspondientes, con la ayuda o no del asistente matemático. Sin embargo, cuando se analiza la convergencia uniforme, tanto gráficamente como realizando la exploración numérica, se concluye que en el primer caso hay convergencia uniforme y en el segundo no. Para la demostración puede ser de utilidad el empleo del asistente matemático.

Consideraciones finales

Las actividades presentadas no constituyen una secuencia didáctica estricta, solo pretendemos indicar un posible orden de desarrollo y será la dinámica propia de la clase y el criterio de cada profesor el que determine cual debe ser el orden de las tareas o si éstas deben ser reformuladas. También pueden añadirse otros ejemplos similares o incluso de un grado de complejidad computacional más elevado, siempre en dependencia de la intencionalidad didáctica que se tenga. Nuestra propuesta está encaminada a fomentar el uso de estrategias adecuadas para lograr un aprendizaje significativo, a promover la reflexión creativa, a motivar a los estudiantes en la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas, en definitiva nuestro objetivo principal es favorecer la apropiación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes.

En la identificación de las potencialidades del uso de la tecnología en la enseñanza de temas habituales en la enseñanza universitaria de la matemática, hemos podido constatar que resultan muy instructivas la visualización geométrica y la exploración numérica previa a la introducción de nuevos conceptos y teoremas matemáticos. Pero también puede ser muy provechoso realizar este tipo de actividades con posterioridad a la definición formal, cuando las condiciones están creadas para una discusión más amplia y profunda. Este "ir hacia delante y volver hacia atrás" es un excelente método para lograr obtener el máximo provecho de las posibilidades de las diferentes representaciones del concepto.

Recalquemos la importancia que tiene dar a las representaciones visuales una "lectura" correcta: aprender a interpretarlas adecuadamente, a evadir la superficialidad. Solo así ellas realmente proporcionarán una rica experiencia cognoscitiva en la búsqueda de significados a los conceptos estudiados y solo así podrá evitarse que lejos de ayudar se conviertan en un obstáculo para el aprendizaje.

Por otra parte, hay que tratar de no privilegiar ninguna de las formas de representación, debemos usar todos los registros de representación, intentando una coordinación y transición adecuada entre ellos para permitir la comprensión integral del concepto.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Badía A., V. (2001). Utilización del Mathematica en las ecuaciones diferenciales ordinarias. En Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, (pp. 303-310). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment; obstacles and opportunities. *ZDM 34(5)*, 221-228.

Forster P., Taylor P. (2001). A multiple perspective analysis of learning in the presence of technology. *Educational Studies in Mathematics 42*, 35-59.

Moreno, L.A. & Shriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. *ZDM 37(6)*, 476-486.

Peschek, W.; Schneider,E. (2002). CAS in general mathematics. *ZDM 34(5)*, 189-195.

Ruthven K., Hennessy S. (2002). A practicioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics 49*, 47-80.

Sárvari, C. (2005). CAS integration into learning environment. *ZDM 37(5)*, 418-423.

DE LOS NATURALES A LOS ENTEROS VÍA LAS FORMAS SEMÁNTICAS EQUIVALENTES QUE SE PRESENTAN EN PROBLEMAS ADITIVOS

Eduardo Basurto Hidalgo
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN México
basurtomat@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Básico

Resumen. *Este artículo reporta una investigación realizada con estudiantes entre 12 y 13 años, los cuales trabajaron en la resolución e invención de problemas aditivos con el propósito de extender el dominio numérico de los naturales a los enteros. Los resultados obtenidos indican que cuando los estudiantes resuelven e inventan problemas surgen formas semánticas equivalentes que conducen a nuevos significados de los números signados.*
Palabras clave: problemas, enteros, formas semánticas equivalentes

La resolución de problemas aditivos ocupa un lugar destacado en la investigación en educación matemática debido a la relevancia que tienen en el logro de un aprendizaje numérico lleno de significados. Algunos autores que se han ocupado de estos problemas han dado varias clasificaciones, como son la de Vergnaud (1982), Nesher y Greeno (1983), Carpenter y Moser (1982), Fuson (1992) y Bruno y Martinón (1997).

La investigación presentada se ubica en la tarea de resolver problemas aditivos de números con signo con la finalidad, por un lado de indagar el nivel de conceptualización de los negativos que los estudiantes muestran en la resolución de los mismos, así como la interpretación que dan a dichos números en el lenguaje cotidiano.

Para tales fines, la clasificación que se tomó como base para la elaboración y selección de dichos problemas fue la de Bruno y Martinón (1997) la cual se fundamenta en la distinción entre la estructura funcional y la forma semántica. La estructura funcional se refiere al tipo de situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) y la forma semántica al modo de expresar dichas situaciones numéricas.

Marco teórico

La clasificación contiene 11 categorías de problemas caracterizadas esencialmente por:

La estructura, referida a la simplificación mediante la cual, la redacción de un problema puede ser esquematizada de manera simbólica como una fórmula.

La posición de la incógnita, en un problema en que intervengan tres elementos se podrá determinar como elemento desconocido cualquiera de los tres. Para el caso del estudio realizado solamente se consideró la posición final de la incógnita.

El contexto, se le reconoce como el entorno de la realidad en el que se ubica un problema, esto, en el caso de problemas que incluyen números positivos y negativos comúnmente son situaciones en las que se observa la existencia de opuestos.

Dentro del lenguaje natural sea escrito o verbal, existen distintas maneras de expresar la misma situación, es decir, *pagar o abonar a una deuda* podrían ser equivalentes a restar *o disminuir parte de mi deuda*, de esta manera estas dos frases son *formas semánticas equivalentes*, es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado.

Estas equivalencias de significado tienden un puente entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural así mismo son una manera en que los estudiantes logran identificar la suma y la resta en los problemas. En el ámbito de los signados estas formas semánticas equivalentes se pueden observar en los siguientes enunciados, que son distintas formas de expresar "Juan tenía 3 más que Marcos": *Marcos tenía 3 menos que Juan*, *Juan tenía -3 menos que Marcos Marcos tenía -3 más que Juan.*

Las formas anteriores son irreales en el uso cotidiano ya que nadie expresaría en una plática "Marcos tenía -3 más que Juan" pero en la resolución de problemas se vuelven muy útiles para algunos estudiantes ya que vía estas formas de expresión oral o escrita otorgan cierto sentido a los números signados.

Antes de mostrar la clasificación de problemas, debemos aclarar los términos utilizados en los problemas.

Estado. Cuando un número se refiera a la representación de estado deberá de involucrar tres aspectos, un sujeto, una magnitud y una unidad de medida, por ejemplo: *"La temperatura en Durango es de -2°C"*, se observa claramente que el sujeto corresponde a la ciudad de Durango, la magnitud en cuestión es la temperatura y la unidad de medida son grados. Comúnmente al referirse a un estado la referencia del tiempo es el instante en que se expresa *e (t)*.

Comparación. Se establece como la diferencia existente entre dos estados que se refieren a la misma magnitud, por ejemplo, *"La temperatura en Acapulco es 10 grados mayor que en Querétaro"*, ($C_{ed}(t) = d(t) – e(t)$).

Variación. La variación de un estado se refiere a la comparación de esta misma función estado en momentos diferentes ($V_e(t,s) = e(s) – e(t)$). Como ejemplo de estos podría ser, "*Sergio tiene diez pesos por la mañana en el transcurso del día recibe cincuenta pesos, por consiguiente por la noche tiene sesenta pesos"*

La Tabla 1 muestra la estructura funcional y forma semántica, de la clasificación de problemas de Bruno y Martinón, junto con su estructura sintáctica. Acompañando a lo anterior viene un ejemplo de cada tipo de problema, los cuales fueron utilizados durante la fase experimental del estudio ya sea dentro la aplicación de los cuestionarios o entrevistas.

Tabla 1

ESTRUCTURA FUNCIONAL	FORMA SEMÁNTICA	PROBLEMA	ESTRUTURA SINTÁCTICA
$a(t) + b(t) = u(t)$	Combinación de estados	Karla compro 70 boletos de lotería de los cuales 38 no tienen premio. ¿Cuántos de los boletos si tuvieron	(+70)+(-38)=+32
$e(i) + v = e(f)$	Variación de un estado	El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano si sube 18 pisos. ¿En qué piso se encuentra?	(-2) + (+18) = + 16
$e + c = d$	Comparación de estados	Carlos tiene $15. Juan tiene $4 menos que Carlos. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	(+15)+(- 4)=+11
$v(i,m)+v(m\ f)= v(i, f)$	Combinación de variaciones sucesivas	La primera semana del mes realicé una compra de $40 con mi tarjeta de crédito. La tercera semana realicé un pago de $30¿Cuál es mi situación a fin de mes?	(-40)+(+30)=-10
$V_a(i,f)+V_b(i,f)=V_e(i,f)$	Combinación de variaciones	A Pedro le dieron $7 de domingo, en casa de su abuelos, más tarde en casa de sus tíos perdió $5 en volados con su primo Luís ¿Cómo quedó su cantidad de dinero de Pedro?	(+7) - (+5)=+2

$V_e(i, f) + c = V_d(i', f')$	Comparación de variaciones	Ayer, de la madrugada al medio día, la temperatura aumentó 10º y hoy aumentó 3º menos que ayer ¿Cuánto aumentó hoy?	(+10)+(-3)=+7
$V(i, f) + c = v_e(i', f')$	Variación de variaciones	El miércoles Diana perdió $ 5. El jueves Diana perdió $ 8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?	(-5) - (-8) = (+3)
$C_{ed} + C_{dg} = C_{eg}$	Combinación de comparaciones adyacentes	Alejandro tiene 3 canicas menos que Maria, Diana tiene 7 más que Alejandro, ¿Cuántas canicas más tiene Diana que María?	(-3) +(+ 7) =(+ 4)
$C_{ag} + C_{bh} = C_{ed}$	Combinación de comparaciones	Rafael subió 3 pisos menos que Laura por las escaleras, pero subió 8 pisos más que Laura por el elevador ¿Cuántos pisos en total subió más Rafael que Laura?	(-3) +(+ 8) = (+5)
$C(i) + v = C(f)$	Variación de una comparación	El lunes Juan tenía $3 más que Marcos, el martes Marcos ganó $5 más que Juan ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?	(- 3)+(+ 5) =(+ 2)
$C_{ed} + C = C_{gh}$	Comparación de comparaciones	Daniel tiene 2 pesos menos que Ernesto. Lo que Héctor tiene más que Gabriel es 5 pesos más de lo que tiene Ernesto que Daniel ¿Cuánto dinero tiene Héctor más que Gabriel?	(2)+(+5)=(+7)

La investigación intenta también identificar los significados que los estudiantes dan a los números signados basándonos en los niveles de aceptación de los negativos, mismos que fueron validados en problemas aparecidos en textos históricos así como en problemas resueltos por estudiantes actuales, Gallardo (2002). Estos niveles son los siguientes:

1. Número sustractivo. En este caso la noción del número siempre obedece a la magnitud. Esto es en la resta de dos cantidades a – b, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, en este nivel el signo "–"solo tiene un carácter binario a nivel de sustracción.

2. Número relativo. Este nivel de aceptación se hace presente cuando un estudiante puede concebir la idea de opuestos, esto en situaciones discretas así mismo es un nivel que aparece cuando la idea de simétricos se manifiesta en situaciones continuas.
3. Número aislado. Este se presenta cuando un estudiante es capaz de aceptar un número negativo como la solución de una operación, de un problema o una ecuación.
4. Negativo formal. Aparece cuando el estudiante reconoce al número negativo como parte de un conjunto numérico en donde quedan incluidos tanto los positivos y los negativos así como sus propiedades, el cual se conoce como el conjunto de los enteros.

El estudio

Nos planteamos las preguntas de investigación:

¿Cómo lograr que los estudiantes representen problemas de estado, variación y comparación vía adición y sustracción de enteros?, ¿Cómo interpretan los estudiantes, en lenguaje cotidiano, los números signados dentro de relaciones aditivas?, ¿Cuáles son los problemas que presentan mayor dificultad?

Con el propósito de poder responder estas preguntas, analizamos el desempeño de 20 alumnos de 12 a 13 años, a los que durante su enseñanza regular sus profesores titulares les había enseñando a resolver problemas sencillos que involucran números signados. Estos alumnos resolvieron cuestionarios y algunos de ellos participaron en entrevistas individuales video grabadas donde abordaron situaciones aditivas en lenguaje natural, adiciones y sustracciones con números signados, así como también resolvieron e inventaron problemas pertenecientes a las 11 categorías de Bruno y Martinón.

En este artículo solamente se analizan algunos de los ítems que reflejan de manera más clara los trenes de pensamiento de los estudiantes analizados. A continuación se muestran algunos fragmentos de diálogos de diferentes estudiantes que ponen al descubierto de manera muy clara la aparición de forma semánticas equivalentes. La letra E se asigna al entrevistador y la A es para el alumno.

Fragmento 1

R1 E: Resuelve: (+5) - (-3)=

R2 A: Escribe: (+5)-(-3)=*+ 5 + 3* = 8

R3 E: ¿Qué diferencia ves entre este menos (+5) - (-3) y éste (+5) - (-3)?

R4 A: El primero es el que va a restar y el segundo le va a dar valor al tres de negativo.

R5 E: ¿Entonces hay dos signos menos o es el mismo?

R6 A: Hay dos, uno para el número y otro para la operación.

R7 E: Si yo te pongo 0 – (-1) =

R8 A: Esto quiere decir que al cero se le está restando un número negativo o sea que se sumaria.

R9 E: ¿por qué?

R10 A: *Por que es como si debieras algo pero te quitas esa deuda. Anota: Es como algo que debo y lo pago para no deber.*

Fragmento 2

R1 E: Inventa un problema que corresponda a la expresión: (-5) - (-2) =

R2 A: *El estudiante anota:* "Juan debe $5.00 pesos si paga $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?"[Explica] Porque si debe $5.00 se está quitando una deuda de $2.00 ahora ya deberá menos es decir, se quita lo que debía.

R3 E: *Entonces quitar una deuda es equivalente a…*

R4 A: *A pagar*

R5 E: Tú crees que si tú le dices a un compañero tuyo "Juan debe $5.00 pesos si paga $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?", ¿escribiría la operación (-5)-(-2) =?

R6 A: No

R7 E: ¿Tú que crees que anotaría tu compañero si tú le pones este problema?

R8 A: -5 + 2 =

R9 E: Entonces, ¿que cambiarías del problema para que pudiera escribir la operación (-5)-(-2)=?

R10 A: Diría, "*Juan debe $5.00 pesos si se quita una deuda de $2.00 ¿Cuánto deberá ahora?*"

R11 E: De esa manera si crees que escribiría la operación ***(-5)-(-2) =***

R12 A: Si

Fragmento 3

R1 E: Resolver: El miércoles Diana perdió \$ 5. El jueves Diana perdió \$ 8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?

R2 A: El estudiante anota: (-5) – (-8) = 3

R3 E: Bien, ¿y este menos (-5) – (-8) = 3 de qué es?

R4 A: De lo que perdió.

R5 E: ¿Y éste? (-5) – (-8) = 3

R6 A: De que perdió ocho menos que el miércoles.

R7 E: Entonces ¿el primer menos de que perdió y el segundo es de menos que el miércoles?

R8 A: Si

R9 E: *Como perdió menos de lo que había perdido, ¿eso qué quiere decir?*

A: *Que ganó.*

Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos, podemos afirmar que existe una relación entre la aceptación del número negativo, la forma semántica y el contexto de los problemas. Ahora bien, debido a que esta interrelación es compleja, el sujeto puede avanzar conceptualmente en una tarea pero no necesariamente en la siguiente.

Observamos que, la necesidad de inventar un problema correspondiente a la operación planteada, provocó en el estudiante la invención de problemas con formas semánticas distintas, en las que el sujeto acepta distintos niveles del negativo, a saber, como número sustractivo, número relativo y número aislado.

Por último es importante señalar que la transferencia del lenguaje verbal del enunciado del problema al lenguaje simbólico de las matemáticas, se ve deteriorada conforme las estructuras de los problemas se vuelven menos familiares al estudiante.

Ante esta disyuntiva, ¿qué hacer al respecto? Pensamos que la solución al menos parcialmente, se encuentra en la enseñanza. El profesor puede fomentar en el alumno el surgimiento de las formas semánticas equivalentes que aunque irreales en el lenguaje cotidiano, en la situación escolar provocan la emergencia con significado de los positivos y negativos, como podemos observar en el fragmento 1 en R10, en el fragmento 2 en R3, R4 y R10 y en fragmento 3 en R9.

Además, diversificar el contexto en los problemas genera nuevas formas semánticas. Vía estas directrices didácticas el estudiante logrará inventar problemas que lo conduzcan a situaciones más ricas que el muy familiar contexto monetario, dotando de nuevos significados a los enteros.

Referencias Bibliográficas

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación matemática 9(1)*, México: Editorial Iberoamérica.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan Publishing Company.

Gallardo, A. (2002). Qualitative analysis in the study of negative numbers. En L. Pig y A. Gutiérrez (Eds.) *Proccedings of the 20th PME International Conference 2*, 377-384.

Nesher , P. y Greno, J. (1983). Categorías semánticas de problemas verbales, una reconsideración. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the 15th PME International*, 63-68.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of though involved in addition and subtraction problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA POR MEDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Jonathan Espinoza González, Johan Espinoza González, Edwin Chaves Esquivel
Universidad Nacional de Costa Rica Costa Rica
johanespi@hotmail.com, e_jonathan@hotmail.com, echa@una.ac.cr
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Medio

Resumen. *La investigación realizada consistió en la elaboración y puesta en práctica de una propuesta pedagógica para la enseñanza de la Estadística en la educación secundaria por medio de la "resolución de problemas". El documento describe el proceso realizado para la construcción de un problema y su aplicación a un pequeño grupo de estudiantes de secundaria en una zona rural de Costa Rica. Los resultados obtenidos son muy positivos y dejan en evidencia la viabilidad de este recurso para enfrentar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Sin embargo, para su implementación, los docentes requieren de un conocimiento teórico que de soporte al proceso de construcción y ejecución de los problemas, así como adquirir la sensibilización sobre el rol que debe jugar cada uno de los actores en dicho proceso.*
Palabras clave: resolución de problemas, situación didáctica, enseñanza de las matemáticas, educación estadística

Introducción

La Educación Matemática es considerada una herramienta fundamental dentro de las políticas educativas actuales para el desarrollo científico de los pueblos. Por esta razón, se está promoviendo una sólida formación que permita alcanzar los objetivos pretendidos en los diferentes currículos. Ante esta situación, investigadores, pedagogos y otros especialistas, están abocados a la búsqueda de alternativas didácticas que tiendan a favorecer procesos educativos significativos en pos de alcanzar el mejor nivel posible.

Debido a la necesidad de encontrar una adecuada orientación pedagógica para lograr un aprendizaje eficiente de las Matemáticas desde los primeros años, la resolución de problemas se ha propuesto como una alternativa metodológica diferente a la tradicional (la cual está basada en lecciones expositivas y en la resolución de ejercicios mediante la memorización y la aplicación de algoritmos preestablecidos). Por medio de la resolución de problemas se pretende lograr un equilibrio entre distintos niveles de complejidad de los ejercicios matemáticos con el propósito de fortalecer y trabajar aquellos problemas que se escapan de lo rutinario.

Desde los planteamientos de Pólya en la década de los cuarenta del siglo XX, hasta las más recientes investigaciones realizadas por Santos (2007) o Mancera (2000), entre otros; la resolución de problemas ha sufrido importantes modificaciones que la catapultan como una importante estrategia para enfrentar la enseñanza de las Matemáticas. Esta metodología permite que los estudiantes empleen distintos recursos y estrategias para plantear y resolver problemas; para ello se crea un ambiente de instrucción donde los jóvenes tienen la oportunidad de presentar sus ideas, escuchar y examinar las de sus compañeros, les permite robustecer constantemente no solo la comprensión de los contenidos matemáticos, sino también su capacidad de razonamiento lógico y de análisis de la información (Espinoza, Espinoza, González, Zumbado y Ramírez; 2008).

El presente documento muestra los resultados de la puesta en práctica de una metodología basada en la resolución de problemas para la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en un grupo de octavo año de un colegio académico rural de Costa Rica.

En Costa Rica, la Estadística se introdujo en el currículo preuniversitario en 1995, se pretendió favorecer los análisis e interpretación de la información que se genera en el entorno de los estudiantes. Esta propuesta buscaba generar una cultura estadística en los jóvenes desde los primeros años. No obstante, más de una década después, investigaciones realizadas por académicos de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica reflejan que las estrategias empleadas para su enseñanza brindan poco espacio al estudiante, el cual mantiene una posición pasiva, se limita a resolver ejercicios descontextualizados de un libro de texto, dando más énfasis al cálculo que al concepto y su interpretación (Chaves, 2007).

Ante la problemática que enfrenta la enseñanza de la Estadística en el ámbito preuniversitario costarricense, la investigación que se ha llevado a cabo pretendió demostrar que la resolución de problemas es un importante vehículo para solventar estas dificultades, y es capaz de generar conocimiento significativo en los jóvenes en un ambiente franco de discusión académica.

Metodología

Debido a que no existían antecedentes en la aplicación de la resolución de problemas para la enseñanza de la Estadística en el país, el grupo de investigadores debió iniciar el proceso con la elaboración de un referente teórico sustentado en los trabajos de importantes investigadores en el ámbito internacional sobre la enseñanza de las Matemáticas (Espinoza et al., 2008). No obstante, debido a que existen importantes diferencias entre la Estadística y las Matemáticas

(Chaves, 2007), fue necesario llevar a cabo una adaptación de estos elementos a los fundamentos de Estadística.

Una vez definidos los principales aspectos teóricos de la metodología que se estaría implementando, se procedió a reflexionar sobre la naturaleza de los conceptos estadísticos que serían incluidos en la propuesta y el nivel de profundización que era necesario alcanzar en función de los programas del Ministerio de Educación Pública (MEP); pero también de la misma naturaleza de la disciplina.

Se seleccionó un pequeño colegio de una zona rural del sur de Costa Rica, denominado Liceo Jerusalén-Aeropuerto, la institución contaba con 150 estudiantes. Se eligió un grupo de octavo año (entre 13 y 15 años de edad) constituido por 14 estudiantes, 5 hombres y 9 mujeres. Recibían seis lecciones semanales de Matemáticas, cada una de 40 minutos, impartidas en tres sesiones de dos lecciones semanales. El contenido: Estadística, fue desarrollado al final del curso lectivo del 2007 (meses de octubre, noviembre). Las condiciones de infraestructura no eran las óptimas para realizar una labor educativa adecuada, por lo que el trabajo planteaba un reto adicional a los investigadores. Las siguientes fotografías ilustran las condiciones de infraestructura de la institución.

Liceo Jerusalén-Aeropuerto-2007	Salón de Clase
	

Para la definición de la situación didáctica que se implementaría, se construyeron diferentes problemas que formaran parte del contexto de los estudiantes y que para su solución fuera necesario recolectar información estadística y generar un análisis congruente con los objetivos de aprendizaje previamente establecidos. Al final se escogió aquella situación didáctica que se considerara reunía las condiciones idóneas para lograr las metas propuestas. Seguidamente, se plantearon las posibles soluciones al problema las cuales se organizaron en las etapas que podrían requerir los estudiantes para resolverlo. Cada etapa contenía la descripción de los posibles procedimientos realizados por los estudiantes, los conocimientos previos necesarios y los recursos que se deberían poseer, así como la metodología de trabajo, algunos elementos de control, las heurísticas que los estudiantes podrían utilizar y las posibles intervenciones del profesor. El docente que condujo el proceso fue uno de los investigadores del presente estudio, esto permitió que tuviera la sensibilidad necesaria para la puesta en práctica de la propuesta.

Para la recolección de información sobre la actividad desplegada en el aula se utilizó la observación participante y no participante. Estas técnicas se complementaron con la entrevista en profundidad que fue aplicada a cuatro estudiantes del grupo, se pretendió conocer su reacción ante la estrategia empleada en cuatro diferentes momentos del proceso.

Para el análisis de la información se consideraron seis categorías de análisis previamente designadas, las cuales respondían a los objetivos de la investigación. Seguidamente se citan estas categorías:

1) Nivel de participación del estudiante en el proceso
2) Ambiente académico en el salón de clase
3) Papel del docente
4) Procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver el problema
5) Creencias de los estudiantes
6) Institucionalización del conocimiento teórico

Resultados

El problema seleccionado describía una situación hipotética sobre una posible donación al colegio por parte de una organización de ayuda social. Para ser acreedores a esta donación era necesario demostrar que la institución contaba con estudiantes de buen rendimiento académico; pero, al mismo tiempo, de condición económica muy limitada. Por esta razón, se requería realizar una caracterización del rendimiento y la situación socioeconómica de los estudiantes de sétimo año, para lo cual se destacó al grupo de octavo año para que llevara a cabo este trabajo. Para resolver el problema, se dispuso de 4 semanas de clases, es decir, un aproximado de 24 lecciones.

Los objetivos que perseguía esta propuesta corresponden a:

1) Valorar la Estadística como un conjunto de técnicas para recolectar, procesar, resumir, presentar y analizar información.
2) Valorar el papel de la Estadística como herramienta fundamental de la investigación científica.

Para comprender el problema, los estudiantes se organizaron en subgrupos de dos o tres alumnos y discutieron entre ellos la redacción del problema. Al inicio se presentó resistencia por parte de varios estudiantes para realizar el trabajo, debido a que no comprendían la razón por la que se les cambiaba la estrategia tradicional de enseñanza. El docente debió intervenir para lograr un consenso con respecto a la importancia de la actividad que se iba a desplegar. Una vez asimilado el problema, la discusión se orientó a establecer estrategias de solución. Después de analizar la situación, llegaron a la conclusión que requerían de diferentes datos para poder llevar a cabo el trabajo encomendado. La primer etapa de este proceso consistió en elaborar un cuestionario para recolectar los datos. Cabe resaltar que era la primera vez que estos jóvenes se aventuraban a realizar un trabajo de este tipo. Se organizó una sesión donde se redactaron los ítems que serían incluidos en el cuestionario, se discutió ampliamente su redacción y congruencia con las necesidades del estudio; de manera que se alcanzara la exhaustividad en la temática requerida. Los mismos estudiantes se encargaron de criticar el instrumento hasta que reuniera las condiciones que garantizara su éxito. Debido a que esta etapa era clave, el profesor debió intervenir en algunas ocasiones para orientar el proceso. Mediante el trabajo en grupo, se encargaron de aplicar el instrumento a los tres grupos de sétimo nivel y otros se encargaron de recolectar la información sobre rendimiento académico en el sector administrativo de la institución.

Una vez recolectada la información, se les presentó el reto de resumir los datos de manera que pudieran elaborar un informe que fuera entendible para cualquier persona. Para ello, el profesor realizó una sesión plenaria, en la cual los estudiantes comentaron la experiencia y definieron estrategias para realizar esta labor. Un grupo de jóvenes se encargó de resumir los datos sobre el rendimiento académico y otros tres grupos se abocaron a resumir la información del cuestionario.

En este proceso, espontáneamente, surgió la necesidad de emplear medidas estadísticas tales como la media aritmética o la moda, también se construyeron distribuciones de frecuencia, así como distintos tipos de gráficos y cuadros para resumir los datos. Este hecho es muy relevante si se considera que el profesor no dio pautas para que realizaran este trabajo. No obstante, fue necesario realizar una sesión de análisis para perfeccionar las estrategias empleadas.

Con la información obtenida se elaboró un documento que resumía las principales características requeridas sobre los estudiantes involucrados en el estudio. En este proceso el profesor tuvo que apoyar más el trabajo de los estudiantes debido a que se mostraron deficiencias para ordenar las ideas y redactar el documento.

La última etapa de este proceso constituyó la institucionalización de los conceptos estadísticos por parte del docente, el cual consistió en desarrollar aquellos conceptos que pusieron en práctica los estudiantes durante el desarrollo de la propuesta. El profesor realizó una sesión donde se definió teóricamente dichos conceptos, además se contrastó esta definición con la empleada intuitivamente por los estudiantes. En este proceso se discutió sobre conceptos tales como población, muestra y unidad estadística, tipos de variables (cuantitativa o cualitativa), medidas de resumen (moda, media, mediana), construcción de cuadros y gráficos, entre otros. También se aprovecho la oportunidad para analizar si las diferentes estrategias seleccionadas por los estudiantes eran las óptimas o si existían mejores alternativas.

Se debe resaltar que, en este último proceso, los estudiantes tuvieron gran protagonismo, de manera que iban relacionando la materia que el profesor desarrollaba con la experiencia vivida al momento de enfrentar las diferentes etapas para resolver el problema. Además, pusieron en práctica estos conocimientos a otros ejercicios que se les planteó.

Discusión

Para Brousseau (1986), en este tipo de actividades académicas, el papel del estudiante debe ser semejante al realizado por un investigador dentro de una comunidad científica, pues debe descubrir los resultados por sí mismo mediante la elaboración de conjeturas y la construcción de modelos; llevar a cabo un proceso de comprobación, refutación y luego intercambiarlos con otros. Es muy confortante que los resultados obtenidos en la presente investigación concuerdan con el planteamiento de Brousseau. Aunque al principio existió cierta resistencia a la estrategia propuesta, posteriormente, el nivel de actividad que se generó, superó las expectativas planteadas; incluso estudiantes que regularmente mostraban una actitud pasiva, en este proceso jugaron un rol importante en su interacción con el resto de compañeros. Esto se ratificó en las manifestaciones hechas por los estudiantes en las entrevistas, donde surgieron frases tales como *"con este método uno participa más; además, trabajar en grupos es más bonito, porque todos aportan ideas", "se comparte más con los compañeros y se puede opinar más"*. Pero además, la experiencia realizada dejó entrever el alto grado de motivación que mantienen los estudiantes durante todo el proceso.

En cuanto al rol del docente, Brousseau (1986) señala que el profesor debe simular en su clase una micro sociedad científica, si quiere que los conocimientos sean medios para plantear buenos problemas y para generar debates. Por otro lado, Mancera (2000) resalta la importancia de que el docente esté preparado para las posibles soluciones que el estudiante pueda proporcionar. En concordancia con lo que apuntan estos dos investigadores, la actividad realizada refleja que, para implementar exitosamente la resolución de problemas, el docente requiere asimilar una serie de conceptos teóricos, así como adquirir la sensibilización necesaria para poder diseñar situaciones didácticas que le brinden al estudiante la oportunidad de interactuar con el problema, con el saber y con el resto de compañeros en la generación de la solución. Debe abstenerse de generar situaciones que tiendan a desequilibrar el proceso forzando la solución del problema. Debe ser un orientador del proceso, con el control del tiempo y del cronograma de actividades; pero al mismo tiempo tener la sapiencia necesaria para guiar sin dar las soluciones. Estos elementos, quedaron en evidencia en la presente investigación y constituyen un verdadero problema para poder masificar el empleo de esta técnica; pues únicamente un docente que haya logrado asimilar los conocimientos teóricos necesarios y la sensibilización adecuada, podría incursionar en la aplicación de esta estrategia.

Por otro lado, según Schoenfeld (1985) las creencias sobre la disciplina inciden notablemente en la forma en que los estudiantes y profesores abordan la resolución de problemas. Cuando se les preguntó a los estudiantes sobre lo que es un problema matemático, algunas de las respuestas fueron *"es un conjunto de datos que nos sirven para llegar a una solución", "es como averiguar algo, una incógnita a través de los datos", "es un ejercicio que se resuelve mediante el planteo de* *una ecuación".* Esta visión cambió fundamentalmente luego de la experiencia. También se les preguntó que si es necesario poseer conocimiento previo para resolver un problema matemático. Antes de aplicar la propuesta, los estudiantes coincidieron en que es necesario tener conocimientos previos para resolver un problema matemático. Al finalizar la aplicación de la propuesta, la opinión del estudiante fue que no es fundamental poseer todos los conocimientos previos, aunque reconocieron que es necesario poseer una base matemática. En cuanto al trabajo del profesor, antes de iniciar con la actividad los estudiantes manifestaron que *"el docente debe explicar porque si no, no podría resolver el ejercicio" "el docente debe ayudar a los que les cuesta, ayudarme a resolverlo y cuando no entienda debe explicarme"* Luego de la aplicación de la propuesta los entrevistados coincidieron en que el docente no debe resolver el problema, sino orientarlos para que ellos lo hagan. Estos son únicamente algunos ejemplos de la forma en que el proceso realizado modificó el sistema de creencias de algunos estudiantes.

En síntesis, la investigación realizada mostró que es factible generar conocimiento estadístico por medio de la aplicación de la resolución de problemas. Pero además, la estrategia permitió al estudiante tener un rol muy diferente al tradicional, le obligó a generar nuevo conocimiento, le despertó el interés y le mantuvo motivado durante todo el proceso. Aunque los resultados no se pueden generalizar, se notó que la propuesta facilita el proceso de institucionalización y el aprendizaje es más significativo para los estudiantes, debido a que al formalizar los conceptos y sus propiedades los estudiantes los relacionan con las discusiones desarrolladas durante la actividad lo que facilita su compresión. Además, la asimilación se produce de manera más rápida y eficiente.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2)*, 33-115.

Chaves, E. (2007). *Una valoración sobre la enseñanza de la Estadística en los colegios académicos diurnos: regiones educativas de San José, Alajuela, Heredia, Pérez Zeledón y Upala*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Estatal a Distancia.

Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M. y Ramírez, C. (2008) *La resolución de problemas en la Enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función logarítmica y exponencial, polígonos y estadística*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional.

Mancera, E. (2000). *Saber Matemáticas es saber resolver problemas*. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem Solving*. Orlando, USA: The National Council of Teachers of Mathematics.

UNA PROPUESTA PARA ABORDAR LA TRANSICIÓN GRADOS → RADIANES

Elika S. Maldonado Mejía, Flor M. Rodríguez Vásquez, Samuel Santana Aguirre
Universidad Autónoma de Guerrero México
flormonr@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo, mostramos los avances de una investigación en la que abordamos el problema de la transición grados - radianes. Maldonado (2005) reporta que los estudiantes (15-18 años) tienen problemas al trabajar con el argumento angular de las funciones trigonométricas, ya que el tratamiento entre las medidas presentadas en grados y las medidas presentadas en radianes es indistinto para ellos. Asimismo, Méndez (2008) señala que el tratamiento grados - radianes es ambiguo e impreciso por la falta de conciencia de la convención matemática.*

Nos enfocamos en el diseño de una secuencia de actividades al seno de la metodología Ingeniería Didáctica y la Teoría de Situaciones Didácticas, con el objetivo de que los estudiantes logren el dominio de las mediadas angulares tanto en grados como en radianes.

Palabras clave: grados, radianes, transición, ingeniería didáctica

Introducción

Debido a que existen problemas en el tratamiento de las medidas angulares, nuestro interés radica en abordar específicamente el problema que existe en el aprendizaje de la transición grados – radianes. Dicho problema es reportado en el trabajo de Maldonado (2005), quien realiza un estudio sobre las Funciones Trigonométricas (FT), a partir de éste, elabora un cuestionario que aplica a estudiantes de nivel medio superior (NMS), con el propósito de inferir sobre las concepciones que tienen los estudiantes acerca de las FT. Justamente encuentra que una de las dificultades a la que se enfrentan los estudiantes es la transición *grados* → *radianes* (TGR).

Por otra parte, Méndez (2008) al realizar un estudio didáctico acerca de la TGR reporta que a esta transición, los libros de texto le dan un tratamiento ambiguo e impreciso por falta de conciencia de la convención matemática, la cual es interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de contenido o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. (Martínez-Sierra, 2003)

De acuerdo con Montiel (2005) la construcción de las FT atraviesa por seis etapas en donde se abordan conceptos como ángulo, ángulo positivo, ángulo negativo, medidas angulares, el triángulo rectángulo, razones trigonométricas, el círculo unitario, las funciones en los reales y su representación gráfica, pero conforme se abordan estos conceptos, surgen problemas como el de las medidas angulares.

En consecuencia, retomado los resultados de las investigaciones anteriores que son de carácter cognitivo, didáctico y epistemológico respectivamente, nos enfocamos en el diseño de una secuencia de actividades didácticas con el objetivo de favorecer en los estudiantes la transición grados – radianes.

Marco teórico

Nuestra investigación se encuentra sustentada en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), ya que esta teoría nos permite conectar los conocimientos matemáticos con una situación problema, entendida como una estrategia para el aprendizaje en la que se propone al alumno, un enigma que podrá descifrar al confrontar sus conocimientos e ideas previas sobre el problema, con diversas fuentes para construir una respuesta o solución, surgiendo el conocimiento matemático como la solución de dicha situación.

Brousseau (1986), señala que en la TSD el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de obstáculos y desequilibrios, de tal manera que cuando el alumno logra superar dicho obstáculo es cuando se apropia del conocimiento en juego, y es el profesor quien debe de facilitar el medio para lograr dicha apropiación.

Se plantea que las secuencias didácticas, con los objetos de enseñanza específicos, provoque en el alumno una génesis artificial de los conceptos. Para ello es necesario conocer la génesis real, a fin de que los saberes adquieran nuevos significados o recuperen sus significantes iníciales, desde la visión en la cual se les adopta como entes culturalmente aceptados. Esto es, estudiar la naturaleza epistemológica de los saberes en juego.

Por otra parte Chavarría (2006), señala que es el docente quien proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento a partir de ciertas situaciones a-didácticas, las cuales, son situaciones que se le plantean al estudiante con el objetivo de construir y validar un conocimiento sin intervención del profesor.

Las situaciones a-didácticas (Brousseau, 1986), entendidas éstas como las interacciones del alumno con el medio, se describen en tres tipos:

- *Situación de Acción:* Es cuando el alumno se enfrenta al problema y trata de buscar la solución sin la intervención del maestro. El objetivo es que el alumno recuerde y aplique sus conocimientos previos.
- *Situación de Formulación:* El alumno comunica las formulaciones, resultado de las acciones realizadas sobre el medio, de tal manera que se enfrente con las formulaciones de sus demás compañeros. En general, se plantean algunas situaciones que provoquen conflictos cognitivos, de tal forma que al superarlos el estudiante logra conjeturar acerca del conocimiento en juego.
- *Situación Validación:* Es donde el alumno después de haber comunicado sus formulaciones demuestra y valida la pertinencia de ellas.

Existe otra situación, en la cual el profesor interviene con el fin de que los alumnos asuman la significación socialmente establecida del saber en juego, que ha sido construido por ellos en las situaciones de acción, formulación y validación. A ésta se le conoce como *situación de institucionalización.*

Asimismo Montiel (2002) nos reporta que la idea esencial de Brousseau es que el proceso de construcción de un conocimiento matemático consiste de diversas fases y se basa en juegos específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje.

En situación de aprendizaje de un conocimiento matemático, el alumno debe lograr estas interacciones con un medio organizado por el profesor, debe ser capaz de actuar, hablar, pensar y evolucionar por motivación propia. Y agrega que aun cuando el alumno sepa que la situación problema que se le presenta tiene como objetivo adquirir un conocimiento nuevo, el profesor debe abstenerse de intervenir o sugerir el conocimiento que desea adquiera el alumno.

En conclusión, en nuestra investigación hacemos uso de algunos aspectos de dicha teoría, asumiendo la forma en la que se da el aprendizaje, por lo que la secuencia didáctica diseñada deberá provocar en el alumno un obstáculo de tal manera que al superarlo, logre apropiarse de la transición grados – radianes.

Metodología

Utilizaremos a la Ingeniería Didáctica (ID) como metodología de investigación, la cual según Douady (1995) (citado en (Ferrari, 2001)), es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un "profesor- ingeniero", para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico. Y considera que la ingeniería didáctica es, por un lado, un *"producto"* que resulta de un análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis *a priori* en el cual se decide sobre qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará, y por otro lado, un *"proceso"* en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de la clase lo exija.

En nuestra investigación, para el análisis preliminar consideramos lo siguiente:

- Un análisis epistemológico, con el objetivo de conocer algunos aspectos de la génesis de las medidas angulares, y posteriormente considerarlos en el diseño de nuestra secuencia; para ello recurrimos al análisis hecho por Montiel (2005) acerca de estas medidas.
- Un análisis didáctico, con el objetivo de conocer cómo son tratadas las medidas angulares en los programas y libros de texto del Nivel Medio Superior; para ello nos basamos en el trabajo de Méndez (2008).
- Un análisis cognitivo, con el objetivo de conocer las concepciones que hay en los estudiantes del Nivel Medio Superior acerca de las medidas angulares, para ello retomamos el trabajo de Martínez y Rodríguez (2005) y de Maldonado (2005).

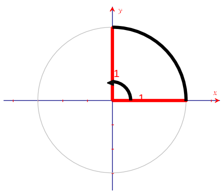
Para el diseño consideramos las tres fases de las situaciones a-didácticas, en la primera buscamos que los estudiantes se enfrenten a actividades que puedan resolver con los conocimientos que ya tienen; en la segunda situación buscamos que los estudiantes se enfrenten con actividades en las que ya no pueden hacer uso de las herramientas que ellos poseen, por lo que los orillamos a que recurran a nuevas herramientas que les sirvan para la solución de las actividades; finalmente en la tercera situación, se pretende que los estudiantes validen las nuevas herramientas encontradas en la situación anterior, logrando así la apropiación del conocimiento en juego, en este caso, la transición grados-radianes.

Secuencia de Actividades

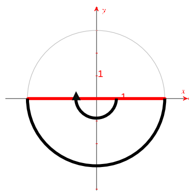
Bloque I

I) Estima el valor de los ángulos que se representan en las siguientes circunferencias. Justifique ampliamente sus respuestas.

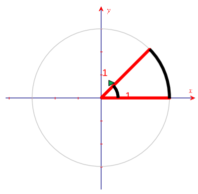
a)



b)

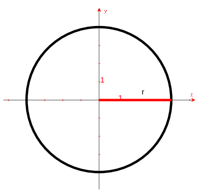


c)

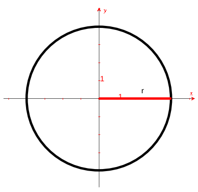


II) En las siguientes circunferencias representa los ángulos que se te piden.

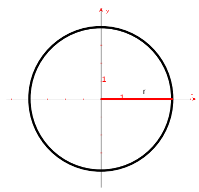
d) 720º



e) 420º

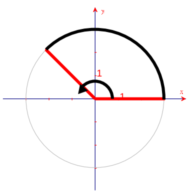


f) – 405º

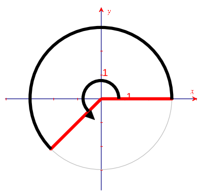


III) Estima el perímetro coloreado (arco) de las siguientes circunferencias. Justifique sus respuestas. ***Pista:*** *el perímetro de una circunferencia es 2πr.*

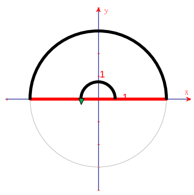
e)



f)

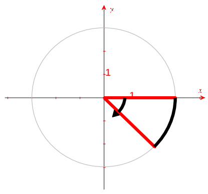


g)

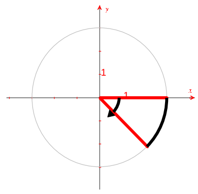


IV) Calcula la razón de la longitud del arco con el radio de cada una de las siguientes circunferencias.

a) El radio mide 4 cm

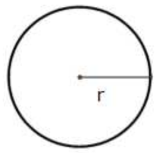


b) El radio mide 8 cm

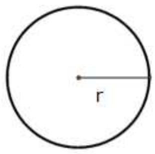


Bloque II

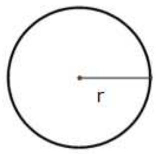
I) Calcula la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio. También estima el ángulo.



II) Estima el número de veces que entra el radio en la circunferencia. Expresa tu resultado en términos de π. Pista: $\pi = 3.1416$ *aproximadamente*!



III) Representa el ángulo α, para el cual el arco que se forma sea igual al radio dado en la siguiente circunferencia.
Eureka!, este ángulo limitado por el arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio recibe el nombre de RADIÁN, y generalmente se expresa como 1rad

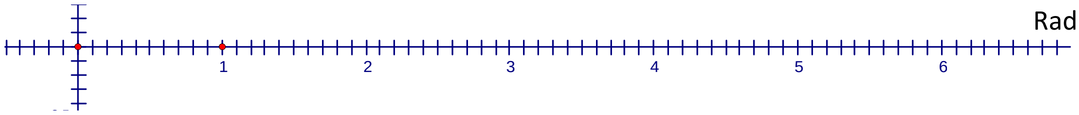


IV) ¿Cuántos radianes tiene una circunferencia? Exprésalo en términos de π. Justifica ampliamente tu respuesta

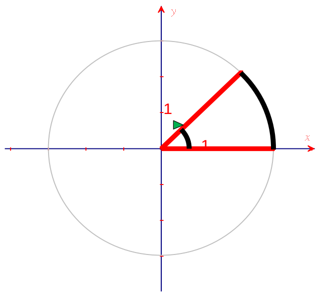
V) Expresa en términos de grados el ángulo α de la actividad III.
Ojo: Supongamos que el eje "x" representa a los radianes.

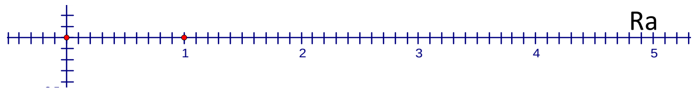
VI) Representa las siguientes cantidades sobre el eje "*x*"

a) π



d) El ángulo que se forma en las siguientes circunferencias:

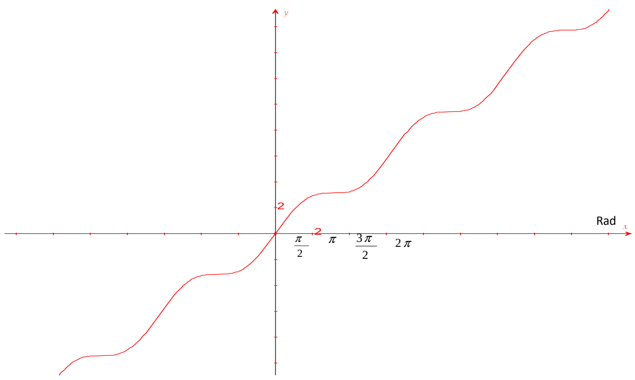




Bloque III

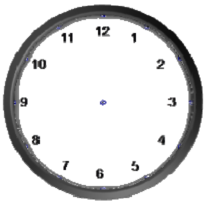
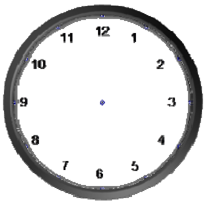
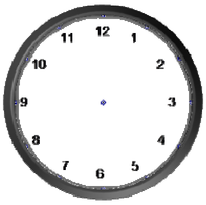
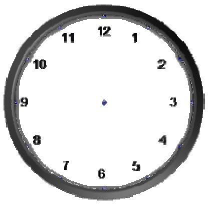
I) Considera la función $y = x + senx$. Con ayuda de la gráfica, encuentra los valores que faltan en la tabla siguiente.

$y = x + senx$		
Valor de *x* en grados	**Valor de *x* en radianes**	**Valor de *y***
	1 rad	
1º		
	$\frac{\pi}{180}$	
	$\frac{\pi}{2}$	
90º		
	90 rad	
180º		
	π	
	3 rad	



II) Expresa en radianes la magnitud del ángulo que forman la agujas del reloj cuando marcan las:

a) 4:00 hrs. **b) 1:15 hrs.** **c) 9:00 hrs.** **d) 3: 55 hrs.**

A manera de conclusión

Dada la naturaleza de este diseño, esperamos que ella favorezca la aprensión de la transición grados-radianes. Nuestra conjetura es que en ese orden se logra introducir al estudiante al trabajo con las medidas angulares recordando algunos conceptos básicos de la circunferencia, los cuales le permitirán identificar la relación que existe entre la unidad de medida angular en grados y en radianes, para que finalmente de manera sistémica relacione la medida angular en grados y su equivalencia en radianes.

Esperamos que este tipo de actividades, tenga una amplia incidencia en el nivel medio superior, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, contribuyendo así a las problemáticas que reporta nuestra disciplina. Problemáticas que pueden ser tratadas a partir de la consideración de las dimensiones de conocimiento didáctico, cognitivo y epistemológico.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2)*, 33-115.

Chavarría, J. (2006). Teoría de Situaciones Didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 1*(*2*)*.* Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Un estudio de la función logaritmo.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus Funciones Trigonométricas. (Un estudio en el nivel medio superior*). Tesis de licenciatura no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: la transición reales→ radianes →grados*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

SINUSOIDES Y CIRCUNFERENCIAS: ANÁLISIS Y PROPUESTA DIDÁCTICA DE LA NATURALEZA PROPORCIONAL EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

David Zaldívar Rojas, Lianggi Espinosa Ramírez, Luis Cabrera Chim
Cinvestav-IPN México
jzaldivar@cinvestav.mx, leanggi@gmail.com, lmcabrera@cinvestav.mx
Campo de investigación: Visualización Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta un estudio y una propuesta didáctica que pretende atender las dificultades en la compresión de los estudiantes sobre las funciones sinusoidales. El objetivo es presentar una manera novedosa de abordar la construcción de la función seno a partir del uso de un programa de geometría dinámica, aprovechando sus posibilidades para realizar traslaciones y homotecias. Para lograr tal objetivo, se proponen actividades destinadas a evidenciar la naturaleza proporcional de los elementos que intervienen en la construcción de las funciones sinusoidales, principalmente el papel de la cuerda, el radio de la circunferencia, el arco, el cateto y el periodo.*
Palabras clave: geometría dinámica, visualización, naturaleza proporcional

Introducción

Este trabajo nació del desafío de elaborar una propuesta didáctica para introducir las funciones trigonométricas, el cual se presentó como parte de un seminario de investigación. Al inicio del trabajo nos percatamos de lo difícil de elaborar esta tarea. Esto debido a la diversidad de contenidos implícitos en la construcción geométrica de tales funciones, en particular la función seno. Para dicha construcción, el uso de la circunferencia unitaria es la estrategia didáctica más utilizada en los libros de clase así como en los recursos multimedia. Ella constituye *un recurso gráfico que logra un vínculo coherente entre las nociones y unidades de medida en la trigonometría y en la función trigonométrica* (Montiel, 2005, p. 117). Es gracias a su uso que la trigonometría pierde su carácter geométrico y adquiere su carácter funcional. Sin embargo, diversas indagaciones muestran grandes dificultades de aprendizaje cuando se usa esta estrategia. De Kee, Mura, y Dionne (1996) han reportado que la enseñanza de las funciones trigonométricas, utilizando la circunferencia unitaria, deja pocas huellas de comprensión en los estudiantes. Su uso no permite evidenciar la naturaleza proporcional de las razones trigonométricas, lo cual, como mencionan Jácome y Montiel (2007), es posiblemente una causa de la poca comprensión en los estudiantes.

Es a partir de ese momento que iniciamos con un análisis sobre la construcción de la función seno y de cada elemento que interviene en ella. Además, reflexionamos sobre la relevancia de la naturaleza proporcional en el significado de las razones trigonométricas y comenzamos a cuestionarnos cómo este significado se extendía a las funciones trigonométricas. Montiel (2005) explica que el elemento más importante en la construcción de las nociones trigonométricas es la proporción, no expresada como la relación entre dos catetos de un triángulo, sino como razón en su sentido abstracto. En efecto, las actividades que marcaron el surgimiento, así como los grandes aportes empíricos de la trigonometría, fueron esencialmente la medición y el estudio de los movimientos de los cuerpos celestes. Es importante notar que en ese entonces no se trabajó con los catetos de triángulos rectángulos, sino con cuerdas en circunferencias. La construcción de un modelo a escala con base en datos empíricos de una realidad macro *no manipulable* marcó las bases para la construcción del cuerpo teórico de la trigonometría (Montiel, 2005), donde la proporción jugaba un rol crucial.

Al analizar cómo esta naturaleza proporcional se encontraba en algunos libros de texto, nos percatamos de que el discurso escolar no hace explícita dicha naturaleza al presentar las razones trigonométricas. En la mayoría de ellos se muestra al seno como una razón, no haciendo explícita la naturaleza proporcional (Figura 2).

Posteriormente, cuando analizamos la construcción de la función trigonométrica en los libros de texto anteriores, encontramos que el descuido de la naturaleza proporcional se presenta nuevamente. Realizamos una revisión de libros de texto y sitios de Internet encontrado, en la mayoría de ellos, el mismo fenómeno: el uso de la circunferencia unitaria es común. Además la asumen como la única posibilidad de construir una función trigonométrica. Esto es tan explícito que, incluso en muchos casos, no se menciona que la circunferencia es unitaria. Por ejemplo, en el libro de Cálculo Infinitesimal de Spivak (2001) (Figura 1), no se hace explícito que el trabajo es con una circunferencia unitaria.

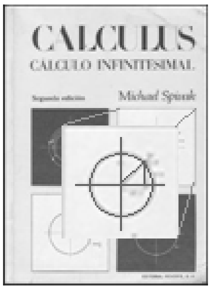


Figura 1

De acuerdo a lo anterior, es que decidimos desarrollar una propuesta didáctica que evidencie la naturaleza proporcional en la construcción de las funciones trigonométricas, en particular de la función seno.

Referencias teóricas

La interpretación de los grafismos en matemáticas no es algo trivial ni automático, es un complejo proceso de descodificación, interpretación y utilización de la información contenida en tal. Este proceso es conocido como Visualización en Matemáticas (Zimmerman y Cunningham, 1991). Espinoza (2007) revela la existencia de ciertos grafismos que articulan una visualización muy especial en matemáticas, llamadas representaciones genéricas. Estas son abstractas, en el sentido que muestra una situación matemática con cierto grado de generalidad. Una característica de estas es que incluyen algún tipo de parámetro. Para visualizarlas (descodificarla, interpretarla y utilizarla) se requiere mucho más que una lectura exacta de su contenido, se hace necesaria una interpretación abstracta de lo que se contempla. Llamamos visualización dinámica a la capacidad de visualizar este tipo de grafismos.

Un ejemplo de este tipo de grafismos es la figura 2. Aquí hay parámetros. Visualizar dinámicamente este grafismo implicaría entender que lo presentado es una familia de triángulos semejantes, en los cuales se cumple las razones explicitadas. Sin embargo este tipo de visualización no es automática ni inmediata (Espinoza, 2007). El no visualizar de esta manera hace que la naturaleza proporcional de las razones trigonométricas esté "escondida" de quienes observan.

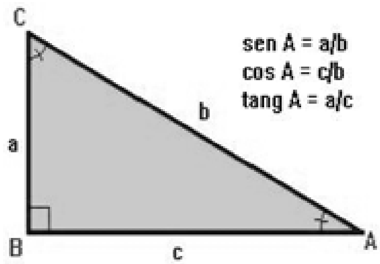


Figura 2

Tal problemática también se encuentra en el caso de la construcción geométrica de la función seno, al trazar el triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia. En este caso, el considerar la circunferencia unitaria, puede inducir a considerar el valor de la razón trigonométrica como un valor fijo, a saber, la longitud de la mitad del arco de circunferencia trazado.

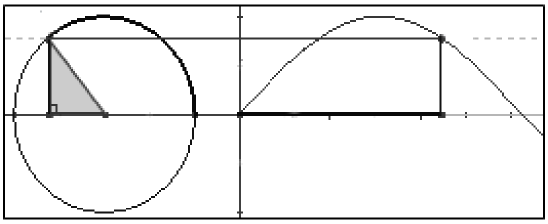


Figura 3

En base a esto nos cuestionamos ¿Podemos ofrecer una propuesta didáctica que propicie a los estudiantes a visualizar dinámicamente? Esta pregunta nos llevó a la geometría dinámica, por lo idóneo que es este contexto para impulsar este tipo de visualización. En efecto, como toda la experimentación que realiza el estudiante se rige por reglas de la geometría implícitas en el software, este permite una articulación más eficiente que con el papel y lápiz entre el dominio de los grafismos y las ideas teóricas de la geometría (Laborde, 2004). Esta articulación la consideramos como un mecanismo relevante propicio para estimular este tipo de visualización.

La propuesta didáctica

La propuesta didáctica que presentamos basa su lógica en la construcción de la función seno utilizando Cabrí-Geòmetré. Las construcciones que se realizan tienen la intención de presentar, de manera novedosa, aspectos escasamente tocados en la enseñanza tradicional. Además, permite dejar de centrarnos exclusivamente en las circunferencias de radio uno, además de mirar propiedades que podrían ser útiles en las explicaciones de algunas de las características de las funciones sinusoidales, tales como arco, radianes, proporcionalidad y la relación que guarda el radio de la circunferencia con la función sinusoidal obtenida.

En ella evidenciamos, entre otras cosas, que la naturaleza proporcional se encuentra tanto en las razones trigonométricas como en las unidades de medida. En efecto, al realizar la construcción geométrica de la gráfica de la función seno con Cabri, en función de dos circunferencias, podemos evidenciar lo siguiente: en la Figura 4a se puede mirar como el teorema de Thales, pero también la Figura 4b puede verse de esa manera, pero para trazos curvos. Es más, el teorema de Thales es un caso particular de una homotecia, donde su centro coincide con el centro de la circunferencia.

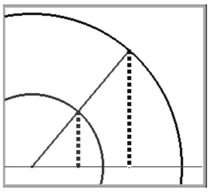


Figura 4a

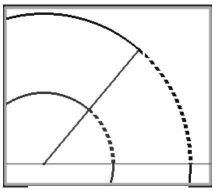
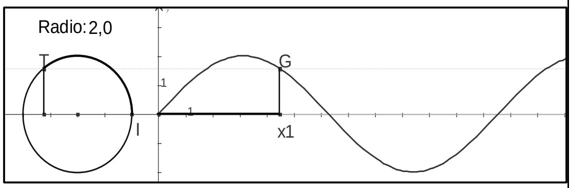


Figura 4b

La propuesta está diseñada para alumnos que ya vieron todos los contenidos curriculares sobre las funciones trigonométricas, en especial la transformación de funciones trigonométricas. Esto es debido a que una de nuestras intenciones es que los estudiantes universitarios profundicen en sus conocimientos de las funciones trigonométricas. En particular para que adquieran elementos que le permitan entender y argumentar sobre el paso razón-función. En la propuesta se considera una etapa previa de familiarización con el software de geometría dinámica para inducir una instrumentalización del estudiante con este (Trouche, 2005).

A continuación presentamos la propuesta que consta de tres actividades, en las cuales se utilizará la dinamicidad e interactividad del software con una intencionalidad didáctica para la conjetura y la prueba matemática.

Actividad 1: Construye geométricamente una sinusoide a partir de una circunferencia de radio cualquiera (ver Anexo A). Varía el radio de la circunferencia y observa el comportamiento de la gráfica. ¿Cuál es la función que representa a la gráfica?	 Figura 5

En esta primera actividad, al variar el radio de la circunferencia varía la amplitud y el periodo de la función sinusoidal construida. La variación de estas está descrita por la función $f(x) = r\ sen\left(\frac{x}{r}\right)$, considerando r el radio de la circunferencia. Nuestra intención con la actividad es poner a los estudiantes en una situación de conjetura, en la cual puedan experimentar y encontrar la relación descrita, utilizando sus conocimientos sobre transformaciones de funciones. Esto puede hacerse verbalmente, describiendo la relación en papel o presentando la función descrita (Figura 5).

Actividad 2: Considerando f(x)=Sen(x), realiza:

a) una construcción geométrica de manera que permita variar la amplitud de la sinusoide sin variar su periodo (Figura 6)*;*

b) Una construcción de manera que permita variar el periodo de la sinusoide sin variar su amplitud (Figura 7).

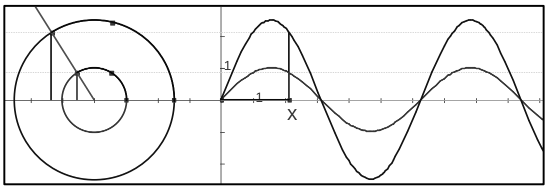


Figura 6

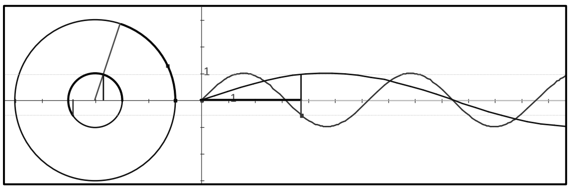


Figura 7

La argumentación de la relación encontrada en la actividad uno no es trivial. Esta se basa en la naturaleza proporcional de la razón y los ángulos de medida (Figuras 4a y 4b), lo cual se trata en esta segunda actividad. Para esto es importante que los estudiantes puedan identificar qué debe variar y qué debe permanecer invariante en ambos incisos.

Actividad 3: Justifica por qué la ecuación de la función sinusoidal que se genera con la circunferencia de radio r, es de la forma:

$$f(x) = rsen\left(\frac{x}{r}\right)$$

En la actividad dos se discute sobra la naturaleza proporcional de la razón trigonométrica y de las unidades de medidas en la construcción de la función sinusoidal. Esta tercera actividad es de síntesis, y pretende que los alumnos utilicen los conocimientos anteriormente mencionados para argumentar la relación requerida en la actividad uno.

Finalmente, esta secuencia permite situar al estudiante en un ambiente de discusión sobre los elementos que intervienen en la construcción de la función seno, permitiéndole reflexionar sobre la naturaleza proporcional existente en ella.

Consideraciones finales

Con el uso de la circunferencia unitaria, la naturaleza proporcional que subyace a la idea del seno (como razón trigonométrica) queda oculta. Esto genera que los alumnos tengan una percepción limitada sobre su significado. La revisión bibliográfica realizada nos señala que lo anterior es un problema desatendido. Por lo cual consideramos que nuestra propuesta aporta un eslabón para superar las dificultades que presentan los alumnos al estudiar las funciones trigonométricas.

La propuesta que realizamos en este trabajo permite al alumno plantearse diferentes preguntas: sobre las alteraciones que sufre la gráfica de la función seno cuando se emplea una circunferencia de radio distinto a uno; las relaciones entre las gráficas anteriores y la producida por la circunferencia unitaria; el rol que juegan el ángulo y el arco correspondiente en la elaboración de las gráficas; las consideraciones que hay que realizar para generar a partir de cualquier circunferencia a la gráfica de la función seno; entre otras. Las ideas que surgen durante la resolución de la secuencia proporcionan al alumno mayores elementos para dar sentido a los conceptos de radian y de la función seno. Además, la propuesta requiere poner en juego conocimientos previos sobre las razones trigonométricas, permitiendo incorporarlos o modificarlos, ayudando al alumno a realizar la transición de razón a función. Nuestro próximo paso es la puesta en escena y análisis de resultados para analizar los alcances de la propuesta y el rediseño de la misma.

Referencias bibliográficas

De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16(2)*, 19-22.

Espinoza, L. (2007). Diferencias en la comprensión de las traslaciones para distintos tipos de representaciones visuales. En Red de Cimates (Eds.) *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 603- 614). México: Red de Cimates.

Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. En Red de Cimates (Eds.) *Memorias de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Red de Cimates.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in students´ construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education*, (pp. 1-21). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de las funciones trigonométricas*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Spivak, M. (2001). *Calculus. Cálculo Infinitesimal* (Segunda Edición). España: Reverté.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques. *Recherches en didactique des matematiques 25(1)*, 91-142.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization?. *Visualization in teaching and learning mathematics,* 1-8.

Anexo a

Pasos para la construcción de la función sen (x) en Cabrí:

- Muestra los ejes; Escribe un número cualquiera (llamado "R" de radio);
- Traza con un compás una circunferencia de manera que su centro esté en el eje de las abscisas, en el lado negativo y su radio sea R; dibuja el punto I en la intersección entre la circunferencia y el eje de las abscisas (lado derecho);
- Dibuja un segmento en el eje de las abscisas partiendo del origen (hacia el lado positivo); Dibuja un punto (llamado "x_1") sobre el segmento;
- Calcula la distancia entre el origen y el punto; transfiere esta medida a la circunferencia a partir del punto inicial (nuevo punto llamado "T" de transferencia de medida);
- Construye una recta que pase por T y sea perpendicular al eje de las ordenadas; Construye una recta que pase por x_1 y sea perpendicular al eje de las abscisas, dibuja el punto de intersección entre estas dos rectas (llamado "G" de punto de la gráfica);
- Marca la traza de G; mueve el punto x_1 y observa que es lo que sucede; Borra la traza (CTRL+F) y construye el lugar geométrico de el punto G cuando se mueve x_1.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE ACUMULACIÓN O AGOTAMIENTO

Teresa Parra Fuentes, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
tparra@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En este escrito presentamos un marco de referencia en el que se pone principal énfasis hacia la resignificación del conocimiento matemático rompiendo la centración en los conceptos. Tratando de dar cuenta de la relación entre la matemática con otros dominios científicos como lo es la Ingeniería ya que coincidimos con Cantoral y Farfán (2003) cuando mencionan que la matemática, en especial la del nivel superior, está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación. Específicamente tratamos con el tema de La Derivada, para lograr tal resignificación seleccionamos el tema "Conservación de la Masa" de Mecánica de Fluidos en donde es usada de forma natural, y para favorecer tal resignificación usamos la idea de Lagrange sobre ésta. Estos elementos son tratados bajo la epistemología del Uso de las Gráficas, en donde la graficación es considerada una práctica social para generar conocimiento.*
Palabras clave: derivada, uso de las gráficas, mecánica de fluidos, resignificación

Problemática

La derivada trae grandes dificultades a los estudiantes, debido a los problemas que acarrean de los conceptos de función y de límite. Suelen escudarse en procedimientos algorítmicos para resolver cierto tipo de derivadas, pero al enfrentarse con problemas que implican la derivación no logran reconocerlo (Mirón, 2000). El discurso matemático escolar, respaldado por los libros de texto, privilegia a la derivada con el significado de pendiente de la recta tangente en un punto. La centración en tal significado soslaya su origen relacionado con el movimiento o con fenómenos variacionales además que de alguna manera obscurece su relación con otros dominios científicos.

Y es que el discurso matemático escolar se ha centrado en los conceptos, en algoritmos y fórmulas tratando de ofrecer a los estudiantes la exactitud y formalismo. Omitiendo las situaciones que permitieron que nazca el conocimiento y que sea manejado con cierta naturalidad, en un ambiente fuera de formalismos en donde el conocimiento lo obtiene el humano a través de su práctica y experiencia.

Tal centración lleva a concebir a la matemática sin sentido encerrada en sí misma, y no apreciar que se va desarrollando y resignificando al paso de la vivencia institucional. Es decir, que en el recorrido escolar la matemática va adquiriendo sentido y significación, en especial la matemática del nivel superior. Ya que esa matemática es aplicada y llevada a un escenario en donde es contextualizada, adquiriendo razón de ser. Este sentido y significado será en función de la actividad humana que desarrolle el dominio que se trate, por lo que al haber una variedad de dominios existe una variedad de resignificaciones.

Sin embargo estos desarrollos y diferentes resignificaciones no se hace evidente, ya que parecería que existe una ruptura entre la matemática y otros dominios, como por ejemplo el dominio de la ingeniería. Omitir estas relaciones obscurece a los estudiantes la funcionalidad de la matemática.

Con todo esto plantemos nuestra problemática de investigación que consiste en la ausencia de Marcos de Referencia en el discurso matemático escolar que permitan resignificar la derivada, esto es, ausencia de situaciones en los que el estudiante ponga en uso su conocimiento. En las que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica. Haciendo al estudiante participe de su conocimiento y no sólo un espectador, de tal forma que pueda construir una variedad de significados basados en su experiencia y que además den evidencia del desarrollo de la matemática en el sistema didáctico, específicamente nos enfocaremos en la matemática del nivel superior. Esto es, porque de alguna manera el discurso matemático escolar no posibilita que este conocimiento sea funcional, es decir, que tal conocimiento pueda ser incorporado al estudiante de manera orgánica a través de su experiencia, de su uso.

La investigación

Bajo esta reflexión es como surge el interés por realizar un marco de referencia para resignificar la derivada, lo cual nos condujo a investigar cómo vive la derivada en el dominio de la ingeniería, considerado como un dominio diferente a la matemática. Y así encontrar elementos que nos ayuden a la creación de tal marco. Específicamente nos centramos en el tema La Conservación de la Masa de la Mecánica de Fluidos, en donde es usada la derivada de forma funcional. En consecuencia se analizó que tal resignificación sería favorecida por la concepción de Lagrange sobre "lo que varía" alejado de límites e infinitésimos. Ambos elementos, la conservación de la masa y "la derivada" en el sentido de Lagrange son tratados bajo la epistemología del uso de las gráficas. En donde las graficación es considerada como una práctica social, y las gráficas se convierten en argumentos para justificar procedimientos.

La integración de estos elementos dio como resultado un marco de referencia que tiene como objetivo resignificar la derivada en la variación de la acumulación de un fluido en un volumen en el espacio.

El Uso de las gráficas

La graficación en la matemática escolar, por lo general, es considerada como la representación de expresiones analíticas o representación de datos. No es considerada la idea de que a través de ella se puede generar conocimiento, lo cual no es trivial, ya que se requiere de crear situaciones que tengan precisamente esa intención. Bajo esta idea es como surge la epistemología del *uso de las gráficas,* en donde al crear una intencionalidad para las gráficas nos lleva a que habrá una *función o funcionamiento* para ellas, que será realizada por medio de una *forma* expresada en la clase de tareas.

En esta dirección se han realizado varios trabajos, a la luz de la socioepistemología, que dan cuenta que la graficación puede ser considerada con tal estatus, este es, como una práctica social generadora de conocimiento matemático (Cordero, 2006).

En esos trabajos la centración no está en las definiciones o en los conceptos matemáticos sino en las gráficas, las cuales se convierten en argumentos para realizar procedimientos no propiamente algebraicos. Favoreciendo un conocimiento funcional.

Esta investigación trata de dar evidencia de ello, de que con el uso de las gráficas se construyen significados como la expresión misma de la generación del conocimiento. Y que los estudiantes construyen su propio conocimiento a través de sus prácticas. Estos procesos de construcción son, en algún sentido, opuestos a los procesos de adopción de definiciones y conceptos impuestos desde afuera, sin considerar las prácticas de los que intervinieron en su producción.

La Conservación de la Masa

El romper la centración en los conceptos obligó a poner la atención en otras componentes como los "usos del conocimiento", la cual lleva a reconocer que la matemática vive y se desarrolla en otros dominios de conocimiento en donde adquiere sentido y significación. Tal hipótesis nos llevó a entender cómo vive la derivada en un dominio diferente a la matemática como la ingeniería, en la cual nos enfocamos específicamente en el tema conservación de la masa de la mecánica de fluidos. Con la finalidad de encontrar elementos para construir un marco de referencia que permita su resignificación. En ese transcurrir nos dimos cuenta que la resignificación de la derivada en el tema de la conservación de la masa sería favorecida por las ideas de Lagrange sobre el comportamiento de las funciones.

La conservación de la masa, en la jerga de la mecánica de fluidos, suele expresarse por medio del siguiente diagrama:

$$0=\begin{bmatrix} gasto\ másico \\ que\ sale\ del \\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} gasto\ másico \\ que\ entra\ al \\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} rapidez\ de\ cambio \\ de\ la\ masa\ dentro \\ del\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}$$

(Munson, Young y Okiishi, 1999)

Que puede ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} gasto\ másico \\ que\ sale\ del \\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} gasto\ másico \\ que\ entra\ al \\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} rapidez\ de\ cambio \\ de\ la\ masa\ dentro \\ del\ volumen\ de\ control \end{bmatrix}$$

La derivada en el sentido de Lagrange

Por otro lado la derivada en el sentido de Lagrange es entendida como el coeficiente lineal de la serie de potencias:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

(Cantoral, 2001)

Sin embargo para lo que nos interesa únicamente consideramos la serie hasta el segundo término esto es:

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$$

De ambos obtenemos:

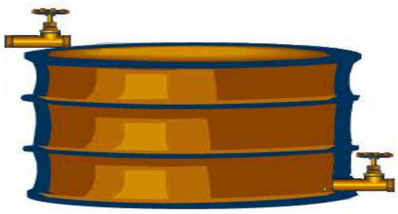
$$\begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que sale del} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que entra al} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{rapidez de cambio} \\ \textit{de la masa dentro} \\ \textit{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

En donde la resignificación de la derivada sucede en una situación de variación de la acumulación de un fluido. En particular estamos interesados en el rol del uso de las gráficas cuando se establece la variación de la acumulación del fluido. Es decir, nos cuestionamos cuál es el funcionamiento de las gráficas para establecer el comportamiento de la acumulación de un fluido y cuál es la clase de tareas que conduce la forma de la gráfica en la "resta" entre el fluido de salida y entrada.

Con base a estas ideas planteamos una secuencia didáctica, que inicia presentando al estudiante un contenedor o volumen de control con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:



A partir de esta idea, se proponen 5 situaciones:

La primera es una introducción para que el estudiante establezca la correspondencia entre las manipulaciones de las llaves con lo que sucede en el volumen de control presentándose a los estudiantes situaciones como: *Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.* Se le pide que grafique el registro de la cantidad de agua en el volumen de control. Siendo la relación: Manipulación $\longrightarrow$ gráfica.

La segunda tiene como objetivo que el estudiante reconozca la *acumulación* o *agotamiento* que se realiza en pequeños intervalos de tiempo, esto es, cuánto creció o decreció la cantidad de masa en el volumen de control de un instante a otro. Para lo cual necesita conocer dos estados: la cantidad de masa en el volumen de control en algún momento y un instante después, cuya diferencia dará la acumulación o agotamiento en ese instante. Observándose que al crecer la cantidad de fluido en el volumen de control entonces habrá una acumulación, por lo que la gráfica de las diferencias será positiva; y cuando decrece habrá un agotamiento por lo que la gráfica de las diferencias será negativa. Se les pide que realicen un bosquejo de estas cantidades con respecto a las gráficas que trazaron en la situación anterior.

En la tercera se presentan al estudiante gráficas como las que trazaron en la situación 2 que corresponden a diferencias, es decir, gráficas sobre la acumulación o agotamiento, que corresponden a la derivada. Teniendo como finalidad que los estudiantes confronten las gráficas de las diferencias con las manipulaciones de las llaves, esto es, cómo tendrían que ser éstas últimas para obtener las gráficas que se les dan. Entre las cuales están:

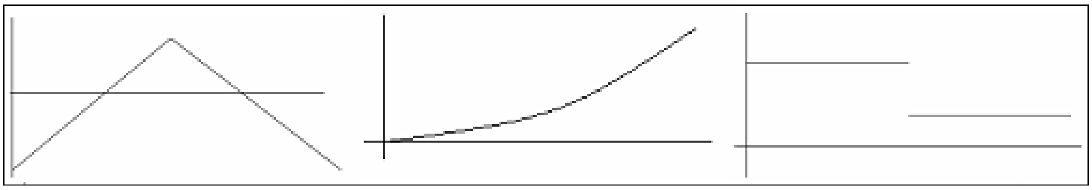


Figura I

De esta forma la relación de las manipulaciones de las llaves con la gráfica se dará en sentido contrario al del inicio, esto es: Gráfica $\rightarrow$ Manipulaciones

En la cuarta se espera que el estudiante establezca la conservación de la masa de forma implícita, esto es, que establezca las relaciones entre los datos dados que estarán regidos por la misma conservación de la masa. Ya que se tiene que cumplir que la cantidad que sale menos la cantidad que entra sea igual a la cantidad acumulada en ese instante. Para ello se presentan al estudiante 3 columnas como las que se muestran en la figura II, en las que se dan 2 datos y él tiene que establecer el tercero, usando las gráficas como un medio argumentativo para tal fin.

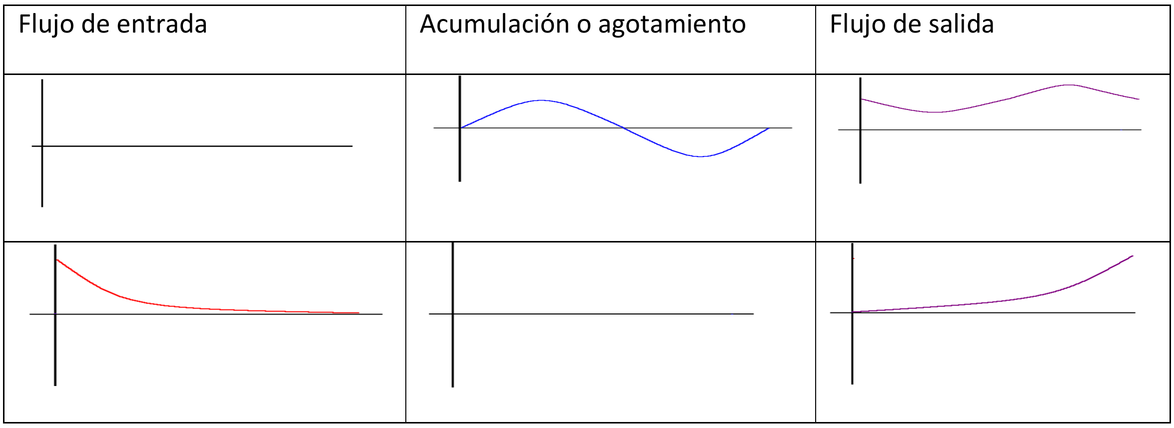


Figura II

La última situación tiene como finalidad que el estudiante establezca la conservación de la masa a través de la expresión lineal de la serie de Taylor, esto es,

f(x+h)=f(x)+(-f´(x)h). Es decir, que identifique una cantidad primitiva o flujo de entrada de la cual se van a derivar las demás. Para ello se le guía por medio de preguntas sobre gráficas que se le muestran sobre flujo de entrada, acumulación instantánea y flujo de salida con el fin de que establezca las diferentes relaciones que existen entre ellos.

Resultados

Esta secuencia didáctica ha sido aplicada a estudiantes de ingeniería, actualmente nos encontramos en la fase de análisis de los datos. Entre los resultados hallados principalmente destacan darle sentido a las gráficas de la acumulación o agotamiento, que corresponde a la derivada, con base a dos estados: la entrada y la salida de flujo. Que favorece los aspectos variacionales que han sido soslayadas por el discurso matemático escolar. Además, dan significado a los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la derivada que se manifiesta en sus argumentos. Por ejemplo, en los puntos donde la acumulación es cero identifican que es cuando coinciden el flujo de entrada y salida; cuando hay un máximo es porque hay un cambio en las llaves, es decir, que la llave de entrada de estarse abriendo empieza a cerrarse pero sin superar a la llave de salida; y en el caso de un mínimo es porque la llave de salida de estarse abriendo se empieza a cerrar pero sin superar la llave de entrada.

Conclusiones

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabaja con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. En un escenario en el cual puede construir argumentos y significados con base en su experiencia y en una situación usual, usando las gráficas como argumentos para realizar sus procedimientos.

Referencias bibliográficas

Cantoral R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1),* 27-40.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica 20 (1)*, 59-79.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en ua ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones* f *y* f' *en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Munson, B.; Young, D; Okiishi, T. (1999) *Fundamentos de Mecánica de Fluidos.* México: Ed. Limusa y Wiley.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN EL PRIMER SEMESTRE DE INGENIERÍA EN INSTITUTOS TECNOLÓGICOS

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav - IPN México
optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística Nivel: Superior

Resumen. *Este estudio se interesa en las limitaciones que puedan tener los alumnos del primer semestre de ingeniería para aprender probabilidad y estadística; se enfoca en la propuesta para estocásticos de los institutos tecnológicos y la cuestión de si satisface las necesidades del futuro ingeniero en el campo profesional. En la primera etapa de la investigación, el objeto de análisis fue el programa de estudio y los medios que recomienda el sistema de institutos tecnológicos, así como su correspondencia con las ideas fundamentales de estocásticos para un currículo en espiral. En la segunda etapa se considera la simultaneidad de la introducción de probabilidad y de estadística y del cálculo diferencial. Se ha diseñado un cuestionario para su aplicación como instrumento de recopilación de datos. En la tercera etapa se examinarán en detalle los resultados de la enseñanza en la comprensión de estocásticos de los estudiante.s*
Palabras clave: Ingeniería, estocásticos, cálculo, limitaciones

Introducción

El campo profesional del ingeniero de más en más exige conocimientos de probabilidad y de estadística para afrontar problemas prácticos de su área, lo cual demanda del alumno universitario una formación en esas disciplinas. Los psicólogos, educadores y estadísticos a la par, reportan la experiencia de que una gran proporción de estudiantes, aún en la universidad, no entienden muchos de los conceptos estadísticos básicos que han estudiado. Este estudio se dirige a la cuestión de si la formación del ingeniero en los institutos tecnológicos satisface los requerimientos de conocimientos de estocásticos para un desarrollo satisfactorio en su futuro desempeño profesional y/o académico. Las insuficiencias en habilidades matemáticas y en razonamiento abstracto por parte de los estudiantes universitarios es clave del hecho de que no entienden muchos de los conceptos estadísticos básicos que se estudian en este nivel académico (Ahlgren y Garfield, 1988).

Justificación

La importancia declarada de introducir conceptos estadísticos en el currículum escolar, junto con nuestro conocimiento limitado acerca de desarrollo cognitivo, aprendizaje de matemáticas en general y concepciones erróneas de probabilidad y de estadística, indican que es imperativo un asalto coherente e intensivo sobre la dificultad del aprendizaje de conceptos básicos de estocásticos.

Al revisar la investigación sobre enseñanza en matemáticas y ciencias, Resnick (1983, citado en Ahlgren y Garfield, 1988) estimuló la colaboración entre psicólogos cognitivos y especialistas en la disciplina para mejorar la enseñanza preuniversitaria en matemáticas y en ciencias. Recomendó que, desde el principio, se enfatizara el razonamiento cualitativo, que se construyera sobre lo que los alumnos ya saben y que se confrontara la intuición ingenua directamente (Ahlgren y Garfield, 1988).

Epistemológicamente, las nociones de cálculo se formalizan antes que las de probabilidad. Por otro lado, es producto de una enseñanza determinista que otorga mayor importancia a los conceptos del cálculo que a los de probabilidad y estadística.

En el contenido del libro de texto propuesto (Walpole, 1992) en el programa de estudios de los institutos tecnológicos, los elementos de probabilidad se presentan desde el inicio y hasta el capítulo 6. De manera paralela a la asignatura "Probabilidad y Estadística", en los institutos tecnológicos se propone "Cálculo Diferencial e Integral" (Stewart, 2001). La simultaneidad de ambas asignaturas en un mismo semestre plantea las interrogantes de si esta última se deba impartir previamente a la introducción de probabilidad y estadística y qué consecuencias tiene en la comprensión de estocásticos de los estudiantes.

Pregunta de investigación

¿Cuáles son las limitaciones para el aprendizaje de Probabilidad y Estadística de los estudiantes de primer semestre de ingeniería en institutos tecnológicos y a qué factores principales se deben?

Objetivos

Identificar la comprensión, de los estudiantes del primer semestre de ingeniería, de ideas fundamentales de estocásticos implicadas en problemas que requieren de conceptos del Cálculo, para obtener información de las limitaciones que repercutan hacia el orden cognitivo y transgredan el orden epistemológico y, de ahí, informar sobre la pertinencia de la propuesta institucional para, en su caso, proponer una alternativa.

Elementos teóricos

Se han considerado elementos teóricos, en el orden epistemológico, con la propuesta de Dietger Heitele (1975) referente a las ideas *fundamentales de estocásticos* para un currículo en espiral, pues es necesaria una formación continua en estocásticos, desde la educación preescolar hasta la universitaria, que considere sus *ideas fundamentales* como guía, de manera que en los grados superiores se pueda presuponer un dominio intuitivo (Fischbein, 1975) favorable al tratar temas de estocásticos así como bases para su conocimiento analítico (Heitele, 1975).

En el análisis se considera el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) sobre la constitución del concepto matemático, el cual resulta de la interacción entre el objeto, el signo y el propio concepto (Figura 5.1).

$$\begin{tikzcd} \text{objeto} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{signo} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{concepto} & \end{tikzcd}$$

Figura 5.1 Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005, pág. 22).

Es en el nivel universitario donde se enseñan estocásticos por primera vez como disciplina científica (Ahlgren y Garfield, 1988). El contenido típico de un curso introductorio de estadística a nivel universitario incluye: Estadística descriptiva, Teoría de la probabilidad e Inferencia estadística (Kapadia y Borovcnik, 1985).

Delimitaciones y limitaciones

La investigación se dirigirá sólo al caso de la carrera de ingeniería electrónica de un instituto tecnológico que propone la introducción simultánea al estudio de probabilidad y de estadística y al del cálculo diferencial. Puesto que la asignatura "Probabilidad y Estadística" consta de un solo curso durante el primer semestre de la carrera y es la única referente a estocásticos a lo largo de ésta, la investigación se centra en los temas planteados para este periodo. Debido a las características de la investigación y al tiempo disponible para desarrollarla, participará un número restringido de estudiantes del instituto tecnológico al cual nos hemos venido refiriendo.

Organización del estudio y criterios de análisis

La investigación emprendida, *en curso*, posee un carácter cualitativo y, de este modo, se hará la caracterización de las posibles limitaciones en el aprendizaje de estocásticos por parte de los estudiantes de ingeniería de institutos tecnológicos.

Para estudiar la cuestión de nuestro interés, se implementa el uso sistematizado de la *célula de análisis* en las tres etapas en las que se ha organizado esta investigación (ver Figura 7.1).

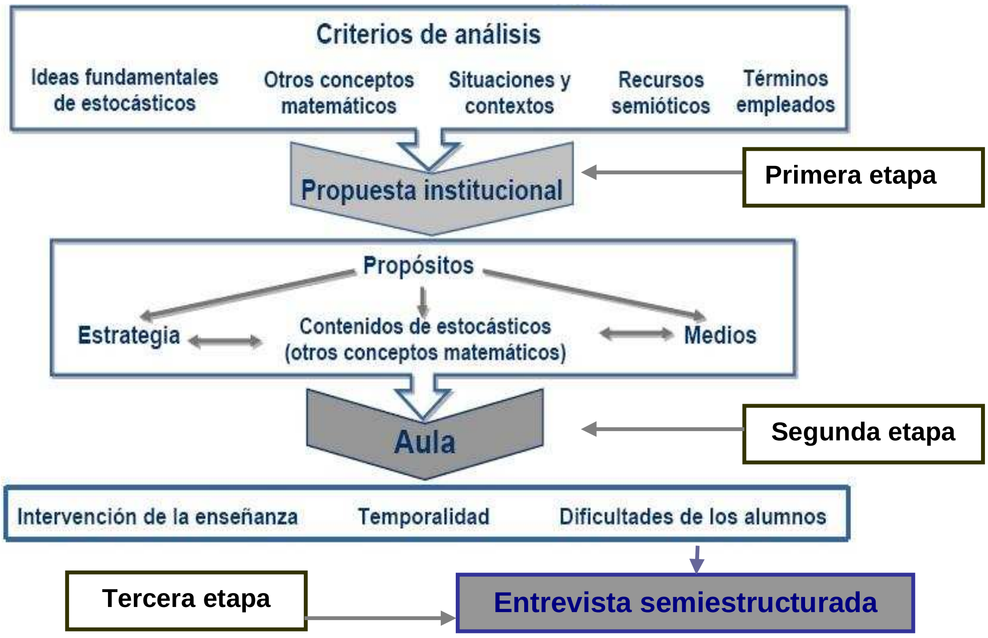


Figura 7.1. Organización de la investigación y célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006).

La primera concierne a las condiciones a las que se somete institucionalmente la formación en probabilidad y en estadística en la carrera de ingeniería electrónica; se le desarrolla con una investigación documental de su programa de estudio y libros de texto propuestos por los institutos tecnológicos. La segunda etapa se enfoca en la enseñanza de estocásticos, de cuyo resultado se recopilan datos, en primera instancia, mediante cuestionarios impresos en hojas para contestación individual con lápiz por parte de los estudiantes. Para la tercera etapa se pondrá en juego una estrategia de selección de estudiantes por su desempeño en la segunda, para examinar en más detalle su comprensión de estocásticos por medio de entrevistas semiestructuradas.

A lo largo de la investigación los datos recopilados se analizan respecto a las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975) y se les distingue de otros conceptos matemáticos implicados en su estudio para identificar posibles impertinencias por introducciones simultáneas o tardías de los segundos respecto a los primeros. Los recursos semióticos gráficos propuestos o utilizados también son de interés, en tanto están en estrecha relación con procesos cognitivos que los estudiantes habrán de manifestar mediante esos recursos como resultado de su comprensión de los temas enseñados (Fischbein, 1975; Steinbring, 2005). Los términos utilizados para hacer referencia a los estocásticos son motivo de inventario porque a algunos de ellos se les dota de un sentido distinto si se les aplica a situaciones deterministas (por ejemplo, “variable” en *variable aleatoria*, o “media”).

Los instrumentos para la recopilación de datos son cuestionario, guión de entrevista y entrevista semiestructurada. En consecuencia, el análisis de los datos recopilados durante las tres etapas de la investigación se efectúa en matrices y los criterios corresponden a lo planteado en la *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006).

Ejemplo incluido en el cuestionario diseñado. Objetivo: Identificar la comprensión del estudiante, de las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en el problema. Observar de qué manera trata las distribuciones continuas de probabilidad y si su interpretación le es útil para la solución del problema.

Ideas fundamentales de estocásticos implicadas: 1) *Medida de probabilidad*: Es fundamental la comprensión de esta idea como la asignación numérica, en el intervalo [0,1], a la probabilidad de cada evento del espacio muestra; 2) *Variable aleatoria*: El tiempo de vida útil de los transistores de silicio; 3) *Espacio muestra*: El conjunto de transistores producidos que se usan para montarse en tarjetas; 4) *Adición de probabilidades*: Para el caso de una variable aleatoria continua, la probabilidad de que sus valores pertenezcan a un intervalo dado es el área bajo la curva de su función de distribución calculada para el intervalo en cuestión.

Otros conceptos matemáticos requeridos para contestar: Operaciones aritméticas, uso de signos, números racionales, exponentes, intervalos cerrados, intervalos abiertos, intervalos semiabiertos, integración, unidad de medición. El estudiante deberá tener claro que la función de distribución es continua para que pueda ofrecer una respuesta a los incisos planteándolos mediante intervalos, y sea un paso natural colocar, en los límites de la integral, los valores relacionados con la unidad de medición: $P(x \geq 200)$ en a) y $P(80 \leq x \leq 120)$ en b).

Recursos semióticos que se espera utilice el estudiante: Lengua natural, símbolos numéricos, expresiones matemáticas, esbozo de una gráfica relacionada con la función de densidad.

Términos empleados para referirse a ideas de estocásticos: Y, *entre* y *cualquier* son expresiones que aluden a eventos; *Tiempo de vida* se refiere a la variable aleatoria; *Al menos*, *probabilidad*, *variable aleatoria* y *función de densidad*; *Densidad*: Concentración de las probabilidades de los eventos del fenómeno aleatorio.

Problema: El tiempo de vida útil, en días, de los transistores de silicio montados en una tarjeta, es una variable aleatoria que tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(x+100)^3}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que uno de estos transistores tenga una vida útil de:

a) al menos 200 días;

b) cualquier duración entre 80 y 120 días.

c) ¿Cuál es el comportamiento de la función de densidad?

Solución esperada del estudiante que ilustra el tipo de procedimiento de cálculo requerido:

a) $P\left(x \geq 200\right)$

$$\int_{200}^{\infty} f\left(x\right)dx = 20000\int_{200}^{\infty}\frac{dx}{\left(x+100\right)^3} = 20000\int_{200}^{\infty}\frac{du}{u^3} = 20000\left.\frac{1}{-2u^2}\right|_{200}^{\infty} = -10000\left.\frac{1}{\left(x+100\right)^2}\right|_{200}^{\infty}$$

$$u = x+100$$

$$du = dx$$

$$= -10000\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\left(200+100\right)^2}\right] = \frac{1}{9}$$

La probabilidad de que uno de los transistores tenga una vida útil, mayor o igual que 200 días, es un noveno.

b) $P\left(80 \leq x \leq 120\right)$

$$\int_{80}^{120} f\left(x\right)dx = 20000\int_{80}^{120}\frac{dx}{\left(x+100\right)^3} = 20000\int_{80}^{120}\frac{du}{u^3} = 20000\left.\frac{1}{-2u^2}\right|_{80}^{120} = -10000\left.\frac{1}{\left(x+100\right)^2}\right|_{80}^{120} =$$

$$u = x+100$$

$$du = dx$$

$$= \frac{1000}{9801} = 0.10203$$

La probabilidad de que uno de los transistores tenga una vida útil, entre 80 y 120 días, es 0.10203.

c) La función de densidad es una curva ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano y es asintótica respecto a los ejes que lo conforman, lo cual nos informa que la probabilidad de la duración de los transistores en cuestión disminuirá a medida que transcurra el tiempo.

objeto/ Eventos — **signo/** $x \geq 200$, $80 \leq x \leq 120$ — **concepto/**

objeto/ Caracterización de transistores de silicio — **signo/** — **concepto/**

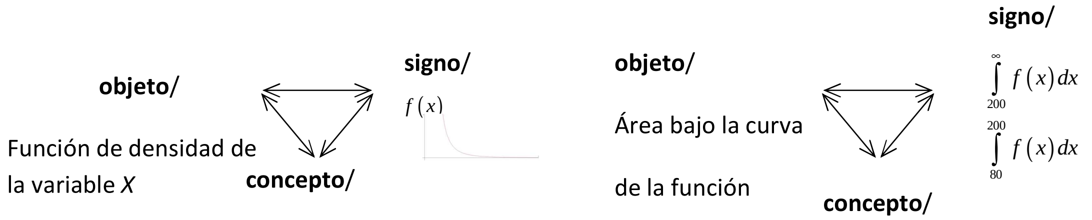


Figura 7.2. Análisis de ideas fundamentales de estocásticos implicadas en el problema planteado.

Al estudiante se le propone un problema en el cuestionario que implica las ideas fundamentales de estocásticos indicadas en la Figura 7.2. Su respuesta proporciona datos sobre su comprensión de ellas.

Resultados

La simultaneidad de la introducción de probabilidad y de estadística y del cálculo diferencial e integral plantea la interrogante del uso correcto del último para el estudio de las primeras o si éste se debe posponer.

La probabilidad es una función cuyo dominio es el espacio muestra y el codominio es el intervalo cerrado y real [0,1]. Esta definición se podría comprender si se le introdujera cuando, o después, de que se presenta el concepto de función en la asignatura del "Cálculo diferencial", pero le antecede. En consecuencia, se plantean interrogantes sobre la adquisición de los conceptos de estocásticos de algunos estudiantes pero, en contraparte, se plantea también la oportunidad de una reafirmación de los conocimientos sobre los temas tratados en ambas asignaturas para los alumnos de este nivel. Cabe señalar que las asignaturas en cuestión se cursan de manera independiente y, aparentemente, sus temas se presentan sin relación alguna. En el caso del problema incluido en este reporte, se requiere un procedimiento de cálculo para solucionarlo que está ubicado, dentro del programa de estudios, en un semestre posterior al que contiene la asignatura probabilidad y estadística. Se tendría que ejercitar la operación con integrales para que el estudiante no encuentre un obstáculo en esa parte.

La postergación, en el programa de estudios de los institutos tecnológicos, de estadística descriptiva luego de conceptos básicos y de distribuciones de probabilidad, supone el desaprovechamiento del enfoque frecuencial como una base intuitiva favorable a la introducción de conceptos probabilísticos (Hogarth, 2002).

Referencias bibliográficas

Ahlgren, A. y Garfield, J. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education 19(1)*, 44-63.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dördrecht, Netherlands: Reidel Publishing Company.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematic 6(2)*, 187-205.

Hogarth, R. M. (2002). *Educar la intuición*. *El desarrollo del sexto sentido*. Barcelona, España: Paidós.

Steinbring, H. (1991). The theorical nature of probability in the classroom. En Kapadia, R. y Borovcnik, M. (Eds.) *Chance Encounters: Probability in Education*. (pp. 135-167). Dördrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Comp.), *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 195-214), México: Santillana.

Spiegel Murray, R. (1975). *Probabilidad y Estadística.* México: McGraw-Hill.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (4ª. ed.). Colombia: Thomson.

Walpole, R. & Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística* (4ª. ed.). México: McGraw-Hill.

USO DE LAS GRÁFICAS EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN DE MOVIMIENTO. VARIACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO ÓRDENES

Claudia Flores Estrada, Liliana Suárez Téllez
CECyT 5-IPN, México
CB07 Iztapalapa
CFIE del Instituto Politécnico Nacional
claudia.mo@gmail.com, lsuarez@ipn.mx
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Medio

Resumen. *Este trabajo reporta los resultados de una investigación que tiene como propósito analizar la construcción de ideas en el conocimiento matemático que logran algunos estudiantes de bachillerato del Instituto Politécnico Nacional al realizar la graficación de una situación real de movimiento. El marco teórico es la socioepistemología. En particular, se retoma la hipótesis de que la noción de derivada no puede construirse sino después de haberse construido la idea de derivada sucesiva. Se muestran algunas evidencias del manejo simultáneo de dos órdenes de variación al trabajar con actividades de aprendizaje diseñadas a partir de la categoría de modelación-graficación.*
Palabras clave: modelación, simulación, graficación, variación y tecnología

Introducción

En el ámbito escolar se fomenta el trabajo autónomo y colaborativo como promotor de aprendizaje para interactuar con el conocimiento matemático mediado por el uso de tecnologías. La incorporación de la tecnología ha propiciado modificaciones de forma paulatina en las aulas. El uso de los objetos para el aprendizaje abre la posibilidad de que tanto estudiantes como profesores adapten los recursos didácticos de acuerdo a sus propias necesidades, inquietudes, estilos de aprendizaje y enseñanza.

Se han reportado en diversas investigaciones (Leinhardt, et al, 1990 y Torres, 2004) las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, sin embargo, los significados, procedimientos y argumentos que propician en los estudiantes estas actividades de construcción e interpretación de gráficas no sólo contribuyen a la comprensión del concepto de función sino que constituye una vía de construcción de ideas de variación.

De esta manera, la graficación se ha revelado en las investigaciones (véase una revisión amplia en Leinhardt et al 1990) como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos. La gráfica permite ver las características globales y locales de la función como son: las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad y los máximos y los mínimos.

Pero también, tomando a la graficación como una vía de construcción se pueden identificar distintos usos de las gráficas. En este sentido Torres (2004) propone, a partir de una revisión de libros de texto y de literatura en Matemática Educativa tres usos de las gráficas:

a) La construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables (localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica).

b) La construcción de gráficas por prototipos, en una parábola, por ejemplo, se estudian las transformaciones gráficas cuando se le suma una constante, o una recta que pase por el origen con pendiente positiva o negativa, o una recta que no pase por el origen con pendiente positiva o negativa o cuando el coeficiente del término cuadrático toma un valor mayor o menor a la unidad.

c) La representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico. Los dispositivos transductores registran los datos y las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas. Los alumnos realizan un movimiento, obtienen un registro gráfico de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación. Existen gráficas que utilizan un cuadrante, dos cuadrantes, tres cuadrantes y cuatro cuadrantes, gráficas que representan una función analítica o una situación real.

El presente trabajo considera este último uso de las gráficas para la construcción de ideas en el conocimiento matemático de la modelación-graficación.

Planteamiento del problema

Hemos escogido situaciones de aprendizaje que tengan que ver con la modelación gráfica del movimiento tal y como es trabajada en Torres (2004). Describimos este tipo de actividades a través del cuadro siguiente.

Descripción de las actividades de graficación – modelación en el análisis de una situación de movimiento:

- *Proponer un modelo gráfico*: se pide diseñar una gráfica que describa los cambios de posición de un una persona que realiza el movimiento descrito. En el momento de realizar esta tarea se toman decisiones: las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.

- *Realizar una simulación*: se pide simular el movimiento frente al sensor para obtener la gráfica estipulada. El movimiento se adapta al alcance del sensor. A partir de múltiples realizaciones se establecen relaciones entre las características del movimiento y los diversos comportamientos gráficos obtenidos en la calculadora.

- *Efectuar un contraste entre el modelo gráfico y la situación*: se pide ajustar el modelo gráfico original dando cuenta de la situación planteada.

Se esperan de los estudiantes múltiples realizaciones en la simulación del movimiento en las que tomen decisiones sobre las características que se varían en la situación para la obtención de distintas gráficas.

Cuadro I. Descripción de las actividades de graficación- modelación tomado de Suárez et al (2005).

Un ejemplo de estas actividades, en cuyo diseño la modelación usa la graficación, es el problema de movimiento comentado en el Libro del Profesor de Geometría Analítica (IPN, 2006, pp 109-119).

La modelación es una construcción de conocimiento matemático que se realiza en un ambiente social. Arrieta (2003) la define como un proceso de matemátización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y estudiantes en el salón de clases, utilizando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza.

Figura 1. Red de actividades de graficación- modelación

La presente investigación se enfoca en la interpretación de las formas básicas de graficación en la que los estudiantes logran una visión cualitativa de un cierto fenómeno de movimiento describiendo las variaciones de primer y segundo órdenes de la situación de movimiento.

La red de actividades de la Figura 1 está constituida por cuatro Actividades de Aprendizaje que permiten un mejor entendimiento en el estudiante de quinto semestre del Nivel Medio Superior. Esta red de actividades se vincula desde perspectivas diferentes y se articulan de varias maneras para cumplir diversos objetivos didácticos.

Marco teórico

Los programas vigentes de matemáticas en el Nivel Medio Superior del IPN (IPN, 1994-1996) establecen la modelación como una línea de desarrollo del currículo a través de varios cursos. En la instrumentación didáctica y en la lista de contenidos de los programas de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística se observa como una constante la graficación de funciones, ecuaciones y conjuntos de datos (Cen, 2006). En los paquetes didácticos publicados por el Instituto Politécnico Nacional se han incluido una gran variedad de situaciones de aprendizaje con el uso de gráficas en ambientes tecnológicamente enriquecidos.

El marco de referencia para la presente investigación es la socioepistemología. En particular, se retoma la hipótesis, planteada dentro la didáctica del Cálculo, que dice que “la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva” (Castañeda, 2004, p. 26).

En la formulación de esta hipótesis intervienen cinco elementos: Relativo a la multiplicidad de representaciones; Relativo al tratamiento simultáneo de las variaciones; relativo a su regularidades; Relativo al problema de la dimensionalidad y Relativo a la aceptación de la metafísica diferencial, pero, en este trabajo hay un énfasis en el “tratamiento simultáneo de las variaciones de una función”, en términos de una situación de movimiento, y las variaciones en la posición y la velocidad.

La hipótesis de esta investigación es que, en una situación de modelación del movimiento (véase la caracterización realizada por Suárez, 2008), el tratamiento gráfico simultáneo de las variaciones de una función corresponde a la relación que guardan la función $f(x)$ y sus derivadas sucesivas $f'(x) \quad y \quad f''(x)$ en una situación real de movimiento. El análisis considera las formas básicas de graficación y los significados que le asignan algunos estudiantes a las variaciones de primer y segundo órdenes.

Los estudiantes analizan la gráfica y obtienen la función para realizar las gráficas a lápiz y papel y con uso de la tecnología. Se reportan las evidencias de las exploraciones realizadas por los estudiantes para dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades.

Actividades de Aprendizaje que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos con las variaciones de la posición y la velocidad en una situación real de movimiento.

Las exploraciones realizadas con estudiantes de bachillerato forman parte de esta investigación que quiere dar cuenta de la naturaleza de los conocimientos que los alumnos ponen en juego cuando se enfrentan a este tipo de actividades que exigen coordinar habilidades en el manejo de las gráficas para la construcción de modelos que les permitan describir la variación de la posición y la velocidad en una situación de movimiento.

Metodología

Se realiza una red de cuatro actividades de graficación – modelación. Cada actividad tiene una finalidad en la que se permite al discente no sólo trabajar de forma colaborativa sino conocer y aplicar estrategias para su aprendizaje.

Cada Actividad de Aprendizaje que conforma la red de AA de graficación-modelación se realiza en dos Modalidades: Modalidad I sin uso de tecnología, realizan la Actividad de Aprendizaje a lápiz y papel. Y Modalidad II con uso de la tecnología, se utiliza la calculadora con poder de graficación y el sensor de movimiento. El estudiante analiza lo realizado a lápiz y papel al contrastarlo con uso de tecnología.

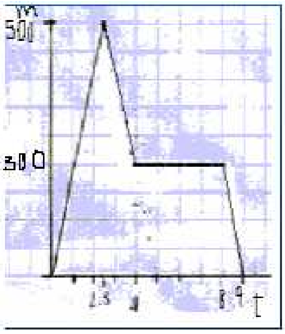
Para obtener evidencias que contribuyan al fortalecimiento de las hipótesis se explora el desempeño de los estudiantes de bachillerato en la resolución de dos las actividades de aprendizaje propuestas.

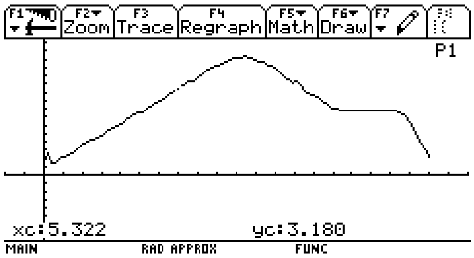
Resultados

En este apartado mostramos el análisis de dos de las actividades donde el trabajo de los estudiantes avanza de la modalidad de diseño de las gráficas con lápiz y papel a la modalidad de diseño de gráficas con uso de la tecnología.

1) De la situación de movimiento a la gráfica

La actividad de aprendizaje (AA) "Epifanía" parte del enunciado de una situación de movimiento y una serie de preguntas sobre la velocidad y la aceleración. En términos de nuestra hipótesis nos interesa problematizar el uso de las gráficas del primer y el segundo órdenes de variación de la posición. Se describe con palabras una situación de movimiento en la que una persona se aleja 500 metros de un lugar de origen, regresa y en el trayecto se detiene cuatro minutos. En la primera modalidad predomina una tendencia a graficar con trazos rectos, véase Figura 2.a, los estudiantes identifican la velocidad constante correspondiente a los trazos rectos, incluso pueden calcularla para los diferentes intervalos y, de esta manera, hacer comparaciones de intervalos donde lleva mayor velocidad con respecto a otro.



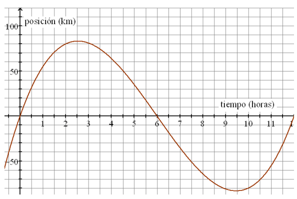


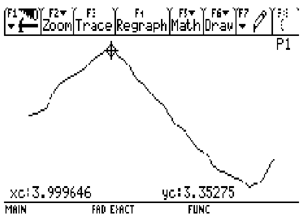
Figuras 2.a y 2.b. Gráficas de los estudiantes a lápiz y papel y con uso de tecnología

El diseño de gráficas a partir de movimiento frente a un sensor, en la segunda modalidad de trabajo, véase figura 2.b, propicia que los estudiantes realicen un análisis más fino de los cambios de velocidad y vinculan aspectos gráficos como los puntos máximos o puntos de inflexión con momentos del movimiento como el instante del regreso o cuando la velocidad deja de disminuir o aumentar, respectivamente.

2) De la gráfica de posición a la situación

La actividad de aprendizaje "Acércate más" parte de la gráfica de la posición para preguntar por la velocidad.





Figuras 3.a y 3.b. Gráficas de la posición, la proporcionada por la actividad y la obtenida por los estudiantes.

A diferencia de la AA descrita en el apartado anterior, en esta actividad se trata de que los estudiantes reproduzcan una gráfica específica para pasar después su análisis, por medios tecnológicos que permitan responder las preguntas sobre la velocidad. Como se observa en la Figura 3.b los estudiantes obtienen gráficas que conservan las características globales de la gráfica 735 de partida. Y con esta representación gráfica en la calculadora pueden contestar las preguntas de posición y velocidad planteadas en la AA.

Conclusiones

Esta exploración es coherente con la hipótesis de diseño de las actividades de aprendizaje que se refiere a que estas actividades de aprendizaje propician el manejo simultáneo de dos órdenes de variación de la posición: la velocidad y la aceleración, transitando, en el primer caso, de una situación de movimiento, formulada verbalmente, a su análisis gráfico y, en el segundo caso, de una situación de movimiento presentada en forma gráfica a su interpretación en términos de la situación.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Cen, C. (2006*). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Flores, C. (2005). *Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento.* En G. Bermúdez, M. Olave, C. Ochoviet, Y. Testa y A. Martínez. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Montevideo, Uruguay: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

IPN (1994-1996). *Planes y programas de estudios de Matemáticas I, II, III, IV, V y VI. Documentos internos de trabajo.* México, D.F.: Dirección de Educación Media Superior IPN.

IPN (2006). *Geometría Analítica*. México, D.F.: IPN.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research 60(1)*, 1-64.

Suárez, L., Flores, C., Gómez, A., Licona, R. (2005). *Uso de las gráficas a través de actividades de modelación matemática con calculadoras y dispositivos transductores.* Extraído el 16 de agosto de 2006 desde http://www.te.ipn.mx/quintoencuentro/registro/taller_opc_ins.asp

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

ESTRATEGIAS PARA POTENCIAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Alfonso E. Chaucanés Jácome, Jairo Escorcia Mercado, Tulio R. Amaya de Armas, Atilano R. Medrano Suárez, Albeiro López Cervantes, Eugenio Therán Palacio
Grupo Pensamiento Matemático (PEMA) Colombia
Universidad de Sucre
chaucane@yahoo.com, escorciamercado@yahoo.es, tuama1@hotmail.com, amedrasu@yahoo.es
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En el presente trabajo se reportan algunas estrategias utilizadas en la perspectiva de potenciar el pensamiento variacional en estudiantes de octavo grado, de Educación Básica, utilizando situaciones problema del contexto sociocultural, bajo un diseño cualitativo. El trabajo se dividió en tres partes, una prueba de reconocimiento, el proceso de intervención en el aula y una prueba de contraste. Se utilizaron estrategias didácticas, materializadas en las situaciones problema, con el objeto de estudiar las alternativas de solución presentadas por los estudiantes y las dificultades de éstos al utilizarlas, para luego con otras actividades intentar vencer las dificultades que se detectaron. Entre las estrategias más comunes utilizadas por los estudiantes estuvieron la resolución por tanteo, el uso de tablas, y las soluciones secuenciadas.*
Palabras clave: pensamiento variacional, estrategias, situaciones problema

Introducción

Una de las dificultades con las que se encuentran los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas en Colombia, y en particular en el Departamento de Sucre, es el de "construir sentido y significado para los contenidos matemáticos, y por lo tanto, establecer conexiones con las ciencias, con la vida sociocultural y con otros ámbitos de la matemática misma" (ICFES, 2007, p. 20).

Pensando en esta situación, el grupo de Investigación Pensamiento Matemático (PEMA) de la Universidad de Sucre, Colombia, concibió la idea de estructurar y realizar una investigación alrededor de la problemática planteada. Para ello se tuvieron en cuenta algunos trabajos de investigadores como Ardila, Eslava y Díaz (1995); Monzoy (1998); García y Serrano (2000); Arce, Torres, Ramírez, Valoyes, Malagón y Arboleda (2005), quienes resaltan la importancia de estudiar el concepto de función para la formación matemática básica del estudiante, por su aplicabilidad en diversos campos y aspectos de la vida, lo que puede permitir al educando un avance en el desarrollo del pensamiento variacional.

Al tenor de lo antes expresado, con este trabajo de investigación se pretendió validar estrategias didácticas para el aprendizaje de las matemáticas, relacionadas con el desarrollo de pensamiento variacional, teniendo en cuenta las estrategias utilizadas por los estudiantes al intentar resolver situaciones problema del contexto sociocultural. Este estudio se llevó a cabo con niños y niñas de octavo grado, de estratos socioeconómico medio y bajo, de tres Instituciones Educativas públicas del municipio de Sincelejo: Simón Araujo, Madre Amalia y la Normal Superior, bajo un diseño cualitativo.

El trabajo se realizó en tres etapas: prueba diagnóstica, la cual permitió determinar el nivel de desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes; intervención en el aula, orientada a desarrollar procesos cognitivos y metacognitivos, usando como herramienta fundamental situaciones problemas del contexto, y, prueba de contraste, o prueba final, en la que se verificó el avance de los estudiantes, teniendo como base las categorías de análisis establecidas previamente.

Lineamientos conceptuales

La presente investigación se realizó sobre el supuesto de que el aprendizaje tiene como actor principal a los propios estudiantes, es decir, que el conocimiento a generar no les sea ajeno. En este sentido, y en concordancia con este presupuesto, el trabajo investigativo se hizo a partir de situaciones problema relacionadas con el contexto en que se desarrolla el estudiante. Para ello es necesario romper paradigmas de signos, de escritura y de lenguaje, para que, mediante la orientación y mediación de expertos, se establezca un diálogo de saberes con el fin de ponerlos a tono con el lenguaje matemático universal. Al respecto, Gómez (1999), expresa que "la enseñanza de las matemáticas debería realizarse a través de explorar y experimentar con situaciones problemáticas, para desarrollar un punto de vista matemático de interacción con el entorno" (p. 4).

Lo anterior deja ver la importancia de que sea el estudiante, a través de mediaciones pedagógicas o didácticas, quien descubra o redescubra los conocimientos matemáticos al relacionarlos con sus propios presaberes y con elementos del mundo de la vida para así asignar significado y sentido a los conceptos. De esta manera la matemática comenzará a ser vista por los estudiantes, como un elemento más con el que se relacionan a cada momento; como un compartir las experiencias de cada uno, como un resultado de sus propios experimentos donde el hacer matemática es más que recibir ciertas instrucciones abstractas distantes de su propia cotidianidad. Además, según el Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior (ICFES, 2003), “el conocimiento matemático es dinámico, hablar de estrategias implica ser creativo para elegir entre varias vías la más adecuada o inventar otras nuevas para responder a una situación y el uso de estrategias implica el dominio de la estructura conceptual” (p.17).

Para Vasco (2005):

> *uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico (p. 66).*

Lev S. Vygotsky da luces importantes sobre cómo es posible potenciar el pensamiento a través del trabajo compartido. Moreno (2002) al referirse al trabajo de Vygotsky, considera que existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones para que se de el desarrollo de las potencialidades del individuo inmerso en procesos de aprendizaje. De esta manera, se puede interpretar, que en el aprendizaje de un niño no deben ser confundidos el nivel cognitivo que tiene en un momento dado, con su capacidad para adquirir los conocimientos. Por su parte, Socas (2005), conceptúa “que el análisis de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes (…) supone combinar estrategias generales y especificas a largo plazo, con estrategias particulares e inmediatas”(p.29).

Metodología

Población y muestra

La población estuvo constituida por 555 estudiantes de octavo grado de Educación Básica Secundaria, provenientes de tres Instituciones Educativas del sector Oficial, del Municipio de Sincelejo, Sucre, Colombia. Eran estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 12 y los 14 años, de estratos socioeconómicos medio y bajo. La prueba diagnóstica se aplicó a una muestra de 111 estudiantes en el horario habitual de clases. Durante el proceso de intervención muchos de estos estudiantes desertaron por diversas razones (movilidad a otras instituciones, inconvenientes para asistir a los encuentros, ya que éstos se efectuaban en jornada extra escolar, entre otras), por lo que la muestra a la que se le aplicó la prueba de contraste se redujo a 48 estudiantes.

Procedimiento

En las tres etapas en que se desarrolló la investigación (prueba diagnóstica, intervención en el aula, prueba de contraste o posprueba), se utilizaron situaciones problema elaboradas, por parte del grupo investigador, con elementos del contexto sociocultural.

En la primera y última etapa se le permitió a los niños y niñas asumir por sí solos las situaciones problema, con el fin de hacer los análisis correspondientes, sobre la base de las categorías que se especifican a continuación: elaboración de tablas de valores a partir de información dada en una situación problema; identificación de los valores mínimos y máximos del rango de variación de una cantidad en una situación problema; determinación del valor de una incógnita en una situación problema; explicación de los procesos realizados para responder preguntas de una situación problema; identificación de un patrón de regularidad en una situación problema; identificación de cantidades fijas y cantidades variables que intervienen en una situación; obtención de un modelo matemático que represente una situación problema.

En la etapa de intervención en el aula, se utilizaron, igualmente, situaciones problema elaboradas por el grupo investigador, teniendo como referente las estrategias evidenciadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica.

El grupo considera nodal esta etapa, puesto que es en ella donde se dan las relaciones fundamentales (alumno-situación problema-docente) que posibilitan la activación de procesos cognitivos y metacognitivos. En esta parte se siguió, en síntesis, el siguiente procedimiento: al plantear las situaciones problema, y tras el abordaje de éstas, se discutía con los estudiantes sus posibles soluciones y se les acompañaba mientras construían alternativas de solución, resolviendo inquietudes e induciéndoles a concebir otras estrategias de solución obtenidas por estudiantes de otras instituciones o por alguno de los miembros del grupo orientador. Con esto se buscaba que los estudiantes reflexionaran y usaran concientemente tanto las estrategias que ellos mismos concebían como las concebidas por otros grupos de estudiantes y las sugeridas y/o inferidas por los docentes investigadores.

Resultados

Los resultados de la prueba diagnóstica y la prueba de contraste, se especifican a continuación.

Tabla1. Resultado cuantitativo por categorías de la pre y postprueba

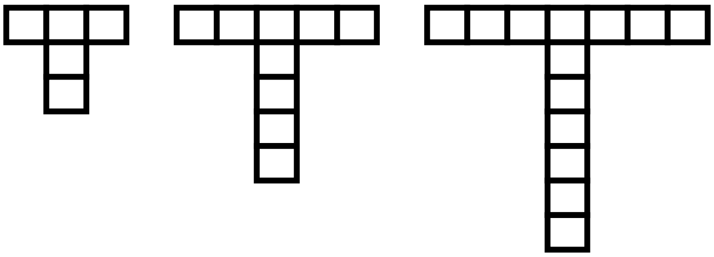
PRUEBAS / CATEGORÍAS	PREPRUEBA		POSTPRUEBA	
	FRECUENCIA	%	FRECUENCIA	%
Elaboración de tablas de valores a partir de información dada en una situación problema	33	29.7	39	81.3
Identificación de los valores mínimos y máximos del rango de variación de una cantidad en una situación problema	13	11,7	17	35.4
Determinación del valor de una incógnita en una situación problema.	28	25.2	35	72.9
Explicación de los procesos realizados para responder preguntas de una situación problema.	17	15.3	14	29.2
Identificación de cantidades fijas y cantidades variables que intervienen en una situación	5	4.5	31	64.6
Identificación de un patrón de regularidad en una situación problema	17	15.3	44	91.7
Obtención de un modelo matemático que represente una situación problema.	0	0	13	27.1

Como se puede apreciar en la tabla, es significativo el aumento de los porcentajes de la pre-prueba a la post-prueba, en todas las categorías en consideración. De acuerdo con estos resultados y con lo observado en la etapa de intervención es notorio el avance en la determinación de estrategias para darle solución a las situaciones planteadas, entre las cuales se destacó la identificación de un patrón de regularidad; surgió la necesidad de modelar matemáticamente la situación con muchos intentos, pero un bajo porcentaje de acierto. De esta manera, los estudiantes fueron progresivamente utilizando cada vez menos estrategias de tanteo e inspección, siempre tratando de formalizar y generalizar matemáticamente la situación, de igual manera utilizaron conscientemente la información que habían consignado previamente en sus tablas; así como la identificación y utilización lógica de las cantidades que intervienen en la situación, de lo que se infiere un avance significativo de los conceptos que involucra el pensamiento variacional, evidenciando de manera positiva que las estrategias implementadas en la etapa de intervención permitieron el alcance del objetivo propuesto.

Algunos tópicos que merecen destacarse luego del proceso de intervención en el aula son la persistencia de algunas dificultades en: determinación de las cantidades (variables y constantes) que intervienen en la situación, establecer relaciones de dependencia entre las variables, generar datos que debían consignar en una tabla, determinar los intervalos de variación de las variables, explicar los procedimientos utilizados para dar solución a las preguntas planteadas. Estos hechos y la experiencia obtenida permiten concluir que los tiempos utilizados para minimizar las dificultades no fueron suficientes y la recurrencia misma de las dificultades requiere planes estructurados y permanentes de intervención. Además, las dificultades, al parecer, son connaturales a los procesos de desarrollo de pensamiento en especial el variacional, no obstante a la hora del abordaje en el aula, la implementación de las situaciones de este tipo ayuda a minimizar las falencias en el proceso, por lo que se visiona profundizar en los restantes elementos conceptuales de la variación y el cambio, así como la utilización de un trabajo metodológico de carácter interdisciplinario.

La metodología de trabajo favoreció la participación creativa de los estudiantes, su producción académica, la interacción activa en el aula, mayor entrega y disposición, donde el alumno se sitúa como centro del proceso y el docente un mediador entre el objeto de conocimiento propio del hacer de la matemática y el sujeto de aprendizaje.

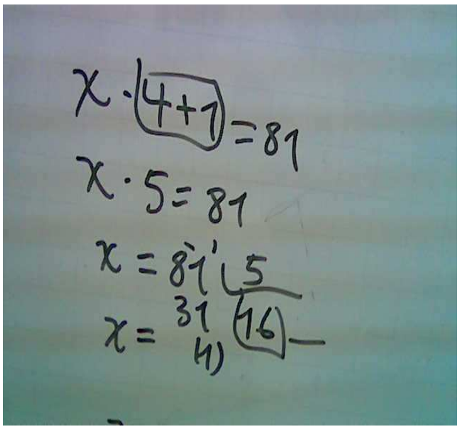
A continuación, por su relevancia para el grupo investigador, se muestran algunas de las soluciones dadas por estudiantes a una de las situaciones problema planteadas en la etapa de intervención en el aula. La situación problema fue: “Dada la secuencia de figuras que se muestran a continuación:



Posición 1 Posición 2 Posición 3

Si se sigue con la regularidad de secuencia de figuras y se llega a una que tiene 81 cuadritos, ¿qué posición ocupa esta figura?

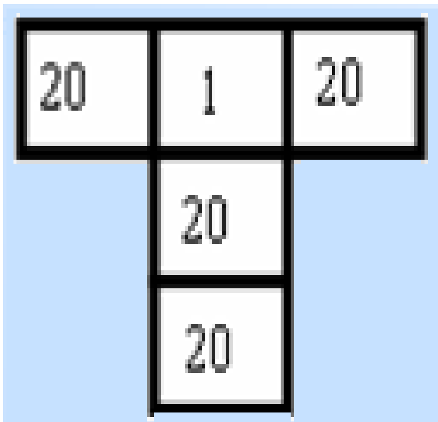
Frente a esta situación problema, se destacan tres soluciones:



Solución 1

$$\frac{2x(20)+1}{2x(20)}$$

Solución 2



Solución 3

Algunas apreciaciones, del grupo investigador, sobre estas soluciones son las siguientes: En la Solución 1, se puede apreciar que el estudiante, aunque identificó el modelo, cometió errores algebraicos, al ignorar la letra, lo que le pudo impedir dar con la respuesta. La Solución 2, indica que el alumno dio con la respuesta, solo que para él, la línea horizontal representa la suma de los cuadros horizontales con los verticales, y en la Solución 3, se muestra un modelo geométrico en donde el estudiante concibe igualdad de crecimiento horizontal y vertical, manteniendo al uno constante en el centro.

Referencias bibliográficas

Arce, J. Torres, L. Ramírez, M. Valoyes, L. Malagón M. Arboleda, L. (2005). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Ardila, R. Eslava, C. Diaz H. (1995). *Un tratamiento didáctico del concepto de función.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Garcia, G. Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.* 3(003), 357-370.

Gómez, P. (1999). *Estándares de una empresa docente*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (2003). ¿Cómo es la evaluación en Matemáticas? Bogotá: Grupo de evaluación de la educación básica y media. Colombia: ICFES.

Acevedo, M. Montañés, R. Huertas, C. Pérez, M. (2007). *Fundamentación conceptual área de Matemáticas.* Bogotá: ICFES

Monzoy, J. (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. *Memorias del noveno seminario nacional de calculadoras y microcomputadoras en educación matemática*, (pp. 45-53). México: Escuela Normal Superior de México

Moreno, L. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.Uso de nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Socas, M. (2005). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. México: Iberoamérica.

Vasco, C. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar*. Extraído desde http://menweb.mineducacion.gov.co:8080/saber/estandares_matematicas.pdf.

UN INSTRUMENTO PARA ESTUDIAR LO PERIÓDICO EN DIVERSOS CONTEXTOS: LA UNIDAD DE ANÁLISIS

Rosa Isela Vázquez Camacho, Gabriela Buendía Abalos
Colegio de Bachilleres de Chiapas México
Cicata-IPN
iselavaz@hotmail.com, gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Bajo una visión socioepistemológica, se ha señalado que lo periódico puede conformar todo un lenguaje para abarcar los ámbitos culturales, históricos e institucionales y procurarle así un carácter útil al conocimiento matemático relacionado con la propiedad periódica. En el marco de la práctica de predicción, nace la unidad de análisis la cual toma diferentes formas dependiendo del objeto matemático en cuestión. Ante este hallazgo nos ocupa buscar algunas respuestas, a preguntas respecto a ¿cómo se conforma la unidad de análisis? ,¿Cuál es el uso que se le da a la unidad de análisis? , ¿De qué manera influyen los entornos en su uso y conformación?, ¿Cuál es el papel de la unidad de análisis en la resignificación de lo periódico, según el entorno? Así mismo se presenta como el elemento que tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico, lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático.*

Palabras clave: socioepistemología, periódico, predicción, unidad de análisis

Introducción

Al abrigo de la aproximación socioepistemológica, Buendía (2004, 2007) ha dado cuenta de que lo periódico puede conformar todo un lenguaje para abarcar los ámbitos culturales, históricos e institucionales y procurarle así un carácter útil al conocimiento matemático relacionado con la propiedad periódica. En la socioepistemología propuesta germina una herramienta útil en el marco de la práctica de predicción, llamada *unidad de análisis (u.a.):* aquella unidad que contiene información suficiente para poder predecir. Esta toma distintos nombres dependiendo del objeto matemático en cuestión; al hablar de funciones periódicas, esta u.a. es el periodo, por ejemplo. Su carácter de idea primigenia beneficia la reconstrucción de significados y permite que lo periódico transite en distintos escenarios predictivos en diferentes situaciones periódicas. Nuestro marco teórico es la socioepistemología; ésta coloca su atención en el examen de las prácticas sociales, entendidas como actividades realizadas intencionalmente con un objetivo de transformación y con ayuda de herramientas que favorecen la construcción del conocimiento matemático. Examinamos el tratamiento de lo periódico en la currícula escolar, para investigar la construcción y usos de la unidad de análisis a la cual consideramos como herramienta. Posteriormente, a través de secuencias didácticas aplicadas a estudiantes de nivel básico usando sucesiones y al nivel superior mediante funciones, se halló que la identificación y uso de la unidad de análisis resulta una acción "natural" para el actor cuando se le muestran actividades intencionales de predicción. Nuestro objetivo es poner a la vista los elementos que conformarán la epistemología de la unidad de análisis en un contexto que aborda lo periódico y como ésta posibilita el tránsito entre los distintos contextos que se plantean.

La unidad de análisis

Un momento importante de la socioepistemología de lo periódico es cuando germina una herramienta útil para la práctica de predicción: la *unidad de análisis*, misma que es la idea primigenia que se gesta de formas distintas condicionadas al contexto en el que se aborde una situación periódica, el desarrollo de la predicción, el discurso argumentativo, la visión local y global como una necesidad y la identificación de un patrón de regularidad, entre otros. Entre los primeros trabajos con relación a la socioepistemología de lo periódico se da cuenta que el uso que se hace de la *unidad de análisis,* en las gráficas de movimientos, se da en dos sentidos generales, el primero se caracteriza como un traslado del futuro al presente en el que se emplea la división como herramienta, y una segunda caracterización es ir del presente al futuro, mediante la reproducción de la unidad encontrada, la cual utiliza como herramienta a la suma o la multiplicación.

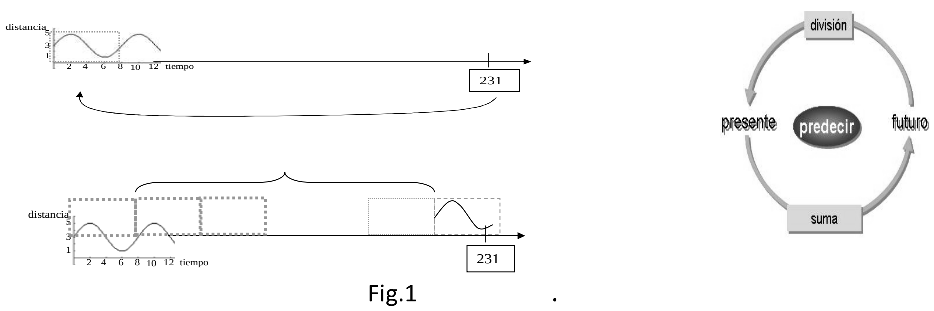


Fig.1 .

Por otra parte, en un contexto de tablas numéricas, Alcaráz (2005) da cuenta de la práctica de predicción con relación a lo periódico y hace uso de la descripción de movimientos repetitivos a través de ellas. La importancia de esta unidad es que marca un momento en la *resignificación* de lo periódico ya que provoca una distinción útil entre aquello que se repite y el cómo se repite. Ello nos habla de que dicha unidad de análisis tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico (Montiel, 2005), lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático.

Tratamiento de lo periódico en la currícula escolar actual

En el nivel básico, lo periódico se aborda a través de contenidos como series icónicas en las que se pide al estudiante que las complete. En el caso del nivel medio, la periodicidad se aborda en progresiones, mientras que en el nivel medio superior es a través de series y sucesiones y funciones trigonométricas.

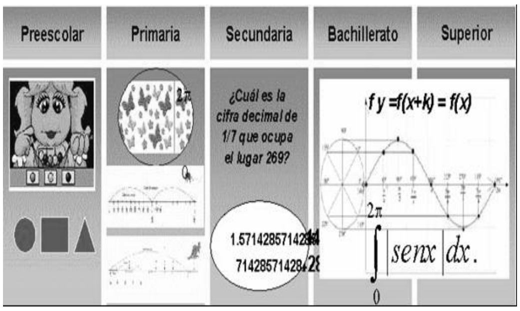


Fig.2

Por último en el nivel superior, caso concreto el cálculo, se aborda a través de funciones, ecuaciones diferenciales y funciones trigonométricas, en el que la actividad del estudiante se ve reducida a realizar bosquejos de una gráfica.

En una exploración histórica, así como el ámbito científico y sociocultural para analizar la construcción y usos de esta herramienta, hemos hallado, también, evidencia de cómo se conforma y usa, cuáles son las herramientas auxiliares y cuál es el papel de los contextos científicos, culturales y sociales. En el caso de algunas disciplinas científicas como la Oceanografía, las variables que intervienen son las alturas del oleaje, descritas como dos mareas máximas en luna llena y luna nueva y dos mínimas; en Agroclimatología temperatura -tiempo y tiempo- diámetro; Ingeniería Genética, bases químicas que conforman la estructura del ADN (ATGC). Para el caso de la Biología, la u.a. adquiere un valor numérico al tiempo, se estudia con un caso particular en el ciclo Luz-oscuridad, otra de ellas es tiempo –conducta.

En diferentes escenarios sociales existen actividades que se construyen al interior de la práctica social como las cabañuelas donde el ejercicio de predicción se transmite de generación en generación. Tras la observación del fenómeno climatológico, se estructura un sistema de predicción en el primer mes del año para conocer fenómenos climatológicos y con ello definir los tiempos adecuados de siembra y cosecha. Respecto a la actividad de diseñar, en la elaboración de pulseras, se identificaron diferentes tejidos provenientes de *patrones* (diseños y motivos) distintos. En éstos, el procedimiento implica definir el ancho, dado que éste determina el número de fibras a emplear. Los patrones de tejido consisten en una sucesión de nudos hechos a mano. Ello pues da cuenta de un artefacto cultural es un escenario adecuado para la modelación de procesos y el estudio de patrones y regularidades de corte periódico, referidos a objetos que los estudiantes conocen y manipulan muy bien. Se vislumbra que en estos contextos la *u.a* germina, se configura por el bagaje cultural, social y escolar del individuo, como expresión de su cosmovisión; aun cuando no se reconoce en la currícula como una herramienta auxiliar en la actividad predictivas, implícitamente se usa dentro y fuera del discurso de la matemática escolar.

La secuencia y algunos resultados de su aplicación

La situación ha sido aplicada a personas con referentes distintos. Participaron estudiantes de nivel primaria: una niña de primer grado y un niño de cuarto grado; ingenieros en sistemas, profesores de nivel superior, estudiantes de posgrado en Matemática Educativa y una mujer adulta cuyo máximo grado de estudios es primer grado de secundaria.

En la secuencia de Sucesiones, la primera acción que se realiza es un conteo, mientras se identifica cierta *regularidad*. Los alumnos argumentan sobre *serie, orden, repetición*, en donde por un lado se proponen intencionalmente elementos que detonen una práctica predictiva y se muestre el reconocimiento de lo periódico que se manifiesta en los niveles curriculares. En este caso la u.a construye en el momento de la agrupación en montoncitos los objetos (chicles) que empleamos en la secuencia como se observa en la fig.3

Fig.3

Cuando se presenta una cenefa de figuras al estudiante (fig. 4), éste realiza un conteo breve y define su unidad de análisis teniendo en cuenta el orden. Argumentan que el orden hallado (*mickey, mano, estrella*, por ejemplo) será el orden *siempre de esta forma*. En este contexto, la unidad de análisis ha tomado la forma de un conjunto de elementos que permiten al actor "ver" como ésta le permitirá movilizarse para efectuar una predicción. En un segundo momento, recurren a comparar el número de veces que cabe la unidad de análisis en la longitud total, dividiendo por ejemplo entre la longitud de la unidad de análisis. Así tenemos que en la tarea predictiva solicitada el estudiante operará la multiplicación y división como auxiliares al manejo de la unidad de análisis.

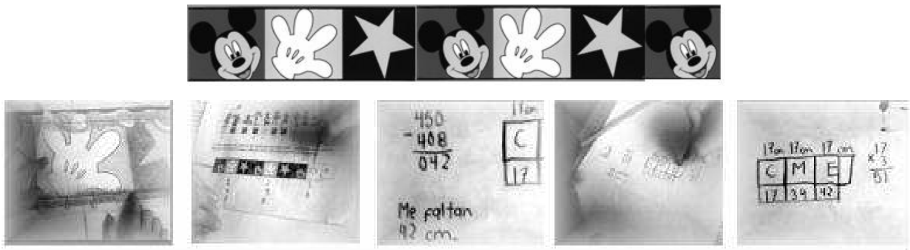


Fig.4

Al trabajar en un contexto de funciones, la identificación de la unidad de análisis fue diversa pues se trabajaron contextos de gráficas, tablas numéricas. Al presentar la secuencia de funciones, se puso de manifiesto la acción de identificar el periodo de la función como unidad de análisis como un" trozo de la gráfica" ya que brinda información del todo y las partes, es decir , el periodo se identifica como "aquello que se repite" ya sea a través de un conjunto de pares ordenados en el caso de la tabla esta acción se privilegia como un recurso para realizar una predicción para la solución de las cuestiones planteadas. En el contexto de tablas numéricas, se pone de manifiesto la descripción de un movimiento y se busca un elemento que permita primero identificar cómo es el movimiento. En este sentido los actores expresan con un "ir y venir".

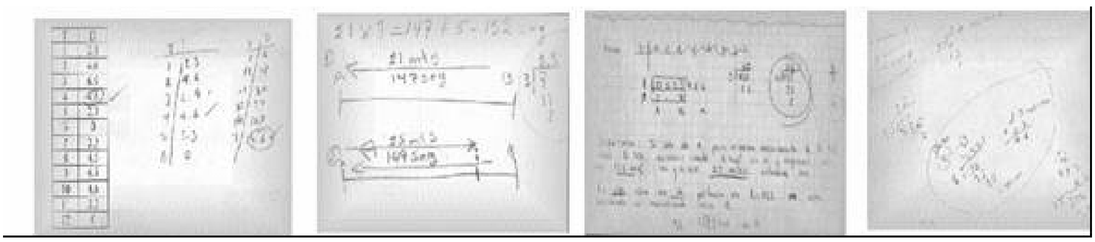


Fig.5

La unidad de análisis en la socioepistemología de lo periódico

Al inicio de esta investigación mostramos cómo surge la necesidad de encontrar un elemento que se utilizará como herramienta para poder realizar una predicción con objetos matemáticos de naturaleza periódica. Esto se reveló en diversos contextos que se plantean en ambientes escolares y actividades inmersas en una práctica social de predicción. Dimos evidencia de diversos contextos y distintos momentos en los que se abordan contenidos de la currícula escolar vinculados con lo periódico. Todo ello enriquece la socioepistemologia de lo periódico presentada por Buendía (2005).

En ella, la identificación de la unidad de análisis favorece una visión global y su uso funciona bajo una dialéctica local-global para que lo periódico transite en diversos contextos. Esta se construye y usa acorde a las características del contexto en el que se encuentre y por supuesto detonada por la predicción. Los procedimientos de identificación y uso de la unidad de análisis, al igual que los argumentos, son característicos del grupo humano en cuestión.. Hemos dado cuenta de que la unidad de análisis, se va conformando a partir de identificar un *patrón* que contiene componentes que se repiten con *regularidad*. Ésta nos informa de una parte y el todo, y admite que se construya la herramienta que posibilita la movilización a dos espacios de tiempo, el ahora y el futuro.

Por otra parte las operaciones concretas empleadas son la suma, multiplicación y división que fungen como herramientas que permiten la movilización en el tiempo, cuando la tarea es predecir en contextos periódicos; es decir, surgen en *el uso* de la unidad de análisis. En los distintos contextos que hemos revisado damos cuenta de que es más común utilizar la suma si la predicción es cercana y la situación es pensada del presente hacia el futuro. Se emplea la multiplicación, cuando el actor se percata de que ésta es más funcional que la suma. En el caso de la división, la utiliza para la predicción que le resulta *lejana*, y se da cuenta de la pertinencia y facilidad de traer al presente la información futura, en la búsqueda del lugar más próximo a la posición pedida. La dificultad con esta herramienta puede estar en manipular el residuo de la división pues tiene que establecer un proceso de ajuste al que le hemos llamado (deconstrucción) *descomposición de la unidad de análisis.* Éste se lleva a cabo cuando el actor analiza el residuo que le indica que aún está lejos de la posición solicitada. Toma la unidad de análisis e identifica cada uno de sus componentes, realiza el conteo uno a uno de cada elemento según los componentes de la unidad de análisis.

Ahora podemos afirmar que la unidad de análisis no posee unidades de medida definidas pues depende totalmente del contexto en que vive lo periódico. Si hablamos del contexto escolar tomará distintas formas como: patrón de figuras, patrón de números (en series numéricas), el periodo, una longitud, distancia o trayecto, un ciclo, donde sus unidades dependerán del contexto en que se encuentre. Entonces, reconocer las diferentes formas de identificación y uso de la unidad de análisis enriquece el aspecto didáctico de los fenómenos periódicos. Creemos que es importante el reconocimiento de todas y cada una de las manifestaciones que se han intentado mostrar, dado que la unidad de análisis es una herramienta en la práctica predictiva que resulta favorable al estudiante, maestro, científico e investigador para la construcción del conocimiento. Así como la primera unidad de análisis construida es el día y la noche y germina a partir del tratamiento científico de un fenómeno periódico, ésta se transformará para articular la práctica empírica y la teoría predictiva en el tratamiento de la periodicidad.

Fig.6

Comentarios finales

La contribución de esta investigación a la Matemática Educativa se centra esencialmente en romper el paradigma de privilegiar a los objetos matemáticos, para reconocer a las prácticas sociales como el umbral de la resignificación del saber matemático. Estos significados darán origen a ciertos procedimientos cuando el alumno se enfrente a la necesidad de predecir comportamientos. De esta forma, se espera que construya y use la unidad de análisis como herramienta útil y funcional para contrastar estados futuros con el estado presente que le permitan predecir. Creemos que estos componentes estarán establecidos y, en su momento transformarán, el estatus de lo periódico como proceso u objeto en el conocimiento del estudiante. Así, la construcción de lo periódico no descansa en apropiarse del objeto periódico sino en la identificación y uso de herramientas, como la unidad de análisis, al seno de una práctica de predicción que favorece un tránsito significativo entre contextos.

Fig.7

Referencias bibliográficas

Alcaráz, R. (2005) *Lo periódico, una construcción de la numerización del movimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. (2007). Lo periódico: una revisión en el marco de la Socioepistemología. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds.) *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. (pp. 77-90) México: Universidad Autónoma de Guerrero y Díaz de Santos

Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemologico de la función trigonometrica* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Vázquez, R. (2008) *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: Identificación y uso de la unidad de análisis*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas.

UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN POR ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR, BASADO EN LA MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO

Leticia García Rivas, Magdalena Rivera Abrajan
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México
leticia.garciarivas@gmail.com, magrivab@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio Superior y superior

Resumen. *En este artículo presentamos los avances de una investigación que tiene por objetivo que los estudiantes de nivel medio superior y superior, a través de la evolución de la práctica social de modelación, en este caso tomamos el movimiento como fenómeno a modelar, construyan la variación como herramienta, para ello se adaptaron una serie de actividades que llevan al estudiante a partir de la comunicación del movimiento, pasando por lo lineal y lo cuadrático, a construir lo cúbico a través de la variación. Para ello utilizamos sensores de movimiento y la calculadora Class-Pad 300. La perspectiva teórica que asumimos es la socioepistemología e insertamos nuestro trabajo en la línea de investigación de las Practicas sociales y la construcción social del conocimiento, aceptando a la práctica social de modelación como la base de nuestro diseño de aprendizaje, la cual es entendida como una práctica que combina el trabajo, la intervención en la naturaleza y la especulación matemática.*
Palabras clave: variación, modelación, movimiento, socioepistemología

Introducción

La historia del conocimiento muestra que en numerosas ocasiones, diversas nociones y procedimientos matemáticos han surgido del proceso de comprender y transformar la naturaleza. Sin embargo, a pesar de este hecho, el peso que se les da a los fenómenos naturales, ya sean físicos, químicos, económicos, por citar algunos, en las clases de matemáticas es escaso.

Si pensamos en que los fenómenos naturales de alguna forma están relacionados con la variación, podemos asumir la importancia de la misma, como herramienta fundamental para la modelación de estos fenómenos. Dolores (1998) menciona "*Con el solo hecho de caminar experimentamos un cambio, y sabemos que estos cambios son mensurables*".

Problemática

Durante los años que pasamos en la escuela nos enseñan diversos conceptos matemáticos, desde los más básicos hasta llegar a conceptos complejos y poco entendibles para la mayoría de nosotros, estos *"conocimientos"* permanecen separados unos de otros y generalmente no son utilizados fuera de la escuela, volviéndose conocimiento inútil e innecesario en nuestra vida.

La problemática general que plantemos en nuestra investigación surge con la desconexión entre lo que se enseña en la escuela y la vida cotidiana. (Arrieta 2003, Rivera 2005, Méndez 2008), Sin embargo esta separación es persistente en la misma escuela reflejándose en los distintos curso de matemáticas. Así, las diversas herramientas matemática que construimos en la escuela aparecen desconectadas entre si y sin significados prácticos.

Una de las herramientas matemáticas fundamentales en la formación escolar de los estudiantes, por ser punto medular para la comprensión de diversos conceptos fundamentales para el cálculo, como el límite, la derivada e integral, y visible en nuestra vida cotidiana es la variación, donde diversos estudios (Dolores,1998; Catalán & Dolores, 2000; Dolores & Cuevas, 2007) han mostrado que en los estudiantes, tanto del bachillerato como los que principian la universidad, existe un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y por consiguiente su comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones acerca de diversos conceptos matemáticos es deficiente, en la investigación de Cantoral & Molina (2006) muestran como los mismos profesores muchas veces no tienen presente a la variación. El objetivo principal de nuestro trabajo es que los alumnos construyan como herramienta la variación para poder comprender e interactuar con el fenómeno del movimiento, partiendo de la evolución de la práctica de modelación, es decir pretendemos que el estudiante por medio de las herramientas que construya, las modifique para modelar fenómenos más complejos.

Fundamento teórico

Durante el desarrollo de nuestra disciplina, se han impulsado diferentes puntos de vista, cada vez más complejos, acerca de la construcción de los conocimientos por los actores sociales. El tránsito por propuestas donde se menospreciaba, a los actores de los procesos, o bien a lo epistemológico, y con ello borrando el peso de los aprendizajes referidos a ciertas construcciones histórico culturales, como en la matemática o la física (Arrieta, 2003).

Nuestra investigación se inscribe en la perspectiva teórica de la Socioepistemología e insertamos nuestro trabajo en la línea de investigación de las Practicas sociales y la construcción social del conocimiento, aceptando a la práctica de modelación como la base de nuestro diseño de aprendizaje, la cual es entendida como una práctica que combina el trabajo, la intervención en la naturaleza y la especulación matemática.

Tomaremos a la práctica social de modelación desde el punto de vista de Arrieta (2003, pp112), donde menciona...*"Aceptamos a la práctica social de modelación como una actividad con la intención social de comprender y transformar la naturaleza, la consideramos fuente que desarrolla procesos de matematización"*

Dentro de estos procesos identifica actividades claves para el desarrollo de la práctica de modelación como son:

- Crear herramientas especificas y formas particulares para describir los hechos
- Construir argumentos a través de conjetura y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica.
- Desarrollar formas de predicción.
- Argumentar y validar versiones, de otros o de ellos mismos, utilizando múltiples herramientas.
- Utilizar conocimientos previos que puedan llevar a descubrir y/o explicar el nuevo conocimiento (Arrieta, 2003).

Así mismo, tomamos la Evolución de la práctica como base para la construcción de lo cúbico, considerándola como es expuesta en Méndez (2008) quien argumenta que la evolución de las prácticas se logra mediante la experiencia que se adquiere durante el ejercicio de la misma.

Por último creemos necesario dejar claro lo que se entenderá por movimiento y variación, desde la perspectiva de Cantoral & Molina (2006) nos dice que la noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la entenderemos como una *cuantificación del cambio*, tomando en cuenta como y cuanto cambia dicho sistema u objeto.

Observando lo anterior nosotros llamaremos movimiento a todo aquel cambio de posición con respecto al tiempo mientras que la variación, la entenderemos como una *cuantificación del cambio, la cuál puede ser obtenida por medio de las razones de cambio.*

El escenario didáctico

Nuestra investigación es de naturaleza cualitativa, debido a que nos interesa la construcción social de herramientas por los estudiantes, para ello diseñamos un actividad que consta de cuatro fases donde el alumno va construyendo diferentes modelos (gráfico, numérico, analítico, algebraico) a través de la evolución de la práctica de modelación, pasamos de modelos simples a modelos más complejo, es decir, tomando lo lineal como base de la modelación cuadrática y cubica.

Fases del diseño

El diseño contempla una serie de actividades, las cuales se dividen en 4 sesiones, que se presentan de la siguiente manera; en la primera fase se modifico el diseño presentado en Arrieta (2003), de comunicar el movimiento, con el objetivo de que el estudiante construya la gráfica distancia y tiempo como herramienta para comunicar el movimiento. Durante la segunda fase los alumnos construyen lo lineal a partir de la modelación del movimiento de un móvil, en la tercera fase se trabajará la modelación en un plano inclinado para construir lo cuadrático, tomando como experiencia la modelación lineal que se construyó en la fase anterior, por ultimo durante la cuarta fase se llegará a la construcción de lo cúbico utilizando las herramientas construidas durante las fases anteriores. Mostrado de esta forma la evolución de la práctica al pasar de modelos simples a modelos complejos.

Algunos Resultados

Expondremos algunos de los resultados obtenidos en *la exploración del diseño*, está se realizó con algunos estudiantes de la licenciatura en matemáticas, de la cual se tomarán elementos que servirán para el rediseño final de las actividades que se pondrán en escena con estudiantes de bachillerato y primer año de la licenciatura en matemática. En este reporte solo expondremos las dos primeras fases.

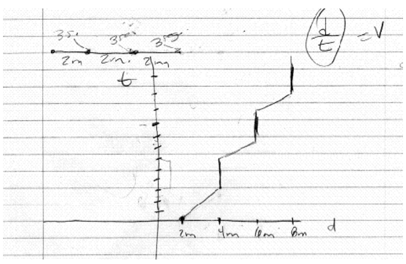
Primera Fase; Comunicando el movimiento

Se organizaron tres equipos de tres estudiantes cada uno, se les pide que observen el movimiento del móvil y comuniquen el movimiento a sus compañeros a través de una gráfica, el movimiento a comunicar es:

1) Se coloca el profesor a dos metros de *r (punto de referencia)*, se espera tres segundos, después se desplaza dos metros alejándose de *r* y permanece tres segundos; y, por último, se desplaza otros dos metros alejándose de *r* y permanece tres segundos.

2) Se coloca el profesor a seis metros de *r*, permanece dos segundos; avanza hacia *r* dos metros, permanece dos segundos; avanza hacia *r* medio metro permanece dos segundos; avanza un metro hacia el sensor, permanece dos segundos; y, por último, avanza dos metros más y permanece dos segundos.

El equipo 1

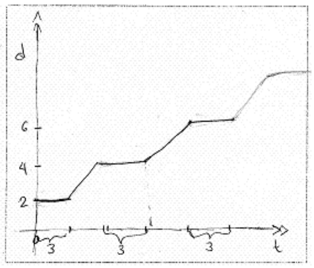


Este equipo graficó al contrario de cómo se enseña escolarmente, es decir tomo la variable dependiente en *x* y la variable independiente en *y,* sin embargo, en el transcurso de las preguntas se cuestionaron la necesidad de cambiar las variables para comunicar con más claridad el movimiento, las explicaciones que dan respecto a los cambios son que *en el tiempo de reposo es constante y que en los tiempos cuando avanza es lineal*.

Respecto a la segunda actividad ellos en base a la experiencia de la primera actividad ya sabían representar este movimiento en el plano cartesiano y asociar las respectivas variables de tiempo y distancia, sin embargo si les causo algo de conflicto el poder representar el movimiento cuando observaban que se regresaba hacia el punto de partida, sin embargo después de analizar y representar varias veces el recorrido, lograron representar el movimiento en el plano, a la pregunta que se hace respecto a como es el comportamiento respecto a los cambios del tiempo y la distancia ellos dicen que, *es ascendente hasta el punto en el que el movimiento se regresa, después es descendente, donde se estaciona es constante en ambos lados, cuando avanza se comporta como una gráfica lineal.*

El equipo 2

Este equipo tuvo más dificultad para representar el recorrido, mencionan que les faltan datos, teniendo dificultad para asociar las variables, confundiendo trayectoria y movimiento, después de un rato y de la intervención de la profesora analizan el comportamiento de la distancia con

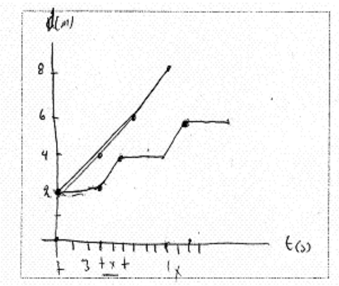


respecto al tiempo asociando estas variables a su gráfica, en sus respuesta de cómo es el comportamiento respecto a los cambios de distancia y tiempo ellos comentan que *se observa que conforme pasa el tiempo hay mayor distancia. Así como que el comportamiento de la gráfica se puede predecir debido a que el patrón que presenta continua de la misma forma.*

En la segunda actividad de la fase I, al igual que el equipo uno se basa en la experiencia de la actividad anterior para construir el modelo gráfico del movimiento representado, sin embargo también les causo algo de conflicto representar el movimiento de regreso hacia el punto de partida, representándolo como un decremento en el tiempo. Su respuesta a la pregunta respecto a los cambios es *que la gráfica está compuesta por dos curvas una constante y otra lineal. Además de que con la información que se obtuvo, no se puede predecir lo que pasará después.*

El equipo 3

Este equipo no presento algún problema representaron con facilidad las variables y pudieron asociarlas, primero representaron la gráfica de forma lineal, sin embargo después de pedirles que argumentaran su respuesta y explicarán la representación modificaron su gráfica tratando de



encontrar el modelo analítico del movimiento realizado. Ellos dicen que el comportamiento respecto a los cambios es creciente, en cuanto a la segunda actividad tampoco se les dificulto representarla encontrando la ecuación que describía el movimiento, en cuanto a los cambios solo mencionan que *es creciente, constante y decreciente*.

Segunda Fase; La variación en el movimiento uniforme

El objetivo principal es que los estudiantes caractericen la variación en los modelos lineales, esta caracterización les servirá como herramienta en las fases siguientes.

Se les explica brevemente como es el funcionamiento del sensor de movimiento y la calculadora Class-Pad 300 de Casio; la calculadora nos muestra la gráfica posición Vs tiempo se les enseña como guardar los datos en la calculadora con los que se trabajara en lo subsiguiente de la fase.

Las instrucciones para la primera grafica son:

Ubiquemos el sensor de movimiento en una mesa y con la ayuda de la calculadora y el sensor realizar los siguientes recorridos, guardando los datos en una tabla.

1) Ubiquemos un punto A, a medio metro del sensor, caminarás a paso constante, alejándote lentamente del sensor durante 8.0 segundos.

¿Podrías identificar las variables existentes en el experimento?

¿Cómo es el comportamiento de la gráfica cuando el móvil se aleja lentamente del sensor?

Podrías obtener el modelo algebraico de la gráfica que obtuviste ¿Cuál es?

Llena la siguiente tabla de la class-pad con los siguientes datos:

t (seg)	$t_j - t_i$	S (metros)	$s_j - s_i$	$s_j - s_i / t_j - t_i$

¿Qué representa $s_j - s_i$ en la tabla?

Gráfica en la calculadora los puntos correspondientes a *t* con los puntos de $s_j - s_i$

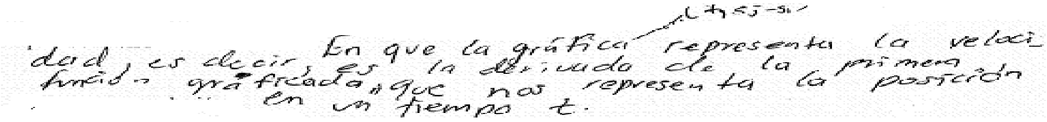
¿Cómo fue la gráfica que obtuviste?

¿Calcula la ecuación de dicha gráfica?

¿Qué relación encuentras entre la ecuación que encontraste anteriormente con la de los puntos t con los puntos $s_j - s_i$?

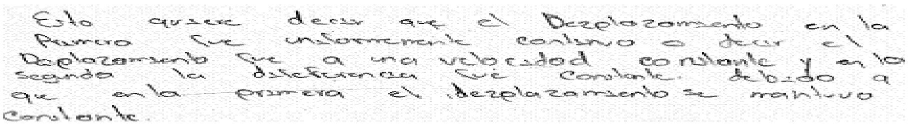
Equipo 1

Con la ayuda del sensor de movimiento y la calculadora, pudieron bosquejar la gráfica que representaba dicho movimiento, identificaron las variables de tiempo y distancia, dicen que pueden dar una aproximación del modelo algebraico, además de que dicen que el comportamiento de la gráfica es lineal, rellenan la tabla, identifican que representa $s_j - s_i$ nos dicen que son el incremento en el tiempo y hacen la grafica de $s_j - s_i$ con t y nos dicen que E*sta representa la velocidad, o sea la derivada de la primera función graficada, que nos representa la posición en un tiempo t.*


En que la gráfica (t, sj - si) representa la veloci-
dad, es decir, es la derivada de la primera
función gráficada, que nos representa la posición
en un tiempo t.

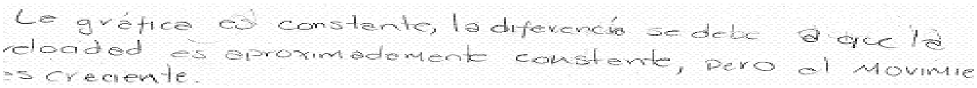
Equipo 2

Este equipo también gráfica el movimiento con la ayuda del sensor y la calculadora, identificaron las variables de tiempo y distancia, nos dicen que es una recta creciente y que es continua, dan una aproximación del modelo algebraico, rellenan la tabla y también se dan cuenta de que después lo que se les pide es graficar a la derivada y dicen que *el desplazamiento en la primera fue uniforme continua es decir el desplazamiento fue a una velocidad constante y en la segunda la diferencia fue constante, debido a que en la primera el desplazamiento se mantuvo constante.*


Esto quiere decir que el Desplazamiento en la
Primera fue uniformemente continuo es decir el
Desplazamiento fue a una velocidad constante y en la
segunda la diferencia fue constante. debido a
que en la primera el desplazamiento se mantuvo
constante.

Equipo 3

El equipo 3 gráfican el movimiento y dicen que la pendiente es positiva, cuando ellos hacen la grafica de t con respecto de $s_j - s_i$, dicen que *la gráfica es constante, la diferencia esto se debe a que la velocidad es aproximadamente constante, pero el movimiento es creciente..*


La gráfica es constante, la diferencia se debe a que la
velocidad es aproximadamente constante, pero el movimie
es creciente.

Conclusiones

Algunas de las conclusiones de nuestra investigación, aún en proceso, es la problemática de interpretación del movimiento y la trayectoria de un móvil por estudiantes, lo cual les dificulta la interpretación y visualización gráfica de los fenómenos, al realizar con ellos una construcción de las gráficas posición vs tiempo a través de la comunicación del movimiento, nos permite llevar a cabo la construcción de lo lineal de forma más precisa y rápida, así mismo esta confusión en los estudiantes no permite tener claras las ideas de las relaciones existentes entre las variables dependiente e independiente en el plano cartesiano.

Los resultados preliminares obtenidos durante nuestra exploración nos permiten argumentar acerca de la evolución de la práctica de modelación como factor necesario en la intervención escolar, dándonos una articulación entre las herramientas matemáticas construidas escolarmente durante nuestra formación escolar.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. y Molina J.M. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*. (pp. 739-744) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Catalán A. y Dolores C. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* (pp36-41). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores C. (1998). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores C. y Cuevas I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1)*, 69-96.

Méndez, M (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

Reséndiz E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(3)*, 435-458.

Rivera, M. (2005). *La algoritmia; una práctica de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

LA PRÁCTICA DE LA SIMULACIÓN EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD: EL CASO DE LOS ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Cesilio Grande Tecorral, Juan C. Piceno Rivera, Santiago R. Velázquez Bustamante
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
cesiliogrande22@hotmail.com, jcpicenorivera@gmail.com, sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo en proceso presentamos los resultados de la primera fase de nuestra investigación (análisis preliminar), que pretende reconocer a la práctica o la estrategia de la simulación que realizan los estudiantes al momento de resolver problemas de probabilidad y con ello las cuestiones en probabilidad será de gran sencillez teniendo a la herramienta de la simulación. En ello sostenemos que la práctica de la simulación enriquece al conocimiento matemático del ser humano y en particular a la probabilidad.*
Palabras clave: modelos probabilísticos, práctica de la simulación, probabilidad

Introducción

La probabilidad es parte esencial de la matemática y base de otras disciplinas, pero también es esencial para preparar a los estudiantes, consideramos que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan en nuestra vida y nuestro entorno. Desde tiempos anteriores la probabilidad ha sido considerado como tema alejado de las matemáticas, pero es un contenido programado en secundaria, en donde los profesores y alumnos carecen de la cultura probabilística (Grande y López, 2006) y (Grande y Velázquez 2007)

En el nivel medio superior, se nota la ausencia de la simulación como contenido programado, (Grande y Velázquez 2008), en donde se reporta que estudiantes de nivel medio superior, tienen deficiencias, y desconocen a la simulación, para nuestro caso lo hemos considerado como una estrategia en la solución de problemas.

Ante lo inminente de resolver problemas de probabilidad cada vez más complejos, es posible que los cálculos numéricos o el uso de diagramas resulten engorrosos, incomprensibles y poco eficaces para tal fin. Los modelos probabilísticos tienen por objeto simular una situación en la que interviene el azar. Una pregunta que uno se puede hacer………. ¿qué es la simulación?, desde nuestra visión la simulación consiste en explorar el comportamiento de una experiencia aleatoria observando otra experiencia equivalente, pero más fácil de realizar o de estudiar. Uno de los modelos más comunes de la simulación es el de tomar una bolsa, caja o urna no transparente en la cual se introducen fichas, canicas, papelitos, etc., de diferentes colores y calcular la probabilidad de extraer uno de ellos de determinado color, por ejemplo el juego de las canicas que se expone en las ferias (Velázquez et al, 2007).

El problema de investigación consiste: en las aulas poco se reconoce a la simulación como una práctica o una estrategia en la solución de problemas de probabilidad, así se constata en una serie de estudios y en la realización de una secuencia didáctica con nueve estudiantes de Licenciatura en matemáticas que muestran un desconocimiento de esta estrategia (Grande y López, 2006), así mismo con estudiantes del Nivel Medio Superior (Grande y Velázquez, 2007). El objetivo de investigación consiste en explorar la práctica de la simulación que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas de probabilidad. Para el logro de este objetivo usamos a la ingeniería didáctica como marco metodológico.

Antecedentes

En las aulas hacemos referencia que los estudiantes al resolver problemas de probabilidad caen dentro de los conflictos semióticos (entendemos por conflicto semiótico: como la falta de comunicación al interpretar o tratar de resolver un problema), dando lugar a que los alumnos confundan eventos independientes con mutuamente excluyentes (Batanero, 2005) y (D´ amelio (2004).

Ramírez y Ballestero (2007), sostienen que los estudiantes de secundaria muestran deficiencias en la resolución de problemas de probabilidad, en base a cuestionarios trabajados con estudiantes, en donde analizan que la mayoría de ellos centran su atención en el dibujo de la situación, y al no tener conocimientos previos de probabilidad, y a pesar de a haber llevado curso de probabilidad, como parte del currículo escolar, carecen de las nociones básicas de la probabilidad.

Un ciudadano culto en estadística debe de ser capaz de controlar sus intuiciones sobre el azar; en diferenciar las que son correctas e incorrectas, por ejemplo Carrera (2002), señala que los estudiantes que ingresan a las universidades, ingresan con conocimientos casi nulos y con intuiciones incorrectas en probabilidad, motivo por el cual se les dificultaran la compresión de los distintos temas referentes a la probabilidad y la estadística.

Calva, (2005) sostiene que la probabilidad que se enseña en los cursos regulares, es de una forma poco natural, con mediano o altos niveles de abstracción.

Pluvinage, (2005), señala que los estudiantes de preparatoria, hábiles en las áreas de matemáticas tienen grandes dificultades para entrar en los métodos de probabilidad, entonces a base de repeticiones logran resolver los problemas que se les plantean.

Vemos además que la simulación es, en sí misma un modelo de la realidad simulada, puesto que simplifica la propia realidad y supone un trabajo de abstracción sobre la misma. Es además un modelo material (o bien algorítmico si usamos un simulador de una calculadora u ordenador), que nos permite reproducir físicamente el experimento y observarlo y por tanto, permite un trabajo intuitivo sobre el modelo sin necesidad del aparato matemático.

Hacking (1975, c.p. Velázquez y Santos, 2008). Señala que la probabilidad surge en la prehistoria, asociado a los juegos, por ejemplo la existencia de huesos del talón de un animal corredor (talus) en el antiguo Egipto. Cuando uno de estos huesos se arroja sobre una superficie nivelada solo puede caer de cuatro formas.

Herrera (2004), señala que los juegos de azar fueron practicados con hueso de animales en las ciudades de Egipto, China y Mesopotamia, mientras que los franceses consideraban al juego como un entretenimientos más frecuente en la vida diaria de ellos. Entonces cada vez que los juegos eran más complicados y las apuestas más elevadas, se vieron en la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos.

Batanero (2001), señala: simular es poner en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, de tal modo que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponde un suceso elemental del segundo y sólo uno, y los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables.

Girard (1997, c.p Batanero 2001) expresa que al trabajar con la simulación, estamos modelizando, porque debemos no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

Compartimos la idea de Zamora y Alonso (2007), que la incorporación de la Estadística a las currículos de las escuelas, es encaminado a los futuros ciudadanos en compartir una lectura, una interpretación de graficas, gráficos estadísticos que aparecen en los medios informativos como la televisión, periódico, o de otra índole informativo, considerando útil en la vida posterior de cualquier ciudadano, así como a profesionistas que hacen uso de las nociones básicas de la probabilidad.

Miramos que los problemas aplicables a la vida real, los juegos que desarrollan diferentes habilidades en los estudiantes, así como actividades de desarrollo visual. En este sentido compartimos la ideas de Arios y Lucrecito (2005), “la participación de las personas, jóvenes o adultos, cuando están jugando y divirtiéndose, tienden a aprender más y desarrollar ciertas habilidades dependiendo de la actividad, que cuando se encuentra presionados por otras personas (pueden ser profesores) o por obligación”.

(Ortiz et al, 2008), reportan que para que exista un cambio efectivo dentro de la enseñanza de la probabilidad es necesario mejorar la formación de los profesores, siendo ellos los actores de transmitir el conocimiento al alumno

Marco Teórico

Consideramos a la socioepistemologia, como una aproximación teórica por medio vía enseñanza y no única desde un ángulo de cómo un estudiante aprende por medio de las prácticas, para nuestro caso la simulación.

La socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004). Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales son propios de la actividad humana en su práctica de modificar su realidad.

Marco Metodológico

Artigue (1995) menciona que las primeras nociones sobre la Ingeniería Didáctica, surgen a partir de la didáctica de las matemáticas en los años ochenta. La ingeniería se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, expresado en otras palabras la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Artigue (1989, c.p. Lazarte 2005), afirma que la ingeniería didáctica se le denomina así a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo de un ingeniero, y para realizar un determinado proyecto se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico.

Análisis preliminar: en esta primera fase trabajamos con estudiantes del nivel medio, presentándoles una actividad que consistía en la 2 problemas de probabilidad, una mesa redonda (entre todos se hizo un debate con respecto a la actividad), y en la mayoría de los estudiantes afirmaban distintas versiones por el cual no reconocían a la simulación como una estrategia en solución de problemas de probabilidad, esto se expone en la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, en la que los participantes comparten la idea: que la simulación es una estrategia, y los profesores han pasado por alto, dejando a los estudiantes en un vacio de la probabilidad,

La puesta en escena (primera fase)

Se realizo la actividad con estudiantes del nivel medio superior, quienes mostraban un poco de inquietud al referirnos que tenían que ver con las matemáticas, pero finalmente los motivamos acerca del trabajo y la eficiencia que esto tenía en su vida escolar.

En forma individual, los estudiantes empezaron a trabajar sobre el juego (esta actividad duro aproximadamente 40 minutos), lo primero que notamos de ellos, que les parecía un juego de niños, e hicieron sus anotaciones correspondientes, y sobre la marcha del juego se les pregunto: Si habían jugado una vez este tipo de juegos. Jonathan, Ma. Elena, Óscar, Felipe comentaban que este tipo de juego lo habían jugado en primaria.

Felipe dice: este juego me acuerdo que lo trabajamos en primaria, donde el profesor y el grupo trabajábamos con monedas, canicas, y nos era muy divertido, en ocasiones le decíamos al profesor que siempre queríamos jugar y no tener clases de matemáticas. Mª. Elena dice: yo recuerdo haberlo trabajado en secundaria, con mi maestro Martín, recuerdo bien que nos pidió un día un bote grande (lata de chiles) y fichas (de coca-cola, cerveza, etc.) de diferente color, para realizar un juego matemático. La verdad no entendí que tenía que ver el juego con la clase.

Reflexiones finales

En este trabajo se reconoce una problemática entre los programas de educación secundaria 2006 y la Reforma curricular del Bachillerato Tecnológico, lugares donde la simulación tiene poca visión.

Con la presentación en Relme XXII, surgen ideas en el reforzamiento del marco metodológico y la visión de otros investigadores sobre qué tipo de estrategias tienen en los demás países en la probabilidad. Sostenemos que es una investigación de gran relevancia y que aporta información para el profesorado y alumnado que tienen que estudiar temas elementales de la probabilidad.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Arios, I. y Lucrecito, L. (2005). *Juego de aprendizaje “carrera matemática”* Documento presentado en la Tercera Jornada Científico Estudiantil. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, Modelización, simulación*. Documento presentado en la XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8(3), 225–230.*

Cantoral, R. (2004). Pensamiento y lenguaje variacional una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* (pp. 1-9). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Calva, L. (2005). *Consideraciones sobre algunos conceptos básicos de la probabilidad*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Nacional Autónoma de México.

Carrera, E. (2002). Teaching statistics in secondary school. An overview: From the curriculum to reality. En B. Phillips (Ed.) *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Disponible en [CD-ROM). Ciudad del Cabo: IASE.

COSNET-SEP (2004). *Programa de estudios de matemáticas.* Reforma Curricular del Bachillerato Tecnológico México, D.F: COSNET-SEP.

D´Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* (pp. 138-144). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Grande, C. y López, L. (2006). *La simulación como una estrategia para aprender probabilidad*. Presentado en la Quinta Jornada Científico Estudiantil. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Grande, C. y Velázquez, S. (2007). La práctica de la simulación en la solución de problemas de probabilidad. En Red de Cimates (Eds.) *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 221-230). México: Red de Cimates.

Grande, C. y Velázquez, S. (2008, julio). *La práctica de la simulación en la solución de problemas de probabilidad. El caso de los estudiantes de nivel medio superior.* Presentado en la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México, D.F..

Herrera, E. (2004). Desarrollo del pensamiento estocástico. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* (pp. 735-739). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Lazarte, G. y Priemier, N. (2005). Estrategia para la enseñanza de límite de una función. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19* (pp. 144-149). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Ortiz, J., Mohamed, N., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2008, julio). *Asignación de probabilidades en profesores en formación*. Documento presentado en la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México, D.F.

Pluvinage, F. (2005). Árboles etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(1)*, 91–99.

Ramírez, G. y Ballestero, E. (2007). La centración en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional. En C. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* (pp. 102-107). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

SEP. (2006). *Programas de estudios 2006*, *Matemáticas. Educación básica. Secundaria*. México: SEP.

Velázquez, S., Santos, R. y Fernando, M. (2007). *Puedo aprender probabilidad jugando canicas en la feria.* Trabajo premiado en la Quinta Jornada Científico Estudiantil. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Zamora L. y Alonso I. (2007). Metodología para la impartición de tópicos de estadística y probabilidades en la enseñanza preuniversitaria en Cuba. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 20, 264- 270. CLAME. Camagüey, Cuba.

Influencia de los modelos intuitivos en el aprendizaje de la transformación lineal en contexto geométrico

Juan Adolfo Álvarez, Juan Gabriel Molina
Cicata-IPN México
jmolinaz@ipn.mx
Campo de investigación: Modelos mentales Nivel: Superior

Resumen. *En este documento trataremos algunas consideraciones teóricas en que basamos un trabajo en proceso, un estudio comparativo acerca de las concepciones sobre la transformación lineal en contexto geométrico entre dos tipos de actores educativos (profesores y estudiantes de matemáticas de distintas zonas geográficas en México). Nuestra intención es discutir algunas ideas del marco teórico de la investigación, en relación a algunos modelos intuitivos relacionados con la transformación lineal en contexto geométrico, utilizando la teoría de Fischbein (1987, 1989) y el trabajo de Molina (2004).*
Palabras clave: intuición, modelo mental, tácito, transformación lineal

Sobre la intuición

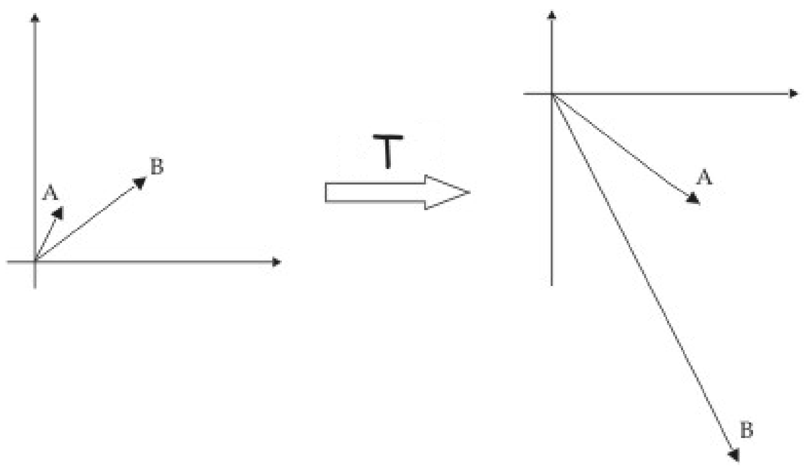
Respecto a la *intuición*, Fichsbein (1987) menciona que no hay estrictamente una definición única, y se refiere a este concepto en el sentido de que son las ideas que las personas aceptan como ciertas porque les resultan evidentes por si mismas, y no ven la necesidad de algún tipo de argumentación para aceptarlas, a este tipo de conocimiento le llama *conocimiento tácito*. El investigador se refiere con *modelos intuitivos* a uno de los principales aspectos de la *cognición tácita*, la cual la entiende en el sentido de Polanyi (1969), como un proceso de apropiación del significado (otorgado un significado unitario sobre cierto conglomerado de datos), y que está basado en una actividad de integración básicamente tácita, es decir, que no se percibe directamente, pero que se puede suponer o inferir. Compartimos la opinión de Fischbein (1989) de que estas operaciones tácitas no son inaccesibles a un análisis explícito, partiendo del supuesto que si el proceso tácito de integración conduce a una solución incorrecta, el análisis de la solución y de los argumentos de quien resuelve permite explicar estas operaciones tácitas. Según Fischbein (1987) las nociones intuitivas poseen las siguientes características, evidencia, certeza intrínseca, perseverancia, son coercitivas, tienen estatus de teoría, se extrapolan, son globalidad. Estás mismas características las asocia al los modelos intuitivos en su trabajo de 1989. No entramos en detalle explicando estas características porque esta información se puede consultar en la edición pasada del acta, ver el trabajo de Molina (2006) o en Fischbein (1989) y Molina (2004, 2007), y sería redundante, sólo consideraremos en la explicación aquello que se requiera.

Acerca de los modelos

En relación a los modelos, Fischbein entiende un modelo en el siguiente sentido:

Dados dos sistemas, A y B, B podría ser considerado un modelo de A si, en la base de cierto isomorfismo entre A y B, una descripción o una solución producida en términos de A puede ser reflejada consistentemente en términos de B y viceversa (Fischbein, 1989, p.9).

De acuerdo con las investigaciones hechas por el autor, menciona que cada que una persona se enfrenta a una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a generar inconscientemente y otras ocasiones de manera deliberada, un sustituto de esa noción por ser más accesibles, y estos son los modelos intuitivos. Comentaremos algunos asociados a la transformación lineal en contexto geométrico manifestados por algunos estudiantes. Fischbein hace una clasificación de estos modelos. En primer lugar a aquellos modelos que las personas se crean de manera consciente para facilitarse la comprensión o la solución de un problema son llamados modelos *explícitos*, por ejemplo, esta es una representación de una transformación lineal que rota y expande un vector:



Es un modelo explícito porque fue creado en forma conciente para representar una idea concreta.

Sin embargo, según nuestras consideraciones teóricas, existen otros modelos que las personas se forman de manera implícita y que no son perceptibles directamente, pero que presentan manifestaciones que hacen suponer su existencia, porque ejercen influencia sobre el entendimiento de las cosas, son los que hemos mencionado anteriormente como modelos intuitivos implícitos o tácitos. Esta distinción de modelos intuitivos tiene una relevancia importante dentro de nuestra investigación, pues manipulan detrás escena el entendimiento matemático del estudiante. En Fischbein (op.cit.) se menciona que estos modelos llegan a interferir, sustituir, distorsionar o se imponen al conocimiento formal cuando el concepto o conceptos que ha de ser aprendido van en contra de la interpretación o modelo. Esta influencia no sólo se da en los niveles elementales de educación sino que van prevaleciendo a lo largo de su formación (corresponde con la característica de perseverancia o robustez). Para entender la importancia que ejercen estos modelos implícitos citamos el siguiente caso: en el trabajo de Molina (2004) se describe cómo un estudiante piensa que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano, de tal manera que si se le mostraba una figura como la siguiente (Ver Figura 1):

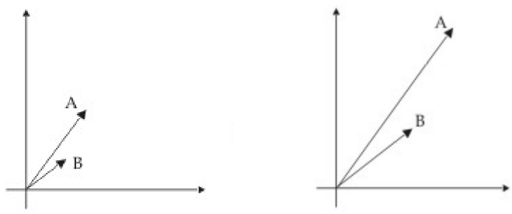


Figura 1 y Figura 2 de izquierda a derecha

El entrevistado al aplicarle alguna transformación lineal, digamos una expansión, consideraba que ambos vectores aumentarían de tamaño, como se muestra en la figura 2. Esta idea es compatible con este tipo de transformaciones lineales, sin embargo, cuando se le preguntaba si podría existir una transformación lineal que mapeara los vectores de la figura 3 en los vectores de la figura 4, el estudiante respondió inmediatamente que no, pues había un vector que no se movía (el vector B) y que la transformación debería afectar a los vectores en la misma forma.

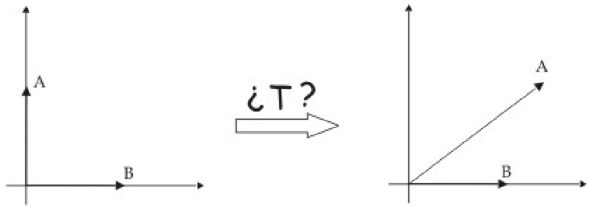


Figura 3 y Figura 4, de izquierda a derecha.

Esta idea del estudiante, que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano es una de esas reglas de su modelo intuitivo, y fue la responsable de que el estudiante negara la existencia de la transformación lineal. Otra manifestación de la presencia de la intuición podría ser considerada la referencia del estudiante al movimiento, él imagina a vectores desplazándose.

Modelos paradigmáticos

Los modelos intuitivos, pueden ser clasificados en paradigmáticos, tomando una de las categorías que propone Fischbein(1989), pues resulta conveniente para los propósitos de nuestra discusión. El rasgo de los modelos paradigmáticos es que estos objetos pertenecen a la clase que se quiere representar, y que tienen rasgos comunes (y especiales) a la clase completa. Por ejemplo "agua" actúa como modelo para los líquidos, en el sentido de que, para que algo se considere líquido debe comportarse como agua (Fischbein, 1987, p.122). Nuestro interés en este tipo de modelos es porque según los resultados del trabajo de Molina (2004), los estudiantes del estudio tienen un modelo paradigmático de la transformación lineal en el contexto geométrico. Considerando los gráficos de la figura 3 y 4, para los estudiantes la transformación involucrada no era considerada lineal, porque no la podían expresar en términos de expansiones y rotaciones (o ambas), características que podrían ser los rasgos del modelo paradigmático en los estudiantes. El autor habla de que los modelos tácitos poseen rasgos bien definidos que se han identificado y entre ellos es que estos modelos o representaciones mentales no son estructuras de pensamiento aisladas sino que tienen coherencia, son prácticos, son mas accesibles (mejor entendibles) o simplificaciones del concepto original y sobre todo estos modelos prevalecen a todo lo largo del tiempo en que las personas tengan una educación formal. Sin embargo suelen ser modeladores imperfectos que pueden llevar a dificultar el aprendizaje de la matemática, y lo mencionado anteriormente es un ejemplo de ello.

Conclusiones

Coincidimos con Fischbein (1989), que es recomendable que se identifiquen estos modelos intuitivos que alumnos puedan tener, para que con base a ello podamos proponer diseños fundamentados teóricamente que permitan diseñar secuencias didácticas que produzcan efectivamente aprendizajes matemáticos adecuados. Este trabajo aportará información para este proyecto, el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la transformación lineal en contexto geométrico.

Referencias bibliográficas

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For Learning of Mathematics 9*, 9-14.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico.* Tesis de Maestría no publicad, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

EL COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LAS FUNCIONES EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: LA RELACIÓN ENTRE PREDICCIÓN Y SIMULACIÓN

Miguel Solís Esquinca
Universidad Autónoma de Chiapas México
solise@unach.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones Nivel: Superior

Resumen. *La investigación tiene el objetivo de reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma ay' + by = F(x) a través de situaciones gráficas de trasformación, ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la función F al variar los coeficientes a y b de la ecuación diferencial e interactuar con los contextos gráficos y algebraicos. Estudiantes de ingeniería fueron la fuente para la obtención de los datos. A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar la solución y(x) con un comportamiento tendencial hacia la función F(x) (noción de Predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes a y b (noción de Simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y Simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados.*

Palabras clave: predicción, simulación, ecuaciones diferenciales, resignificación

Introducción

En este estudio se establece una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y Simulación en el contexto de las ecuaciones diferenciales de la forma $ay' + by = F(x)$ en un ambiente de modelación gráfica. Si bien, la noción de Predicción permite conocer la evolución posterior de los fenómenos de variación continua cuantificando la relación funcional entre variables a partir de las condiciones iniciales y de las variaciones de las variables involucradas en el fenómeno (Muñoz, 2000), esto es construir $F(t)$; el control de estos fenómenos de variación estaría vinculado a la noción de Simulación, esto es, partir de $F(t)$, construir $y(t) = AF(at+b)+B$ y analizar la organización de los comportamientos de $y(t)$ a través de la variación de los parámetros (A, a, B y b). La ciencia y la tecnología se han desarrollado a través de estas dos cuestiones fundamentales: la predicción y el control de los fenómenos naturales.

Los dispositivos tecnológicos que nos permiten la manipulación de gráficas de funciones, tales como calculadoras con esa capacidad y aplicaciones de cómputo pueden ser utilizados para favorecer las nociones de Predicción y Simulación diseñando para ello las secuencias adecuadas. Considerando la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje que resignifica el Cálculo Integral escolar, reportamos algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios. En particular en este documento damos cuenta de los resultados de los análisis a priori así como el análisis a posteriori y la confrontación del mismo, cómo método de validación del diseño de secuencias en una situación de simulación.

Antecedentes

Las operaciones aritméticas sobre la gráfica de una función, y los efectos observados, con el auxilio de calculadoras o computadoras que grafican, se usan frecuentemente, ahora, en los cursos de cálculo y precálculo, sin embargo, esta estrategia de enseñanza pareciera encaminarse tan sólo a otro método de construir gráficas, algo que se antoja inútil si consideramos que la computadora o calculadora nos dibuja ya la gráfica. En estudios reportados (Cordero & Solís, 2001; Cordero, 2001) se da cuenta de una noción que permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología (Cordero, 2006), es el comportamiento tendencial de las funciones (CTF), noción sui generis del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está en relación con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que a priori no se encuentran dentro de la estructura matemática. La expresión algebraica $y = a\left[f(bx+c)\right]+d$ se puede ver como un conjunto de instrucciones que nos dice como debemos ir modificando (trasladarla, dilatarla o contraerla, reflejarla) la gráfica de *f*(*x*) para obtener la gráfica de *y*. En ese sentido cualquier relación funcional es una instrucción que organiza comportamientos.

Mención aparte merece el hecho que, en el discurso matemático escolar actual, estas argumentaciones gráficas se sitúan en el llamado precálculo y se diluyen a medida que se avanza en el currículum, en el cálculo se verán favorecidos los argumentos analíticos, en el análisis las gráficas habrán casi desaparecido para favorecer una aritmetización de cálculo. En las ecuaciones diferenciales se introducen nuevas formas de visualización gráfica como, por ejemplo, los campos de pendientes, que son propias de este contenido.

El CTF y las ecuaciones diferenciales

El estudiante novicio en ecuaciones diferenciales cuando se ve enfrentado a resolverlas, intentará "despejar" a la función *y* (¡que justamente es la incógnita del problema!), acción que el profesor considerará errónea, e intentará que el estudiante construya la expresión $y'(x) = F(x, y)$. La natural estrategia del estudiante en cuestión es heredada del álgebra y fue aprovechada para el diseño (Solís, 2003) de secuencias para resignificar a las ecuaciones diferenciales de la forma $y'(x) + y(x) = F(x)$.

El diseño consistió en presentar a estudiantes de ingeniería de México las siguientes ecuaciones diferenciales: $y'(x) + y(x) = 0$, $y'(x) + y(x) = k$, $y'(x) + y(x) = x$ y $y'(x) + y(x) = x^2$ y preguntarles por la solución *y*. Situados en el marco funcional interpretamos las producciones de los estudiantes a través de la noción de CTF, en dónde los estudiantes identificaron el comportamiento gráfico de *y* con tendencia a la gráfica de *F*, en palabras de los estudiantes: "la gráfica de *y* (a partir de ciertos valores de *x*) tiende a parecerse a la gráfica de *F*". Aquí lo representaremos:

$$y'(x) + y(x) = F(x),\ y(x) \xrightarrow[CT]{} F(x)$$

Estas secuencias favorecen la noción de predicción en el sentido de construir *f*(*t*) que modela cierto fenómeno a partir de conocer su evolución (variación). En matemáticas es encontrar la función solución *y*(*x*) a partir de su derivada.

Para favorecer la noción de simulación (control del fenómeno) recurrimos a la aritmética sobre una gráfica, ya comentada en párrafos anteriores, e intentamos relacionarla con las ecuaciones diferenciales de la forma $ay'(x) + by(x) = cF(x)$. Las actividades aquí son las de proponer variaciones a los coeficientes de los términos de la ecuación y observar los efectos en la gráfica de la solución (Solís, 2002). En particular, se le pedía a los estudiantes hacer corresponder las ecuaciones diferenciales con la gráfica de su solución en un arreglo tabular. Primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraban cuatro ecuaciones, $y'(x) + y(x) = x^2$, $2y'(x) + y(x) = x^2$; $y'(x) + 2y(x) = x^2$; $y'(x) + y(x) = 2x^2$, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas.

Metodología

El diseño y el análisis de las situaciones se hicieron usando la siguiente metodología:

1. Transformar un hecho a un fenómeno didáctico. En nuestro caso, el hecho consiste en las dificultades que tienen los estudiantes para interactuar (ir y venir) entre los contextos gráficos y algebraico. Este hecho ha sido ubicado en el fenómeno de las representaciones y transformado en el fenómeno didáctico, el cual toma en cuenta las diferentes representaciones, sus formas y niveles, los diferentes planos de representación y los posibles homomorfismos entre ellos. Y las coherencias locales de procedimientos operativos que son derivados de esas representaciones.

2. Describir las dificultades específicas de las situaciones de enseñanza. Tomamos en cuenta la descontextualización y recontextualización que conlleva a la rehabilitación de significados y sistemas simbólicos, donde descontextualización significa que el contexto original fue perdido y recontextualización significa la búsqueda de un contexto tal vez distinto al original.

3. Establecer un marco teórico que explique las dificultades. El marco, hasta ahora, se compone de los siguientes elementos: abstracción reflexiva y categorías del conocimiento matemático; acciones, procesos, objetos y esquemas; representaciones y procedimientos; niveles de desarrollo.

4. Usar el marco teórico para diseñar situaciones didácticas. Se diseñan situaciones sobre una base socio-epistemológica.

5. Considerar los resultados de 3 y 4 en la implementación e iteración. Las actividades de las entrevistas para cada situación serán diseñadas e implementadas en concordancia con la metodología.

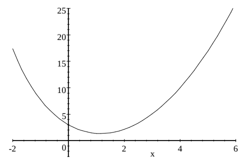
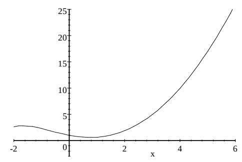
Análisis

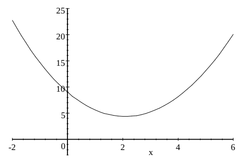
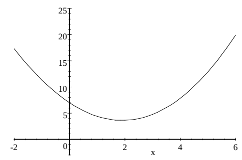
Para el análisis se procede, primeramente, a plantear hipotéticamente lo que los estudiantes harán con la secuencia, esto guía al investigador en el diseño de la actividad, este análisis hipotético le llamaremos análisis a priori. Después de aplicada la secuencia se realiza un análisis a posteriori de las producciones de los estudiantes, lo que realmente hicieron, el diseño se valida con la confrontación entre lo hipotético y las producciones. Presentamos un ejemplo del análisis a priori para una de las actividades

1. En la columna de la izquierda aparecen escritas cuatro ecuaciones en términos de x, $y(x)$ y $y'(x)$, en la columna de la derecha están graficadas ocho funciones $y(x)$. Relaciona la ecuación con la gráfica o gráficas que creas que la satisfagan.

La intención de invertir el orden convencional (esto es primero la derivada y luego la función) para escribir las ecuaciones de este tipo puede favorecer a que el estudiante privilegie el término *y*(*x*) del lado izquierdo de la ecuación y lo relacione con el término *F*(*x*) del lado derecho, estableciendo así a relación buscada. Con el conocimiento previo del patrón $y(x) \xrightarrow[CT]{} F(x)$, los estudiantes centrarán la atención en estos dos elementos y a partir de las operaciones gráficas con parábolas (en particular (Ax^2) establecerán las relaciones gráfica – ecuación.

Aunque ya han trabajado con la solución de $y(x) + y'(x) = x^2$ (analítica y gráfica) la actividad dificultará discriminar entre las gráficas soluciones de esta ecuación y las graficas soluciones de la ecuación $y(x) + 2y'(x) = x^2$, ya que en ambas se puede establecer $y(x) \xrightarrow[CT]{} x^2$. Las relaciones entre gráfica y ecuación quedarían así.

$y + y' = x^2$		

$y + 2y' = x^2$		

En esta experiencia pudimos observar cómo los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida que han trabajado en el precálculo al contexto de las ecuaciones diferenciales. Sus argumentos están relacionados a los comportamientos gráficos, en general a los de carácter global, como comportamientos asintóticos, comportamientos al infinito, curvas que en una ventana "ampliada" de su calculadora se "parecen". Sin embargo algunos estudiantes también ponen atención a los comportamientos de carácter local, como intersección con los ejes, vértices. A continuación, a manera de resumen, enlisto algunos hechos que hemos observado a partir de estas actividades:

- Las calculadoras y aplicaciones de cómputo que grafican funciones hace que los estudiantes fijen su atención a formas globales de las gráfica, favoreciendo argumentos gráficos que responden a comportamientos tendenciales de las funciones.
- El argumento de comportamiento tendencial surge en la actividad de sumar una función con una "recta" cuándo la pregunta se hace a partir del contexto gráfico en que ocurre, lo que hemos llamado una aritmética gráfica.
- Las propiedades gráficas de las funciones sumandos, de la actividad descrita en el párrafo anterior, son heredadas a la función suma, estableciendo argumentos gráficos que tienen que ver con estrategias locales (tangencia en un punto) y estrategias globales (reconocimiento de formas geométricas completas)

- Se conservan en la variación de parámetros (coeficientes) de una ecuación diferencial lo que los estudiantes han experimentado en el precálculo. Aunque sólo las dos ecuaciones en las que el término $cF(x)$ de la ecuación $ay' + by = cF(x)$ es afectado, $c = 1$ y $c = 2$, pudieron ser relacionadas con su solución, los argumentos usados están anclados en que la solución debe parecerse al término $F(x)$ y que los efectos en esta parábola ($F(x) = x^2$, en este caso), deben ser parecidos a los efectos en la situación, pudiendo establecer la correcta relación con sólo la observación de la concavidad de la parábola.

Reflexiones finales

A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar a la solución $y(x)$ con un comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$ (noción de predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes *a* y *b* (noción de simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados.

Este estudio socioepistemológico de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, es para establecer un método del diseño de situación y la lectura de datos con el propósito de lograr un alcance de reproducción en el sistema educativo e ir propiciando el rediseño del discurso matemático escolar.

Partimos de la epistemología de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la cual consiste de los siguientes aspectos:

- La ecuación $ay' + y = f$ es un modelo del comportamiento tendencial de la función *y*: $y \xrightarrow[CT]{} f$, $x \to \infty$
- La situación de la ecuación $ay' + y = f$ es la relación simbiótica entre la predicción y la simulación, cuyo argumento es el comportamiento tendencial de y con respecto a *f*: $y \xrightarrow[CT]{} f$.

- El argumento de la situación se desarrolla a través de las resignificaciones (patrones de comportamiento de la función y la gráfica), de los procedimientos (variación de parámetros de la ecuación diferencial) y las diferentes experiencias cognitivas (los procesos y objetos de función como una instrucción que organiza comportamientos).

Situarse en un marco funcional permitió encontrar un argumento gráfico, implícito algunas veces y explícito en otras, en las explicaciones de los estudiantes. Surge en un ambiente gráfico favorecido por los dispositivos tecnológicos que grafican funciones y que permiten concebir a una función globalmente. Este argumento atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales. Habilitado a partir de las explicaciones, éste argumento, al que hemos llamado comportamiento tendencial de las funciones, se convierte ahora en un programa que organiza contenidos del cálculo, de ahí que adquiera un estatus epistemológico y puede considerarse como una categoría del cálculo.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. Cuadernos Didácticos No. 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2)*, 103 – 128.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México D.F.: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 131- 170.

Solís, M. (2002). Las nociones de predicción y simulación en ecuaciones diferenciales a través del comportamiento tendencial de las funciones. *Serie: Antologías Número 2* (pp. 113-136). México: Programa Editorial, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Solís, M. (2003). Predicción y simulación: Nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2)*, (pp. 386-392). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

REPARTO CON FRACCIONES: ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Eliza Minnelli Olguín Trejo, Marta Valdemoros Álvarez
CINVESTAV-IPN México
mvaldemo@cinvestav.mx
Campo de investigación: Números racionales y propiedad Nivel: Básico

Resumen. *El estudio de casos que se presenta está centrado en las estrategias de resolución de problemas de reparto con fracciones empleadas por niños. La escuela elegida para su realización pertenece al sistema público y está localizada en una zona dentro del área urbana de la Ciudad de México, se seleccionó un grupo de cuarto grado de primaria. Los instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación son: la observación de tres clases en las que fueron abordadas las fracciones, la aplicación de un cuestionario con problemas de reparto y uso de fracciones, la realización de entrevistas a Josefina, Miriam y Mario (niños que exhibieron procesos relevantes de aprendizaje en su participación). Como resultado de esto fueron identificadas siete estrategias diferentes al resolver los problemas de reparto con fracciones.*
Palabras clave: fracciones, reparto, cociente, estrategias de resolución

Introducción

Consideramos importante asomarnos a los procesos cognitivos de los alumnos para poder comprender cómo se inicia la construcción del número fraccionario. Efectuando un análisis de las estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones, con el fin de reconocer los procesos empleados por los estudiantes y algunas de las múltiples dificultades cognitivas que comúnmente enfrentan. Enfocamos nuestro interés en el reparto porque se trabaja con dos relaciones fundamentales para la comprensión de la fracción, la relación *parte-todo* y la relación *parte-parte*. Dada la relevancia del problema y los objetivos de nuestro estudio, nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas ¿Cuáles son las diferentes estrategias que utilizan los alumnos en la resolución de problemas de reparto con fracciones? ¿Qué estrategias son más frecuentes? ¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de dichos problemas? Fijándonos los objetivos del estudio: a) Identificar las principales estrategias desarrolladas por los alumnos en la resolución de problemas de reparto con fracciones y b) detectar las dificultades que presentan los niños en la resolución de los problemas.

Marco teórico

La semántica de las fracciones

Como lo menciona Kieren (1984), el conocimiento del número racional es un contenido matemático complejo que forma un cociente, incluye varias experiencias matemáticas que comprenden las herramientas del pensamiento tales como particiones, la identificación de partes y formación de equivalencia; afirma que en la expresión a/b se adquieren cinco significados los cuales denomina subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo. Define la relación parte-todo como un todo que es cortado en partes iguales, usando la idea de fracción para cuantificar la relación entre el todo y un número designado de partes; relacionándose con cada uno de los otros cuatro subconstructos, identificando una unidad apropiada a cada circunstancia (Kieren, 1983). El significado de cociente está íntimamente relacionado con la relación parte-todo, permitiendo la cuantificación de los resultados cuando se divide una cantidad dentro de un número dado de partes, en situaciones de reparto (Kieren, 1980).

Las estrategias de resolución en problemas de reparto con fracciones

Lamon (1996) ha identificado tres estrategias para una repartición equitativa: “Estrategia de piezas preservadas” (cuando cada persona recibe más de una unidad de la cantidad total que se está repartiendo, reparte unidades completas y las sobrantes las marca y corta), “Estrategia de marcar todo” (todas las piezas se marcan, inclusive aquéllas que permanecen intactas, pero sólo la(s) pieza(s) que requieren cortarse se cortarán) y “Estrategia de distribución” (todas las piezas del entero se marcan y cortan, y las piezas más pequeñas se distribuyen). Como las marcas que se utilizaron en estas estrategias básicas podrían ser o no económicas, hace una clasificación adicional de cada una de las estrategias para la partición: “marcado económico” y “marcado excesivo”.

En el estudio llevado a cabo por De León (1998) menciona cuatro procedimientos o formas para organizar las situaciones de reparto: Procedimiento I Reparten exhaustivamente sin controlar la equidad, Procedimiento II Reparto en partes iguales pero con residuo, Procedimiento III Reparto exhaustivo y en partes iguales sin anticipación, Procedimiento IV Reparten exhaustivamente y en partes iguales con anticipación.

Por su parte, Charles & Nason (2000) identificaron dos estrategias que tienen la característica de poder abstraer inmediatamente la construcción de la fracción del cociente partitivo (la idea del cociente que emerge del reparto). “Estrategia fundante del cociente partitivo” el sujeto reconoce el número de personas (Y), genera el nombre de la fracción de acuerdo al número de personas, reconoce la relación entre el nombre de la fracción y el número de pedazos del entero, parte cada objeto en pedazos iguales, efectúa el reparto y cuantifica cada parte. “Estrategia del procedimiento del cociente partitivo” reconoce el número de personas (Y), el número de objetos (X) y cuantifica la parte que le corresponde a cada persona como X/Y.

En cambio, Empson, Junk, Domínguez & Turner (2005) para clasificar las estrategias tomaron en cuenta la coordinación entre el número de personas y el número de cosas y las definen como “estrategia de coordinación progresiva” cuando coordinan el número de piezas con el número de personas, distribuyen las piezas, lo sobrante lo parten nuevamente como haciendo un ajuste y distribuyen, y la “estrategia de coordinación de un sólo artículo” que implicó repartir cada artículo en un número de piezas (n) igual al número de gente (p) que comparten los artículos.

La investigación efectuada por Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005) se centra en el uso de las fracciones en dos situaciones parte-todo y cociente. Diferenciando una de la otra porque en las situaciones parte-todo el denominador es el que señala el número de piezas en las cuales se cortó el conjunto, y el numerador señala el número de piezas tomadas. En las situaciones de cociente el denominador señala el número de personas del reparto y el numerador el número de partes que le corresponde a cada persona. Dichos investigadores observaron que los niños tenían más éxito al enfrentarse a situaciones de cociente que de relación parte-todo, porque el análisis en situaciones de cociente es más natural.

Método

El escenario y los sujetos del estudio

La escuela elegida pertenece al sistema público y está localizada en una zona del área urbana de la Ciudad de México. Se seleccionó un grupo de cuarto grado de primaria, integrado por 11 niños de ambos sexos, sus edades estaban comprendidas entre 9 y 10 años.

Instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación

- Observación en el aula. Se observó 3 sesiones donde el maestro abordó el tema de fracciones, para obtener información sobre lo que se prioriza y lo que se deja a un lado en la enseñanza del reparto con fracciones, permitiendo la reconstrucción de características primordiales de la enseñanza recibida por el grupo escolar.

- Cuestionario. Instrumento primordial que permitió hacer una exploración de las ideas, nociones y conocimiento previos con los que contaban cada uno de los alumnos respecto al significado de fracción como relación parte-todo y como cociente; permitiendo el reconocimiento de la diversidad de estrategias que utilizaron cuando se enfrentaron a problemas de reparto con fracciones e identificar cuáles son las más empleadas. Además, constituyó el punto de partida para la selección de los sujetos del estudio de casos.

El cuestionario, contenía problemas de reparto que admiten una interpretación continua y discreta del mismo. Integrado por 2 actividades de identificación de fracciones y 8 problemas verbales distintos usando modelos circulares, rectangulares y cuadrados; contemplando tareas para producir medios, cuartos, tercios, sextos y una tarea de equivalencia para comparar medios y cuartos en un modelo circular.

- Entrevistas individuales. Fueron semiestructuradas y videograbadas, se les aplicó a Josefina, Miriam y Mario, estudiantes que exhibieron procesos relevantes de aprendizaje en la resolución del cuestionario. Se trabajó con cuatro problemas usando modelos circulares, rectangulares y cuadrados, contemplando tareas para producir medios, tercios, cuartos y sextos, además de tareas de equivalencia para comparar medios y cuartos en modelos circulares, y tercios y sextos en modelos rectangulares; los problemas fueron diseñados con base en las tareas utilizadas por Streefland (1991).

Resultados

La observación

Los resultados obtenidos revelan una enseñanza directriz donde la resolución de problemas está muy encaminada a las sugerencias del maestro, teniendo fuerte carga de algoritmos y donde no se reconocen modos alternativos de solución para un mismo problema.

El cuestionario

Más de la mitad del grupo carece de experiencia en la partición de diferentes modelos geométricos, especialmente para dividir el círculo en tercios y el cuadrado en sextos. En los problemas verbales, la mitad del grupo respondió con números naturales para indicar la cantidad de partes que corresponden en un reparto, traduciendo los aspectos cuantitativos de las tareas mencionadas al lenguaje de los números naturales, ello indica que han comprendido adecuadamente cada problema pero no han podido expresar una fracción (Valdemoros, 2004).

Se identificaron seis diferentes estrategias para dar solución a los problemas, los niños utilizaron al menos dos de ellas para dar solución a un mismo problema. De los resultados obtenidos se eligió a tres niños para realizar el estudio de casos, el perfil de cada uno es el siguiente:

Josefina fue escogida porque empleó cinco estrategias diferentes de resolución, en las cuales varía la idea de unidad, la idea de divisor y de objetos susceptibles de partición, aunque evade tanto como es posible el uso de notaciones fraccionarias.

Miriam fue seleccionada porque al solucionar los problemas divide cada unidad en el mismo número de personas, sin embargo, al dar su respuesta numérica da una fracción equivalente de la que corresponde a su reparto.

Mario presentó una fuerte tendencia a dar la respuesta numérica de sus repartos con números naturales, utilizando expresiones como “dos partes cada uno”,”una parte de la barra”.

Estudio de casos

Las estrategias que empleó Josefina fueron: A) dividió cada unidad en el mismo número de personas, B) repartió unidades completas a cada persona y lo que sobró lo dividió en fracciones, C) realizó una partición y un reparto equivalente con más divisiones de las necesarias (dio 2/6 de un chocolate a tres personas), D) dividió en mitades cada unidad, las repartió y lo que sobró lo dividió nuevamente haciendo un ajuste, E) interpretó la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hizo el reparto (Figura1).

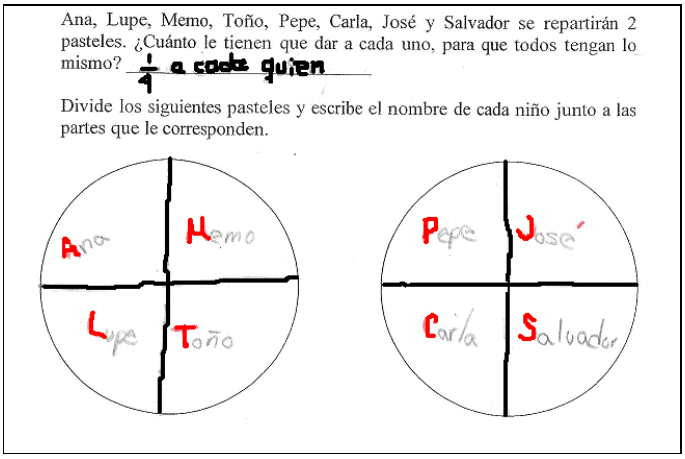


Figura 1. Estrategia E utilizada por Josefina.

La dificultad que tuvo Josefina fue no poder asignar un número fraccionario al resultado de su reparto, por lo que fue necesario enfatizar en sus estrategias de partición la relación parte-todo y relación parte-parte, y con base en ello el nombre que le es atribuible a cada pedazo.

Miriam, para dar solución a los problemas, dividió cada unidad en el mismo número de personas y asignó una parte a cada uno, pero al dar algunas respuestas numéricas escribió una fracción equivalente, fue la sexta estrategia observada. Según el modelo de análisis de Valdemoros (2004) los procesos de traducción le permitieron efectuar el pasaje desde un sistema de representación a otro.

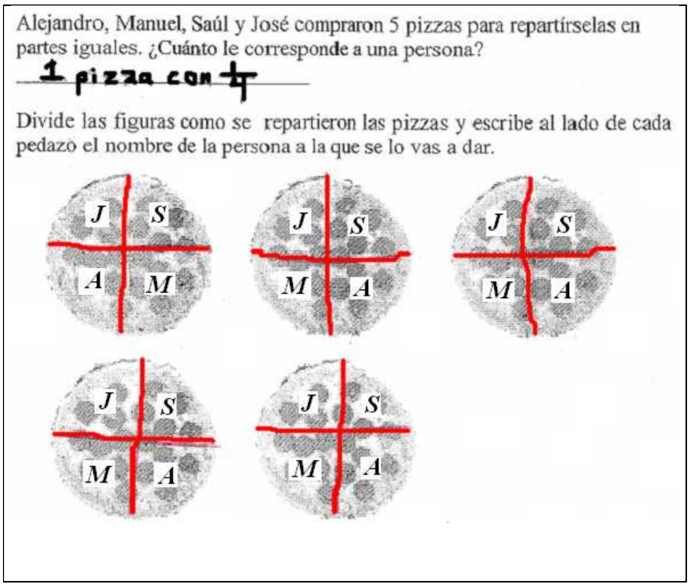
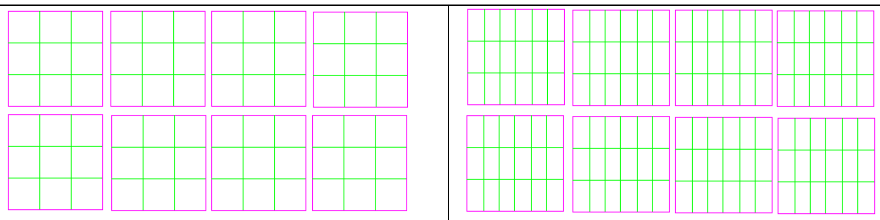


Figura 2. Estrategia utilizada por Miriam.

Mario utilizó la estrategia que consistió en dividir cada unidad en el mismo número de personas, sin embargo, no asignó números fraccionarios a los resultados de sus repartos, utilizando solamente números naturales. Durante la entrevista demostró que no tenía problema alguno para asignar al resultado de su reparto un número fraccionario, sin embargo, para él le era más cómodo darlo con naturales. Al pedirle que expresara una estrategia diferente de la utilizada, lo que hizo fue dividir los pedazos resultantes de su estrategia a la mitad.

Una abuelita reparte a sus nietos Liz, Monse, Dani, Eli, Ivon y Javi 8 galletas y les debe dar a todos la misma cantidad. ¿Cuánto le corresponde a cada nieto?



Estrategia 1 | Estrategia 2

Figura 3. Estrategias de reparto utilizadas por Mario.

Conclusiones

Pese a la instrucción recibida donde no se aceptan modos alternos para dar solución a un mismo problema, los niños utilizaron siete diferentes estrategias para resolver las tareas de reparto, lo cual revela que el uso de la fracción se dio en el campo de una gran riqueza semántica.

De las siete estrategias de resolución identificadas, la más utilizada fue aquélla donde dividen cada objeto de la colección en el número de personas que intervienen en el reparto y asignan una de esas partes a cada persona. Con esto prevalece una interpretación discreta de la colección, es decir, cada objeto es visto como una unidad autónoma (de ese modo se relega la interpretación continua de la colección, en la que cada objeto sería tan sólo una parte de una única unidad).

No obstante, también plantearon los alumnos otras interpretaciones de la unidad, asignando objetos enteros a cada persona y subdividiendo los sobrantes, si así lo favorecían las condiciones generales del reparto.

Muchos niños utilizaron diversas estrategias de resolución porque se apoyaron en las ideas de equivalencia.

Aunque los estudiantes evidenciaron básicamente un rico dominio del reparto, a nivel de la representación numérica muchos de los miembros de este grupo parecían permanecer anclados en el terreno del uso de los números naturales, en la medida en que optaron por expresar la respuesta final a través del reconocimiento de dichos números.

Referencias bibliográficas

Charles, K. y Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies studies in mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education,* 43, 191-221.

De León, H. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática 1(2)*, 5-28.

Empson, S., Junk. D., Domínguez. H., y Turner. E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: Across- sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics Education*, 63, 1-28.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct. Its elements and mechanisms. En: T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus,Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, equivalence, and the construction of rational number ideas. In M. Zweng (Ed.). *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education* (pp. 506-508). Boston: Birkhauser.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathemati8pp.cs teacher as consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education,* 187-194.

Lamon, S. (1996). The Developmental of unitizing: its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education 27(2)*, 170-193.

Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. En Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.). (2005). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3* (pp.281-288). Melbourne: PME.

Streefland, L. (1991). The course in theory and practice. En L. Streefland (Ed.). *Fracctions in realistic Education: A paradigm of developmental research* (pp. 46-134). Dordrecht: Kluwer Academic.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7(3)*, 235-256.

OBJETOS VIRTUALES Y USO DEL *CABRI*: UNA EXPERIENCIA CON UN ESTUDIANTE DE PRIMARIA

Héctor Santiago Chávez Rivera, Ignacio Garnica Dovala, Ana María Ojeda Salazar
CINVESTAV-IPN México
hchavez@cinvestav.mx, igdovala@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico

Resumen. *La operación del programa de cómputo resulta en la presentación de objetos visuales a la percepción del usuario. El objetivo del estudio fue el tránsito del objeto visual al inteligible para dar cuenta de la adquisición de la noción de bipartición de un segmento, por un alumno del tercer ciclo de educación primaria, mediante el uso del Cabri II. Los objetos primitivos Punto, Línea, Segmento, Circunferencia (Bellemain y Laborde, 1998), fueron considerados visuales; las nociones perpendicularidad, colinealidad y bipartición, como inteligibles. El método incorporó a la Clínica el medio operado por el sujeto, con objetos visuales aparentes durante la solución de la tarea y los inteligibles en el resultado de sus respuestas. Se reporta la identificación de los objetos visuales Punto y Recta, con evidencias de las nociones adquiridas de perpendicularidad y de colinealidad, pero no de la adquisición de bipartición de un segmento, por lo cual se dice que el objeto visual "círculo" fue débilmente identificado.*
Palabras clave: geometría dinámica, virtual, primaria

Introducción

La incorporación de tecnologías de información a los procesos de adquisición de conocimiento matemático en aulas incide, de modo fundamental, en campos de percepción del alumno, en particular del *visual*, cuando la tecnología en cuestión está sustentada en un programa de cómputo como el *Cabri II*, diseñado para el estudio y la experimentación de contenidos de geometría ecuclidiana. Se puede decir que el resultado final del programa de cómputo, con la presentación a la percepción del usuario de *objetos visibles*, requiere que se identifiquen éstos como condición necesaria para la activación de *objetos inteligibles* que den cuenta de la adquisición de nociones y/o conceptos. El uso de la *regla y el compás* son subsumidos por la *imagen de síntesis* implícita en el programa que opera los *objetos visibles* bajo procedimiento digital, a la vez que oscurece la riqueza del sustento analógico correspondiente al uso de ellos. Esta dualidad de los medios, para efectos de enseñanza y de aprendizaje, se nos presenta como un objetivo de investigación para comprender los modos de uso de la tecnología en el aula. La primicia de la lectura visual de los objetos *digitalizados* impone la necesidad de una lógica que transite del carácter *visible* del objeto, mediante un proceso complejo, a su consolidación *inteligible* [noción o concepto].

Es importante poner énfasis en la identificación de los objetos *visuales* por parte del usuario para la comprensión de las nociones y/o conceptos en el curso de la *solución* de un problema específico. Es el caso cuando se parte de los elementos primitivos del programa de cómputo: Punto, Recta, Segmento y Circunferencia, de naturaleza *visual*, que el usuario debe operar para *solucionar* el problema consistente en la *bipartición* de un *segmento* dado. La solución implica las nociones adquiridas o por adquirir: *perpendicularidad*; *colinealidad de puntos*; *comparación de segmentos* y la *relación de transitividad.*

Elementos de la teoría crítica. Virtual – Actual; Posible –Real

El estudio sienta su base teórica en el pensamiento crítico de la filosofía, de la sociología y de la psicología, al tratar la comprensión de la relación entre el sujeto y el mundo, relación mediada por lo sensible y lo inteligible, a su vez mediada también por los sentidos y por la inteligencia cuando el sujeto se enfrenta al objeto *visible*. En el caso de la tecnología informatizada, la *imagen por visualizar*, presentada en pantalla, es fundamental para el análisis y la comprensión del proceso de la *"cognición visual"* del sujeto que realiza la experiencia de mirar la *imagen* como objeto visible. Consecuencia inmediata de la primacía de la imagen ante el texto escrito es el giro que el sujeto *experiencia* durante el acto de leer objetos *figurales* visibles, por ejemplo, como los que se presentan en la pantalla al operar el programa de cómputo *Cabri*. De la crítica filosófica se enfatiza al respecto:

"Las técnicas [la escritura, la digitalización, la comunicación] están inventándonos continuamente. No es que sean la prolongación de los sentidos humanos… dándonos la posibilidad de percibir más y mejor… se trata de visualizar la técnica como proceso que coadyuva en la emergencia y transformación de nuestros sistemas perceptivos y/o cognitivos. [Por] Lo que W. Benjamín llamó *nuevo sensorium* … el sujeto de la escritura no es el mismo que el sujeto de la imagen. El sensorium –conformante de la sustancialidad lineal y erigido por el aparato colectivo de la subjetivación llamado escritura– está imposibilitado para la hiperimagen, un sensorium reticular o en bucle" (Marín, 2003, pág. 5).

El *medio digital*, por lo tanto, impone una forma de lectura y una forma de memoria coherentes con los principios y leyes que él mismo determina. Las imágenes que se le presentan al sujeto para su lectura e interpretación, *imágenes de síntesis,* son producto de modelos formales lógico-matemáticos a los que la Informática define como *síntesis de imagen.* Quéau se refiere a las imágenes de síntesis en los siguientes términos:

"Las imágenes de síntesis se generan por ordenador partiendo de modelos simbólicos o lógico-matemáticos, a su vez elaborados mediante lenguajes formales. Las imágenes de síntesis se representan materialmente con tablas de números (de ahí la expresión imagen *digital*), que se pueden visualizar a su vez bajo diferentes modalidades físicas (imágenes de video, de cine, sonoras, hologramas, e incluso esculturas controladas por ordenador) (Quéau, 1995, pág. 129).

Virtual-Actual; Posible-Real. Las cuatro causas derivadas del pensamiento de Aristóteles —material, formal, eficiente y final— son telón de fondo para la comprensión de los términos que se utilizan para hacer referencia al carácter virtual de la imagen de síntesis, cuando ésta es objeto de conocimiento. De la interacción *sujeto-objeto,* la cual es mediada por la operación, por parte del sujeto, de un programa de cómputo, y que hace del objeto visible el *inteligible* correspondiente a la noción perseguida, el pensamiento filosófico nos permite distinguir, en su sentido dialéctico, lo *virtual* del objeto (figural en nuestro caso) presentado a la percepción visual del sujeto como la consecuencia de la intervención de la inteligencia del sujeto mismo para dar cuenta de la adquisición de una noción (de la geometría en esta ocasión). Este movimiento parte de lo actual (objeto visible) y regresa a lo actual (noción adquirida). Por otra parte, en el mismo sentido, la relación entre lo posible y lo real podría ser interpretada como la *potencialidad* de la inteligencia (conocimiento adquirido) que posibilita la *realidad* del objeto (concepto matemático formal, por ejemplo). Quéau (1995) así lo expresa:

"Lo virtual nos propone otra experiencia de lo real. De repente, la noción comúnmente percibida como "realidad" se ve puesta en tela de juicio, al menos en apariencia. Las realidades virtuales no son irreales, poseen cierta realidad, aunque sólo sea por los fotones que golpean nuestra retina y las sacudidas que nos infligen los simuladores. *Las experiencias virtuales son a priori asimilables a las experiencias sensoriales "reales" que vamos acumulando "naturalmente"… "* (pág. 17).

"Por una parte, las imágenes empleadas son esencialmente digitales, ya que surgen de modelos lógico-matemáticos y, por otra parte, ya no se trata de *representaciones* propiamente dichas, sino más bien de *simulaciones*" (pág. 19).

Investigaciones en curso profundizan el estudio crítico del uso de la tecnología de la información para efectos de adquisición de conocimiento matemático.

La experiencia

El contenido matemático de la experiencia se refirió al primer teorema del libro primero de los *Elementos* (Euclides; UNAM, 1944, pág. 13) para aplicarlo en la solución a la tarea de *Dividir en dos partes iguales la longitud de un segmento dado*. Para ello, fue condición fundamental la operación de los objetos visibles, arriba descritos, en las *experiencias interactivas* que resultaron de la *entrevista mediada*.

Antecedentes

Los conocimientos de geometría elemental adquiridos por el estudiante se reducían al reconocimiento de formas y figuras en el plano y en el espacio, evidenciado por sus expresiones intuitivas respecto a relaciones entre las partes de una figura (radio-diámetro del círculo, por ejemplo). En cuanto al uso de la regla y del compás, su dominio era deficiente, no así respecto al uso del *Cabri II* del cual operaba los objetos visibles en foco, excepto los correspondientes a la herramienta Circunferencia. El diagnóstico fue resultado de sesiones de trabajo en el aula previas a la aplicación de la entrevista.

Pregunta y objetivo

El estudio se orientó por la pregunta de investigación: ¿Qué efecto produce la operación del *objeto visible* a lo *inteligible* del usuario del *Cabri II* en un proceso de adquisición de nociones básicas de geometría?

El objetivo perseguido fue: Identificar la relación entre el objeto *visible* y el *inteligible* para dar cuenta del objeto *virtual*.

Método

Se realizaron entrevistas a un estudiante de primaria (9-10 años), *mediadas* por el uso de *Cabri II* y registradas en cinta de video, bajo condiciones de: a) Identificación previa de nociones de geometría y operación elemental del programa; b) selección de un problema cuya solución requiera el uso de los objetos *visibles* en cuestión; c) *restricción* de disposición de herramientas del programa de cómputo (Chávez y Garnica, 2006) para el seguimiento de la operación de los objetos *visibles* en foco, en el curso de la adquisición de nociones básicas de geometría.

El problema consistió en dividir un segmento en dos partes iguales. Los objetos visibles requeridos fueron los relacionados con la activación y operación de las herramientas Punto, Punto sobre objeto, Recta, Segmento y Circunferencia. La solución esperada aplica el Teorema I.1 del libro primero de los *Elementos* (1944, UNAM, pág.13). La bipartición se obtiene al trazar la recta que une los puntos de intersección de dos círculos de igual radio cuyos centros son los extremos del segmento a dividir; la recta en cuestión interseca al segmento y el punto de intersección así definido es el punto medio requerido.

Desarrollo de la experiencia: tres tiempos

En el curso de la solución del problema planteado se presentaron tres tiempos, determinados por las *nociones* en foco *asociadas* a los objetos visibles consecuentes del uso del programa de cómputo. Por su temporalidad, la realización de la experiencia interactiva mediada se nos presenta en tres episodios correspondientes al proceso de la solución: el primero, relacionado con las nociones de perpendicularidad y colinealidad y el uso de las herramientas Punto y Recta; el segundo, con la noción de partición y con el uso de las herramientas Segmento y Circunferencia; el tercero, con las nociones de relación de comparación y transitividad de segmentos y con el uso de la herramienta Segmento móvil.

Episodio primero: construcción de rectas perpendiculares y de puntos colineales.

La experiencia consistió en construir rectas perpendiculares y puntos colineales, con el fin de hacerlos presentes a la percepción visual mediante la operación de los objetos "punto" y "recta" (Bellemain y Laborde, 1998) Para la realización de la primera construcción, el sujeto operó solamente la herramienta Recta, para la segunda las de Punto y Recta.

Rectas perpendiculares

En el curso de la entrevista mediada, las experiencias interactivas quedaron determinadas como sigue: por la evidente organización de la percepción visual ante el objeto visible (véase Figura 1); por el reconocimiento, lectura y comprensión de *textos escritos* y de otros signos, presentados en pantalla, *asociados* a la intersección de las rectas; por el reconocimiento de la construcción ante la ausencia del *texto escrito* y del de la presencia/ausencia de los signos asociados a la intersección.

E: A ver, ¿Qué ves ahí?

I: una cruz

E: Son objetos que no has construido... ¿A qué se refiere?

I: Líneas...

*E:**...** ¿Qué observas ahí?*

I: ¡Hay un cuadrado!

E: ¿Qué me dice el cuadradito?

I: Que son perpendiculares.

E: Ahí podemos decir que las rectas son…

I: Perpendiculares...

Objeto: Recta; Noción: "Rectas perpendiculares".

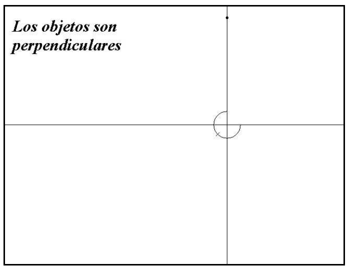


Figura 1. Texto escrito y signo giro.

Puntos colíneales

A lo planteado en el curso de la entrevista, el sujeto presentó a su percepción visual en el área de trabajo *tres puntos* no alineados. Luego de operar el objeto "recta" y ante la presencia del *texto escrito*, sus respuestas *manifiestas* en el área de trabajo (véase Figura 2) lo llevaron de la lectura 804 de los textos escritos a la revelación de sus *intuiciones* que derivaron en la noción de colinealidad de los tres puntos.

E: El letrero ¿Ya cambió)

I: Estos puntos no están alineados.

E: … te voy a pedir que los lleves a la recta.

I: [Arrastra cada punto hacia la recta…] ¡Desapareció uno! ¡Los otros dos no se notan!

E: Sobre la línea, y qué dice el letrero.

I: Estos puntos están alineados.

E: ¿Y cuando no están alineados?

I: Salen chuecos, queda uno fuera y otro adentro.

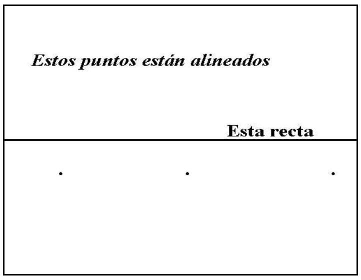


Figura 2. Recta y puntos.

Objeto: Punto; Noción: Colinealidad.

Episodio segundo: Bipartición de un segmento

Con el uso de los objetos “punto”, ”recta”, “segmento” y “círculo” el sujeto construyó los objetos visuales respectivos orientados a dar cuenta de la noción de la *bipartición* de un segmento, primero por tanteo: con la herramienta “Punto sobre objeto” construyó el punto por él considerado como “punto medio” del segmento en cuestión; luego, con el trazo de las dos circunferencias a partir de cada uno de los extremos del segmento, tomados respectivamente como centros, encontró el punto de intersección de la recta con el segmento *punto medio* requerido. Por su recurrencia, este procedimiento centró el objetivo de la *entrevista* durante el proceso de las experiencias interactivas.

Los segmentos son iguales

El procedimiento derivó de la aplicación del Teorema I.1 de los Elementos al trazo de la perpendicular y el encuentro de su intersección como “punto medio” del segmento dado (véase §2.3). La recurrencia al procedimiento por parte del sujeto no fue suficiente para dar sentido a las operaciones realizadas (véanse Figuras 3); por ejemplo, a la presencia a la percepción visual del resultado de la construcción por tanteo ante la construida mediante el uso del procedimiento recurrente.

E: Y después... A dónde los quieres poner;

I: [Lleva cada uno de los puntos a la intersección de los círculos]... [selecciona recta y une los puntos de intersección]

E: Y estos tres [señala los del segmento vertical que divide]

I: Están alineados.

E: Y cómo son estos segmentos [señala las dos partes del segmento inicial]

I: Iguales...

E: ¿Por qué?

I: Porque están alineados [señala varios casos de alineación]

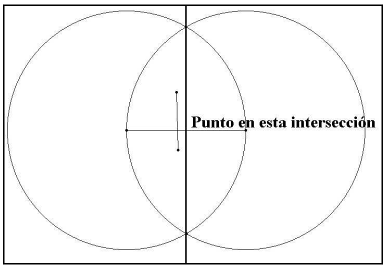


Figura 3. Bipartición del segmento.

Objeto: Segmento; Noción: Bipartición.

El "centro" y el "radio" del círculo

Para centrar la atención del sujeto a la noción de igualdad de los segmentos se usaron con recurrencia las definiciones de centro y radio del círculo (véanse Figuras 4), asociadas a las nociones "perpendicularidad" y "puntos colineales" adquiridas por él durante experiencias previas. La estrategia para el logro del objetivo consistió en "ocultar el objeto visible" de manera también recurrente.

E: ¿Y eso indica que son iguales?

I: ¡Sí!

I: Porque son del mismo tamaño

G: ¿Cuál es el radio?

I: Este [lo señala correctamente]...

G: Ahí, ¿Y el otro?

I: Este de aquí hasta aquí [señala correctamente]

G: ¿Cómo le demuestras a Héctor que son iguales?;

I: Porque aquí dice "este punto como centro y este como radio"

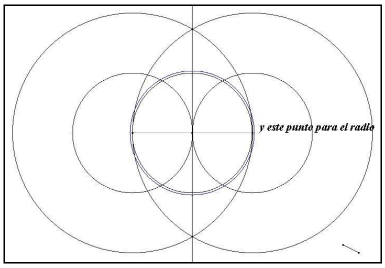


Figura 4. El Círculo.

Uso del círculo en la bipartición del segmento.

Episodio tercero. Nociones de relación: comparación de segmentos y transitividad

Ante las dificultades manifestadas por el sujeto para dar cuenta de la noción de *bipartición,* se hizo uso de la dinámica de objetos visibles, en particular de la del segmento que definía el radio, con la finalidad de comparar las partes y de esta manera concluir sobre la igualdad de los segmentos en cuestión. El sujeto no logró dar la respuesta esperada.

E: [Dinamiza el segmento y compara]. Es una manera de justificar que este segmento ya lo partí en dos

I: Ese quedó fijo en el centro!

I: [Repite el procedimiento por cuarta ocasión]

G: Ahora, compara los dos radios ¿Cómo le haces?

I: [Arrastra el punto para construir el radio,,,] Este segmento.

E: No se puede,…Último intento… ¿Qué queremos comparar?
I: este punto…

E: Tampoco se puede… Cuál otro…¿Qué queremos comparar?

I: Este… con este

E: Entonces, ¿qué hago? I: Moverlo! pero no se deja!...

¿Son iguales los segmentos?

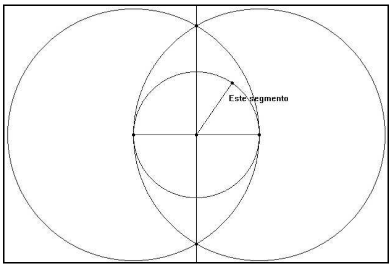


Figura 5. Comparación.

Dinámica del objeto

Luego de identificar el *diámetro* (segmento del problema), el *centro* (punto medio del segmento) y el *radio* (una de las partes iguales del segmento) de la circunferencia trazada, se activó la herramienta Puntero para señalar el extremo del radio sobre la circunferencia y, manteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón, se rotó el radio haciéndolo coincidir con el segmento (radio) en el origen de la circunferencia. Sin embargo, el sujeto no logró identificar de esa coincidencia la igualdad en longitud del radio rotatorio y del objeto en cuestión (véase Figura 5).

Comparación de segmentos

Ante la ausencia de la identificación del objeto móvil (el radio rotando), el sujeto lo operó y, por la recurrencia de acciones, logró dinamizarlo sin advertir lo correspondiente a la consecuencia de la comparación: las partes iguales del segmento dividido y la relación de transitividad asociada a las acciones (véase Figura 6).

E: ¿Cuántas partes tiene el segmento?

I: Una [señala el centro]…dos [señala la parte media del radio]

E: Fíjate si yo trazo un segmento ¿Qué apareció ahí?

I: Un punto…

E: Y después [el segmento al arrastrar el punto]

I: Una raya

E: Luego para fijarlo ¿Qué aparece?

I: Otro punto!

E: Entonces ¿Cuántos son? … uno, dos, tres

Incomprensión de la noción de bipartición.

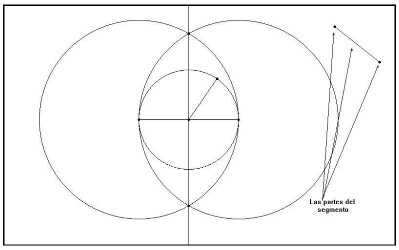


Figura 6. Partes del segmento.

Resultados

El análisis de las experiencias interactivas en este estudio nos permite, *grosso modo*, señalar tres resultados asociados a su objetivo. El primero se relaciona con la operación de los *objetos visibles* —figuras, textos escritos, otros signos— por parte del sujeto: tiempo de organización de la percepción visual, reconocimiento del texto escrito, identificación de otros signos, centración visual al objeto e interpretación de los textos figurales y escritos. El segundo se refiere al sentido dotado al uso repetido de reglas de operación de los *objetos visuales,* reglas que dan cuenta del desarrollo de solución de la tarea de la bipartición del segmento. El tercer resultado es el de la adquisición de las *nociones* de rectas perpendiculares, puntos colineales y partes del círculo; pero también el de la incomprensión de las relaciones de comparación de la longitud de segmentos y de transitividad, consecuencia, tal vez, de la *dinámica* aparente del objeto.

Observaciones

La continuidad de esta investigación se propone profundizar en torno a las relaciones entre los objetos *visuales* mediados por la *inteligencia* para aclarar la idea de lo *virtual* de los objetos, relaciones consideradas en el contexto de procesos de adquisición de nociones y/o conceptos de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bellemain, F.; Laborde, J. M. (1998). *Cabri-géomètre II.* Dallas: Texas Instruments.

Chávez, H.; Garnica, I. (2006). *Uso del programa de cómputo Cabri en la educación secundaria*. México: Cinvestav IPN, PNFAPM, Escuela Normal de Ecatepec, GEM.

Euclides (1944). *Elementos. Libro I* . México: UNAM.

Marín, L. F. (2003). Técnica y virtualidad. Pensar las nuevas tecnologías. Extraído desde http://www.filosofia.net/materiales/num/num18/Tecnivir.htm

Quéau, P. (1995). *Lo virtual*. *Virtudes y vértigos.* Buenos Aires: Paidós.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS EN EL GEOPLANO CIRCULAR

Hugo Morales Juárez
Universidad Autónoma de Chiapas México
Preparatoria No. 3 del Estado de Chiapas
hugo_dgmath@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *Una problemática en la enseñanza de la geometría en el nivel medio consiste en la excesiva concentración en la deducción, intrínseca de la geometría euclidiana. Un análisis histórico nos muestra que aspectos como la medición práctica, el uso de instrumentos y la inducción jugaron un papel fundamental en el origen de la geometría. Con base en lo anterior, para atender dicha problemática, se diseñaron actividades para la enseñanza de la medición de ángulos y conteo de las diagonales en los polígonos, complementadas con un instrumento que le denominamos geoplano circular, en donde uno de los hallazgos principales fue la posibilidad de resignificar la geometría con base en el razonamiento inductivo y la predicción como una alternativa en su enseñanza y aprendizaje.*
Palabras clave: medición práctica, predicción, inducción, práctica social

Introducción

La geometría se estudia en el nivel medio superior en el segundo semestre, en el caso particular de la curricula de las Escuelas Preparatorias del Estado de Chiapas, se ubica en tercer semestre. Específicamente la enseñanza y el estudio de los polígonos se circunscriben a la aplicación de fórmulas para determinar los valores de los ángulos y el número de diagonales, en algunos casos se desarrolla la demostración para la obtención de dichas fórmulas; esta manera abstracta de estudiar la geometría provoca rechazo en los estudiantes.

La problemática la hemos atendido desde una aproximación socioepistemológica, entendida como epistemología de las prácticas sociales relativas a la producción y difusión del saber científico a través de una visión sistémica de las dimensiones epistemológicas, cognitiva, didáctica y sociocultural (Cantoral, 2004).

Para ello el abordaje de los conceptos geométricos del polígono mediante el geoplano circular permite no sólo amenizar las clases sino mostrar a los alumnos una visión más amplia de los elementos de los polígonos, en la que se la ve no sólo desde el cálculo abstracto, sino que se muestra como un sistema de prácticas, retomando las ideas que fueron germen de sus conceptos y teorías. Las situaciones se diseñaron principalmente sobre las fases de apropiación del conocimiento matemático: acción, formulación, validación e institucionalización (Chevallard et al., 1998).

En la dimensión didáctica se diseñaron actividades que tienen como propósito facilitar la construcción de polígonos, para obtener las relaciones de los ángulos de los polígonos regulares y la relación del número de diagonales en los polígonos regulares así como en los polígonos irregulares. En la propuesta metodológica se tomaron algunos elementos de la ingeniería didáctica (Artigue et al., 1995), partiendo del supuesto de una concepción de la matemática como una actividad de construcción de relaciones y patrones mediante la experimentación, el cuestionamiento, la reflexión, el descubrimiento y la discusión que se fomenta mediante un aprendizaje cooperativo en el que por medio de la interacción con otras personas se facilita la construcción de los propios significados. Las actividades se realizaron en la escuela preparatoria número 3 del estado de Chiapas, en equipos de 3 o 4 estudiantes en edad de 16 y 17 años, lo cual les permitió llegar a conclusiones que posibilitaron la generalización a partir de las situaciones particulares experimentadas.

Hacia una visión alternativa de construcción de las relaciones en los polígonos

En la vida del hombre primitivo existieron múltiples circunstancias que lo condujeron a importantes descubrimientos de carácter matemático. Muchas observaciones en la vida diaria debieron de conducir al concepto de curvas, superficies y sólidos. La noción de distancia fue, sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos que se descubrieron, la necesidad de limitar terrenos llevó a la noción de figuras geométricas simples, tales como rectángulos, cuadrados y triángulos. Otros conceptos geométricos, por ejemplo, la noción de vertical, de paralela y perpendicular, están seguramente relacionados con la construcción de paredes y viviendas.

Aunque no hay evidencia que permita estimar cuantos siglos pasaron antes que el hombre fuera capaz de realizar una investigación geométrica, los registros existentes más antiguos que se han encontrado son unas tablas de arcilla que corresponden a los tiempos sumerios de aproximadamente 3000 a.C. y que dan testimonio de que la actividad del hombre en la geometría antigua está íntimamente relacionada con la medición práctica. Numerosos hallazgos arqueológicos muestran que en tiempos posteriores (2000 – 1600 a.C.) los babilonios ya estaban familiarizados con la solución de problemas geométricos acerca de la medición de perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos (Calleja et al., 1979).

Los babilonios resolvieron una colección de problemas aplicando el mismo procedimiento, es decir, utilizaban un mismo procedimiento para hallar la solución de un conjunto de casos particulares de un mismo problema. Sin embargo, no se encuentra una formulación explicita, ni por supuesto probarla en su generalidad. Les bastaba el hecho de que tales resultados, cada vez que eran utilizados en la práctica, llevaran a conclusiones que no contradijeran lo que la experiencia había recogido directamente de la realidad. Cabe señalar que el tipo de cálculos que realizaban los babilonios para obtener perímetros, áreas y volúmenes supone un conocimiento profundo de la aritmética. Conocimientos adquiridos de los sumerios que habían desarrollado un sistema de numeración posicional, así como la división del círculo en 360 grados.

Las fuentes principales de información relacionada con la geometría egipcia antigua son los papiros Moscú y Rhind, que corresponden aproximadamente a 1850 y 1650 a.C. También se conserva en el museo de Berlín, el más antiguo instrumento astronómico o topográfico que se conoce, una combinación de plomada y vara de agrimensor aproximadamente de 1950 a.C. Así como un reloj de sol que data de 1500 a.C. aproximadamente, ambos del Egipto antiguo. Estos instrumentos indican algún conocimiento de geometría práctica. Así también la gran pirámide de Gizeh es una construcción erigida aproximadamente en 2900 a.C., que involucra conocimientos geométricos. Veintiséis de los 110 problemas de los papiros de Moscú y Rhind son geométricos. La mayoría de ellos están relacionados con los procesos de medición necesarios para calcular áreas de terrenos y volúmenes de graneros (Calleja et al., 1979). Varios de estos problemas fueron resueltos por los mismos métodos que utilizaron los babilonios, pero hubieron otros que difirieron, tal es el caso del área del circulo.

Es de suponerse que el hombre, en sus primeros encuentros con la geometría, resolvió los problemas de su interés como casos aislados y sin conexión alguna. Posteriormente, al reconocer analogías en una colección de ellos, abstrajo la naturaleza concreta de los problemas y formuló una generalización (expresada explícitamente o implícitamente) para todos los problemas en los cuales había observado analogía. Al generalizar, se tuvo la ventaja de ordenar problemas prácticos en grupos tales que todos los problemas de un grupo pueden resolverse por el mismo procedimiento general. Se llegó pues a leyes o reglas geométricas, que evidentemente simplificaron la solución de los casos particulares.

En contra parte "la geometría, tal como lo han forjado los matemáticos durante largos siglos desde Euclides, es una geometría sintética de una lógica fáctica, como toda ciencia, que procede por síntesis. Las demostraciones tienen esa forma inesperada y un poco misteriosa que bajo el pretexto del rigor, esconde las naturalezas de las cosas. La génesis de las ideas ha desaparecido para dar lugar a un encadenamiento lógico que aparentemente no impone nada. El estudiante no encuentra en esta ciencia (formalizada) ningún método general que pueda servirle de guía, ya sea para clasificar las nociones adquiridas o bien para descubrir, a su vez, algunas propiedades nuevas" (Bourlet, 1997, p.137). Dado que tiene que partir de generalidades que en la mayoría de las veces para él no tienen esa claridad evidente que se supone de los axiomas y postulados que permiten demostrar un teorema.

De tal manera planteamos que los cursos de geometría del nivel medio superior, deben desarrollarse mediante el proceso de descubrimiento de leyes generales a través de la experimentación con casos particulares, que permitan al estudiante recrear conceptos y generalizaciones que le den sentido a esa geometría que se encuentra en los libros de texto, en donde la medición y la predicción son relevantes en tanto que se muestran como columnas vertebrales para resignificar la geometría y que de alguna manera son compatibles con una visión socioepistemológica en el sentido de que nociones como *predecir, argumentar, gestuar o actuar, anticipar, compartir, difundir, consensuar, estabilizar y acumular,* juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento (Cantoral, 2004).

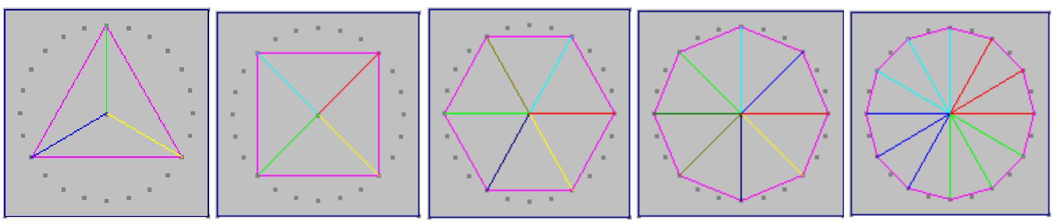
Actividades con el geoplano circular para resignificar la geometría

La actividad se lleva a cabo en dos momentos, en primer lugar los alumnos deben construir en equipos el geoplano circular, que consiste en una tabla cuadrada de 30 cm de longitud y 254 mm de grosor, donde se clavan 24 clavos distribuidos uniformemente en una circunferencia de 25 cm de diámetro y un clavo más en el centro de la circunferencia. El segundo momento consiste en la construcción de los polígonos utilizando ligas de colores, así como el trazado de los elementos que les permitan hallar los valores que se requieren para llenar las tablas que se les proporcionan, por ejemplo para la tabla 1, se requiere el trazado de los radios hacia cada uno de los vértices, para determinar el valor del ángulo central; para la tabla 2 se requiere el trazado de las diagonales desde un vértice, para llenar la tabla hasta la fila 3. Para llenar la fila 4, posteriormente deben trazar todas las diagonales desde cada vértice, teniendo el cuidado de no trazar dos diagonales que correspondan a los mismos vértices.

En el trazado de los radios la mayoría de los estudiantes observan en su construcción que en el centro se forman ángulos congruentes; por ejemplo para el polígono de tres lados, se forman 3 ángulos consecutivos (ver fig. 1a) por lo que concluyen que cada ángulo mide 120°; de la misma manera con el cuadrado (ver fig. 1b), cada ángulo mide 90°; y así sucesivamente, con los polígonos de *n* lados, se forman *n* ángulos centrales congruentes, por lo que cada ángulo central mide *360°/n*.

Número de lados	*3*	*4*	*6*	*8*	*12*	*n*
Ángulo central (X)	120°	90°	60°	45°	30°	$X = \frac{360°}{n}$
Ángulo interior (i)	60°	90°	|20°	135°	150°	*i=180°- X*
Ángulo exterior (e)	120°	90°	60°	45°	30°	*180° - i* $e = \frac{360°}{n}$

Tabla 1.- Medida de los ángulos en un polígono regular de 3, 4, 6, 8, 12 y *n* lados.



a) b) c) d) e)

Figura 1. Trazado de polígonos regulares, en el geoplano circular, y sus radios a cada uno de los vértices.

En el caso del ángulo interior, los estudiantes observan que se forman triángulos isósceles con dos radios consecutivos y un lado del polígono; aunque para el caso del polígono de tres lados ya conocen que el valor del ángulo interior es de 60°, aun así plantean que si el ángulo central mide 120°, entonces los otros dos ángulos del triángulo isósceles suman 60° para poder completar los 180° que suman los tres ángulos, finalmente concluyen que cada ángulo del triángulo isósceles mide 30°, por lo que el ángulo interior del polígono mide 60° dado que está formado por dos ángulos de dos triángulos isósceles congruentes. En el caso del cuadrado que tiene el ángulo central de 90° (ver fig. 1b), entonces los dos ángulos del triangulo isósceles que se forman con los radios consecutivos deben sumar 90°, por lo que cada uno de estos ángulos debe medir 45°, de tal manera que el ángulo interior del cuadrado mide 90° ya que, al igual que en el caso anterior, está formado por dos ángulos de dos triángulos isósceles congruentes. El mismo razonamiento realizan con los polígonos de 6, 8 y 12 lados, de tal manera que para el polígono de *n* lados, ante la dificultad que les representa expresar el procedimiento realizado con los polígonos anteriores, analizan el comportamiento de los valores que tienen en la tabla 1, concluyendo que el ángulo interior es igual a la diferencia que existe entre 180° y el ángulo central, por lo tanto expresan $i = 180° - X$.

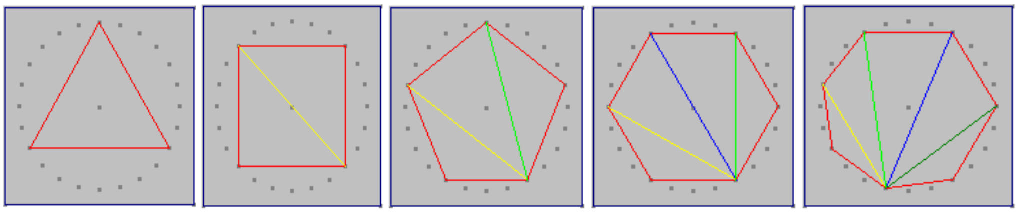
Para el caso de la medida del ángulo exterior, los alumnos determinan su valor, conociendo el hecho que es suplemento del ángulo interior, de tal manera que para el polígono de 3 lados plantean 180° - 60° = 120°, para el polígono de 4 lados 180° - 90° = 90°, para el polígono de 6 lados 180° - 120° = 60°, para el caso del polígono de *n* lados, algunos equipos concluyen que el ángulo exterior es $e = 180° - i$, y en otros casos observan los valores de la tabla concluyendo que el valor del ángulo exterior es igual a la medida del ángulo central por lo que $e = 180° / n$.

Por otra parte, en la actividad que corresponde al trazado de las diagonales, en el caso del polígono de tres lados, que es el primer polígono que construyen, entran en conflicto debido a que intentan trazar las diagonales; sin embargo, después de un tiempo de experimentar en el geoplano circular, se convencen que esto no es posible (ver fig. 2a).

Para el caso del polígono de 4 lados no tienen dificultad en identificar que únicamente se puede trazar una diagonal desde un vértice, lo mismo ocurre con los polígonos de 5, 6 y 7 lados. Para el caso del número de triángulos que se forman, únicamente observan el geoplano circular (ver fig. 2), y cuentan en cuantos triángulos, las diagonales dividen al polígono correspondiente.

Número de lados	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*n*
Numero de diagonales desde un vértice (d)	0	1	2	3	4	$d = n - 3$
Número de triángulos que se forman	1	2	3	4	5	*n-3*
Número de diagonales totales estimado	0	4	10	18	28	$d{\cdot}n$
Numero de diagonales totales (D)	0	2	5	9	14	$D = \frac{d \cdot n}{2}$

Tabla 2.- Número de diagonales en un polígono de 3, 4, 5, 6, 7 y n lados.



a) b) c) d) e)

Figura 2. Trazado de polígonos regulares e irregulares, en el geoplano circular, y las diagonales de un vértice.

Para llenar la fila tres de la tabla que corresponde al número de diagonales totales estimado, consideran los valores encontrados en la fila 1, que indica cuantas diagonales es posible trazar desde un vértice y el número de vértices que tiene el polígono correspondiente, de tal manera que estiman que el número de diagonales corresponde al producto de estos dos números es decir $d{\cdot}n$ (ver tabla 2). Posteriormente para verificar sus resultados colocan las ligas que corresponde a las diagonales que faltan, encontrando que la cantidad de ligas necesarias es la mitad del número de diagonales estimado.

Una vez que los estudiantes sistematizan los datos de la tabla, proceden al llenado de la última columna que es la generalización de los patrones observados; por ejemplo, el número de diagonales, 0 = 3 – 3; 1 = 4 – 3; 2 = 5 – 3; 3 = 6 – 3; por lo tanto $d = n - 3$. Para el caso del número de triángulos, 1= 3 – 2; 2 = 4 – 2; 3 = 5 – 2; 4 = 6 – 2; entonces el número de triángulos para el polígono de n lados es $n - 2$. Para el caso del número de diagonales totales como se mencionó anteriormente, consideran el número de diagonales por vértice y el número de vértices que tiene el polígono, por lo que en la generalización expresan que $D = d \cdot n /2$, dado que n corresponde al número de vértices que tiene el polígono de n lados (ver tabla 2).

Conclusiones

En el plano histórico (dimensión epistemológica) se puede observar que la actividad del hombre, en el origen de la geometría, está íntimamente relacionada con la medición práctica y con la solución de una colección de problemas aplicando el mismo procedimiento, así como el uso diverso de instrumentos de medición (plomada, vara de agrimensor, compás, etc.). Al organizar los problemas prácticos y generalizar el procedimiento llegaron a leyes o reglas geométricas. De acuerdo al funcionamiento de esta geometría antes de Euclides, se realizó un diseño de actividades para los estudiantes de educación media superior (Preparatoria) en donde los ejes principales fueron la medición práctica y la predicción, para tal fin se tuvo la necesidad de diseñar un instrumento, inspirado en el geoplano, que hemos llamado geoplano circular.

En las construcciones de los estudiantes mostramos, en cierto modo, algunas evidencias de que la medición práctica, la predicción y la manipulación del geoplano circular jugaron un papel fundamental en la generación de conocimientos geométricos. La naturaleza de las construcciones que realizaron los estudiantes, de alguna manera, permitieron observar que la inducción y la generalización son columnas vertebrales, sin embargo, han desaparecido de la enseñanza de la geometría porque se le ha dado primacía a la geometría euclidiana que descansa en una estructura axiomática en donde lo primordial es la deducción.

Nuestro trabajo de investigación nos está permitiendo tener una visión alternativa para la enseñanza de la geometría en el sentido de recuperar aspectos como la medición práctica, la predicción, el uso de instrumentos de medición, la inducción, la generalización, que están presentes en las practicas sociales de las diferentes culturas que desarrollaron conocimientos geométricos antes de la síntesis euclidiana.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Duady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bourlet, M. C. (1997). La geometría descriptiva en el Conservatorio de Artes y Oficios de París. *Educación Matemática.* 9 (2). 137-139.

Calleja, M., Cedillo, T., Chalina, A. y Mendiola E. (1979). *Matemáticas I*. México: Universidad Pedagógica Nacional-SEP.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*. (pp. 1-9) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: Biblioteca para la actualización del maestro, SEP.

UNA PRIMERA SECUENCIA DIDÁCTICA EXPLORATORIA: EL CAMBIO DE VARIABLE EN LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ramón Flores Hernández
Instituto Tecnológico de Saltillo, Universidad Autónoma de Coahuila México
rnfloresh@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Este reporte de investigación presenta una primera secuencia didáctica exploratoria sobre el cambio de variable (cv) en la Transformada de Laplace y bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales, conformada por tres actividades. La pregunta de investigación que motiva este trabajo es la siguiente: ¿Qué mecanismos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo, al reconocer el cv como un objeto explícito? El marco teórico utilizado se sustenta en los aspectos epistemológico, cognitivo y didáctico del cambio variable. La metodología que utiliza esta investigación es la de la Ingeniería Didáctica, presentando ahora el inicio de la fase de "concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas" (Artigue, 1995).*
Palabras clave: cambio, variable, transformada, ecuación, proceso

Introducción

Esta investigación surge directamente de la práctica educativa en el Nivel Superior y bajo la problemática del manejo de variables en diferentes contextos, esto debido a la necesidad de solventar problemas y entender diversos temas de la matemática de la ingeniería que requieren del cv.

El problema de investigación consiste en hacer explícito el cv a través de generar un instrumento que permita indicar en qué medida se puede enseñar el cv; es decir, observar en que medida el cv al desempeñar el papel de herramienta implícita en la solución de un problema, deviene en objeto, de tal forma que pueda ser utilizado eficazmente en los temas de ingeniería (Douady, 1995).

Esta investigación está siendo guiada por las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza?

2) ¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico?

3) ¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo?

4) ¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso?

5) ¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv?

6) ¿Qué obstáculos están asociados al cv?

7) ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

Las primeras seis preguntas deberán permitir abordar la pregunta siete que será tomada como el objetivo general. Además, estas interrogantes permitieron estructuras el marco teórico, ya que sus dominios cubren los componentes del sistema didáctico: el profesor, el estudiante y el saber enseñado.

Así por ejemplo: las preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la transposición Didáctica, ya que se quiere observar en qué medida el cv a sufrido ajustes didácticos y cuáles son, y cuales actualmente encontramos en el "saber enseñado" (Chevallard, 1991). Las preguntas 3 y 4 se ubican dentro de la cognición y serán tratadas con base en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995; 1998). Aunado a esto, el aspecto cognitivo se apoyará en la dialéctica herramienta-objeto, la cual permitirá validar si el cv evoluciona en objeto y así poder lograr su comunicación o mejor dicho su enseñanza de manera explícita (Douady, 1995).

Las preguntas 5 y 6 se ubican en la dimensión epistemológica, elemento primordial en las investigaciones en matemática educativa, ya que nos permite estudiar el conocimiento; de hecho, nuestro trabajo docente es indudablemente un problema epistemológico debido a que siempre tiene que ver con el conocimiento matemático. Así pues, la componente epistemológica nos permite conocer el origen y desarrollo del conocimiento del cv, así como su funcionamiento y sus diversas formulaciones (Cauchy, 1981; Collette, 1986; Edwards, 1979; Newton, 2001; Ríbnikov, 1987).

Respecto al aspecto metodológico, se utilizará la metodología de la Ingeniería Didáctica en la que se distinguen cuatro fases: Análisis Preliminar, Concepción y Análisis a Priori de las Situaciones Didácticas, la Experimentación y por ultimo, el Análisis a Posteriori y Evaluación (Artigue, 1995). En esta metodología resalta la Teoría de las Situaciones Didácticas, la que debe conducir a los estudiantes a situaciones de acción, situaciones de formulación y a situaciones de validación. Mientras la actividad del profesor es primordial en la fase de institucionalización del nuevo saber adquirido (Brousseau, 1998).

Sobre el cambio de variable (cv)

Con base en la fase del Análisis Preliminar de la Ingeniería Didáctica, se rescata entre otras cosas, una premisa fundamental: el cv no es un proceso trivial, ya que se está trabajando con la conversión de registros de representación bajo el fenómeno de no-congruencia. A manera de ilustración:

Bajo el contexto de las ecuaciones diferenciales se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + sen\ 2y},$$

al resolverla se obtiene la expresión

$$x = e^{sen\ y}[2\int e^{-sen\ y} seny\ \cos y\ dy + c]$$

La integral que se muestra se resuelve utilizando un cv, solo que no hay una regla o fórmula preestablecida que nos diga cómo cambiar la variable y. La estrategia que se aplica es la de inventar una relación funcional que permita dicho cambio, por ejemplo se puede utilizar la relación $z = sen\ y$ y en consecuencia $dz = \cos y\ dy$, quedando la integral anterior como

$$x = e^{sen\ y}[2\int e^{-z} z\, dz + c],$$

la cual es fácil de integrar; es decir, se ha efectuado un cambio de registro, donde ahora se efectuarán tratamientos totalmente diferentes a los que se hubieran dado a la representación inicial. Esta integral es un nuevo registro donde no hay una correspondencia término a término entre las unidades significantes sobre todo en cuanto a sus significados. Así que estamos ante un caso de no-congruencia de las representaciones.

Este caso del cv de *tomar* el cambio mas adecuado de la expresión dada, es una de las actividades más complicadas para el estudiante de ingeniería (Flores, 2007).

Otras formas del cv son las siguientes, según el Análisis Preliminar:

a) *Inventar* una fórmula que permita solventar el problema inicial de una manera fácil, por ejemplo; en el tema de las ecuaciones paramétricas caemos en este caso. Si escribimos la ecuación $y^3 = x^2$ en forma paramétrica, debemos introducir un parámetro de tal forma que la ecuación dada se pueda escribir en función de éste y de las variables dadas inicialmente; en otras palabras, debemos inventar dos relaciones funcionales, que para este caso pueden ser:

$$x = t^3 \quad y \quad y = t^2$$

b) Un *cambio verbal* de variable. Esto puede ocurrir en la etapa del "saber enseñado", cuando el profesor explica, por ejemplo, el tema de la derivada del producto. El profesor habla en términos de las variables u y v que componen la fórmula del producto, y escribe sus valores o sus derivadas en términos de la variable x.

c*) Tomar una función dada como* medio para realizar el cv. Esto lo podemos ver en el caso siguiente:

Transformar $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ a coordenadas esféricas: Aquí el cv es dado por las fórmulas: $x = \rho \cos\theta \, sen\phi, \;\; y = \rho \, sen\theta \, sen\phi, \;\; z = \rho \cos\phi$

d) Un cv en cuanto a su *significado.* Esto lo podemos ver en la transformada de Laplace, transformada de Fourier, derivadas parciales e integrales múltiples. Por ejemplo en la transformada de Laplace se cambia la variable t, tiempo, por la variable s, que representa la frecuencia compleja.

e) Un **cv** *yuxtalineal.* Este cambio significa que se hace el cambio de una variable por otra directamente, por ejemplo en las integrales definidas.

Vemos por todo lo anterior que el cv de la matemática de la Ingeniería no es llevar a cabo un reemplazo de una variable por números o funciones como lo ven (Morales & Díaz, 2007). En el cv hay otros aspectos cognitivos como los vistos anteriormente, de mayor orden que el de ejecutar un conjunto de reemplazo en una variable.

Por todo lo anterior, el cv lo miraremos en este trabajo como un proceso que manipula variables localizadas en funciones, utilizando algebra y/o cálculo. O mejor dicho, es un proceso que permite cambiar funciones y sus variables al interactuar con ellas a través del algebra y/o cálculo, y puede ser un proceso estable o inestable. Es estable cuando genera fórmulas que funcionan para todos los casos que contienen una estructura matemática bien definida. Y es un proceso inestable, cuando la expresión candidata a ser cambiada, contiene una estructura matemática fuera de los estándares comunes para su transformación.

El cv es estable en los siguientes casos: al hacer un cambio verbal de variable, al tomar una función dada como medio para hacer un cv, al hacer un cv en cuanto a su significado y al hacer un cv yuxtalineal.

El cv es un proceso inestable cuando: se inventa la relación funcional y al tomar el cv de la expresión dada.

Otro aspecto que es importante tomar en cuenta acerca del cv es el tocante a su uso. Así pues, en cuanto al uso que se le da al cv, puede tomar la siguiente clasificación:

a) Una herramienta indispensable para llevar a cabo un proceso

Por ejemplo en las ecuaciones diferenciales homogéneas, donde el cv es primordial.

b) Una herramienta intrínseca a un proceso

Por ejemplo en la ecuación diferencial de Bernoulli, o en algunas demostraciones, como en el caso del Segundo Teorema de Traslación de la Transformada de Laplace. En estos casos el cv conforma una pequeña parte de un proceso global, sin embargo asume un papel indispensable y por lo tanto importante.

c) Una herramienta para economizar el tratamiento

Bajo este aspecto el cv no es indispensable, solo es opcional. Por ejemplo, esto ocurre en algunas ecuaciones diferenciales, en algunas integrales y en algunas derivadas.

Acerca de la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Del Análisis Preliminar se pudo observar que el cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por lo tanto por los profesores de manera implícita en la mayoría de los casos donde se presenta. Así mismo, el cv es un tema que esta fuera de los programas de estudio y por lo tanto de su enseñanza explícita, solo se maneja cuando surge con claridad en los temas de la ingeniería, y cuando no sucede esto, se manipula pero no se le identifica como un cv.

Su importancia radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que no le toma mucha importancia, aspecto heredado por el profesor. Cuando lo utiliza no lo ve como un cv; es decir, cuando aplica esta herramienta no es conciente de esta actividad matemática. Y la dificultad se agudiza cuando se trata de inventar una función que relacione la variable original con la variable nueva y que permita una transformación de registros.

Este hecho permite identificar un obstáculo, localizado en la relación funcional entre variables; más específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable, es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por la concepción operacional que ya han interiorizado de una función. También influye en un grado menor que se use la variable x ó y con la nueva variable. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función.

También se observa que no se ha dado una transposición didáctica, específicamente para el cv.

Todos los aspectos anteriores son restricciones localizadas para el cv y que permitirán diseñar situaciones didácticas.

Otro aspecto importante en esta fase de la investigación “concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas”, es el concerniente a las variables didácticas: las variables didácticas son variables de control ligadas a toda situación de enseñanza, ya que estas condicionan y organizan los aprendizajes de los estudiantes o lo que se quiera indagar de ellos. Una característica de las variables didácticas es que pueden ser modificadas por el profesor, conllevando a la afectación de la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el estudiante al aceptar la devolución de la situación (Brousseau, 1998). En cuanto a este trabajo, las variables didácticas que se tomarán bajo esta primera mirada a la fase de investigación que nos ocupa, tomaremos como variables didácticas las siguientes: el tema matemático y los casos de presentación del cv (inventar el cv, tomar el cv de la expresión dada, etc.).

La secuencia didáctica

Se diseñó una primera secuencia didáctica exploratoria, compuesta por tres actividades utilizando el tema de la Transformada de Laplace bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales. Donde la Actividad 1 contiene aspectos iniciales sobre las ecuaciones diferenciales y el cv. La Actividad 2 contiene la Transformada de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv. La Actividad 3 contiene la Transformada Inversa de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv.

Se pretende los siguientes objetivos:

a) Observar el comportamiento del estudiante ante el proceso del cv

b) Indagar si es capaz de localizar el cv en las diferentes actividades.

c) Mostrar la importancia del cv en la resolución de las actividades planteadas.

Estos objetivos se presentan de forma intrínseca al objetivo general de las tres actividades, que es el de enseñarle al estudiante la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a través de la Transformada de Laplace.

También, esta primera aplicación de la secuencia didáctica permitirá enriquecerla según lo que se observe en la fase de Experimentación.

Actividad 1

La ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$, puede ser resuelta por los métodos de "coeficientes indeterminados" ó "variación de parámetros"

a) ¿Puedes identificar en el método de "coeficientes indeterminados" en qué parte se introduce un cambio de variable? Si es necesario resuelve la ecuación por este método.

b) Al aplicar el método de "Variación de parámetros", indica en qué parte se presenta un cambio de variable. Si no lo identificas, resuelve la ecuación por este método.

Actividad 2

Cuando se tiene una ecuación diferencial donde las variables han sido separadas, por ejemplo $(3x^2 + x)dx = e^y dy$, el siguiente paso es aplicar la integral en ambos miembros de la igualdad, quedando $\int(3x^2 + x)dx = \int e^y dy$.

a) Si nos ubicamos en la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$ sujeta a

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ y le aplicamos en ambos miembros de la ecuación la Transformada de Laplace, ¿cómo quedaría?

b) La Propiedad de Linealidad para la Transformada de Laplace indica que:

Si la Transformada de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ existe; y a, b son constantes, entonces $L\{af(t) + b\,g(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$.

Aplica la Propiedad de Linealidad en $L\{2y'' - 3y'\}$.

c) Encuentra las dos Transformadas de Laplace que surgen en el inciso b, aplicando la transformada de la derivada y simplificando totalmente el resultado, sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, de tal manera que solo se tenga un solo término que contenga la Transformada de Laplace. Recuerda que $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$ y $L\{y''(t)\} = L\{y''\} = s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$.

d) Si $L\{2y' - 1\} = s$; basándote en los incisos b y c encuentra el valor de $L\{y\}$, sabiendo que $y(0) = 0$.

e) Aplica los procesos realizados en los incisos b y c a la ecuación diferencial planteada en el inciso a. Además, encuentra el valor de $L\{y\}$ tal como ocurrió en el inciso d.

f) ¿En que parte del inciso e detectas que hay un cambio de variable?

g) ¿En que medida influye el cambio de variable para encontrar $L\{y\}$? ¡Discútelo con tus compañeros de equipo!

Actividad 3

Consideremos ahora la pregunta: Dada $F(s)$ ¿qué función $f(t)$ hace que $L\{f(t)\} = F(s)$? Por ejemplo, si $L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$ ¿Cuál es el valor de $y(t)$? En el lenguaje matemático esto cae en la categoría de un inverso, donde se dice que $y(t)$ es la Transformada Inversa de Laplace de $\frac{1}{s^2}$ y se escribe $y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}$, por lo que el valor de la función buscada $y(t)$ es: $y(t) = t$, donde se tiene de nuevo la variable original t.

a) Bajo esta idea, encuentra la Transformada Inversa de Laplace de la Actividad 2, inciso e; es decir, encuentra el valor de $y(t)$.

b) Con referencia al inciso a, ¿qué puedes decir acerca del comportamiento de las variables involucradas? ¡descríbelo!

c) Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden 2 $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ y condiciones iniciales $y(0) = m,\ y'(0) = n$. Resuelve esta ecuación siguiendo los procesos de la Actividad 2, incisos a y e; y de esta Actividad 3, inciso a.

d) Indica en qué partes de la resolución de la ecuación del inciso c se está haciendo un cambio de variable.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques* 1979-1990. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditíons.

Cauchy, A.L. (1981). *Équations Différentielles Ordinaries*. Paris: Éditions Études Vivantes.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Collette, J-P. (1986). *Historia de las matemáticas*. *Vol*. *11*. México: Siglo Veintiuno Editores.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris: Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Européennes.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag.

Flores, R. (2007). El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática? En C.R. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 145-150). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Morales, L y Díaz, J.L. (2007). Un estudio del concepto de variable en los libros de texto. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 201-211). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Newton, I. (2000). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. México: UNAM.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. URSS: Ed. Mir Moscú.

PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS: UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
CICATA-IPN México
UTVM, ESIME-IPN
elitret@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *En las Universidades Tecnológicas se forman profesionistas que se insertan en un mundo laboral altamente cambiante y competido, en él se debe dar solución a problemas reales, por lo que se requiere una formación matemática vinculada con otras áreas del conocimiento. Para formar Técnicos Superiores competentes en matemáticas, se establece como estrategia la resolución de problemas contextualizados. Se aborda un caso particular, el objeto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, para la resolución de mezclas de soluciones azucaradas y se fomenta su tránsito en el registro algebraico y gráfico con el objetivo de que el estudiante se apropie del conocimiento. Se presentan los primeros resultados de la puesta en marcha de una propuesta didáctica.*
Palabras clave: Contexto, vinculación, matemática

Introducción

La instrucción matemática en el nivel Técnico Superior Universitario vive condiciones particulares pues de acuerdo al modelo educativo se debe privilegiar un conocimiento matemático contextualizado; el estudiante se forma para insertarse directamente en el mercado laboral, en su vida profesional deberá resolver problemas técnicos donde se requiere integrar conocimientos específicos de su formación con conocimientos matemáticos básicos. Un caso particular lo ocupan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de forma recurrente se requieren para modelar fenómenos reales del área de competencia de los Técnicos Superiores en Tecnología de Alimentos (balance de materia, estandarización de leche, jugos, soluciones químicas, por citar algunas). Sin embargo, a pesar de ser un tema que se aborda desde secundaria, en el nivel educativo de interés se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades para modelar mediante este objeto matemático problemas contextualizados. Esta problemática no es ajena a otros niveles educativos, muchos investigadores se han ocupado de su estudio (Guzmán, 1999 y 2000; Panizza et al., 1995 y Ramírez, 1997 citados por Herrero, 2004). A pesar de ello y para los fines de este trabajo, es fundamental considerar que prácticamente no se han realizado estudios sobre sistemas de ecuaciones lineales en el contexto del nivel de estudios de interés, siendo un campo de aprendizaje con condiciones particulares.

Como estrategia para facilitar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se planteó el uso de problemas contextualizados en los que además implicó trabajo en diferentes registros de representación semiótica y de tránsito entre ellos. El marco teórico utilizado fue el de representaciones semióticas de Duval (1999); debido a que como indica éste autor, la coordinación de varios registros de representación semiótica resulta fundamental para una asimilación conceptual de un objeto, siendo necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser reconocido en cada una de ellas.

Dado que se trabajo con un problema contextualizado se tuvo como marco metodológico a la fase didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias (Camarena, 1995), en donde se incluye a la matemática en contexto. Esta estrategia didáctica se caracteriza por presentar conocimientos integrados a los alumnos a partir de una situación problemática de otras disciplinas, cuya característica principal es que se trata de problemas reales del área de estudio del alumno. La matemática en contexto toma el problema, lo resuelve e interpreta la solución en el mundo de la disciplina del contexto.

Metodología

Para establecer como propuesta de aprendizaje de las matemáticas el uso de problemas contextualizados se trabajó en dos etapas: a) Desarrollo de la contextualización, para presentar un problema contextualizado se realizó previamente una investigación con profesores del área técnica y egresados, para determinar el objeto matemático que con mayor frecuencia se utiliza en el ámbito laboral y/o profesional, así como la razón de uso, encontrándose que repetidas veces se utiliza el objeto sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para problemas de mezclas. La contextualización se realizó con base en las etapas de la matemática en contexto; durante la etapa de resolución matemática del problema se trabajo con diferentes representaciones, articulando el marco teórico y la fase didáctica de la matemática en contexto (figura 4). b) Experiencia en el aula con el problema contextualizado, se trabajo con nueve estudiantes voluntarios de primer cuatrimestre del Programa Educativo de Tecnología de Alimentos a quienes se les propuso el problema contextualizado, de tal manera que los estudiantes se plantearan preguntas e incorporaran sus conocimientos previos para trabajar en diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraico y gráfico). La actividad de la secuencia alude al contexto de un laboratorio químico donde se pueden preparar mezclas de sustancias azucaradas, el fin es realizar una nueva mezcla a partir de algunas existentes.

Resultados y discusión

Desarrollo del problema contextualizado

Un caso específico

Para un Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos es común que en su vida profesional tenga que realizar mezclas de diferentes sustancias o materias primas para poder obtener un producto final. Como estrategia de solución para determinar cuántas unidades (gramos, kilos o mililitros) deben colocarse de cada una de las sustancias de interés, se hace uso de sistemas de ecuaciones lineales. A nivel profesional no importa matemáticamente la manera de resolver el problema (gráficamente, algebraicamente ó mediante el cuadrado de Pearson), si no el obtener la solución y como consecuencia de ello el producto o el balance de materia. Bajo esta consideración, creemos que problemas contextualizados de ésta naturaleza pueden aprovecharse como estrategia didáctica para que el alumno se motive en el aprendizaje de las matemáticas y como consecuencia se apropie del conocimiento.

Derivado de encuestas realizadas a egresados que están insertos en el campo laboral de Tecnología de Alimentos, se determinó utilizar un problema de mezclas (balance de materia), resuelto por sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Con este problema se establecieron las etapas de la fase didáctica de la matemática en contexto y al proponer la solución del problema se buscó la articulación de la representación gráfica con la algebraica. Enseguida se explica brevemente la contextualización del problema.

Planteamiento del problema contextualizado

Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?. Resolver el problema algebraica y gráficamente.

Determinación de variables y constantes

Un paso importante dentro de la fase didáctica de la Matemática en Contexto es la determinación del modelo matemático del problema contextualizado, para lo cual es necesario establecer las variables y constantes del mismo, para este caso las definidas se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Variables y constantes del problema contextualizado.

Variables	*Constantes*
mL a tomar de solución al 35 y 60%	Concentración de soluciones azucarada a utilizar (35% y 60%)
	Volumen final (100 mL). Concentración final (50%)

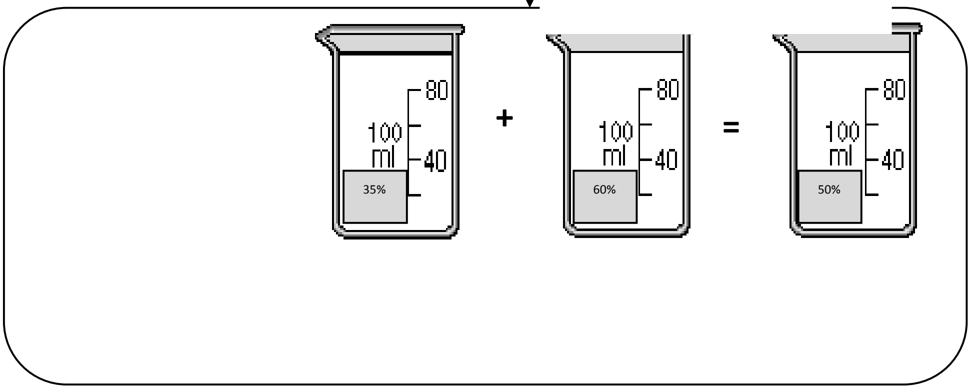
Determinación del modelo matemático

En la determinación del modelo matemático se fomenta el uso de las representaciones semióticas. Entonces, lo primero que debe ocurrir es el entendimiento del problema en el lenguaje natural (entender el problema en términos del balance de materia –mezcla de sustancias o materia prima) (figura 1).

Lenguaje natural o verbal.

Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?

Representación iconográfica



Condiciones	*Mezclar (+)*		*Obtener*
	Solución al 35%	Solución al 60%	
Volumen	x	y	100 mL
Concentración	0.35	0.60	0.50

Figura 1. Registro en lenguaje natural o verbal e iconográfico del problema contextualizado.

Una vez entendido el problema en el lenguaje natural o verbal y con representación iconográfica del mismo (no necesario) puede plantearse el modelo matemático, que en este caso corresponde a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (figura 2).

a)Ec. de Volumen	$x + y = 100$
b)Ec. de concentración	$0.35x + 0.60y = 0.50(100)$

Figura 2. Modelo matemático al problema contextualizado propuesto.

Solución matemática del problema contextualizado

Es claro que para la solución de un sistema de ecuaciones lineales existen diversos métodos. Sin embargo, los profesores del área técnica indicaron que regularmente utilizan el método algebraico de reducción, razón por la cual se resuelve matemáticamente el problema contextualizado utilizando este procedimiento (tabla 2). Durante la solución matemática del problema debe fomentarse el uso de diferentes registros, así como el traslado de ellos para lograr la conceptualización del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, siendo necesario a) La identificación y b) La articulación de los registros.

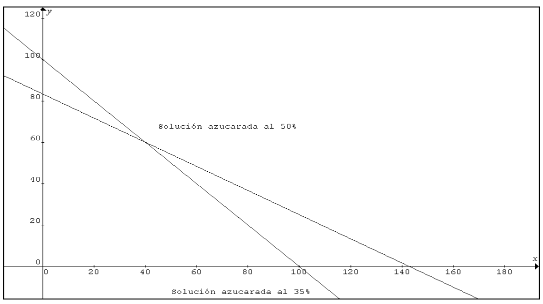
Modelo matemático *(Registro algebraico)*	a)Ec. de Volumen $x + y = 100$ b)Ec. de concentración $0.35x + 0.60y = 0.50(100)$
Solución algebraica Método de reducción	$x + y = 100 \quad 0.35) \Rightarrow -0.35x - 0.35y = -35$ $0.35x + 0.60y = 0.50(100) \Rightarrow \underline{0.35x + 0.60y = 50}$ $0 + 0.25y = 15$ $y = \frac{15}{0.25}$ | $x + y = 100$ | $x + 60 = 100$ $y=60$ | $x = 40$
Solución gráfica *(Registro gráfico)*	

Tabla 2. Resolución matemática del problema contextualizado

a) Identificación de registros

Para las matemáticas, las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasladar ideas intangibles en graficas, expresiones algebraicas o analíticas y tablas que pueden ser apreciadas por nuestros sentidos. Tomando como base estas representaciones, se intenta dar un significado a un concepto matemático, en este caso sistema de ecuaciones lineales. En la tabla 3 se muestran las representaciones del problema contextualizado de interés. Al utilizar las representaciones el alumno tiene la posibilidad de construir el significado de sistemas de ecuaciones lineales, mediante el enlace entre el pensamiento operativo (ejecución de procedimientos) y el estructural (adquisición de conocimientos); por otro lado, cuando el alumno tiene una base de significados, esto propicia la construcción, dentro de un contexto, de un nuevo significado y es a partir de esta actividad intelectual que se posibilita la aprehensión del conocimiento.

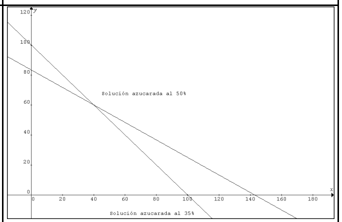
Objeto matemático	*Representación*		
	Registro verbal (lenguaje natural)	*Registro algebraico*	*Registro gráfico*
Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?	$x + y = 100$ $0.35x + 0.60y = 50$	

Tabla 3. Identificación de registros del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

b) Articulación de registros

La relación existente entre los registros de representación se considera una actividad escolar propia del aprendizaje. Deben existir varias representaciones del objeto, dando una idea más general del mismo, pues toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y de una representación a otra no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados. En la figura 3 se muestran las representaciones del objeto sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas así como la posible articulación entre ellas.

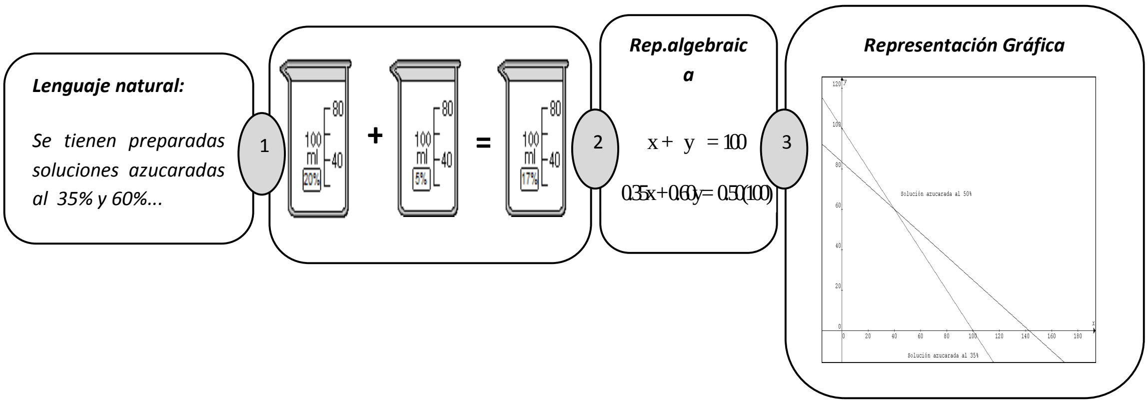


Figura 3. Articulación de registros del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Cuando el problema se entiende en el lenguaje verbal puede realizarse una representación simbólica (iconográfica) que posibilita determinar cuáles son las variables y constantes que formaran parte del modelo matemático (ecuaciones) del fenómeno en estudio.

2. Al entenderse el problema contextualizado en el lenguaje natural o verbal y trasladarlo a un esquema (lenguaje iconógrafico), se utiliza este para la representación algebraica dada por dos ecuaciones, una de ella representa la mezcla de soluciones para obtener 100 mL de solución (x+y=100) y la otra la cantidad de cada una de las soluciones (concentración) a mezclar para obtener los 100 mL al 60%.

3. De la obtención del modelo matemático se hace la conversión a la representación gráfica. Para realizar el registro gráfico se tienen diferentes estrategias, tales como realizar una tabla de datos o trabajar las ecuaciones del modo *y=mx+b* y a partir de la definición de la pendiente y del punto de intersección con el eje "y" esbozar la gráfica que represente a la función lineal. La representación gráfica es especialmente importante debido a que si el alumno tiene la habilidad de pasar del registro gráfico al analítico y viceversa; entonces, se puede establecer que el alumno ha conceptualizado el objeto matemático, dado que la compresión de un objeto matemático reposa en *la coordinación de al menos dos registros de representación* (Duval, 1999), en este caso el algebraico y gráfico.

Solución e interpretación requerida por el contexto y en términos del problema

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, los valores son x=20, y=60, lo cual se comprueba con la representación gráfica intersecándose ambas líneas en las coordenadas (20,60). Es decir, para la preparación de 100 mL de solución azucarada con una concentración del 50% a partir de una mezcla de soluciones al 35 y 50%, solamente existe una combinación que permite la mezcla. Que consiste en mezclar 20 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60%. Al hacer la interpretación de cada una de las graficas se encuentra que hay una relación inversamente proporcional es decir, conforme aumenta el volumen de la solución disminuye su concentración.

Experiencia en el aula con el problema contextualizado

Al proponer la secuencia didáctica a los estudiantes se encontró que dos equipos lograron obtener el resultado además pudieron transitar entre los diferentes registros por lo que se puede decir que se apropiaron del conocimiento (Duval, 1999). El tercer equipo abandonó la actividad.

Conclusiones

Los avances de la presente investigación permiten hasta el momento llegar a las conclusiones siguientes:

El proponer en la clase de matemáticas problemas en el contexto profesional o técnico de los alumnos permite que ellos se involucren en su resolución.

Los problemas contextualizados posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.

Durante la puesta en escena de la propuesta didáctica se advirtió que está fuertemente arraigado el uso del registro gráfico restándole importancia al registro gráfico.

Los alumnos logran pasar del registro gráfico al algebraico y viceversa, sin embargo, no entienden el porqué hacerlos para usos prácticos, debido a que solo con el registro algebraico pueden dar solución a los problemas planteados.

Referencias bibliográficas

Camarena, P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. *XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.* , 123-153. México.

Camarena, P. (2002). *La matemática en el contexto de las ciencias: Fase didáctica.* En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (1)* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7 (1)*, 49-78

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN EN EL ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO UNIFORME

Marco Antonio Hernández Rodríguez, Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional México
marcoisai@hotmail.com, marcoisai25@yahoo.com.mx, pcamarena México @ipn.mx
Campo de investigación: Matemática en contexto Nivel: Superior

Resumen. *En este momento en el salón de clases se están impartiendo los cursos de ecuaciones diferenciales como una serie de procedimientos los cuales están destinados a resolver propiamente las ecuaciones diferenciales, es decir que el objetivo final de los procedimientos usados en los cursos de ecuaciones diferenciales es obtener la solución general y particular de la ecuación diferencial proporcionando las condiciones iniciales. Tomando como base este contexto se desea realizar una propuesta nueva de enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. La finalidad del trabajo de investigación es el diseño una serie de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física, tomando en cuenta los conocimientos previos, las representaciones, así como las creencias de los alumnos.*
Palabras clave: matemáticas en contexto, ecuaciones diferenciales, física

Introducción

La investigación se centra en el diseño, prueba e implementación de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden en el contexto del análisis del movimiento uniforme. Para ello se toma la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias que define una línea de investigación que aborda la desvinculación de la matemática con las demás ciencias que la requieren. En este ámbito que se quiere dar mayor significado a los contenidos matemáticos, esto aunado a que en la mayoría de las materias de matemáticas se ven muchos procedimientos los cuales tienen poco o ningún significado para los alumnos(Ross,1994),(Zill, 2006). Además, el profesor limita la enseñanza a las aplicaciones que están ubicadas mucho después de enseñar los temas del programa de estudio, por eso es necesario rediseñar nuevos tipos de cursos para la enseñanza de las matemáticas y su marco real de una situación que en la matemática en el contexto de las ciencias se le denomina “situación problemática”.

La preparación de los futuros profesionales de acuerdo a una matemática contextualizada en campo específico de especialización, les permitirá tomar las mejores decisiones en la área particular donde se desempeñen.

Uno de los temas de importancia es el de las ecuaciones diferenciales, y dentro de éstas se encuentran las más simples que son las ordinarias de primer y segundo orden**.** Por otro lado, la derivada y la integral son fundamentales para el entendimiento de las variables y su comportamiento de cambio en el tiempo de cualquier fenómeno físico; como ejemplo veamos la velocidad y la aceleración de un cuerpo, donde estos fenómenos los podemos representar mediante ecuaciones diferenciales, las cuales se pueden presentar como un modelo matemático que aproxima y define más al comportamiento del fenómeno físico en la realidad (Alonso, 2000).

Es por estas razones que proponemos trabajar las ecuaciones diferenciales en el salón de clases, tratando de inmiscuir al alumno en problemáticas reales, las cuales permitan una mayor fijación del conocimiento matemático.

Dentro del proceso de la investigación que nos ocupa planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general

"Diseñar una serie de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física, tomando en cuenta los conocimientos previos del estudiante, las representaciones de las ecuaciones diferenciales, así como las creencias de los alumnos"

Objetivos particulares

Para poder lograr el objetivo general planteado anteriormente se definen las objetivos particulares por lograr durante la investigación.

A) Determinar las condiciones bajo las cuales se presentan los aprendizajes significativos utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden en la representación del desplazamiento de la partícula en el plano coordinado en el contexto de la física.

B) Evaluar la relación cuantitativa y cualitativa entre las ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden del movimiento en el plano coordinado.

C) Analizar las diferentes formas que usan los alumnos en la representación de un problema de movimiento en el plano coordinado usando las ecuaciones diferenciales.

D) Determinar cuales son las estrategias utilizadas por los alumnos en la de solución de problemas de movimiento en el plano coordinado utilizando las ecuaciones diferenciales.

E) Evaluar cuales son las creencias de los alumnos en relación con las ecuaciones diferenciales y su relación con el movimiento en el plano coordinado.

F) Analizar los aprendizajes de los alumnos usando ejercicios preparados en la enseñanza del movimiento en el plano coordenado.

Los objetivos particulares antes mencionados tienen la intención de guiar el trabajo hacia distintos ámbitos que seguirá la investigación en cuanto a los elementos que tratará y serán fundamentales. La evaluación se centrará en varios aspectos importantes como: aprendizaje y comprensión humana, epistemológica, heurística de la solución de problemas, creencias del alumno en cuanto a los problemas y soluciones, así como las representaciones que hacen los alumnos de las ecuaciones diferenciales aplicadas en un fenómeno físico.

Metodología

La metodología a seguir será la determinada por la fase didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, denominada Matemáticas en Contexto (Camarena 1984,1987, 1990, 1994), cual consiste de los siguientes pasos:

1.-Identificación de los problemas a abordar.

2.-Planteamiento del problema.

3.-Determinación de las variables y las constantes del problema.

4.-Incorporación e los temas y conceptos matemáticos.

5.-Determinación del modelo matemático.

6.-Solución matemática del problema.

7.-Determinación de la solución requerida por el problema.

8.-Interpretación de la solución en términos del problema.

9.-Descontextualización de la matemática.

Como parte del primer paso, se llevó a cabo un análisis de los programas de estudio de carreras de ingeniería, identificándose los temas que utilizan las ecuaciones diferenciales. Posteriormente se procedió a realizar un análisis de los textos de las siguientes asignaturas: teoría electromagnética, electricidad y magnetismo, dinámica de fluidos, cinemática, estática y dinámica; a través del análisis de los textos se identificaron los problemas que se emplearían en los siguientes pasos de la metodología.

Se trabajó sobre el diseño varias actividades de aprendizaje y se consideraron las variables fundamentales utilizadas en la descripción de los fenómenos físicos tales como el desplazamiento, velocidad y aceleración.

Para justificar el diseño de las actividades didácticas se dividieron éstas en varias fases las cuales incluyen: conocimientos previos de los alumnos y contextualización de la actividad como se muestra en la siguiente tabla.

Actividad didáctica	Fases de la actividad
Desplazamiento	Fase 1
	Fase 2
Velocidad	Fase 1
	Fase 2
Aceleración	Fase 1
	Fase 2
	Fase 3

La necesidad de introducir actividades específicas en el diseño se justifico mediante la evaluación de los componentes cognitivo, didáctico y epistemológico como se observa en la siguiente tabla:

Pasos utilizados en el diseño de la actividad desplazamiento según la Matemática en Contexto				
Componentes consideradas en el análisis y diseño de las actividades didácticas: C = Componente cognitiva. D = Componente didáctica. E = Componente epistemológica				
Fase 1 **Conocimientos previos de los alumnos**				
1.-Representación del movimiento de una partícula.	Observaciones	Componente		
2.-Determinación de variables y constantes del problema. 3.-Determinación del modelo matemático.		C	D	E
Actividad 1	E-Deducir diferencias de variación lineal con el apoyo gráfico. D-Relacionar las diferencias deducidas con el fenómeno físico.		X	X
Actividad 2	C-Deducir un modelo matemático de las diferencias lineales.	X		
Actividad 3	E-Deducir diferencias de variación angular con el apoyo gráfico. D-Relacionar las diferencias deducidas con el fenómeno físico.	X	X	
Actividad 4	C-Deducir un modelo matemático de las diferencias angulares.	X		
4.-Solución matemática del problema.				
Actividad 1	E-Deducirá la diferencia de variación lineal del parámetro tiempo. D-Relacionar la variación del tiempo con el fenómeno de desplazamiento del cuerpo.		X	X
Actividad 2	E-Deducir las diferencias de variación lineal del parámetro desplazamiento. D-Relacionar las variaciones de desplazamiento con el fenómeno de desplazamiento del cuerpo		X	X

Finalmente se aplicaron las actividades con la metodología de la Matemática en Contexto.

La aplicación de la actividad didáctica se realizó con un grupo de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química (I.Q.) y un grupo de sétimo semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (I.M.E.) de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (F.E.S.C.), la materia que toman los alumnos de Ingeniería Química en el momento de la aplicación es Ecuaciones Diferenciales. Es conveniente mencionar que la actividad de aceleración que resolvieron en la carrera de Ingeniería Mecánica se realizó en dos sesiones de 1 hora 30 minutos esto debido a la mayor extensión de la actividad.

Conclusiones sobre las actividades didácticas aplicadas

En este apartado se realizó un análisis de las respuestas de los estudiantes a la luz del marco teórico y los objetivos planteados al inicio del trabajo, esto nos permitirá encontrar evidencias que muestren cómo la matemática en el contexto permite construir actividades didácticas que toman en cuenta conocimientos previos, representaciones y creencias, y al mismo tiempo ayuda al estudiante a la comprensión del significado y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales lineales.

1.-Se observó que las condiciones iniciales del problema si bien son inherentes a la definición del problema, éstas no tienen un significado práctico en cuanto a la determinación de una función como resultado de la integración, es decir, las condiciones iniciales toman significado cuando el alumno ha encontrado la ecuación general del problema y desea determinar la función particular, lo cual le llevará a la determinación de la constante de integración en el proceso de solución de la ecuación diferencial. En realidad cuando se proporcionan las condiciones iniciales en un fenómeno determinado el alumno no tiene una visión global de lo que representarán en el fenómeno particular que se trata de describir.

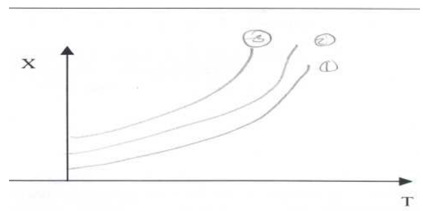
2.-En el desarrollo de una actividad grupal es necesario estar muy al pendiente de cualquier posible desviación que pueda presentarse, esto puede alterar el desarrollo de la misma y alterar los resultados que se esperan obtener en las hipótesis de la experimentación, es decir, que el grupo puede plantear un modelo incorrecto de la solución por una equivocada percepción grupal, también es importante verificar que el grupo haya terminado completamente la actividad.

3.-Se comprobó que es recomendable la colocación de temas relacionados con las diferencias sucesivas obtenidas de la variación de los parámetros manejados en el fenómeno en cuestión.

Esto permitió hacer conciencia en el alumno del concepto de variabilidad del parámetro y asociarlo con el concepto de diferencial que tiene cualquier variable de un fenómeno en un tiempo determinado.

4.-Se observó una clara conciencia del alumno en cuanto a la resolución de una ecuación diferencial, aunque se obtuvieron resultados muy pobres en la claridad del significado de la solución particular asociada con el conjunto de gráficas definidas en la solución general de la ecuación diferencial. Esto comprueba cuál es la influencia que tienen los cursos de ecuaciones diferenciales con pocas vinculaciones en otras ciencias. Se muestra una incapacidad de los alumnos de percibir el comportamiento visual de las funciones, esto causado por el interés que tiene los cursos de matemáticas sobre los aspectos algorítmicos y donde el aspecto gráfico está ausente en gran parte del discurso matemático escolar, esta evidencia se muestra a continuación.

Respuesta de alumno sobre el significado de la solución general de una ecuación diferencial.



5.-El alumno tiene claro el procedimiento de solución de una ecuación diferencial, pero tiene un significado parcial en cuanto al significado de la solución obtenida y aplicada al fenómeno particular tratado.

6.-La actividad desarrollada provocó en el alumno un nuevo significado en la relación entre los aspectos algebraico y geométrico lo cual le lleva a la comprensión de la solución de una ecuación diferencial en el contexto de la física.

7.- Es evidente que la actividad didáctica de aceleración necesita mayor tiempo en su resolución debido a la extensión de la misma, esta actividad maneja algunas actividades equivalentes a las contenidas en las actividades de desplazamiento y velocidad aunque la misma actividad de aceleración goza de independencia propia.

Referencias bibliográficas

Alonso, M. y Finn, E. J. (2000). *Física, volumen I: mecánica y termodinámica*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Camarena, P. (1984). El currículo de las matemáticas en Ingeniería. Documento presentado en *Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el I.P.N.*, IPN, México.

Camarena, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*, Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Camarena, P. (1990). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctr*icas, Documento presentado en Esime-IPN, México.

Camarena, P. (1995). La enseñanza de la matemática en el contexto de la ingeniería. *Resúmenes del XXXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, Colima, México.

Ross, C. (1994). *Differential Equations.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Zill, D.G. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la fronter.* México: Thomson.

UN ESTUDIO DIDÁCTICO DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA INGENIERÍA EN EL CONTEXTO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ernesto Bosquez, Javier Lezama, César Mora
Instituto Tecnológico de Toluca, México
Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional.
ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com, cem136@gmail.com
m
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación, se presenta un rediseño del discurso escolar para el aprendizaje del teorema de convolución en algunas escuelas de ingeniería, en el contexto de la transformada de Laplace. Con la perspectiva de una aproximación socioepistemológica se propone dar un sentido y significación a la algoritmia del teorema de convolución que usualmente se practica en los cursos de ecuaciones diferenciales y que produce una desarticulación entre los objetos matemáticos involucrados. Nuestra propuesta permite articular a estos conocimientos matemático, es decir, la ecuación diferencial, la transformada de Laplace, teorema de convolución la solución de la misma.*
Palabras clave: socioepistemología, rediseño del discurso matemático escolar, algoritmia

Introducción

Lo que conocemos actualmente como enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería, puede describirse de la manera siguiente; se muestra el teorema de convolución y a continuación se da un ejemplo en donde se resalta el aspecto algorítmico, dejando en los estudiantes una desarticulación entre los objetos matemáticos involucrados, es decir, sin mostrar un sentido y significación en su relación con la ecuación diferencial, la transformada de Laplace y la convolución misma, por ejemplo, dentro del aula se le indica al estudiante que resuelva el problema siguiente.

Usando la transformada de Laplace y el teorema de convolución, resolver la ecuación diferencial, $y'' + y = \cos t$ *con las condiciones iniciales* $y(0) = y'(0) = 0$.

La manera típica de resolver esto (Proceso mencionado), es como sigue; se aplica este operador en ambos miembros de la ecuación diferencial dada, es decir:

$$s^2 \mathcal{L}[y(t)] - s\,y'(0) - y(0) + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\cos t], \qquad \text{(I.1)}$$

simplificando se llega a:

$$\mathrm{L}\left[y(t)\right]=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}, \qquad \text{(I.2)}$$

aplicando el teorema de convolución se obtiene que:

$$y(t)=(sen\,t)*(cos\,t), \qquad \text{(I.3)}$$

y por tanto la solución corresponde a:

$$y(t)=\frac{1}{2}t\,sen\,t\,. \qquad \text{(I.4)}$$

En este ejemplo, el docente reconoce comúnmente lo complejo que es para el estudiante entender o bien asimilar dicho conocimiento, ya que el estudiante no encuentra una articulación entre la EDO, el teorema de convolución y la solución de la misma, es decir el estudiante opera de manera algorítmica sin darle un sentido a los objetos matemáticos mencionados.

Este proceso puede representarse de la manera siguiente

EDO → T L → T C → SOL.

Figura No. 1 Proceso de enseñanza del TC dentro del salón de clase

El cuadro negro queremos reflejar la desarticulación que muestra el estudiante ante los demás objetos matemáticos involucrados y en donde queda sólo la algoritmia sin que sea posible un papel articulador del teorema con los demás elementos del problema. A partir de esto, establecemos dos vertientes importantes para nuestra investigación; el sentido del teorema y su génesis así el sentido de la algoritmia asociada al mismo, de tal manera que esta última relacione y articule los objetos matemáticos involucrados. Lo anterior permite plantearnos los cuestionamientos siguientes.

¿Qué aspectos del Teorema de Convolución y su génesis, proveen elementos para la construcción escolar de un posible significado en el contexto de las ecuaciones diferenciales?

¿Que sentido o significado es posible dar a esta construcción y la práctica algorítmica escolar asociada?

En nuestra investigación, el enfoque socioepistemológico (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006) nos permitió proponer un rediseño del discurso de la matemática escolar del TC, en dónde se muestra en la vertiente correspondiente a la génesis de este teorema, a través de la dimensión epistemológica; se muestra la complejidad de construir significados del teorema exclusivamente en el contexto matemático en el caso de los estudiantes de ingeniería, hecho que nos orilló a la búsqueda de prácticas sociales (predicción, modelación, etc.,) que permitan construir significados a través de la articulación de mayor número de elementos matemáticos, tales como, la ecuación diferencial asociada a un circuito resistencia inductancia (RC), a la función involucrada en la EDO, la transformada de Laplace, el TC y la solución de la misma.

Desarrollo de la investigación

La enseñanza actual de las EDO, básicamente se realiza en tres escenarios *Algorítmico Algebraico, Geométrico y Numérico* (Artigue y Douady 1995, Hernández 1996). Enfatizándose más el escenario algorítmico algebraico, el cuál puede describirse como el uso de definiciones, teoremas y el cálculo algorítmico de los diferentes conocimientos matemáticos. Lo anterior fundamenta, en parte, nuestro interés por realizar esta investigación centrada en un estudio didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución, en algunas escuelas de ingeniería, en el contexto de la transformada de Laplace. Otro aspecto que complementa la justificación en nuestra investigación corresponde a lo que se presenta en el discurso escolar matemático con respecto a la enseñanza de las EDO, es decir, al resolver una EDO lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes con la transformada de Laplace se tiene que de:

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(t); \quad y(0) = y_0,\, y'(0) = y_1, \tag{1}$$

Se llega a

$$\phi_p = f * g = \mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\mathscr{L}\left(g(t)\right)\right]. \tag{2}$$

Así, la solución de la EDO propuesta sería de la forma:

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_p(t), \tag{3}$$

donde se muestra que se usa necesariamente el teorema de convolución.

Aspectos Cognitivos: En esta dimensión (a través de encuestas y entrevistas) obtuvimos evidencias de una clara carencia de comprensión del teorema y entendiéndose exclusivamente como una regla para operar en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

Aspectos Didácticos: Aquí se muestra que en la práctica docente, la enseñanza del *TC*, corresponde a un discurso ligado básicamente al programa oficial y a los textos usuales de ecuaciones diferenciales que se emplean en las escuelas de ingeniería. Con esta perspectiva nuestra investigación muestra que no hay propuesta didáctica con intención de articular los conocimientos involucrados en la enseñanza del TC.

Aspecto Epistemológico: En esta dimensión nuestra investigación reporta que el conocimiento erudito correspondiente a la génesis del TC fue trabajada por Mellin (1896) cuyo enfoque está dentro de un contexto completamente matemático, esto nos permitió redirigir nuestra atención a darle al TC un sentido y significación a partir su algoritmia. El estudio del trabajo de Mellin nos permite ver que su integral de (convolución) al ser la solución de la EDO, nos permite recuperar ideas que aprovecharemos como elemento articulador en la práctica algorítmica en la solución de la EDO (Bell, 2003).

Aspecto Sociocultural: En este aspecto reportamos que bajo algunas prácticas sociales tales como la predicción y modelación se puedo relacionar los objetos matemáticos involucrados en la enseñanza del TC. Para esto se utilizó un circuito eléctrico RL (ver figura No1).

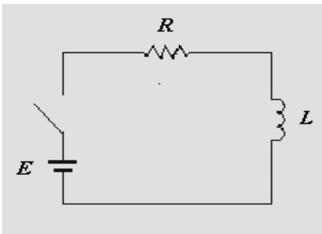


Figura No2. Representación gráfica de un circuito eléctrico RL.

En dónde la práctica social de modelación, permitió relacionar al circuito RL con la siguiente EDO.

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t) \tag{4}$$

Y esta a su vez con la transformada de Laplace, en la forma siguiente.

$$LsF(s)-i(o)+RF(s)=\mathscr{L}\left[E(t)\right]$$
$$F(s)=\frac{\mathscr{L}\left[E(t)\right]}{Ls+R}\quad , \tag{5}$$

Y de aquí su relación con el TC y éste con la solución de la EDO propuesta.

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left[E(t)\right]\cdot\frac{1}{Ls+R}\right]=\frac{1}{L}E\left(t\right)*e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{6}$$

Es en este escenario donde producimos rediseño en el discurso de la matemática escolar haciendo posible que los elementos matemáticos involucrados en la enseñanza del TC sean articulados a través de lo que denominamos prácticas sociales. Estos cuatro aspectos permiten *plantear el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizandolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión"* (*Cantora, et al,* 2006).

La metodología que guía este trabajo es la que corresponde a la Ingeniería Didáctica (Artigue y Douady 1995), cuya caracterización corresponde a:1.- Es una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del Ingeniero.2.- Es una metodología de investigación dentro del campo de la Matemática Educativa. 3.- Sus componentes corresponden a tres fases las cuales se caracterizan en la forma siguiente.

En la Primera Fase: La didáctica se refiere a lo relacionado con el profesor. La Epistemológica está relacionada con el contenido matemático, su origen y desarrollo. La Cognitiva se relaciona con los alumnos, sus habilidades, etc. La Segunda Fase: Se enfoca a la elaboración del modelo que se pretende aplicar en la enseñanza, es decir, se dedica a la determinación del tratamiento del contenido y elección de los medios que se han de incorporar, para el diseño del modelo de enseñanza. Finalmente la Tercera Fase: Es necesario dterminar las variables a controlar, así como el tipo de muestra a tomar. En el análisis de resultados se contratarán el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori.*

A manera de ejemplo mostramos algunos aspectos aislados del trabajo de investigación. Se aplicaron encuestas a cinco docentes y siete estudiantes, los primeros profesores que usualmente imparten en las distintas carreras de ingeniería, el curso de EDO, y los segundos estudiantes de tales profesores.

1.- El docente se basa en los conocimientos contenidos en los textos típicos, para nuestro caso, el más común es el Zill (1997).

2.- La mayor parte no se detiene en la búsqueda de un significado *TC, sólo se opera con él.*

3.- La práctica de aprendizaje se reduce al un escenario algorítmico algebraico.

4.- Se considera que la enseñanza del *TC* es bastante abstracta.

5.- Hay un convencimiento de que los estudiantes buscan sólo manejar la aplicación de fórmulas para resolver EDO.

Lo anterior nos permite afirmar que la enseñanza del *TC* en algunas escuelas de ingeniería corresponde a una práctica matemática escolar típica, omitiendo posible articulación con los elementos matemáticos involucrados en la solución de las ecuaciones Diferenciales.

En relación con los estudiantes podemos decir

1.- El estudiante presenta dificultades para enunciar o explicar el *TC*.

2.- No puede establecer relación alguna del TC con otros elementos matemáticos asociados a las ecuaciones diferenciales.

3.- Considera que la enseñanza del *TC* sin sentido, sólo pragmática.

4.- Los ejemplos que dan son en la resolución de algunas EDO lineales con coeficientes constantes.

5.- Manifiestan que se les debe proveer de un significado del *TC*.

6.- El *TC* se lo enseñan de manera idéntica al contenido del texto escolar, Zill; enunciado del teorema, definición y un ejemplo.

Lo anterior evidencia el proceso de aprendizaje del TC desarticulado de los demás conocimientos involucrados en las ecuaciones diferenciales.

La conjunción de las exploraciones en las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social nos han proporcionado elementos para elaborar una *situación problema* diseñada en un contexto electrónico que lleve a una ecuación diferencial como modelo de una situación electrónica (un circuito) que permita a su vez poner en escena prácticas referidas así como las herramientas pertinentes. Para nuestro caso empleamos el software Or Cad Release 9, que permitan construir un sentido y significado de la algoritmia del *TC.*, así como el trabajo de Gardner (1942) Esta práctica escolar se divide en tres partes:

La primera el estudiante interpretará un significado de la EDO que modela un circuito *RL*. La segunda el estudiante interpretará un significado analítico del *TC*. en un circuito *RL*. La tercera parte el estudiante interpretará un significado geométrico del *TC*, usando un circuito eléctrico *RL.*

Conclusiones (parciales)

1.- Nuestra investigación explora la posibilidad de proveer de sentido y significado a su algoritmia, que permita al estudiante vincular a los conocimientos matemáticos: EDO, TC y solución de la misma, hecho contrario a una enseñanza típica de una matemática escolar..

2.- La postura de algunos autores es que consideran que la matemática sólo es una herramienta para la ingeniería (Zill 2007), en nuestro trabajo de investigación se amplía este hecho. Por ejemplo, para fundamentar lo anterior considere los circuitos *RL* de la figura C.1.

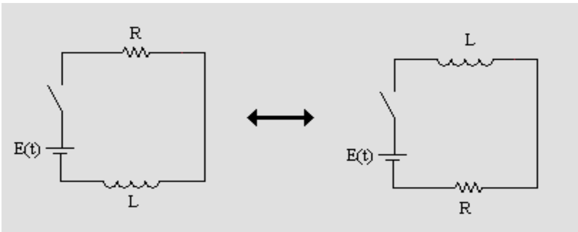


Figura C1. Circuitos RL dónde permutan el orden de sus componentes eléctricos.

¿Qué diferencia hay al resolver el circuito de la figura C.1 y C.2? Quizá para alguien esto no tenga sentido alguno, sin embargo este cuestionamiento conduce a reflexionar sobre la conmutatividad de la suma por un lado y por otro de la conmutatividad de la operación de convolución. De lo anterior puede inferirse que:

$$i(t)=\frac{E}{L}\left(1*e^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E}{L}\left(e^{-\frac{R}{L}t}*1\right). \qquad \text{(C1)}$$

De aquí se deduce:

$$f*g \quad = \quad g*f\,. \qquad \text{(C2)}$$

Es decir, que a partir de una problemática que surge dentro de una práctica escolar, ésta nos permite, bajo las restricciones que por naturaleza deben involucrarse en la misma, a descubrir proposiciones dentro de la ciencia matemática de tal manera que éstas aseveraciones puedan avanzar a la misma, una vez que sean demostradas con el estricto rigor que una matemática situada para una necesidad específica exige. Esto es algo que nuestra investigación busca responder.

Referencias bibliográficas

Artigue M., Douady R (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la Investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bell, E. (2003). *The Development of Mathematics*. USA. Mc Graw-Hill.

Cantoral R., Farfán, Lezama J., y Martinez G. (2006). Socioepistemología y Representación, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Núm. Especial*, 82-102.

Gardner M. (1942). *Transients in Linear Systems*, New Jersey: Jhon Wiley & Sons.

Hernández A. (1996). *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numéricos, Algebraico y Gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias.*, Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Zill, D. (2007). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Mc Graw Hill.

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA INTEGRANDO FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA

Carmem Teresa Kaiber, Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Tania Elisa Seibert
Universidade Luterana do Brasil, Canoas/RS Brasil
kaiber@ulbra.br, claudiag@ulbra.br, taniaseibert@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Este artigo apresenta os resultados da pesquisa envolvendo formação inicial e continuada com professores de Matemática, desenvolvida junto a alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Canoas, Rio Grande do Sul, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da mesma universidade, e professores de Matemática do Ensino Fundamental da rede pública de ensino, do município de Canoas/RS. As idéias metodológicas que nortearam essa investigação foram o interesse concentrado nas ações e nas interações cotidianas, com foco em uma perspectiva qualitativa, nos moldes de uma pesquisa-ação.*

Palabras clave: Formação inicial, formação continuada, Educação Matemática, projetos de trabalho, pesquisa-ação

Introdução

Esta investigação se propôs a ampliar e consolidar um espaço para discussão e aprofundamento de temas de interesse para o ensino e a aprendizagem da Matemática, estreitando laços entre a teoria e a prática da sala de aula, propiciando aos educadores um aperfeiçoamento que possibilite uma melhora no desempenho profissional, buscando o perfil de um professor interdisciplinar e investigativo, ampliando as possibilidades de trabalhar com estratégias metodológicas diferenciadas e motivadoras.

Buscou, junto aos professores investigados, a integração de temas de relevância social e o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos, permitindo, dessa forma, integrar diferentes campos da Matemática para resolver problemas, interpretar dados, elaborar modelos, compreender e elaborar argumentações matemáticas, através da elaboração de um projeto com o tema Educação Ambiental.

Formação inicial e continuada

A formação de professores de Matemática é uma preocupação da área de Ciências e Matemática, e isto, se reflete na realização de pesquisas como Bicudo (1999), Cury (2001) e Groenwald, Kaiber e Seibert (2008).

Para Groenwald e Kaiber (2002) refletir sobre a formação de professores de Matemática implica discutir as características que definem o docente como profissional interessado e capacitado à criação e adaptação de métodos pedagógicos ao seu ambiente de trabalho, utilizando os conhecimentos matemáticos para compreensão do mundo que o cerca e despertando no aluno o hábito do estudo independente e a criatividade.

Segundo as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Licenciatura (BRASIL, 2001), em Matemática os egressos de um curso de Licenciatura devem ter, além de uma sólida formação de conteúdos matemáticos, uma formação pedagógica dirigida a sua prática que possibilite tanto a vivência crítica da realidade como a experimentação de novas propostas que considerem a evolução dos estudos da Educação Matemática e uma formação geral complementar envolvendo outros campos do conhecimento, necessários ao exercício da profissão.

Nesse sentido as Diretrizes Curriculares indicam que os profissionais formados nos cursos de Matemática devem possuir uma visão abrangente do papel social do educador, abertura para aquisição e utilização de novas idéias e tecnologias, visão história e crítica da Matemática, capacidade de aprendizagem continuada e de trabalhar em equipes multidisciplinares, capacidade de comunicar-se matematicamente e compreender Matemática, de estabelecer relações com outras áreas do conhecimento, de utilizar os conhecimentos para compreensão do mundo que o cerca, capacidade de criação e adaptação de métodos pedagógicos ao seu ambiente de trabalho, de expressar-se com clareza, precisão e objetividade. Deve, também, ser capaz de despertar o hábito da leitura e do estudo independente e incentivar a criatividade dos seus alunos.

A formação continuada faz parte de um processo permanente de desenvolvimento profissional, que deve ser assegurado a todos os professores em exercício. Deve propiciar atualizações, aprofundamento das temáticas educacionais, reflexão sobre a prática educativa, promovendo um processo constante de auto-avaliação que possibilite a construção contínua de competências profissionais.

Essa investigação desenvolveu ações que articularam a pesquisa, o aprofundamento teórico, atividades práticas e a análise das atividades de sala de aula como forma de proporcionar um avanço nas questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho do professor promovendo uma experiência de trabalho conjunto entre professores e futuros professores de Matemática.

Projetos de trabalho

A metodologia de projetos ultrapassa o campo específico de uma disciplina e, na opinião de Villela (1998), apresenta-se como alternativa metodológica que permite integrar conteúdos de diferentes disciplinas, que se relacionam naturalmente, na tentativa de solucionar e compreender um problema. Os projetos são propostas pedagógicas, interdisciplinares, compostas de atividades a serem executadas por alunos, sob orientação do professor, destinadas a criar situações de aprendizagem mais dinâmicas e efetivas, através do questionamento e da reflexão. Conforme Martins (2001), os projetos de trabalho contribuem para que os alunos participem e se envolvam em seu próprio processo de aprendizagem e o compartilhem com outros colegas, desenvolvendo novas competências nos alunos e novas estratégias no professor.

No desenvolvimento de um projeto, é possível estabelecer relações entre a teoria e a prática da aprendizagem (MARTINS, 2001), adotar uma atitude positiva de trabalho e de curiosidade frente ao novo (VILLELA, 1998) e ampliar as perspectivas e os objetivos da educação.

Segundo Seibert (2005) alguns educadores encontram problemas para desenvolver um projeto de trabalho, pois não conseguem visualizar no seu desenvolvimento uma forma de trabalhar com conteúdos específicos de sua disciplina. Entretanto, afirma que os projetos de trabalho podem ser utilizados para explorar conceitos e conteúdos específicos, além de criar espaços de reflexão.

A implementação da metodologia de projetos, no cotidiano escolar, permite que a escola, na opinião de Araújo (2003), ultrapasse a simples coleta de informações, abrindo espaço para a análise da sua validade, aprimorando a habilidade de crítica e interpretação, interferindo na formação de valores do educando, pois cria um ambiente favorável a discussão, reflexão e crítica, permitindo que o aluno chegue à ação, podendo através da reflexão modificar uma situação (MARTINS, 2001).

Nos trabalhos de Hernández (1998), os projetos são procedimentos que dizem respeito ao processo de dar forma a uma idéia que está no horizonte, que favorecem o ensino por compreensão, a subjetividade, a contextualização, o trabalho ativo por parte do aluno e a atitude de pesquisa, pois possibilitam a aquisição de estratégias de conhecimento que permitem avançar, pois, além de interpretar os dados, devem apresentar argumentos a favor do tema pesquisado ou contra ele.

Porém, para trabalhar com projetos, é necessário que se planejem e elaborem diferentes etapas, interligadas e que levem a um determinado fim. Segundo Frey, citado por Mora (2004), algumas etapas devem ser necessariamente seguidas: definição do tema, discussão e aprofundamento do tema escolhido, elaboração de um cronograma de ações, desenvolvimento do projeto, apresentação dos resultados à comunidade.

Para finalizar, destaca-se a importância da apresentação dos resultados à comunidade escolar, momento que permite a reflexão e outra oportunidade aos participantes de discutirem, novamente, todas as fases de desenvolvimento do projeto, com a finalidade de avaliação. Nessa etapa os participantes discutem ampla e abertamente tudo o que aconteceu no desenvolvimento do projeto e mediante a crítica e a autocrítica, os alunos e os professores expõem seus pontos de vista sobre detalhes que influenciaram de maneira determinante o processo e o resultado final.

Objetivos

Esta pesquisa teve como objetivo central desenvolver ações em educação inicial e continuada articulando a pesquisa, o aprofundamento teórico, a reflexão sobre atividades práticas e análise das atividades na sala de aula, como forma de proporcionar um avanço na investigação das questões relacionadas ao desenvolvimento teórico e prático do trabalho do professor, promovendo sua formação, tanto inicial, quanto continuada.

Para atingir esse objetivo geral traçaram-se os seguintes objetivos específicos: investigar o desenvolvimento das competências necessárias à prática profissional do professor de Matemática e os desafios inerentes a sua profissão, tanto em professores em formação como em exercício; implementar uma experiência integrando a formação inicial com a formação continuada em uma escola da rede pública estadual de Canoas e alunos do Curso de Matemática Licenciatura.

Metodologia da pesquisa

A proposta do trabalho foi a de investigar a prática profissional em Matemática e os desafios inerentes a essa prática, visando o desenvolvimento de uma experiência integrando a formação inicial e continuada.

A pesquisa proposta foi realizada nos moldes de uma pesquisa-ação participativa. Segundo Lewin citado por Mora (2004), um dos criadores desse tipo de investigação, a pesquisa-ação representa o método mais apropriado para conhecer, interpretar e transformar os fatos reais e com ele elaborar construtos teóricos que podem explicar, aproximadamente, outros problemas similares em contextos com características semelhantes, ainda que este não se constitua no propósito principal da investigação–ação participativa.

Essa investigação está constituída por quatro momentos fundamentais: planejamento, ação, observação e reflexão sobre os resultados da ação.

As discussões foram realizadas em três etapas diferenciadas e contínuas, durante os 9 meses de desenvolvimento da pesquisa: Grupo A (meta discussão no grupo de pesquisa GECEM), grupo B (discussão participativa com o grupo de alunos de formação inicial), grupo C (grupo de formação continuada e de implementação do projeto).

A investigação foi desenvolvida por meio de três ações paralelas que estão descritas a seguir.

1) Encontros mensais entre professores e pesquisadores (grupo C): a implementação da experiência foi aplicada na Escola Estadual Álvaro Moreira, pois essa demonstrou, através da sua direção e supervisão pedagógica, interesse em aprofundar os momentos de reflexão pedagógica com seus professores. Participaram desse trabalho todos os professores unidocentes (Professor Unidocente significa que um professor atua em todas as disciplinas curriculares na classe de alunos.) das séries iniciais do Ensino Fundamental e os professores de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, totalizando 10 professores dessa escola.

Os encontros, de 4 horas aula, ocorreram entre os meses de março a novembro de 2007, e foram marcados como espaço de discussão e reflexão sobre as ações desenvolvidas em sala de aula, o planejamento conjunto de ações futuras que nortearam a aplicação de um projeto de trabalho, com ênfase no tema Educação Ambiental e nos conteúdos matemáticos relacionados ao desenvolvimento do mesmo.

Optou-se, conjuntamente, em desenvolver esse projeto de trabalho em todas as turmas da escola, e que culminaria na apresentação dos resultados em uma feira na escola, com exposição dos trabalhos para a comunidade.

2) Reuniões entre os alunos da licenciatura e as pesquisadoras (grupo B): foram realizadas reuniões semanais com os alunos do curso de Matemática, no total de 12 participantes e o GECEM.

Nesses encontros acontecia o planejamento das aulas a serem desenvolvidas com os alunos da escola pesquisada, as discussões sobre as suas experiências em sala de aula, a reflexão sobre as ações desenvolvidas e planejamento das ações futuras.

3) Reuniões entre as pesquisadoras (grupo A): o GECEM reunia-se quinzenalmente para discussão, reflexão e planejamento das futuras ações, constituindo-se na meta discussão do processo.

Análise dos resultados

As reuniões ocorridas, paralelamente, envolvendo os professores da escola Álvaro Moreira e o GECEM, os alunos do curso de Licenciatura de Matemática da ULBRA e o GECEM foram marcadas por momentos de reflexão sobre o planejamento, a prática e o trabalho com os alunos referentes à prática da sala de aula.

Todas as ações executadas foram planejadas antecipadamente, colocadas em ação e avaliadas conjuntamente. A partir dessa troca de experiências e dos resultados obtidos ao longo do processo as novas ações eram planejadas e executadas.

Na análise dos resultados dessa pesquisa salientam-se alguns aspectos, considerados relevantes por todos os envolvidos.

Destacam-se, tanto nos professores de formação continuada quanto nos de formação inicial, a evolução das habilidades que levam as competências de: organizar e dirigir situações de aprendizagem, administrar a progressão da aprendizagem, envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho, trabalhar em equipe, informar e envolver os pais e administrar a própria formação. Para Perrenoud (2000) competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações, etc.) para solucionar uma série de situações.

As reuniões entre as professoras pesquisadoras se caracterizaram como um espaço de reflexão sobre os desafios comuns para alunos e professores, na busca de integração e do objetivo comum de promover aprendizagens mais significativas para os alunos, envolvendo-os ativamente e respondendo questões sobre a utilização de conceitos matemáticos em sua vida futura. O projeto de trabalho permitiu que professores e alunos se tornassem parceiros na busca de soluções e os alunos utilizassem os conceitos de diferentes áreas do conhecimento na resolução dos problemas que eles mesmo encontraram no desenvolvimento de suas pesquisas.Em relação à formação inicial destaca-se o envolvimento dos participantes no planejamento dos recursos e atividades didáticas para aplicação em sala de aula. Os alunos se depararam com uma realidade por eles desconhecida, o dia-a-dia de uma sala de aula, e encontraram dificuldades em executar o planejamento, principalmente, pela falta do domínio de classe no que se refere à disciplina.

As reuniões de avaliação, sobre as suas experiências em sala, foram pautadas em discussões sobre essas dificuldades e na busca de soluções. Em comum foi decidido o agrupamento dos alunos em grupos de trabalhos, distribuídos através de senhas, envolvendo desafios matemáticos, o estabelecimento de normas de convivência e a organização e limpeza do espaço físico. Essas medidas se mostraram eficientes e foram incorporadas pelos alunos e professores da escola.

Em relação à formação continuada, inicialmente, os professores da escola demonstraram insegurança em relação ao desafio de desenvolver um planejamento mais aberto. Durante o desenvolvimento de um projeto de trabalho não é possível antecipar os acontecimentos. Outra preocupação dos professores foi referente aos conteúdos matemáticos, pois temiam não encontrar formas de explorá-los dentro do tema escolhido pelos alunos.

Para buscar alternativas de trabalho foi traçado um cronograma com metas específicas como período de motivação dos alunos frente ao tema do projeto, coleta de material de pesquisa, levantamento de dados, entre outros, salientando que as ações para colocar em prática as metas de cada professor, podem ser traçadas a longo prazo, desde que exista flexibilidade frente às situações imprevisíveis levando a um planejamento dinâmico e flexível, pautado sobre os conhecimentos adquiridos e a novos problemas que surgem no decorrer do desenvolvimento dos trabalhos.

O grupo de professores à medida que o projeto ia tomando forma, demonstrou maior segurança, principalmente sobre como inserir os conteúdos matemáticos nos trabalhos e se posicionando frente a essa forma de planejamento, demonstrando grande comprometimento com a proposta.

Embora a preocupação central da pesquisa estivesse na análise das ações durante todo o processo, ressalta-se, também, como resultado o produto final do projeto a feira, intitulada "Matemática Viva na escola Álvaro Moreira – I Feira de Matemática – 2007", momento em que todas as turmas da escola, junto com seus professores, mostraram à comunidade escolar os resultados dos trabalhos. Os professores da escola confeccionaram camisetas para o dia do evento, e presentearam o grupo envolvido. Esse fato foi uma manifestação de motivação e demonstrou a alegria dos professores pelo desenvolvimento do trabalho e dos resultados obtidos

O tema central escolhido foi Educação Ambiental, e os subtemas foram: aquecimento global, preservação de espécies animais, tratamento da água, reciclagem de lixo, desperdício de água, combustível e meio ambiente.

Todas as turmas destacaram, na feira, os conteúdos matemáticos envolvidos em seus trabalhos. No encontro de avaliação entre todos os participantes envolvidos foi realizada uma análise dos conceitos matemáticos e estatísticos mais presentes nos trabalhos, evidenciando:

a) Resolução de problemas: todos os grupos inseriram em seus trabalhos problemas com base nos seus dados de pesquisa.

b) Tabulação de dados: todas as séries envolvidas no projeto aplicaram questionários sobre diferentes temas e tabularam os dados coletados, envolvendo cálculos de razão, proporção, regra de três e porcentagem.

c) Gráficos: desde as séries iniciais até as séries finais do Ensino Fundamental, os grupos optaram por utilizar gráficos para demonstrar os resultados de suas pesquisas.

d) Determinação de média aritmética, moda e mediana: as turmas de 7ª e 8ª séries, calcularam e interpretaram resultados encontrados em suas pesquisas

e) Jogos: alguns grupos construíram jogos envolvendo o tema da sua pesquisa e a Matemática.

f) Sistema de unidade de medidas: em diferentes situações de contextualização de problemas os grupos utilizaram conversão de medidas para resolver questões levantadas em suas pesquisas.

Destaca-se a participação da comunidade escolar na apresentação dos trabalhos, o que demonstrou envolvimento entusiasmo e motivação.

Referencias bibliográficas

Araújo, U. (2003). Temas transversais e a estratégia de projetos. São Paulo: Moderna.

Bicudo, M. A. V. (1999). Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP.

Brasil. (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: MEC/CNE.

Cury, H. N. (org). (2001). Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS.

Groenwald, C. L. O. Kaiber, C. (2002). Educação matemática na formação dos professores. *Educação Matemática em Revista – RS 4*, 64-66.

Groenwald, C. L. O. e Kaiber, C. T. e Seibert, T. E. (2008). Formação em Matemática: uma experiência integrando formação inicial e continuada. Permitido dentro [CD-ROM], Recife, Anais do 2 SIPEMAT.

Hernández, F. (1998). Transgressão e mudança na educação: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed.

Martins, J. S. (2001). O trabalho com projetos de pesquisa: do ensino fundamental ao médio. Campinas, SP: Papirus.

Mora, D. (2004). Aprendizage y enseñanza: projectos y estratégias para uma educación matemática del futuro. La Paz: Campo Iris.

Perrenoud, P. (2000). *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Seibert, T. E. (2005). *Matemática e Educação Ambiental: uma proposta com projetos de trabalho no ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado não publicaram. Universidade Luterana do Brasil.

Villela, J. (1998). *Piedra libre para la matemática.* Buenos Aires: Aique.

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL FENÓMENO SISTEMA MASA-RESORTE MEDIANTE CALCULADORA GRAFICADORA

Maximiliano de Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega, Álvaro Encinas Bringas, Ruth E. Rivera Castellón
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California México
maxito6782@hotmail.com, maximilianofuentes@uabc.mx
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta un reporte de avance de un estudio explorativo y comparativo, aplicado con dos formas de estructurar el proceso de enseñanza de las matemáticas, particularmente sobre el concepto sistema masa-resorte en un programa de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California: a través de un esquema tradicional y mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora graficadora. Dicha estrategia es diseñada e implementada a partir de las teorías cognitivas (Duval, 1999) y (Hitt, 1991, 2003) y los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998) y (Laborde, 2003) y su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*
Palabras clave: calculadora, resorte, ecuaciones diferenciales

Las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión con la cual sea posible además de operar o trabajar en las distintas representaciones, facultar el estudio y tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones.

En la formación del ingeniero alrededor del 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, álgebra lineal, matemáticas I, II, y III, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas mas. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es el denominado sistema masa-resorte.

El sistema mencionado tiene diversas implicaciones prácticas y profesionales, los sistemas de amortiguamiento de vehículos de transporte cotidiano y de carga, como tractocamiones, autobuses y aviones, presentan de manera inherente el sistema citado, los análisis sísmicos para estructuras habitacionales, médicas, de negocios, recreación o de otra índole son modelados a través de los sistemas masa-resorte, la fabricación de productos por medio de robots o maquinaria pesada requiere tanto para su estabilidad como para su producción misma el análisis y diseño de piezas, uniones, brazos o soportes involucrando el sistema mencionado, la aparición del fenómeno que nos ocupa es pues múltiple en las áreas de ingeniería, por ello la importancia de sus estudio teórico y comprensión de parte de los estudiantes.

El presente proyecto propone incidir favorablemente en la eficiencia de los conocimientos de los estudiantes, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica de enseñanza que incorpora la calculadora como medio de producción de significados a partir de la vinculación dinámica de registros de representación (algebraico, tabular, grafico y verbal) del fenómeno denominado sistema masa-resorte.

Dicha estrategia es diseñada a partir de las teorías cognitivas (Duval, 1999) y (Hitt, 1991, 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998) rescatando dos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, trivialización y visualización, calificados como fundamentales en los referentes teóricos citados, la trivialización en el sentido de no ser obstáculo (por la presencia y uso de la calculadora) en la complejidad algebraica de las ecuaciones diferenciales involucradas durante el proceso de modelización y resolución del fenómeno en cuestión, y la visualización en el sentido de ilustrar el objeto matemático desde sus diferentes representaciones, esta última consideración o estilo de enseñanza se le reconoce como “el poder de la visualización”. Y finalmente, (Laborde, 2003) por su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente por promover en la estrategia didáctica la construcción de relaciones entre las distintas representaciones, así como de la posibilidad de conexión entre los registros, además de privilegiar los cálculos rápidos mediante el sistema de cómputo algebraico integrado a la calculadora e inherente a la propia estrategia didáctica.

Utilizando la capacidad para programar de la calculadora, se ha diseñado un ambiente físico (virtual)-gráfico para los distintos movimientos amortiguado y no amortiguado, que permite la interacción entre el estudiante y el objeto matemático en cuestión. Bajo la manipulación del programa por parte del estudiante es factible observar el movimiento físico asociado al comportamiento gráfico, e interactuar a su vez con las actividades de aprendizaje diseñadas para tal efecto, de tal suerte que el estudiante este en mejor posibilidad de ir vinculando tanto los parámetros (rigidez, factor de amortiguamiento, condiciones iniciales de posición y velocidad) de las ecuaciones diferenciales y el sistema masa resorte, como las características de posición del contrapeso, velocidad y dirección del mismo.

En cada tipo de movimiento (libre no amortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado), se va vinculando el efecto físico y geométrico de los coeficientes y parámetros incorporados en las ecuaciones, así como también de la posición, velocidad y dirección. Se busca en este ambiente programado junto con las actividades de aprendizaje diseñadas, asociar en uno y otro sentido el efecto físico y geométrico de los parámetros y condiciones incorporados en las ecuaciones diferenciales aplicadas a los diferentes tipos de movimiento del sistema masa resorte, (ver figuras 1 y 2) y la posibilidad de transitar entre los distintos contextos, algebraico, gráfico, físico y tabular.

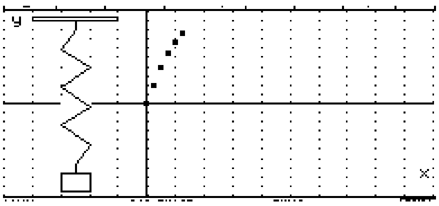


Fig. 1 El contrapeso se dirige hacia abajo

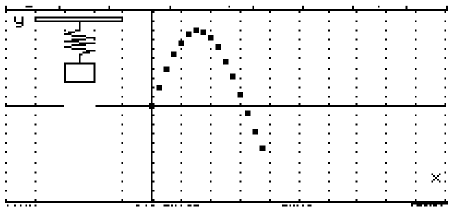


Fig. 2 El contrapeso se dirige hacia arriba

La experimentación se inicia con la necesidad por parte de los estudiantes de utilizar el programa de la calculadora graficadora como apoyo para responder algunos de los cuestionamientos de las actividades de aprendizaje, esto es, de manera paralela van ejecutando el programa y les es factible concluir de manera preliminar situaciones de conflicto. Ejemplos de ello son: a) La determinación de la relación entre el signo de la pendiente de la recta tangente en un instante y la dirección del contrapeso en ese momento, b) La ubicación gráfica del momento en el que el contrapeso pasa por segunda vez por la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba. c) El comportamiento gráfico de un contrapeso que describe un movimiento críticamente amortiguado (ver figura 3), d) El comportamiento del contrapeso conforme transcurre el tiempo en un sistema cuyo movimiento es subamortiguado (ver figura 4), entre otros.

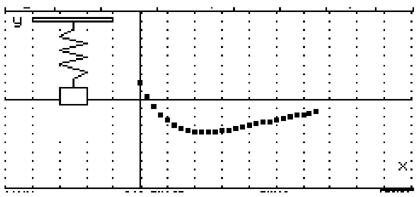


Fig. 3 Movimiento críticamente amortiguado

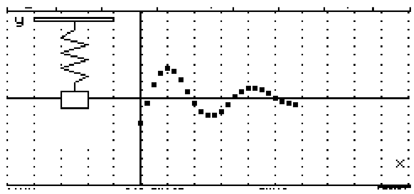


Fig. 4 Movimiento subamortiguado

Otra parte importante de la experimentación es la institucionalización, en donde se pone de manifiesto la veracidad o no de las conclusiones vertidas por los estudiantes, además de la declaración de conceptos y modelos, y la confirmación de conjeturas de los estudiantes a partir de sus observaciones y la interacción con el ambiente generado tanto por el programa y su ejecución como por el desarrollo de la estrategia didáctica.

Para realizar la experimentación, los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; haciéndoles entrega a cada uno de ellos una calculadora con el programa respectivo. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina (edición de ecuaciones, graficación de funciones, ventanas de graficación, determinación de críticos relativos y raíces reales), ya que algunos de ellos no habían tenido contacto con la graficadora voyage 200. Se les planteó de manera introductoria el tema a tratar y posteriormente se les capacitó en cuanto a la forma de ejecutar el programa, Se entregó a cada equipo las actividades de aprendizaje y las instrucciones a seguir para el desarrollo de las actividades fueron dadas verbalmente. También se indicó que las respuestas que fueran anotadas no las borraran, aunque después consideraran que estas estuvieran equivocadas. Posteriormente, se discuten las propuestas a nivel grupal y el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Respecto de la estrategia didáctica, ésta se conforma por un total de 7 actividades, cada una de ellas para abordar los diferentes tipos de movimiento del sistema masa-resorte y promover la actividad del estudiante en términos de los diferentes registros de representación. La realización de las actividades es apoyada con el programa de la calculadora, generando un ambiente visual del movimiento del sistema asociado al comportamiento geométrico.

Para llevar a cabo la experimentación, la cual fue realizada en 6 días durante una hora diaria, se contó con la participación de un grupo con 37 estudiantes de la clase de ecuaciones diferenciales de ingeniería en el año 2006. Este a su vez fue subdividido en dos, uno de ellos con 17 alumnos, el cual se constituyó como el grupo piloto, en el cual se pone a prueba la estrategia didáctica diseñada y el programa de calculadora de apoyo a las actividades de aprendizaje, este grupo fue asistido por un profesor investigador, el otro subgrupo, dirigido por el docente titular del curso e integrado por 20 alumnos, se constituyó como el grupo de control, quien recibiría la instrucción del tema en cuestión de manera tradicional. Con el objeto de tener evidencia del desempeño de los estudiantes y observar si el diseño e implementación de la estrategia didáctica mediada por la calculadora causa resultados favorables y significativos, se aplicó la prueba al finalizar la experimentación, los resultados y evidencias se comentan en los siguientes apartados.

A Continuación presentamos algunas de las observaciones detectadas durante el proceso de la experimentación:

a) La mitad del grupo tuvo conflicto con la manipulación de unidades, mezclando en sus cálculos por ejemplo, pies con pulgadas.

b) La determinación de extremos relativos, en algunos casos, se basaba primero en la obtención de la derivada y posteriormente en la resolución $x'(t)=0$ sin utilizar la calculadora simbólica o gráfica, no obstante la previa capacitación para la obtención de críticos de manera directa en el ambiente gráfico de la calculadora.

c) Extrañeza general por la convención de los parámetros (posición y velocidad), en el sentido del comportamiento gráfico y la posición y velocidad del contrapeso.

d) En general los estudiantes pudieron describir físicamente el movimiento para cada uno de los casos con amortiguamiento y asociarlo al comportamiento gráfico.

La prueba fue diseñada en conjunto tanto por el docente titular como por el investigador, se incluyeron 14 preguntas tanto de opción múltiple como de respuesta breve, con la misma ponderación cada una, lo anterior con la finalidad de medir la eficiencia de los conocimientos logrados por los estudiantes en una escala de 0 a 100, tanto para el caso del grupo piloto como del grupo de control. Cabe señalar que en la aplicación de la prueba no se permitió el uso de libros, apuntes, ni calculadora. De la aplicación y revisión del mismo se visualizan aspectos significativos, algunos de ellos se presentan a continuación.

Una diferencia sustancial tanto en la media de calificación obtenida, como en el porcentaje de acreditación. Ver tabla No. L

GRUPO	NO. DE ALUMNOS	MEDIA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	CALIFICACIÓN MÍNIMA	CALIFICACIÓN MÁXIMA	ACREDITADOS	% ACREDITADOS
CONTROL	20	41	22	14	93	4	20
PILOTO	17	55	23	7	100	8	47
TOTAL	37	47	23	7	100	12	32

Tabla No. I Comparativo estadístico de los resultados de la prueba.

Es de notarse la proporción de respuestas correctas (ver tabla No. II) del grupo piloto para los reactivos 4 y 5 por ejemplo, (ver anexo No. 1) en contraste con el grupo de control, el trabajo realizado con las situaciones de aprendizaje apoyado con el ambiente generado por el programa de la calculadora permitieron que el estudiante interpretará adecuadamente la dirección del contrapeso asociado a la posición de equilibrio o de referencia. En otras palabras, el ambiente generado por el programa de la calculadora en conjunto con la estrategia didáctica favorece que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico.

REACTIVO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
GRUPO DE CONTROL	0.55	0.80	0.40	0.35	0.25	0.20	0.55	0.50	0.35	0.50	0.25	0.60	0.35	0.10
GRUPO PILOTO	0.71	0.59	0.29	0.71	0.76	0.76	0.47	0.59	0.24	0.76	0.41	0.35	0.59	0.41

Tabla No. II Comparativo de proporciones de respuestas correctas del test aplicado

Conclusiones

Esta experiencia didáctica, permitió observar en todos los equipos en primera instancia un gran entusiasmo y apropiamiento del problema planteado.

La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos:

- Logra que los estudiantes se apropien intelectualmente del problema.

- Se consigue que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico. Además logran describir tanto física como geométricamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado.
- Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa.

Además se identifican algunas situaciones que se considera fueron motivo para que los estudiantes no obtuvieran aún mejores resultados, a saber:

- El manejo insuficiente de las condiciones iniciales de manera formal.
- El énfasis en el proceso de resolución de las distintas ecuaciones diferenciales que modelan los movimientos del sistema masa-resorte.
- El poco tiempo (así considerado después de los resultados obtenidos) dedicado a la experimentación son ejemplo de ello.

A la vez se detectaron en cuanto a la estrategia didáctica, como necesario reforzar la parte correspondiente al tránsito del contexto numérico al físico, así como también del contexto analítico al físico, lo anterior es evidenciado en la prueba por el grupo piloto, en el reactivo 9 (ver anexo no. 1), pues la proporción es desfavorable para el grupo experimental.

El balance general de esta primera aproximación motiva a profundizar en la investigación y establecer las acciones inmediatas siguientes:

Rediseñar la estrategia didáctica de acuerdo a PISA (2003), mediante las competencias siguientes: modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, ya que en conjunto describen los procesos para el dominio del fenómeno sistema masa-resorte aunado a las ecuaciones diferenciales asociadas.

Diseñar y aplicar a los grupos piloto y de control un instrumento de medición diagnóstica (preprueba), con el objeto de establecer las condiciones de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a las competencias (modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos) logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte.

Llevar a cabo un análisis estadístico exhaustivo que permita visualizar la eficiencia relativa que logran los estudiantes en particular para cada una de las competencias, así como también en cada uno de los registros de representación y su impacto directo hacia las competencias matemáticas.

Referencias bibliográficas

Demana, F. y Waits, B. (1998). *Panorama de la Tecnología en la Educación*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/reformbacklash.pdf

Demana, F. y Waits, B. (1998). *El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/roleofgraphcalc.pdf

Duval, R. (1999). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf

Hitt, E. F. (1991). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática 7*, 63-75.

Hitt, E. F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes de tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana 10(2)*, 213-224.

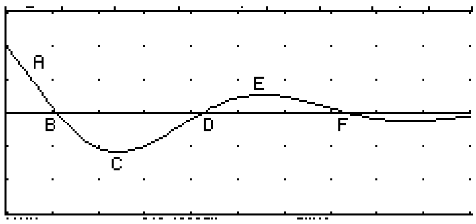
Kutzler, B. (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez & E Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.

Laborde, C. (2003). ¿Porqué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? En J. Jiménez, E Hugues, Del Castillo A. y Dórame, E. (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 115-127). Hermosillo, Sonora: Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.

PISA. (2003). *Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas* Extraído el 28 de Marzo de 2007 desde http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003liberados.pdf

Anexo no. 1

4. La gráfica que se presenta a continuación, exhibe el comportamiento (tiempo contra posición) de un sistema masa resorte, determine la característica del movimiento del sistema que se solicita:



La dirección del contrapeso en el punto B

a) No se mueve b) Hacia abajo c) Hacia arriba d) Ninguna de las anteriores

5. En base a la gráfica del problema 4. La segunda ocasión que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba, es el punto:

a) B b) C c) D d) F

9. La ecuación de movimiento que corresponde al movimiento sobreamortiguado de un sistema particular masa resorte es:

A) $x(t) = -\frac{2}{3}\cos(6t) + sen(6t)$

B) $x(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$

C) $x(t) = e^{-t}(\frac{2}{3}\cos(6t) - 2sen(6t))$

D) $x(t) = -2e^{-t} + te^{-t}$

INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA ESTOCÁSTICA EN EL AULA DE SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

Saúl Elizarrarás Baena, Ana María Ojeda Salazar
Escuela Normal Superior de México — México
Cinvestav del IPN
elizarrarasaul@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística — Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan resultados de un estudio realizado en el aula de segundo grado de secundaria pública para identificar variaciones en los conocimientos de 40 alumnos de 13-15 años de edad, acerca de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y, en particular, sobre independencia y dependencia estocástica. Se aplicó un mismo cuestionario, antes y después de la estrategia de enseñanza, la cual utilizó una propuesta institucional (Briseño et al, 2006). Las dificultades evidenciadas por los estudiantes y por la enseñanza apuntan a la necesidad de tratar el tema vía el enfoque frecuencial (Elizarrarás, 2004), de tal modo que se promueva la interrelación de concepto, signo y objeto (Steinbring, 2005) en la interacción social en el aula.*
Palabras clave: independencia, epistemología, cognición, secundaria

Introducción

De acuerdo con el libro de texto empleado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza (Briseño et al, 2006), para quienes escriben estás líneas se pretendió indagar sobre posibles respuestas acerca de las dificultades que tienen los estudiantes de segundo grado de secundaria pública para comprender las ideas de independencia y dependencia estocástica y, paralelamente, las dificultades en su enseñanza.

Elementos teóricos

La perspectiva de este estudio pone de relevancia aspectos epistemológicos, cognitivos y sociales sobre la comprensión de eventos independientes y dependientes de la probabilidad.

Epistemológicos**.** Heitele (1975) señala que la enseñanza de estocásticos debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Para ello propone diez ideas fundamentales de estocásticos para un curriculum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamental radica en que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

Cognitivos. Frawley (1999) considera al ser humano a la vez como máquina y como persona, pues la parte interna y la externa de la mente humana confluyen simultáneamente. Por tanto, caracteriza tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia. Por otro lado, Fischbein (1975) enfatiza que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de ésta esas intuiciones se tornan de más en más difíciles de erradicar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En este sentido, Gigerenzer y Hoffrage (1995) plantean que el formato de frecuencias activa naturalmente el razonamiento probabilístico de los sujetos.

Sociales. Según Steinbring (2005), la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se caracterizan por una gran variedad de construcciones e interpretaciones matemáticas, concibiendo el aprendizaje de los estudiantes como un objetivo a largo plazo.

Elementos de método

Este estudio es de carácter cualitativo (Eisner, 1998).

Escenarios**.** La investigación se dirigió al *libro de texto* utilizado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza —el cual se relaciona con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria para Matemáticas (SEP, 2006)—, al *aula* y al desempeño de los *alumnos*. En los dos últimos escenarios participaron 40 estudiantes (13-15 años) y el docente titular de un grupo de segundo grado de secundaria pública.

Criterios de análisis**.** Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de programa de estudios y libro de texto como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos para presentar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura de la lección.

Aula. El docente titular desarrolló diez sesiones de enseñanza (cada una de 50 minutos), de las cuales seis trataron sobre la independencia de eventos. En total, se implementaron seis actividades para tratar nociones sobre independencia de eventos y otras diez para formalizar la independencia de eventos; las 16 actividades estaban contenidas en sólo una lección propuesta en un libro de texto para segundo grado de educación secundaria (Briseño, et al, 2006). Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis; en bitácora escrita se anotaron datos fuera de cinta y lo que se consideró conveniente señalar. La *estrategia de enseñanza*, basada en las actividades propuestas en la lección, consistió en coordinar la lectura de cada una; los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto; se confrontaron las respuestas incorrectas; algunas dificultades se fueron remontando conforme se iba avanzando en las sesiones. En forma complementaria, se organizó a los alumnos en equipos de tres personas para que resolvieran algunos de los problemas propuestos en el libro de texto antes citado y, luego, cada equipo presentó la solución de uno de los problemas ante todo el grupo, aquí también se confrontaron respuestas. La enseñanza excluyó el enfoque frecuencial.

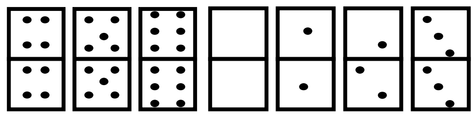
Desempeño del alumno. Previamente a las diez sesiones de enseñanza, se administró un cuestionario y, al cabo de dos meses, se aplicó tal cual el mismo cuestionario, con el propósito de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

El cuestionario consistió en ocho problemas en total, dos problemas se refirieron al enfoque clásico de la probabilidad y dos al frecuencial; derivados de cada problema se planteó un problema que implicaba a la probabilidad condicional. El cuestionario se diseñó en formato de opción múltiple con cinco incisos, sólo uno correcto y el último permitía alguna otra posible respuesta del estudiante; para cada selección realizada se solicitó justificación escrita y se permitió la corrección de respuestas; su presentación, con rayas para las respuestas, insinuó la justificación en lengua natural. La contestación, individual, requirió de 50 minutos en su primera aplicación y de aproximadamente 100 minutos en la segunda. Alternadamente, se presentaba un problema para el enfoque clásico y, luego, otro para el frecuencial (por ejemplo, ver respectivamente problemas 1, 2 y 7 en la Figura 1); el primer problema se había aplicado en estudios previos (Elizarrarás y Ojeda, 2008), aunque aquí se modificó el uso de una tabla como recurso semiótico con el fin de facilitar la identificación del espacio muestra asociado al fenómeno aleatorio en cuestión.

Las opciones propuestas en el problema 1 completan las posibilidades con las fichas de dominó: con los incisos **a, c y d** se consideraron tipos de sesgos identificados en estudios previos (Fischbein, 1975), los cuales dan cuenta de dificultades de comprensión para las ideas de espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria; con el inciso **b** (correcto) se consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles, lo cual incorpora las ideas fundamentales ya citadas. Para el problema 2, los incisos se propusieron por lo siguiente: el inciso **a** (correcto) manifiesta la reducción del espacio muestra; mientras que el inciso **b** toma en cuenta las respuestas basadas en todas las fichas (28) que conforman todo el espacio muestra; los incisos **c** y **d** consideran dificultades con las ideas fundamentales implicadas (combinatoria, espacio muestra y variable aleatoria). Para el problema 7, las opciones **a**, **c** y **d** corresponden a la nula asociación de las ideas fundamentales implicadas (espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria).

1. Considera las **28** fichas de un dominó con la cara de sus puntos hacia abajo, Completa la tabla para que identifiques todas las parejas ordenadas que corresponden a los puntos de sus fichas.

SUMAS POSIBLES				
0	**(0, 0)**			
1	**(0, 1)**			
2	**(0, 2)**	**(1, 1)**		
3				
4				
5				
6	**(0, 6)**	**(1, 5)**	**(2, 4)**	**(3, 3)**
7				
8				
9				
10				
11				
12	**(6, 6)**			



¿Cuál es la probabilidad de que al voltear una ficha al azar, se obtenga alguna cuya suma de puntos sea menor a seis puntos?

A) $\frac{1}{28}$ B) $\frac{12}{28}$ C) $\frac{6}{22}$

D) $\frac{2}{13}$

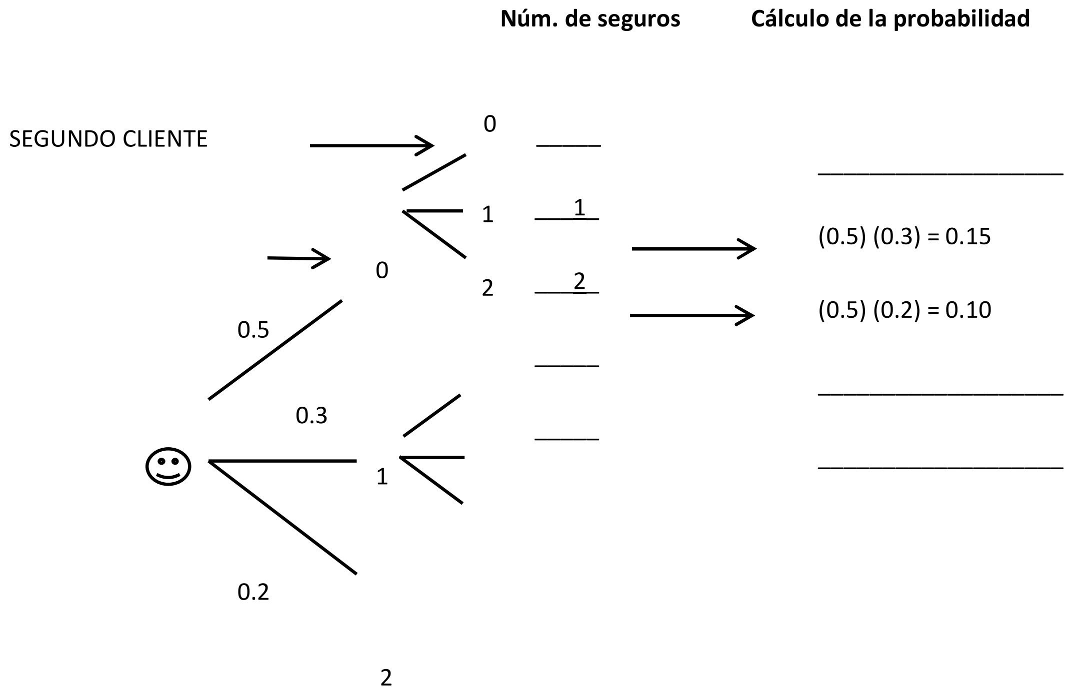
¿Por qué?

2. Para iniciar una partida de dominó, ni Aquiles ni Benito obtuvieron alguna ficha con los mismos puntos en sus divisiones (**mula**); iniciará el juego quien tenga la ficha cuya suma de puntos sea mayor. Aquiles mostró una ficha cuya suma es nueve, ¿cuál es la probabilidad de que Benito tenga una suma mayor a nueve puntos?

A) $\frac{4}{21}$ B) $\frac{4}{28}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{1}{7}$

¿Por qué?

7. Ana se dedica a vender seguros, al visitar un cliente, sabe que: la probabilidad de venderle 2 tipos de seguros es de 0.2, la probabilidad de vender sólo uno es de 0.3 y la probabilidad de no vender es de 0.5.



Completa el diagrama de árbol anterior y responde lo siguiente:

Al visitar dos clientes, ¿cuál es la probabilidad de que les venda **exactamente** dos seguros en total?

A) 0.2 B) 0.29 C) 0.09 D) 0.04

¿Por qué?

Figura 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis de la lección del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional. En general, el libro de texto está organizado en cinco bloques, en concordancia con el *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 2006); el contenido de organiza en tres ejes temáticos (Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información) relacionados entre sí. La propuesta de estocásticos en el libro de texto se desarrolla en una sola lección (bloque 4), con sólo antecedentes de conteo (bloque 1).

El uso de notaciones simbólicas es escaso; se carece de ejemplos y de ejercicios complejos. Las situaciones planteadas hacen alusión predominantemente al enfoque clásico, las cuales son susceptibles de tratarlas mediante el enfoque frecuencial; sólo un problema propone ensayos independientes mediante lanzamientos de dados, sin pretender un análisis completo de las frecuencias absolutas y relativas obtenidas por los estudiantes.

Tabla 1. Análisis de la lección propuesta en el libro de texto (Briseño et al., 2006).

Criterio **Lección**	**Ideas fundamentales**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos utilizados**
Lección única	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición. Regla del producto e independencia. Equidistribución y simetría. Combinatoria. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria.	Números naturales y su orden. Operaciones con números naturales. Potencias de base 2. Desarrollo plano del hexaedro regular (cubo). Parejas ordenadas	Lengua natural, tablas de una y de doble entrada, y expresiones numéricas. Figuras. No hay símbolos numéricos en forma explícita. No se hace uso de gráficas.	Frecuencia relativa, escogió, azar, posibles probabilidad, dependen, resultados, experimento aleatorio, ocurrir, casos, selecciona, lancen lanzar, rifa, eventos, distintos, independencia, reemplazar, experimento clásico, dado cargado, simultáneamente, salga, definición clásica.

En el desarrollo de las actividades propuestas en el libro de texto utilizado, para formalizar la regla del producto se descarta la formalización matemática y, en su lugar, se plantea una proposición: "*Regla del producto: cuando dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos eventos simultáneamente es el producto de las probabilidades de A y B*." (Briseño, et al, 2006; p. 210).

Resultados de la enseñanza en aula

Según la secuencia de las actividades propuestas en el libro de texto (Briseño et al, 2006), la enseñanza trató vagamente la idea de independencia tal como se muestra en los pasajes transcritos que se presentan enseguida; en cambio, se limitó al cálculo de las probabilidades de los eventos implicados, dejando la formalización sistemática de la regla del producto hasta después, reproduciendo la secuencia establecida en el libro de texto citado. (Las intervenciones se denotan por: “P” (profesor), “T” (todos), “A” (alumno)).

P: Se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener sol en el primer volado y sol en el segundo volado? …..

T: Una de cuatro.

P: Una de cuatro. Ahora bien, si yo lanzo la primera moneda, ¿los eventos son independientes o uno implica que ocurra el otro (hace una pausa) o son eventos separados?

T: Separados.

A: Independientes.

P: Independientes. ¿Quién sí encontró que la probabilidad es un cuarto? (Algunos alumnos levantan la mano). Fíjense, se va a basar en las combinaciones y para eso es el diagrama de árbol, bien. Siguiente problema: Se lanzan tres monedas… (la enseñanza sigue la misma secuencia para este problema y también para un problema subsecuente que plantea el lanzamiento de cuatro monedas).

Durante el desarrollo de las actividades, la enseñanza fue inconsistente en el tratamiento de las ideas fundamentales de estocásticos. El pasaje anterior se refirió exclusivamente a las ideas de medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria; por tanto excluyó las ideas de muestra y de ley de los grandes números. Así, descartó el enfoque frecuencial como un acercamiento natural a la idea de azar (Gigerenzer y Hoffrage, 1995), el cual ofrece la oportunidad de alimentar la comprensión del enfoque clásico de la probabilidad (Elizarrarás, 2004).

Resultados generales del cuestionario

Enseguida se muestran resultados sobre la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos implicadas en la aplicación del cuestionario en sus dos fases (ver Figura 2).

Primera aplicación. En el problema 1, 30% de los estudiantes completaron la tabla correctamente, 47.5% lo hace en forma determinista o incompleta y 22.5% no la completa. Sólo 5% de los alumnos (dos) contestaron en forma correcta el problema 2 (referente a la probabilidad condicional); una de las respuestas fue: *Dice el problema que nadie sacó una mula, por lo que el total de fichas se redujo a 21 fichas de las 28, después dice que Benito debe de sacar un número mayor a nueve y el número total de combinaciones mayores a nueve es de 4 fichas*. Para el problema 7, el 82.5% de los estudiantes no contestaron, el 25% completaron el diagrama de árbol en forma incorrecta o parcial y sólo 2.5% (un alumno) contestó y completó el diagrama correctamente, y su argumentación fue: *Porque al sumar los diagramas* [en los que] *se venden dos seguros me da 0.29*.

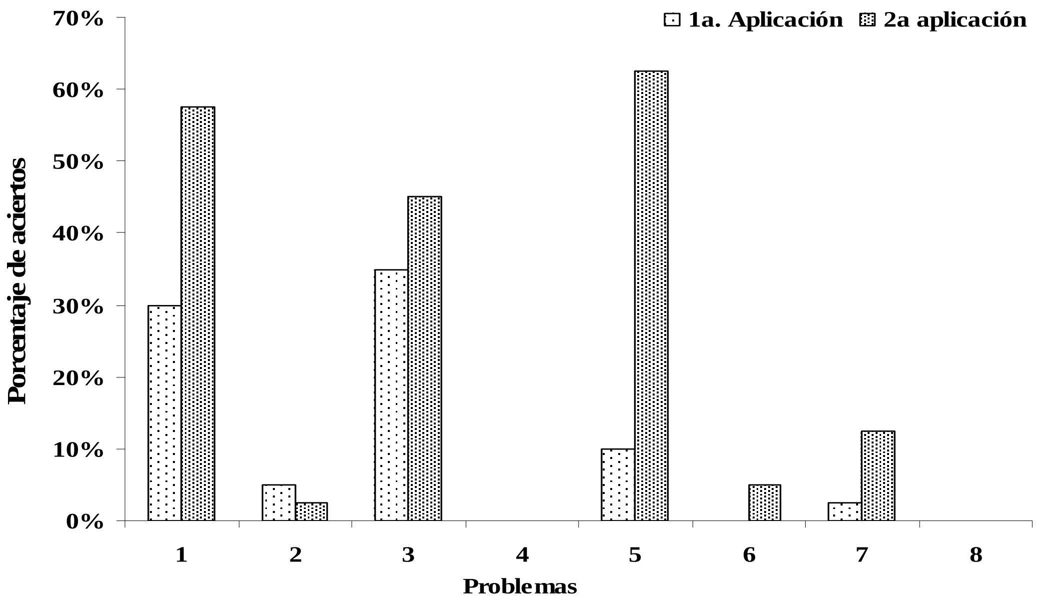


Figura 4. Resultados obtenidos en el cuestionario (antes y después de la enseñanza).

Segunda aplicación. Para el problema 1 se obtuvieron los resultados siguientes: 57.5% de los alumnos completaron correctamente la tabla, y 42.5% en forma determinista o incompleta. Sólo un alumno (2.5%), diferente a quienes habían contestado el problema 2 en la primera aplicación, lo contestó correctamente; sin embargo, su respuesta reveló dificultades para diferenciar entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial de la probabilidad (*Porque son 3 casos favorables* [de] *que venda 2* [seguros] *y si sumamos la probabilidad de cada uno de estos (0.1 + 0.9 + 0.1) nos da el resultado de 0.29*); además, complementariamente, de este mismo estudiante se revelaron dificultades con otros conceptos matemáticos, tales como operaciones con números racionales y su conversión decimal (*P (venda 2 seguros) = 3/9 = 0.29*). En el problema 7 se obtuvieron 10% de respuestas nulas, 77.5% de respuestas incompletas e incorrectas y 12.5% de respuestas correctas basadas en el llenado del diagrama de árbol.

Comentarios generales

En la segunda aplicación del cuestionario, la mayoría de los estudiantes sólo lograron transitar de la etapa subjetiva del procesamiento no consciente a su frontera con la conciencia (Frawley, 1999). Las respuestas otorgadas en este instrumento por algunos estudiantes, ya sea al inicio o al final de la enseñanza, señalan la conveniencia de explicitar la dependencia de eventos como parte del currículo formal, ya que en este estudio la enseñanza se baso en el libro de texto citado, el cual privilegió la idea de independencia.

La enseñanza enfocó su práctica alrededor del enfoque clásico; descartando la comprensión de la idea de independencia vía la ley de los grandes números (Steinbring, 2005); no obstante, contribuyó a que algunos estudiantes contestaran correctamente los problemas referidos al enfoque frecuencial, pero sus argumentaciones evidenciaron una comprensión parcial de este enfoque. Lo anterior ratifica la importancia de la lectura comprensiva e interpretación de los datos contenidos en una tabla o gráfica (ver aquí los problemas 1 y 7).

En estudios previos (Ojeda y Elizarrarás, 2008) se enfatizó la necesidad de realizar una investigación más amplia en cuanto al número de sesiones de enseñanza y de lecciones que se pongan en práctica, pues se requiere proveer a los alumnos de más elementos de estocásticos en su formación. También se plantea la necesidad de realizar estudios durante la formación de docentes y hacer un seguimiento de su práctica cuando se encuentren en ejercicio profesional como titulares de un grupo en secundaria.

Referencias bibliográficas

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.

Elizarrarás, S y Ojeda, A. M. (2008). Implicaciones epistemológicas en la comprensión de probabilidad en tercer grado de secundaria. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp.383-393). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Netherlands: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction. frequency formats. *Psychological Review 102*, 684-704.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6,* 187-205.

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

RESULTADOS DE UNA INVESTIGACIÓN UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE EN EL ESTUDIO DE DOS PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA APLICANDO CABRI

Alejandro Miguel Rosas Mendoza, Carla Kerlegand Bañales
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN México
alerosas@ipn.mx, kerabar@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento Geométrico Nivel: Medio Superior

Resumen. *En esta investigación se analiza el nivel de razonamiento geométrico, de acuerdo a la escala de Van Hiele (Braga, 1990), de un grupo de estudiantes de bachillerato al trabajar con dos propiedades de la circunferencia, para que en otra etapa de la investigación se pueda emplear como recurso tecnológico el software de Geometría Dinámica Cabrí Géomètre. En la segunda etapa haciendo uso de la teoría de la visualización y el software Cabrí pudimos lograr que a partir del nivel en que se encontraban los estudiantes lograran pasar al siguiente nivel.*
Palabras clave: van hiele, nivel, fase, cabrí

Introducción

Esta problemática surgió a partir de la observación del trabajo de estudiantes de bachillerato en donde muchos de ellos tienen dificultades para resolver problemas de aplicación que involucran algunas propiedades de la circunferencia, a pesar de haberlas estudiado de manera previa. En nuestra experiencia profesional hemos observado que los alumnos tienen ciertos conocimientos geométricos que lamentablemente son menores a los que se supone debieran poseer de acuerdo al grado escolar en que se encuentran, de modo que los ejercicios y aplicaciones correspondiente al programa de estudio les representan un alto grado de dificultad. Por esta razón un primer paso que se realizó fue comprobar estas suposiciones; es decir, que los alumnos se encuentran en algún nivel de razonamiento geométrico anterior al requerido para la solución de los problemas planteados y suponemos que, el diseño de una secuencia didáctica de acuerdo a las fases de aprendizaje señaladas en el modelo de van Hiele y que además explote las características de Cabrí permite el tránsito de ese nivel al inmediato superior.

Marco Teórico

El marco teórico elegido está compuesto por la teoría conocida como Modelo de van Hiele y la teoría de la Visualización. En van Hiele encontramos una explicación de cómo es la evolución del pensamiento geométrico de los estudiantes y tiene como componentes principales la Teoría de los Niveles de Aprendizaje que son:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Clasificación o abstracción

Nivel 4: Deducción, y

Nivel 5: Rigor

De acuerdo a Fauz y Donosti (s.f.), estos niveles no están asociados a la edad, explicación que nos permite utilizar esta teoría en nuestros alumnos de nivel superior. Además citan a van Hiele

> "…Es más, se señala que cualquier persona, y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, *pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente*" (Fauz y Donosti, s.f., p. 67)

Una segunda parte muy importante del modelo mencionado son las Fases de Aprendizaje que son cinco en total:

Fase 1: Preguntas/información

Fase 2: Orientación dirigida

Fase 3: Explicación

Fase 4: Orientación libre

Fase 5: Integración

Por otra parte, la teoría de la Visualización, que se define como un proceso formador de imágenes para una mejor comprensión de los objetos matemáticos y para facilitar la construcción de nociones (Borba y Villarreal, 2005), y también como un proceso de validación de conjeturas (Stylianides y Stylianides, 2005). En este sentido, Cabrí se muestra como una herramienta útil en la formulación de conjeturas y en la validación de soluciones.

Una vez definido el marco teórico, en la investigación empleamos esta metodología:

a) Análisis preliminar mediante un cuestionario referente a la circunferencia para determinar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

b) Diseño y aplicación de una secuencia didáctica en Cabrí, siguiendo las fases de aprendizaje que sugiere el modelo de van Hiele.

c) Análisis de resultados y conclusiones.

Aunque la investigación ya se encuentra en la fase (c) de la metodología indicada antes, el presente reporte de investigación abarca sólo el primer punto de la anterior lista.

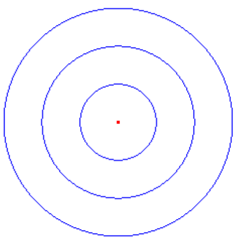
Desarrollo

Se aplicó un cuestionario de 8 preguntas a un grupo de 41 alumnos de 5º semestre de bachillerato, los cuales habían estudiado con anterioridad temas relacionados con la circunferencia dentro de su curso de Geometría Analítica. En base a lo que cada alumno contestó a cada una de las preguntas se le asignó a cada respuesta un valor entre 1 y 4 de acuerdo al nivel de razonamiento mostrado, según el modelo de van Hiele.

El cuestionario aplicado consistió de las siguientes preguntas:

1.- ¿Cómo defines a una circunferencia?

2.- Observa las siguientes figuras.



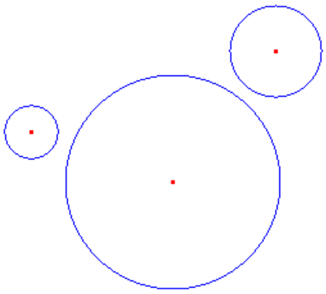
¿Encuentras semejanzas entre ellas? ________________________

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?

¿Encuentras diferencias entre ellas? ________________________

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?

3.- Observa las siguientes figuras:



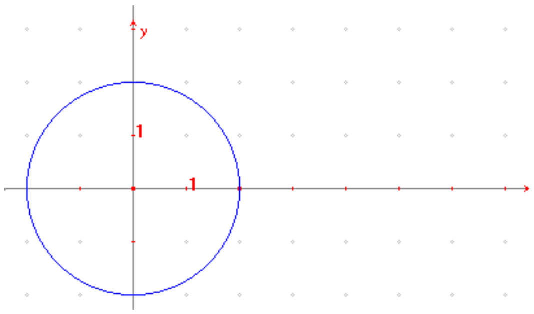
¿Encuentras semejanzas entre ellas? ________________________

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas semejanzas?

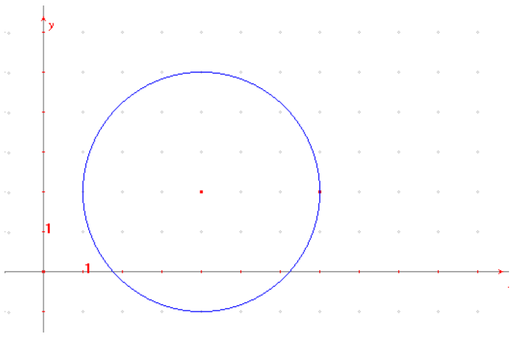
¿Encuentras diferencias entre ellas? ________________________

Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué consisten esas diferencias?

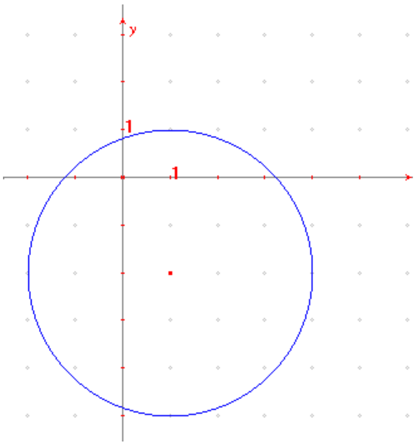
4.- Observa la siguiente figura y descríbela.



5.- Observa la siguiente figura y descríbela.



6.- La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde (h,k) son las coordenadas del centro y r es su radio. ¿Cuál de las ecuaciones dadas corresponde a la circunferencia mostrada en la siguiente figura?



a) $(x+1)^2+(y-2)^2=3$

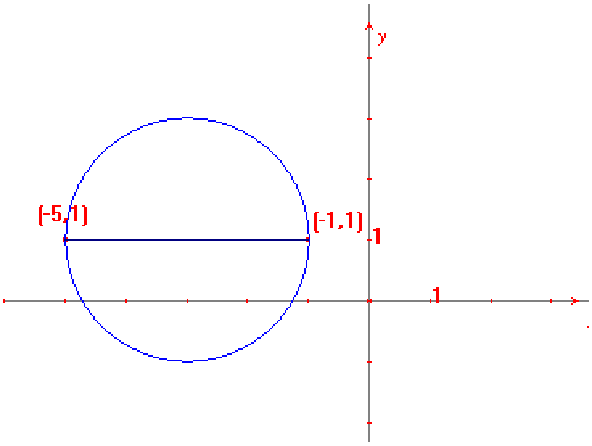
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

c) $(x-1)^2+(y+2)^2=3$

d) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

¿Por qué? ____________________

7.- Determina la ecuación de la siguiente circunferencia si el segmento mostrado es uno de sus diámetros:



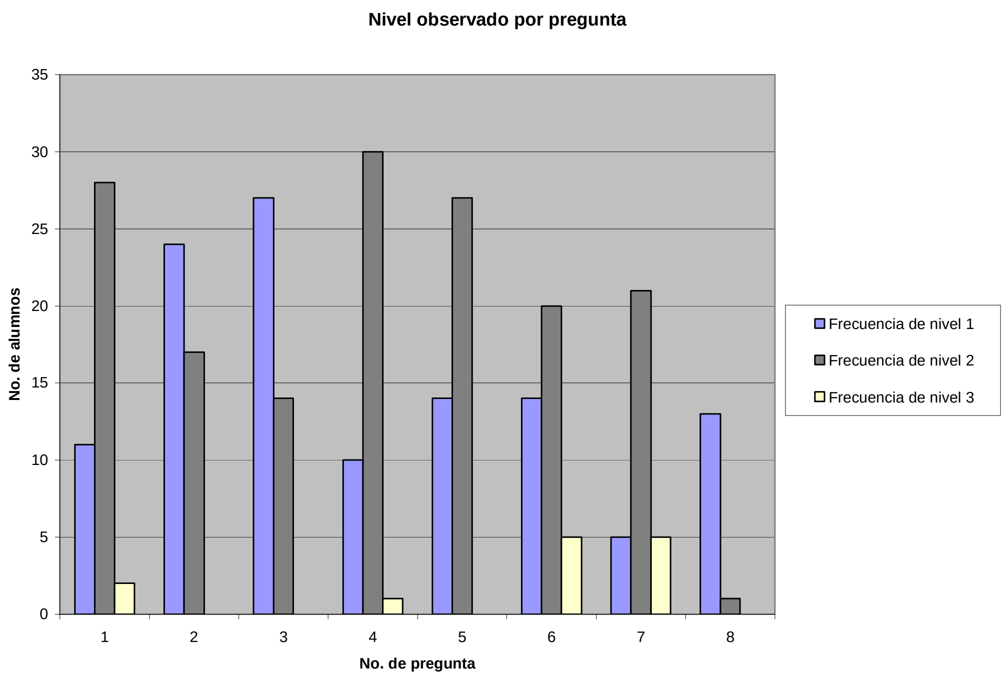
8.- ¿De qué manera se deduce la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$?

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes

1.- El 39% de los alumnos (16 alumnos) muestra un nivel de razonamiento predominante en sus respuestas igual a 1 y el 61% restante (25 estudiantes) nivel 2. En el grupo ningún alumno dio respuestas en las que se observara nivel predominante de 3 ó 4, lo cual era lo esperado con base a nuestra experiencia con alumnos de este nivel en semestres anteriores.

Esto puede observarse en la gráfica siguiente

2.- Los niveles de razonamiento que predominaron en el grupo para cada pregunta fueron variables, como se observa en la siguiente gráfica:



Para las preguntas 2 y 3, en las cuales los estudiantes debían describir las semejanzas y diferencias entre algunas circunferencias, la mayor parte del grupo mostró nivel de razonamiento 1; lo cual es contrario a lo esperado ya que, habiendo llevado un curso previo sobre la circunferencia y siendo estudiantes de bachillerato, en sus explicaciones utilizaban únicamente términos generales, como: tienen distinto tamaño, tienen la misma forma, etc., sin hacer mención de propiedades específicas como centro, radio o diámetro.

3.- En las preguntas 6 y 7 es donde se observó un mayor número de estudiantes con nivel de razonamiento 3. En ninguna de ellas se pide al alumno hacer descripciones o diferenciaciones, sino reconocer propiedades cuantitativas a partir de las figuras (y posteriormente utilizarlas para establecer su ecuación). Probablemente esto se deba al trabajo más arduo que se hizo en este sentido durante el curso previo que ellos llevaron.

4.- En algunos casos aislados se pudo observar lo siguiente:

A las ecuaciones que son opciones de respuesta para la pregunta 6, algunos estudiantes les llaman fórmulas.

Para argumentar su respuesta a esta misma pregunta, algunos alumnos describen relaciones entre los datos observados que en realidad no existen

Ante la pregunta 8, algunos alumnos mencionan que la pregunta no es clara, es decir, que el término deducir no tiene significado para ellos.

Conclusiones

De acuerdo a los programas de estudio los alumnos deben lograr ciertos objetivos dentro de la geometría, sin embargo la hipótesis de que su nivel de razonamiento geométrico no les permite lograr dichos objetivos fue corroborada.

Después de realizar la aplicación de un cuestionario de ocho preguntas de diverso índole, el análisis de las respuestas de los alumnos nos mostró que aunque los estudiantes hayan cursado temas de geometría su manejo de conceptos y terminología referentes a la geometría está por debajo del nivel de razonamiento que cabría esperar de ellos.

Hasta el momento se ha continuado la investigación mediante la selección de un subgrupo de cinco alumnos con los cuales se ha trabajado una actividad cuyo diseño se basó en van Hiele. El análisis y conclusiones de esa actividad conforman el bloque principal de la tesis de maestría de la profesora Carla Kerlegand, alumna de Maestría de Matemática Educativa del Programa de

Matemática Educativa de CICATA-IPN, algunos resultados aparecen en el trabajo (Rosas, A. y Kerlegand, C., 2009).

Referencias bibliográficas:

Braga, G. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. El modelo de enseñanza- aprendizaje de van Hiele. *Signos, Teorías y Prácticas de la educación, 4*, 52-57.

Borba, M. y Villarreal, M. (2005). Visualization, mathematics education and computer environments. En M. C. Borba y M. C. Villarreal (Eds.), *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation* (pp. 79 - 99). U.S.A.: Springer.

Fouz, F. y Donosti, B. (s.f.). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría*. Extraído el 23 de abril de 2007 desde www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

Rosas, A. y Kerlegand, C. (2009). Resultados de una investigación utilizando el modelo de van Hiele en el estudio de dos propiedades de la circunferencia aplicando Cabri. *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 1* (pp. 1616-1621). Puerto Montt, Chile.

Stylianides, G. y Stylianides, A. (2005). Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 10*, 31-47.

El ORIGAMI, UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Josefina del Carmen Gulfo de Puente, Tulio R. Amaya de Armas
Institución Educativa Madre Amalia, Universidad de Sucre Colombia
jgulfo26@hotmail.com, tuama1@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Medio

Resumen. *En el presente trabajo se utilizó el origami para estudiar algunos conceptos de las matemáticas, como segmentos, rectas, ángulos, polígonos y algunas propiedades de estas figuras que permiten la construcción de los módulos requeridos para armar las figuras geométricas. Permitió estudiar poliedros y familias de éstos, lo que llevó a su vez al estudio de familia de funciones en su representación algebraica y gráfica, esto con estudiantes del bachillerato. Se identificaron problemas de lateralidad y permitió realizar trabajo de motricidad fina con estudiantes de la básica primaria. Para el trabajo se seleccionó un solo tipo de módulo, por lo que al aumentar progresivamente el número de éstos iban apareciendo familias de poliedros. El trabajo con esta técnica facilitó el desarrollo de competencias ciudadanas, el desarrollo de estrategias metacognitivas en los estudiantes y hacer un proceso de iniciación al álgebra y al cálculo vista por los estudiantes más como un trabajo artístico-lúdico que matemático.*
Palabras clave: origami, figuras geométricas, familias de poliedros

Introducción

En el presente trabajo se utilizó “el Origami o el arte de construir objetos de papel sólo a través de plegaduras y ensambles” (Núñez, 2005), el cual es una técnica que consiste en la manipulación de trozos cuadrados de papel, con las que se componen figuras más o menos abstractas, capaces de evocar representaciones del mundo real como animales o cosas y figuras geométrica de todo tipo; para enseñar conceptos básicos de las matemáticas, como segmentos, rectas, planos, ángulos, polígonos y poliedros entre otros. El trabajo con esta técnica facilitó el desarrollo de competencias ciudadanas en los estudiantes al permitirles trabajar en equipo en el armado de los diferentes módulos y en el acoplamiento de éstos, y cuando resultaron diferentes familias de poliedros a partir de un módulo común, cada grupo defendía su propia construcción hasta llegar a un acuerdo; Así mismo permitió el desarrollo de estrategias metacognitivas ya que debían tener presente cada paso y el orden de los acoplamientos en el armado de la figura para poderla lograr.

Esto se inició con estudiantes de sexto grado, iniciándolos en la construcción de poliedros. Comenzamos construyendo un cubo, para el cual se utilizan sólo seis módulos, para luego construir otras figuras de mayor complejidad de hasta treinta módulos, así como otros poliedros regulares e irregulares. Posteriormente los estudiantes de todos los grados de la secundaria comenzaron a dejarse contagiar por el trabajo que le veían hacer a sus parientes en casa y vecinos y empezaron a exigir este tipo de trabajo a sus profesores. Al trabajar con jóvenes en mayor cantidad, se comenzó a notar claramente los problemas de lateralidad, de lo que hasta entonces no nos habíamos percatado; fue cuando decidimos comenzar el trabajo con estudiantes de la básica primaria donde consideramos que era más fácil atacar este tipo de problemas con la ayuda de los profesores de cada grado. El trabajo con este tipo de material es bastante gratificante, como actividad lúdica, los estudiantes ponen bastante de su parte y se logran avances significativos en corto tiempo, de tal modo que luego de unas pocas instrucciones hay mucho trabajo independiente del alumno y cuando se comienza a hacer la formalización de los conceptos matemáticos, lo relacionan con mucha facilidad con algo que conocen muy bien. Por lo que el estudio de poliedros y familias de éstos desde sus diferentes representaciones, llevó al estudio de familia de funciones en su representación algebraica y grafica.

Algunas aproximaciones teóricas

El trabajo con esta técnica facilita el desarrollo de competencias ciudadanas en los estudiantes; según Flores (2007) "*el estudio y la construcción de estructuras poliédricas con Origami modular invita a la tolerancia y al logro de objetivos comunes partiendo de la unidad; es una forma de colaborar para solucionar pacíficamente conflictos y hacer de éstos una oportunidad para crecer*" (p.7), al compartir el trabajo conjunto y la unidad de los productos puede permitir el trabajo cooperativo, ya que cada estudiante que logra el armado de una figura se va convirtiendo en un monitor del grupo. Con este arte se estudian propiedades de las figuras geométricas hasta en tres dimensiones y cambios en éstas, como traslaciones, rotaciones, homotecias, análisis de semejanza y congruencia entre ellas, así como paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos. Además, "*permite afinar la motricidad, la creatividad, la memoria y la autoestima*" (Corredor, 2001, p.5).

Esta técnica puede ofrecer algunas ventajas frente a otras en el trabajo con niños y adolescentes, una de ellas es que los estudiantes la consideran una actividad lúdica en la que se puede trabajar matemáticas informalmente, en ausencia de herramientas como reglas, compás, escuadras o lápices. Para los niños resulta muy atractiva por su colorido. Otra de las ventaja del trabajo con origami es el costo del material que se utiliza, que resulta insignificante en comparación con los beneficios que provee; Gonzalez y Larios, (2003) aseguran que los productos resultan de trozos finitos y bien definidos de papel, por lo que se tiene que echar mano no sólo de habilidades motrices sino también de las habilidades de razonamiento y de la imaginación espacial para hallarle el sentido a una construcción, así que el valor de los materiales no debe ser motivo de preocupación, lo que puede permitir la utilización de métodos como el ensayo y error, una de las estrategias favoritas de los estudiantes, sin tener que preocuparse por costos extras, y eso si, estimula ciertas habilidades de motricidad y de pensamiento para armar las figuras, sobre todo cuando se imponen ciertas restricciones, como es el caso de las familias de poliedros donde las figuras se arman según alguna regularidad.

Según González y Larios (2003):

> *"El Origami cuando se le considera como un auxiliar de la enseñanza de la matemática, ofrece técnicas que no sólo permiten la construcción de sólidos geométricos, particularmente poliedros, sino también de figuras en el plano utilizando materiales que son de fácil adquisición por lo que se puede convertir en una potente herramienta para el estudio de la geometría plana y del espacio (…) Podemos argumentar que lo llamativo de los productos resultantes, que la potencialidad que tienen las técnicas en cuanto a la capacidad de ofrecer un medio de manipulación directa, que el hecho de que todas las técnicas pueden ser desarrolladas o entendidas como resultado de operaciones geométricas (…), que las posibilidades de investigación y observación directa sobre los modelos construidos, y que la situación particular de que (…) las figuras o cuerpos resultantes pueden considerarse como representaciones de figuras o sólidos geométricos, hacen del origami un medio propicio para el diseño de actividades que permitan el aprendizaje del alumno sobre conceptos geométricos y matemáticos en la escuela secundaria.".*

Metodología

El trabajo se inició haciendo un repaso en cada grado, de conceptos geométricos tales como triangulo, cuadriláteros, rectángulo, cuadrado y ángulos, que pensamos utilizaríamos en las construcciones, y analizando algunas propiedades de estas figuras. Para el armado de las figuras se utilizó un solo tipo de módulo; los que se construyeron con trozos cuadrados de papel de colores, todos congruentes de dimensiones 10cm x 10cm, a los que se les hacen algunos dobleces que luego se montan en formas tridimensionales insertando las puntas en los bolsillos correspondientes que se van formando con el plegado. Se utilizan de diferentes colores por comodidad en el trabajo matemático, ya que es más fácil el conteo de piezas de diferentes colores y por la belleza de las construcciones. Las figuras se forman sin utilizar pegamentos, las puntas se sostienen en los bolsillos por la fricción entre los módulos, lo que permite que la figura se mantenga armada. A continuación se muestra el módulo utilizado, en tres momentos de su construcción y una figura terminada:

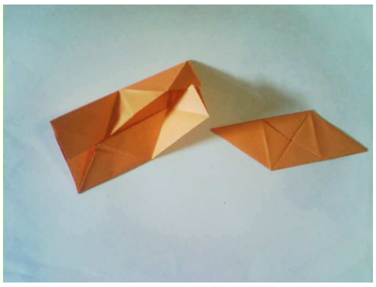


Figura 1 a

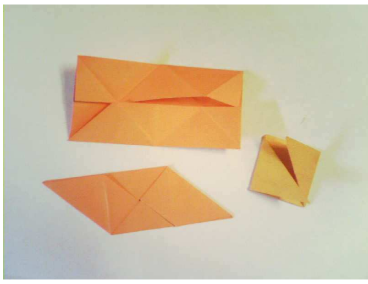


Figura 1 b

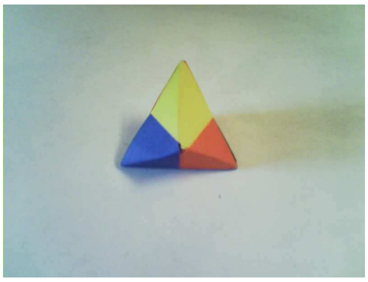


Figura 1 c

Desde el mismo momento de la construcción de los módulos se comienza el estudio de la geometría ya que al ir haciendo los dobleces se van formando diferentes figuras geométricas que se iban discutiendo para estudiar sus propiedades y distinguir bajo que condiciones un cuadrilátero por ejemplo es o deja de ser un paralelogramo, un rectángulo, un rombo o un cuadrado; distinguir las líneas paralelas y perpendiculares que contiene la figura. A su vez en la construcción de esos módulos se iban detectando problemas de lateralidad al hacer un doblez para la izquierda o para abajo, cuando se le pedía hacerlo para la derecha o para arriba respectivamente.

Ya con los poliedros que se iban armando se comenzó el trabajo de iniciación al álgebra y al cálculo, al empezar a relacionar las figuras con sus diferentes representaciones. Comenzamos variando el tamaño del módulo y anotando los valores resultantes en una tabla y luego realizando, en un plano cartesiano, la gráfica correspondiente para cada número de módulo; al variar el número de módulos, anotar estos valores en una tabla de valores y realizar la gráfica correspondiente en un plano, para cada valor fijo de módulo, iban resultando familias de funciones que se analizaron en sus representaciones algebraica, tabular, gráfica y la icónica o natural correspondiente a las figuras construidas en origami.

Resultados

Algunos de los logros que se pueden resaltar son los siguientes: 1) en una sola clase los alumnos aprenden a desarrollar el plegado de cualquier figura y comienzan a proponer cambios en las formas básicas que se les dieron inicialmente; 2) comenzaron a hacer, figuras que no se habían trabajado. Esto parece que no lo hacían consientes, sino por exploración, dado que se les dificultó hacer figuras por encargo; 3) también permitió detectar y corregir problemas de lateralidad en los estudiantes, ya que en el armado de los módulos se hacen pliegues para arriba o para abajo, para la derecha o la ízquierda y los estudiantes deben comprender e interpretar las instrucciones exactas para poder hacerlos, por lo que deben distinguir el vértice superior izquierdo del derecho entre otros; 4) el trabajo con esta técnica facilitó el desarrollo de competencias ciudadanas en los estudiantes al permitirles trabajar en equipo en el armado de los diferentes módulos y en el acoplamiento de éstos, y cuando resultaron diferentes familias de poliedros a partir de un módulo común, cada grupo defendía su propia construcción hasta llegar a un acuerdo; esto los llevó a respetar la opinión del otro, al darse cuenta que a un mismo número de módulos podían haber diferentes opciones de figuras y por tanto diferentes respuestas a las preguntas que se les planteaban, por ejemplo, una representación algebraica o gráfica puede corresponder a varias figuras a la vez; 5) así mismo permitió el desarrollo de estrategias metacognitivas ya que debían tener presente cada paso y el orden de los acoplamientos en la armazón de la figura para poderla lograr; 6) permitió desarrollar habilidades de ubicación espacial, al tratar de hacer la construcción de las figuras poliédricas, debían tener plena conciencia de la ubicación de las puntas con sus correspondientes bolsillos de ensambles y precisión en la construcción de los propios módulos. 7) además permitió el estudio de familias de funciones, al relacionar el área lateral y los vértices de las familias de poliedros, que resultaron al aumentar progresivamente el número de módulos, con las representaciones algebraicas, tabular y gráficas con la icónica asociada correspondiente a cada familia, que a su vez son también familias de funciones. 8) permitió el transito por diferentes planos de representación, lo que llevó a asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras, así como el transito al interior de un mismo sistema de representación, al variar el tamaño de los módulos, dejando el número de éstos fijo, apareció un trabajo a escala con las diferentes figuras poliédricas resultantes en cada caso, dando paso al enlace de esta representación con la tabular, al comprar cada figurita en origami, con su correspondiente valor consignado en la tabla de valores y su correspondiente punto en el plano cartesiano.

En el trabajo con ese tipo de módulo resultaron varias familias de formas poliédricas, de la cuales decidimos trabajar solo dos: las que conducen a cubos o secuencias que parecen cubos siameses y los de formas de estrella. Algunas de estas se muestran en la figura 2:

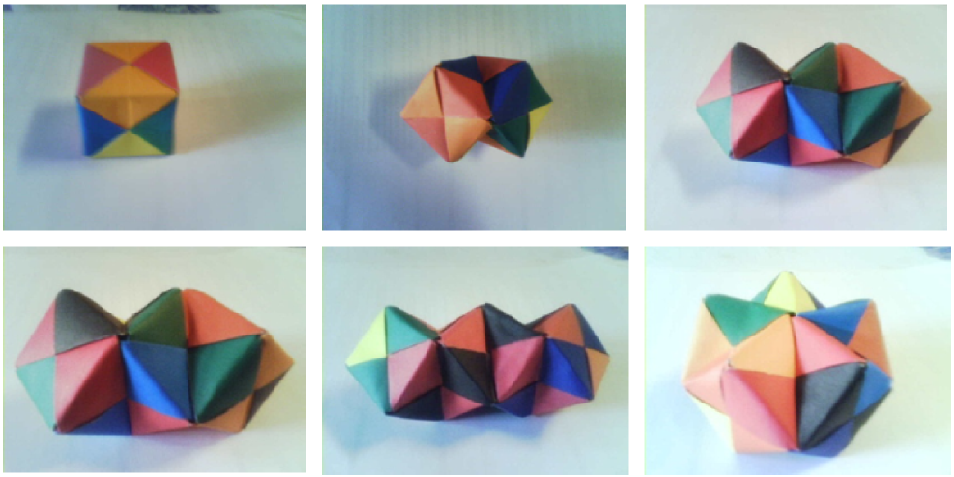


Figura 2

Ahora supongamos que se quiere construir una figura en Origami con módulos de papel cuadrados de lado l, como el que se muestra en las figuras 1 a y b. Con la menor cantidad de módulos de este tipo con que se pudo construir un poliedro fue con tres, y resultó una pirámide siamesa triangular de cinco vértices como la que aparece en la figura 1 c. El aumento en el número de módulos siempre debió ser múltiplo de tres.

Para encontrar el área lateral de esta figura volvimos a deshacer el módulo, de donde se encontró que la diagonal del cuadrado que queda visible en cada módulo es $\frac{l}{2}$, al lado de ese cuadradito visible lo llamamos a se utilizó el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de a, y luego de algún procedimiento algebraico sencillo se llega a que el área del cuadradito visible es $\frac{l^2}{8}$ y el área lateral de la pirámide siamesa triangular es $\frac{3l^2}{8}$ ya que la componen tres cuadraditos; el área del cubo es $\frac{6l^2}{8}$, ya que tiene seis cuadraditos, esto es, uno por cada cara. Y en general para una figura construida con n módulos de este tipo, el área lateral es $\frac{nl^2}{8}$. Al graficar en el plano (ver figura 3), se puede apreciar claramente una familia de parábolas de una sola rama, esto porque la longitud del cuadrado con el que se construye el módulo no puede tomar valores negativos.

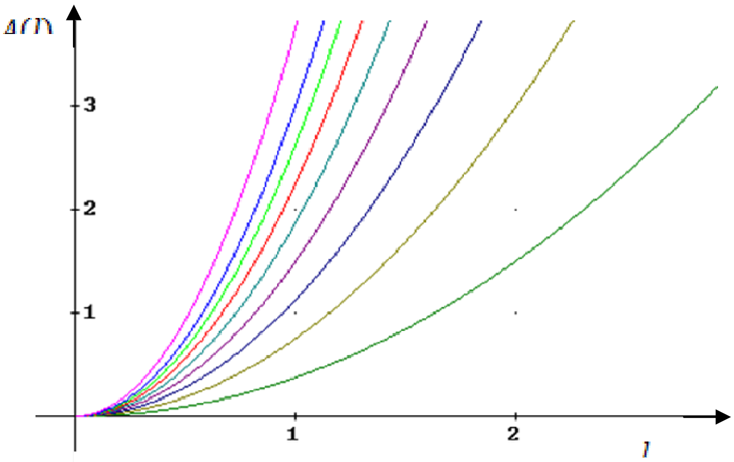


Figura 3

Otra de las variables que se trabajó fue el número de vértices que tiene cada poliedro. Para el que resulta una progresión aritmética como sigue: $v_n = \{5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17, \ldots,\ n+2\}$, donde n es el número de módulos que se utiliza para construir cada poliedro y va tomando valores de tres en tres con $n \geq 3$.

Referencias bibliográficas

Corredor, J. (2001). *Practiquemos el origami*. Bogotá, Colombia: Nessan.

Flores, E. (2007). Poliedros y origami modular. Extraído el 3 de Abril de 2008 desde http://www1.uprh.edu/amc/res_acad_2/Poliedros_Humacao.pdf.

González, N. y Larios, V. (2003). Origami modular: una oportunidad para estudiar poliedros en secundaria. *Correo del maestro, 87*. Obtenido el 3 de abril el 2008 desde hppt://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/agosto/nosotros87.htm

Núñez, P. (2005). Introducción a la técnica de papiroflexia japonesa. Extraído el 4 de Abril 2008 desde http://www.eaart.com/mon/126.asp?language=sp

SITUACIONES EMERGENTES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Mercedes Anido, Patricia Có, Mónica del Sastre, Martha Guzmán, Raúl Katz, Erica Panella
Universidad Nacional de Rosario Argentina
co@fceia.unr.edu.ar, rdkatz@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se relatan distintas situaciones emergentes de una actividad disparadora, que evoluciona y se modifica en la fase interactiva del trabajo de aula y concluye con la institucionalización de nuevos conocimientos (Brousseau, 1986). Se busca además, indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial para activar y utilizar de modo estratégico conocimientos ya adquiridos. En el marco de una investigación cualitativa se refieren dificultades relacionadas con la ubicación espacial tridimensional, en algunos casos generados desde lo didáctico, como asimismo dificultades para traducir al lenguaje algebraico expresiones verbales de un bien logrado razonamiento geométrico.*
Palabras clave: ubicación espacial, pensamiento visual, situaciones emergentes

Introducción

Se les plantea a los alumnos, como clave para generar los conocimientos matemáticos pretendidos, el problema de encontrar las coordenadas de los puntos de dos rectas alabeadas que realizan la mínima distancia. El problema se constituye en el medio didáctico a fin de lograr que un grupo de estudiantes que cursan el primer año de las carreras de ingeniería, en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario construyan un conocimiento de la Geometría Analítica.

Se busca a través del mismo estimular el pensamiento visual en tres dimensiones como asimismo indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial para activar y utilizar de modo estratégico conocimientos ya adquiridos.

En este trabajo y en el marco de una investigación cualitativa se describen distintas situaciones emergentes de una actividad disparadora, que evoluciona y se modifica en la fase interactiva del trabajo de aula y concluye con la institucionalización de nuevos conocimientos.

El problema abordado

Sean las rectas r_1 y r_2 dadas por sus ecuaciones paramétricas:

$$r_1\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad r_2\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases} \quad s \in R$$

¿Las rectas, son alabeadas? ¿Cuál es la distancia mínima entre ambas? ¿Cuáles son los puntos que realizan la mínima distancia?.

Objetivos de la actividad

- estimular el pensamiento visual en tres dimensiones,
- indagar en forma comprensiva y sistemática las concepciones y dificultades de los alumnos al resolver un problema que requiere ubicación espacial.

Nuestra concepción didáctica

La enseñanza que propugnamos se orienta a la organización de actividades donde el sujeto central de la teoría educativa es el alumno y sus posibilidades cognitivas. Desde esta perspectiva, el alumno es el protagonista en el proceso de construcción del conocimiento, y el docente la persona que le facilita el acceso al aprendizaje, estimulándolo en sus intervenciones, guía sin apresuramientos, actúa como un "moderador". No está para dar soluciones, sino para ayudar al alumno a utilizar de manera óptima los recursos de que dispone (Schoenfeld, 1985). De este modo el alumno va modificando sus decisiones en función de las retroacciones del medio.

Pero no basta con que resuelva el problema, debe además utilizar un lenguaje, formular su propio pensamiento de manera de hacerlo accesible a los demás y dar prueba de sus conclusiones.

Emergentes de la resolución del problema

El problema que se plantea fue el medio elegido para la apropiación de un conocimiento, en una tarea de resolución no rutinaria. El mismo se cierra momentáneamente, pero puede abordarse desde otra perspectiva y con nuevos requerimientos.

Las dos primeras preguntas tienen una rápida respuesta. Sin dificultad, la mayoría de los alumnos aplican, sobre un caso particular, resultados ya conocidos: condición de coplanaridad entre dos rectas en el espacio y cálculo de la distancia entre rectas alabeadas.

En la tercera cuestión, se encuentran con condiciones prácticas nuevas. Es allí donde deben apropiarse de las consignas de una situación.

En lo que sigue se muestran: distintas propuestas de resolución (enumerados por casos), errores que emergieron y nuevas situaciones problemáticas que se plantearon.

Cabe señalar que la situación de aula provocó la espontánea agrupación de los alumnos.

Caso 1

Un grupo de alumnos, más cercanos al razonamiento geométrico, emprenden el problema a partir de una situación particular: consideran r_1 y r_2 *ortogonales.* Toman r_1 como una arista del piso del salón de clase y r_2 como una arista del techo, ortogonal con r_1 (gráfico 1). Proponen cortar el plano π_1 de la pared, que contiene a r_1 y es perpendicular a r_2, para obtener un punto B y repetir el procedimiento, intersecando r_1 con el plano π_2 de la pared, que contiene a r_2 y es perpendicular a r_1, para obtener otro punto A. Sostienen que esos puntos A y B son los que realizan la mínima distancia.

Proceden analíticamente, sobre los datos del problema, sin observar que las rectas dadas no son ortogonales. No encuentran los planos π_1 y π_2 y, en consecuencia, no pueden determinar las coordenadas de A y B.

Desconcierto por parte del grupo. -¡No es posible! ¿Dónde está el error? ¿Están mal los cálculos?

No advierten que es la particularidad de su razonamiento la causa del error. No logran la "visualización", pensada como el proceso que les permitiría elegir, dentro de un complejo de relaciones, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver el problema con que se enfrentan (Guzmán 1996).

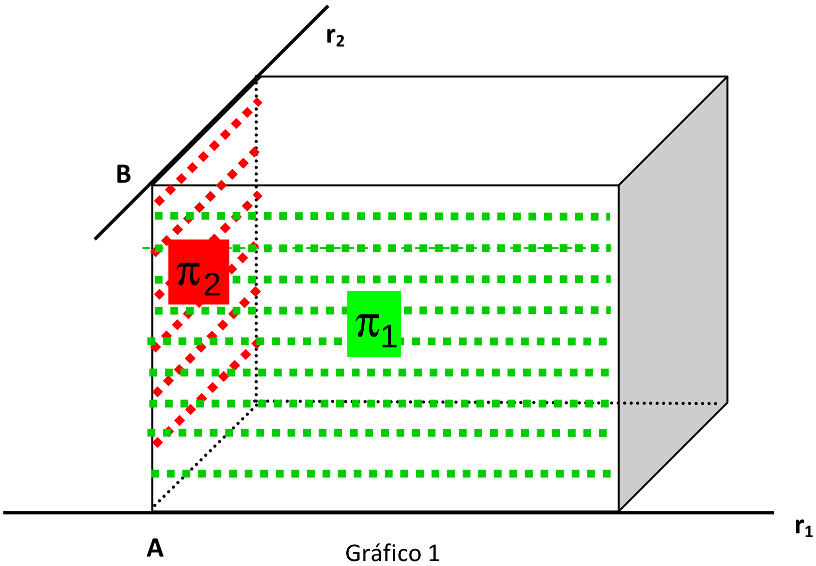


Gráfico 1

En lo que sigue se reproduce la interacción docente –alumnos.

> *Docente:* Los cálculos son correctos, el error no está allí. Revisen su propuesta ¿cómo consideraron a r_1 y r_2? ¿Las rectas del enunciado están en las mismas condiciones?
>
> *Alumno:* Las rectas dadas no son ortogonales, ¿entonces está mal lo que hacemos?
>
> *Docente:* “Vean” una recta **L** en el techo del salón, alabeada con r_1, y que no sea perpendicular a r_1. ¿Cómo son los planos perpendiculares a dicha recta?, ¿alguno de dichos planos contiene a r_1?
>
> *Alumno:* No, parece que no.
>
> *Alumno:* ¿y si buscamos un plano perpendicular al plano del piso que contiene a **L** y lo cortamos con r_1?
>
> *Docente:* ¿Cualquier par de rectas alabeadas está contenido en planos paralelos?

El problema inicial derivó en un nuevo problema.

En el grupo hubo “diferentes visiones”, pero finalmente un alumno apelando a la noción de haz de planos por una recta, y acomodando sus manos para representar un par de planos paralelos, logró la adhesión por la afirmativa, de los restantes miembros del grupo.

A partir de estas reflexiones el docente aprueba avanzar en esa línea: encontrar las ecuaciones de los planos paralelos que contienen a r_1 y r_2 respectivamente, para proseguir con la propuesta anterior de encontrar un plano que contiene a una de las rectas, por ejemplo r_2, y es perpendicular al plano que contiene a la recta r_1, para luego realizar la intersección con r_1 y obtener uno de los puntos buscados.

Los alumnos proceden de esta manera y obtienen un par de puntos cuyas coordenadas verifican la mínima distancia.

Caso 2

Otro grupo de alumnos eligió un camino diferente.

Su solución: los puntos A, B que buscamos determinan una recta cuya dirección es perpendicular a las direcciones de r_1 y r_2, entonces $\overline{AB}$ es perpendicular al vector $\overline{u}$,dirección de r_1, y también es perpendicular al vector $\overline{v}$, dirección de r_2.

Siendo: $\overline{AB}$ = (s − t − 1, 2s − t − 1, 2s − 3t − 1), $\overline{u}$ = (1, 1, 3); y $\overline{v}$ = (1, 2, 2), debe ser

$$\begin{cases} \overline{AB} \,.\, \overline{u} = 0 \\ \overline{\mathrm{AB}} \,.\, \overline{\mathrm{v}} = 0 \end{cases}$$

Resuelven el sistema $\begin{cases} 9s - 11t - 5 = 0 \\ 9s - 9t - 5 = 0 \end{cases}$ y obtienen la solución $s = \frac{5}{9}$, $t = 0$ valores de los parámetros que dan para r_1 el punto A = (1,1,1) y para r_2 el punto $B = (\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$.

Verifican, para asegurar su resultado, que $|\overline{AB}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Caso 3

Otro grupo de alumnos lo razona de la siguiente manera:

Los puntos A y B que se buscan son tales que $|\overline{AB}|$ debe ser igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Siendo A = (1 + t, 1+ t, 1 + 3t) y B = (s, 2s, 2s) resulta entonces que

$$\sqrt{(s-t-1)^2+(2s-t-1)^2+(2s-3t-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

o de manera equivalente

$$9s^2+11t^2-18st-10s+10t+3=\frac{2}{9}$$

Llegado a este punto los alumnos se enfrentan con una ecuación de segundo grado en dos variables y el problema original deriva en un nuevo problema: encontrar los puntos del plano que satisfacen esa ecuación, cuestión momentáneamente desconocida.

La ecuación de segundo grado en dos variables es objeto de estudio en una unidad posterior, lo que motivó reconsiderar este enfoque en esa instancia, incorporando nuevos elementos al problema: encontrar todos los puntos de las rectas r_1 y r_2 que se encuentran a una distancia, tanto menor como mayor a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Caso 4

Proponen $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, expresan $\left|\overline{AB}\right|$ en función de las coordenadas de A y B e igualan dicho módulo a $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Por otra parte consideran $\overline{AB}$ paralelo con $\bar{u}\wedge\bar{v}$.

Cuando traducen dichas condiciones al lenguaje algebraico escriben ecuaciones aisladas sin agruparlas en un sistema y no logran avanzar. Sólo dicen: hay muchas incógnitas. En su planteo no tienen en cuenta que las coordenadas de A y B deben satisfacer las ecuaciones de r_1 y r_2 respectivamente, hecho que es señalado por el docente.

Caso 5

Esta solución corresponde a un único alumno quien toma la información contenida en las ecuaciones paramétricas de la recta r_1 para escribir una supuesta ecuación cartesiana de la recta en el espacio. Sin advertirlo, obtiene la ecuación de un plano ortogonal a la recta dada, que contiene al punto dado en las ecuaciones paramétricas. Luego multiplica dicha ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{3}$ valor de la mínima distancia, creyendo que de esa manera obtiene una recta r_3 paralela a r_1 y a una distancia de $\frac{\sqrt{2}}{3}$ de la misma. Esta recta la quiere interceptar con r_2 para encontrar a uno de los puntos (gráfico 2). Del mismo modo obtendría el otro punto.

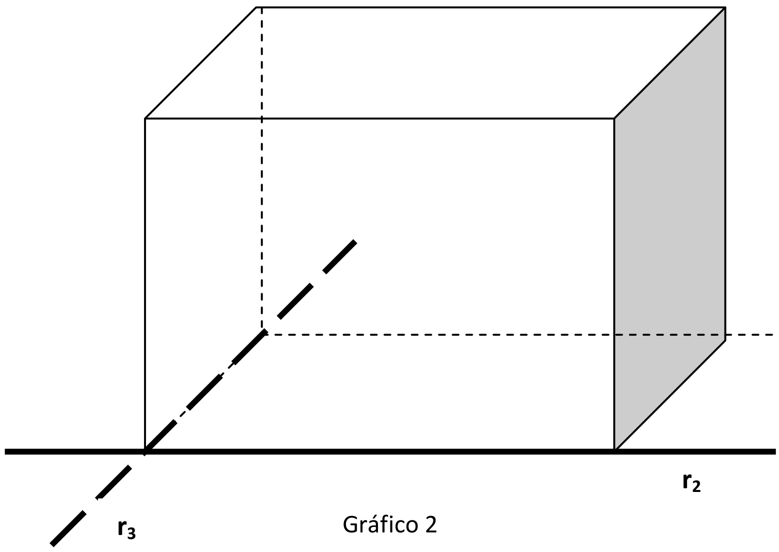


Gráfico 2

Cuando el alumno es interrogado sobre la forma general de la ecuación de un plano responde correctamente, pero no advierte su error de hacerle corresponder a una recta en el espacio una ecuación del plano. La reflexión sobre las diferentes formas de la ecuación de una recta en el espacio lo lleva a reconocer su error.

Cuando se le pregunta qué obtiene cuando se multiplica miembro a miembro una ecuación por un escalar diferente de cero, logra la respuesta correcta recién cuando la misma es referida a una ecuación simple con una incógnita.

Asimismo fundamenta su propuesta a través de una asociación con la operación de producto de un vector por un número, diciendo: si a un vector lo multiplico por dos obtengo el doble. Ante la intervención del docente se rectifica y hace referencia al módulo.

Se considera que en este caso el error no es el efecto de la ignorancia, o del azar, sino la consecuencia de un conocimiento no apropiado a una nueva situación.

En cada caso se discutieron las estrategias empleadas, interrogando a los estudiantes sobre los procesos de solución presentados por ellos, instándolos a comunicar sus experiencias. Se procuró transmitirles la idea de que hacer matemática significa preguntarse y preguntarse hasta que las cosas tengan sentido. Que una vez encontrado éste, habrá que plantearse el esquema de solución y elegir las herramientas matemáticas más útiles y aplicarlas y finalmente reflexionar sobre la solución, es el "mirar atrás" de (Polya 1998).

Se impulsó a los distintos grupos a que comunicaran y defendieran sus soluciones, lo que les permitió apreciar no sólo la riqueza y diversidad de procedimientos empleados, sino también cómo en un mismo problema se pueden considerar diferentes alternativas, según el tipo de conocimiento que entra en juego con él. Se propició de este modo un espacio en el cual se dio la discusión entre los estudiantes, quienes a través de sus interacciones contribuyeron hacia un aprendizaje personal y grupal más efectivo. En este contexto el rol del docente fue ayudar a los alumnos a poner en evidencia las relaciones que existen entre los diferentes procedimientos usados y construir una suerte de jerarquía de los mismos.

Algunas observaciones y reflexiones

Al concluir la experiencia, se pudo constatar que todos los alumnos entraron en interacción directa con el problema, pudiéndose registrar errores y valorar aciertos. En cualquier caso la reflexión provocada sobre esos errores y/o aciertos se transformaron en un aprendizaje.

La esencia de la metodología de trabajo radicó en la discusión que se generó a partir del planteo de un problema. En diferentes instancias se guió a los alumnos a través de una serie de preguntas, cada una de las cuales significó no sólo la reproducción de un conocimiento, sino la búsqueda de una respuesta a la pregunta formulada.

La realización de la actividad favoreció el seguimiento del trabajo de los alumnos, reveló sus dificultades, y permitió valorar los progresos alcanzados; constituyéndose de este modo en una forma de evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje, que se produce en un contexto de trabajo colectivo.

Desde lo didáctico la metodología empleada resultó particularmente útil por cuanto comprometió a los alumnos a explicitar sus concepciones. En esta instancia emergieron dificultades relacionadas con la visualización (Guzmán, 1996) y ubicación espacial tridimensional, como asimismo dificultades para traducir al lenguaje algebraico expresiones verbales de un bien logrado razonamiento geométrico.

Se apeló permanentemente al uso de elementos arquitectónicos y mobiliarios del aula hasta lograr un camino que permitiera alcanzar el significado geométrico y algebraico pretendido.

Si bien es cierto que este recurso es útil para alcanzar una primera aproximación en la comprensión y visualización de propiedades espaciales, también es cierto que puede constituirse en un obstáculo cuando no es objeto de una generalización en el momento en que se institucionaliza el conocimiento pretendido.

El problema abordado permitió integrar el procesamiento de la información visual con procedimientos analíticos. Los alumnos lograron valorar la importancia de los elementos algebraicos para traducir hechos geométricos en expresiones analíticas y entender de este modo que el álgebra y la geometría son lenguajes alternativos para expresar una misma idea matemática.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C y Saiz, I. (Eds.). *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Paidos Educador.

Guzmán de, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Polya, G. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Separata. *La enseñanza de la Matemática a debate*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

¿FUNCIÓN DERIVADA O FUNCIÓN PENDIENTE DE UNA CURVA?

Alejandro Lois, Liliana Milevicich, Laura Gelsi, Ana González
Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional Argentina
alelois@ciudad.com.ar, lmilevicich@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Tecnología avanzada. Pensamiento Matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *La enseñanza de la derivada está habitualmente vinculada a un tratamiento algebraico y teórico. Se inicia asociando la tangente al resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes, para luego continuar con la enseñanza de la derivada de distintas funciones y la demostración de algunos teoremas, con lo cual se pierde el nexo con el entorno geométrico y, con ello, la posibilidad de visualizar la construcción de la derivada punto a punto, concebida como una nueva función. Atendiendo a esta problemática, elaboramos una propuesta didáctica con el propósito de "construir" la función derivada de modo geométrico, en un entorno informático adecuado, mediante la utilización de un software prediseñado.*
Palabras clave: visualización, entorno informático, algoritmación, función derivada

Introducción

El desarrollo de habilidades y destrezas en los alumnos requiere de tiempos prolongados para lograr el dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento asociados, pero exige, al mismo tiempo, rupturas con el pensamiento algebraico. En general, los tiempos didácticos necesarios para el logro de las habilidades y destrezas, no se corresponden con los tiempos académicos. Los investigadores Campistrous y Rizo (1992) y Hernández, Delgado y Fernández (1998) han reflexionado sobre el hecho de que las herramientas actuales de cálculo convierten rápidamente en obsoletas gran parte de las destrezas de cálculo a las que se dedica considerable tiempo en los cursos tradicionales. Creemos que sería valioso reducir la enseñanza de estas destrezas y algoritmos, a la comprensión de las ideas básicas y a la realización de ejemplos simples, liberando un tiempo considerable para la profundización de otros aspectos tales como, la comprensión de los conceptos y su aplicación a la resolución de problemas.

Es ampliamente aceptado el hecho de que en el contexto de la enseñanza tradicional, los conocimientos que se pretenden impartir no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en un curso de Análisis Matemático (AM) para estudiantes de Ingeniería, tales como el logro, por parte de los mismos, de un aprendizaje significativo de los conceptos del cálculo diferencial e integral y su aplicación a la resolución de situaciones problemáticas vinculadas con los problemas propios de su carrera.

Para acceder al estilo de pensamiento que se precisa en el AM, se requiere, entre otras cosas, del manejo de un entorno gráfico amplio por parte del que aprende.

Los procedimientos matemáticos, denominados procedimientos generales en el sentido en que los define Hernández (et. al, 1998), son aplicables al AM en su totalidad y, en particular, al estudio del Cálculo. En ese sentido, el alumno debe aprender a:

- *Interpretar,* de modo que pueda utilizar correctamente una graficadora o programa computacional para resolver problemas de cálculo,
- *identificar* definiciones y teoremas y los elementos constitutivos en cada caso,
- *recodificar,* de modo que pueda encarar la resolución de un problema dado desde otra perspectiva,
- *calcular* de forma manual, mental, mediante el uso de tablas, calculadoras u ordenadores,
- *algoritmizar,* dado que la sucesión de operaciones planteadas en el algoritmo puede servir como base de orientación para la tarea o problema que exige el modelo para su resolución,
- *definir,* de modo que desarrolle en el alumno un pensamiento reflexivo, riguroso y crítico,
- *demostrar,* de tal manera que pueda esgrimir argumentos sólidos que confirmen la veracidad de una proposición,
- *modelar*, procedimiento de fundamental importancia a la hora de simular el comportamiento y características de los fenómenos,
- *comparar,* para que pueda relacionar dos elementos asociándolos según determinadas características comunes a ambos,
- *graficar*, de modo que pueda establecer relaciones entre objetos matemáticos a través de su representación gráfica. Este procedimiento permite al alumno comunicar información de manera visual, lo cual es muy importante en las primeras etapas del proceso de asimilación de un concepto. La imagen geométrica funciona en muchas ocasiones como el umbral para que el alumno acceda al concepto.

La enseñanza tradicional tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y algebraicos, dejando de lado las otras habilidades y, por supuesto, los argumentos geométricos, por no considerarlos formales, entre otras causas.

El problema

El concepto de función es bastante complejo para los alumnos. Si bien la mayoría de los recién iniciados en un curso de AM de primer año, no tienen dificultades en esbozar la definición de función, dominio, contradominio; los obstáculos aparecen al momento de modelar y luego graficar, con el propósito de integrar los dominios algebraico y geométrico. Coincidimos con Fernández, Gil, Carrascosa, Cachapuz, y Praia (2002) cuando sostienen que las mayores dificultades cognitivas aparecen en el contexto geométrico, razón por la cual, en la enseñanza se acude a los algoritmos, más fáciles de gestionar. Uno de los propósitos centrales, entonces, es poder establecer un isomorfismo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral, 2000).

En ese sentido, observamos que los alumnos son capaces de derivar una función, aplicando las reglas de cálculo aprendidas, sin asumir que los resultados obtenidos forman parte de la imagen de una nueva función susceptible de ser derivada. También les resulta difícil, reconocer, en un problema referido a razones de cambio, la necesidad de un proceso de derivación. En este tipo de problemas, los alumnos tienen dificultades, no sólo en relacionar ambas magnitudes, sino también en darle sentido a la razones de cambio que intervienen en la ecuación. En general, de modo tradicional, se presenta el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, lo cual presupone que la noción de pendiente ya es conocida por los alumnos, pero luego se pasa al tratamiento algebraico y teórico, donde se asocia la tangente al resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes. Paso seguido, se inicia una secuencia que consiste en enseñar a derivar diversas funciones y a demostrar algunos teoremas. Es ahí dónde se pierde el nexo con el entorno geométrico y, con ello, la posibilidad de visualizar la construcción de la derivada punto a punto, concebida ésta como una nueva función. Algunos autores (Orton, 1980; Tall, 1986; Tall, 1994; Dolores, 1999) sostienen que los alumnos exhiben dificultades en utilizar apropiadamente las representaciones gráficas: si bien son capaces de calcular correctamente la función derivada de una función polinomio, de manera algebraica, y hallar la pendiente de la tangente en un punto dado de la misma, son incapaces de construir la función derivada y deducir sus propiedades.

Propuesta

A partir de los conceptos previos sobre funciones y sus distintas formas de representación, y el concepto de pendiente de una recta; elaboramos una propuesta didáctica con el propósito de construir la función derivada, utilizando los recursos geométricos en un entorno informático adecuado (incorporando la utilización de un software prediseñado), y evitando que el desarrollo de cálculos algebraicos, propios del proceso de obtención de la función derivada por métodos analíticos, constituya un obstáculo para el aprendizaje.

En ese sentido, proponemos:

a) obtener geométricamente las sucesivas pendientes de la curva en estudio, mediante la utilización de un software didáctico, de tal modo, que en el intervalo solicitado, se grafique, para un conjunto de puntos sucesivos muy próximos, la terna compuesta por el valor de la función, la recta tangente en el punto y el valor de la pendiente representado por la imagen de la función derivada (ver Figura 1),

b) calcular y representar manualmente la función derivada a partir del gráfico de la función primitiva, calculando la pendiente de la curva en varios puntos del intervalo considerado, utilizando un "triángulo indicador" de la pendiente de la recta tangente a partir de la abscisa y la ordenada respectiva,

a) comparar los gráficos de la función derivada obtenida manualmente y el gráfico de las sucesivas pendientes producido por el software,

b) visualizar mediante el software la construcción de la función derivada de las funciones: constante, lineal, cuadrática de un solo término, seno, coseno y exponencial.

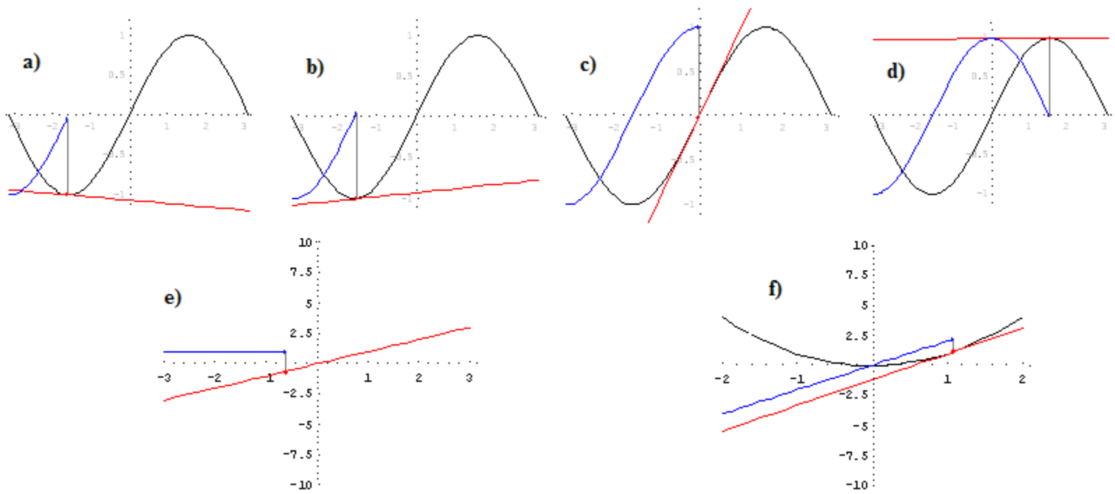


Figura 1. Gráfico de las funciones (a, b, c y d) $f(x) = sen(x)$, (e) $g(x) = x$ y (f) $h(x) = x^2$

Las funciones originales se grafican en color negro, la recta tangente en diferentes puntos del intervalo a estudiar, en color rojo, y la función "pendientes de la recta tangente" en color azul.

A partir de realizar estas actividades se pretende que los alumnos:

- adquieran habilidad en la lectura visual directa de las características más notables de la pendiente de una curva: la variación del signo, los puntos de pendiente nula, los puntos dónde no es posible determinar la pendiente, relacionándolo con el comportamiento de la función: crecimiento, decrecimiento y localización de extremos,
- adviertan que un punto donde se anula la derivada, no es una condición suficiente para que la función tenga un extremo relativo,
- obtengan conclusiones sobre la derivada de las funciones constante, lineal, cuadrática del tipo ax^2, seno, coseno y exponencial. En el caso de la función exponencial, es útil investigar para que valor de la base la gráfica tiene una pendiente igual al valor de la ordenada en el punto con lo cual la función derivada coincide con la función dada; y obtener de ese modo una buena aproximación al número e obtengan conclusiones sobre las funciones discontinuas en un punto, (ver Figura 2) a partir del análisis visual del comportamiento de la recta tangente en las proximidades del punto de discontinuidad y su relación con la pendiente.

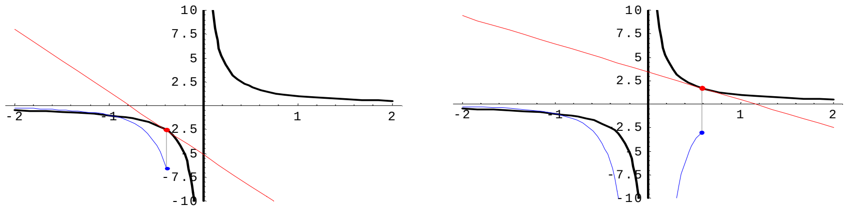


Figura 2. Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en dos aproximaciones distintas.

Creemos que la expresión “función derivada” surge por una abreviatura del lenguaje, en realidad correspondería decir “función pendiente de la curva” si se la concibe y construye como tal.

Metodología

En el año 2007, diseñamos e implementamos una experiencia de tipo cuasi experimental con dos grupos de primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica. Las comisiones que formaron parte de la experiencia estaban formadas, en su mayoría, por alumnos que cursaban AM por primera vez, sólo unos pocos alumnos cursaban en 2º o 3º instancia; es por ello que ambos grupos realizaron un pretest, con el propósito de explorar los conceptos previos que tenían sobre las características de la derivada de una función, y la determinación de máximos y mínimos locales en relación con ella. Los resultados de esta evaluación no reportaron que ellos tuvieran conocimientos significativos que pudieran, a nuestro juicio, incidir en los resultados de la experiencia.

El grupo A, trabajó sobre un conjunto de actividades en el laboratorio de informática, alternando con clases en el aula, mientras que con el grupo B se trabajó de modo tradicional.

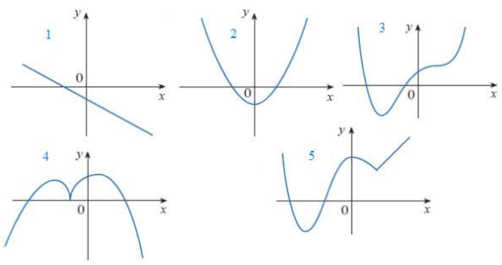
La tercera semana, ambos grupos resolvieron la siguiente prueba postest:

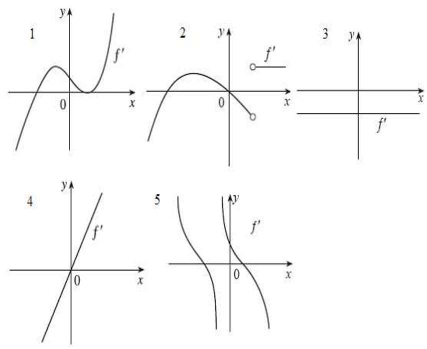
Actividad 1: *Algunas de las funciones, cuyos gráficos están numerados entre 1 y 5 en la primera secuencia, están asociadas al gráfico de su función derivada, que se muestran en la segunda secuencia.*

a) Establezca, cuando sea posible, tales asociaciones entre la primera secuencia de gráficos y la segunda.

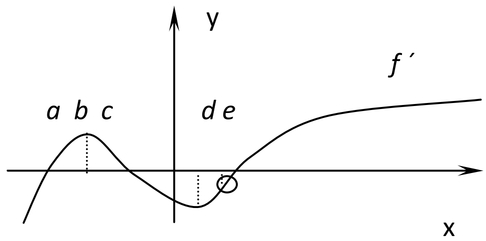
b) Para aquellas funciones, dónde no sea posible establecer la asociación, dibuje de modo aproximado la gráfica de la función derivada.

Observación: En todos los casos, ambos ejes están dibujados a la misma escala.





Actividad 2: f' *representa la función derivada de una función* f .



a) Hacer un grafico aproximado de la función f *.*

b) Indica posibles dominios para f *y* f'*.*

c) Realizar un grafico aproximado de la segunda derivada f''*.*

d) ¿Es la función f *que encontraste la única que cumple con las condiciones dadas por el problema? Justifica tu respuesta*

e) ¿Cuáles valores del dominio de la función f *son puntos críticos?*

Análisis de la experiencia y resultados

Nuestro propósito fue realizar un análisis que fuera más allá de las respuestas correctas o incorrectas a cada uno de los ítems. En ese sentido, luego de identificar los errores en cada evaluación, los asociamos a las dificultades que dieron origen a tales manifestaciones. La Tabla 1 recoge las dificultades más frecuentes y los porcentajes de aparición en cada curso.

Dificultades más frecuentes	Curso A	Curso B
No asocia el crecimiento/decrecimiento de la función con el signo de la derivada	25.6 %	38.7 %
No reconoce las propiedades de la tangente vertical	14 %	51.6 %
No asocia el concepto pendiente de la función en un punto con la derivada	25 %	32.2 %
No asocia las condiciones de derivabilidad y continuidad	2.3 %	3.2 %
No asocia los conceptos de derivada y antiderivada	84 %	67.7 %

Tabla 1. Resultados de la evaluación Postest

Cabe observar que la actividad 1 requiere un análisis directo: función-función derivada, en cambio la actividad 2 requiere del camino inverso.

Respecto de la actividad 2, ítem d, esta fue contestada correctamente por algunos alumnos en ambos cursos. La respuesta está asociada al concepto de antiderivada, que si bien no se ha desarrollado formalmente, les fue posible realizar el camino inverso a partir de derivar una familia del tipo $f(x)+c$. Sin embargo, la mayoría de los alumnos del curso A logró armar de manera satisfactoria la pareja 2-4 en la actividad 1. Es importante notar que trataba de un problema de la misma naturaleza pero asociado a una función particular del tipo x^2-c y su derivada $2x$, y además planteado en sentido directo.

También cabe observar las diferencias entre los cursos A y B en cuanto al reconocimiento sobre la existencia de la derivada en un punto.

Conclusiones

- A partir de los resultados obtenidos, consideramos que las actividades desarrolladas por el grupo A contribuyeron a un mejor aprendizaje del concepto. En particular, cabe notar la asociación que estos alumnos lograron establecer entre la existencia de pendiente y la tangente vertical de la curva. Creemos que las actividades de visualización sobre el comportamiento de la recta tangente en los puntos de discontinuidad fueron decisivas.

- Considerando futuras réplicas de la presente experiencia, cabe destacar la necesidad de un proceso de adaptación a las nuevas herramientas que habitualmente denominamos “amigarse con el software”, de lo contrario su utilización se convierte en un obstáculo en el proceso de aprendizaje. Consideramos que un período más prolongado de uso del software podría influir en el desarrollo de las actividades y en la efectividad de las producciones de los alumnos.

- La experiencia (educativa que ahora reportamos, nos permite sostener una posición respecto del papel que la tecnología juega en las realizaciones didácticas, la cual consiste en asumir que, efectivamente, es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de los conceptos matemáticos, en la medida que los medios didácticos sean entendidos como verdaderos dispositivos didácticos bajo el control del diseño de las actividades. La visualización de los conceptos y de los procesos matemáticos no es una consecuencia de la incorporación de recursos tecnológicos, sino que, por el contrario, obedece a la articulación entre un diseño teórico ya elaborado y la situación didáctica que incorpora un software educativo como herramienta.

Referencias bibliográficas

Azcárate C y Bosch D (1996). *Cálculo diferencial e integral.* España: Síntesis

Campistrous, L. y Rizo, C. (1992). *Enseñanza de la Matemática: reflexiones polémicas*. La Habana, Cuba: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas

Cantoral R, Mirón H (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3)*, 265-292.

Dolores, C (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fernández, I, Gil, D, Carrascosa, J, Cachapuz, A y Praia, J (2002). Visiones deformadas de la ciencia transmitidas por la enseñanza. E*nseñanza de las Ciencias 20(3)*, 477-488.

Hernández, H., Delgado, R., y Fernández, B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimiento en la Educación Polimodal y Superior.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Orton, A. (1980). *A cross-selecional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis de Doctorado no publicada, University of Leeds.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: International Thomson.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graghic*. Tesis de Doctorado no publicada, University of Warwick.

Tall, D. (1994). Calculus and Analysis. In T. Husen & T. N. Postlethwaite, (Eds.) *The International Encyclopedia of Education, Second Edition*. (pp. 3680-3681, 3686). Pergamon Press.

LA ALTERNANCIA INFINITA NO SIEMPRE ES INFINITUD

María Rosa Rodríguez de Estofán
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Con frecuencia los estudiantes confunden los conceptos de "sucesión" y "serie" y presentan serias dificultades en su aprendizaje. Si bien una serie está definida por una sucesión, los alumnos no distinguen su diferencia y es preciso recurrir a la estrategia de los aprendizajes significativos, identificando los conceptos previos, para luego asociar los nuevos e incorporarlos a su estructura cognitiva. En este trabajo se realiza un vasto estudio de las series alternadas, enunciando los teoremas apropiados que justifican las razones de su tratamiento y exponiendo el propósito de su enseñanza. En las demostraciones formales se realizan, además interpretaciones y gráficas. También, se intenta mostrar las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos", respondiendo las preguntas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?; ¿se altera la suma de las series convergentes? Un concepto es asimilado por el alumno cuando puede establecer relaciones lógicas entre lo que pertenece y no pertenece a dicho concepto.*

Palabras clave: serie, suma, reordenamiento

Introducción

Las series fueron introducidas al Cálculo en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de los números. Su importancia surgió de la idea de Newton de representar funciones como series, especialmente para el cálculo de ciertas áreas.

Las palabras o términos "sucesión" y "serie" son utilizados en el lenguaje común con significados casi idénticos, pero sus significados matemáticos son completamente distintos. Además, es muy importante conocer los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y de series. Es frecuente que los estudiantes confundan estos conceptos y son temas en los que presentan mayores dificultades de aprendizaje. Si bien una serie está definida por una sucesión, es notorio que los alumnos no distinguen la diferencia entre uno y otro. Como docentes debemos hacer hincapié continuamente en la diferencia entre ambos conceptos.

Aunque se puede enseñar a los estudiantes a analizar la naturaleza de una serie, existen grandes dificultades para lograr una comprensión del concepto. Por ejemplo, muchos estudiantes son capaces de aplicar, en forma correcta, las pruebas de convergencia para series y, sin embargo, muestran dificultades en la interpretación del concepto. Consideramos que se logra una comprensión completa del concepto cuando se reconocen y se reconstruyen las ideas de sucesión, convergencia, monotonía y acotación en diferentes contextos.

En este trabajo se realiza un vasto estudio de las series alternadas, enunciando y demostrando los teoremas apropiados que justifican las razones de su tratamiento y exponiendo el propósito de la enseñanza de estas series alternantes.

Marco Teórico

Para la enseñanza de series alternadas es fundamental recurrir a la estrategia de los aprendizajes significativos, identificando los conceptos previos, para luego asociar los nuevos e incorporarlos a su estructura cognitiva. También, es importante que dentro de las demostraciones formales se realicen interpretaciones gráficas que, sin duda, son de gran utilidad para el aprendizaje de los estudiantes.

Según los referentes teóricos que señalan las distintas formas de conocer un concepto y la forma en que se construye el conocimiento, parece común a todas las teorías y caracteriza al pensamiento matemático avanzado, es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática a través de la metáfora de la construcción de un objeto, que se puede emplear en sí mismo, a partir de un proceso que generalmente se realiza paso a paso; Meel, D. E. (2003). Aunque esta idea de construcción de la comprensión ha generado algunas críticas, creo que proporciona recursos conceptuales (la noción de esquema, nociones matemáticas como acciones, procesos u objetos) que explicarían el desarrollo de la comprensión del concepto de series.

Un esquema organizado representa lo que puede repetirse y generalizarse en una acción determinada, en circunstancias iguales. Es decir, el esquema es aquello que poseen en común las acciones. Un esquema es una actividad operacional que se repite (al principio de manera refleja) y se universaliza de tal modo que otros estímulos previos no significativos se vuelven capaces de suscitarla. La teoría de Piaget (1983) trata en primer lugar los esquemas, cuyo desarrollo es un proceso dinámico y cambiante. Con su desarrollo surgen nuevos esquemas y los ya existentes se reorganizan de diversos modos. Esos cambios ocurren en una secuencia determinada y pasan por tres niveles o fases. El mecanismo por el cual el sujeto transita de un nivel a otro es denominado abstracción reflexiva. Estos niveles se encuentran siempre cuando se analiza el desarrollo de un esquema de cualquier noción matemática.

Baker, Cooley y Trigueros (2000) señalan que "la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema y pueden tener problemas diferentes incluso con la misma situación en distintos casos". Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir cuándo la noción es aplicable o no. También, sabemos que hay que centrar la atención en el "tipo de relaciones" que los estudiantes son capaces de establecer entre los "elementos matemáticos" del concepto, comprendidos de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto) cuando resuelven situaciones problemáticas.

Aquí se pretende mostrar teóricamente las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos". Para ello, se intenta responder las preguntas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?; ¿se altera el valor de la suma de las series convergentes? Uno de los objetivos del tratamiento de las series alternadas es que permite analizar su comportamiento cuando se realiza un reordenamiento o un reagrupamiento de sus términos. Otro factor que influye en el aprendizaje es conocer las razones del tratamiento de un tema, que responde al cuestionamiento frecuente de los alumnos "¿para qué sirve?".

Desarrollo

Las sumas finitas tienen la propiedad de que es posible cambiar el orden de sus términos, o sea reordenar a voluntad los términos, sin que por ello cambie el valor de su suma, por lo que se pueden sumar sus términos comenzando con el último. Esto no es posible en las sumas infinitas, pues no existe un último término. Desde este planteamiento se intenta ver el comportamiento de las series frente a un reordenamiento de sus términos.

De acuerdo a su definición, una serie es una sucesión $\{S_n\}$ que se obtiene de otra sucesión $\{a_n\}$ dada, según un procedimiento especial que se estableció antes. Otros conceptos previos para el aprendizaje de series alternadas son: convergencia de series, suma de una serie, identificación de series particulares y los criterios de convergencia de series con términos positivos.

Definición de Series Alternadas

Son las series numéricas cuyos términos sucesivos tienen signos alternados y se simbolizan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots \quad \text{donde} \quad a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathrm{N}$$

Existen distintas *razones* para estudiar estas series.

Una razón es que toda serie alternada converge si sus términos en valor absoluto conforman una sucesión $\{a_n\}$ decreciente o no creciente con límite 0 (cero).

Otra razón es que si una serie de este tipo converge, siempre es posible estimar su suma.

La combinación de estas razones, la convergencia asegurada y la fácil estimación de su suma, permite conocer el comportamiento de una gran variedad de series.

Teorema de Leibniz o Criterio de Convergencia de Series Alternadas

Si una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ con $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathrm{N}$

satisface las condiciones: a) $a_{n+1} \le a_n \quad \forall\, n \in \mathrm{N}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie es convergente.

Como recurso de aprendizaje se recurre al siguiente gráfico.

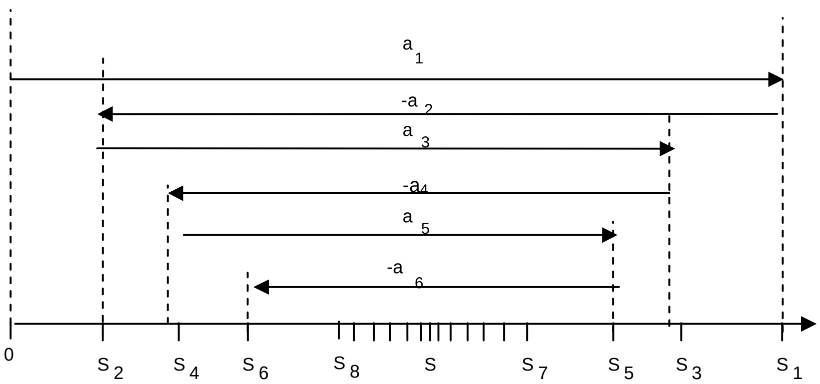


Figura 1. Comportamiento de los Términos de una Serie Alternada

Se grafica $S_1=a_1$ en una recta numérica. Para encontrar S_2 se resta a_2, así S_2 se encuentra ubicado a la izquierda de S_1. Luego, para encontrar S_3 se suma a_3, así resulta S_3 a la derecha de S_2.

Pero, como $a_3 < a_2$, S_3 está a la izquierda de S_1. Continuando de esta manera, se ve que las sumas parciales oscilan hacia atrás y hacia delante. Además, $a_n \to 0$, entonces, los pasos sucesivos se vuelven cada vez más pequeños.

Por lo tanto, las sumas parciales de subíndices pares S_2, S_4, S_6, … son crecientes (o no decrecientes) y las sumas parciales de subíndices impares S_1, S_3, S_5, … son decrecientes (o no crecientes) y es razonable pensar que ambas sucesiones convergen a algún número S. En la demostración se consideran, por separado, las sumas parciales de índices pares e impares.

Las sumas parciales de índices pares:

$$S_2 = a_1 - a_2 \geq 0 \qquad \text{pues} \qquad a_2 \leq a_1$$

$$S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) \geq S_2 \qquad \text{pues} \qquad a_4 \leq a_3$$

$$S_6 = S_4 + (a_5 - a_6) \geq S_4 \qquad \text{pues} \qquad a_6 \leq a_5$$

$$\vdots$$

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{pues} \quad a_{2n} \leq a_{2n-1}$$

Así, $0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ y

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \quad \Rightarrow S_{2n} \leq a_1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\{S_{2n}\}$ es no decreciente y acotada superiormente $\therefore$ $\{S_{2n}\}$ es convergente y si llamamos S a su límite, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Para las sumas con subíndices impares: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S$.

Como ambas sucesiones convergen a S: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge.

No es sencillo encontrar la suma S de una serie convergente. Con frecuencia se usa la suma parcial S_n como una aproximación a la suma total S de una serie convergente, pero esto no es muy útil, a menos que sea posible estimar la exactitud de la aproximación. El error en que se incurre al usar $S \approx S_n$ es $|S - S_n|$.

La otra razón del tratamiento de las series alternadas es que, en las series que satisfacen el Teorema de Leibniz, el error es menor que a_{n+1} que es el primer término eliminado.

Teorema de Estimación

Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es la suma de una serie alternada que satisface las condiciones del Teorema de Leibniz, entonces $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

$$S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots = (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots]$$

$$\Rightarrow |S - S_n| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$

Todos los paréntesis son ≥ 0 $\quad \Rightarrow \quad |S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in N$

Dada cualquier serie, se puede considerar la serie cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Con el fin de mostrar otro objetivo del estudio de las series alternadas, que es analizar su comportamiento cuando se realiza un reordenamiento de sus términos, son necesarios:

Convergencia Absoluta y Condicional

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice *absolutamente convergente* si la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice *condicionalmente convergente* si es convergente pero no es absolutamente convergente.

Teorema: Toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente es convergente.

Como $a_n = \pm |a_n| \Rightarrow -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \forall n$; y sumando $|a_n| \Rightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \forall n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ es convergente

y, por el criterio de comparación, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge.

De la identidad $a_n = a_n + |a_n| - |a_n| \quad \forall n$ se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente.}$$

El enunciado recíproco es falso, pues la convergencia depende de la presencia de infinitos términos positivos y negativos dispuestos en un orden particular. Lo corrobora el siguiente

Teorema: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son convergentes.

De estos teoremas se puede afirmar que toda serie convergente de términos positivos puede utilizarse para obtener una infinidad de series convergentes, sencillamente poniendo signos menos al azar. Sin embargo, no todas las series convergentes pueden obtenerse de esta manera, tales series serían las condicionalmente convergentes.

Un herramental importante para analizar la naturaleza de una serie son los Criterios, quedando en claro que éstos no dan la suma de una serie convergente, sólo dan naturaleza.

Si tenemos una serie que es absolutamente o condicionalmente convergente, nos preguntamos si esta suma infinita se comporta como una suma finita. La respuesta es no, porque la suma de una serie se define como un límite, que es el $\lim_{n \to \infty} S_n$. Surge la pregunta de si un reordenamiento de ella conserva la independencia del orden de sus términos.

Reordenamiento o Reagrupamiento de Términos

Se entiende por *reordenamiento* de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a toda serie que tiene los mismos sumandos pero en distinto orden. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente con suma S, cualquier reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene la misma suma S que la serie original.

Se podría pensar que todas las series convergentes tienen esta característica, pero cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar para dar una suma diferente.

La serie armónica alternada se usa con frecuencia para poner de manifiesto una propiedad que comparten todas las series condicionalmente convergentes: Un reordenamiento de la serie puede cambiar su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad ; \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots = S \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\cdots = \frac{1}{2}S$$

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+\cdots = \frac{1}{2}S \qquad (2)$$

sumando (1) y (2) $$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+0\cdots = \frac{3}{2}S.$$

Esta última serie tiene los mismos términos que la primera de suma S, pero ubicados los términos de manera que uno negativo esté luego de dos positivos. No obstante, las sumas de estas series *no* son iguales. Esto pone de relieve el hecho de que una serie *no* es tan sólo la suma de un conjunto infinito de números, sino un par de sucesiones relacionadas entre sí. En el ejemplo se ve que las dos series son completamente diferentes, que tienen sucesiones de términos totalmente distintas y por lo tanto no debe sorprender que converjan a sumas diferentes. También, es posible ver que reordenaciones más extremas pueden convertir la primera serie en una serie divergente o en una serie que converja a cualquier suma deseada.

De hecho, Riemann probó: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie *condicionalmente convergente* y **r** es un número real cualquiera, entonces existe un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con suma es igual a **r.**

Si la serie dada es divergente: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ = 1−1+1−1+1−1+**…** es divergente, mientras que (1−1)+(1−1)+(1−1)+**…**converge a 0 y 1− (1−1) − (1−1) − (1−1) −**…** converge a 1.

Conclusiones

En este trabajo se intentó mostrar las similitudes y diferencias, cuando existen, entre las sumas finitas y las "sumas de infinitos términos". A las preguntas planteadas: ¿qué ocurre con un cambio en el orden de los términos de una serie?, ¿se modifica el valor de la suma de las series convergentes?, puede responderse que las series absolutamente convergentes se *comportan mucho mejor* que las series condicionalmente convergentes. Si una serie es absolutamente convergente, su comportamiento es similar al de las sumas finitas, o sea, tiene suma, valen las propiedades conmutativa, asociativa, etc., mientras que una serie condicionalmente convergente puede ser reordenada para que converja a cualquier suma o incluso para que diverja. Con respecto a la propiedad conmutativa para sumas finitas, que establece que una suma es independiente del orden de sus términos y su valor no se altera, vimos que eso no ocurre con cualquier serie convergente. Por ello es aconsejable sumar los términos de una serie convergente en el orden dado originalmente.

Un concepto es asimilado por el alumno cuando puede establecer relaciones lógicas entre lo que pertenece y no pertenece a dicho concepto.

Esta propuesta para la enseñanza de las series alternadas pretende que el alumno adquiera dominio y habilidad en sus conceptos y práctica, ya que son tópicos precisos para encarar el aprendizaje de otros temas como, por ejemplo, series de potencias.

Referencias bibliográficas

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education 31(5)*, 557-578.

Camilloni, S. y Celman, E. (1998). *La evaluación en los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo.* Buenos Aires: Paidós.

Fulks, W. (1984). *Cálculo Avanzado.* México: Limusa.

Meel, D. E. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(3)*, 221-271.

Piaget, J. (1983). *Psicología y Pedagogía*. Madrid: Sarpe.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI.

Stein, S. y Barcellos, A. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica. Vol. 1.* Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.

Stewart, J. (1994). *Cálculo.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

PUNTO DE EQUILIBRIO. UNA HERRAMIENTA PARA TOMAR DECISIONES

Juan Alfonso Oaxaca Luna, María del Carmen Valderrama Bravo
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM México
joaxaca@correo.unam.mx, carmenvalde@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Modelos Matemáticos Nivel: Superior

Resumen. *Muchas decisiones se toman individuales o en grupo, en especial aquéllas que tienen un impacto a largo plazo en las actividades empresariales, empleando comités, paneles de revisión, equipos de estudio como medios para tomar decisiones. Cuando se proponen problemas de aplicación a alumnos del primer semestre de licenciatura o ingeniería la mayor de las veces fracasan por la falta del dominio de los conceptos o lenguaje utilizado en su carrera, originando desesperación y hasta deserciones, se recomienda que en los problemas planteados como docentes nos cercioremos del nivel de conocimientos relacionados con el tema y no proponer problemas de aplicación sin fundamento, debemos inducir al alumno al uso de las representaciones semióticas y la práctica de la visualización de funciones. El artículo se describe en forma narrativa el quehacer del estudiante en la toma de decisiones a partir el punto de equilibrio, como resultado de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, de ahí que la investigación sea cualitativa como un estudio de caso.*

Palabras clave: función lineal, visualización, decisión, gastos, punto de equilibrio

Introducción

La responsabilidad más importante del administrador es la toma de decisiones**.** Como la del docente cerciorarse del aprendizaje, como lo refiere Duval (1999), “para estudiar la complejidad de los aprendizajes matemáticos, debemos tener en cuenta a los estudiantes y no sólo la complejidad epistemológica de los conceptos enseñados*”* (p.2). Duval considera que cuando se destacan las representaciones subjetivas como fuente de obstáculos en el aprendizaje, en la conceptualización triádica —objeto, representante (signo), interpretante — el interpretante toma un papel tan relevante que conduce a que las representaciones sean principalmente mentales. Es decir, se asumiría un modelo cognitivo puramente mental para analizar la adquisición del conocimiento matemático. Sin embargo, ¿como? para un mismo objeto matemático podemos tener representaciones diferentes producidas por diferentes sistemas semióticos. En este articulo pretendemos guiar al docente hacia la reflexión del por que el alumno no aprende, no entiende y mucho menos plantea la solución de un problema, que para un experto resulta trivial, pero para un principiante es desastroso y esto es debido a la falta de la ejercitación de las representaciones semióticas y la visualización matemática tal como lo refieren Cantoral, Farfán, Cordero, Alanis, Rodríguez y Garza (2000), “la visualización está siendo descuidada en la enseñanza, ya que si queremos lograr que los alumnos aprendan matemáticas inevitablemente tienen que aprender a visualizar" (p.146).

En referencia a la cita textual, López (2006) señala:

> *Los resultados de la experiencia didáctica argumentan la existencia de deficiencias, en la relación conocimientos-habilidades-actitudes. En particular, es urgente que los docentes de nivel superior propicien el desarrollo de la habilidad de visualización matemática en sus alumnos, en la consecución del aprendizaje significativo en la graficación de conceptos y teoremas sobre las funciones reales y funciones vectoriales en el plano y en el espacio, requeridas en la disciplina y en la solución de problemas de diversos sectores sociales (p.2).*

Generalmente se dice que la dirección constituye una función que es inherente a los gerentes y jefes de departamento, aunque resulte obvio mencionar que a lo largo de todas las etapas del proceso educativo se toman decisiones. Inicialmente, el tomar decisiones era algo aleatorio o fortuito, pero su importancia es tal que para tomar decisiones en altos niveles se han desarrollado numerosas técnicas, basadas en los pasos del método científico. Para comprender un problema relacionado con la toma de decisiones aplicando el punto de equilibrio debemos antes haber adquirido ciertos conceptos:

Definir el problema. Se espera que el que toma decisiones tenga bien definido el problema, no un conflicto de metas, que conozca todas las opciones, posea una clara preferencia de orden, mantenga constantes todas las preferencias , no tenga limitaciones de costo tiempo y elija una opción final que maximice su retribución económica.

Análisis del problema. Una vez determinado el problema es necesario desglosar sus componentes, así como los componentes del sistema en que se desarrolla a fin de poder determinar posibles alternativas de solución.

Evaluación de alternativas. Consiste en determinar el mayor número posible de alternativas de solución, estudiar las ventajas y desventajas que implican, así como la factibilidad de su implementación y de los recursos necesarios para llevarlas a cabo de acuerdo con el marco específico de la organización.

Aplicar la decisión. Consiste en poner en práctica la decisión elegida, por lo que se debe contar con un plan para el desarrollo de la misma.

Una empresa que busca ser competitiva generalmente hace énfasis en los costos de producción, para obtener ahorros que le permitan ofrecer productos más baratos a los clientes y a través del volumen o escala de producción para obtener más ganancias; en base a lo anterior podemos preguntarnos:

¿Qué es el punto de equilibrio? Punto de intersección entre la función de ingresos y la función de egresos, es decir punto donde no existen ni utilidades ni pérdidas. Este punto es posible obtenerlo por medios algebraicos o gráficos de los precios de venta bajo bases más sólidas que la simple diferencia de precio de venta y precio de costo es necesario en la práctica de los negocios actuales.

Para la producción y venta de cualquier cantidad de unidades se requiere efectuar ciertos gastos, los que clasificaremos en "gastos fijos y gastos variables ".

Gastos fijos: son aquellos gastos que conservan el mismo valor a cualquier volumen de producción o ventas, es decir son gastos que no dependen del volumen de producción, siendo su erogación en función del tiempo y en forma periódica, gastos que provienen de dos fuentes.

Gastos comprometidos: Los ocasionados por la instalación de un negocio, como intereses, seguros, impuestos, etc., y los asignados con vista a recuperar el capital invertido, por ejemplo: la depreciación de maquinaria o inversiones de cualquier activo fijo y la amortización de inversiones intangibles.

Gastos programados: A estos gastos se les conoce como gastos regulados y son los que se realizan en el curso de la operación, indispensables para la marcha del negocio, los cuales pueden ser previamente presupuestados, controlados y regulados por los directivos, por ejemplo: sueldos, asignaciones para publicidad, mantenimiento de equipo e inmuebles, gastos de previsión social etc.

Gastos variables: Son aquellos que aumentan o disminuyen en proporción a la producción y las ventas, por ejemplo: materia prima, mano de obra, comisiones e impuestos sobre ventas gastos de embarque y embalaje, energía eléctrica etc.

Tal vez nos preguntaremos, el porqué la necesidad de esta clasificación. Porque hay ciertos gastos en los cuales la empresa incurre, aunque no produzca producto alguno, esos gastos tienen que cubrirse con ingresos provenientes de las ventas, este ingreso también tiene que cubrirse con los gastos variables; además tienen que dejar una parte como utilidad, ya que de no ocurrir así no se puede considerar como negocio.

Metodología

La investigación persiguió la cualificación del quehacer docente y de los alumnos de primer semestre de las carreras de Administración y Contaduría de la FES Cuautitlán UNAM, en la comprensión y aplicación del punto de equilibrio como herramienta en la toma de decisiones, recurriendo a recordar conceptos como: funciones y resolución de sistemas de ecuaciones lineales en forma analítica y gráfica enfatizando en sus representaciones en el área económico administrativo, sin olvidar los fenómenos de oferta y demanda como una aplicación de la función lineal, para esto partimos de que:

$$Ingresos = (\mathrm{Pr}ecio\ de\ venta)(Número\ de\ unidades\ vendidas)$$

Expresando como función:

$$I(X) = Vu\,X \qquad (1)$$

También sabemos que:

$$Egresos = Gastos\ \ fijos\ totales + Gastos\ \mathrm{var}iables\ \ por\ unidad\ \ de\ \ producción$$

Expresando como función:

$$E(X) = Gf + Gvu\ X \qquad (2)$$

Igualando las ecuaciones 1 y 2 para alcanzar el equilibrio:

$$Ingresos = Egresos$$

$$Vu\ X = Gf + Gvu\ X \qquad (3)$$

Como lo que nos interesa es saber cuál es la cantidad de unidades que se deben producir y vender para alcanzar el punto de equilibrio, despejamos "*X*" de la igualdad (3):

$$Vu\ X - Gvu\ X = Gf$$

Factorizando:

$$X\,(Vu - Gvu) = Gf$$

Despejando "*X*" tendremos:

$$X = \frac{Gf}{Vu - Gvu} \qquad (4)$$

Con la ecuación 4, se calcula el número de unidades que se deben vender y producir para alcanzar el punto de equilibrio.

Se les explicó a los alumnos que el punto de equilibrio es el punto óptimo, en él la empresa no tiene pérdidas ni ganancias, sin embargo ¿que ocurriría si la empresa desea trabajar con un margen de utilidad?, esto traería consigo el aumento de la producción en función de que tanto se desea ganar según las exigencias del mercado. Los gastos fijos no se alterarían pero sí aumentarían los gastos variables de producción.

Para obtener la utilidad de cualquier empresa se restan a los ingresos o ventas los gastos que se realizarán en la producción y el funcionamiento de la empresa, matemáticamente la función de utilidad se obtiene:

$$Utilidad = I(X) - E(X)$$

Sustituyendo ecuaciones 1 y 2:

$$Utilidad = Vu\,X - (Gf + Gvu\,X)$$

Factorizando *X*:

$$Utilidad = X(Vu - Gvu) - Gf \qquad (5)$$

Se les cuestionó a los alumnos qué pasaría si en la ecuación 5 se obtuvieran resultados negativos, es decir que los gastos fijos fueran mayores que los ingresos brutos, sus respuestas fueron dudosas con respecto a la interpretación gráfica de la función de utilidad, ya que ésta tiene su trayectoria en el primero y cuarto cuadrante, conservando que todo comportamiento económico tiene interpretación real en el primer cuadrante, lo cual excluye a la función de utilidad, ya que en el primer cuadrante se tienen las utilidades y en el cuarto cuadrante las pérdidas, correspondiendo al punto que intersecta al eje de las ordenadas a los gastos fijos pero negativos. Hasta este momento hemos llegado a establecer dos modelos matemáticos cuyo origen es el establecimiento de un sistema de ecuaciones lineales al que hemos dado solución aplicando el método de igualación, sin embargo no es el único método. Podemos recurrir al gráfico, entonces se pueden representar las funciones de ingresos y egresos cuyo punto solución, óptimo o de equilibrio es la intersección de las funciones como se representan en la figura 1.

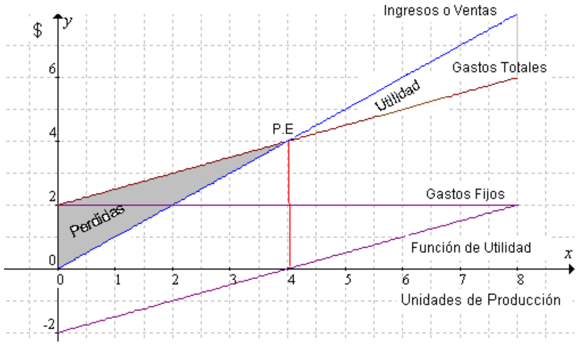


Figura 1. Representación gráfica del punto de equilibrio

En la figura 1, la parte sombreada antes del punto de equilibrio representa que la empresa está trabajando con pérdidas, ya que los ingresos son menores que los gastos ocasionados por la producción, sin embargo la zona que se encuentra a la derecha del punto de equilibrio indica que la empresa se encuentra trabajando con ganancias (utilidad), ya que los ingresos son mayores que los gastos ocasionados por la producción. Podemos observar que la función de utilidad al cruzar el eje de las abscisas corresponde al equilibrio, lo cual corresponde a una utilidad nula.

Actividad

Para aplicar los conceptos expuestos se les presentó a los estudiantes la siguiente situación:

Se desea calcular el punto de equilibrio para la división de cuartos de un proyecto hotelero cuya capacidad alcanza las 200 habitaciones. Por otra parte, sus tarifas pueden unificarse en un promedio de $175.00 y la suma anual de los gastos fijos departamentales es de $5,450,000.00. Por último, la relación de gastos variables alcanza el 20% del importe del alquiler por habitación.

Determine también el estado financiero del hotel cuando se ocupan 132 habitaciones, construir la gráfica correspondiente.

<u>Solución</u>: conocemos G_f = \$5,450,000.00 sin embargo dado que la tarifa del hotel es por noche por cada habitación y los gastos fijos son anuales, será necesario homogenizarlos, esto es \$5'450,000.00 / 360 días = \$15,138.90 de gastos fijos por día, *Vu* = \$175.00 y gastos variables por habitación es de (0.20) (\$175.00) lo que da *Gvu* = \$35.00

Sustituyendo los datos en la ecuación 4:

$$X = \frac{\$15{,}138.90}{\$175.00 - \$35.00}$$

Efectuando operaciones

X = 108.135 $\cong$ 108 habitaciones por día

De manera que el punto de equilibrio en la división de cuartos del proyecto hotelero se alcanzaría cuando se ocupen 108 habitaciones que en porcentaje de ocupación significaría un 54%, por lo que este porcentaje debe aceptarse directamente como anual ya que la proporción es directamente proporcional.

Como en el problema nos piden cuál es el estado financiero del proyecto hotelero cuando se ocupen X=132 habitaciones, entonces aplicaremos la ecuación 5, para saber la ganancia de la empresa ya que "*X*" esta por arriba del punto de equilibrio.

$$Utilidad = \$132.00\left(\$175.00 - \$35.00\right) - \$15{,}138.90$$

$$Utilidad = \$3{,}341.10\ diarios$$

Gráficamente se observa en la figura 2 que el punto de equilibrio corresponde aproximadamente a 108 habitaciones, además también se les mostró a los alumnos que en ese punto la función utilidad cruza el eje de las "*X*", es decir cuando no hay ganancias ni pérdidas. Fue importante que los alumnos graficaran para visualizar las funciones y poder comprender su significado económico, resultando favorable, porque observan hacia donde se dirigen las matemáticas y el porqué de su existencia y aplicación.

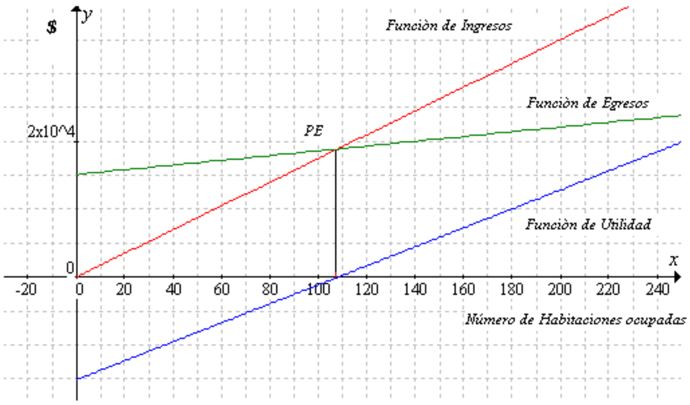


Figura 2. Representa la gráfica del punto de equilibrio del problema hotelero

Conclusiones

De esta actividad el alumno pudo observar que calcular el punto de equilibrio consiste en plantear y resolver un sistema de ecuaciones, que por la naturaleza del problema puede ser: lineal-lineal, lineal-cuadrático, cuadrático-cuadrático.

El estudiante pudo visualizar el comportamiento de oferta y demanda por el valor de su pendiente y el de los parámetros que forman la ecuación del fenómeno económico, esto es si la pendiente es positiva describe una oferta y si es decreciente una demanda, por otra parte si los coeficientes de las variables independiente y dependiente ambas son positivas o negativas describen una demanda y si tienen signo contrario una oferta.

Queda a nosotros como profesores propiciar entre nuestros estudiantes la visualización de las funciones, ya que es una tarea que estamos descuidando y si ésta se fomenta lograremos disminuir la abstracción que representan las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanis, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the twenty-first* *annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*, 3-26.

Haeussler, E. y Paul, R. (2003). *Matemáticas para Administración y economía* (10ª ed.). México: Pearson.

López, L. (2006). Visualización matemática como habilidad docente. *La jornada*, p.1-3.

FUNCIONES CON MICROSOFT EXCEL

Dalia Imelda Castillo Márquez, Brenda Amalia Hernández López, Ana Luisa Estrada Esquivel
Universidad Autónoma de Nayarit, Tepic Nayarit México
daliacastillo@gmail.com
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Superior

Resumen. *En este documento se presenta el desarrollo de algunas actividades que se trabajaron con estudiantes de primer semestre de la Universidad Autónoma de Nayarit; utilizando la hoja de cálculo Excel en el tema de visualización de funciones, para la materia de lenguaje y pensamiento matemático. Ya que la tecnología ha adquirido un papel muy importante en el proceso enseñanza-aprendizaje, nos ofrece un medio para que el estudiante explore, analice, verifique y desarrolle habilidades que se serán útiles para la visualización.*

El objetivo es motivar al alumno en su proceso de aprendizaje mediante la visualización, la cual es un elemento esencial para el descubrimiento de patrones y comprensión de conceptos.

Palabras clave: visualización, función, Excel, lenguaje y pensamiento matemático

Introducción

Las nuevas tecnologías y su incorporación al ámbito educativo promueven la creación de entornos didácticos que afectan de manera directa tanto a los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje como el escenario donde se lleva a cabo el mismo, pues este nuevo entorno creado a partir de las nuevas tecnologías requiere, según Cabero (1998), un nuevo tipo de alumno; más preocupado por el proceso que por el producto, ahora bien ¿Porque utilizar Excel y no un programa especializado en graficación o un *software* de pago?

Una de las principales razones que nos motivo a utilizar Excel fue que la gran mayoría de los equipos de cómputo cuentan con este programa, sin importar que tan modestos o sofisticados sean. Lo que lo hace ser uno de las programas de paquetería con mayor accesibilidad para los estudiantes y profesores, en comparación con los especializados en resolver este tipo de problemáticas matemáticas, ya que la gran mayoría requieren ser instalados y en algunas ocasiones pagar una licencia de otro *software*.

Ahora bien, ¿qué es una hoja de cálculo de Excel? Una hoja de cálculo es un conjunto de datos distribuidos en filas y columnas sobre los que podemos aplicar fórmulas. Lo más importante de las hojas de cálculo es su poder de recalcular, es decir, si hacemos unas operaciones sobre unos datos y luego modificamos los datos iníciales, automáticamente se vuelven a recalcular los resultados.

Excel tiene aplicaciones en cualquier trabajo o gestión que actúe sobre grandes conjuntos de datos, como pueden ser tareas propias del mundo financiero, empresarial, educativo o doméstico.

Marco Teórico

La fundamentación teórica del presente trabajo es el constructivismo y el aprendizaje significativo.

Para Pozo (1994) no, existe, en realidad, una teoría constructivista única sino varias teorías emparentadas que pueden clasificarse como constructivistas. Estas son las teorías de Gestalt, de Piaget, Vygotsky, Ausubel y Bruner.

Según Pozo (1989)

> Las teorías de Gestalt se preocupan por los procesos mentales internos que intervienen en el aprendizaje, pero se diferencian de las teorías cognoscitivas del procesamiento de información en su orientación, en estas últimas, el enfoque es analítico; es decir, puede estudiarse el todo dividiéndolo en sus partes constituyentes, ya que ese todo es exactamente igual a la suma de sus partes. (P.170)

En un entorno de aprendizaje constructivista, los alumnos construyen su propio aprendizaje mediante un proceso que implica probar la validez de ideas y enfoques de acuerdo a sus conocimientos y experiencias previos, aplicar estas ideas o enfoques a nuevas tareas, contextos y situaciones, así como integrar el nuevo conocimiento resultante a los “constructos” intelectuales preexistentes.

Los principios de aprendizaje propuestos por Ausubel, ofrecen el marco para el diseño de herramientas meta cognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, lo cual permitirá una mejor orientación de la labor educativa, ésta, ya no se verá como una labor que deba desarrollarse con "mentes en blanco" o que el aprendizaje de los alumnos comience de "cero", pues no es así, sino que, los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

Metodología

El material utilizado fue una presentación en Microsoft Excel, para trabajar la función: lineal, cuadrática, cúbica y exponencial.

La investigación se realizó con un grupo de estudiantes del primer semestre de la Licenciatura de Contaduría, que cursan la materia de Lenguaje y pensamiento matemático, en la unidad temática: *tratamiento visual de las funciones*. El grupo se conformaba por 40 estudiantes, así que se procedió a dividir el grupo en dos equipos quedando de 20 estudiantes cada uno, para hacer la selección de los estudiantes se tomo la muestra en base al listado; en el primer grupo quedaron los estudiantes con número impar, de la misma manera para el segundo grupo los estudiantes con número de lista par. Uno fungió como grupo control y el otro grupo experimental. Siendo este último grupo con el que se trabajo con las actividades diseñadas en Excel.

Cabe hacer mención que se trabajo en diferentes aulas, para el grupo control las clases fueron de la forma tradicional, en el aula. Para el grupo experimental se trabajo con video proyector y computadoras portátiles que los estudiantes llevaban al aula.

Al finalizar la unidad temática, se aplico el examen a ambos grupos para contrastar resultados.

El tipo de investigación realizada fue de tipo experimental, complementada con una entrevista abierta a los estudiantes, donde la finalidad era recabar sus comentarios e impresiones referentes a la metodología de trabajo.

Hipótesis: los estudiantes del grupo experimental lograrán mejores resultados de aprendizaje, que los alumnos del grupo control, en el tema de tratamiento visual de funciones.

Actividades diseñadas con Excel

Las siguientes figuras muestran las actividades diseñadas para cada uno de los temas vistos.

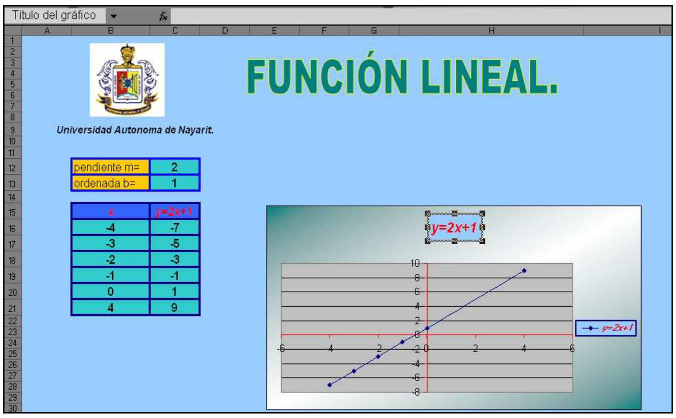


Fig. 1 Actividad para la función lineal de la forma *y= mx ± b*

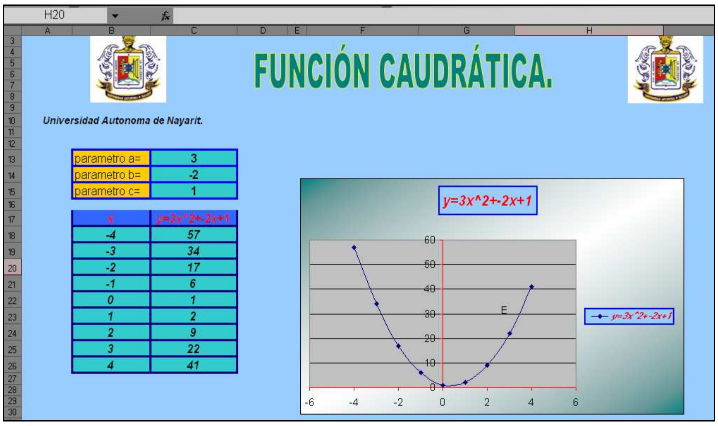


Fig.2 Actividad para la función cuadrática de la forma y= ax^2+bx+c

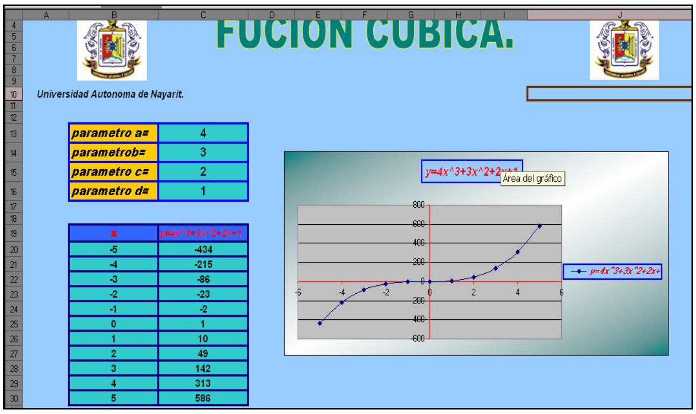


Fig.3 Actividad para la función cúbica de la forma y= ax^3 + bx^2 + cx + d

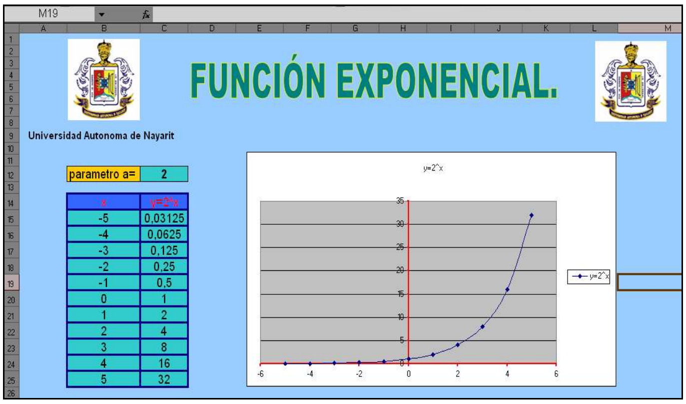


Fig.4 Actividad para la función cúbica de la forma y= a^x

Actividades realizadas

Por el Maestro:

- ✓ El profesor expuso la metodología a emplear y explico la actividad
- ✓ Proporcionó actividades diseñadas en Excel al grupo experimental solamente
- ✓ Impartió el tema a ambos grupos en tiempos y aulas diferentes
- ✓ Aplicó evaluaciones departamentales en ambos grupos
- ✓ Realizó entrevista a alumnos del grupo experimental

Los alumnos:

- ✓ Asistieron a clases
- ✓ Resolvieron actividades
- ✓ Plantearon dudas y comentarios
- ✓ Resolvieron evaluación departamental
- ✓ Participaron en entrevista

Resultados

Los datos se obtuvieron a partir de: Los resultados del examen, Participaciones en clase, actividades realizadas en material de clases (cuadernillo) y opiniones.

Las participaciones en clase y las actividades en cuadernillo tuvieron la finalidad de evaluar el nivel cognitivo adquirido por los estudiantes en el transcurso del experimento.

La evaluación se aplicó de manera normal y sin ningún problema en ambos grupos. Al finalizar la evaluación se hizo una mesa redonda, con la intención de que comentarán sus impresiones.

Para los resultados del examen se aplico media aritmética. En dichos resultados se marcó mayor aprovechamiento en el grupo experimental, que en el control, como se muestra a continuación:

Grupos	Media aritmética
Grupo control	78.1
Grupo experimental	94.6

Tabla 1.comparación de medias aritméticas

Al analizar la tabla anterior podemos observar que la media del grupo experimental presenta un incremento de 16.5 puntos, respecto a la media del grupo control.

Con los datos analizados anteriormente podemos aceptar la hipótesis, ya que es claro que los estudiantes del grupo experimental obtuvieron mejores resultados que los del grupo control.

Aunque ya obtuvimos los resultados cuantitativos, también es muy necesario conocer la parte cualitativa, la opinión y comentarios de los estudiantes. A continuación se enlistan algunos de los comentarios:

Me gustó la actividad, porque entendí el comportamiento de los parámetros

¡Se me pasó el tiempo muy rápido, pocas veces en clases de "mate"!

Me ayudo bastante para hacer el bosquejo de las gráficas

Se me hizo interesante y diferente a las clases de "mate"

Me habría gustado que las clases de "mate", en años anteriores hubieran sido con apoyo de la computadora.

Conclusiones

Se puede concluir que el trabajo logro su objetivo, se propicio mayor aprovechamiento y las actividades motivaron a los estudiantes durante el desarrollo de las actividades, ya que durante su utilización les permitió realizar actividades encaminadas a la adquisición y desenvolvimiento de los contenidos, para dejar de ser agentes pasivos de la recepción de información.

La metodología aplicada resulto atractiva y motivante para la mayoría de los estudiantes, al igual que las actividades del cuadernillo.

Los estudiantes se adaptaron con facilidad a resolver las actividades con apoyo de la computadora.

Referencias bibliográficas

Arias, J. (2008). *Informática y matemáticas en internet*. Extraído el 27 de Febrero de 2008 desde http://www.infoymate.es

Cabero, J. (2001). *Tecnología educativa: diseño y utilización de medios en la enseñanza*. España: Paidós.

Cabero, J. (1998). Usos e integración de los medios audiovisuales y las nuevas tecnologías en el currículum. *Educación y tecnologías de la Comunicación.* Oviedo: Universidad de Oviedo, 47-67.

Cantoral, R. y Montiel (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanis, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, L. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

Pozo, J. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid. Morata. Extraído el 10 de Junio de 2008 desde http://books.google.com.mx/books?id=DpuKJ2NI3P8C&pg=PA196&lpg=PA196&dq=teoria+gestalt+pozo+1994&source=bl&ots=4eYvI8TAP4&sig=28Mlf41ZUOdkI51DoXMxAn8yMg&hl=es&ei=HOimSc_YCdCIngfsi7DnDw&sa=X&oi=book_result&resnum=8&ct=result#PPA31,M1

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA OPTIMIZACIÓN DINÁMICA: EL CASO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LA TEORÍA DE CONTROL

José Campero P., María Trigueros Gaisman
CICATA-IPN México
ITAM
campero@itam.mx, trigue@itam.mx
Campo de investigación: Investigación en didáctica dentro del pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *El presente artículo presenta las características de un proyecto de evaluación de una propuesta didáctica. Posteriormente se concentra en una parte del mismo correspondiente a la evaluación a través de un cuestionario. Se diseñaron instrumentos didácticos para apoyar la construcción de los estudiantes de los conceptos de funcional y variación, además de las técnicas de solución de problema de Optimización Dinámica, usando la Teoría APOE como marco teórico. Después de la instrucción se usó un cuestionario para analizar las construcciones de los alumnos al final del curso. Los alumnos avanzaron en la construcción de estos conceptos en relación con las observaciones en otros cursos, aunque los resultados relacionados con el concepto de funcional y la relación entre conceptos son menos satisfactorios.*

Palabras clave: optimización, variaciones, control, funcional, abstracción reflexiva

Introducción

La enseñanza de la optimización dinámica es muy importante en la formación de Matemáticos, Físicos, Ingenieros y Economistas (Bellman, R., 1957; Chiang, A.C., 1992; Cerdá, E., 2001). No hay, sin embargo, estudios que analicen las dificultades que los alumnos presentan en su aprendizaje, a pesar de que los conceptos en estudio son complejos y a los estudiantes obtienen, en general, resultados pobres. El presente artículo reporta los primeros resultados de un proyecto cuyo objetivo es la evaluación de una propuesta didáctica diseñada con el fin de analizar las construcciones de los estudiantes en un curso de optimización. En este trabajo se reportan los resultados de la primera parte de este estudio, para ello, se presentan las preguntas de investigación, el marco teórico y la metodología de la propuesta y el análisis de las construcciones *globales* de los alumnos que tomaron el curso en relación a los conceptos de funcional, variación y su optimización.

El objetivo central de la propuesta didáctica consiste en la elaboración de un diseño de instrucción basado en una teoría de la Educación Matemática con la idea de apoyar a los estudiantes en la construcción de los conceptos ligados al de funcional por la idea de variación y que son esenciales para resolver cualquier problema de Optimización Dinámica. En el diseño de la propuesta, la dimensión epistemológica ha jugado un papel importante pues se basó por una parte en el análisis histórico-epistemológico de esta disciplina, que permite descubrir tanto el contexto en el que surge como su desarrollo, y por otra parte, en la teoría APOE que hace posible la modelación y análisis cognitivo de la construcción de los conceptos por los alumnos.

Las preguntas de investigación que este estudio pretende responder son:

i) ¿Qué conceptos previos debe haber construido un estudiante para construir el concepto de función y los asociados a él por la variación?

ii) ¿Qué construcciones mentales realizan los estudiantes en la construcción de estos conceptos? y ¿Cuáles son los mecanismos cognitivos asociados a dicha construcción?

Para ello, y de acuerdo a la metodología de la teoría APOE, es necesario i) Elaborar una descomposición genética preliminar que describa la construcción de los conceptos bajo estudio. ii) Diseñar una propuesta didáctica, basada en la descomposición genética y analizar las construcciones elaboradas por los alumnos. iii) Después del análisis de *todos* los datos, determinar si es necesario refinar la descomposición genética. En este trabajo se reportan resultados de la primera parte del estudio que concierne a los primeros dos objetivos dado que se presenta únicamente el análisis de los datos globales obtenidos y ello no proporciona los datos necesarios para tomar decisiones sobre la descomposición genética.

Marco teórico

El marco teórico que se utiliza en el trabajo es la teoría APOE (Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. & Thomas K. 1996) que ha sido empleada en muchas investigaciones y ha mostrado su eficacia tanto en el análisis de datos como en el diseño didáctico. El uso de esta teoría permite al investigador un análisis fino de las construcciones necesarias para construir un concepto matemático, así como analizar las construcciones que los estudiantes ponen de manifiesto cuando resuelven problemas relacionados con dicho concepto. Además, la teoría no separa la investigación de la enseñanza, por lo que resulta atractiva para el diseño de propuestas didácticas.

La teoría APOE está basada en la epistemología piagetiana. Toma de ella la abstracción reflexiva como mecanismo de construcción de conocimiento que se activa a través de la acción del sujeto sobre objetos matemáticos (Dubinsky, E., 1991). A su vez, considera su acción a través de otros mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión que son fundamentales en la construcción de objetos matemáticos. Los procesos que se identifican en la construcción del conocimiento son, la asimilación y la acomodación, tomando en consideración que el conocimiento no evoluciona de manera continua; el conocimiento se desarrolla en saltos manifestados por períodos de equilibración y desequilibración. La Teoría APOE hace una transposición al ámbito de la Educación Matemática para aplicarla directamente a la construcción de conceptos matemáticos avanzados (Trigueros, M., 2005).

Metodología

La metodología que se deriva de la teoría APOE consiste en diseñar una descomposición genética que modela la forma en que los estudiantes construyen el concepto de interés. Para este estudio, el diseño de esta descomposición se basó en la experiencia de los autores como profesores y en un análisis histórico-epistemológico sobre la optimización en general, en especial, a partir de la aparición de las computadoras a mediados del siglo XX, con énfasis en el desarrollo de la optimización dinámica: cálculo de variaciones y teoría de control (Pontryagin, L., Boltyansky V., Gamkrelidze, R. & Mishenko, E., 1962). Posteriormente se siguió el ciclo de investigación de la Teoría APOE que incluye, después del análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos con base en la descomposición genética para documentarla y para validar la propuesta didáctica. Finalmente se hizo el análisis global de los datos empíricos con base en la descomposición genética, para obtener una primera descripción general de las construcciones que manifiestan los estudiantes con la cual se pueden establecer comparaciones las primeras comparaciones entre ellos, verificar si hay evidencia de las construcciones modeladas en la descomposición genética y obtener una primer análisis de la eficacia del diseño didáctico.

Después realizar el análisis histórico, se diseñó así una primera descomposición genética para los conceptos de interés en este estudio. Ésta se utilizó en el diseño de instrumentos didácticos y de validación que consistieron de siete actividades para desarrollar en una clase de la materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Económicas que se imparte en una universidad privada mexicana. Los instrumentos de diagnóstico consistieron de tres exámenes, tres cuestionarios y de una entrevista semi-estructurada que se aplicó a 10 estudiantes elegidos de manera que representaran distintos niveles de comprensión de los conceptos a juzgar por su desempeño en el curso.

A continuación se muestran ejemplos de ejercicios de las actividades de clase:

1) Problema económico: Modelo de Ramsey (1928) (Citado en Cerdá, E., 2001)

Supongamos que $K = K(t)$ representa el stock de capital al tiempo t, $Y = f(K)$ el producto nacional (observar que otra vez $Y = f(K)$ es una función definida sobre un espacio de funciones), en Economía se cumple que: $\frac{df}{dK} > 0$ y $\frac{d^2 f}{dK^2} \leq 0$.

El modelo de Ramsey establece que: $f(K(t)) = \frac{dK}{dt} + C(t)$, donde $C(t)$ representa el consumo en el tiempo t. En otras palabras, este modelo afirma que el producto se divide entre consumo e inversión. ¿Cómo deben las autoridades planear la inversión?

Análisis. Esta parte del problema intenta inducir la necesidad de optimizar una función de utilidad social $U(C(t))$ que depende del consumo en el tiempo.

2) Dadas las siguientes expresiones determinar cuáles son funcionales.

i) $f\left(x, \dot{x}, t\right) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ ii) $J(x) = \left(\int_0^5 x(t)^2 dt, \sqrt{1 + \dot{x}^2},\right)$ iii) $J(x) = \int_0^T \left(x^2 + \dot{x}^2\right) dt$

3) a) Determinar el dominio y el rango de cada una de las expresiones anteriores.

b) En base a la respuesta dada en el inciso anterior, ¿Cambiaría alguna de las respuestas de la pregunta dos? En caso afirmativo, ¿en qué consistirían dichos cambios?

c) Dar tres ejemplos de funcionales. Justificar que sean funcionales.

Análisis de las tareas: Se considera que si un alumno identifica correctamente los casos que corresponden a los funcionales, se puede considerar que ha interiorizado las acciones que permiten generalizar el esquema de función para incluir el de funcional. Si puede dar al menos un ejemplo, se considerará que el alumno puede únicamente hacer acciones sobre el concepto de funcional. Si además de reconocer los funcionales el alumno puede dar ejemplos o explicar sus características esenciales supondremos que ha interiorizado las acciones en el proceso de distinción entre una funcional y otro tipo de funciones. Si además puede dar ejemplos de funcionales diferentes a los vistos en clase y ejemplos de funciones en las que especifique por qué no pueden ser funcionales, o explicar en abstracto los elementos esenciales que identifican una funcional, supondremos que ha encapsulado el proceso de distinción de la funcional en un objeto.

La evaluación de la propuesta didáctica consistió de cuatro partes:

i) Evaluación global de la construcción de conceptos, en la cual se evaluaron las construcciones del grupo en conjunto a través de un análisis del número de alumnos que muestran cada tipo de construcción en cada uno de los conceptos de interés utilizando un cuestionario aplicado al final del semestre y que se reporta en este trabajo.

ii) Evaluación de la evolución en la construcción de conceptos. En esta parte analizará el cambio en las construcciones de cada estudiante de una muestra aleatoria, representativa del grupo, considerando los elementos antes mencionados.

iii) Análisis de la construcción de relaciones entre los distintos conceptos en un la muestra seleccionada de alumnos, comparando sus respuestas a la entrevista y los cuestionarios.

iv) Comparación de las respuestas de los estudiantes del grupo en la entrevista final con las dadas por cuatro estudiantes de otro grupo que cursó la materia Optimización Dinámica que no siguieron la propuesta didáctica experimental. Es importante mencionar que en esta materia se dedica el semestre competo al estudio del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control, es decir, los conceptos se estudian a mayor profundidad, también para estudiantes de Economía. En este artículo nos centramos en los resultados de la primera parte de esta investigación: la evaluación global de a construcción de conceptos.

Resultados

La siguiente tabla muestra un resumen de dichos resultados. En ella representamos con 1 una concepción acción, 2 una concepción proceso y 3 una concepción objeto.

Resumen del análisis en forma matricial

	Dif. V. o C	Dif. Estado o Cont	Func.	Cond 1er. Ord V	Cond 1er. Ord C	Cond Sufs.	Cond Transv
Ge	1	2	3	2	2	1	1
Er	1	1	1	2	2	0	1
Ya	2	0	1	2	2	1	3
Jr	2	3	2	2	2	1	3
Ed	1	0	1	0	1	1	1
Fr	1	1	0	2	2	1	1
Ar	0	1	2	2	2	1	3
Pe	1	1	1	1	1	1	1
Al	1	0	0	2	1	1	1
Mi	2	1	2	2	2	2	3
Er	2	2	2	2	2	1	1
Ma	2	2	2	2	2	3	3
Hu	2	3	1	2	2	3	1
Na	2	1	0	2	2	2	3

Clave de interpretación: *Dif. V o C:* Diferencia entre Cálculo de V. y T. de Control, *Dif. Estado o Cont:* Diferencia entre variable de estado y de Control, *Func:* Funcional, *Cond. 1er. Ord. V.*: Condiciones primer orden, Cálculo de Variaciones; *Cond. 1er. Ord. C.*: Condiciones primer orden, Teoría de Control; *Cond. Sufs.*: Condiciones suficientes; *Cond. Transv.* : Condiciones de Transversalidad, *Ge*: Geraldine, *Ya:* Yanaí, *Er*: Erasmo, *Ed:* Edgar, *Jr:* José Raúl, *Ar:* Arlet, *Pe*: Pedro; *Al*: Alberto; *Mi*: Miguel; *Ma*: Magali; *Hu*: Humberto; *Na*: Nayely; *Fr*: Francisco.

Nuestra hipótesis, basada en los resultados de los alumnos en experiencias de enseñanza anteriores, en las que los alumnos mostraban una comprensión muy superficial de los conceptos en estudio, consistió en suponer que, en promedio, el tipo de concepción de los estudiantes estuviera entre acción y proceso (promedio de1.5).

Considerando los tipos de concepción determinados por el último cuestionario sobre los conceptos de funcional, primera y segunda variaciones, condiciones suficientes y condiciones de transversalidad, los resultados encontrados fueron los siguientes:

i) Respecto al concepto de Funcional: Once de catorce estudiantes (78.5%) manifestaron al menos una tipo de concepción “acción”. Aproximadamente el 50% del total manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior. El promedio calculado de acuerdo a la escala considerada fue 1.28.

ii) En relación a las condiciones necesarias en Cálculo de Variaciones, trece de catorce estudiantes (93%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”, doce de catorce manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior (86%) y el promedio del grupo fue de 1.79.

iii) Al considerar las condiciones necesarias en Teoría de Control se encontró que catorce de catorce estudiantes (100%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Once de catorce estudiantes (78.5%) manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior y el promedio del grupo sobre su tipo de concepción fue de 1.79.

iv) en cuanto a las condiciones suficientes, trece de catorce estudiantes (93%) manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Cuatro de catorce estudiantes (cerca del 30%) manifestaron un tipo de concepción “proceso” o superior y el promedio del grupo sobre su tipo de concepción fue de 1.36.

v) Respecto a las condiciones de transversalidad, todos los estudiantes manifestaron por lo menos un tipo de concepción “acción”. Seis de catorce estudiantes (casi el 50%) mostró un tipo de concepción “objeto.” El promedio del grupo fue de 1.85.

Estos resultados muestran en primer lugar que una gran mayoría de estudiantes ha construido los conceptos en estudio al menos con un tipo de concepción “acción”. Se observa también que la mitad o más de la mitad de los alumnos construyó una concepción “proceso” en relación con las condiciones necesarias y a las condiciones de transversalidad tanto en Cálculo de Variaciones como en Teoría de Control. Los estudiantes muestran mayor dificultad ante los conceptos de funcional y de condición suficiente tanto en Teoría de Control como en Cálculo de Variaciones.

Estos resultados condujeron a una revisión minuciosa de las respuestas de los alumnos al cuestionario para analizar el tipo de dificultades que los estudiantes mostraban. Se encontró que en el caso de las condiciones de transversalidad la pregunta sobre su significado era escueta. En sus respuestas, casi la mitad de los estudiantes agregaron gráficas que mostraban las diferencias entre los casos posibles demostrando coordinación de los procesos necesarios para coordinar los registros gráfico y analítico, lo cual daba indicios de su encapsulación de los procesos involucrados en la definición de dichas condiciones.

Es importante observar que en cuanto a las Condiciones de Transversalidad, todos los estudiantes tienen al menos un tipo de concepción acción y casi el 50% de ellos tiene un tipo de concepción "objeto". Este hecho nos llevó a una revisión más minuciosa de los resultados. Lo que ocurrió es que la pregunta en el tercer cuestionario sobre Condiciones de Transversalidad fue escueta, por lo que algunos estudiantes (casi el 50%) agregó en sus respuestas las gráficas de cada uno de los cuatro casos posibles, demostrando que podían coordinar los procesos geométrico y analítico involucrados en la definición de cada una de esas condiciones, por lo que supusimos que habían encapsulado dichos procesos en el objeto "condiciones de Transversalidad" en un objeto. El resto de los estudiantes, sin embargo, no agregó gráficas por lo que no es posible saber si construyeron los procesos y menos si los encapsularon.

Algo similar sucedió en el caso de la pregunta relacionada con las condiciones suficientes. En un cuestionario anterior hubo estudiantes que mencionaron dos tipos equivalentes de condiciones suficientes y en el tercer cuestionario únicamente mencionaron una. Es posible que nuevamente influyera la redacción de pregunta.

El concepto de funcional parece ser el más difícil para los estudiantes pues menos de la mitad de los estudiantes construyó una concepción proceso de este concepto.

Los resultados que se reportan en este trabajo constituyen, como se mencionó, lo encontrado en la primera parte del proyecto. Con la información encontrada con estos instrumentos parece haber evidencia de las distintas construcciones previstas en la descomposición genética en las respuestas de los alumnos, lo que indicaría, de verificarse con los resultados por analizar, que la descomposición genética diseñada *no requiere ser refinada*; podría ser necesario refinar la parte correspondiente al esquema, dado que las respuestas de los alumnos en este cuestionario parecen indicar que los estudiantes no han construido relaciones entre los conceptos en estudio más allá de saber que todos ellos tienen relación con la optimización dinámica, pero para hacerlo es necesario tomar en consideración el análisis de los datos obtenidos de otros instrumentos, en particular, de las entrevistas a alumnos que siguieron el curso piloto y la comparación con aquellos que no lo siguieron. La decisión final se tomará una vez que se cuente con esos resultados.

Se puede añadir, a partir de lo que se reporta en este trabajo, que a partir de la descomposición genética es posible diseñar actividades didácticas, como las que se utilizaron en este estudio, para lograr que los alumnos construyan de manera más significativa los conceptos de la optimización dinámica.

Conclusiones

A pesar de lo limitado de los datos que se tienen en este momento, consideramos que se ha obtenido información positiva respecto a los beneficios del diseño de instrucción, en cuanto al aprendizaje de los alumnos. Si bien la hipótesis propuesta no se cumplió de igual manera en el caso de todas las construcciones estudiadas, se encontró evidencia de que los alumnos hacen las construcciones previstas en la descomposición genética.

Por otra parte, las actividades propuestas en el diseño de instrucción y los resultados obtenidos de los instrumentos analizados en este trabajo muestran una notoria mejoría en la comprensión de los conceptos cuando al comparar con grupos anteriores, según el criterio fijado en términos de la Teoría APOE.

Debido a que todas las construcciones que se desprenden del análisis de las respuestas de los estudiantes están incluidas en la descomposición genética original, podemos afirmar que la descomposición genética es un buen modelo de la forma en que los estudiantes construyen los conceptos involucrados en el tema bajo estudio y que no requiere de refinamiento. Esta decisión puede cambiar cuando se revisen los datos de otros instrumentos que muestren de manera más clara las relaciones entre los conceptos y, de ser así, lo que se refinaría sería únicamente la parte correspondiente al esquema, que es donde se incluyen justamente las relaciones entre conceptos y la forma en que estas relaciones evolucionan.

De los resultados obtenidos hasta el momento destaca la posibilidad de utilizar el diseño de instrucción utilizado en esta experiencia en la enseñanza de este tema de las matemáticas, dado que se ha encontrado que con las actividades diseñadas se logra una mejor comprensión de los conceptos involucrado. Estas actividades requieren, sin embargo, complementarse con otras en las que se promueva la evolución del esquema de funcional de los alumnos.

Los resultados, obtenidos del análisis de los cuestionarios finales, dan cierta información sobre las concepciones de los alumnos. Para determinarlas con mayor precisión será necesario comparar las respuestas de cada uno de los estudiantes con las proporcionadas en otros cuestionarios, los exámenes y la entrevista, pero este trabajo está aún en proceso.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., A. Brown, DeVries D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathemathics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education,* Vol. II, número 3, pp. 1-32

Bellman, R. (1957). *Dynamic programming*. Princeton: Princeton University Press.

Cerdá, Emilio (2001). *Optimización Dinámica*. Madrid, España: Prentice Hall.

Chiang, A.C., (1992). *Elements of dynamic optimization*. Illinois: Waveland Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical Thinking* (pp. 95-123) Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Pontryagin, L., Boltyansky V., Gamkrelidze, R. y Mishenko, E. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley-Interscience.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Revista Educación Matemática 17(1)*, 5-31.

USOS SIGNIFICATIVOS DE LA RELACIÓN *f-f'* EN UN ESCENARIO PERIÓDICO

Ángeles Alejandra Ordóñez Morales
Escuela Bancaria y Comercial, Campus Chiapas México
anlejandra@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En este artículo reportamos algunos usos de la relación entre una función y sus derivadas en un escenario periódico. A lo largo de la investigación realizada (Ordóñez, 2007) observamos elementos de resignificación en un contexto de variación y desde una perspectiva de las prácticas sociales. Estudiamos algunos usos de dicha relación en contextos de ingeniería, donde dan cuenta de marcos de referencia más amplios que los considerados en el discurso matemático escolar. Y encontramos que es a partir del ejercicio intencional de las prácticas como, predecir, modelar, los comportamientos periódicos adquieren significados en el quehacer científico.*

Palabras clave: lo periódico, variación, predicción, primitiva y derivada

Introducción

Investigaciones en Socioepistemología han dando evidencia de que el desarrollo de estrategias del pensamiento y lenguaje variacional genera bases de significación para diferentes conceptos de cálculo y precálculo, entre ellos la derivada (Cantoral, 2004; Dolores, et al 2002; González, 1999). El analizar qué es lo que varía y cómo varía en fenómenos de cambio permite dar de un significado a la derivada alejado del manejo de fórmulas de derivación y del concepto de límite que es a lo que se suele acotar su enseñanza, de tal manera que la utilización de mecanismos de análisis de las variables y de sus variaciones sustentan la propuesta de que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas es una condición para la construcción de la idea de derivada (Cantoral y Farfán, 1998; González, 1999).

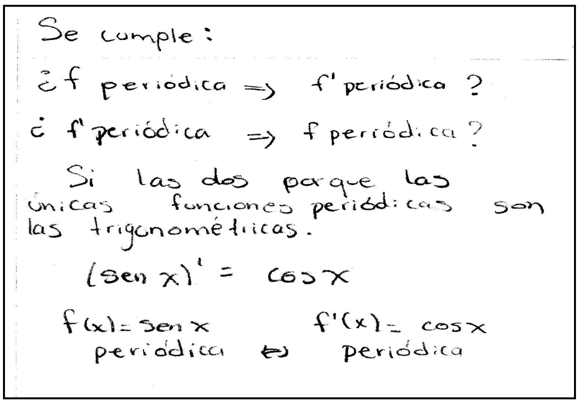
Esta investigación nace en la Socioepistemología, aproximación teórica sistémica que da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático a través de su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2004). Esta visión nos permitió aproximarnos al análisis de una función y sus derivadas en un escenario periódico desde sus usos en distintas áreas del conocimiento (en este reporte presentamos dichos usos en el contexto de la ingeniería) y dar cuenta de las herramientas y argumentos variacionales que se ponen en juego.

La hipótesis a seguir en este trabajo es que en un escenario que involucra fenómenos periódicos, el uso de argumentos y herramientas variacionales permite resignificar la relación entre una función y sus derivadas.

La Problemática

Estudios sobre la derivada y su primitiva en el marco de la matemática educativa reportan que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función y, por lo tanto, susceptible de volver a derivar (Cantoral, 1997). Una de las dificultades radica en el dominante uso del contexto algebraico en el razonamiento de los problemas que se manejan en cálculo.

También encontramos que en el discurso matemático escolar, la relación entre una función y sus derivadas para las funciones periódicas resulta ser poco significativa por el privilegio de los aspectos analíticos asociados. Buendía (2006) ha dado cuenta de que en el discurso matemático escolar la periodicidad, especialmente para el caso de las funciones, no está siendo usada como una propiedad que califica a un cierto comportamiento, sino que se limita a calificar a una determinada función, la trigonométrica. De ahí que el marco de referencia para analizar la veracidad o falsedad de la implicación -*f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f′ es periódica*- sólo considera como posibilidad de función periódica a alguna trigonométrica, como podemos ver en la siguiente ilustración.


Se cumple:
¿f periódica ⇒ f' periódica ?
¿ f' periódica ⇒ f periódica ?
Si las dos porque las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.
$(\text{sen}\, x)' = \cos x$
$f(x) = \text{sen}\, x$ periódica $\Leftrightarrow$ $f'(x) = \cos x$ periódica

Respuesta de un profesor de ingeniería civil ante el cuestionamiento de la veracidad o falsedad de la doble implicación f *es periódica* $\Leftrightarrow$ f' *es periódica*

Spivak (1980) presenta a la periodicidad como una propiedad de las funciones en general y no como una propiedad de las funciones trigonométricas como en la mayoría de los libros de texto; Aborda esta propiedad en ejercicios propuestos en un contexto analítico para analizar qué sucede al derivar o integrar funciones periódicas.

a) Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x+a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.

b) Si f es periódica con periodo a e integrable en $[0, a]$, muestre que $\int_0^a f = \int_b^{b+a} f$ para todo b.

c) Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí.

d) Suponga que f' es periódica con periodo a. Pruebe que f es periódica si y sólo si $f(a) = f(0)$.

Esta presentación de la propiedad periódica en el discurso matemático nos llevo a estudiar la relación entre una función y sus derivadas para funciones con comportamientos periódicos en distintos contextos, para poder encontrar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican.

La relación entre una función y sus derivadas

En la línea de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional se ha señalado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas de tal manera que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos y de esta manera romper con la idea de iteración (González, 1999; Dolores, et al 2002).

Con el objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, este estudio se ha valido también del uso de gráficas en donde éstas representan una forma de argumentación que favorece la construcción del conocimiento matemático. Suárez (2008) propone al uso de las gráficas para resignificar especialmente situaciones que tengan que ver con la variación y el cambio pues la graficación, al seno de la modelación, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación.

Socioepistemología de lo periódico

Al reconocer el carácter social de la matemática, la socioepistemología centra su atención en el papel de las prácticas sociales para la construcción del conocimiento matemático y las reconoce como normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005). Una de sus tareas es la formulación de epistemologías de prácticas las cuales permiten conformar bases de significados para el conocimiento y para su introducción, significativa y articulada- al sistema didáctico (Buendía y Cordero, 2005). En la socioepistemología de lo periódico propuesta por Buendía (2004, 2006) señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de dicha propiedad, reconoce a lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional.

La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de un fenómeno dada una cierta información del estado actual y su ejercicio intencional al seno de una situación provoca una distinción entre la repetición que presenta el fenómeno y cómo ésta se presenta. Con ello se favorece una reconstrucción de significados acerca de lo que es una gráfica o movimiento repetitivos por medio de una distinción del tipo de repetición que presentan. Dicha resignificación es inducida por la actividad de predecir ya que cualquier método de predicción se basará en el comportamiento presente en la gráfica correspondiente. El predecir hará posible distinguir significativamente entre el se repite y el cómo se repite lo cual es necesario para el reconocimiento de la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

Usos de la relación f-f’ en un escenario periódico

La aproximación socioepistemológica propone una revisión, una búsqueda de carácter epistemológico que permita dar cuenta de por qué ocurre lo que ocurre. Ello involucra diferentes fuentes y tipos revisiones desde aquéllas que tienen que ver con el desarrollo histórico de la propiedad periódica (Buendía, 2006; Vázquez, 2008), hasta como la que mostramos en esta investigación sobre la búsqueda del uso de dicha propiedad en contextos particulares como la ingeniería.

Presentamos a continuación un ejemplo a través de una tabla con datos resumidos sobre la referencia de quien realiza determinada actividad en la cual hace uso de la relación $f - f'$ en determinado contexto y el tipo de argumentos o herramientas variacionales que consideramos entran en juego. Para una muestra mas extensa de algunos usos de dicha relación ver Ordóñez (2007) donde realizó una búsqueda de los usos de una función y sus derivadas en escenarios periódicos con la finalidad de determinar el papel que juegan las herramientas y argumentos de corte variacional.

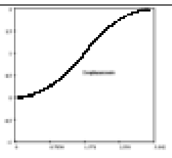
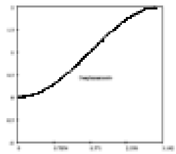
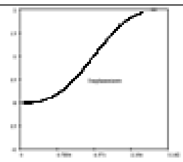
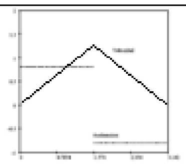
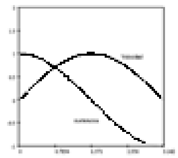
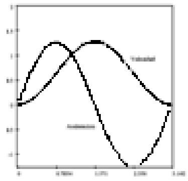
Ejemplo 1

Miranda (2003) trabaja en el diseño de levas y es especialista en el diseño de análisis mecánico así como en la implementación de sistemas de ingeniería asistida por computadora.	…Cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse. Sin embargo, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor. Por esta razón es importante revisar que los perfiles de las levas de alta velocidad no presenten cambios bruscos de pendiente o discontinuidades en las gráficas de velocidad y aceleración. Existen movimientos que permiten asegurar derivadas “suaves" como el movimiento armónico y el movimiento cicloidal. La derivada es una medida de la rapidez con la que cambia el movimiento de la leva, ésta ayudará a controlar que el movimiento del seguidor sea suave. La segunda derivada presenta una relación para el radio de curvatura de la leva en varios puntos a lo largo de su perfil. Ya que la relación es inversa, conforme y'' crezca, el radio de curvatura se hará más pequeño. La tercera derivada puede utilizarse como una medida de la rapidez de cambio de y''.

En este escenario de diseño de levas, un elemento mecánico que sirve para empujar a otro, el análisis del cambio es fundamental a tratar debido a que el autor menciona que cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse. En cambio, a altas velocidades, estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor, por ello se requiere que el movimiento de la leva no cambie de forma brusca. Esto lleva a considerar que el movimiento tenga derivadas –cambios en los valores de las pendientes de las tangentes- suaves; es decir, que no presente cambios bruscos en el comportamiento de la velocidad y aceleración. También propone significados para la segunda y tercera derivada, están en términos de dar cuenta acerca de las variaciones que califican.

El autor presenta el diseño de levas mediante un método grafico y analítico de tal forma que analiza frecuentemente a las gráficas del desplazamiento, velocidad y aceleración así como a las expresiones analíticas correspondientes a fin de dar sustento a la importancia de la derivada (ver tabla siguiente). Esto favorece un tránsito entre los contextos gráfico, físico y analítico en el que las gráficas están siendo una herramienta para explicar cómo serán las características del movimiento de la leva diseñada. De esta manera podemos observar la razón por la cual descarta el movimiento parabólico para levas de alta velocidad ya que si bien en apariencia es “suave", sus derivadas no lo son. Y propone, para el tipo de levas de altas velocidades que el movimiento del seguidor sea armónico o cicloidal debido a que no presentan cambios bruscos en el comportamiento de la velocidad y aceleración además de asegurar que estos movimientos presentan derivadas suaves y no tienen puntos donde la pendiente cambie bruscamente (como podemos ver en las graficas del movimiento y en sus expresiones analíticas). Estas propiedades hacen de estas curvas una opción común para las levas de alta velocidad.

La seguridad de usar este tipo de movimientos para las levas de altas velocidades se debe a que las funciones que modelan los movimientos armónico o cicloidal tienen comportamientos periódicos que al ser derivados se conservan, es decir, si la función de desplazamiento no es periódica como en el caso de una leva que presenta un movimiento de ir y venir ascendente, su comportamiento sobre las abscisas sí tiene una repetición propia de lo periódico. Al derivar este crecimiento, dicha variación se mantiene y en consecuencia la velocidad y aceleración son periódicas. Así, no es suficiente considerar únicamente que el movimiento sea suave; hay que considerar cómo será la variación de este movimiento para que no haya fuerzas que dañen al sistema. El tránsito entre los contextos parece estar fundamentado en la problematización del cambio presente: ¿cómo tiene que cambiar para que el sistema funcione? Los conceptos matemáticos de derivadas sucesivas y los físicos de velocidad y aceleración tienen una base de significación fundamentada en la matematización de la variación.

Movimiento parabólico	Movimiento Armónico	Movimiento Cicloidal
		
		
$y = A\theta^2 + B\theta + C$ $y' = 2A\theta + B$ $y'' = 2A$ $y''' = 0$	$y = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta}\,\text{sen}\,\frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$	$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$ $y' = \frac{L}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$ $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi\theta}{\beta}$

Desplazamiento, velocidad y aceleración y expresiones analíticas de los movimientos parabólico, armónico y cicloidal usados en el diseño de levas

Comentarios finales

En esta investigación encontramos aspectos socioepistemológicos que resignifican el conocimiento matemático referente a la relación *función-derivadas* en fenómenos de cambio en escenarios periódicos fortaleciendo de esta manera la socioepistemología de lo periódico. Lo periódico es visto como una propiedad que califica a un comportamiento y no a una función. Los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significación en el quehacer no exclusivo de la matemática, sino en otros campos del conocimiento. De esta manera damos cuenta que un contexto puramente analítico no basta para estudiar la relación $f - f'$ en un escenario periódico, debido que a través de los usos de la relación es posible transitar de manera natural y articulada en los contextos analítico, gráfico y físico, como vemos en el ejemplo mostrado, el diseño de levas se basa en métodos analíticos y gráficos para explicar y predecir las características del movimiento de la misma.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58(3)*, 299-333.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 9(2)*, 227-251.

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. En *Serie: Antologías, número 1.* (pp. 81-98). México, D.F., México: Programa Editorial del Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon 42,14(3)*, 854-856.

Cantoral R. (2004). Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.1-9). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(3)*, 225-250.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Miranda, J. (2003). *Diseño de levas. En Mecanismos.* Obtenido el 20 de abril de 2007 desde http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf

Ordoñez, A. (2007). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas.

Spivak, M. (1980). *Calculus*. USA: Publish or Perish.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Vázquez, R. (2008). *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: Identificación y uso de la unidad de análisis*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas.

LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO EN EL APRENDIZAJE DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN LU, COMO ACTIVIDAD EN EL AULA DE CLASES

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez
Universidad Nacional Autónoma de México México
egor1131@servidor.unam.mx, egorrc@gmail.com, armandoa@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Pensamiento numérico Nivel: Superior

Resumen. *La investigación ha consistido en poner en práctica el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), en una situación diseñada para aplicar en el salón de clases en la asignatura de Métodos Numéricos, para el aprendizaje del método de descomposición LU, con estudiantes de Ingeniería. En el modelo de aprendizaje sociocultural de Vygotsky (1979), él sostiene que los procesos de desarrollo y aprendizaje interactúan entre si, considerando al aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje que Vygotsky destaca y lo lleva a formular la idea de la ZDP. Con los postulados referentes a la teoría del modelo sociocultural se propusieron en la investigación las actividades que consistieron en: construcción del andamiaje educativo, la enseñanza reciproca, conducción social del aprendizaje y colaboración entre compañeros. Se registraron las actividades diseñadas para la clase y sus resultados. Observando como conclusión, el acercamiento a la construcción del conocimiento significativo.*

Palabras clave: Factorización, Matrices, Aprendizaje, Modelo Sociocultural

Introducción

Los tres principales supuestos de Vygotsky (1979) son: Construcción de significados, Instrumentos para el desarrollo cognoscitivo y La Zona de Desarrollo Próximo. El primer supuesto significa que la comunidad juega un papel central, en tanto que el pueblo en torno al estudiante afecta en gran medida la forma en la que el o ella "ve" el mundo. El segundo supuesto se refiere a la forma en la que determinan el patrón y la tasa de desarrollo tanto el tipo como la calidad de los instrumentos. El tercer supuesto, que es del que nos valimos para la experimentación en esta investigación, establece que de acuerdo a la teoría del desarrollo de Vygotsky, las capacidades de solución de problemas pueden ser de tres tipos: i) aquellas realizadas independientemente por el estudiante, ii) aquellas que no puede realizar aún con ayuda y iii) aquellas que caen entre estos dos extremos, las que puede realizar con la ayuda de otros. Así mismo se consideran los principios vigotskianos más importantes en el aula. El aprendizaje y el desarrollo son, actividades sociales y colaborativas que no pueden ser "enseñadas" a nadie. Depende del estudiante construir su propia comprensión en su propia mente.

La Zona de Desarrollo Próximo puede ser usada para diseñar situaciones apropiadas durante las cuales el estudiante podrá ser provisto del apoyo adecuado para el aprendizaje óptimo.

Cuando es provisto por las situaciones apropiadas, uno debe tomar en consideración que el aprendizaje debería tomar lugar en contextos significativos, preferiblemente el contexto en el cual el conocimiento va a ser aplicado.

Descripción General

Se pretende experimentar durante un periodo semestral con estudiantes de ingeniería, expuestos a situaciones en el aula de clase, para caracterizar el comportamiento que tienen ellos ante la presencia de estrategias de aprendizaje. Esta investigación forma parte de un proyecto de investigación que tiene como propósito general el implementar los medios educativos, adecuados para lograr que el estudiante adquiera tanto las herramientas que le permitan el autoaprendizaje, así como un aprendizaje significativo y duradero. En particular esta investigación se sustenta en uno de los supuestos de la teoría sociocultural de Vygotsky, esto es la Zona de Desarrollo Próximo, aplicada al aprendizaje de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, mediante el método de descomposición LU, el cual consiste en la factorización de la matriz de coeficientes del sistema A, o determinación de los factores LU, cuyo producto representa a la matriz A. Siendo las matrices L y U, matrices triangulares inferior y superior, respectivamente.

Antecedentes

La Matemática es un pilar fundamental de la civilización y la cultura humana, en la actualidad los desarrollos tecnológicos, así como las ciencias modernas utilizan, de una forma u otra, su lenguaje, así como sus procesos de razonamiento. En particular, cabe mencionar que el papel de la matemática en la educación, así como en la sociedad, ha variado a través de los años. Actualmente se ha difundido el uso de una nueva disciplina para la transmisión y difusión del conocimiento matemático, esta es, la matemática educativa, a través de la cual se plantean las formas más adecuadas para que los educadores de la disciplina matemática, estén observando cambios significativos en sus objetivos propuestos. En el aspecto de la enseñanza de las matemáticas, Cantoral y Farfán (2003) mencionan que se ha convertido en una necesidad básica, el proporcionar a una investigación en matemática educativa de una aproximación sistémica y situada, que haga posible incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. En este caso particular, se reportan los hallazgos que se obtienen al implementar aspectos relativos a la componente cognitiva la cual se fundamenta en el aprendizaje sociocultural.

Justificación

Uno de los principales problemas que enfrenta la educación superior universitaria, en el caso específico en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, para el logro de sus propósitos de lograr formar profesionistas competentes, que sean individuos autónomos, emprendedores, creativos y con valores éticos y morales, lo es el alto índice de reprobación y la falta de motivación que se ha venido presentando en el caso de las asignaturas de matemáticas. Por lo que en esta investigación nos proponemos contribuir a un mejoramiento en el aprovechamiento escolar mediante el uso de metodologías para la enseñanza de la disciplina en cuestión.

Planteamiento del problema

Desarrollar metodologías educativas para mejorar el aprovechamiento escolar en el aprendizaje del método de descomposición LU, utilizado para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Objeto de estudio

Los estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, que cursan la asignatura de Métodos Numéricos.

Objetivos

Objetivos generales

Se propone desarrollar materiales educativos para la asignatura de métodos numéricos correspondiente al cuarto semestre de la currícula del plan de estudios para las carreras de ingeniería mecánica y eléctrica de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Objetivos particulares

El objetivo de la indagatoria objeto de esta artículo es la de probar que se pueden obtener mejores resultados en el aprendizaje de los métodos numéricos mediante el uso de adecuados apoyos metodológicos, como son los referentes cognitivos propios de la teoría sociocultural de Vygotsky.

Hipótesis

Una metodología adecuada en la enseñanza de los métodos numéricos, permitirá un mejor aprovechamiento, y un aprendizaje significativo y duradero.

Marco teórico

Los procesos psicológicos superiores, que son lo procesos específicamente humanos, tienen su origen en la vida social, es decir, se constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos psicológicos creados culturalmente (Vygotsky, 1979). El conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura. Resalta los aportes de Vygotsky en el sentido que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se *internalizan*. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a escala social, y más tarde, a escala individual, primero entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica). Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal (Vygotsky, 1979).

Uno de los conceptos esenciales en la obra de Vygotsky es el de la *zona de desarrollo próximo*. No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz.

En el aprendizaje social los logros se construyen conjuntamente en un sistema social, con la ayuda de herramientas culturales (por ejemplo, computadores) y el contexto social en la cual ocurre la actividad cognitiva es parte integral de la actividad, no simplemente un contexto que lo rodea (Resnick, 1991).

Al aceptar la premisa básica en la construcción del conocimiento, no hay razón para buscar fundamentos ni usar el lenguaje de la verdad absoluta. La posición constructivista es post-epistemológico y es por eso que es tan poderoso para inducir nuevos métodos de investigación y enseñanza. Reconoce el poder del ambiente para requerir adaptación, la temporalidad del conocimiento y la existencia de múltiples identidades (*selves*) comportándose de acuerdo con las reglas de varias subculturas (Noddings, 1990).

En relación a los contenidos y los procesos de aprendizaje Robert Glaser afirma que:

> (…) con lo que sabemos de la factibilidad de enseñar procesos generales de pensamiento, parece ser más factible desarrollarlos dentro del contexto de ejercer el conocimiento específico de uno y evaluar las condiciones que faciliten la transferencia a nuevas situaciones(...) la capacidad para percibir nuevas representaciones y organizaciones de información simbólica y visual puede ser, por lo menos en parte, el resultado de extensa experiencia confrontando y contestando las percepciones de conocimiento actual de uno. (...) El conocimiento facilita los procesos y ellos generan conocimientos. (Glaser, 1985, p. 574).

La cuestión clave de la educación está en asegurar la realización de aprendizajes significativos, a través de los cuales el alumno construye la realidad atribuyéndole significados. Para tales fines, el contenido debe ser potencialmente significativo y el alumno debe tener una actitud favorable para aprender significativamente. (Coll, 1989)

Coll plantea que la significatividad está directamente vinculada a la funcionalidad y plantea que:

"(...) cuanto mayor sea el grado de significatividad del aprendizaje realizado, tanto mayor será también su funcionalidad" (Coll, 1989, p. 167).

Continúa Coll con el planteamiento de que el aprendizaje requiere una intensa actividad por parte del alumno, y que cuanto más rica sea su estructura cognoscitiva, mayor será la posibilidad de que pueda construir significados nuevos y así evitar memorización repetitiva y mecánica. Además el aprender a aprender constituye el objetivo más ambicioso de la educación escolar, que se hace a través del dominio de las estrategias de aprendizaje.

La teoría subraya que el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, condicionada por dos tipos de mediadores: "herramientas" y "símbolos", ya sea autónomamente en la "zona de desarrollo real", o ayudado por la mediación en la "zona de desarrollo potencial". Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la mencionada "zona de desarrollo potencial" que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

Aplicación del experimento y resultados obtenidos

La primera actividad consistió en la exposición del desarrollo para la obtención de las formulas generales del método de descomposición LU, incluyendo la solución de casos.

Fig.1 Presentación del tema por el profesor titular del grupo a fin de mostrar el desarrollo del algoritmo del método de descomposición LU.

Fig.2 Presentación del tema por los alumnos del grupo de a fin de mostrar el desarrollo del algoritmo del método de descomposición LU.

La segunda actividad consiste de la presentación del tema por parte de los alumnos en la clase, y las dos últimas actividades consistieron en la solución numérica de un caso en el contexto de la ingeniería, organizando la actividad entre estudiantes y profesor, como un taller en el aula y formando equipos de trabajo con los estudiantes.

Fig.3 Presentación del tema por los alumnos del grupo realizando el desarrollo del algoritmo del método de descomposición LU.

Fig.4 Pruebas aplicadas a los estudiantes para determinar una medida de la comprensión y manejo del método de descomposición LU.

Conclusiones

Se registraron las actividades diseñadas para la clase y sus resultados, las cuales ponen de manifiesto los efectos producidos por la aplicación de la teoría del aprendizaje utilizada, observando como conclusión, el acercamiento a la construcción del conocimiento significativo de los estudiantes, respecto del método de descomposición LU.

Una de las observaciones más notables, fue que los estudiantes, no lograron vencer el obstáculo definido por la distancia determinada por sus capacidades potencial y real; mostrando una cierta dependencia de la posición en la que se encuentra su capacidad potencial y manifestando un comportamiento regular en su gran mayoría respecto de dicha posición, lo cual nos conduce a concluir que siguieron dependiendo de la ayuda del experto, que en la investigación fue representado por las notas de las que se valieron los estudiantes para resolver los problemas y proporcionadas por el investigador.

Así mismo, se observó que los estudiantes resolvían exitosamente las pruebas en su gran mayoría; cuando se valían del apoyo del experto (notas y el profesor titular) cuando trabajaron en equipo, salvo unas cuantas excepciones; por lo que concluimos que los estudiantes se ubicaron en una situación de desarrollo sin alcanzar la maduración del aprendizaje del método por sus propios recursos; lo que significa que ellos se establecieron en la etapa de la socialización del conocimiento (Interpersonal) sin llegar a la etapa de internalización (Intrapersonal).

Pensamos que en el experimento, no se plantearon de manera adecuada los mediadores (herramientas y símbolos), que facilitarían la construcción del conocimiento por parte del estudiante de manera autónoma; además pensamos que no se utilizo una contextualización de manera adecuada; quedando la investigación abierta a continuar experimentando de manera que se pueda mejorar cada vez la ingeniería didáctica involucrada por el concepto utilizado para construir conocimiento en este caso particular el de la Zona de Desarrollo Próximo.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1)*, 27-40.

Coll, C. (1989). *Aprendizaje Escolar y Construcción del Conocimiento*. Buenos Aires: Paidos.

Glaser, R. (1985) All´s well that begins and ends with both knowledge and process: A reply to Sternberg. *American Psychologist 40*,573-575.

Noddings, H. (1990) Constructivism in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematicas Education, 4,* 7-18.

Resnick, L. (1991) Shared Cognition: Thinking as Social Practice. En L. Resnick (comp.) *Perspectives on Socially Shared Cognition*. Washington, D.C.: American Psychological Association.

Vygotsky, L. S. (1979). D*esarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Grijalbo-Crítica.

EL JUEGO Y LA CLASE TRADICIONAL COMO ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD EN LA TERCERA ETAPA DE LA ESCUELA BÁSICA

Luis laya, Milagros Viteri, Julia Sanoja, Roxiliana Rondón, Nesyuri Matute
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay Venezuela
luisalejandrolaya@gmail.com, milagrosviteri@gmail.com, jusanoja@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Básico

Resumen. *En este trabajo se presenta una investigación desarrollada bajo el enfoque cuantitativo, de carácter de campo, acerca de la enseñanza de la probabilidad en la escuela básica venezolana, donde se pretende diferenciar el desempeño estudiantil al emplear el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Los resultados permitieron concluir que existen diferencias significativas en el desempeño estudiantil, mostrando que el juego como estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de la probabilidad, permite que el estudiante afiance mejor los contenidos conceptuales, sea participativo, despierte su interés, que perciba importancia y la utilidad de la probabilidad en la vida cotidiana a partir de la experiencia vivida.*

Palabras clave: enseñanza de la probabilidad, juego, clase tradicional

El problema

El azar está presente en fenómenos de la vida cotidiana del hombre, y es a través de la teoría de probabilidad en interacción con otras ciencias que el hombre puede estudiar y conocer estos fenómenos. De esta manera, la teoría de probabilidad se puede considerar como un instrumento con el que es posible reconocer los fenómenos de la naturaleza y transformar la sociedad.

Es así como vemos que en los programas curriculares de matemática se incluyen los contenidos referentes a la probabilidad. Como lo expresa Batanero (2006), este tema ha sido incluido en los planes de estudios no solo en países como España sino que en muchos otros lugares del mundo. De igual manera, en los diferentes niveles del sector educativo venezolano están presentes tópicos básicos de la teoría de probabilidades, como consta en el currículo básico nacional (León, 2006)

Es en esos niveles donde el docente busca enseñar un conjunto de teorías que den acceso a los estudiantes en los elementos básicos de probabilidades, que le permitan tomar decisiones en su vida cotidiana y contar con una formación mínima para que puedan desarrollarse desde esa perspectiva en cualquier campo profesional o científico. La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales y por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos.

En la escuela básica venezolana se desarrollan los contenidos previstos en el área de probabilidad necesarios para manejar los fenómenos sociales, reconocer las suposiciones, mejorar el razonamiento y lograr tomar una decisión más acertada y sólida, Según Segarra (1999, p. 25): "la cuestión clave de la educación matemática no es si deben enseñarse los fundamentos, sino qué fundamentos se deben enseñar y cómo enseñarlos".

En este sentido, tradicionalmente al enseñar probabilidades en las clases de matemática se enfocan en asignar gran cantidad de ejercicios; García (1994), explica que este tipo de estrategia de enseñanza se utiliza con el fin de que el estudiante adquiera dominio de los temas y sea hábil resolviendo problemas; esta práctica tiene sus beneficios pues hace que los estudiantes memoricen las operaciones matemáticas, sin embargo esta rutina ha causado que gran número de estudiantes sienta fobia y desagrado frente a los contenidos de matemática.

Existen una gran gama de recursos didácticos para utilizar en la enseñanza de probabilidades en las clases de matemática que pudieran reemplazar los usados en las clases tradicionales, con el objetivo de crear una atmósfera placentera, donde el aprendizaje del estudiante sea apasionante y la adquisición de conocimiento lo lleve al descubrimiento, la exploración, creación; y que el estudiante este consciente de ello y le encuentre la utilidad de los contenidos que aprende en la vida cotidiana. Es así como en la búsqueda de otros métodos de enseñanza, Corbalán (1995), introduce los juegos, como recursos para dictar en forma didáctica una clase de matemática referente a los temas habituales presentados en los programas de estudio, donde la utilización de los juegos es una actividad que permite crear y hacer matemática; además que presentan un entorno similar a la resolución de problemas, "núcleo central de las matemáticas".

Igualmente, García (1994), habla de lo productivo que es en la personalidad del niño el uso de los juegos como estrategia y método de enseñanza; ya que "mediante la actividad lúdica, el niño afirma su personalidad, desarrolla su imaginación y enriquece sus vínculos y manifestaciones sociales" (p. 2).

Se admite, que la gran mayoría de los docentes se limitan a desarrollar los contenidos programáticos de forma tradicional, dejando a un lado los procesos cognitivos (aprendizaje significativo) y como resultado de ello el alumno sólo logra desarrollar su capacidad de memorización (Segarra, 1999). Es por ello, la poca motivación que despierta en los estudiantes una clase tradicional sobre los tópicos de probabilidades y que les resulta ajeno a sus inquietudes, además reciben una enseñanza mecánica y trivial, así mismo son sometidos a una tediosa labor de cálculos en su generalidad, desarrollando muy pocas destrezas y una escasa capacidad de razonamiento.

Cabe destacar que para lograr un aprendizaje, donde se motive al estudiante a internalizar los contenidos probabilísticos; se plantea como estrategia didáctica la utilización de herramientas lúdicas, con el fin de afianzar y lograr obtener resultados satisfactorios en los diferentes aspectos (conceptuales, procedimentales, actitudinales). El docente debe proporcionar al estudiante una orientación general sobre la probabilidad, con el objeto de facilitar y orientar el estudio donde versará su vida cotidiana, debe proveer al alumno de los métodos de razonamiento básico, requerido así mismo, para plantear algunos ejercicios a resolver cuya ejecución le permitirá afianzar sus conocimientos.

Es por ello que dada la importancia de los juegos dentro de la enseñanza de la probabilidades, para lograr la adquisición de destrezas, desarrollo cognoscitivo, reflexivo, creativo, que permita la compresión y construcción de conceptos complejos, razonamiento inductivo y fomente la socialización, surge la necesidad de formular la siguiente interrogante: ¿existen diferencias en el desempeño estudiantil entre el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad ?

Objetivo general

Establecer diferencias en el desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, de la U.E:N. “Tucutunemo”, Estado Aragua.

Objetivos específicos

Determinar el desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Analizar el desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

Analizar los aspectos: conceptual, procedimental y actitudinal del desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

Comparar el desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Marco Referencial

Es innegable que en muchas aulas predomina un modelo tradicional y es evidente que los modelos basados en la transmisión tienen dificultades para promover el aprendizaje significativo. Según Calatayud, Gil y Gimeno (1992), estos modelos tienen su fundamento en algunas suposiciones inadecuadas, enseñar es una tarea fácil y no requiere una especial preparación. El proceso de enseñanza/aprendizaje se reduce a una simple transmisión y recepción de conocimientos elaborados. El fracaso de muchos estudiantes se debe únicamente a sus propias deficiencias: falta de nivel, falta de capacidad, etc.

Las prácticas que acompañan a las concepciones tradicionales son de sobra conocidas: la actividad predominante en las aulas es la transmisión verbal de conocimientos por el profesor con una falta casi absoluta de interacción entre los alumnos y se pone el mayor énfasis en el aprendizaje de hechos básicos y definiciones y las relaciones explícitas con aspectos de la vida cotidiana son escasas.

Para García (1994, p. 3), en la clase de matemática, los juegos pueden ser particularmente efectivos para la adquisición de destrezas con las operaciones fundamentales y el reforzamiento de concepto, el juego permite el logro simultáneo de varios objetivos. Además de la formación de actividades favorables, el juego permite estimular al niño a: participar, cooperar, tener iniciativa, ser responsable, respetar a sus compañeros, seguir instrucciones apropiadas a su nivel escolar y enfrentarse a la toma de decisiones.

A través de los juegos, se busca desarrollar actividades en el aula en las cuales el alumno, por un lado, deba tomar decisiones acerca de los conceptos que tiene que utilizar para resolver una situación y por otro lado, se haga cargo de validar por sí mismo la producción que ha realizado. Para Ramos (2003), el proceso de construcción de un conocimiento matemático comienza a partir del conjunto de actividades intelectuales que el alumno pone en juego frente a un problema para cuya resolución le resultan insuficientes los conocimientos de los que dispone hasta el momento. La idea central del juego es que el alumno "capte" el sentido de un concepto, es decir, que entienda qué tipo de problemas puede resolver a través de él y cuáles no puede resolver si lo usa.

Hay muchos recursos que pueden ser empleados por los profesores en las clases de matemáticas. Los juegos pueden ser buenos recursos, estrategias y métodos para practicar los temas habituales de los programas de estudio (García, 1994), porque suponen, que tanto en el diseño de estos como en la práctica de ellos, una forma de actividad muy próxima a la creación matemática y, por consiguiente, ofrecen grandes posibilidades de hacer matemáticas. La esencia del juego lúdico es que le crea al alumno las condiciones favorables para el aprendizaje mediadas por experiencias gratificantes y placenteras, a través, de propuestas metodológicas y didácticas en las que aprende a pensar, aprende a hacer, se aprende a ser y se aprende a convivir (Medina, 1997).

Hipótesis del estudio

Hipótesis 1. Existirán diferencias significativas en el desempeño estudiantil de los Cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, de la U.E.N. “Tucutunemo”, Estado Aragua.

Hipótesis 2: existirán diferencias significativas en los aspectos: conceptual, procedimental y actitudinal del desempeño estudiantil de los cursantes de 7° año de educación básica que se les aplicó el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, de la U.E.N. “Tucutunemo”, Estado Aragua.

Metodología y Análisis

El estudio realizado corresponde a una investigación cuantitativa de campo de alcance explicativa. Para desarrollar la investigación se tomó como población a los 128 estudiantes, que comprenden las cuatro secciones de 7° año de Educación Básica de la U.E.N "TUCUTUNEMO", Estado Aragua, Venezuela, para el año escolar 2007-2008. Se aplicó un muestreo no probabilístico, intencional en dos secciones de clase, una de 32 estudiantes con quienes se trabajó la clase tradicional (grupo control) y otra de 33 estudiantes a la que se le aplicó el juego (grupo experimental). Para la recolección de los datos se empleó *Observación no participante* sobre la base de los instrumentos: hoja de evaluación del desempeño estudiantil. (hedep) la cual presenta 11 reactivos con cinco alternativas de respuesta (deficiente (1), regular (2), bueno (3), muy bueno (4) y excelente (5)), que permitió registrar todo lo que acontece a los distintos niveles de logro de los estudiantes. El mismo fue validado a través del procedimiento de juicio de experto. Además se utilizó el diario de campo del investigador en el cual se recogieron las apreciaciones observadas por los investigadores durante el desarrollo de la clase.Una vez obtenidos los resultados del hedep de cada estudiante, se procedió a realizar la puntuación total de la evaluación del desempeño estudiantil de cada estudiante, siendo esta la suma de las puntuaciones de los reactivos De manera análoga se trabajó con cada uno de los aspectos del desempeño estudiantil: conceptual, procedimental y actitudinal.

Análisis descriptivo del desempeño estudiantil

Grupo control: Aspectos conceptuales: la mayoría de los estudiantes alcanzaron parcialmente las competencias establecidas en la hoja de desempeño estudiantil. Además en los datos que se recogieron resalta que los estudiantes se copiaban unos con otros; algunos no alcanzaron a tomar notas de las definiciones dictadas por el docente, y esté constantemente debía recalcar que copiaran el contenido. En consecuencia el grupo control se ubicó entre regular y bueno. *Aspectos procedimentales:* Los estudiantes durante la aplicación del contenido se ubicaron dentro de la escala de regular, porque lograron relativamente manipular y establecer ejemplos y relacionarlos con el entorno y las definiciones. Se observó que al momento de aplicar la fórmula para calcular la probabilidad de un evento, algunos estudiantes al no poder resolver los problemas planteados en la clase recurrieron a imitar los procedimientos y resultados de los compañeros más cercanos.

Aspectos actitudinales: Los estudiantes mostraron una actitud regular durante la sesión de clases, donde sólo algunos lograron intervenir inducidos por el docente. No había iniciativa propia por parte del grupo, los estudiantes se distraían por agentes externos fácilmente y se pudo notar la falta de creatividad y motivación al momento de dar alguna opinión del contenido.

Grupo experimental: *Aspectos conceptuales:* A través de los juegos los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje lograron captar, identificar, distinguir, internalizar el contenido. Además gran parte de los estudiantes tomaban notas por iniciativa propia, mientras jugaban ellos mismos ubicaban las definiciones y reconocían los diferentes resultados que obtenían dándole el nombre que correspondía según el evento tal como aparecía en el contenido que dictaba el docente; incluso luego del juego cuando el docente retomaba la clase para dictar algún concepto los estudiantes ya se habían familiarizado con la definición con sus propias palabras. *Aspectos procedimentales:* El grupo experimental se ubica en el nivel excelente en la aplicación, construcción y ejecución del contenido; pues la motivación ofrecida a través de los juegos les permitió una experiencia nueva en la cual lograron satisfactoriamente poner en práctica todos los contenidos nuevos que estaban adquiriendo, les resultó fácil hallar ejemplos relacionados con su entorno, la mayoría del grupo resolvió los problemas, siguiendo el procedimiento correcto y hallando la solución correcta; debido a que los problemas planteados eran apoyados por los recursos didácticos empleados por el docente. *Aspectos actitudinales:* Los estudiantes fueron muy activos y participativos e interactuaban con sus compañeros, respetando las ideas y siguiendo las instrucciones dadas por el docente. Se pudo apreciar la creatividad en el momento de dar ejemplos de los conceptos básicos de probabilidad, las ideas expresadas por los estudiantes eran argumentadas con los contenidos que el docente dictaba debido a que pudieron a través de los juegos conseguir la aplicación de la probabilidad con su entorno social.

Análisis comparativo inferencial del desempeño estudiantil

La aplicación del contraste de hipótesis de la mediana, bajo un nivel de significancia (α=0.01) del 1%, para comprobar las hipótesis de la investigación (cuadro 1), llevaron a una respuesta donde en todos los contrastes el valor de $p < \alpha = 0.01$, por lo tanto: se presentan diferencias significativas entre los dos grupos de estudiantes (hipótesis (1)), así como también se consiguieron diferencias significativas entre los aspectos conceptual, procedimental y actitudinal del desempeño estudiantil, tal como lo reflejan los resultados de las hipótesis (2), (3) y (4). Esto evidencia la existencia de las diferencias significativas entre el juego y la clase tradicional como estrategias didácticas.

Cuadro 1

Contraste de hipótesis planteados y resultados

Hipótesis	**p**	**Decisión**
(1) Ho: No existen diferencias entre la mediana del desempeño estudiantil de los grupos Ha: Existen diferencias entre las mediana del desempeño estudiantil de los grupos	0.0000 1	rechazar Ho
(2) Ho: No existen diferencias entre la mediana del aspecto conceptual en los grupos Ha: Existen diferencias entre las mediana del aspecto conceptual en los grupos	0.0000 1	rechazar Ho
(3) Ho: No existen diferencias entre la mediana del aspecto procedimental en los grupos Ha: Existen diferencias entre las mediana del aspecto procedimental en los grupos	0.0000 1	rechazar Ho
(4) Ho: No existen diferencias entre la mediana del aspecto actitudinal en los grupos Ha: Existen diferencias entre las mediana del aspecto actitudinal en los grupos	0.0003	rechazar Ho

Conclusiones

La utilización del juego como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de la probabilidad le ofrece y le permite al docente utilizar herramientas que le pueden asegurar un aprendizaje significativo a sus estudiantes. La clase tradicional no resulta ser una estrategia motivadora para los estudiantes.

Se comprobó que existen diferencias significativas en el desempeño estudiantil, mostrando que el juego como estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de la probabilidad, permite que el estudiante afiance mejor los contenidos conceptuales, sea participativo, interesado, logre percibir la importancia y la utilidad de la probabilidad en la vida cotidiana a partir de la experiencia vivida. Al utilizar herramientas lúdicas, los estudiantes lograron afianzar los contenidos conceptuales lo que les permite identificar, reconocer y determinar los eventos y su probabilidad; así como crear diversos ejemplos relacionados con su entorno. Los estudiantes a los cuales se les presentaron los contenidos de probabilidad de forma tradicional (grupo control) se mantuvieron con una actitud pasiva y con baja receptividad, prestándole escasa atención a las instrucciones del docente. Los estudiantes del grupo experimental lograron percibir la importancia y la utilidad de la probabilidad en la vida cotidiana a partir de la experiencia vivida; ya que a través de los juegos didácticos lograron mostrarse participativos, interesados y atentos.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Extraído el 15 de julio de 2007 desde http://www.ugr.es/~batanero/publicacion.htm

Calatayud, M.L.; Gil, D. y Gimeno, J.V. (1992). Cuestionando el pensamiento docente espontáneo del profesorado universitario: ¿Las deficiencias en la enseñanza como origen de las dificultades de los estudiantes?. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *14*, 71-81.

Corbalán, F. (1995). Matemáticas, juegos y calculadora. *Aula de Innovación Educativa, 34*, 5-6.

García, C. (1994). El juego como método de enseñanza de la matemática. Caracas: Ciedma Consultores C.A.

León, N. (2006). La probabilidad en los textos de matemática de 7º grado de educación básica. *Investigación y Postgrado, 21(3),*177-200.

Medina, C. (1997). *La enseñanza problémica***.** Bogotá, Colombia: Rodríguez Quito.

Ramos, F. (2003). Fundamentos de la recreación (variables recreativas). Caracas: FEDUPEL.

Segarra, Ll. (1999). Juego y Matemática. *Aula de Innovación Educativa*, *78*, pp.25-27.

LOS MÓDULOS DE INSTRUCCIÓN COMO HERRAMIENTA METODOLÓGICA EN EL CONTEXTO DEL MODELO DE VAN HIELE

Carlos Mario Jaramillo López, Edison Sucerquia Vega, Sandra Milena Zapata
Universidad de Antioquia Colombia
Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UDEA-EAFIT) Categoría A, Colciencias
cama@matematicas.udea.edu.co, esucerquia@ayura.udea.edu.co, szapata@ayura.udea.edu.co
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *El propósito del artículo es presentar los avances de una investigación que se está desarrollando en el marco de las Fases de Aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele, las cuales corresponden al aspecto prescriptivo del modelo, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, susceptibles de una componente visual geométrica. Específicamente se ha logrado diseñar un módulo de instrucción enmarcado en estas fases, cuyo propósito es que los estudiantes ubicados en un nivel II de razonamiento frente al concepto de convergencia de una serie infinita, alcancen un nivel III de razonamiento.*

El módulo de instrucción, es una propuesta metodológica de aprendizaje e intervención en el aula, que le facilitará al docente por un lado, mejorar su enseñanza y por otro, lograr que el estudiante avance en sus procesos de razonamiento. Además se diseñó una prueba de selección múltiple, la cual se aplicó a una población amplia de estudiantes, con el propósito de validar la efectividad del módulo desarrollado.

Palabras clave: fases de aprendizaje, modelo de van Hiele, módulo de instrucción niveles de razonamiento, visualización

Antecedentes

El modelo de van Hiele, en la última década ha presentado una extensión a conceptos del análisis matemático; el grupo de investigación Educación Matemática e Historia (UdeA – EAFIT), gracias a la realización de tesis de maestría y doctorado ha contribuido en lo referente a dicha extensión.

El modelo educativo de van Hiele aborda dos aspectos fundamentales, uno descriptivo, en el cual se identifica el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes, y otro prescriptivo, que sugiere la creación de experiencias de aprendizaje que favorecen el paso de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

Este trabajo de investigación ha sido desarrollado teniendo en cuenta los resultados que presenta la tesis de maestría de Jurado y Londoño (2005), titulada: "*Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*", la cual es de carácter prescriptivo y uno de sus resultados manifiesta la dificultad que tienen los estudiantes para alcanzar un nivel III de razonamiento. La presente investigación da continuidad a la tesis anteriormente mencionada, aborda el aspecto prescriptivo del modelo, mediante la implementación de una serie de experiencias de aprendizaje enmarcadas en las fases para lograr la promoción en los niveles de razonamiento.

Niveles de razonamiento

La componente descriptiva del modelo tiene que ver con una estratificación del pensamiento humano. Se distinguen cinco niveles de razonamiento, según Llorens y Pérez (1997):

Nivel 0. *Predescriptivo*. Los estudiantes reconocen los elementos básicos de estudio para el concepto tratado, pueden variar entre diferentes conceptos relacionado.

Nivel I. *De reconocimiento visual*. Los estudiantes reconocen las propiedades de los elementos básicos de estudio, aprenden el vocabulario relacionado con el concepto y establecen ciertas relaciones entre dichos elementos.

Nivel II. *De análisis*. Los objetos son proposiciones que relacionan las propiedades. Los estudiantes analizan las estrechas relaciones entre los elementos básicos de estudio.

Nivel III. *De clasificación y relación*. Los objetos son las ordenaciones parciales de las proposiciones. Los estudiantes relacionan los elementos básicos de estudio y analizan sus propiedades llegando a dar definiciones verbales del concepto tratado.

Nivel IV. *De deducción formal*. Los objetos son las propiedades que analizan las ordenaciones. Los estudiantes analizan el concepto en distintas situaciones y pueden llegar a hacer demostraciones formales.

Fases de aprendizaje

Para promover un estudiante de un nivel de razonamiento al siguiente dentro de una materia (concepto), los van Hiele propusieron una secuencia de cinco fases de aprendizaje, una prescripción para la organización de la instrucción. Estas fases permiten establecer de manera aproximada la forma como las ideas son generadas, refinadas, extendidas y asimiladas por los estudiantes. Las fases de aprendizaje de van Hiele se centran en el papel de la instrucción con el propósito de ayudarle al estudiante a crear y fortalecer sus redes de relaciones en conceptos matemáticos; por lo tanto, se hace necesario diseñar, elaborar, desarrollar y validar *módulos de instrucción* que le permitan al estudiante alcanzar un avanzado nivel de razonamiento.

Las definiciones presentadas a continuación hacen parte de la construcción teórica que se ha venido haciendo a lo largo de la presente investigación y retoman elementos importantes de trabajos ya realizados en el contexto del modelo educativo, por autores como Vasco y Bedoya (2005), entre otros:

1. *Información*. El profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio, comprende cómo los estudiantes interpretan las palabras y da alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. Las preguntas se contestan y se hacen observaciones, usando el vocabulario y objetos de estudio relativos al tópico específico.

2. *Orientación dirigida*. El profesor diseña cuidadosamente secuencias de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio y cómo ellos llegan a familiarizarse con las características de las estructuras. Muchas de las actividades en esta fase son tareas paso a paso que producen una respuesta específica.

3. *Explicitación.* Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna de estudio. Durante esta fase, los estudiantes comienzan a formar las relaciones del sistema de estudio, es esencial que hagan explícitas las observaciones, más que recibir explicaciones del profesor.

4. *Orientación libre.* Los estudiantes encuentran tareas multipaso, o tareas que pueden ser completadas de diferentes maneras. Ellos ganan experiencia encontrando sus propias maneras de resolverlas, gracias a que muchas de las relaciones entre los objetos de estudio llegan a ser explícitas y coherentes para los ellos.

5. *Integración.* Los estudiantes, ahora realizan los métodos de su ordenación y se forman una idea general (tienen un vistazo general). Los objetos y relaciones son unificados e interiorizados dentro de un nuevo dominio de pensamiento. El profesor ayuda en este proceso, brindando conocimientos previos generales que los estudiantes se supone conocen, siendo cuidadosos de no presentar nuevas o discordantes ideas.

Redes de relaciones

La forma de manifestar una estructura mental de un estudiante se da a partir del establecimiento de una *red de relaciones* (van Hiele, 1986) en la cual los vértices de la red son conceptos o propiedades de la noción estudiada y las líneas de conexión son las relaciones que existen entre dichos elementos. A medida que se vincula un nuevo concepto o propiedad o se establezcan nuevas relaciones, se consolida o se amplía dicha red, la cual manifestará el grado de comprensión del concepto estudiado; la creación de esta nueva red de relaciones favorece el paso hacia el siguiente nivel de razonamiento. Propiciar tal progreso es también función de las fases de aprendizaje, en las cuales la instrucción juega un papel determinante, ésta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el estudiante posee en su mente, por esto se puede afirmar que "el papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es ayudar al alumno a crear y fortalecer su red de relaciones abundantes y complejas en conceptos matemáticos y de la geometría" (Jaramillo y Esteban, 2005, p. 116).

Según lo planteado por Jaramillo y Esteban (2005) "La estructura visual de la red de relaciones que un alumno adquiere en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se puede fortalecer con el empleo de la técnica de los mapas conceptuales". (p. 117). Es así como los éstos son una herramienta que: facilita la explicitación de la red de relaciones que los estudiantes poseen, le permite al docente hacer un seguimiento de los cambios generados en dicha red y sobretodo media el paso a través de las fases para lograr el progreso en el razonamiento de los estudiantes.

Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales diseñados por Joseph Novak, podrían definirse como un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones; según Novak y Gowin (1999), el objeto de los mapas conceptuales es "representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones" (p. 33), los mapas conceptuales se emplean como una herramienta para el aprendizaje, que permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes, y que permite también organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad;

además, también los reconocen como una herramienta útil en la evaluación formativa en tanto que permite detectar errores conceptuales y de alguna forma dan cuenta de la evolución del lenguaje empleado por los estudiantes, a lo largo del proceso educativo.

Los mapas conceptuales como herramienta educativa, gracias a su estructura, facilitan la visualización de las transformaciones que un estudiante realiza a su red de relaciones, siendo el lenguaje un aspecto fundamental durante el proceso de construcción de un concepto y además un factor común entre el modelo y los mapas conceptuales.

Módulos de instrucción

El módulo de instrucción debe contener experiencias de aprendizaje, diseñadas de manera detallada y pormenorizada, cuyo objeto es ayudar a promover a los estudiantes ubicados en el Nivel II de razonamiento al Nivel III, frente al concepto de convergencia de una serie infinita. Las experiencias de aprendizaje, pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula, sino también como aquellas que promueven aprendizajes significativos, independientes del contexto donde se lleven a cabo. Éstas deben ser enfocadas de tal manera que los estudiantes se involucren en procesos de enseñanza y de aprendizaje más específicos. Así mismo, las experiencias de aprendizaje fuera del aula, serían aquellas que se realicen con propósitos formativos y que permitan al estudiante adquirir habilidades, destrezas y actitudes, además, establecer redes de relaciones válidas entre los conocimientos adquiridos.

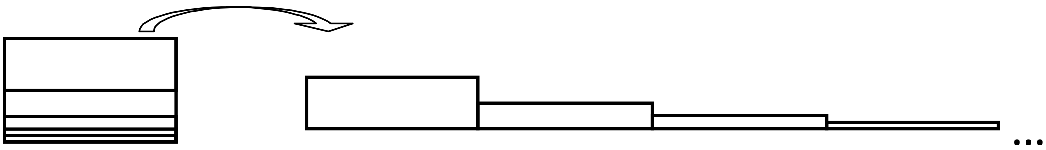
El módulo de instrucción contiene un conjunto de actividades, cada una de ellas enmarcadas en las fases de aprendizaje, las cuales a su vez, hacen énfasis al aspecto visual geométrico de la noción de convergencia de una serie infinita. Dado esto, el diseño de las actividades es una tarea minuciosa y delicada, ya que la pretensión última en el trabajo de investigación, es lograr que un estudiante adquiera un avanzado nivel de razonamiento. Este progreso en el razonamiento es posible, si el estudiante al término de las fases logra, para la noción de convergencia de una serie infinita, la integración entre el concepto imagen y el concepto definición, que según Tall y Vinner (1981), describen el estado de los conocimientos del sujeto en relación con un concepto matemático. Es evidente la relación del modelo de Vinner con el modelo de van Hiele, pues ambos suponen incrementar la *experiencia* al tiempo que se explicitan las imágenes de los conceptos (visuales, manipulativas, etc.) para construir a partir de ellas el pensamiento matemático avanzado.

Concepto objeto de estudio

En la investigación se abordan series de términos positivos que representan áreas de figuras planas, de manera particular se trabaja con rectángulos, dispuestos como escaleras; se retoman las definiciones de Jurado y Londoño (2005), quienes denominan escalera a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, que tienen igual base y uno esté contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará escalera creciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita creciente. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará escalera decreciente, si se compone de infinitos rectángulos, escalera infinita decreciente. Así mismo, se llamará área de una escalera a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman y la razón de una escalera será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior.

Uno de los resultados de la investigación es lograr que los estudiantes rompan con la concepción errónea de que una suma infinita de términos no tiene resultado, para ello se usó el mecanismo de la división sucesiva de un rectángulo a la mitad, lo cual permitió a su vez construir una escalera decreciente infinita de razón 1/2, dicho mecanismo conduce al estudiante de procesos de razonamiento finitos a infinitos y viceversa. Cabe resaltar que el razonamiento avanzado se refleja en comprender que no toda escalera decreciente infinita (en nuestro caso la denominamos escalera armónica) tiene resultado finito y en deducir las condiciones para las cuales una escalera infinita decreciente tiene área.

Debido a que el presente trabajo retoma el problema propuesto por Oresme (Stein y Barcellos, 1996), se muestra cómo la visualización favorece la determinación de las condiciones para la convergencia de una serie infinita. Para un rectángulo de área 1 unidad cuadrada, dividido a la mitad de manera sucesiva, se tiene que la suma de las infinitas áreas se puede representar mediante la expresión: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, de manera particular dicho rectángulo tiene razón 1/2 y es posible disponerlo como una escalera infinita decreciente de razón 1/2, como lo indica la figura:



Es claro que si ambas figuras son iguales entonces el área de la escalera infinita decreciente también será igual a 1. Este tipo de representaciones fueron importantes para el trabajo de investigación, ya que las escaleras de razón 1/2, son el mecanismo que ayudó a Oresme a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

En el trabajo de investigación se describe a través de un módulo de instrucción, la manera en la que a partir de la visualización de áreas de figuras planas, guiamos a los estudiantes desde procesos de razonamiento finito hasta procesos de razonamiento infinito, de tal modo que puedan progresar a un nivel III de razonamiento, con respecto al concepto de convergencia de una serie infinita.

Conclusiones

La implementación de los mapas conceptuales como herramienta para manifestar la red de relaciones, permite evidenciar el progreso de los estudiantes en cuanto a su razonamiento y su lenguaje, ya que al explicitar la red de relaciones, los estudiantes se hacen concientes de las relaciones que hay entre las propiedades y elementos de un concepto.

Partir del concepto imagen, permite gracias a la visualización, la apropiación inicial del concepto y el establecimiento de relaciones entre sus propiedades y sus manifestaciones, para lograr así el concepto definición del mismo. Esta investigación, constituye un punto de partida para nuevos estudios relacionados con el modelo educativo y el concepto en cuestión, siempre y cuando estén orientadas a un nivel de formalización, dentro del modelo educativo de van Hiele, sobre el concepto de convergencia de series infinitas.

Referencias bibliográficas

Jaramillo, C. (2003). *La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Tesis Doctoral publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.

Jaramillo, C. & Esteban, P. (2005). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele, *Revista Educación y Pedagogía*, *18* (45), 111–118.

Jurado, F. & Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Colombia.

Llorens, J. & Pérez, P. (1997). An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation. *International Journal* of *Mathematical Education in* Science *and Technology, 28* (5), 713-726.

Novak, J. & Gowin, B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. España: Martínez Roca.

Stein, S. & Barcellos, A. (1996). *Cálculo y Geometría analítica* (5^{a}. Ed.). México: McGraw-Hill.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht. Holanda.

Vasco, E. & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van hiele.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Colombia.

Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12* (2), 151 – 169.

UNA PROPUESTA CURRICULAR PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER DE APLICACIONES MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

Alejandro Muñoz Diosdado, Juan Ortiz Juárez, Alejandro Hernández Madrigal, Jaime Martínez Capistrán
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología del Instituto Politécnico Nacional	México
amunoz@avantel.net
Campo de investigación: Modelos matemáticos	Nivel: Superior

Resumen. *Dentro del marco teórico de la enseñanza por proyectos (La Cueva, 2001; Malaspina, 2007), se presenta una asignatura curricular llamada taller de aplicaciones matemáticas en la cual se realizan aplicaciones generales de tipo básico, aplicaciones relacionadas con la ingeniería en general y aplicaciones específicas a cada tipo de ingeniería de las impartidas en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (UPIBI). Los alumnos hacen uso de sus antecedentes matemáticos y resuelven problemas de aplicación en un ambiente cooperativo, construyen por si mismos los modelos de los problemas a resolver. Se trabaja y evalúa por medio de proyectos en los cuales se fomenta el aprendizaje cooperativo, el compromiso de los estudiantes y la creatividad. La evaluación es continua, las tareas son proyectos cortos y no hay exámenes. Los alumnos preparan por equipo un proyecto más extenso que prepara en una o dos semanas y cuyos resultados presentan en una sesión pública donde son evaluados a partir de la presentación, de la entrega detallada de un reporte escrito con sus resultados y de su desempeño en la sesión de preguntas. Además de la propuesta se presentan resultados preliminares porque ya se implementado la asignatura.*

Palabras clave: enseñanza por proyectos, aprendizaje cooperativo

Introducción

Es frecuente afirmar que en los cursos de matemáticas en las escuelas de Ingeniería no se realizan aplicaciones relacionadas con la carrera o con el contexto de los alumnos (Zúñiga, 2007; Muñoz-Diosdado y Arce-Viveros, 2003). En este trabajo se presenta una propuesta dentro del marco teórico de la enseñanza por proyectos (La Cueva, 2001; Malaspina, 2007), de una asignatura curricular llamada taller de aplicaciones matemáticas en la cual se resuelven problemas de aplicación haciendo uso de los conocimientos que tienen los alumnos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales. Se resuelven problemas del contexto de los alumnos, primero aplicaciones de tipo general, después aplicaciones relacionadas con la ingeniería básica y por último aplicaciones específicas a cada tipo de ingeniería de las que se imparten en la UPIBI del Instituto Politécnico Nacional. El objetivo del taller es que los alumnos construyan su propio conocimiento a partir de sus antecedentes matemáticos y resuelvan problemas de aplicación en un ambiente cooperativo, citando a Díaz y Hernández (1999, p. 19) "*al realizar actividades académicas cooperativas, los individuos establecen metas que son benéficas para si mismos y para los demás miembros del grupo, buscando así maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros. El equipo trabaja junto hasta lograr que todos los miembros del grupo han estudiado y completado la actividad con éxito*." La primera parte del curso revisa el proceso de modelado el cual se usará de forma extensiva para que los alumnos identifiquen en un problema las variables que lo describen y después puedan buscar las relaciones entre esas variables (Basmadjan, 2003; Bequette, 1998; Galagovski y Adúriz, 2001; Mochón, 2000). Toda la actividad se realiza trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes y se evalúa por medio de proyectos de aplicación que se resuelven de forma cooperativa, de tal forma que los estudiantes realmente se comprometan con los demás integrantes del equipo, con el trabajo a realizar y con su propio aprendizaje, además se enfatiza y se motiva la creatividad de los alumnos. Parte del sustento teórico del trabajo se tomó de las propuestas de Johnson, Johnson y Holubec (1999) y de Ascheri y Pizarro (2008).

No se evalúa con exámenes tradicionales, ni escritos ni orales, los equipos obtienen evaluaciones en cada una de las clases y en cada una de las tareas y también en los proyectos, de tal forma que continuamente el alumno es evaluado. Pero la evaluación no tiene como fin único ni principal calificar al alumno, es más bien una forma de ir observando los progresos y es un indicativo tanto para los alumnos como para el maestro de que es lo que deben trabajar o reforzar más, que actitudes deben de cambiar, que métodos deben de aplicar y de alguna manera esta evaluación se vuelve un proceso integral en donde incluso se hace énfasis en la enseñanza de valores. Los alumnos preparan y presentan proyectos más extensos en periodos de una a dos semanas, tiempo en el cual pueden consultar las fuentes que deseen, y los resultados se presentan en una sesión pública como es usual en algún congreso de investigación; ahí son evaluados a partir de la presentación, de la calidad de los resultados que se plasman en un reporte detallado por escrito y de su desempeño en la sesión de preguntas.

Descripción de la propuesta

Ubicación. La asignatura se ubica en el tercer nivel de las carreras de la UPIBI, los alumnos la cursan en el tercer o cuarto semestre dependiendo de la carrera que estén cursando, los alumnos de Ingeniería Biomédica, Ambiental, Farmacéutica y Alimentos en tercer semestre y los de Ingeniería Biotecnológica en el cuarto semestre. El alumno ha cursado Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, Ecuaciones Diferenciales, Algebra Lineal y Programación. Sería recomendable que hubiera tomado también los cursos de esta Probabilidad y Estadística y Métodos Numéricos. El alumno trabajará en equipo y recibirá atención prácticamente personalizada, por lo cual en cada curso participarán varios profesores (1 profesor por cada 10 alumnos).

Objetivos. El objetivo general de la asignatura es que el alumno realice aplicaciones matemáticas haciendo énfasis en la construcción, análisis, resolución y simulación de modelos que representen sistemas o procesos en ingeniería.

Los objetivos específicos establecen que el alumno tiene que describir primero los conceptos asociados a la construcción de modelos y los aplicará a la construcción, solución y análisis de modelos de sistemas simples de ingeniería. Después debe realizar aplicaciones matemáticas que involucren el cálculo y las ecuaciones diferenciales a problemas de interés general en ingeniería. También realizará aplicaciones matemáticas a problemas específicos de ingeniería ambiental, de alimentos, biotecnológica, biomédica y farmacéutica.

El encuadre y la evaluación. Al principio del curso se realiza un examen diagnóstico el cual persigue varias metas, la primera y más obvia es conocer los antecedentes de los alumnos en cuanto a conocimientos matemáticos, pero se desea conocer también las actitudes de los alumnos y la forma en como se organizan para resolver un problema, la forma en que trabajan en equipo y sus habilidades para elaborar un producto escrito de las actividades realizadas. Es por estas razones que tal examen se resuelve en equipo, los maestros están al pendiente para observar las conductas y las actitudes de los alumnos, la forma de organización de las actividades y como interaccionan, sobre todo motivan a que participen todos, de modo que ninguno quede excluido o bien que algunos acaparen todas las actividades, es decir desde el primer día se motivará un ambiente cooperativo en el trabajo de los equipos.

Aunque en el programa de la asignatura se establece que se realizarán tres evaluaciones departamentales, estas evaluaciones no son exámenes. En la primera y segunda, la participación continua y la entrega de tareas es el 50% de la evaluación, el otro 50% es la elaboración de proyectos. En la tercera evaluación, la participación continua y la entrega de tareas es el 25% de la evaluación, el otro 75% es la elaboración de un proyecto final que abarque una aplicación matemática específica a un problema de una de las ingenierías que se imparten en la Unidad. Se hará un examen extraordinario en caso de tener reprobados exámenes parciales, el cual tendrá la misma dinámica que las evaluaciones parciales, es decir, se evaluará a través de la realización de un proyecto que será diferente dependiendo de la ingeniería que curse el alumno.

Contenidos. El programa tiene tres unidades: I. Modelación matemática, II. Aplicaciones matemáticas a problemas de interés general en ingeniería y III. Aplicaciones matemáticas a procesos específicos de cada ingeniería. A pesar de que en el programa se sugieren cierto tipo de aplicaciones, no importa el tipo exacto de aplicación, sino que se examinan todas las posibles consecuencias en cualquier aplicación, es decir, el alumno primero plantea un problema, identifica las variables del problema y las relaciones que existen entre esas variables y propone ya sea algún modelo o estrategias de solución. Resuelve en equipo y obtiene resultados, pero no basta con obtener resultados, debe desarrollar al menos un mecanismo para verificar que sus resultados sean correctos, debe desarrollar métodos gráficos o de otro estilo para mostrar sus resultados, debe discutir sobre el alcance del modelo, es decir para que casos puede aplicarse y cuando no, de tal forma que debe poder proponer y hacer posibles modificaciones del modelo para adaptarlo a nuevas situaciones. Es muy importante que el profesor sea guía y apoyo constante, pero él no debe resolver los problemas, los alumnos deben construir su propio conocimiento, por eso la exposición oral debe reducirse al mínimo.

Resultados cualitativos

En esencia, el taller propone actividades en las que los estudiantes descubren y validan conceptos matemáticos en un ambiente cooperativo. Se ponen en práctica las habilidades intelectuales de alto nivel que dan pie a la discusión permanente durante las etapas del desarrollo del proyecto. Los alumnos progresan gradualmente en su conocimiento mediante la construcción del modelo matemático. Este progreso se manifiesta de muchas maneras; en primera instancia el estudiante se va adaptando a las situaciones de trabajo que exige el desarrollo del proyecto, lo que trae consigo ciertos acuerdos establecidos explícita o implícitamente entre los integrantes del equipo con el objetivo de comparar las diferentes ideas, tomar decisiones o incluso cambiar de estrategia cuándo sus cálculos son insuficientes o están incorrectos. En definitiva, para que el alumno pueda explicitar su modelo empírico y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo un resultado que sea razonablemente correcto según las condiciones del desarrollo del modelo, de tal manera que la comunicación entre los integrantes del equipo resulta crucial a fin de intercambiar puntos de vista en tanto las ideas se van ordenando e incluso son expresadas en lenguaje matemático según las posibilidades de cada uno. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser descrito formalmente.

Se observa que en este ambiente de aprendizaje cooperativo los alumnos articulan eficazmente sus conocimientos previos con los problemas aplicados relativos a su especialidad. Llevan a cabo diversas acciones encaminadas a resolver los problemas que surgen al desarrollar sus proyectos tal cómo: búsqueda de relaciones cuantitativas entre las cantidades, identificación de variables y análisis de variaciones. Es importante hacer notar como los estudiantes transitan de un registro de representación a otro de forma natural según sus necesidades y la conexión entre dichos registros es útil para sus propósitos.

Se establece en cada sesión un diálogo enriquecedor en fondo y forma entre los profesores y los diferentes equipos de trabajo. El taller en un momento dado funciona como “laboratorio” en el cuál se establecen hipótesis y en base a la “experimentación” se aceptan o rechazan. Pero sobre todo, el taller permite al estudiante trabajar con libertad en tanto desarrolla sus ideas de manera clara y espontánea.

La manipulación de los objetos matemáticos trae consigo la validación de sus cálculos con lápiz y papel o incluso mediante la utilización de las herramientas tecnológicas. Las presentaciones de sus avances dan realce a las sesiones y permiten una mejora sustancial hacia la construcción del modelo final. Al ir avanzando en la realización de los proyectos va surgiendo un ambiente de competencia entre los diversos equipos de trabajo; no obstante las diferencias personales internas que se presentan, lo que finalmente trae consigo una superación individual y colectiva.

Algunas de las aplicaciones y proyectos desarrollados

En los proyectos se desarrollaron aplicaciones muy interesantes. Algunas de ellas son: Problemas de optimización abordados de formas novedosas, problemas de fuerzas en fluidos, la ecuación de

Bernoulli y la ecuación de continuidad, la ecuación de transferencia de calor, conducción de calor en diferentes geometrías, la ecuación de difusión, la difusión de un medicamento en el torrente sanguíneo, la liberación de un contaminante a un río, la evaporación de contaminantes, equivalencia de sistemas mecánicos y circuitos eléctricos, oscilaciones amortiguadas y forzadas, modelación de la dinámica del virus de inmunodeficiencia humana (VIH), etc. etc. A continuación se describe un extracto de un trabajo desarrollado por los alumnos.

Ejemplo de un proyecto de aplicación

Evaporación de un contaminante a la atmósfera. En este problema los alumnos obtuvieron las ecuaciones de un modelo para predecir la tasa de evaporación, eran alumnos de ingeniería ambiental por lo que les interesaba cómo es que los contaminantes son transportados a través de la atmósfera. Cuando un contaminante entra en un cuerpo de agua (por ejemplo por un derrame accidental o por contaminación intermitente de la entrada de un flujo), parte de este puede ser liberado a la atmósfera por evaporación, mientras que otras proporciones del mismo pueden ser adsorbidas o reaccionar con los sedimentos del fondo, o someterse a la biodegradación, a través de la acción bacteriana. Los alumnos trataron únicamente con la liberación a la atmósfera y trataron de determinar hasta que punto la concentración de contaminantes en el agua es reducida por evaporación.

La determinación de la concentración de contaminantes con el tiempo es un objetivo lógico, pero el experimento requiere de datos sobre velocidad de evaporación, que pueden ser dependientes de temperaturas locales y condiciones de viento. Vieron si podían evitar el uso de datos de evaporación mediante su eliminación del modelo. Se dieron cuenta que una buena estrategia en estos casos es empezar modelando el proceso y examinar los primeros resultados para ver si vale la pena de que el objetivo se pueda alcanzar. Las herramientas que se tienen a disposición son diversos balances de masa, y se empieza por escribir dos de ellos, utilizando fracciones molares como las unidades de concentración. Esto es necesario porque las leyes físicas que participan aquí (ej. ley de los gases ideales, relaciones fase-equilibrio) son basadas en velocidades molares en lugar de masa. Se elige un balance molar total y un balance molar del contaminante (que también se pudo haber elegido un balance de masa de agua, pero en última instancia, resulta ser menos conveniente). El cuerpo de agua se supone que es una mezcla y con la concentración uniforme sin flujo o salida. Escribieron las ecuaciones de balance molar total y del contaminante y obtuvieron dos ecuaciones en las cuales se relacionan el total de moles evaporándose por unidad de tiempo, las moles de agua y del contaminante en el cuerpo de agua y la concentración del contaminante en el vapor y la fase acuosa respectivamente.

Por lo tanto, concluyeron que necesitaban dos ecuaciones más. Una relación puede ser obtenida por el supuesto de que el vapor dejando el líquido está a nivel local en equilibrio con el líquido. Y la cuarta variable, la velocidad de evaporación D, se eliminó del modelo haciendo un poco de álgebra. Investigando, encontraron una relación que establece que P, o el contenido del contaminante en el vapor, aumenta con la concentración de x de la fase líquida y con la presión de vapor del contaminante puro. Usando leyes conocidas como la ley del Gas ideal y la ley de Dalton sobre la adición de las presiones parciales y realizando algunos cálculos más con la ayuda de referencias bibliográficas y el apoyo constante de los maestros, los alumnos pudieron obtener por fin una ecuación que integraron para poder obtener lo que deseaban, es decir, cuando un contaminante está disuelto en el agua y esta se evapora, cual es la fracción del mismo que se evapora junto con el agua y que por lo tanto puede viajar a otras regiones. En particular estaban interesados en contaminantes como los aceites pesados, mercurio, pesticidas, bifenilos policlorados (PCB_s), etc.

Se obtuvieron resultados que son sorprendentes porque una buena parte de los contaminantes disueltos en el aula se volatilizan también, en el caso del mercurio alrededor del 13%, estos contaminantes viajan largas distancias, llevados por el viento y otras corrientes de aire. Debido a esto es por lo que las regiones árticas están contaminadas por este tipo de contaminantes.

Los alumnos se mostraron altamente motivados no solamente por los resultados obtenidos, sino porque fueron construyendo modelos que describen un fenómeno, estos alumnos tenían actitudes contrarias al aprendizaje de la matemática, las cuales cambiaron totalmente cuando finalizaron y presentaron su proyecto.

Conclusiones

La asignatura Taller de Aplicaciones Matemáticas se ha aplicado durante dos semestres a 8 grupos de aproximadamente 35 alumnos cada uno. El método de proyectos como estrategia didáctica fortaleció el trabajo en equipo y la discusión, se realzó el aspecto formativo de la matemática, y estimuló en los alumnos el interés por el descubrimiento. Se hizo énfasis especial en la construcción de modelos y se probaron diversos modelos a partir de las diferentes hipótesis de los alumnos. Se evaluó de forma continua; con la realización de proyectos cortos de aplicación y proyectos más extensos que se desarrollaron en varios días y cuyos resultados se presentaron ante los compañeros y profesores. Los alumnos asimilaron conceptos que no habían asimilado en cursos anteriores y mejoraron su capacidad para modelar un fenómeno o un proceso. Tomaron de forma parcial la responsabilidad de su propio aprendizaje, valoraron su trabajo al explicar y defender sus resultados ante los demás y se hizo que se involucraran en el trabajo estudiantes que usualmente no participan. Al fortalecer el trabajo cooperativo en pequeños grupos y fomentar la interacción, se logró el razonamiento de cada participante y el discernimiento de los problemas propuestos. El taller se convirtió en un medio ideal para usar y aprender tecnología de cómputo y herramientas de cálculo y graficación que antes no habían aplicado y se expandieron las capacidades de los estudiantes para presentar y manipular la información. En general, el trabajo permitió al alumno desarrollar habilidades de trabajo productivo, de aprendizaje autónomo y de mejora continua.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2008). Experiencia de cátedra usando herramientas informáticas y el aprendizaje cooperativo. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 993-1003. México:Clame AC

Basmadjian, D. (2003). *Mathematical modeling of physical systems: an introduction*. USA: Oxford University Press.

Bequette, B. W. (1998). *Process dynamics: modeling, analysis and simulation*. USA: Prentice Hall.

Díaz, F., Hernández, G (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Un enfoque constructivista*. México: Mc Graw Hill.

Galagovski, L. y Adúriz, A. (2001). Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales. El concepto de modelo didáctico analógico. *Enseñanza de las Ciencias* 19(2), 231-242.

La Cueva, A. (2001). La enseñanza por proyectos: ¿mito o reto? *Revista Iberoamericana de Educación*, 16, OEI, Madrid.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires: Paidós

Malaspina, M. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(3), 365-369.

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz-Diosdado, A. y Arce-Viveros, A. (2003). La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas matemáticos en una escuela de ingeniería. En J.R. Delgado Rubí (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 524-529, México: Clame AD

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de Ingeniería: Un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 145-175.

MATERIALES TANGIBLES. SU INFLUENCIA EN EL PROCESO ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Genny Rocío Uicab Ballote
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
uballote@uady.mx
Campo de investigación: Materiales didácticos Nivel: Cualitativa

Resumen. *Bajo alguna concepción y/o creencia acerca de qué enseñar, cómo enseñar y cómo se debe aprender matemáticas, es común encontrar que los profesores emplean diferentes recursos didácticos para apoyar la impartición de su cátedra, entre dichos recursos podemos encontrar los manipulables tangibles; consideramos a éstos como cualquier tipo de material u objeto físico que los estudiantes pueden "palpar" para ver y experimentar conceptos matemáticos. El presente trabajo, en sus inicios como proyecto de investigación pero ya maduro por sus años de desarrollo empírico; tiene como intención presentar un panorama reflexivo que permita apreciar que los manipulables bien diseñados en conjunto de una adecuada planeación por parte del profesor considerando lo que se quiere enseñar, pueden apoyar a los estudiantes a construir y conectar varias representaciones de ideas matemáticas, así como, inducirlos a plantearse nuevas alternativas para la resolución de problemas.*

Palabras clave: recursos didácticos, manipulables tangibles

Introducción

Las matemáticas juegan un papel importante en nuestro entorno. Ante el fenómeno de la globalización que hoy nos invade, la enseñanza de contenidos matemáticos es primordial en el contexto escolar, por ello, es importante que el profesor como ente de experiencia, proporcione a los alumnos, las herramientas que les permitan apropiarse del saber matemático, saber que confluya para atender situaciones de su ámbito social.

Ante este panorama, las diversas opiniones y creencias acerca de qué enseñar, cómo enseñar y cómo se debe aprender matemáticas generan diferentes posturas en los profesores interesados en cómo hacer efectiva la enseñanza de las matemáticas al interior del aula. Bajo alguna concepción, es común encontrar que los profesores emplean diferentes recursos didácticos, para apoyar la impartición de su cátedra, apoyados en lo que consideran, la mejor forma de enseñar y aprender matemáticas. Entre estos recursos se encuentran aquellos denominados manipulativos que pueden agruparse en los denomina tangibles (concretos) y virtuales (Godino, Batanero y Font, 2003). Centrando nuestra atención en los manipulables tangibles, consideramos a éstos como cualquier tipo de material u objeto físico que los estudiantes pueden "palpar" para ver y experimentar conceptos matemáticos, es decir ponen en juego la percepción táctil.

Partidaria de que el órgano sensorial constituye el primer paso en el proceso de obtener información (con la intención de que ésta se convierta en conocimiento) y bajo mi propia creencia de cómo enseñar matemáticas, hace algunos años, me fui interesando en tratar de presentar el objeto matemático a través de representaciones concretas. Esto me llevó a producir algunos materiales tangibles para acompañar algunas de mis clases de matemáticas a nivel bachillerato y una que otra a nivel licenciatura. Empíricamente uno puede apreciar lo que ocurre al interior del aula, cuando se trabaja con un material tangible, apreciando las bondades que brinda al proceso de enseñanza aprendizaje y evaluando los aspectos que pueden mejorarse. Sin embargo, en un sentido más formal, es importante cuestionarse ¿cómo los materiales tangibles contribuyen al entendimiento de ideas matemáticas? ¿qué aspectos deben considerarse para el diseño y la elaboración de los tangibles? ¿qué investigaciones revelan aspectos instruccionales con apoyo de materiales tangibles? ¿es posible caracterizar a los materiales tangibles? etc.; estas son algunas preguntas cuya búsqueda de sus respuestas dan origen a este proyecto de investigación.

El objetivo del presente trabajo (como parte de la etapa inicial del proyecto) pretende proporcionar referentes acerca del uso de los recursos didácticos, y en particular de los materiales manipulativos, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Antecedentes

Baez y Hernández (2002) en un recorrido histórico entre los años sesentas y ochentas señalan:

> *El uso de materiales concretos, como un primer acercamiento, parece ser que se asume en forma incuestionable. La aparición de los materiales concretos ocurre en la década de los de los años sesentas, con la publicación de las bases teóricas propuestas por Zoltan Dienes (1960) y por Jerome Bruner (1961) y que a partir de ese hecho, varios estudios desde entonces se publicaron, haciendo referencia a la efectividad del uso de los materiales concretos y los resultados fueron variados: Fennema (1972), argumentó a favor del uso de materiales concretos para los primeros años, no así para estudiantes mayores, indicando*

que éstos no necesariamente se beneficiarían con el uso de este tipo de materiales. Por otra parte, Svydam e Higgins (1977), reportaron patrones de beneficio para todas las edades en los estudiantes. Labinowicz (1985), reportó dificultades considerables con materiales de base diez, aunque Fuson y Briars (1990) reportaron un éxito inaudito con el uso de los mismos materiales en la enseñanza de los algoritmos de sustracción y adición. Por su parte, Resnick y Omanson en (1987) y Thompson en (1992), informaron que el uso de bloques de base diez generó poco efecto sobre los algoritmos de sustracción y adición, mientras que, Wearne e Hiebert (1988) reportaron un éxito consistente en el uso de materiales concretos para ayudar a los estudiantes sobre la comprensión de fracciones y numeración decimal.

Por otro lado, de acuerdo con Fischbein (1987) los conceptos matemáticos y las operaciones matemáticas son básicamente creaciones abstractas y formales, pero nuestra naturaleza no nos permite movernos únicamente en contextos puramente simbólicos sólo con restricciones formales: así que con frecuencia producimos modelos mentales que proporcionan algún significado práctico o unificador a estos símbolos. Considerando que en el proceso de enseñanza aprendizaje, no es fácil lograr el desarrollo de la capacidad de razonamiento abstracto, interesa promover la actividad manipulativa y deducción de los conceptos matemáticos, permitiendo así *visualizar la abstracción* e ir de lo *concreto a lo abstracto* para proporcionar a los estudiantes elementos para la construcción de sus propias ideas matemáticas.

Los materiales tangibles, recursos didácticos

La actividad del maestro, es decir, la enseñanza, se considera como una actividad de mediación entre la cultura, en su sentido más amplio, representada en el currículo, y el alumno. Por tanto, el maestro, a través de la actividad de la enseñanza, debe facilitar el aprendizaje del alumno, para lo cual dispone de diferentes elementos, medios o recursos, de los que se ayuda para hacer posible su labor de mediación cultural. Esas ayudas del material didáctico es todo aquel objeto artificial o natural que produzca un aprendizaje significativo en el alumno. Los materiales didácticos son usados para apoyar el desarrollo de los estudiantes en aspectos relacionados con el pensamiento, el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la socialización, el mejor conocimiento de sí mismo y de los demás; de esta manera los materiales didácticos han ido cobrando una creciente importancia en la educación contemporánea. Las memorizaciones forzadas y las amenazas físicas dejaron de ser métodos viables hace mucho tiempo, dando paso a la estimulación de los sentidos y la imaginación.

Los recursos didácticos pueden clasificarse en dos tipos (Godino, Batanero y Font, 2003):

a) Ayudas al estudio. Son recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.

b) Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático. Son objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático. Se distinguen dos tipos, "manipulativos tangibles" y "manipulativos gráfico-textuales-verbales"; en éstos últimos participan la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc. Centrándonos en los manipulativos tangibles, son aquellos que ponen en juego la percepción táctil: regletas, ábacos, piedrecillas u objetos, balanzas, instrumentos de medida, etc. Es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas. Por ejemplo, un niño puede usar conjuntos de piedrecillas para representar los números naturales.

Algunas características de estos materiales manipulativos o concretos son:

En primer lugar, el material concreto tiene un fuerte carácter exploratorio, lo que propicia un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión. Las limitaciones que pueda presentar un manipulativo bien encauzadas pueden generar la chispa para algunas discusiones en clase.

En una segunda instancia, a medida que los estudiantes trabajan con las herramientas por un tiempo considerable y desarrollan más y más el entendimiento de los conceptos matemáticos, ellos tienen menos necesidad de herramientas concretas (tales como piezas manipulables o diagramas), sirviendo las piezas concretas solamente como un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.

En un tercer plano, el material didáctico manipulable es un complemento, no un sustituto de otras representaciones (Báez y Hernández, 2002).

Las bondades de un material didáctico manipulable conllevan a que éstos sean considerados como recursos de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, principal o exclusivamente en los niveles primarios. Por mencionar, en las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de las comunidades autónomas españolas, y de otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. El uso de recursos manipulativos como el geoplano, tangram, ábacos, material multibase, dados, fichas, etc. se presenta como "casi obligado" en los niveles primarios y secundarios. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. También en España los profesores se han preocupado por esta cuestión; por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó unas jornadas específicas sobre el tema (Godino et als., 2003).

Estructurando ambientes de aprendizaje con materiales tangibles

El proyecto de investigación que se está desarrollando consiente el hecho de que hay llevar al alumno (de diferentes edades) progresivamente a la construcción de una red de conceptos y procedimientos, y al dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático formal. De aquí que se asuma una postura de que la orientación de la enseñanza y del aprendizaje esté situada en un continuo que vaya de lo manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal. Se propone que las experiencias matemáticas iniciales sean de naturaleza intuitiva y puedan (en su caso) ser vinculadas a la manipulación de objetos concretos. Estas experiencias iniciales serían sólo un punto de partida que hay que abandonar en algún momento, para construir el conocimiento matemático a través de una abstracción y formalización crecientes. Enfocándonos al uso de tangibles, es importante apreciar que estará condicionado por una serie de elementos que pueden plantear diversos problemas y dificultades que son importantes considerar; entre ellos podemos destacar:

a) El profesor: la formación científica y didáctica del profesor y sus concepciones sobre la matemática y su aprendizaje influyen notablemente a la hora de decidir la conveniencia de utilizar un determinado material tangible con los alumnos. Así, el profesor que tenga como objetivo prioritario provocar en sus estudiantes experiencias matemáticas bajo este enfoque, justificará la necesidad de emplear dicho material.

b) El alumno: el interés, la motivación, la disciplina o el nivel de los alumnos son factores que también influyen en la decisión de emplear materiales tangibles. Aunque con estos objetos se espera mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, un excesivo número de alumnos por clase puede ocasionar dificultades en la organización del trabajo a realizar.

c) El conocimiento matemático a estudiar plantea al profesor una serie de cuestiones metodológicas que pueden afectar la utilización de los materiales tangibles. Por ejemplo, ¿qué material manipulativo conviene emplear para enseñar el tópico matemático que nos interesa? ¿Qué tareas o actividades podríamos proponer a los alumnos con ese material? ¿Cuáles serían las más adecuadas? ¿Se está produciendo algún aprendizaje como consecuencia del uso del material? ¿Cómo podríamos determinar la comprensión que adquieren los estudiantes acerca de un conocimiento matemático cuando utilizan material tangible?

Es importante que el uso del material, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática. Usar manipulativos tangibles en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo. El aspecto central no es sólo el material concreto, sino la situación didáctica integral, que atiende tanto a la práctica como al discurso, de la que emergen las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas.

d) El diseño del material tangible ¿qué elementos se deben considerar para el diseño y elaboración de un material? Es importante considerar el nivel al que va dirigido dicho material, las características del grupo, la duración de los módulos-clase, etc.

Conclusiones

Como toda metáfora, el uso del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas puede resaltar unos aspectos de los conceptos que tratamos de enseñar y ocultar otros, por lo que debemos prestar una atención cuidadosa en su diseño, elaboración y uso. Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con “polígonos” o “poliedros” de plástico), en cierta forma “manipulamos” y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figurales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. En consecuencia, un uso irreflexivo del material manipulativo podría constituir obstáculos para la apropiación efectiva del conocimiento matemático.

El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades concretas del material manipulativo y los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades. Ello puede impregnar a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza.

Si no se es cuidadoso en separar el material manipulativo del objeto abstracto, el paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada, apoyada en sistemas de signos, puede estar no exento de conflictos.

Referencias bibliográficas

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Extraído el 28 de julio de 2006, desde http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Báez, M. y Hernández, S. (2002). *El uso de material concreto para la enseñanza de la matemática*. Taller de Matemáticas del Centro de Ciencia de Sinaloa. Extraído el 23 de septiembre de 2007, desde http://redexperimental.gob.mx/descargar.php?id=229.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holanda: Reidel.

UN ESTUDIO DE INSTRUMENTOS QUE FACILITAN CÁLCULOS A TRAVÉS DEL USO DE LOGARITMOS

Renata Ivonne López Sánchez, Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero México
renata_ivonne@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo es un breve estudio sobre instrumentos que se originaron para satisfacer la necesidad de reducir los largos periodos de tiempo empleado al realizar cálculos, específicamente aquellos instrumentos basados en ideas logarítmicas.*

Nos interesamos de manera especial en el estudio del uso y aplicación de ciertos instrumentos que surgieron a partir de la llegada de los logaritmos, con el cual se busca conocer lo que se ha perdido con el paso del tiempo y el cambio de instrumentos para facilitar los cálculos. Estamos trabajando bajo el supuesto de que entrevistar a profesionales que durante su etapa de estudiantes hayan usado las tablas logarítmicas, la regla de cálculo y/o el papel logarítmico nos dará información sobre estos instrumentos, para las entrevistas se utilizó la historia de vida como proyecto de investigación (Galindo, 1998), y a la socioepistemología como marco teórico, todo esto a fin de dar ciertas pautas sobre la importancia del uso de estos instrumentos dentro del aula de clases.

Palabras clave: logaritmos, instrumentos, facilitar cálculos

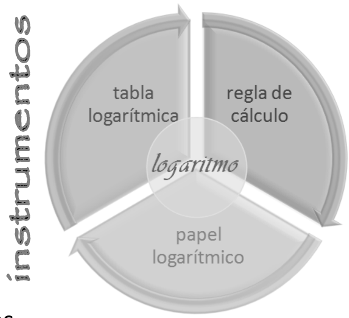
Introducción

A lo largo de la presente investigación se tratará de dar a conocer algunas de las formas en que el logaritmo ha vivido entre nosotros, dentro y fuera de las aulas donde hemos pasado gran parte de nuestras vidas intentando entender y aprender a usar las distintas herramientas que las diferentes áreas de conocimiento nos proporciona, más aún entender el funcionamiento de los distintos instrumentos que nos ayudan a hacer mas ligero nuestro caminar por las matemáticas, asimilar lo que la tecnología ha hecho posible por y para nosotros, entre muchas otras cosas.

En el artículo se verá como es que los logaritmos sirvieron como base para la confección de diferentes instrumentos con la misma finalidad con que fueron concebidos los logaritmos, ahorrar tiempo en la realización de cálculos.

A partir de ciertas ideas trabajadas a principios del siglo XVII, específicamente por *Jonh Napier* en su obra "*Mirifici logarithmorun canonis descriptio...*"(Napier, 1619) se genera una revolución en el mundo de los cálculos con la idea de logaritmos, de manera especial en el comercio y la astronomía, desde entonces éstos han estado presentes dentro y fuera de la escuela de diferentes formas, a saber, como relación entre *progresiones aritméticas y geométricas, tablas logarítmicas,* *escala logarítmica* y *curva logarítmica;* como herramienta facilitadora de cálculos. Precisamente esta forma de concebir a los logaritmos motivó la confección de instrumentos como la regla de cálculo y el papel logarítmico.

Logaritmos como herramienta



En esta investigación se entiende por *herramienta* a aquello que sirve para lograr un objetivo, en este caso el objetivo es *facilitar cálculos*. Por lo que nosotros vemos a los logaritmos como herramienta, a partir de la cual se generan otras herramientas como las *tablas logarítmicas*, la *curva logarítmica* y la *escala logarítmica*. Para diferenciar entre el tipo de herramientas de las que hablemos vamos a llamar *instrumento* a aquellas herramientas palpables como las *tablas* o la *escala*, ésta última en forma de *regla de cálculo* o *papel logarítmico*, dejando el adjetivo de herramienta al concepto de logaritmo, por ser la base o fundamento de las demás herramientas.

Facilitar cálculos

Así como los logaritmos aparecen en distintas formas y distintos ámbitos, solo por mencionar algunos el pH en química, el pentagrama en música, la escala de Richter en sismología, entre otros, también forman parte importante en la elaboración y funcionamiento de instrumentos que proporcionan ahorro de tiempo a la hora de realizar actividades cotidianas como la de efectuar cálculos. Es así que basándonos en ideas manejadas por la socioepistemología y en particular en lo referente a prácticas sociales que nos enfocamos en la búsqueda de prácticas, de comunidades como la de los ingenieros, que hayan o sigan realizando al aplicar logaritmos.

Coincidimos con que el tipo de herramienta utilizada determina la forma o proceso a seguir en la realización de una actividad. Por ejemplo en el trabajo realizado por los ingenieros, específicamente la actividad de efectuar cálculos, tal actividad estará determinada por la herramienta que se utilice que como se verá mas adelante, el tiempo en la realización de la actividad y sobre todo la precesión de sus resultados dependerá de si se trabaja con una regla de cálculo o una calculadora. Consideramos que la acción de manipular instrumentos como las tablas logarítmicas, la regla de cálculo y el papel logarítmico como una necesidad de simplificar tiempos y algoritmos dan lugar a lo que llamamos práctica de facilitar cálculos, dentro de la comunidad de ingenieros.

Esta idea la basamos en, por un lado, la necesidad de utilizar a los logaritmos de una forma distinta conservando la esencia de los mismos y, por otro, la necesidad de un instrumento para efectuar los cálculos dentro y fuera de la escuela como lo evidencian las entrevistas. A continuación presentamos la forma como funcionan estos instrumentos con un ejemplo de cada uno y una breve reseña de lo que se obtuvo de las entrevistas a ingenieros-profesores sobre su experiencia en el uso de algunos de estos instrumentos.

1. Los instrumentos

A los instrumentos los hemos dividido en los que usan la relación entre progresiones aritméticas y geométricas tal cual, como las tablas logarítmicas, y aquellos que la usan de forma gráfica, como la escala logarítmica.

Las tablas logarítmicas se usaban, entre otras cosas, para determinar el logaritmo de algún número, con el cual efectuar cálculos con números muy grandes o muy pequeños, cálculos como el producto de dos números, que se reducía a la suma de sus respectivos logaritmos (Vázquez, 1914). Ejemplo del uso de las tablas logarítmicas para la obtención del logaritmo de un número:

El logaritmo de 6 22 8

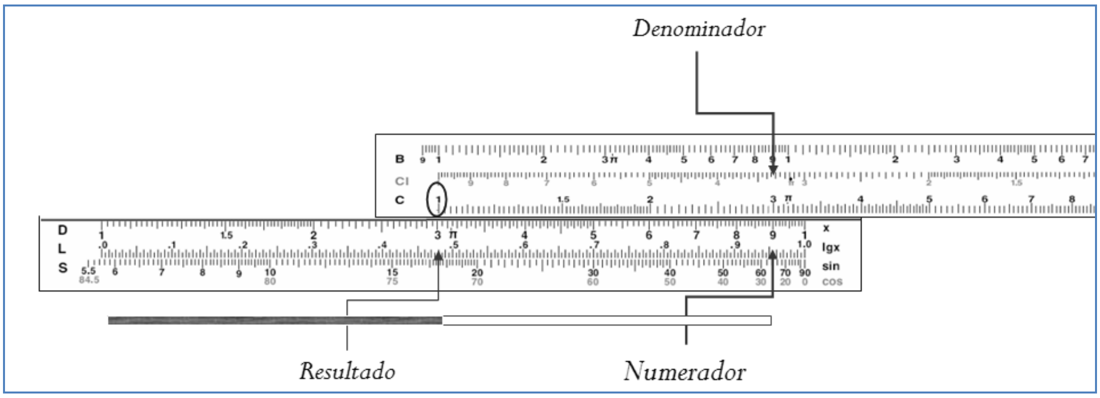
1º Se escribe la *característica*, total de dígitos menos uno, 3.

2º Se busca la *mantisa*, parte decimal del logaritmo, 79 4349

El logaritmo de 6228 es **3.79 4349**

N.	*Log.* **5**	*dif.*	**6**	*dif.*	**7**	*dif.*	**8**	*dif.*	**9**	*dif.*
620	79 2742	70	2812	70	2882	70	2952	70	3022	70
21	3441	70	3511	70	3581	70	3651	70	3721	69
22	4139	70	4209	70	4279	70	4349	69	4418	70
23	4836	70	4906	70	4976	69	5045	70	5115	70
24	5532	70	5602	70	5670	69	5741	70	5811	69
25	6227	70	6297	69	6366	70	6436	69	6505	69
26	6921	69	6990	70	7060	69	7129	69	7198	70
27	7614	69	7683	69	7752	69	7821	69	7890	70
28	8305	69	8374	69	8443	70	8513	69	8582	69
29	8906	69	9065	69	9134	69	9203	69	9272	69

Por su parte con la *escala logarítmica* que por su disposición geométrica los productos o divisiones de dos números cualesquiera se realizan sumando o restando segmentos. El mecanismo de la 1017 regla consiste en deslizar la regla (o reglilla) del centro (la cual es móvil) hasta hacerla coincidir con alguna de las dos reglas del los extremos, cada una de estas reglas tiene varias escalas logarítmicas en diferentes proporciones con las cuales se calculan inversos, potencias (cuadrados, cubos), logaritmos, etc. para el siguiente ejemplo se utilizan las escalas básicas de la regla la escala C y D. Ejemplo de aplicación de la escala logarítmica en la regla de cálculo para la realización de una división.

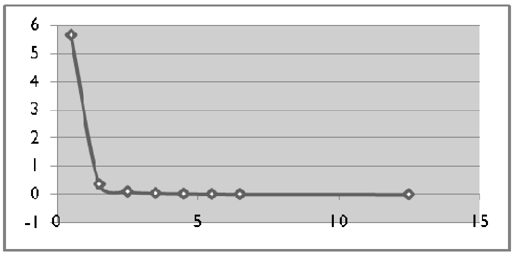


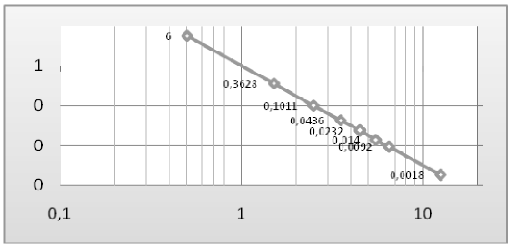
Se desliza la reglilla hasta que coincida el numerador, en la escala D, con el denominador, en la escala C, ejemplo 9/3 esto es el 9 en la escala D con el 3 en C.

El resultado se encuentra en la escala D exactamente a la misma altura del 1 en C, por lo tanto 9/3=3.

Mientras que la escala logarítmica en el p*apel logarítmico* y *semilogarítmico* es útil para representar datos provenientes de la experimentación. Con frecuencia los datos cubren un rango de valores demasiado amplio y no se les puede llevar a una gráfica en papel ordinario (Washington, 1983). En las siguientes gráficas se compara lo que hace el papel logarítmico con una expresión que involucra potencias:

Si se necesita construir la gráfica de $x^5y^2=1$ en un papel con escalas "convencionales", donde la distancia entre sus particiones es la misma quedaría como la gráfica de la izquierda, sin embargo si se utiliza la escala logarítmicas en ambos ejes se tendría la gráfica de la derecha, esto es porque si aplicamos logaritmo a ambos miembros de la ecuación se tendría $5\log x+2\log y=0$, donde $\log x$ y $\log y$ son constantes por lo que la ecuación la podemos considerar como $5u+2v=0$ con $u=\log x$ y $v=\log y$.





2. Las entrevistas

Se realizaron seis entrevistas a profesores que durante su formación académica tuvieron contacto directo con el uso de la regla de cálculo y/o el papel logarítmico, cinco de los entrevistados son ingenieros, ya que la investigación evidenciaba una estrecha relación entre esta comunidad y el uso de los instrumentos estudiados. Las entrevistas se realizaron con el objetivo de conocer en el caso de la *regla de cálculo* sobre la importancia que se le confería al uso de tal instrumento así como también lo que implicó el cambio de la *regla de cálculo* por la *calculadora*; y en el caso del *papel logaritmo* o *semilogaritmo* se indagó sobre las materias en las cuales era utilizado además de conocer el porqué usar este tipo de papel. Por tal razón, se pensó en una metodología como historia oral y de vida que permitiera ver dichos aspectos además de que se combinara de forma especial con la socioepistemología. De las entrevistas se obtuvo lo siguiente:

1.1 La regla de cálculo

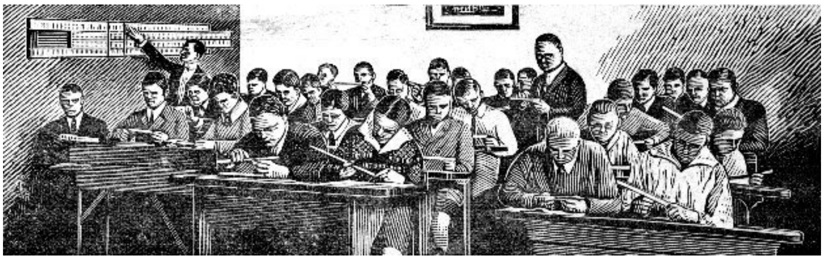
Antes de la regla de cálculo…

> …nosotros usábamos mucho la matemática mental porque cuando no existía… cuando no salía la regla de cálculo hacíamos las operaciones a mano, las operaciones con decimales, las fracciones, las multiplicaciones, todas… recuerdo que nosotros utilizábamos unas tablas antes de usar la regla de cálculo… tablas de logaritmos,… (Químico, Morelos)

¿Cómo llega la regla de cálculo al aula?

> …son los ingenieros los que aprendieron a manejar en México las reglas en los años 50’s, ellos eran los profesores de matemáticas, entonces pero ¡¡no todos los ingenieros!!… el ingeniero

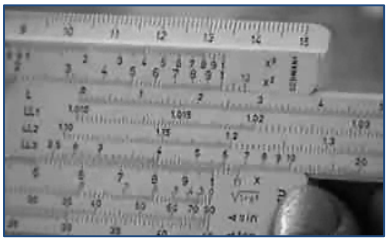
que la usaba era el ingeniero que la llevaba en la bolsa y a los muchachos de prepa decía ¡ora chavos la van a manejar!… y como se podía encontrar en el mercado… no era tan cara… (Matemático, DF)



¿Qué resolvían con ella?

Todos los que resuelven en ingeniería, todo… trigonometría … que será… cuando sacas los ángulos con senos, tangentes, las pendientes también,… todo lo que utilizas en ingeniería con tu calculadora nosotros lo hacíamos con la regla de cálculo, esa era la forma de hacer las matemáticas… (Químico, Morelos)

¿Qué necesitaba saber para usar la regla de cálculo?



…las funciones trigonométricas,… por ejemplo el seno de 30° es igual al coseno de 60°, entonces si yo tenía que calcular el coseno de 60° tenía que saber que su complementario era 30 y lo que yo podía sacar con la regla era el seno de 30°, ¿**no era tan sencillo**?, ¡¡no!! tenías que saber todas las propiedades trigonométricas para poder usarla porque sino no se podía. (Matemático, DF)

Llega la calculadora…

…la primera calculadora que tuvimos en nuestras manos, calculadora científica, o sea que podía hacer estas cosas fue la que desplazó la regla de cálculo y fue la *Radio Shack* era una calculadora grandota, si una calculadorzota pero te hacia todo… (Matemático, DF)

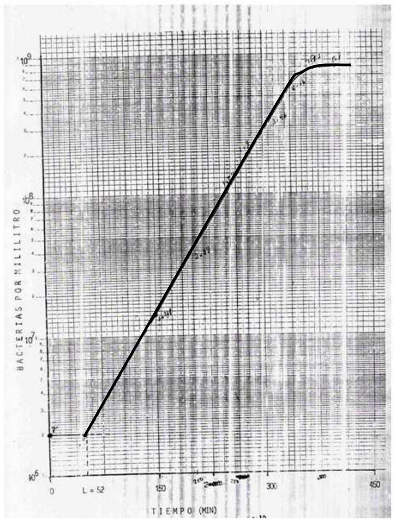
2.2 El papel logarítmico

¿Por qué utilizar el papel logarítmico y no otro?

Lo que pasa es que son números muy grande que no se ajustan, y en el papel logarítmico se hacen más reales los números más pequeños… (Químico, Morelos)

¿Qué es lo que leen ustedes en ese tipo de gráficas?

De este punto a este punto me está diciendo que es el crecimiento exponencial (*la parte recta*), aquí vemos (*en el inicio hay una estabilidad*) que partimos de aquí la celulita se tiene que adaptar a los nuevos nutrientes que tiene entonces ella empieza a replicarse empieza a hacer encimas, construir encimas que le van a permitir degradar el sustrato que hay, y una vez que ya, pero eso lleva tiempo, por eso vemos aquí que se llama fase de latencia y vemos que la fase de latencia es igual a 52 minutos, y a partir de los 52 minutos vemos ya que empieza el crecimiento exponencial, pero ya cuando vemos que ya empieza a ya no duplicarse o sea que ya se mantiene constante quiere decir que ya se agotó un nutriente, el sustrato ya no le es suficiente y permanece constante, ésta es otra fase, esta fase ya va ir a la fase de declinación porque ya no tiene (nutrientes) ya se esta muriendo… (Químico Biólogo Parasitólogo, Guerrero)



A manera de conclusión

En la búsqueda de los instrumentos que fueron construidos siguiendo los principios logarítmicos, y que en un principio fueron utilizados en áreas como el comercio y la astronomía y posteriormente llegaron a las aulas de clase, nos encontramos que para poder manejar cada instrumento era necesario dominar una terminología especial, algoritmos, incluso formas de hablar, pues si de facilitar cálculos se trataba no bastaba con suponer que así se usa tal o cual instrumento o de intentar ver si acertábamos en la forma de manejarlos, era ver mas allá del uso, era identificar procedimientos, comportamientos y sobretodo saber qué es lo que se hacía, por qué ese resultado y no otro.

Después de ver parte de lo que se tenía que aprender, entender o asimilar para poder decir que ya se manejaba de forma fluida determinado instrumento surge el cuestionamiento de ¿y dónde está lo fácil? ó ¿qué es lo que simplifica? Pues bien, la idea de facilitar o simplificar el trabajo llegaba una vez que se había pasado por una primera etapa, por llamarla de algún modo, que consistía precisamente en tener claridad en todos los términos y algoritmos necesarios para resolver cualquier problema que se presentara al usar cierto instrumento.

Finalmente, de la investigación realizada alrededor de los logaritmos encontramos que en la escuela aparecen como *Tablas Logarítmicas*, *Curva Logarítmica* y *Escala Logarítmica*; y instrumentos que se confeccionaron a partir de ellos son *Tablas logarítmicas*, *Regla de Cálculo*, *Papel Logarítmico*, con el objetivo o la intención de *Facilitar cálculos*. Por otra parte de las entrevistas realizadas a actuales ingenieros (estudiantes de nivel superior de hace dos décadas), rescatamos tres aspectos los cuales son la *necesidad de un instrumento*, el *afecto* o *rechazo* y la resistencia al *cambio de instrumento*. Tales aspectos están directamente relacionados con la gran importancia otorgada por los profesores dentro del aula al buen manejo de cada instrumento y de todos los conocimientos necesarios para lograrlo (López, 2008).

Referencias bibliográficas

Galindo, J. (1998) *Técnicas de investigación en sociedad, cultura y comunicación.* México: Addison Wesley Logman.

López, R. (2008). *Un estudio a instrumentos que facilitan cálculos a través del uso de logaritmos*. Tesis de maestría, no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Napier, J. (1619). *A description of the admirable table of logarithms. London: Nicholas Okes (1616)*. Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html. Consultada en abril de 2003.

Vázquez, V. (1914). *Tablas de los logaritmos vulgares de los números desde 1 hasta 20000 y de las líneas trigonométricas*. España: Imprenta de los sucesores de Hernando.

Washington, A. (1983). *Fundamentos de matemáticas con cálculo*. E.U.A: Fondo Educativo Interamericano S. A.

VISUALIZACIÓN DINÁMICA EN PROBLEMAS DE CÁLCULO UNIVERSITARIO, UN ESTUDIO SOBRE VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

Lianggi Espinoza Ramirez, Estelita García
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Cinvestav–IPN — Chile, México
leanggi@gmail.com, egarcia@cinvestav.mx
Campo de investigación: Visualización — Nivel:

Resumen. *La presente investigación es una continuación de nuestras indagaciones sobre la visualización en matemáticas. En esta ocasión damos evidencia de un tipo de visualización necesaria para abordar los problemas de cálculo universitario, que hemos llamado visualización dinámica. La caracterizamos en base a la producción y uso de ciertos grafismos, que llamamos grafismos abstractos. Esta visualización permite al lector tener un grado de independencia de la información mostrada que le permite manipularla con un fin de comprensión. Fundamentamos el por qué de la investigación en nuestra una postura epistemológica sobre el rol de la visualización en la construcción del conocimiento matemático. Nuestra aspiración es aportar elementos a un marco referencial que nos permita estudiar los fenómenos producidos por la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje.*

Palabras clave: visualización, visualización dinámica, gráficas, cálculo universitario

Antecedentes

En la actualidad la visualización tiene una importancia de magnitudes en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo esto no siempre ha sido así. Descartes, Leibnitz, Gauss y otros han reconocido la importancia de la visualización en el desarrollo de la matemática. Pero en el siglo XX hubo una ruptura al respecto. El formalismo de esta época la desacredito fuertemente, considerándola como insegura y poco formal. Esto influyo en desmedro de su utilización en la difusión científica y escolar. A estos sucesos históricos subyacen diferentes perspectivas sobre el estatus epistemológico que tiene la visualización en la producción del conocimiento matemático. Las gráficas se pueden considerar como meras representaciones de cierto concepto matemático o como elementos que median o permiten su producción. La perspectiva considerada incidirá fuertemente en como entenderemos los fenómenos producidos por la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Entendemos por visualización en matemáticas (VEM) al proceso de elaboración de imágenes mentales y el uso de tales para la comprensión en matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991). Por tanto la visualización es un proceso mental y lo visible de este proceso es la ostensión de tal proceso, la cual puede ser evocada mediante algún tipo de grafismo (gráfica matemática, bosquejo gráfico, dibujo, escrito o fórmula), como también por el lenguaje o los gestos de cierto sujeto (Bosch, 1994). El planteamiento epistemológico de Bosch (1994) consiste en que la relación entre el proceso mental y su ostensión es dialéctica, por lo cual los grafismos son parte sustancial de la producción del conocimiento.

Un trabajo que nos parece revelador al respecto es el de Laborde (2004). Ella muestra lo ilusorio de considerar los pensamientos teóricos de la geometría como distantes o apartados de los grafismos utilizados. En efecto, evidencia como un grupo de estudiantes, al resolver problemas de conjetura y demostración, mantienen un movimiento constante entre el dominio gráfico y el teórico. El punto es que este movimiento permanece oculto en las producciones que presentan a sus profesores por el contrato didáctico implícito que considera como argumentación correcta solamente aquellas que aluden a planteamientos teóricos. Por tanto, los grafismos no son simples representaciones de las ideas matemáticas, sino que estos modifican el pensamiento y la producción matemática, adquiriendo de esta manera un rol fundamental en la construcción del pensamiento matemático.

Con estos antecedentes nuestra línea de investigación está considerando a los grafismos no como meras representaciones de un objeto matemático preexistente, sino como elemento que forma parte en la producción del conocimiento, capaces de articular diferentes tipos de visualizaciones, las que a su vez inciden en cierta construcción matemática. De esto, la visualización es un elemento interviniente en la construcción del conocimiento matemático. Esto fundamenta la importancia de considerar a la visualización como objeto de estudio en la investigación en matemática educativa. Nuestra postura epistemológica del conocimiento es pragmática, en el sentido de que el significado dependerá de los usos, y por tanto el conocimiento no es preexistente ni estático; de aquí que preferimos utilizar la palabra grafismo en vez de representación gráfica.

Para nosotros, la visualización puede estar relacionada a dos acontecimientos: a la *producción* de cierto tipo de grafismos como ostensión de cierta visualización, al *uso* de cierto grafismo (producido o no producido por el individuo) con la intencionalidad de comprensión. En este segundo caso la visualización es más que una mirada superficial de tal grafismo, es una observación profunda, detallada y analítica del mismo. Mayores detalles al respecto se pueden consultar en Espinoza (2007)

Nuestra intención es dar evidencia de un tipo de visualización especial y necesaria para abordar los problemas del cálculo universitario. Por esto reportamos en Espinoza (2007) dos tipos de grafismos diferentes entre sí, encontrados con naturalidad en libros de textos y en los apuntes de los profesores, que inciden diferentemente en la eficacia de los estudiantes al enfrentarse a ciertas tareas matemáticas. En aquella ocasión les nombramos como representaciones visuales no genéricas y genéricas, haciendo alusión a la abstracción que permiten los mismos en el pensamiento matemático. Ganando precisión, en esta ocasión les nombramos grafismos concretos y abstractos respectivamente, por considerar esta caracterización más relevante y clarificadora respecto a la idea tratada en esa ocasión. Estos grafismos son de naturaleza diferente, pero viven en la enseñanza sin aparente diferencia. El primero presenta en un correlato exacto la situación matemática presentada y el segundo presenta una característica de esta (alguna propiedad, relación entre elementos o idea abstracta), sin expresar de manera exacta o literal la situación matemática abordada. Generalmente estos grafismos presentan parámetros.

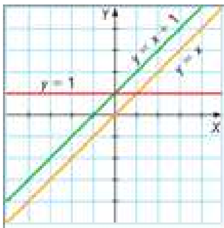


Figura 1
Grafismo concreto

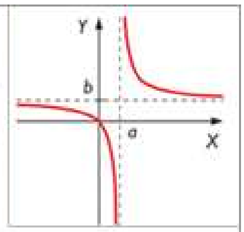


Figura 2
Grafismo abstracto

A modo de ejemplo, la Figura 1 muestra de manera exacta un sistema de ecuaciones con sus respectivas intersecciones, en cambio la figura 2 muestra la ubicación relativa de una hipérbola, en donde los parámetros indican la forma de las asíntotas y su ubicación relativa, más no la ubicación exacta de la hipérbola (Espinoza, 2007, p.604).

El asunto relevante en esta ocasión es cuestionarnos sobre la existencia de cierto tipo de visualización necesario para poder visualizar plenamente estos grafismos abstractos, y en caso de su existencia mostrar evidencia de ello. Por esto nos planteamos como objetivo de investigación "evidenciar la existencia de algunos tipos de visualización en estudiantes de nivel superior vinculados a los grafismos concretos y abstractos, y su relación con la efectividad en la resolución de una tarea matemática de nivel universitario"

Metodología

Para encontrar la evidencia decidimos estudiar a un grupo de estudiantes universitarios abordando un problema abierto de cálculo de alta complejidad, en donde podían utilizar tecnología (en este caso programas graficadores de funciones). El problema matemático escogido es el siguiente:

Sean x, y ∈ ***R****, demuestre que la ecuación* $x^y = y^x$

a) *Tiene solución.*

b) *Tiene infinitas soluciones.*

c) *Tiene únicamente dos soluciones* (x, y) *tal que x ≠ y, con x, y ∈ N.*

Su elección se debe a la imposibilidad de despejar alguna variable en función de la otra, por lo cual se hace necesario considerar una de las variables como parámetro, lo que a su vez permite la producción y uso de grafismos abstractos.

Decidimos no estudiar la producción final, sino el proceso mediante el cual se aborda la tarea, por considerarlo más idóneo para evidenciar las visualizaciones de los estudiantes. Los datos son tomados de García (2008) e indagaciones paralelas. De estos datos consideramos finalmente dos relatos, a quienes llamamos ficticiamente Gustavo y Paula, hombre y mujer, ambos mexicanos de 24 y 23 años y licenciados en enseñanza de las matemáticas. Se tomó registro de audio, video y de sus producciones escritas. Con esto desarrollamos narrativas de sus producciones con la intencionalidad de evidenciar y caracterizar los tipos de visualizaciones presentes en cada uno de ellos. En el análisis de los datos consideramos, siguiendo la metodología descrita por Bosch (1994), las ostensiones realizadas por los estudiantes: los grafismos, el lenguaje y los gestos. Entenderemos que un alumno *visualiza dinámicamente* cuando es capaz de *producir* y *utilizar* grafismos abstractos. La metodología de análisis es cualitativa exploratoria.

Resultados

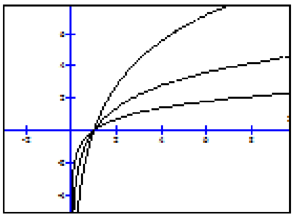
A modo de abreviación, la notación *F-n* se referirá a la figura número n.

El desarrollo de Gustavo

Gustavo inició su procedimiento realizando tanteo numérico, encontrando como solución del inciso a) la pareja (1, 1) y del inciso b) las parejas (x, y) tal que x = y. Al intentar demostrar la unicidad (inciso c)) asume como necesario un desarrollo analítico y gráfico. Primero intenta despejar una de las variables de la ecuación aplicando logaritmo natural *F-3*, y al no lograrlo grafica (con el software Graph) una familia de gráficas asociadas al logaritmo natural.

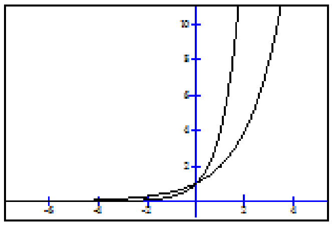
F-3

$$x^y = y^x$$
$$\ln x^y = \ln y^x$$
$$y \ln x - x \ln y = 0$$



F-4

$$f(x) = 2^x$$
$$f(x) = 4^x$$

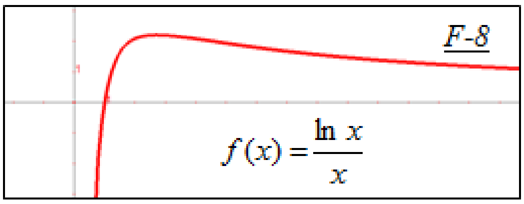


Posteriormente, observando la igualdad $x^y = y^x$, considera la variable y como un número natural que toma un valor particular en este dominio mientras que x varía en todos los reales, obteniendo funciones del tipo x^n y n^x *F-4*. Luego gráfica pares de gráficas y observa el punto de intersección de estas. En este momento muestra gestos de incertidumbre, abandona esta idea y regresa a las ecuación *F-5*, la cual reescribió como *F-6*, e interpretó como una función de x, explicitando la condición de inyectividad *F-7*.

$$\frac{y}{\ln y} = \frac{x}{\ln x} = cte \quad \longrightarrow \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \quad \longrightarrow \quad f(x) = f(y) \;\Big|\; f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

F-5 *F-6* *F-7*

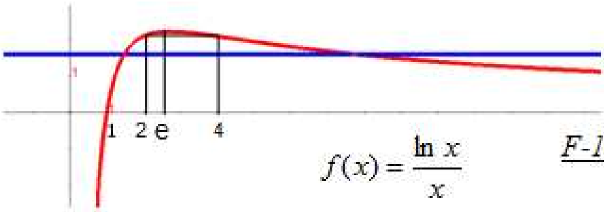
Continúa con esta idea y grafica la función *f(x)* *F-8*, y desarrolla el cálculo *F-9*



F-9

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$$

Después encontró el máximo de la función, y resolvió el problema, expresando gráficamente lo siguiente *F-10*:



$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$ *F-10*

Al escribir su resultado, explico que *[…] así que traté de trazar una recta y vi que si cortaba en dos puntos, por tanto lo que buscaba era un valor k de x entre el 1 y e, y el punto correspondiente a ese que tenía la misma altura, entonces llegué a la conclusión de que esos puntos si existían y existían varios […] esto me llevó a justificar la solución única.*

El desarrollo de Paula

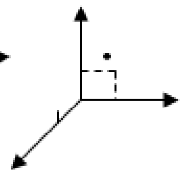
Paula respondió rápidamente a los dos primeros incisos, dando como solución $1^1=1^1$ y $x^x=x^x$ *a* cada uno de ellos. Luego, al enfrentar la pregunta tres comenzó a desarrollar algebraicamente la ecuación utilizando leyes de logaritmo *F-11*, de lo cual intentó graficar en el plano, pero sin resultados por la complejidad de la ecuación. Después, intentó graficar las funciones descritas en dos variables *F-12,* pero logro solamente realizar bosquejos de puntos de ellas en **R**^{3}

$$x^y=y^x$$
$$\ln_x x^y=\ln_x y^x$$
$$y=\ln_x y^x$$

F-11 → Gráficar ¿? →

$$f_1(x,y)=x^y$$
$$f_2(x,y)=y^x$$

F-12 →



Ante este fallido intento regresó a la ecuación original y nuevamente comenzó a despejar usando propiedades de logaritmos, llegando a una nueva expresión, la cual intentó graficar con el computador en **R**^{3} (Winplot 2.0) *F-13*. Ante la imposibilidad de observar algo claro escribió otras ecuaciones *F-14*, las graficó en **R**^{3} y graficó su intersección en el plano, encontrando de esta manera la solución entera (2,4).

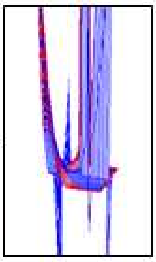
$$x^y=y^x$$
$$\ln_x x^y=\ln_x y^x$$
$$y=x\ln_x y$$
$$y=\frac{x\ln y}{\ln x}$$

→ Graficar con computador en R^3 ¿? →

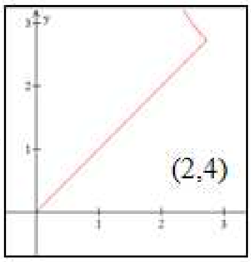
F-13

$$f_1(x,y)=x^y$$
$$f_2(x,y)=y^x$$

F-14 →



→



1028

Luego, ante la dificultad mostrada por sus gestos para utilizar la gráfica en **R**^{3} (pues el software se bloqueaba al graficar estas ecuaciones), regresó nuevamente a la ecuación original y volvió a despejar usando reglas de logaritmos *F-15*, obteniendo una nueva expresión para resolver el problema, en la cual verificó numéricamente el resultado encontrado *F-16.*

F-15
$$x^y = y^x$$
$$y = x\ln_x y$$
$$y = \frac{x\ln y}{\ln x}$$

F-16
$$\frac{y}{\ln y} = \frac{x}{\ln x}$$

$$\frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4}$$

Después de esto, al intentar demostrar la unicidad, manifestó lo siguiente: *sé que se podría demostrar por contradicción, se que se podría*, sin embargo, al intentarlo comenzó a mostrar mayores compilaciones con sus cálculos, y su insistencia en utilizar gráficas en **R**^{3} hacía que sus razonamientos se complicaran cada vez más. En este momento sus gestos mostraban frustración, y estuvo en esta situación por más de una hora. En este momento se decidió realizar una intervención del investigador para tener más información. El relato es el siguiente:

- Investigador: *¿Y por qué no graficas en 2D?* (haciendo alusión a la ecuación en *F-16*)
- Paula*: Necesitaría usar paramétricas, buscar expresarlo en t con senos y cosenos.*
- […] Investigador: *¿Por qué no te ayudas de una gráfica en 2D mejor?*
- Paula: *La gráfica no me dice algo porque no logro ver la gráfica completa, no siento que me ayude la gráfica.*

Discusión

En un comienzo Gustavo no podía determinar si la igualdad inicial era una ecuación o una función. Esto no fue obstáculo para que realizara grafismos en los que representó cierto tipo de dinamismo *F-3*. El considerar $f(y)$ como parámetro fue vital para resolver el problema *F-5* *F-7* *F-10*. Se evidencia la *producción* de un grafismo abstracto *F-10*, pues la intersección entre la recta horizontal y la función representa dos pares de puntos con la misma imagen, y no los puntos dibujados. Se evidencia que al demostrar la unicidad de la solución *usa* esta gráfica dinámicamente _F-10_, pues observó la recta horizontal “moviéndose” en el rango $\left]0, f(e)\right]$, poniendo atención en las intersecciones de la recta y la función. En síntesis, tuvo *producción* de grafismos abstractos y los *uso* dinámicamente.

Paula, en cambio, no evidenció producción de grafismos abstractos y mostró limitaciones en visualizar dinámicamente. Mostró dificultades al intentar despejar las variables. En esto no pudo visualizar una de estas como parámetro _F-11_ _F-13_ _F-15_. En todo momento intento realizar grafismos concretos que presentaran exactamente la situación matemática. Esto se evidencia en la insistencia de usar gráficas en $\mathbf{R}^3$ _F-12_; _F-13_; _F-14_; _F-15_. La intervención del investigador hizo evidenciar la imposibilidad de utilizar grafismos abstractos “la gráfica no me dice algo porque no la veo completa”, “necesitaría usar paramétricas”. Esto muestra su incapacidad de visualizar propiedades o relaciones en el grafismo, esto es, realizar una visualización dinámica. Su tipo de visualización que denominamos *visualización estática* le permitió encontrar la solución, pero no resolver completamente el problema.

Conclusiones

Hemos dado evidencia de un tipo de visualización especial, que llamamos *visualización dinámica*, necesaria para afrontar un problema de cálculo universitario. Este tipo de visualización se evidencia en la *producción* y *utilización* de grafismos abstractos. El alumno que produjo y utilizó grafismos abstractos mostró capacidad y destreza para elaborar y probar conjeturas, con lo cual resolvió el problema. La alumna que no evidenció producción de grafismos abstractos y que mostró dificultad para visualizar dinámicamente llegó a una etapa de frustración por no poder abordar el problema. De esto consideramos que heurística necesaria para abordar el problema se sustenta en poder visualizar dinámicamente. Otro aspecto relevante es que esta alumna que no visualizó dinámicamente es licenciada en enseñanza de las matemáticas. Considerando además los grafismos utilizados en las matemáticas universitarias (Zimmerman y Cunningham, 1991), concluimos que la visualización dinámica es necesaria para abordar muchos problemas de cálculo y que la capacidad de visualizar dinámicamente no es trivial ni natural, y que no se encuentra necesariamente en todos los alumnos universitarios. El desafío para la investigación ahora es entender como se puede desarrollar esta manera de visualizar en matemáticas.

Esta investigación también complementa los resultados de (Espinoza 2007). Un factor relevante en la mediación de los grafismos en la comprensión es la manera de visualizar que tienen los estudiantes. En este caso el potencial encontrado de los grafismos abstractos en la resolución de la tarea matemática planteada en esa ocasión esta condicionada a la necesidad de visualizar dinámicamente, que en este contexto implica que el lector pueda tener cierto grado de independencia de la información mostrada y pueda manipularla con la intención de la comprensión en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Espinoza, L. (2007). Diferencias en la comprensión de las traslaciones para distintos tipos de representaciones visuales. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (pp. 603- 614). Red de Cimates. México.

García, E. (2008). *El uso del conocimiento matemático asociado a la función en la producción institucional, el caso de investigadores en formación de matemática educativa*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in students´ construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, c. Hoyles and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education,* (pp. 1-21). Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? In: Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 1-8.

UNA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL NÚMERO COMPLEJO Y SU OPERATIVIDAD

Rocío Antonio Antonio, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerreo México
CICATA del IPN
antonny81@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: medio

Resumen. *En esta investigación desarrollada desde la perspectiva teórica de la aproximación socioepistemológica, se presenta, la producción y puesta en escena de una secuencia basada en la ingeniería didáctica. De manera específica, este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. El análisis de la producción de los estudiantes, al trabajar una secuencia de actividades diseñada por nosotros en base a la hipótesis anterior, da evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "las raíces cuadradas de números negativos no existen", nuestra secuencia los indujo a operar con ellos.*

Palbras clave: socioepistemología, número complejo, ingeniería didáctica, convención matemática, ecuación de tercer grado

Introducción

En trabajos previos de (Martinez-Sierra, 2005) se ha desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, por un lado, en la explicación de algunos fenómenos didácticos y, por el otro, en la interpretación de procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento, se ha dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que han llamado *convenciones matemáticas* (una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados), pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o de un proceso de integración de conocimientos.

Siguiendo las primicias de (Martínez-Sierra, 2005), de manera específica, este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. Al respecto, a partir de un análisis histórico-epistemológico de la búsqueda de solución general de ecuaciones de tercer grado, de la forma $y^3 + py + q = 0$, afirmamos que *el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones* (Antonio, 2008).

Para contrastar empíricamente la hipótesis anterior se procedió metodológicamente de la siguiente manera: 1) se diseñó una secuencia de actividades, en donde se *traspuso* (en sentido de Chevallard (1997) tal hipótesis constructiva, a polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$, 2) se experimentó la secuencia con 10 estudiantes del nivel medio superior mexicano (15 a 18 años) y 3) se analizó la producción de los estudiantes.

Aproximación socioepistemológica

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004). Más precisamente, dentro de la teoría socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento matemático: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales.

Un acercamiento epistemológico de los números complejos a través del proceso de convención matemática

A lo largo de la historia se identifican cuatro grandes etapas, caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos (Gómez y Pardo, 2005): 1) *Algebraica***.** Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, 2) *Analítica*. Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, 3) *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y 4) *Formal*. Formalización de los números complejos. Nuestro análisis histórico-epistemológico se centra en el contexto de la primera etapa, la algebraica.

Se menciona que en 1545 (Stillwell, 1989 y Dunham, 1999), Cardano publicó en su *Ars Magna* el método de solución de Tartaglia (conocida actualmente como el método de Cardano) la cual para el caso $y^3 + py + q = 0$ toma la forma: $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$, en términos modernos la fórmula implica a los números complejos cuando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Sin embargo, no era posible considerar esto como un caso sin solución, *porque se sabía que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real*. Así la fórmula de Cardano plantea el problema de convenir un valor real, encontrado por la inspección, digamos, con una expresión de la forma: $y = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-N}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-N}}$ (siendo *N* un número natural).

Pero, Cardano no hizo frente a este problema (la simplificación de $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-N}}$, en su *Ars Magna*), él consideró que estos números eran "tan sutiles como inútiles", en el llamado caso irreducible de la ecuación cúbica, la cual tiene tres soluciones reales que aparecen como la suma o diferencia de lo que ahora llamamos números complejos.

Esta dificultad fue resuelta en el siglo XVI por Rafael Bombelli, cuya *Algebra* apareció en 1572 (Struik, 1986). De esta manera Bombelli calculó el álgebra formal de números complejos (llegando a formular las cuatro operaciones con los números complejos en la forma actual) con el objetivo particular de reducir expresiones $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-N}}$ a la forma $c + d\sqrt{-1}$, así su método le permitió mostrar la "realidad" de algunas expresiones que son resultado de la fórmula de Cardano. Por ejemplo, la solución, dada por la fórmula de Cardano, de $y^3 = 15y + 4$ es

$$y = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \text{ --------------------- (I)}$$

Por otra parte, la inspección da la solución *y* = 4, Bombelli tenía el presentimiento que las dos partes de "*y*" en la fórmula de Cardano eran de la forma $2 + n\sqrt{-1}$, $2 - n\sqrt{-1}$ y él encontró por cubos estas expresiones formalmente, usando $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$:

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = (2)^3 + 3(2)^2\left(\sqrt{-1}\right) + 3(2)\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Esto ciertamente sería:

$$y=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1} \text{ --------------------- (II)}$$

$$y=\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1} \text{ ---------------------- (III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) se obtiene:

$y=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$ por lo tanto $(4)^3=15(4)+4$

En conclusión, nuestra hipótesis de construcción de conocimiento se basa en la consideración de que la primera formulación en relación a los números de la forma $A+B\sqrt{-N}$ (Siendo *N* un número natural) fueron *aceptados* en un dominio limitado algebraico; porque ellos aparecieron como útiles en la solución de ecuaciones de tercer grado de la forma $y^3+py+q=0$ (y no en las ecuaciones de segundo grado como se presentan en los libros de texto). Nuestra interpretación es que *se aceptó* la existencia de la raíz cuadrada de números negativos, junto a su operatividad, para *articular* una fórmula algebraica: $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$, con el hecho de que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real. Es decir, *la existencia del número complejo puede admitirse a tanto elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones*. A tal proceso lo caracterizamos con lo que hemos llamado *convención matemática*.

Diseño, puesta en escena y análisis de una secuencia de actividades

Para la construcción de la secuencia de actividades a la hipótesis constructiva anterior, la hemos *transpuesto* a polinomios de la forma $x^n-1=0$. De manera particular, el objetivo de la secuencia es *propiciar la aceptación de los números complejos y la operatividad de la raíz cuadrada de números negativos* en estudiantes de nivel medio superior, en un contexto de cálculo de raíces de polinomios, de manera específica, con polinomios de la forma $x^n-1=0$. Nuestra hipótesis es que la aceptación puede apoyarse en la idea de que tales polinomios tienen '*n*-raíces diferentes'; idea que a su vez puede ser apoyada con la aceptación de la operatividad de las raíces cuadradas de números negativos.

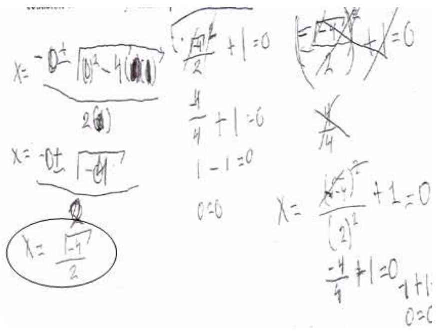
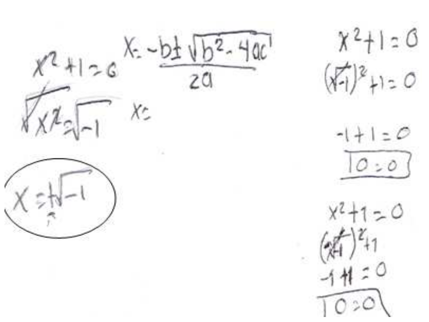
Específicamente, el diseño de nuestra secuencia figura en trece actividades, las cuales están agrupadas en cuatro fases: I. *Recordar* el cálculo de raíces de una ecuación (únicamente con raíces reales), II. *Identificar* el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo, III. *Aceptar y operar* con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces; polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$ y IV. Presentar a ***ib*** como la denotación formal de una raíz cuadrada de un número negativo y su propiedad.

La puesta en escena

La exploración de la secuencia fue realizada en un plantel del nivel medio superior, en la ciudad de Chilpancingo, donde se trabajó con diez estudiantes (6 alumnas y 4 alumnos) de primer grado, en un intervalo de tiempo de tres horas y media. Con los estudiantes se formaron tres equipos de trabajo: dos de ellos contaron con tres estudiantes (equipo 1 y 3) y uno de cuatro integrantes (equipo 2). Aquí únicamente se reportan los resultados del equipo 1 y 2.

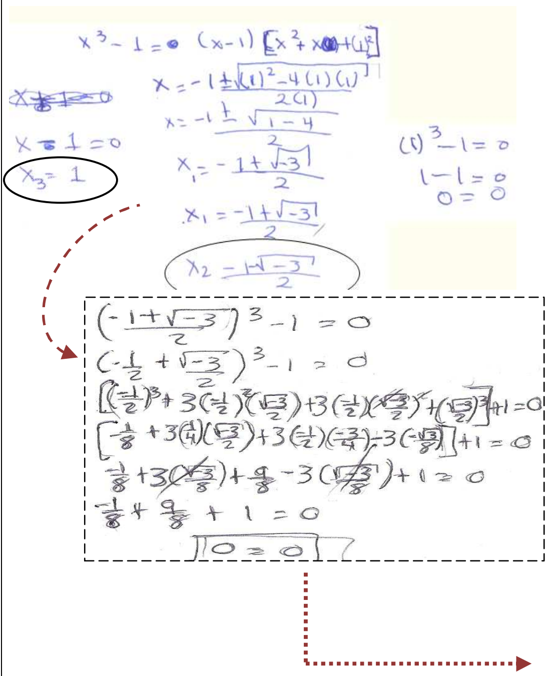
En la producción observamos que los objetivos propuestos de las dos primeras fases (Recordar el cálculo de raíces "reales" y el de identificar el conocimiento previo de las raíz cuadrada de un número negativo) sí se alcanzaron, pero, el objetivo de la tercera fase (el de aceptar y operar con las raíces cuadradas de números negativos) no se alcanzó de manera general; ya que en cada equipo no se llegó abarcar todas las actividades que contempla esta fase, además no todos los integrantes realizaron las operaciones solicitadas en la actividad 9 y 10 (la comprobación de las raíces encontradas), dado al rendimiento de participación que presentaron. En el siguiente apartado se muestra un bosquejo de la producción de los dos equipos de estudiantes, iniciando desde la segunda faseLa producción de los estudiantes

Fase II (Actividades 7 y 8). *Identificar el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo* (como la denota y la familiaridad que tiene con ella). En la actividad 8, en el cálculo de las raíces de $x^2 + 1 = 0$ a través de la petición explícita del uso de la fórmula general de segundo grado, el resultado general identificado sobre el conocimiento previo en los dos equipos, es que *"las raíces cuadradas de números negativos no existen"*. En la tabla siguiente mostramos la descripción e interpretación de la producción de los estudiantes.

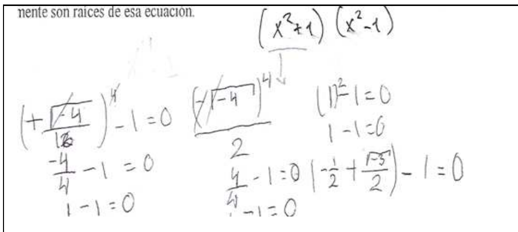
Equipo 1 	Estos estudiantes necesariamente querían obtener el valor de $\sqrt{-4}$, para ello utilizan la calculadora, el cual les marca: "*error*" y concluyen que "*no existe*". Al principio les fue difícil aceptar a este número como solución pero al hacer la comprobación dado a los procedimientos operacionales utilizados (por ejemplo al elevar una potencia a una fracción) y recordando que dependiendo del grado de la ecuación son las raíces a encontrar, concluyen que es "*una raíz con signo menos y otra con signo más*".
Equipo 2 	En este equipo se da dos casos para obtener las raíces de esta ecuación, el primer caso es utilizando la fórmula general tal como se lo pedíamos, y el segundo caso es despejando directamente a ***x*** en la ecuación. En los dos casos argumentan que "no existe la raíz" Al final realizan las comprobaciones y concluyen que "sí son raíces de la ecuación" porque "se pueden igualar".

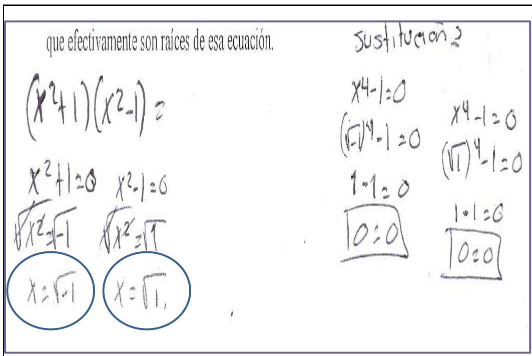
*Fase III (*Actividades. 9, 10, 11 y 12). *Aceptar y operar con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces, de polinomios de la forma* $x^n = 1$. Para motivar a ello se les pide que verifiquen si satisfacen a la ecuación las raíces encontradas. Aquí se utilizan las herramientas del desarrollo de un binomio, factorización y la fórmula general de segundo grado. En las tablas siguientes mostramos la descripción e interpretación de la producción de los dos equipos aquí reportados.

Actividad 9

	Equipo 1 Al igual que en la actividad 8, tratan de simplificar: $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ La reacción que tuvieron estos estudiantes fue peor a la de la actividad 8 con la obtención de este valor y más cuando se les pidió que verificaran si era raíz de la ecuación cúbica; para ellos no fue nada sencillo realizarlo, por los cálculos requeridos, en especial $\left(\frac{\sqrt{-a}}{b}\right)^n$
	Equipo 2 En este equipo solamente una de las integrantes realizó las operaciones de la verificación **y** explicó a los demás las operaciones realizadas, pero no logró que las demás realizaran los cálculos de comprobación.

Actividad 10

	Equipo 1 *Podemos observar que en las dos comprobaciones que se realizaron en la ecuación* $x^4-1=0$, *eliminan directamente la raíz cuadrada con el exponente cuatro y elevan al denominador al cuadrado.*

	Equipo 2 Aquí se observa los cálculos obtenidos por un integrante del equipo. La cual argumenta su comprobación*: "es raíz a la cuatro* $\left(\sqrt{-1}\right)^4 = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ *y las raíces iguales se suman y tienes doble raíces (cuatro raíces), ésta y ésta sería* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ *y ésta igual* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$*, esta se elimina, menos por menos da más, sería uno, menos uno, sería cero igual a cero* $1-1=0$*".*

A manera de conclusión

En los resultados de la puesta en escena se evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "*las raíces cuadradas de números negativos no existen",* nuestra secuencia los indujo a operar con ellos para encontrar las raíces de algunos polinomios propuestos en las actividades y así, aceptándolos de manera operativa, como por ejemplo, en las actividades 8 y 9 cuando verifican que los valores obtenidos si son raíces. El argumento básico es que "se pueden igualar", es decir, que al sustituir los valores en la ecuación su resultado es cero. Lo anterior considerando que no comprobaron todos los valores obtenidos en las ecuaciones, solamente algunos de ellos. Consideramos que con estas evidencias, nuestra secuencia de actividades da indicios de que es posible construir el significado del número complejo y su operatividad en tanto el proceso de convención matemática (Antonio, 2008).

Referencias bibliográficas

Antonio, R. (2008). *Una construcción del significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathematiques 24*(2.3), 137-168.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Dunham, W. (1999). *The Master of Us All.* EEUU: Mathematical Association of America.

Goméz, A. & Pardo, T. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM,* pp.251-260.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 195-218.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. New York: Springer-Verlag.

Struik, D. J.(1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

UN ESTUDIO DE LA CONSTITUCION Y DECONSTRUCCIÓN DE PRÁCTICAS DE LOS INGENIEROS BIOQUIMICOS, EL CASO DE LAS DILUCIONES SERIADAS

Lorena Landa Habana, Jaime Arrieta Vera, Adriana Galicia Sosa
Instituto Tecnológico de Acapulco México
Universidad Autónoma de Guerrero
lorena_landa_habana@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación mostramos evidencia de la desvinculación que existe entre las prácticas de las matemáticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas. Investigando el proceso de constitución de las prácticas y sus intencionalidades es posible aproximar ambas prácticas ejercidas. Caracterizamos la práctica de dilución seriada en una organización escolar como una práctica constituida, donde los actores no siempre reconocen la relación práctica/ herramienta al no tener presente la herramienta matemática que se emplea y su funcionamiento. Para caracterizar la práctica se realizó una revisión bibliográfica e histórica de la práctica y de la herramienta matemática, situamos la herramienta matemática en la organización escolar y finalmente se tuvo una interacción con los actores, a esta serie de pasos los hemos concebido como una posible propuesta metodológica para investigar la constitución de las prácticas, es decir su deconstrucción. El marco teórico que sustentamos es la Socioepistemología.*

Palabras clave: deconstrucción, práctica social, dilución

La desvinculación de prácticas escolares

Las prácticas escolares del aula de matemáticas tienen intencionalidades que difieren de las de prácticas de diversas organizaciones sociales que involucran herramientas matemáticas, esta diferencia se traslada a los sistemas escolares, las intencionalidades de las prácticas del aula de matemáticas difiere de las intencionalidades de las prácticas del laboratorio.

Centraremos nuestro interés en la tensión que existe entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares, particularmente la problemática que atendemos es la que se deviene de la tensión entre las prácticas del aula de matemáticas y las prácticas del uso de las matemáticas en el laboratorio de bioquímica.

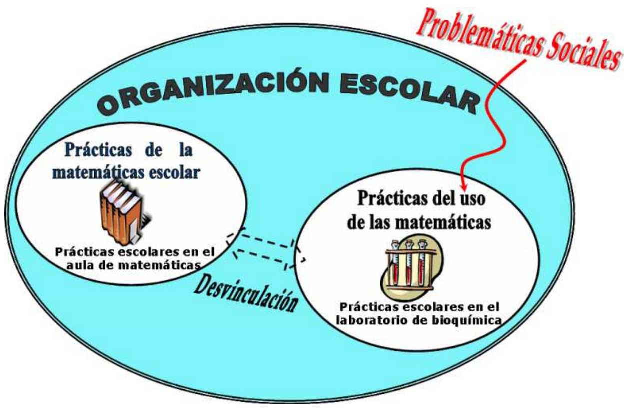


Fig. 1.- La problemática en la organización escolar

La intencionalidad de la práctica reside precisamente en la apropiación de la relación práctica/herramienta por el actor, es decir en el conocimiento de la función de la herramienta matemática en el ejercicio de la práctica. Esta es precisamente una forma de aprendizaje basada en el ejercicio de prácticas

Investigación de prácticas de estudiantes de la ingeniería bioquímica

El trabajo de Arrieta, (2003) aporta elementos acerca de la construcción de modelos lineales y cuadráticos por estudiantes de ingeniería bioquímica. En esta investigación se tomó como central, no los objetos matemáticos, sino el ejercicio de prácticas sociales para la elaboración de diseños de aprendizaje.

Otro de los trabajos que anteceden a esta investigación es el reportado por Galicia, Arrieta y Landa, (2007) donde se mostraron evidencias de la interacción de estudiantes de ingeniería bioquímica en la construcción de lo lineal a partir de la modelación de la absorción de luz de soluciones de glucosa a diferentes concentraciones en el laboratorio de química, ésta actividad es una práctica social que se realiza en comunidades de ingenieros.

Otras de las prácticas ejercidas ampliamente en el laboratorios de bioquímica es la de realizar diluciones seriadas de una muestra previo su análisis microbiológico como se reporta en Landa (2008).

La socioepistemología como perspectiva teórica

El presente estudio precisa de una perspectiva que considere aspectos epistemológicos que nos permitan mirar el desarrollo en el paso del tiempo del conocimiento científico enseñado, los procesos argumentativos de los estudiantes en un acercamiento a los procesos cognitivos así como los medios de su enseñanza.

La perspectiva teórica que sostenemos es la socioepistemología (Cantoral, R. y Farfán R., (2004), pues la socioepistemología es una perspectiva teórica que estudia la emergencia de los conocimientos matemáticos cuando son ejercidas las prácticas por organizaciones sociales específicas y cómo es que viven estas prácticas y conocimientos matemáticos en las organizaciones escolares.

Hacia una metodología de investigación de prácticas: La Deconstrucción

La deconstrucción evoca al término creado por Derrida en Krieger (2007), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender.

Consideramos que al deconstruir la práctica es posible aproximar las prácticas de la matemática escolar y las prácticas del uso de las matemáticas, permitiendo que el conocimiento matemático escolar se produzca de tal forma que al estudiante le sea útil y funcional, además de que se constituyan significados que incorporará en su vida profesional.

Identificamos y seleccionamos la práctica de dilución no sólo por ser una práctica recurrente, sino por las dificultades a las que se enfrenta el estudiante en el laboratorio de microbiología al ejercerla, así mismo identificamos la herramienta matemática que la hizo funcionar, nos fue preciso investigar acerca de estos elementos vía la deconstrucción. Esta deconstrucción la realizamos a través de cuatro fases:

1.-Revisión bibliográfica e histórica de la práctica a deconstruir

En esta primera fase realizamos una revisión bibliográfica de la práctica seleccionada, en nuestra búsqueda por saber cuáles fueron las problemáticas y en que comunidades se ejercieron las primeras diluciones, encontramos que éstas tuvieron lugar en la medicina homeópata siendo Samuel Christian Fréderic Hahnemann quien publica en el organón de la medicina en 1810 al respecto. En esta misma etapa fue posible involucrarnos con las prácticas de la comunidad de estudiantes de ingeniería bioquímica y conocer con precisión cómo es que se debe ejercer la práctica así como la necesidad de ejercerla en base a la Norma Oficial Mexicana NOM-110-SSA1-1994, bienes y servicios, lo que nos da evidencia que el ejercicio de la dilución seriada es una práctica regulada por la Secretaría de Salud Pública, por lo tanto su aplicación no está sujeta a modificaciones. Esta fase de la deconstrucción nos da una mirada de cómo se ha constituido la práctica, es decir la forma de cómo se estableció y cobró cotidianidad el ejercicio de la dilución seriada por organizaciones sociales llamadas comunidades.

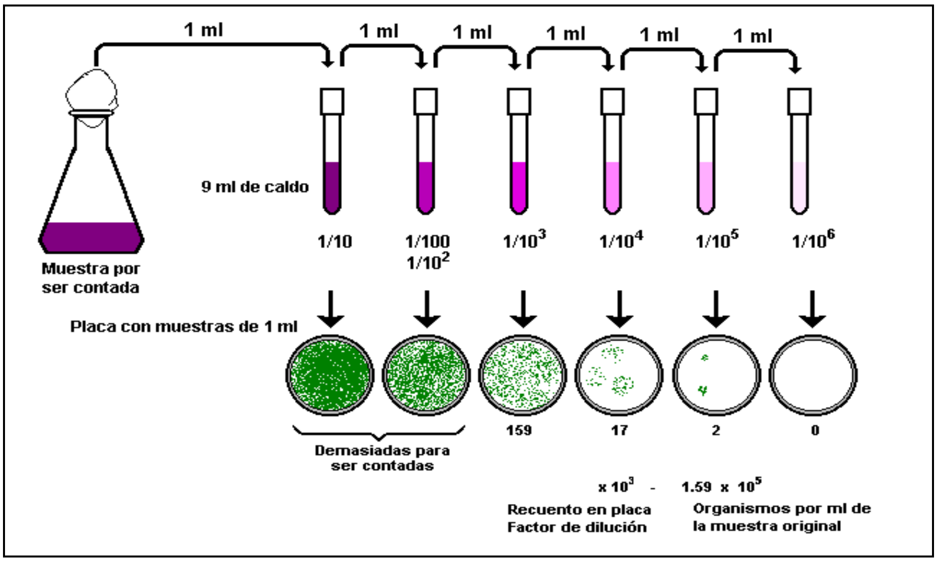


Fig.2.-Práctica de diluciones seriadas

2.-Revisión histórica de la herramienta matemática

De la misma manera consideramos necesario realizar una revisión histórica de las bases y exponentes como la herramienta matemática emergente, se revisaron algunos sistemas de numeración esto lo consideramos en la segunda fase de la deconstrucción.

3.-Situar la práctica social y la herramienta matemática involucrada en la organización escolar

Ubicamos a la práctica de dilución seriada como una práctica recurrente en el aprendizaje de los contenidos de las asignaturas de microbiología y microbiología de alimentos. Esta revisión nos dio un panorama de cómo investigar las concepciones que tenían los estudiantes y el profesor. Así mismo ubicamos el aprendizaje de las bases y exponentes en segundo grado de secundaria, observamos también que la bibliografía utilizada en este nivel privilegia el trabajo con la base diez como notación científica.

4.-Interacción con los actores que ejercen la practica

Una fase importante fue la interacción con los actores que ejercen la práctica, en nuestro caso particular con estudiantes que cursan séptimo semestre de la carrera de ingeniería bioquímica. Nuestra intención al interactuar con los estudiantes no fue que modificaran la norma para ejercerla eficientemente, más bien nos interesaba que el estudiante modificara teóricamente las proporciones de muestra y solución diluyente para que, vía la inducción, construyeran nuevas bases y exponentes identificando de esta manera el funcionamiento de la base diez y sus exponentes en esta práctica normada. Resultados de estas interacciones las presentamos en tres etapas:

1ª. Etapa. -Reconocimiento de la norma: lo inalterable

Maestra: ¿Este dibujo cómo lo diseñaste, o lo tomaste de algún lado?

Todas: ¡Ya nos lo sabemos de memoria!

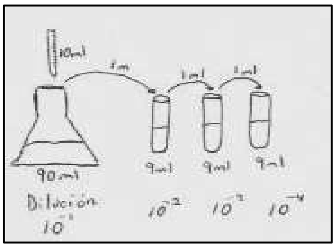


Fig. 3.- Anotaciones de Nallely

Maestra: ¿Y cómo saben que es correcto lo que realizan?

Nallely: En realidad si nos lo cuestionamos, pero como así lo explica la maestra y así viene en los libros, llegamos a la conclusión que sí…es correcto.

La intención de esta primera etapa es la de permitir al entrevistado reconocer la práctica en cuestión y para el entrevistador identificar las posibles dificultades de su ejercicio.

2ª. Etapa.-Aplicación de la norma: presencia del algoritmo

Maestra: Entonces: ¿por qué ya no sembraban la caja 1 y 2 a partir de la segunda semana?

Esmeralda: Por ahorrar tiempo y reactivos.

Maestra: Si eliminaban la siembra de la caja 1 y 2, ¿por qué no quitaron la dilución 10^{-1} y 10^{-2} qué es de donde proviene la siembra de estas cajas?

Esmeralda: No las quitamos ¿cómo iba a obtener la dilución 10^{-3} y 10^{-4} para sembrar la cajas 3 y 4?, necesitamos a fuerza de las primeras diluciones para llegar hasta la -3, Lo único que redujimos son las cajas. De hecho esto nos lo cuestionamos durante el trabajo de laboratorio porque queríamos ahorrar más material estéril, pero no supimos cómo

Nallely: Si yo quiero tener una dilución de 10^{-3} sin las anteriores diluciones, basta agregar 0.001 ml de muestra en 9.999 ml de agua. ¡Soy un genio!

Esmeralda. Ni tanto Nalle, ¿te has puesto a pensar cómo vas a tomar 0.001 ml de muestra?

Alondra: Con una pipeta automática

Maestra: No existen pipetas con tal graduación.

Esmeralda: ¡Se los dije muchachas, las cantidades de muestra son pequeñísimas, nosotros no tenemos este material!

Nallely: Realmente todo esto no lo hicimos pensando en el material, sino matemáticamente, pero si no hay material no se puede saltar la dilución, pues no.

En esta etapa se propone un problema teórico trivial con la finalidad de que el entrevistado ejerza la práctica conocida, observamos en ellos la inquietud de optimizar tiempos y ahorrar reactivos, sin embargo ejecutan la práctica sin modificarla

3ª. Etapa.- Adecuación de la norma: hacia la construcción de nuevas bases

Maestra: Si yo agrego 5ml de muestra a un tubo que tenga 5ml de agua, ¿qué dilución es?

Roberto: A ver… la relación es 1 a 1, la fracción es 1/1.

Maestra: ¿Por qué es 1 a 1?

Roberto: Porque estoy agregando 5 de muestra en 5 de agua. ¡No espéreme!... sería entre la muestra y el agua, pero la relación que estoy dando de 5/10 es la relación muestra y la dilución total, bueno si me pide la relación de esta manera sería la relación 5:10 o 1:2.

Jorge: No se puede saber que dilución es, porque para saber qué dilución es 1:2 tendría que tener una base 10 ¿no?

Maestra: ¿Y por qué no pensar en otra base?

Roberto: Bueno si tomo la relación 1:2, ¿la base sería en este caso 2?

Jorge: Yo diría que es $5X10^{-1}$, tomando la relación 5:10 sin simplificar.

Maestra: ¿Y cuanto da $5X10^{-1}$?

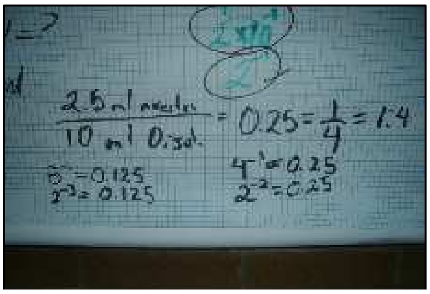


Fig. 4.-Anotaciones de Jorge y Roberto

Roberto: Lo que pasa que es difícil, como siempre utilizábamos la relación 1:10, 1:100, pues convertíamos todo a base 10 y ya, igual yo me imagino que si tenemos 10^{-1} es como escribir $1X10^{-1}$, y por eso si tengo 5:10, hago lo mismo $5X10^{-1}$.

Maestra: ¿Cuánto te da $5X10^{-1}$?

Jorge: Da 0.5

Maestra: ¿Y de la forma simplificada 1:2

cuanto da la base?

Jorge: $2X10^{-1}$

Roberto: No puede ser porque $2X10^{-1}$ da 0.2 y si decimos que es lo mismo $5X10^{-1}$ este da 0.5, entonces no da lo mismo

Maestra: Ahora vuelvo a tomar 5 ml de muestra y lo paso a un Segundo tubo, ¿qué dilución es?

Jorge: Siguiendo el mismo esquema, si yo tengo la primera dilución 2^{-1}, por lógica la siguiente es 2^{-2}.

Maestra: Demuéstralo

Roberto: Como en la primera dilución tengo una relación 5:10 y paso muestra con otra pipeta, esto quiere decir que hay 0.5 ml de muestra por cada ml de la dilución, y como estamos tomando 5ml quiere decir que hay 2.5 ml de muestra, si porque la estoy volviendo a dividir.

Aquí se le propone a los estudiantes un segundo problema teórico con características tales que rompan el obstáculo identificado en las etapas anteriores induciendo a la resolución del problema para que identifiquen el porqué funciona la herramienta matemática involucrada en la práctica, es decir en esta fase se busca que el estudiante descubra la intencionalidad de la práctica. Roberto mira a la dilución como una división de la muestra precedente, por lo que encuentra las diluciones correctas con bases diferentes en cada serie.

Conclusiones

El resultado de la interacción con los estudiantes al finalizar sus actividades en el laboratorio, no permitió identificar elementos que muestran el desconocimiento de la función de la herramienta matemática involucrada cuando ejercieron la dilución seriada, ya que a pesar de que al trabajar en el laboratorio consideraron adecuar la técnica para optimizar sus procedimientos, no logran hacerlo. Esta situación nos dio pauta a que promoviéramos la manipulación de la herramienta emergente logrando que adecuaran la práctica a nivel teórico vía un ejercicio, cambiando así la perspectiva que tenían de la desvinculación entre las matemáticas y otras ciencias, por ello cuando Karina afirma que: "Entonces yo voy a elaborar mi propia técnica de dilución. ¡Hay que patentarla!" nos resulta motivante, percibiendo entre los estudiantes la inquietud de participar en el desarrollo experimental de sus conclusiones teóricas para poner a funcionar el conocimiento adquirido en esta experiencia. Esta actividad nos permitió acercarnos a la dimensión cognitiva y didáctica de la práctica de dilución.

En un intento por caracterizar el ejercicio de la práctica de diluciones de los estudiantes encontramos que a medida que el estudiante avanza en el nivel escolar y va adquiriendo mayor habilidad para ejercer la práctica, el intento por modificar ó adecuar la norma es menor tendiendo a la aplicación de algoritmos, cuestión en la que no estamos en desacuerdo, sin embargo consideramos importante que el estudiante haga uso de procesos algorítmicos cuando haya superado la comprensión del funcionamiento de la herramienta matemática que generan estos procesos. Mostramos una primera aproximación de la evolución de la práctica en la organización escolar. La experiencia nos indica que el profesionista en ejercicio requiere de la habilidad de atender situaciones imprevistas, consideramos que el estudiante podría desarrollar esta habilidad si sabe ejercer sus prácticas y conoce el cómo y porqué funcionan.

NIVEL ESCOLAR	PROPÓSITO	EXPERIENCIA	PRACTICA DILUCIÓN (fuente)	ADECUACION DE LA PRACTICA DILUCION
6º semestre	Aprender, acreditar la asignatura	Mínima (8 veces por semestre)	Apuntes clase, libros	Base dos (mitades)
7º semestre	Aprender, acreditar la asignatura	Mediana (25 veces por año)	Apuntes clase, libros	Ninguna
Practicante	Resolver un problema social, acreditar y titularse	Suficiente (85 veces por semestre)	La norma	Ninguna

Fig. 5.-Caracterización de la práctica en una organización escolar

Un aspecto importante en la deconstrucción de la práctica es la relación práctica/herramienta, basada en el análisis histórico-cultural de la práctica seleccionada y de la herramienta que la hace funcionar. En nuestro caso, *diluciones seriadas/bases y exponentes.* En esta investigación no sólo damos evidencia de la necesidad de aproximar las prácticas de matemáticas con las prácticas de bioquímica, sino que mostramos elementos que consideramos significativos para un diseño de aprendizaje basado en prácticas sociales, como son la *investigación de problemáticas de la comunidad y la experimentación,* ya sea en laboratorio real ó virtual. Si consideramos a la intencionalidad de la práctica como la base de los aprendizajes, entonces una cuestión de fundamental importancia para la construcción de diseños de aprendizaje basados en prácticas es el análisis herramienta/práctica, es decir, la búsqueda de la intencionalidad de la práctica, proponemos como vía la deconstrucción.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction:logarithmes de nombres négaties et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des mathématiques*. *24*, 137-168.

Galicia, A., Arrieta, J., Landa, L. (2007). La medición de la absorción de luz de soluciones químicas, una práctica social de ingenieros bioquímicos. En C. Crespo Crespo (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 490-495). México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida. *Anales Del Instituto De Investigaciones Estéticas 84*, 79-188. Obtenido el 13 de Febrero de 2007 desde http//:www.analesiie.unam.mx/pdf/84_179-188.pdf

Landa, L. (2008) *Diluciones seriadas y sus herramientas, una práctica de estudiantes de ingeniería bioquímica al investigar la contaminación del rio de la Sabana*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Categoría 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EN EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Ricardo Cantoral, Magali Méndez

La Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido el escenario propicio para la conformación de una escuela del pensamiento latinoamericano. Esta sección da muestras de los progresos de un grupo de colegas provenientes de diferentes instituciones y tradiciones científicas. Los artículos expuestos a continuación tratan, desde diversas miradas, de la *Socioepistemología*.

Nociones importantes han sido acuñadas y empleadas por este colectivo que reflexiona sobre el papel de la *práctica social*, en tanto constructo teórico, en la construcción de conocimientos matemáticos; además de atender al particular rol de las *representaciones sociales* en la configuración de la conducta humana mediantes la *práctica* en el campo específico del aprendizaje de las matemáticas y de cómo sobre estos influyen los *escenarios socioculturales* en el proceso de *institucionalización* de las prácticas.

Es notorio el predominio del encuadre teórico que provee la Teoría Socioepistemológica (TSE) en los reportes de este apartado. Baste decir que de las contribuciones reportadas, dos se apoyan en la Teoría de las Representaciones Sociales (TRS) como forma de ampliación de la mirada socioepistemológica (Camacho; Ferrari y Neri) y otras dos tienden puentes entre dichas teorías (Martínez – Sierra; Camacho y Sánchez). Se reporta además una contribución de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), mediante la noción de praxeología (Castela) en relación con la *práctica social* de la TSE, y una aportación adicional sobre la cosmovisión de un pueblo originario de América del Sur en el marco de la TSE (Silva, Soto y Van – Lemoen).

La presentación de la Socioepistemología que hiciera R. Cantoral en la *Relme* 21, mostró la base estructural sobre la que se edifica la TSE, la cual se apoya en diez tesis centrales:

> **Tesis 1.**- El conocimiento matemático, así como el científico, no fue diseñado para ser enseñado. Este no ha sido configurado para ser enseñado. **Tesis 2.**- El saber matemático debe su origen, razón de ser y su significación a otras prácticas de referencia. **Tesis 3.**- Las

prácticas sociales son la base y orientación del conocimiento humano. **Tesis 4.**- La difusión institucional del conocimiento matemático está regido por ideologías: búsqueda de consensos, mecanismos de hegemonía, coerción. **Tesis 5.**- La enseñanza de la matemática ha sido usada para "expulsar" estudiantes del sistema de enseñanza. **Tesis 6.**- La Socioepistemología no trata de una epistemología social o socio – epistemología, sino de un *episteme* de lo social o Socioepistemología. **Tesis 7.**- Si bien la socioepistemología ha usado temporalmente términos construidos por otros enfoques o desde otras disciplinas del conocimiento (v. gr. se emplea la noción de aprendizaje que proviene de la psicología), la socioepistemología debe ahora considerar de nueva cuenta dichas nociones en virtud de la gran cantidad de evidencia empírica acumulada. **Tesis 8.**- La actividad y la práctica son elementos de articulación. **Tesis 9.**- Redimensionar el saber, significación colectiva y resignificación teórica. **Tesis 10.**- Respeto a la diversidad.

Estas tesis fueron, a nuestro parecer, entretejidas por las y los autores con mayor o menor nitidez en sus contribuciones referidas a continuación en esta Sección del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

Para dar una mejor idea de conjunto, decidimos categorizar a las contribuciones de nuestros colegas al organizarlas añadiendo un apunte sobre la tesis principal que fue, a nuestro juicio, desarrollada en sus exposiciones. Vale decir que este ejercicio no pretender establecer una asociación *uno a uno* entre categoría y tesis, sino que pretende dar indicación para su lectura y abonar al posterior estudio de la propia TSE:

Escenarios Socioculturales, en esta categoría se agrupan las investigaciones que tratan del estudio de las *prácticas sociales* y de cómo influyen los *escenarios socioculturales* en su constitución. Estudios tanto en ámbito escolar como extraescolar (Tesis 3 y 10). Véanse las contribuciones de Camacho; Crespo Crespo; Mingüer; Borello y Lezama; Lezama y Salazar; Martínez – Sierra; Arrieta y Méndez; Arrieta y Ulloa; Rivera y Salas; Antonio y Martínez; López; Castela; Pérez; Cordero, Cantoral, Cordero y Tuyub; Cantoral y García; Silva, Soto y Van – Lemoen; Camacho y Sánchez; Buendía y Pérez; Farfán y Ferrari; Arrieta, Cârsteanu, Cordero, Mena, Rodríguez, Romo, Solís y Suárez; Ferrari y López; Ferrari y Neri; Buendía y Carrasco; Díaz y Salazar.

Pensamiento y Lenguaje Variacional, en este apartado ubicamos a aquellos reportes que buscan construir una base de significados para procesos y conceptos del Análisis Matemático basados en la variación y el cambio (Tesis 2, 5 y 6) en el sentido reportado en (Cantoral y Farfán, 1998). Véanse las contribuciones de Moises y Simón.

Argumentación contextual, aquí se encuentran las investigaciones orientadas al estudio de los argumentos construidos en escenarios socioculturales específicos, tanto escolares como no escolares y sobre cómo estos influyen en la construcción de argumentos propiamente matemáticos (Tesis 4 y 7). Véanse los trabajos de Crespo Crespo; y Cabañas y Mejía.

Proceso de resignificación del conocimiento, esta categoría bien podría incluirse en la siguiente de rediseño del discurso matemático escolar, sin embargo consideramos que agrupa a aquellas investigaciones que se encuentran al nivel de la exploración de los usos de la matemática en contextos diversos, marcos de referencia o ámbitos fenomenológicos (Tesis 4 y 9). Véanse los trabajos de Briseño y Cordero; Cordero y Vázquez; Arrieta y Ulloa; Rivera y Salas; Buendía y Montiel; Cantoral, Cordero y García; Buendía y Vázquez; y Buendía y Pérez.

Rediseño del Discurso Matemático Escolar, en esta se conjugaron las investigaciones que proponen diseños o situaciones de aprendizaje para la intervención en el discurso matemático escolar, tanto al nivel de aula como de sistema (Tesis 1 y 9). Consúltense las contribuciones de Pérez; Cordero y Parra; Farfán y Ferrari; Arrieta y Méndez; Briseño y Cordero; Buendía y Vázquez; y Buendía y Pérez.

De la revisión de estas contribuciones nos pareció relevante el advertir sobre el empleo sistemático que se hace de la noción de *práctica social* (PS) y del sentido que brindan a los escenarios socioculturales (ES). Es así como la noción de *práctica social* ha venido adquiriendo progresivamente sentido y significado entre los miembros de este colectivo. No se aspira a contar de momento con una definición de práctica social, si en cambio a caracterizar su empleo. En este sentido, mostramos a continuación una reflexión al respecto.

Mientras que Camacho, apoyado en la TRS, considera como PS *aquellas acciones e interacciones deliberadas del hombre sobre el conocimiento que determinan cambios en el contenido de los objetos, los cuales merecen un estudio a través de ciertas condiciones; sociales, históricas y materiales en las que la PS se inscribe, y el modo en el que se apropia el individuo, o grupo* *concerniente, proceso en el cual los factores cognitivos, simbólicos y representacionales desempeñan un papel determinante*; de manera que si existe *en los individuos, o grupos de individuos, una representación de tal o cual conocimiento, esta sólo pudo haber sido engendrada por prácticas*; otros escritos de la TSE asumen a la función normativa de la PS, en tanto constructo teórico, como reguladora de la actividad misma. Se dice entonces que *orienta las epistemologías en cuestión, como normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen,* (Covián, 2005, citado en: Cantoral, Cordero y Tuyub; Cantoral y García), son por así decirlo, *medios para generar conocimientos matemáticos al seno de una comunidad de acuerdo* con (Cordero y Vázquez), *o para estudiar la construcción social del conocimiento matemático* (Briceño y Cordero). Se postula con fuerza que, *antes que los conceptos, existen prácticas asociadas que les dan significación* (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, citado en Cantoral y García) *y su estudio son base para rediseños del discurso matemático escolar* (Rivera y Salas).

De este modo, podemos encontrar cómo es que estas visiones coinciden en señalar que las PS son la base para la generación del conocimiento (Tesis 2), que se reflejan y se nutren del actuar de los individuos y de sus quehaceres (Tesis 8). Martínez – Sierra por su parte, muestra la intención de articular estas visiones y utiliza la noción de *representación social*, *como concepto que articula los aspectos cognitivos y sociales de la aproximación sistémica TSE, para dar cuenta de la vida cotidiana escolar y el sentido común. En sentido más amplio, designa una forma de pensamiento social y de ahí su importancia cuando se trata de entender la acción humana en contextos específicos. Considera que la representación social es un conocimiento práctico*.

Es claro que los ES son determinantes para ambas teorías, sin embargo en los reportes sustentados en TRS no se explicita su significado, se hace énfasis exclusivamente a su importancia. Para la TSE es primordial la ubicación en los ES pues *son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas y se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico. Estos influyen no sólo en las conductas, sino en la manera de sentir y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de* *la sociedad en la que se gesta* (Crespo). Con esta visión es inevitable hablar de la cultura matemática de un individuo, pues este es el caso que nos corresponde, Mingüer muestra cómo los ES la determinan al nivel de un grupo de individuos, y comparte algunos aspectos establecidos en una investigación previa (Mingüer, 2006) al reconocer a *la cultura matemática de un individuo, como una sucesión de construcciones de conocimiento matemático que proviene de prácticas sociales vinculadas a la matemática, a su enseñanza y a su aprendizaje; la cultura matemática es concebida como un fenómeno en el que, además del conocimiento matemático puro, existen múltiples significaciones de origen sociocultural (prácticas sociales ligadas a la matemática) que definen la forma en la que el individuo concibe a las matemáticas y se relaciona con ellas.*

Esta sección muestra una visión, grosso modo, de lo que se estudia hoy día en la TSE, muestra el empleo de los términos más arraigados por quienes la cultivan, citemos entre otros los siguientes: escenarios socioculturales, práctica social, pensamiento y lenguaje variacional, actividad, práctica, práctica de referencia, proceso de resignificación, discurso matemático escolar, proceso de institucionalización y representación social.

El futuro de este enfoque sigue una dinámica de crecimiento muy interesante, en nuestra opinión, será en los siguientes años cuando la Teoría Socioepistemológica brinde sus más importantes resultados.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*. España: Sociedad Thales. Núm. 42, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27 – 46.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada, México: Cinvestav del IPN.

Mingüer, L.-M. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada, México: CICATA del IPN.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESCENARIOS SOCIOCULTURALES DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El papel de los escenarios socioculturales es básico en las explicaciones sociales de la construcción del conocimiento matemático. El concepto de escenarios se afianzó a partir de la introducción del estudio de los contextos escolares e institucionales, comprendidos como fundamentales en la construcción y transmisión del conocimiento. "Escenario sociocultural" es uno de los términos cuya significación es preciso clarificar dentro del marco teórico de la socioepistemología. Para lograr caracterizar los escenarios, resulta útil remontarse a la caracterización que se realiza de los escenarios desde la psicología ecológica. En este enfoque de la psicología comenzó a utilizarse el término escenario fuertemente unido a la idea de acción social.*
Palabras clave: socioepistemología, escenario sociocultural, escenario académico, escenario no académico

El enfoque socioepistemológico en la matemática educativa

Para el enfoque socioepistemológico, al igual que para semiótica cultural, la actividad humana es central en la construcción del conocimiento, pero el énfasis socioepistemológico no está puesto en el objeto, sino en la práctica social, con el fin de modelar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral et al., 2006). La socioepistemología plantea el análisis del conocimiento matemático, social, histórico y culturalmente situado, problematizándolo a luz de las circunstancias de su construcción y difusión.

En las explicaciones sociales de la construcción del conocimiento matemático, el papel de los escenarios socioculturales resulta básico y fundamental. El concepto de escenarios que fue comenzando a utilizarse, se afianzó a partir de la introducción del estudio de los contextos escolares e institucionales, comprendidos como fundamentales en la construcción y transmisión del conocimiento (Martínez, 2005).

En este momento se hace preciso clarificar el término "escenario sociocultural" dentro del marco teórico de la socioepistemología. Su uso en las investigaciones ha tenido características bastante intuitivas hasta ahora, y se encuentran pocas referencias a su definición dentro de nuestra disciplina. Para lograr esta caracterización, es necesario hacer referencia a la caracterización que se realiza de los escenarios desde la psicología ecológica. En este enfoque de la psicología comenzó a utilizarse el término escenario fuertemente unido a la idea de acción social. Por reconocer nuestro interés por las construcciones socioculturales y las prácticas sociales, se considera indispensable en la matemática educativa, comprender la significación de los escenarios de conducta para posteriormente estar en condiciones de centrarse en la identificación de los elementos básicos que desde la matemática educativa se reconocen en los escenarios socioculturales y de ésta manera comprender la influencia fundamental que ejercen sobre la construcción y transmisión de los conocimientos matemáticos. Por ello, durante el grupo de discusión *Reflexión sobre los conceptos fundamentales presentes en la explicación social de la construcción del conocimiento matemático*, se propuso iniciar esta caracterización.

Los escenarios para la psicología ecológica

La psicología ecológica (Rojas, 2004) ha planteado un acercamiento contextual al estudio del desarrollo humano. Este enfoque se centra en un modo de abordar el análisis de los contextos educativos desde el punto de vista de su significación psicológica y sus resultados son considerados como fundamentales para la comprensión del hecho humano y del hecho escolar como escenario de desarrollo-educación. En este enfoque, toda conducta humana es concebida como un cambio de cierto estado de un campo en una unidad de tiempo dada. Los escenarios son comprendidos como espacios vitales del individuo, en los que se desenvuelve la persona en medio del ambiente psicológico tal como existe para ella. Si se involucra a un grupo, el espacio vital del mismo consiste en ese grupo y su ambiente tal como éste existe para el grupo.

El concepto escenario de conducta es un concepto clave de este enfoque.

> *Un escenario de conducta es la unidad básica del tejido de las sociedades provista de identidad propia e indivisible y que en su acción construye, en gran medida la dotación psicológica de los individuos. El escenario de conducta está formado por la conjunción de entidades ambientales, entidades sociales y objetos, que se relacionan dentro de un sistema integrado de fuerzas y controles, que mantienen las actividades en un equilibrio semi-estable. (Rojas, 2004 p.85)*

La caracterización de los escenarios se realiza a partir de sus propiedades. En esta teoría se diferencian dos tipos fundamentales de propiedades que caracterizan a los escenarios: estructurales y dinámicas. Las primeras se refieren básicamente al armazón invariante de los escenarios, las segundas, a sus aspectos cambiantes.

Entre las propiedades estructurales de los escenarios se identifican los patrones fijos de conducta que se desarrollan de acuerdo con pautas programadas estables, que se encuentran insertos en ambientes y contextos determinados y que limitan en cierta manera las acciones. Algunas de las propiedades estructurales de los escenarios son, por ejemplo:

- las *fuerzas físicas* del escenario: son dadas por características geográficas en las que se desarrolla la conducta que se estudia, como ser una ciudad o una zona rural
- las *fuerzas derivadas de aspectos sociales*: se refiere a rangos o status que se le confieren. Por ejemplo, el reconocimiento que puede tener determinada institución educativa dentro de una sociedad
- las *fuerzas vinculadas a lo fisiológico* que proceden del contexto. Por ejemplo: temperatura ambiental que tiene efectos en la temperatura corporal o estados de ánimo
- la *influencia coercitiva del ambiente* sobre la conducta pues la organización de espacios u objetos que inciden en los patrones de relación

Estos aspectos se reconocen fácilmente a través de la percepción. Todos los escenarios tienen un soporte físico de alguna manera y, aún cuando puedan a veces parecer no determinantes, si se los analiza cuidadosamente, se percibe la influencia que tienen sobre las conductas de los individuos que habitan el escenario.

Las propiedades dinámicas de los escenarios son las que les dan singularidad a los escenarios, dando origen a distintas configuraciones que condicionan fuertemente los mismos. Entre ellas podemos citar:

- el *locus geográfico*: es el lugar físico concreto, por ejemplo un aula, un laboratorio
- el *locus temporal*: son singularidades temporales del escenario, que le dan características propias, como la hora, la duración de la clase, el encadenamiento de hechos previos y posteriores

- la *población*: en un escenario de conducta, las características de los habitantes (edad, sexo, clase social), son determinantes para determinadas conductas
- el *tiempo de ocupación*: el tiempo que invierten en el desempeño de las tareas relacionadas con el escenario
- la *posición funcional de los habitantes*: las categorías y posiciones sociales en el escenario afectan notablemente las relaciones entre los individuos o grupos
- los *mecanismos de conducta*: patrones de conducta afectivos, motrices y verbales que vinculan a sus actores
- la *presión*: fuerzas que obligan a actuar o no de determinada manera, que pueden provenir del escenario en general o de individuos concretos. Esas presiones no siempre son concientes y explícitas
- la *autonomía*: independencia del escenario en relación a otros escenarios que constituyen su entorno
- los *bienes*: se refiere al grado y manera en que el escenario cubre las necesidades de los individuos que lo componen

Estos aspectos no se reconocen a veces de manera sencilla, a veces, incluso, no son estables, ni son fáciles de delimitar, y pueden presentar entre sí vínculos ocultos, pero sin lugar a dudas su influencia en la conformación de un escenario es fundamental.

Además, los escenarios no se encuentran generalmente aislados unos de otros. Existen interrelaciones entre los escenarios, que determinan influencias entre ellos y por lo tanto, en las conductas que generan. Un escenario determinado puede estar recibiendo influencias de otros escenarios que existen simultáneamente con él o de escenarios del pasado. Esas influencias forman parte de los escenarios. Los escenarios influyen directamente sobre las conductas de los individuos que lo habitan. Por otra parte, si bien también en estas conductas se ponen de manifiesto maneras de pensar y de comprender la realidad propias del individuo.

Los patrones estándar de conducta son intransferibles, esto significa que muchas conductas no pueden exportarse de un escenario a otro, ya que son propias de un escenario dado y bajo ellas subyacen fuertemente las características de él que le dan sustento. Los patrones de conducta pueden ser clasificados de maneras diversas, teniendo en cuenta características de los individuos que lo conforman en cuanto a grupo social: duración, sexo de los habitantes, orientación hacia el juego o el trabajo, densidad de población, mecanismos de conducta, grado de autonomía, etc., sin embargo no se puede considerar las clasificaciones aisladas entre sí para estudiar las características de un escenario, ya que este es una totalidad producto de sus características.

Otro elemento a tener en cuenta en el análisis de escenarios y conductas es que todos los habitantes de un escenario son importantes para él, si bien se puede decir que cuanto más central es la posición de un individuo en un escenario, mayor será su influencia sobre él. El rol que desarrolla un individuo dentro de un escenario dado depende de muchos factores, pero este rol se refleja en la influencia que posee sobre los otros actores del escenario. Quienes participan de la dinámica de un escenario, lo hacen de diferentes modos, reflejando capacidades y grados de involucración y responsabilidad. Puede tratarse de observadores, audiencia o invitados, miembros o clientes, funcionarios activos o dirigentes. En esta enumeración que se acaba de hacer, se muestra un grado creciente de acción en el escenario y con distintos patrones de conducta. Por ejemplo, la influencia de las opiniones de los actores de un escenario en éste, varían según los roles que desempeña el actor mencionado, cuanto más central sea su rol, mayor será su influencia; sin embargo, aún actores no centrales pueden influir en las acciones de un grupo social que se encuentre en cierto escenario.

Los escenarios socioculturales

La concepción de escenarios que maneja la socioepistemología toma elementos de la presentada por la psicología ecológica, y sus características pueden influir en la construcción del conocimiento matemático. Para la matemática educativa, en su carácter de enfoque situado, no pueden ser dejadas de tener en cuenta sus características, ya que pueden considerarse como variables didácticas a tener en cuenta en las investigaciones.

Toda persona se encuentra inmersa en una sociedad, se reconoce el individuo como un ser social. Vive rodeado de un contexto, que denominaremos lo sociocultural, que tiene ciertas significaciones colectivas, pero también influye e interactúa con él. Estas significaciones tienen su origen en la cultura y en la sociedad, se vinculan con las características individuales cuyas fuentes son la personalidad y el carácter. En esa sociedad, se ha visto que se llevan a cabo prácticas sociales que se manifiestan como: ideas, opiniones, creencias, cultura, ideologías, modas, entre otras, que definen lo sociocultural (Mingüer, 2006). Lo sociocultural es un sistema que abarca todos los fenómenos sociales, que surgen de algún grupo social culturalmente situado.

Las características de los escenarios de acción de la psicología ecológica también son propias de los escenarios socioculturales. Pero es radical reconocer ciertos rasgos que les son propios y que permiten comprender su papel en este marco teórico. Los escenarios socioculturales son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales.

El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de sentir y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta.

Es importante realizar una diferenciación entre escenarios académicos y no académicos, ya que imprimirán ciertas características representativas al conocimiento matemático que en cada uno de ellos se construya. Algunos autores identifican tres tipos de escenarios socioculturales: cotidiano, escolar y científico (Rodrigo, 1997). Cada escenario asocia a la construcción del conocimiento una epistemología que guía el qué, el porqué y el cómo se construye el conocimiento. Consideramos *escenarios académicos* a los escolares y científicos, o sea a aquellos en los cuales el conocimiento científico es intencionalmente central, ya sea a través de actividades matemáticas de investigación o de enseñanza. En estos escenarios uno de los objetivos explícitamente planteados por sus actores es la construcción del conocimiento, en nuestro caso, el conocimiento matemático. Esta construcción se lleva a cabo de manera intencional, aunque en algunas oportunidades el conocimiento construido no sea el esperado inicialmente. En los escenarios académicos, los actores poseen la intencionalidad manifiesta de construir y desarrollar el conocimiento científico. Podemos citar entre estos escenarios los ámbitos de investigación que edifica la comunidad matemática y los ámbitos educativos en los distintos niveles y modalidades, en los cuales el docente se propone transmitir el conocimiento al discípulo o al alumno. En los *escenarios no académicos*, el conocimiento científico no es central de manera intencional, pero eso no significa que en ellos no se pueda construir y manejar este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico.

Es posible desde la socioepistemología analizar, por ejemplo de qué manera influyen los conocimientos adquiridos en un escenario no académico en la construcción que se realice posteriormente de un conocimiento en un escenario académico, como puede ser el aula (Crespo Crespo, 2007; Lestón, 2008).

Los escenarios socioculturales en la investigación

La mirada sobre los escenarios socioculturales, permite una visión de la construcción social del conocimiento situada que caracteriza a la socioepistemología. A continuación se describen brevemente algunos ejemplos de estas aplicaciones. Nos restringiremos a ejemplos de investigaciones relacionadas con las argumentaciones y demostraciones matemáticas para que sea posible apreciar la importancia de los escenarios socioculturales y cómo son determinantes en una investigación.

Para lograr comprender las argumentaciones como construcciones socioculturales, fue necesario analizar las características de las demostraciones a lo largo de la historia de la matemática. La sociedad matemática en cada escenario cultural, ante la necesidad de validar sus resultados, estableció la normativa que hacía que una demostración cumpliera el papel de tal. Esta visión permitió comprender a las demostraciones como prácticas sociales (Crespo Crespo, 2007), producto de un escenario sociocultural en el que se construyeron argumentaciones con ese fin.

En escenarios sin influencia aristotélica aparecieron formas de argumentar en las que no valen los principios del tercero excluido y de no contradicción. En estos escenarios, es posible observar la construcción de ciertos conceptos como el cero y el infinito, que en escenarios aristotélicos como el de la cultura occidental fueron muy costosos y demandaron varios siglos (Crespo Crespo el al., 2008).

Otro contexto en el que los escenarios socioculturales cobran importancia es en la consideración de los distintos tipos de argumentaciones que se realizan en la sociedad actual. Las argumentaciones que se trabajan y aceptan en el aula de matemática son de carácter deductivo. Sin embargo en escenarios no escolares, tanto cotidianos como en los de profesiones no matemáticas, se utilizan argumentaciones no deductivas. Así a través de entrevistas realizadas fue posible identificar que no es el carácter deductivo lo que da la fuerza a las argumentaciones propias de escenarios de la literatura o del psicoanálisis (Crespo Crespo, 2007). También fue posible analizar cómo algunas formas de argumentación matemática adquieren distinto grado de reconocimiento y aceptación en escenarios en los que adquiere fuerte influencia la componente social a través de lo profesional (Crespo Crespo & Farfán, 2005)

Referencias bibliográficas

Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. M. (2005).Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 8 (3). 287-317

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). *Reflexiones acerca de argumentaciones y matemática en escenarios sin influencia aristotélica y su importancia en el aula de matemática. Memorias del* History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2008), México DF (México).

Lestón, P. (2008). *Ideas Previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de Maestría no publicada. Cicata-IPN.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(2), 195-218.

Mingüer Allec, L. M. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada, CICATA. IPN.

Rodrigo, M. J. (1997). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico. Un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En Rodrigo, M. J. y Arnay, J. (Comp.), *La construcción del conocimiento escolar*. Barcelona: Paidós.

Rojas, J. (2004). *Elementos para una psicoecología de la acción*. Tesis de doctorado no publicada, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

REPRESENTACIONES SOCIALES, IDEOLOGÍA Y ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II México
camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Estudios Socioculturales Nivel: Superior

Resumen. *Se plantea el análisis de la representación del concepto de límite infinito y límite al infinito en estudiantes del nivel superior de enseñanza desde la perspectiva de la Teoría de las Representaciones Sociales (TRS), la razón del análisis tiene que ver por los conflictos de enseñanza y aprendizaje que estos conceptos causan en los estudiantes. Los resultados muestran representaciones del concepto mal adquiridas, que llevan a los sujetos a distorsionar en las tareas escolares la solución de problemas relacionados con los propios conceptos. El estudio puede servir de base para mejorar los diseños de clase alrededor del concepto.*
Palabras clave: representación social, ideología, límite infinito

Objetivo

El propósito del proyecto es analizar las representaciones, o concepciones, que guardan estudiantes del quinto semestre de ingeniería respecto de los conceptos de límite infinito y límite al infinito desde la perspectiva de la Teoría de las Representaciones Sociales, así como mostrar la distorsión que con esas representaciones los sujetos hacen del conocimiento en la solución de problemas específicos que se les plantean en las tareas escolares, llegando con ello a resultados erróneos.

Introducción

A lo largo de las últimas dos décadas los grupos de investigadores que atienden el movimiento de la Matemática Educativa (ME), han pretendido dejar de lado el predominio de la visión formal de la matemática que sobreestima los aspectos abstractos de su enseñanza, intentando incorporar en ellos elementos del entorno sociocultural, epistemológico y didáctico. De esta manera, se distinguen diferentes aproximaciones teóricas que han incluido nuevas componentes de estudio, como es el caso de la noción de práctica social en la Socioepistemología, en México (Cantoral, R, et. al, 2006, 84). Por su lado, la Teoría de las Representaciones Sociales francesa, parte del estudio de dos dimensiones como son, las prácticas sociales y las representaciones o concepciones que ellas dejan en los individuos, con el objetivo, en principio, de reconocer los obstáculos cognitivos que no les permiten la apropiación del conocimiento social.

A partir de la TRS, nos interesa el reconocimiento de una representación "espontánea" de los conceptos de límite infinito y límite al infinito en la cognición de los estudiantes que se analizan, es decir, la búsqueda de un significado o imagen elemental del conocimiento asociado al objeto; debido a que por largo tiempo observamos regularidades que muestran equivocaciones en la solución de problemas concretos al accionar los conceptos citados.

En esencia, deseamos probar que las representaciones que se crean los estudiantes de quinto semestre que cursan ecuaciones diferenciales en el nivel de ingeniería, distorsionan el conocimiento en la solución de problemas específicos a través de representaciones mal adaptadas del propio conocimiento. Dichas representaciones forman parte del bagaje de conocimientos que fueron adquiriendo a lo largo de los cursos anteriores, particularmente el curso de Cálculo Diferencial, Matemáticas I.

Marco Teórico

Fue Abric (1994) quien asumió la noción de representación como un argumento teórico y alternativo al de concepción. Abric ha concebido las representaciones sociales como modalidades específicas, jerarquizadas alrededor de un "nodo central" o "núcleo central", que es constituido por elementos que dan a la propia representación su significación. Tal enfoque ha permitido analizar las representaciones colectivas de los individuos desde un punto de vista cognitivo vinculándolas a su génesis, las prácticas sociales, abriendo así un vasto campo de investigación y análisis a partir de la TRS. Desde este punto de vista, la formación de las representaciones y su transformación es colocada en un proceso concreto de problematización de actividades prácticas. La problematización se manifiesta a través de las prácticas sociales que los seres humanos ejercen sobre el conocimiento. De aquí que, entendamos por prácticas sociales aquellas acciones e interacciones deliberadas del hombre sobre el conocimiento que determinan cambios en el contenido de los objetos, los cuales merecen un estudio a través de ciertas condiciones.

Para el ya citado Abric, el análisis de toda práctica social supone que se tomen en cuenta al menos dos factores esenciales:

> *«Las condiciones sociales, históricas y materiales en las que ella se inscribe, por una parte y, por la otra, el modo en el que se apropia el individuo, o grupo concerniente, proceso en el cual los factores cognitivos, simbólicos y representacionales desempeñan un papel determinante» (Abric, op, cit, 238).*

En tal sentido, si existe en los individuos, o grupos de individuos, una representación de tal o cual conocimiento, esta sólo pudo haber sido engendrada por prácticas. Este punto de vista parte del supuesto de considerar las prácticas sociales como subconjunto o parte de la ideología en la que están insertos los individuos. Desde esa perspectiva, la ideología norma la actividad práctica de los sujetos, heredando así las ideas involucradas a la representación. Toda vez que la ideología es, a su vez, parte del conjunto de lo socio cultural.

Así, las conductas de los individuos, sus representaciones y sistemas de valores, se puede decir que son sujetos al marco de poder institucional al que están enfrentados. En esta dirección, Ibáñez (1989) apunta que:

> *«En la vida cotidiana, intervienen con frecuencia negociaciones entre los polos de la práctica y la ideología y la representación: incluso cuando ellas son sugeridas firmemente por las circunstancias, las prácticas desarrolladas por los agentes sociales sufren una cierta modulación o distorsión, en función de su ideología» (Ibáñez, 1989).*

En el caso que presentamos, reconocemos las prácticas sociales como las prácticas escolares que cotidianamente suceden en el salón de clase, las cuales son organizadas a través de los conocimientos que los estudiantes adquieren en su interacción con el propio conocimiento enseñado por el profesor. Desde el punto de vista que incorpora la práctica escolar con lo meramente social, las representaciones son vistas como la imagen espontánea, o imagen elemental primaria, de objetos y conceptos matemáticos con que cuenta un individuo, o grupo de individuos, la cual es construida a través de actividades escolares que son vinculadas con actividades socio culturales

Estado del Arte

Dollo y Joshua (2002) mostraron cómo las representaciones sociales sobre el "desempleo", concepciones previas de estudiantes de ciencias económicas y sociales, en Francia, fueron obstáculo para hacerse de aprendizajes relacionados con dichas representaciones. Estas últimas fueron referidas directamente por los investigadores a la práctica cotidiana de los sujetos. Dicha práctica dependía de diferentes valores: del lugar de la familia en el estatus de producción, así como el nivel del lenguaje "económico" que se utiliza en el medio familiar, cuenta tenida de la situación profesional de los integrantes de la familia. De la misma manera, la representación dependió del discurso económico que ejercían los medios sobre los propios estudiantes analizados: prensa, televisión, radio, etc., (Carluer, 1997, 153, citado en Dollo, *op, cit*).

Alrededor de la enseñanza de la matemática, Sánchez (2008) ha mostrado cómo la representación social del concepto de función matemática, de profesores en el nivel de ingeniería, visto como una relación entre variables, fue ampliamente influenciado por la institucionalización del concepto que prevalece dominante en el nivel superior de enseñanza, y el cual deja fuera la posibilidad de concebir el concepto de función a partir de argumentos variacionales como son aquellos de variable, variación y variabilidad. Cabe afirmar que para la determinación del nodo central y "elementos periféricos" de la representación, la autora hizo uso de cuestionarios y metodologías sustentadas por la TRS, cuyo contenido reprodujo una buena cantidad de nociones relacionadas con el concepto de función.

Finalmente, Camacho y Aguirre (2001), plantearon un estudio sobre los errores relacionados con el concepto de límite infinito y límite al infinito en que incurren estudiantes del primer semestre del nivel superior de enseñanza desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Los resultados del estudio evidencian en los sujetos analizados concepciones apenas sí intuitivas de estos conceptos.

Metodología y Justificación

Se diseñaron tareas en las que se involucraron límites de cocientes que se indeterminaban con la aplicación numérica, de suerte que se esperaba que los estudiantes salvaran la indeterminación para concluir en la naturaleza del límite buscado. Algunos de los casos que se aplicaron se muestran enseguida (solamente se exponen y analizan tres de los problemas que se plantearon). Se les pidió calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} 4e^{-3x}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{x^2}$

Siendo las soluciones: a) Infinito (∞), b) cero (0), c) Infinito (∞).

En cuanto a las herramientas de apoyo para llegar a las soluciones, en un primer caso subyace la definición de límite infinito en la forma $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, en la cual la función está definida en todo su dominio, excepto quizá en *a*, y en la que la factorización en el numerador y denominador como $(x - a)$, permiten eliminar las posibles indeterminaciones. De igual manera se presentaron problemas con límites al infinito, como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. No obstante, se planteó a los alumnos la posibilidad de construir tablas de valores por izquierda y derecha de *a,* que pudieran ayudar en la decisión por el límite.

Estas últimas herramientas son supuestamente adquiridas a lo largo de los cursos de matemáticas, y son las que esperábamos que los estudiantes accionaran ante los problemas propuestos en las tareas.

La actividad se proporcionó a 14 estudiantes de la asignatura de ecuaciones diferenciales, Matemáticas V, de un instituto tecnológico federal mexicano. Los alumnos, hasta ese momento, habían cursado las asignaturas de matemáticas: cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal y análisis vectorial, así como otros cursos relacionados, de suerte que ya habían discernido y utilizado los conocimientos en juego.

La justificación de la tarea destinada a ese grupo, obedeció a que en tal asignatura se aplica el concepto de límite infinito en las integrales de la forma $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, que llevan a la determinación de la transformada de Laplace de las funciones del cálculo en el curso mencionado, así como contar con argumentos para contrastar con la experiencia que en esa misma dirección se desarrolló en Camacho y Aguirre (2001), puesto que, como se mencionó, los autores aplicaron situaciones de enseñanza a estudiantes del primer semestre del mismo sistema educativo.

Resultados

a) En promedio, sólo uno de los 14 estudiantes resolvió adecuadamente los tres problemas que se mencionan.

b) De los 14, sólo 2 resolvieron apropiadamente el problema del inciso a), 4 asumieron que el resultado era cero (0) es decir $-\frac{2}{0}=0$, 3 consideraron que $\frac{0}{0}=\infty$, indeterminación, o la no existencia del límite, uno concluyó en un valor numérico como 1, y el resto no pudieron concluir.

c) De los 14, 3 resolvieron adecuadamente el problema del inciso b) es decir, asumiendo que el resultado es cero (0), 3 argumentaron que el resultado era infinito (∞), 6 no lo pudieron resolver, y 2 dieron un valor numérico a la solución.

d) Para el inciso c) 5 determinaron el resultado adecuadamente, es decir, infinito (∞); 2 asumieron que se indeterminaba, uno planteó el resultado como $\lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2}=\lim_{x\to 0}5x^{-2}=0$ (véase la Figura 2), otro obtuvo como resultado 5, y el resto no llegó a conclusión alguna.

e) Sólo 3 de los 14 usaron tablas numéricas para apoyarse en la decisión por los límites buscados. Para el inciso c) (en la tabla) a uno de los estudiantes la calculadora le indicó “error” al sustituir el valor de cero, razón por la que pudo concluir en el valor de infinito (∞) como resultado; en otro caso el estudiante diseñó la gráfica correspondiente al mismo problema, en la que se observa cómo las ramas de ésta tienden al infinito, sin que ello le sugiriera la solución.

Como se aprecia, las soluciones a los problemas muestran la regularidad explicita que se observó en la investigación de Camacho y Aguirre (2001), es decir, la recurrencia de considerar verdadera la expresión $\frac{a}{0}=0$, en un intento por recurrir a los números reales al evadir los problemas que en los estudiantes causa el infinito; ocurrió en por lo menos 4 de los 14 alumnos analizados (véase más adelante la Figura 1).

Si bien los resultados obtenidos dejan ver una práctica escolar deficiente que en parte debe atribuirse a los profesores; de ello se sigue una apropiación equivocada de los conceptos mencionados, tanto en su parte algorítmica como en la aceptación de la división por cero, por parte de los estudiantes. Como puede verse en la figura 1, el estudiante que resolvió el límite indicado, tuvo por opciones para decidir por el límite la tabla que le indicaba que para valores muy cercanos a uno por izquierda y derecha, el límite, equivocadamente, se acercaba a cero, y la opción aritmética en la aplicación $\frac{-1-1}{-1+1}=-\frac{2}{0}$. En el primer caso, el estudiante calculó erróneamente los valores de *y* en la tabla, los cuales le llevaron a decidir por el límite tendiendo hacia cero. No obstante, ese error es ratificado en el segundo caso, en el que el alumno no media en la indeterminación y decide concluir en que $-\frac{2}{0}=0$.

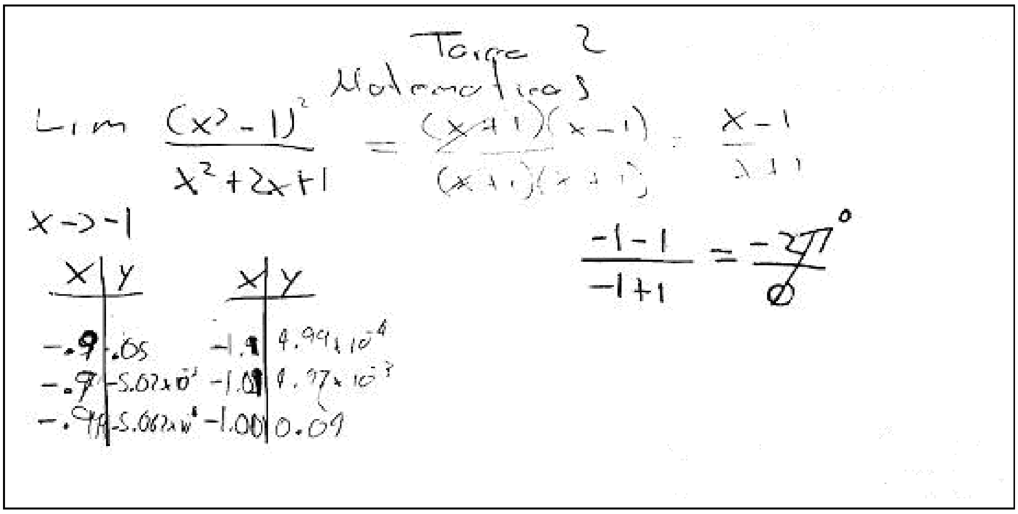


Figura 1

La Figura 1 muestra cómo las concepciones que el estudiante equivocadamente adoptó, le hicieron distorsionar el concepto en la determinación del límite de la expresión $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, cuyo resultado es infinito.

Ambas decisiones involucran un esquema de representaciones en el que intervienen, por un lado, la representación que de inicio se hizo el estudiante del problema que enfrentó y, por otro, la propia concepción o representación mental que acciona ante la representación creada del problema. En ese contraste, *representación cognitiva* $\Leftrightarrow$ *representación del problema*, los errores que el sujeto carga de la representación mental, le llevan a distorsionar y falsear los resultados esperados del problema.

En el caso que se muestra en la figura 2, el estudiante accionó la representación concibiendo la expresión $\frac{5}{x^2}$ como $5x^{-2}$, y considerando que $5(0)^{-2}=0$, operación que, como se aprecia, le evita la división por cero y le permite llegar a un resultado, toda vez que equivocado, transgrediendo con ello la parte operativa de la solución al quebrantar las reglas ya mencionadas.

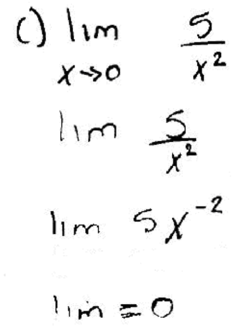


Figura 2

La Figura 2 muestra la adopción de una representación equivocada y la distorsión que se hizo al accionar sobre el problema propuesto.

Conclusiones

Como se aprecia en los resultados, los errores que surgen de la representación con que cuentan los estudiantes de los conceptos de límite infinito y límite al infinito, en este caso ideas o nociones erróneas, incluso se pudieran concebir como creencias cercanas de estos conocimientos, ordenan la actividad práctica y algorítmica y ajustan su conducta en las decisiones para la solución de los problemas propuestos. Incluso, las relaciones erróneas que los individuos han desarrollado y la estructura que dieron a las propias soluciones, están determinadas por la representación que se forman de los problemas propuestos. En este sentido, la representación que los sujetos hacen de los problemas, es influenciada por la propia representación de los conceptos de límite infinito y límite al infinito mal adquiridos en la práctica escolar respectiva.

Consecuentemente, los estudiantes ponen en el juego de ambas representaciones las ideas fundamentales, ideologías, características del conocimiento mal adquirido.

Desde el punto de vista de la TRS, los datos que arrojan los resultados de la aplicación de las tareas son insuficientes para poner en evidencia el núcleo central y elementos periféricos de la representación de la totalidad de los estudiantes analizados (al respecto, véase más arriba la cita de Abric, 1994); no obstante que este no ha sido el objeto de estudio, los resultados equivocados para cada problema arrojan regularidades en las que los sujetos tienden a evadir la aplicación del cero e infinito en las operaciones algebraicas. Este problema puede ser analizado con detalle a través de metodologías sujetas a la TRS, que bien puede concebirse como un proyecto alterno a futuro. Con todo, los resultados que el estudio plantea pueden servir de base para mejorar los diseños de clase alrededor de los conceptos mencionados.

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (1994), Pratiques Socials et Representations. Presses Universitaires de France, PUF.

Camacho, A., M. Aguirre (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. México, México, *Revista Latinoamericana de Matemática educativa*. 4 (3), 237-265.

Camacho, A., B. I. Sánchez (2008), Social practice of the variability notion. An epistemological approach. Documento presentado en The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics. Ciudad de México.

Cantoral, R., R. M Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra (2006), Socioepistemología y Representación. Algunos ejemplos. México, *Revista Latinoamericana de Matemática educativa,* Número especial, 83-102.

Dollo, Ch (2001), Quels determinants pour l'evolution des savoirs scolaires en SES? (l'exemple du chomage). These pour obtenir le grade de Docteur de l' Universite Aix Marseille I.

Dollo, Ch. y S. Joshua (2002), Conceptions d'élèves et diversité des paradigmes en sciences économiques et sociales (l'exemple du chômage). Article paru dans L'Année de la Recherche en Sciences de l'Education.

Ibáñez, T. (1989), Faire et croire, *in J. L. Beauvois et al, Perspectives cognitives et conduits socials*, 2, Cousset, DelVal.

Sánchez, B. I. (2008), El concepto de función matemática entre los docentes a través de las representaciones sociales. Memoria predoctoral presentada en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA, del IPN.

EL INFINITO: VIVO EN EL AULA DE MATEMÁTICA Y FUERA DE ELLA

Patricia Lestón
ISP “Dr. Joaquín V. González” Argentina
patricialeston@yahoo.com.ar
Campo de investigación: estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *El tema alrededor del cual se desarrolla este trabajo es el infinito. Diariamente nos encontramos con este término y no sólo dentro de las aulas. Existe un infinito que vive fuera de la matemática, a nivel cotidiano, construido socialmente en función de lo que culturalmente se comparte. Ese infinito cotidiano entra a la escuela en las ideas de los alumnos y se proyecta sobre el infinito matemático que la escuela intenta utilizar como concepto central de muchos contenidos matemáticos. La clase de matemática hace uso del infinito en distintas situaciones. Sin embargo, en ningún momento se define formalmente. Simplemente usamos las ideas que los alumnos traen, pero que en realidad se desconocen. El objetivo de esta investigación es entonces discutir estas cuestiones que aparecen en las aulas y que obstaculizan la construcción del conocimiento matemático.*
Palabras claves: infinito, nociones intuitivas, construcción social de conocimiento, escenarios socioculturales, socioepistemología

Introducción

El infinito se usa habitualmente para referirse a distintas situaciones u objetos fuera de la escuela. Antes de ser presentado y discutido en la escuela, el alumno tiene para el infinito ideas asociadas de su vida no escolar, que nacen del diálogo con sus padres y pares, construidas en comunidad.

Como concepto matemático, el infinito se construye luego en la escuela, en la clase de matemática. El conflicto surge entonces cuando estas dos ideas, la intuitiva y la matemática, diferentes en su construcción y en su naturaleza, tienen que convivir en la mente de los alumnos. Es en el proceso de la construcción que se produce dentro del aula, influenciada por ideas intuitivas y extraescolares, en donde las ideas intuitivas reaparecerán, afectando la idea matemática que los alumnos construyan.

Creemos que esta investigación puede aportar a la matemática educativa algunas propuestas para lograr la modificación que incorpore al infinito al DME.

> *“El corazón de nuestra tarea como profesionales de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Compartimos la afirmación que distingue la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos a*

esos saberes, los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares. ¿Cómo dar visibilidad a estos saberes? ¿Cómo construir relaciones benéficas con aquellos del aula?" (Díaz Moreno, 2003, p. 10)

Lo que existe fuera del aula, los escenarios en que los estudiantes se desarrollan y viven, en donde generan conocimiento, ingresa al aula. Lo cultural es parte de lo que el discurso matemático escolar debe considerar. Creemos que pensar en una escuela que enajena a la persona de sus espacios de desarrollo, crecimiento y formación es ignorar lo que la sociedad requiere de sus ámbitos de educación, que son cada vez más amplios y flexibles, abiertos en la comunidad y compartidos por la realidad globalizada de una sociedad de información, que se comunica por diversos medios y se alimenta de los conocimientos que se construyen dentro y fuera de las instituciones educativas tradicionales.

"[...] la escuela actual debería prestar atención" a los conocimientos que "se construyen fuera de la escuela y que, penetran en ella a pesar de que los docentes de matemática las rechacen. Esa búsqueda fuera de la escuela puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento." (Crespo Crespo, 2007, pp. 277-278)

La socioepistemología como enfoque para este estudio

Como ya se ha planteado, es en los escenarios no escolares en los que los alumnos llegan a su primera aproximación de la idea de infinito, tomada de la noción que sus padres, sus pares, los medios de comunicación y la literatura presentan sobre este término. Lo que se analiza en esta investigación es la existencia de actividades humanas en estos escenarios no escolares que condicionan la construcción de un conocimiento de naturaleza matemática, a pesar de que se use primero fuera de la cultura matemática.

Queda claro entonces que el escenario sociocultural es determinante para el estudio que se plantea. Es la componente social la que da sentido y ámbito de pertenencia a esta investigación. Si bien se espera que finalmente los resultados puedan modificar la realidad escolar del concepto, es en los escenarios no escolares donde deben buscarse las fuentes de las ideas que existen en relación al infinito, y esos escenarios son puramente sociales. Debido a esto es que la aproximación socioepistemológica es la que provee de soporte teórico a esta investigación.

> *"Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de "hacer ver" la postura descrita, han seguido una aproximación sistemática que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico." (Cantoral, 2001, p. 71)*

En la visión socioepistemológica se considera la importancia de la componente social en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión permite entonces que el presente trabajo se apoye en el estudio de las actividades humanas para poder comprender cómo se generan las ideas intuitivas sobre el infinito, fuera de las instituciones escolares y exterior al discurso matemático escolar.

Dado que este trabajo se propone dar cuenta de las situaciones e interacciones por las que pasa un alumno con respecto a este término a lo largo de su vida que le permiten luego crearse un modelo mental de representación del infinito, para entender cómo actúa este modelo en la mente de los estudiantes, frente a qué tipo de situaciones reaparece y qué tipo de obstáculos genera al momento de enfrentarse con la idea matemática del infinito; es que es necesario comprender la importancia de los escenarios sociales y culturales en que han surgido estas "intuiciones". Las particularidades de dichos escenarios serán determinantes al momento de comprender las asociaciones hechas en función del infinito.

Influencias del infinito intuitivo en la construcción escolar del infinito

Es necesario en este apartado, a pesar de que el término ya ha sido utilizado, definir claramente con que intención se habla de idea intuitiva o infinito intuitivo. El conocimiento intuitivo no se basa en evidencia suficiente ni en un razonamiento lógico riguroso, y sin embargo, la persona lo acepta como cierto y evidente.

> *"La intuición se trata de una sensación, de una idea en la que tiene gran influencia la subjetividad. Algo puede ser intuitivamente comprendido por alguien y no por otro. Depende de la experiencia, de los conocimientos previos, pero también de cualidades personales... Podemos discutir razonamientos, pero no intuiciones, compartir resultados, pero no evidencias." (Crespo Crespo, 2008, pp. 726-727)*

Sin embargo, nuestra intención es analizar no sólo el proceso de construcción de estas ideas intuitivas, sino cómo influyen en la comprensión de este término en sentido matemático, provocando la generación de modelos mentales internos asociados a este concepto; más allá de las dificultades propias y de los conocimientos matemáticos previos que hayan adquirido en relación a esta temática.

Debido a la necesidad de enfocar el problema desde las distintas características del concepto que se desean estudiar, es necesario buscar focos a partir de los cuales indagar. Por ello, nuestra pregunta de investigación puede plantearse como:

> *¿**Cuáles son las ideas previas al estudio escolar del infinito que traen los alumnos y cómo influyen en la construcción escolar del infinito matemático**?*

Encuestas aplicadas

Todas las encuestas fueron aplicas a alumnos de los últimos años de escuela media de una escuela de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos aún no habían trabajado con elementos formales de límites, aunque tenían una aproximación a algunas cuestiones de estudios de funciones.

Los diseños completos así como las respuestas que detectamos pueden encontrarse en (Lestón, 2008). A continuación presentamos los resultados más relevantes.

1. Primera experiencia: El infinito intuitivo

En esta experiencia se buscó caracterizar las ideas intuitivas que los estudiantes tienen en relación al infinito. En esta actividad, aplicada a modo de encuesta, se apelaba a la memoria (ideas que se tenían en la niñez) y a las relaciones que se establecen en la vida diaria con el concepto de infinito.

Del análisis de las respuestas surge que lo infinito se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe. Por otro lado, el infinito se relaciona con el amor, los sentimientos, la fe. Es un infinito sentimental y poético, muy distinto del matemático, muy parecido al histórico que se discute más adelante en este trabajo.

2. Segunda experiencia: El infinito en la literatura

En esta experiencia, se busca a través de distintos textos despertar (al ver reflejadas), distintas ideas que los estudiantes tienen en relación al infinito. El trabajo que se realiza busca alejar al concepto de la matemática, y en especial, de la clase de matemática, para poder encontrar evidencias de intuiciones lo más naturales posible.

Los resultados obtenidos muestran que frente a la lectura, las ideas que surgen son críticas al tratamiento que se hace del infinito, por inexacto, poco científico, poco profundo o demasiado fantástico. Lo que saben del infinito, lo que piensan, los lleva a desacreditar lo que los autores intentan transmitir. Como científico, el tratamiento no alcanza, como literario y poético, es aceptado. Pero los dos infinitos, son distintos.

3. Tercera Experiencia: Las contradicciones detrás del infinito

Esta experiencia busca enfrentar a los estudiantes con una situación que provoque un quiebre dentro del modelo mental asociado al infinito. Se busca en función de una serie de preguntas sencillas que elaboren una teoría respecto al tamaño de dos conjuntos infinitos, uno subconjunto propio de otro, para luego mostrarles a través de la biyección, una forma de equiparar ambos conjuntos, probando que “hay tantos elementos en uno como en el otro”.

En las respuestas se encuentra lo esperado, el "nuevo" método de comparación se comprende, se ve en el resultado de su aplicación que se contradice lo que se pensaba desde la extrapolación de propiedades de conjuntos finitos, pero sin embargo, "no convence". Los estudiantes lo aceptan, lo comprenden, pero lo ven como un "artilugio", no tiene la fuerza suficiente para hacer tambalear lo que creen, lo que se construyó a lo largo de toda la vida. Puede evocarse, a pequeña escala, lo que provocó Cantor en sus colegas: no puede una teoría desacreditar años de cultura matemática respecto al infinito. Al menos, no de inmediato...

4. Cuarta Experiencia: Conjuntos numéricos y el infinito

Esta actividad se presenta a estudiantes que ya hayan estudiado los distintos conjuntos numéricos, en los cuales el infinito aparece como "propiedad": hay infinitos naturales, infinito a izquierda y a derecha, infinitos elementos entre dos dados... Se apela a esos conocimientos y se intenta que los alumnos relacionen estas ideas con otras que aparecen en algunos textos, en este caso, dos textos de Jorge Luis Borges.

De las respuestas obtenidas, se observa que lo teórico está, los alumnos comprenden los distintos conjuntos numéricos y las diferencias entre los "distintos" infinitos que tienen cada uno. Sin embargo, esas ideas no resurgen todo el tiempo. Se contradicen, no son parte del modelo mental de lo que es el infinito. El otro infinito, el natural, el filosófico; ese es el que esta siempre presente. El matemático está sólo cuando se lo referencia de manera directa: ese no es natural, contradice la intuición, provoca incomodidad... pero esos conflictos se callan, para no provocar ira, por respeto a lo que los docentes han enseñado.

El infinito a través de la historia

Para nosotros en esta investigación, la búsqueda en la historia del infinito no tiene relación sólo con el devenir del concepto, sino con las preguntas que al ser planteadas, se respondieron a partir del infinito. Esas preguntas, en su mayoría de índole filosófica, son las que se repiten en la actualidad y las que se deben hacer si se desea evocar en los estudiantes, los orígenes del infinito para ellos.

Desde la matemática, los jainas empiezan a discutir el infinito, surge la idea de imposible de contar, innumerable, el número imposible de concebir, los incontables años. Y aquí es necesario hacer una distinción: la imposibilidad de contar, ¿tiene que ver con la finitud humana? ¿El infinito es infinito porque el ser humano es finito o es infinito en sí mismo?

Los griegos hacen a través de la filosofía un tratamiento más científico de este concepto, buscan el origen y composición de la materia, su característica propia: ¿se puede dividir infinitamente antes de que deje de ser materia? Los atomistas intentan una explicación de infinitos indivisibles, pero la realidad es que el infinito en sí, el infinito actual, no se acepta. Las rectas pueden ser infinitas porque se pueden extender infinitamente, pero no son infinitas en sí mismas.

La razón impide a la humanidad resolver los conflictos que el infinito arrastra. Se busca entonces, salir a través de lo que la razón no logra explicar: la fe. La religión explica lo único que como infinito no se discute: Dios es infinito, lo es todo. Si hay algo infinito, entonces eso es Dios, su poder. La ciencia no puede explicar antes de Bolzano, antes de Cantor, el infinito. Sin embargo, la religión en general y el catolicismo en particular, se ocupan de él. Y el infinito que se plantea en el poder de Dios, es un infinito “controlador, persecutor”: Dios todo lo ve, todo lo sabe, nada se escapa a su poder. Se debe temer el infinito poder de Dios.

Con los orígenes del cálculo, es necesario volver a discutir este concepto desde la ciencia. Surgen los infinitesimales y con ellos las posturas de algunos de los matemáticos más importantes de la historia de la humanidad. El infinito se rechaza: contradice a la razón, el infinitesimal provoca incertidumbre, duda, sospecha de inconsistencia, provoca silencios para no despertar ira en otros pensadores. Esto mismo es lo que se puede observar en las aulas: ¿cuántos alumnos rechazan al infinito matemático?, ¿cuántos descreen los infinitesimales?, ¿a cuántos les parece sospechoso que lo que a veces es importante y no se puede olvidar, a veces es despreciable? La realidad de nuestros alumnos es como la de Berkeley, Leibniz y otros: pre-Cantoriana. Los estudiantes no conocen a Cantor, los docentes sí, pero en la medida que no se les transmita, lo esperable es que opinen como los matemáticos anteriores a Cantor. E inclusive Cantor rechaza alguna de las cuestiones que encuentra, el infinito lo sorprende, lo desencaja y lo lleva alo que el hombre busca cuando la realidad lo supera: Dios. Cantor pone en la misma categoría de infinito absoluto al conjunto de todos los conjuntos, al último número transfinito (omega) y Dios. El infinito sigue siendo para el gran teórico del infinito una cuestión de fe.

Conclusiones

Como se ha observado, las ideas surgen cuando quieren y en situaciones en que no son buscadas, el docente debe estar atento a los "errores" de los estudiantes, a lo que dicen al pasar en una clase o en un diálogo, a lo que opinan cuando la situación de clase rompe con la situación tradicional que se asocia al contrato didáctico y que impide la libertad requerida para expresar ideas que se suponen "no matemáticas".

Cabe preguntarnos, entonces, ¿cuál es el conflicto que se encuentra cuando impedimos que las ideas intuitivas entren a la escuela? Como dice Barbero cuando caracteriza a la escuela actual, *"una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar afuera su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas, sean éstas orales, gestuales, sonoras, visuales, musicales, narrativas o escriturales"* (Barbero, 2008, p. 68)

Lo que hemos observado en nuestra investigación es existen situaciones, circunstancias, que determinan la necesidad de un concepto como el infinito a nivel social. Se pueden considerar como algunas de las actividades que generan al infinito las siguientes:

- La enumeración
- La medida
- La temporalidad
- La clasificación numérica
- La clasificación cualitativa

Éstas son las cuestiones que surgen de lo que se lee en la historia, lo que se observa en las experiencias de esta trabajo, pero principalmente, de la vida. Cuando los niños preguntan, insisten, cuestionan, surge para los padres el infinito como un "comodín": no es claro lo que representa, no es claro lo que quiere decir, y sin embargo los niños lo adoptan.

Como se plantea en el inicio, el infinito es uno de los conceptos matemáticos que tiene previa a su existencia en el aula de la matemática, un campo de ideas asociadas a él. Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho", "muy grande".

En la historia se ha visto como el infinito ha sido conectado con todo, con la religión, con la inmortalidad, con el tiempo, con el espacio, con el universo, y por supuesto, con los números. Y ha sido rechazado y negado, desacreditado como elemento matemático durante muchos siglos de matemática. Lo mismo se ve en las experiencias hechas con estudiantes: "*el infinito se mete en muchos aspectos de la vida, inclusive en la clase de matemática. Y sin embargo, hay un divorcio evidente entre lo que se cree (desde la intuición) y lo que se sabe (desde la matemática). Y es ese divorcio el que dificulta la construcción matemática del infinito"* (Lestón, 2008, p.114).

El objetivo de esta investigación es presentar esas ideas intuitivas: dónde aparecen, cómo y por qué. Pero la tarea no es sencilla. La escuela está inmersa en un escenario social que hace de ella un lugar en el cual la intuición no tiene espacio. El alumnado sabe que lo que cree o siente no acredita conocimiento, solo el saber, el saber de los libros o el transmitido por los docentes permite la promoción de las materias. Y la escuela media es un medio para lograr un primer escalón en el avance de la educación. Y la manera de concluirlo es acreditar el conocimiento que la sociedad ha aceptado como importante y necesario en su sistema de valores. *"La escuela no puede seguir mirando a la cultura popular como algo sin valor. Las ideas intuitivas, lo que se construye en la vida no escolar es parte de lo que los estudiantes saben, y debe aceptarse como elemento, ya sea para colaborar o para mostrar las contradicciones que con el conocimiento erudito presenta."* (Lestón, 2008, p.115)

El aula es el lugar natural en el cual deben incluirse las investigaciones que son producto de la matemática educativa. Ésta en particular, enmarcada dentro de la socioepistemología, intenta establecer el contacto directo entre el medio social en que se desarrollan los estudiantes y en el que está incluida la escuela. La necesidad de un marco teórico que establezca el escenario social como una de las componentes de la construcción del conocimiento es evidente: lo que se busca, lo que se encuentra, lo que se intenta establecer, es resultado de interacción social entre las personas y su medio, y especialmente, entre personas entre sí. El infinito surge y ha surgido, no desde la matemática, sino desde la contemplación de lo que rodea al ser humano. Es un concepto que se construye socialmente antes que matemáticamente, y es por esa naturaleza que debe incluirse en la escuela el medio social y las ideas construidas en ese medio dentro de la escuela.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En Tenti Fanfani, E. (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp. 65-99). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En Beitía G. (Editor) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14 (pp.70-81). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo, C. (2001). Acerca de la comprensión del concepto de continuidad. En *Boletín de SOAREM* nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15 (I), pp.529-534. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología* . Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo, C.(2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21 (pp. 717-727). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Díaz, L. (2003). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa* 16 (I), (pp. 10-20). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal And Ordinal Infinities: An Epistemological And Didactic View. *Educational Studies in Mathematics.* 48, 175-197

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN.

Lezama, J. (2005). Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 3* (8), 339-362.

UN PLANTEAMIENTO DE RESIGNIFICACIÓN DE LAS DESIGUALDADES A PARTIR DE LAS PRÁCTICAS DIDÁCTICAS DEL PROFESOR. UN ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO.

Mariangela Borello, Javier Lezama
CICATA del Instituto Politécnico Nacional México
mborello@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Nivel Medio

Resumen. *En este trabajo se ofrece un estudio acerca de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. La investigación –que se coloca bajo el marco teórico de la socioepistemología– pretende ofrecer herramientas de ayuda que permitan encontrar enfoques metodológicos y soportes didácticos para los maestros, a fin de apoyarlos en su quehacer cotidiano. En esta etapa de la investigación hemos elaborado un primer instrumento didáctico que queremos proponer a un conjunto de maestros de nivel medio-superior para estudiar su postura frente de nuestra propuesta a fin de: darnos cuenta de cuáles son los elementos que más propician una resistencia al cambio del quehacer didáctico; verificar la factibilidad de nuestra propuesta.*
Palabras clave: desigualdades, profesor, resignificación

Introducción

Al inicio de nuestra investigación, estuvimos reflexionando acerca de cuáles son aquellos factores que ponen al estudiante en la postura correcta para que acontezca el fenómeno del aprendizaje. Nos preguntamos: ¿cómo un maestro puede despertar en sus alumnos el interés hacia las matemáticas? Nuestra hipótesis de partida apuntaba al hecho de que el fenómeno del conocimiento acontece sólo en presencia de un interés previo y en libertad. Así, pudimos afirmar que no existen mecanismos que garanticen el conocimiento, pero que, sin embargo, es posible individualizar unos elementos que puedan contribuir a una mejor comprensión de los factores que intervienen en el proceso de aprendizaje, y ayudar en el quehacer matemático.

Por lo tanto el centro de nuestro trabajo ha sido y será la figura del docente que es quien guía al alumno para que este pueda construir el saber y que, a través de sus propias convicciones, influye en las posibilidades de aprendizaje. Cabe observar que cuando hablamos de convicciones del maestro, hacemos referencia a aquel conjunto de prejuicios consolidados –por la pertenencia del sujeto a cierto contexto social y cultural– con la que un ser humano enfrenta la realidad y toma una postura hacia ella.

Nuestro trabajo se refiere a las desigualdades. Hemos podido comprobar (Borello, 2007) cómo dicho tema no se considera relevante en ninguno de los currícula de las principales instituciones escolares mexicanas que le dedican unas pocas horas, en el ámbito del curso de Álgebra, o no las consideran para nada. Sin embargo, en nuestra experiencia hemos podido percatarnos de la importancia del tema el cual no puede encajarse en una única técnica de resolución ya que deberían de haber muchas técnicas diferentes para las diferentes tipologías de desigualdades. Por esta razón nos pareció que las desigualdades representan un importante punto de referencia para investigar cómo el maestro hace sus elecciones ya que se debe de enfrentar con un argumento que requiere mucha flexibilidad en la forma del razonamiento, y esto bajo cualquier enfoque que se quiera cobijar.

El objetivo último de nuestra investigación consiste por lo tanto en el intento de restituirle al objeto matemático desigualdad un significado y una relevancia, aún respetando los tiempos previstos en los currícula.

Para ello, lo que concretamente queremos hacer será construir un instrumento didáctico que pueda utilizarse en la realidad de nuestras aulas provocando a los maestros para que se cuestionen acerca de su manera de actuar y puedan encontrar en ello un apoyo concreto para empezar a modificar algo en su práctica docente. Es evidente que esta herramienta se ofrece a la libertad individual de cada docente y no tiene la pretensión, y tampoco la intención, de sustituirse al cuestionamiento individual de cada uno acerca de su propio trabajo y de la manera de llevarlo adelante.

Nuestra investigación se coloca en el marco teórico de la *socioepistemología* en el contexto de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1983, 1986, 1998; Chevallard, 1995).

La socioepistemología se origina a partir de las críticas a los enfoques de investigación en los que: los argumentos aparecen como descontextualizados, falta un marco epistémico, las explicaciones teóricas son simplistas, se evidencia una “indiferencia” cultural y contextual. Para responder a estas vertientes se van a: considerar los distintos contextos de producción (aula, vida cotidiana, pasado-presente-futuro, etc.), elaborar marcos epistémicos centrados en prácticas y no en objetos, construir teorías robustas sobre nociones nuevas (práctica social, normativa, etc.), diversificar el entorno sociocultural, precisar términos y nociones nuevas que se adaptan mejor a las realidades por construir. De hecho este enfoque no se limita a conocer las respuestas que los alumnos producen ante una tarea específica, sino que va a considerar el conocimiento de las condiciones que las producen. (Cantoral, 2007)

Es por esto que elegimos para nuestra investigación el acercamiento socioepistemológico ya que se trata de un enfoque que quiere tomar en cuenta todos los elementos que de alguna manera se relacionan con el fenómeno del aprendizaje, considerando el conocimiento matemático que se quiere transmitir en un contexto lo más amplio posible. Sin embargo, el objeto central de nuestra investigación ya no es el "objeto inecuación" sino la práctica del profesor –su marco epistémico, sus convicciones, el entorno sociocultural en el que desarrolla su labor– y cómo ésta se relaciona con el aprendizaje de los alumnos, los que, a su vez, viven y se desarrollan en un contexto particular que influencia su actitud hacia las matemáticas.

Antecedentes

Revisión bibliográfica

Desde el análisis de la literatura que nos pareció más interesante acerca de la didáctica de las desigualdades pudimos destacar que algunos autores relacionan las desigualdades con el tema de funciones y que, a pesar de cobijarse bajo diferentes marcos teóricos, coinciden en afirmar que: hay que cambiar la manera de enseñar las inecuaciones proponiendo actividades que involucran no sólo la interpretación y la resolución algebraica sino también resoluciones gráficas que favorezcan una cierta flexibilidad de pensamiento al considerar las dos visiones relacionadas (Barbosa, 2003) y que es imprescindible realizar un "cambio del contexto protagónico de la discusión", empezando con el tratamiento del tema en el contexto gráfico para finalmente llegar al contexto algebraico, "cuyo fin es el de apoyar argumentaciones o construcciones gráficas" (Farfán y Albert, 1997).

Otros autores (Bazzini, 1999, Gallo y Battú, 1997) ponen su atención sobre la relación entre ecuaciones y desigualdades subrayando la presencia de una confusión entre el concepto de ecuación y el de desigualdad entre los cuales se establecen analogías incorrectas que propician que, para resolver desigualdades, se aplican los mismos modelos de las ecuaciones.

Análisis de los currícula y de algunos libros de texto.

Hemos podido examinar los currícula de distintas instituciones educativas de México: 1) a nivel bachillerato (Escuela Nacional Preparatoria y Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, Bachillerato de la Secretaría de Educación Pública, Instituto Politécnico Nacional-Dirección Media Superior, Preparatoria del Tecnológico de Monterrey); 2) a nivel licenciatura (en instituciones y carreras cuyo currículo prevé un curso de precalculo: Tecnológico de Monterrey, Universidad Iberoamericana). Además, varios de libros de texto que se ocupan en dichas instituciones escolares.

Desde este examen resulta evidente que el tema de desigualdades no se considera esencial para la formación matemática de un alumno. Dentro de los tres años de preparatoria el tema sólo aparece el primer año cuando se estudia el álgebra y se le dedican pocas horas. El enfoque es entonces eminentemente algebraico y –por falta de tiempo– se limita a la adquisición de unas cuantas técnicas operativas que propician un aprendizaje memorístico y no significativo. A nivel universitario sólo se pide retomar el tema, basándose en el enfoque que se le da a nivel de la educación Media Superior.

Los currícula en acción

Para conocer algo acerca de cómo los maestros aplican lo que prevén los currícula en su enseñanza, se propuso a varios maestros un cuestionario a fin de testar algunos elementos clave para la enseñanza de las desigualdades. Se aplicó dicho cuestionario a maestros mexicanos (9) –que trabajan en distintas instituciones a nivel superior o medio superior– e italianos (6) –que trabajan a nivel medio superior–. El cuestionario consiste en una secuencia de preguntas (Borello, 2007) cuyo objetivo es estudiar cuáles son las concepciones de los profesores acerca de las desigualdades y cómo enfocan el tema a sus alumnos.

Desde el análisis de las respuestas hemos podido individualizar algunos elementos de interés que nos han llevado a reflexionar lo que sigue.

A pesar de la profunda diferencia entre el discurso matemático escolar sobre el tema de las inecuaciones en los dos países –México e Italia– en los que decidimos llevar a cabo nuestro estudio, ha sido interesante observar cómo en ambos se presentan problemáticas afines. Tanto en Italia como en México los alumnos tienden a confundir ecuaciones e inecuaciones. Este problema tiene raíces muy profundas ya que pensamos radique prioritariamente en no entender el significado real de los símbolos de igualdad o de desigualdad. Demasiadas veces nos encontramos con alumnos que atribuyen al símbolo de igualdad (=) el mismo sentido del símbolo de implicación (⇒) –es decir, de "esto" sigue "aquello"–. De esta manera, cuando se pasa a las inecuaciones y se introducen los nuevos símbolos –mayor (>) y menor (<), mayor-igual (≥) y menor-igual (≤)– los alumnos no tienen los elementos para comprender la diferencia entre ellos y el símbolo de igualdad, así que se limitan a aprender memoristicamente algunas técnicas de resolución y nunca entienden hasta el fondo lo que están haciendo. Esto propicia la confusión entre las dos "operaciones" –ecuación e inecuación– cuya notación es parecida, aún si su sentido es profundamente distinto (cf. Bazzini, 1997, 1999, Gallo y Battú, 1997).

En el análisis de las entrevistas se puede ver como muchas veces se hace referencia a la dificultad de los alumnos en distinguir entre ecuaciones e inecuaciones. Sin embargo, es interesante observar como los mismos maestros son los que hablan de dos "objetos" parecidos que siguen reglas diferentes. Esto nos permite entender cómo la diferencia intrínseca entre los dos "objetos" es algo en que los maestros mismos no han reflexionado, ni profundizado.

Otra dificultad común entre los dos países consiste en el hecho de que los alumnos tienen la actitud de buscar técnicas de sello memorístico a fin de resolver los varios ejercicios que se les proponen. En los dos países las técnicas son diferentes (debido a la diferencia entre los currícula) pero la postura es la misma.

Consecuencia de todo esto es que los estudiantes mexicanos llegan a la universidad sin tener ningún conocimiento acerca de las desigualdades, mientras que sus compañeros italianos llegan con un enorme bagaje de técnicas que les causan mucha confusión y que les impiden reconocer y resolver correctamente casos triviales. (cf. Boero, 1997, 1998, Malara, Brandoli y Fiori, 1999)

También frente a esta dificultad es nuestra opinión –fundamentada en las investigaciones de Boero (1997, 1998, 1999), Farfán y Albert (1997) y Farfán (2000)– que la responsabilidad de dicha actitud se deba de atribuir en parte a los maestros. Las razones por las que el maestro se conforma con que los alumnos aprendan algunas técnicas de forma mecánica, son varias: la falta de tiempo, la facilitación de los procesos de enseñanza y evaluación o la necesidad de encuadrar mentalmente a los alumnos en esquemas de fácil manejo para el profesor.

Hacia una resignificación

A pesar de las observaciones que pudimos hacer a raíz del trabajo de investigación que se documenta en nuestra tesis de maestría (Borello, 2007), hemos tenido que hacer una elección que nos ha llevado por un camino diferente de lo que habríamos pensado.

Como hemos visto, varias investigaciones acerca del tema de desigualdades o inecuaciones (Barbosa, 2003, Albert y Farfán, 1997) subrayan la importancia de la relación entre los objetos inecuación y función. Sin embargo, los currícula institucionales prevén el estudio de las inecuaciones sólo en el curso del primer año del bachillerato, es decir en el curso de álgebra básica.

Por esta razón hemos decidido empezar nuestro estudio acerca de las prácticas de los profesores a partir del contexto algebraico ya que es este contexto al que ellos normalmente hacen referencia. Sin embargo, al momento de hacer nuestra propuesta de resignificación, estaremos considerando el aspecto gráfico-visual aún si, tal vez, no estaremos apoyándonos explícitamente al concepto de función. Este último podrá eventualmente considerarse en un segundo tiempo, al momento de ampliar nuestra propuesta para los cursos de precálculo que se imparten en las universidades.

Como primer paso de nuestro trabajo hemos diseñado una secuencia didáctica que se va a proponer a un grupo de maestros para ver como manejan aquellos elementos que nos parece constituyan un elemento de conflicto cognitivo en el aprendizaje de las inecuaciones.

Para empezar nos hemos preguntado qué quiere decir resignificar el objeto inecuación y hemos concluido que se trata de darle un lugar en el contexto del discurso matemático escolar. No se trata de cambiar el discurso (o, por lo menos, esto no va a ser nuestro objetivo actual) sino de proveerlo de nuevas significaciones que den sentido a la inecuación en el contexto en que podemos encontrarla hoy y que según la perspectiva socioepistemológica, corresponde a la construcción del conocimiento en la organización de un grupo humano, normado por lo institucional. (Cordero, 2006)

Para llevar a cabo dicho objetivo será indispensable “romper” con el discurso matemático escolar considerando que las inecuaciones viven en el contexto del álgebra y que, en dicho contexto, el discurso que normalmente se hace no se desarrolla en la línea que queremos seguir para alcanzar nuestro objetivo. Por lo tanto deberemos de considerar que, antes de llegar a lo específico del objeto inecuación, se tendrá que considerar lo que pasa con el álgebra. Como pudimos observar (Borello, 2007), los manuales escolares tienden a un cierto grado de formalismo lo que propicia una enseñanza cuyo estilo es prioritariamente memorístico. Muy seguido los maestros limitan su actividad a un “entrenamiento” para que los alumnos aprendan y apliquen un conjunto de reglas sin que puedan comprender su significado real. Todo eso propicia que para el estudiante entender coincida con la capacidad de resolver los ejercicios propuestos lo que impide alcanzar un aprendizaje significativo de los temas propuestos.

Es nuestra opinión que el primer objetivo de nuestra propuesta y, por lo tanto, de nuestra secuencia, deba de ser el de romper con esta actitud.

Para ello, las preguntas de nuestra secuencia harán énfasis en el aspecto del significado de los objetos que se manejan y, sólo en un segundo momento, pedirán la aplicación de procesos. Se trata de favorecer en el sujeto –en este caso el profesor– el desarrollo de una práctica social: de generar actividades que tienen una dirección, un para qué.

Para alcanzar dicho objetivo, a pesar de que nuestro trabajo de resignificación es relativo a las desigualdades, no podemos mantenernos ajenos al cómo se maneja en su globalidad el curso de álgebra.

Como hemos podido observar (Bazzini, 1997, 1999, Gallo y Battú, 1997, Borello, 2007) en el ámbito de la matemática escolar subsiste una relación muy fuerte entre las inecuaciones y las ecuaciones que es fuente de mucha confusión y que, por lo tanto, obstaculiza el correcto aprendizaje de lo que son las inecuaciones.

De hecho, cuando se introduce la inecuación siempre se hace referencia a la ecuación ya que ésta última se considera un objeto matemático muy parecido a la ecuación pero “con unas reglitas diferentes”. Propiamente este punto, constituye el segundo elemento con que hay que “romper” y, para poderlo hacer, necesitamos partir desde el significado de igualdad/desigualdad y de ecuación/inecuación. Así podremos sucesivamente establecer relaciones y diferencias reales entre dichos objetos.

Todo esto nos llevará a restituirles a igualdades y desigualdades, ecuaciones e inecuaciones su estado de objeto, y no sólo de herramienta (Douady, 1986).

Referencias bibliográficas

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6 (3), 199-219.

Bazzini, L. (1997). Riflessioni didattiche sul concetto di equivalenza per equazioni e disequazioni. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X. Vol. III*, (pp. 39-43). Nice, France: IREM.

Bazzini, L. (1999). Disequazioni : il ruolo del segno. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII. Vol. III*, (pp. 7-12). Nice, France: IREM.

Boero, P. (1997). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X . Vol. III*, (pp. 3-7). Nice, France: IREM.

Boero, P. (1998). Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XI. Vol. III*, (pp. 47-51). Nice, France: IREM.

Boero, P. y Garauti, R. (1999). Les inéquations fonctionelles : lieu de développement et d'étude de la maîtrise des fonctions. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII. Vol. III*, (pp. 3-6). Nice, France: IREM.

Borello, M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte.* Tesis de maestría no publicada, Cicata, IPN.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4 (2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Genoble, France: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. (2007, Julio). Aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. *Conferencia plenaria.* (Presentación PowerPoint). En la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Universidad Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6 (1), 27-40.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. En R. Noirfalise et M. J. Perrin (Eds), *Actes de la VIII Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 82-122). Clermont-Ferrand, France: IREM.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (265-286). Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. AC.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20 (1), 59-79.

Douady, R. (1986). Juegos de marcos y didáctica herramienta-objeto. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 3-31.

Farfán, R. M. (2000). Un estudio de funciones pretextando la resolución de desigualdades. En Cantoral R. et al, *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp.89-144). México D.F., México: Trillas.

Farfán, R. M. y Albert, A. (1997). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades.* México, D.F., México: Editorial Iberoamérica.

Gallo, E.; Battú, M. (1997). Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni?. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X. Vol. III*, (pp. 25-37). Nice, France: IREM.

Malara, N. A.; Brandoli, M. T. y Fiori, C. (1999). Comportamenti di studenti in ingresso all'universitá di fronte allo studio de disequazioni. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII. Vol. III* (pp. 13-28). Nice, France: IREM.

MOTIVACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA FUNCIÓN SENOIDAL A TRAVÉS DEL MOVIMIENTO CIRCULAR COMO METÁFORA

Ricardo Pérez Arellano
Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV México
rpereza@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: medio

Resumen. *En este trabajo se presenta una secuencia didáctica cuyo marco teórico es la socioepistemología, en la que se toma en cuenta la dimensión didáctica y cognitiva. Para realizarla, usamos una metáfora que nos permita identificar a través de una actividad experimental, al manipular una cuerda y usando una torna mesa, los principales elementos de la función seno.*
Palabras clave: Metáfora, movimiento armónico simple, discurso matemático escolar.

Introducción

El discurso matemático escolar se entiende como la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y de lo que es la matemática, y que tiene como consecuencia el que se ejerza la enseñanza – aprendizaje considerando a la matemática como un conocimiento acabado tratando a los conceptos matemáticos en las acciones de enseñar como actos repetitivos o de memorización, sin atender al contexto histórico y social que se ha llevado a cabo en la construcción de las matemáticas, Cordero (2007).

De esta manera, el discurso matemático escolar en los cursos de álgebra de nivel medio superior, ha presentado a las funciones trigonométricas como preexistentes a la experiencia del ser humano, esto es, presenta a la matemática como un producto material acabado que siempre ha existido, por lo que sólo debemos tomarlo y aprenderlo, sin tomar en cuenta las situaciones que le dan sentido.

Es por esto que, a partir del reconocimiento de fenómenos naturales como el movimiento circular y el movimiento ondulatorio que se observa al manipular una cuerda o al arrojar una piedra en un estanque de agua, se usa una metáfora para proporcionar una justificación a la definición y uso de las funciones trigonométricas como modelos matemáticos que describen la realidad y que a su vez dan sentido a los objetos matemáticos que ellas representan.

Es así como el estudiante usa su conocimiento, para que, a través de su experiencia construya argumentos, dé sentido a sus procedimientos y de esta forma construya un conocimiento que *no esté basado en la memorización sino en su práctica.*

Para esta actividad, partimos de la definición de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.

Secuencia didáctica

Es importante mencionar que con esta secuencia didáctica presentamos una motivación socioepistemológica al estudio y aprendizaje de la función seno. Se trastoca la dimensión social ya que al trabajar en equipos y bajo la supervisión y apoyo del docente, el estudiante aprende y enriquece su conocimiento. Se trastoca también la dimensión cognitiva, ya que, el estudiante, al usar sus sentidos y la experiencia previa, advierte las formas observadas y las relaciona con sus conocimientos matemáticos previos en un acto de raciocinio.

Desarrollo:

1. En grupos de cuatro estudiantes y con el uso de una cuerda, se manipula ésta atada en uno de sus extremos a una pared, mientras que el otro extremo se sube y baja de manera continua siguiendo una línea recta vertical imaginaria, como si se tratara del diámetro de una circunferencia, tal como se ilustra en la figura 1.

En el momento en el que uno de los estudiantes manipula la cuerda, otro realizará un bosquejo de la forma observada que presenta este tipo de manipulación, donde el bosquejo que se obtiene tiene la forma de la figura 2, a la que le llamaremos ondulación.

2. A continuación se analiza el movimiento circular. Para ello se le pedirá al estudiante que considere el movimiento de un punto sobre un círculo el cual tiene rapidez uniforme y que describa las principales características del mismo buscando analogías con el movimiento ondulatorio de la cuerda, socializando las observaciones encontradas con sus compañeros.

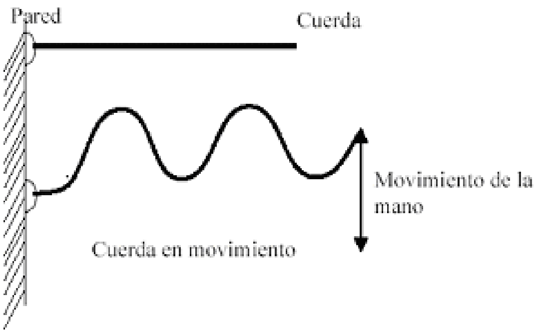


Figura 1

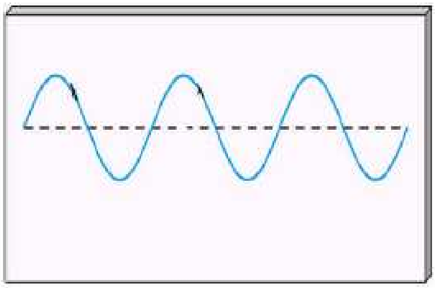


Figura 2

Una herramienta útil para llevar a cabo esta experiencia es usar una torna mesa de disco, la cual gira con rapidez constante, recordemos que lo hacen a 33, 45 o 75 vueltas por minuto. Como ayuda visual al uso de la torna mesa, en esta secuencia didáctica se usó un applet de Java para que los estudiantes visualizaran la relación entre el movimiento circular y las ondulaciones respectivas. Ver figura 3.

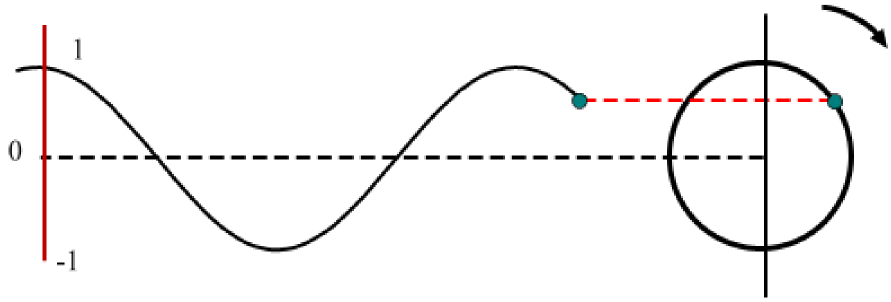


Figura 3

3. En este punto de la secuencia se obtiene el significado de movimiento armónico simple. Para ello se indica al alumno que obtenga la proyección del punto que se mueve sobre la circunferencia, sobre el diámetro, y que describa el tipo de movimiento que se obtiene. De esta forma el alumno deberá descubrir que el movimiento que proyecta el punto sobre su diámetro es el llamado *movimiento armónico simple*, el cual se define como el movimiento de la proyección sobre el diámetro de un punto que se mueve sobre la circunferencia con rapidez constante.

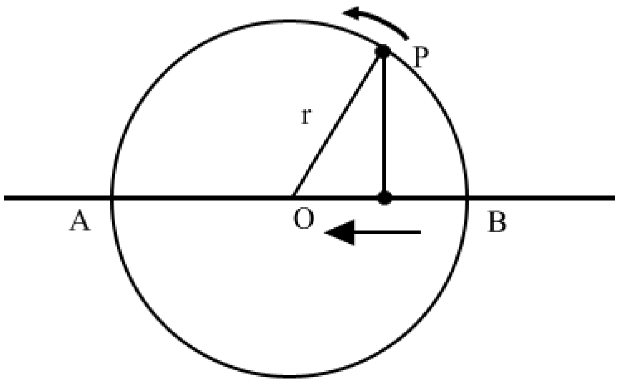


Figura 4. Proyección del movimiento circular sobre el diámetro.

4. Se plantea al estudiante la siguiente actividad: investigar y diseñar cómo mediante el movimiento del punto sobre la circunferencia, se obtiene la gráfica en el plano cartesiano de la ondulación que se obtuvo al manipular la cuerda, al hacer que por debajo de la torna mesa se traslade una pantalla tal como se ilustra. En este sentido, Cordero (2001), enfatiza la importancia

de reconocer una epistemología modelizada por la actividad humana en la que se asumen elementos que son propios de dicha actividad y no del saber mismo (que aunque es fundamental, no puede ser el único) tales como los significados propios, los contextos, las intenciones, las cuales se van configurando a través de la dinámica de los grupos sociales.

5. De esta secuencia didáctica, se ilustra cómo, a través de experimentar con el movimiento circular como metáfora, el estudiante descubre por medio de sus sentidos, propiedades de la ondulación que se podrán identificar con las funciones seno y coseno al definir a éstas en el círculo unitario y graficarlas en el plano cartesiano.

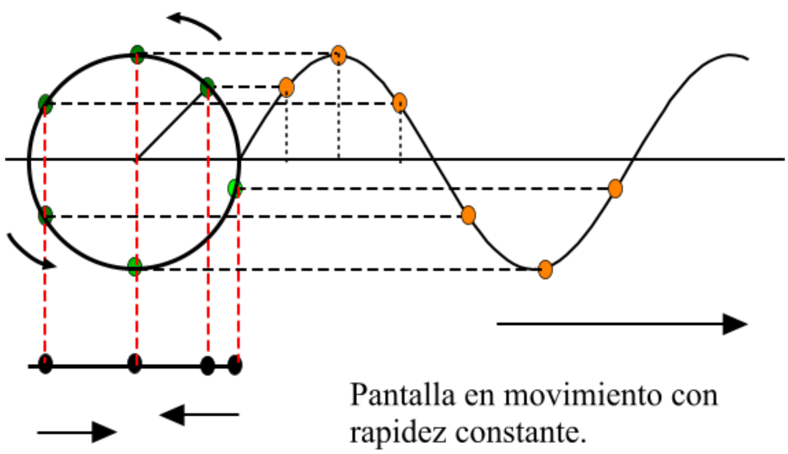


Figura 5. Ondulación asociada al movimiento circular y el movimiento armónico simple respectivo.

Conclusiones

En este reporte se presentó una secuencia didáctica que toma en cuenta el marco teórico de la socioepistemología. Este tratamiento considera la actividad humana como una organización social, en la cual se construye conocimiento, al dar mayor importancia al desarrollo y uso de herramientas, en nuestro caso la metáfora, que están involucradas en la construcción del conocimiento, al papel de las personas y el contexto social en el que actúan.

Por otro lado, el uso de metáforas en la matemática educativa es reciente; como se indica en Boero (2001), citando a Lakoff y Jonson, 1980, "Desde los inicios de los años ochenta, se han reconocido a las metáforas como componentes del pensamiento”. El uso de metáforas para dar significado a las ondulaciones del seno y al movimiento armónico simple del que tanto se habla en los cursos de ecuaciones diferenciales pero del que muchas veces no esta claro su significado, son mecanismos cognitivos fundamentales que ayudan al estudiante a estructurar sus ideas y elaborar inferencias abstractas.

Finalmente, es importante mencionar que esta propuesta requiere de una segunda etapa, en la que se verifiquen experimentalmente las actividades propuestas y la efectividad del diseño en el aprendizaje del estudiante. Para ello, como se realiza en la ingeniería didáctica, estamos por iniciar la segunda etapa del diseño, que es la puesta en escena y finalmente la confrontación entre la propuesta y los resultados obtenidos.

Referencias bibliográficas

Boero. P. Bazzini L. Garutti R. (2001) Metaphors in Teaching and Learning Mathematics: A case study concerning inequalities. *Proceddings of PME-XXV*, Utrecht, vol. 2 (pp. 185-192)

http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/BOERO&C_PME_XXV.pdf

Buffa. W. (2001) *Física.* Prentice – Hall. Quinta edición. México.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2006) El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral. O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano* (pp 265 – 286). México DF, México. Díaz de Santos – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cordero, F. Flores R. (2007) El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38.

Montiel G. (2005) Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica**.** Tesis doctoral. CINVESTAV. México.

Gilbert, S.(s/f) *Metáforas conceptuales y la teoría del "mezclaje".* Consultado en marzo de 2009 en: http://sincronia.cucsh.udg.mx/metaforas.htm

Nubiola, J. (2000). El valor cognitivo de las metáforas. En P. Pérez-Ilzarbe y R. Lázaro (eds.), *Verdad, bien y belleza. Cuando los filósofos hablan de los valores.* Cuadernos de Anuario Filosófico n° 103, pp. 73-84. Pamplona. Consultado en marzo de 2009 de www.unav.es/users/ValorCognitivoMetaforas.html

REPRESENTACIONES SOCIALES QUE SOBRE LAS MATEMÁTICAS TIENEN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR MEXICANO

Gustavo Martínez Sierra
Programa de Matemática Educativa. CICATA-IPN México
gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Se presentan los primeros resultados de una investigación más amplia que tiene como objetivo conocer las representaciones sociales (RS) que de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje tienen estudiantes de nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México. En particular, aquí presentamos los primeros datos, utilizando la técnica de evocaciones libres, que nos permiten elaborar una primera descripción de las RS que de las matemáticas que poseen estudiantes de quinto semestre (alumnos de 17 a 18 años). En resumen podemos afirmar que los objetos matemáticos, la acción operativa sobre ellos y la valoración de las matemáticas son las principales dimensiones del campo de representación. Dentro de los objetos matemáticos destacan las categorías de los números y los problemas y dentro de las acciones operativas destacan las de las operaciones matemáticas elementales de sumar y restar. Dentro de las valoraciones destaca la consideración de que las matemáticas son difíciles y tediosas.*
Palabras Clave: Representaciones Sociales de las matemáticas, Socioepistemología, nivel medio superior mexicano

La problemática

Un grupo de investigadores en México y Latinoamérica nos hemos planteado la necesidad de indagar, en las condiciones propias de nuestra región, los procesos de construcción de conocimiento matemático y así construir una aproximación, la *socioepistemología*, en Matemática Educativa que atienda al carácter situado (social, cultural e institucional) del conocimiento. Al cobijo de este principio se ha planteado el objetivo de elaborar una *explicación sistémica de la construcción del conocimiento matemático en situación escolar* (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006; Camacho, 2006; Martínez, 2006). La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004; Cantoral *et al*, 2006).

En particular la presente investigación parte de la consideración de la necesidad de conocer la *vida cotidiana escolar* alrededor de las matemáticas*,* con su *sentido común* asociado, como requisito previo para la intervención y la innovación educativa. En este punto seguimos a Piña (2003, p.17) que señala que:

> *"…la importancia de conocimiento del sentido común y sus respectivas imágenes, creencias y representaciones, por que ellas indican la forma de pensar y, en consecuencia, guían las prácticas sociales que despliegan los actores en los diversos espacios de la vida cotidiana" (cursivas en el original).*

Para dar cuenta de la vida cotidiana escolar y el sentido común, utilizamos la noción de *representación social* (Abric, 2004; Jodelet, 1986) como concepto que articula los aspectos cognitivos y sociales de la aproximación sistémica de que parte la presente investigación.

Marco teórico

Siguiendo Bergmen y Luckmann (2006/1966, p. 11) para nosotros bastará con definir la *realidad* como una cualidad propia de los fenómenos que reconocemos como independientes de nuestra propia voluntad (no podemos *hacerlos desaparecer*) y definir el *conocimiento* como la certidumbre de que los fenómenos son reales y de que poseen características específicas. En el sentido anterior partimos del supuesto de que *toda realidad es representada*, es decir, se la apropia un individuo o grupo, el cual la reconstruye en un sistema cognitivo, y la integra en su sistema de valores dependiendo de su historia y del contexto social y ideológico que lo rodea. Esta realidad apropiada constituye para el individuo la realidad misma, pues toda representación es una forma de visión global de unitarios objeto, pero también de un sujeto (Flores, 2005, p. 13).

Las *representaciones sociales* constituyen una modalidad particular de conocimiento, calificada generalmente como *conocimiento del sentido común*, cuya especificidad reside en el carácter social de los procesos que las producen. Por lo tanto, abarcan el conjunto de creencias, de conocimientos y opiniones *producidas y compartidas* por los individuos de un mismo grupo, en relación a un objeto social en particular (Guimelli, 2004, p. 63). En sentido más amplio, designa una forma de *pensamiento social* y de ahí su importancia cuando se trata de entender la acción humana en contextos específicos. Desde este punto de vista, una representación social permite guiar la acción de las personas ante un objeto social específico. Es por ello el estudio de las representaciones sociales adquiere particular relevancia; ya que entender la manera en que estas se producen y se transforman ayudada entender el comportamiento humano. La representación funciona como un sistema de interpretación de la realidad que rige las relaciones de los individuos con su entorno físico y social, ya que determinará sus comportamientos o sus prácticas. Es una *guía para la acción*, orientan las acciones y las relaciones sociales. Es un sistema pre-decodificación de la realidad puesto que determina un conjunto de *anticipaciones y expectativas* (Abric, 2004, p. 12).

En otros términos, la representación social es un conocimiento práctico. Al dar sentido, dentro de un incesante movimiento social, acontecimientos y actos que terminan por sernos habituales, este conocimiento forja las evidencias de nuestra realidad consensual, *participan la construcción social de nuestra realidad* (Jodelet, 1986, p. 473). Se trata de <sistemas cognitivos que poseen una lógica y un lenguaje particulares... de *teorías*, de *ciencias* sui generis destinados a descubrir la realidad y ordenarla> (Moscovici, 1979).

Objetivo de investigación

Conocer las representaciones sociales (RS) que de las *matemáticas* tienen estudiantes de nivel medio superior del IPN.

La investigación tiene por universo de estudio uno de centros de educación media superior del IPN (las comúnmente llamadas vocacionales o Cecyts- Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del IPN); que son instituciones planificadas como centros de preparación profesional técnica y como instituto preuniversitario.

Metodología

Para identificar las representaciones sociales que de las *matemáticas* tienen estudiantes de nivel medio superior del IPN, realizamos un trabajo de campo en un cuestionario de evocaciones libres en el cual les pedimos a los estudiantes que relacionaran el concepto de "matemáticas", específicamente que emitieran cinco palabras diferentes. La frase inductora fue "¿Qué 5 palabras o frases te vienen a la mente cuando escuchas la palabra "matemáticas"?. Los datos fueron analizados a través de la orientación metodológica de Singéry (2004, p. 168-169); tomando en particular cuatro de las ocho operaciones para el análisis de las RS, a saber: 1) Recolección de los datos que permiten tener acceso a las cogniciones (entrevistas individuales y colectivas, asociación de palabras, etc.), 2) Clasificación de estas producciones en categorías definidas según un criterio de referencia, 3) Análisis del contenido de cada categoría, 4) Análisis de las categorías desde el punto de vista de la frecuencia.

El cuestionario ha sido contestado por una muestra no estadística de 180 estudiantes (60 del primer semestre, 60 de tercer semestre, 57 de quinto semestre). A continuación presentamos el análisis de los datos que surgieron del cuestionario por parte de los 57 estudiantes de sexto semestre; que permite inferir las dimensiones y categorías del campo las representaciones sociales de los estudiantes. El análisis se realizó a partir de un universo final de 284 palabras que resultó de la integración de las respuestas de los estudiantes. Antes se realizó una agrupación de términos semánticamente próximos. Así, por ejemplo, lógica, pensar, analizar y razonar se enmarco en la categoría *razon(ar)(miento)*.

Primeros datos: Exploración a través de evocaciones libres

Después de un primer análisis interpretativo de las palabras evocadas éstas fueron enmarcadas en siete dimensiones que dan cuenta al tipo de sentidos a los que remiten: 1) Objetos Matemáticos, 2) Acciones matemáticas, 3) Valoraciones, 4) Procesos cognitivos, 5) Sistemas conceptuales, 6) Personas, 7) Vida Académica y 8) Emociones. En la Tabla 1 son mostradas las dimensiones del campo de representación.

Dimensión	Frecuencia	%
Objetos Matemáticos	98	34.5%
Acciones matemáticas	61	21.5%
Valoraciones	48	16.9%
Forma de pensar	28	9.9%
Sistemas conceptuales	14	4.9%
Personas	13	4.6%
Vida Académica	12	4.2%
Emociones	10	3.5%
Total	284	100.0%

Tabla 1. Dimensiones del campo de representación

A su vez cada dimensión se estructura a través de diversas categorías. En la Tabla 2 se puede apreciar las categorías de las dimensiones del campo de representación (%R indica el porcentaje Relativo a la categoría y %A indica el porcentaje absoluto respecto al total de las palabras evocadas).

CATEGORÍAS DE OBJETOS MATEMATICOS	F	%R	%A
Número(s)	37	37.8%	13.0%
Problema(s)	20	20.4%	7.0%
Ecuación	12	12.2%	4.2%
Fórmula	9	9.2%	3.2%
Letra(s), literales	7	7.1%	2.5%
Fracción(es)	4	4.1%	1.4%
....			

CATEGORÍAS DE ACCIONES MATEMATICAS	F	%R	%A
Operaciones	28	45.9%	9.9%
Suma(s)(r)	12	19.7%	4.2%
Multiplica(ción)(ar)	6	9.8%	2.1%
Resta(s)(r)	5	8.2%	1.8%
División(es)	4	6.6%	1.4%
....			

CATEGORÍAS DE VALORACIONES	F	%R	%A
Difícil	23	47.9%	8.1%
Tedioso(a)	9	18.8%	3.2%
Tardado	4	8.3%	1.4%
Entretenido	3	6.3%	1.1%
Desagrado	2	4.2%	0.7%
Exacto	2	4.2%	0.7%
Inteligente	2	4.2%	0.7%
....			

CATEGORÍAS DE FORMA DE PENSAR	F	%R	%A
Razon(ar)(miento)	12	42.9%	4.2%
Estudiar	7	25.0%	2.5%
Habilidad	3	10.7%	1.1%
Pesado	2	7.1%	0.7%
Observación	1	3.6%	0.4%
Aprender	1	3.6%	0.4%
....			

CATEGORÍAS DE SISTEMAS CONCEPTUALES	F	%R	%A
Álgebra	7	50.0%	2.5%
Geometría	2	14.3%	0.7%
Física, Física Cuantica	2	14.3%	0.7%
Ingeniería	1	7.1%	0.4%
Matemáticas	1	7.1%	0.4%
....			

CATEGORÍAS DE PERSONAS	F	%R	%A
Profesor, maestro	5	38.5%	1.8%
Nombres de profesores(as)	6	46.2%	2.1%
Científícos	1	7.7%	0.4%
Matemáticos(Pitágoras)	1	7.7%	0.4%
....			

CATEGORÍAS DE VIDA ACADEMICA	F	%R	%A
Reprobar	4	33.3%	1.4%
Materia(asignatura)	2	16.7%	0.7%
Examen	1	8.3%	0.4%
Salón	1	8.3%	0.4%
Escuela	1	8.3%	0.4%
....			

CATEGORÍAS DE EMOCIONES	F	%R	%A
Diversión	3	30.0%	1.1%
Stress	4	40.0%	1.4%
Frustrante	2	20.0%	0.7%
Flojera	1	10.0%	0.4%
Diversión	3	30.0%	1.1%
....			

Tabla 2. Categorías de las dimensiones del campo de representación.

Conclusión: Discusión de los datos

Una interpretación de los datos mostrados en la sección anterior permiten afirmar que:

- Los objetos matemáticos, la acción operativa sobre ellos y la valoración de las matemáticas son las principales dimensiones del campo de representación (acumulan el 82.9 % de las palabras evocadas). Dentro de los objetos matemáticos destacan las categorías de los números y los problemas y dentro de las acciones operativas destacan las de las operaciones matemáticas elementales de sumar y restar. Dentro de las valoraciones destaca la consideración de que las matemáticas son difíciles y tediosas.
- Las dimensiones Forma de pensar, Sistemas conceptuales, Personas, Vida Académica y Emociones son parte periférica del campo de representación (acumulan el 17.1 % de las palabras evocadas).

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (2004). *Prácticas sociales y representaciones*. México: Ediciones Coyoacán.

Berger. P. L. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Argentina: Amorrutu. Edición original publicada en 1966. *The social constrution of reality*. Nueva York: Doubleday and Company.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 - 168.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27 - 46.

Camacho, A. (2006). Revisión de las prácticas sociales y la socioepistemología. México. *Educación Matemática 18*(1), 133 - 160.

Doise, W., Clémence, A. & Lorenzi-Cioldi, F. (2005). *Representaciones sociales y análisis de datos*. México: Instituto Mora. Versión español del escrito original de 1992 *Répresentations Sociales et Analyses de Donées*. Presses Universitaires de Grenoble.

Flores, J. I. (2005). *Presentación*. En W. Doise, A. Clémence & F. Lorenzi-Cioldi. Representaciones sociales y análisis de datos (pp. 9-18). México: Instituto Mora.

Guimelli, Ch. (2004). *El pensamiento social*. México: Ediciones Coyoacán.

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos conceptos y teoría. En S. Moscovici (Ed.) *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales (pp.469-494)*. Barcelona, España: Paidós.

Piña, J. M. (2003). Imágenes sobre la calidad de la educación. Los actores de tres carreras de la UNAM. En J. M. Piña, (Coord.). (2003). *Representaciones, Imaginarios e Identidad: Actores de la Educación Superior (pp. 17, 71)*. México: Centro de Estudios sobre la Universidad/Plaza y Valdés Editores/Universidad Nacional Autónoma de México.

Martínez, G. (2006). Los procesos de Convención Matemática como Generadores de Conocimiento. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 379-401). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISBN: 84-7978-803-8.

Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires, Argentina: Huemul.

Singéry, J. (2004). Representaciones sociales y proyecto de cambio tecnológico en empresa. En J. C. Abric (Ed.). *Prácticas sociales y representaciones* (pp. 159-194). México: Ediciones Coyoacán.

EL INFINITO ESCOLAR

Patricia Lestón, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
patricialeston@yahoo.com.ar, crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *El presente trabajo forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento. El tema central de este reporte es la construcción escolar del infinito y las dificultades que éste concepto presenta debido a su origen sociocultural por un lado y matemático por otro. Se produce entonces un choque entre esos dos infinitos: el construido socialmente y desconocido por la escuela, y el matemático, que se utiliza en la escuela, pero es desconocido por los alumnos. Para indagar sobre la naturaleza del infinito con que se trabaja en el aula, se presenta y analiza una actividad, centrada en el estudio de funciones, y en particular de la existencia y cálculo de asíntotas que fue llevada a cabo con alumnos de escuela media. Las respuestas demuestran que el infinito construido fuera de la escuela sigue marcando en ellos la forma en que el infinito funciona y que el infinito matemático les presenta sólo conflictos y dudas.*
Palabras claves: infinito, nociones intuitivas, construcción social de conocimiento, escenarios socioculturales, socioepistemología.

Introducción

El infinito ha sido y aún es uno de los temas que más ha sido trabajado desde distintos campos de conocimiento (Matemática, Matemática Educativa, Filosofía, entre otros). Dentro de la matemática, su existencia y desarrollo no ha sido nada fácil: ha sido ignorado, negado, rechazado y a pesar de su antigüedad, no fue hasta que Cantor a fines del siglo XIX en contra de toda una comunidad lo trabajó, que fue aceptado finalmente como un elemento en la matemática.

En la escuela en cambio, su existencia no es reconocida como elemento a ser construido. Se lo utiliza, sí, pero no se lo concibe como objeto de conocimiento. Se asume ingenuamente que la idea intuitiva del infinito es suficiente para cubrir las necesidades del infinito matemático. El problema está en que, por un lado, el infinito intuitivo, construido socialmente no es compatible con el uso que de él se hace en la matemática y por otro, que el infinito matemático no forma parte del Discurso Matemático Escolar. A lo largo de la escolaridad de los alumnos va apareciendo en distintas circunstancias o momentos pero nunca como un objeto de conocimiento.

"el infinito desde el nivel inicial se convierte en un concepto que define muchas cosas, pero que no se define en ningún momento. Los alumnos lo aceptan, como aceptan tantas otras cosas de la escuela que no comprenden, pero es cuando su entendimiento es necesario para basar la construcción de otros conceptos cuando surgen los conflictos." (Lestón, 2008, p. 113)

Estos problemas que abordamos en un trabajo anterior (Lestón, 2008) estuvieron enfocados puntualmente en la búsqueda de lo que representaba el infinito fuera de la matemática, pues son esas ideas construidas extraescolarmente las que encontramos adentro de las aulas. Y es a partir del reconocimiento de estas que pretendemos comenzar a identificar las relaciones que de ellas se desprenden hacia el uso matemático del infinito. Lo que nos preguntamos ahora es entonces qué es lo que ocurre cuando comenzamos a tratar al infinito como objeto matemático sin haberlo definido, qué es lo que entienden nuestros alumnos y qué cuestiones se están pensando que dificultan la comprensión de conceptos básicos del Cálculo, como las asíntotas de una función.

Buscamos entonces empezar a documentar evidencias de los conflictos que la ausencia del infinito en el DME está provocando en las aulas de matemática, a fin de poder caracterizar al concluir nuestra investigación, una propuesta o al menos, una serie de sugerencias para que los docentes podamos ayudar a nuestros alumnos a construir elementos para la comprensión y uso del infinito matemático.

Marco teórico

La naturaleza de nuestra investigación nos lleva a considerar elementos teóricos que no en todas las aproximaciones son considerados: por un lado, lo que ocurre en la escuela, los elementos didácticos; lo que define a la naturaleza epistemológica del concepto, la manera en que las personas organizan sus pensamientos. Pero también lo que ocurre fuera de la clase, en los escenarios en los cuales los alumnos construyen sus ideas naturales o intuitivas asociadas al infinito. Esos escenarios son para nosotros, escenarios socioculturales con características muy particulares, en donde se translucen las ideologías de un grupo, sus necesidades, su filosofía, sus maneras de actuar y relacionarse (Crespo Crespo, 2007), que resultan de vital importancia para nuestro trabajo.

Nos encontramos entonces con la necesidad de un marco teórico que reconozca la importancia de lo social en la construcción de conocimiento y es por eso que adherimos a la Socioepistemología como referente teórico.

> *"... cuando se trata de indagar las condiciones de creación y desarrollo de las ideas matemáticas, así como las circunstancias sociales o culturales que posibilitan su construcción o los factores extra-matemáticos que moldea y permea el conocimiento, una epistemología en el sentido tradicional no alcanza a ofrecer explicaciones sobre este tipo de preguntas de naturaleza sociocultural. Se requiere entonces de un acercamiento epistemológico sensible a reconocer, entre otras; la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento." (Castañeda, 2008, p. 503)*

La Socioepistemología, entendemos, nos permite movernos en distintos escenarios y observar todo lo que hace a la construcción, uso y vida del conocimiento. Y es eso lo que un concepto como el infinito requiere, ya que a pesar de su antigüedad se reconstruye en cada nueva generación tanto en la escuela como en la vida.

La propuesta: Objetivo y Encuesta Aplicada

En función de lo antes descrito, nos interesa en este momento comenzar a atender lo que ocurre con el infinito adentro de las aulas, en las clases de matemática. Hemos detectado ya una serie de ideas fuera de la matemática que se construyen en relación al infinito y que para los estudiantes no son contradictorias, relacionadas al tiempo, a la religión, al amor, a todo lo que pueda "no tener fin" o ser "excesivamente grande, más que cualquier otra cosa" (Lestón, 2008). Quisimos observar ahora qué hay de esas cuestiones filtrándose en el infinito matemático, el que conocen representado con un ∞ y relacionado con extensiones de rectas o propiedades de conjuntos numéricos.

Les aplicamos a alumnos de último año de bachillerato (17 años) un cuestionario basado en el estudio de funciones racionales, que saben graficar aún cuando no han iniciado el estudio de límites y derivadas formalmente. La actividad se propuso como diagnóstico del grupo al inicio de clases. Estas actividades de diagnóstico son aplicadas año a año para que el docente pueda evaluar el estado del grupo en relación a lo que se supone ya han aprendido y en función de esos resultados, diseñar su currículo para el resto del año lectivo. Los alumnos saben que esa evaluación no tiene repercusión en la aprobación del curso. El contrato didáctico está establecido de ese modo y eso permite que las respuestas sean pensadas y plasmadas en el papel de la manera más natural en que pueden hacerlo. No hay represalias si lo que dicen no es correcto. Estos trabajos por lo general no son devueltos a los alumnos, sino que los conserva el docente como documentación de nivel de inicio del grupo, es decir, no sólo no lleva calificación sino que ni siquiera tiene que enfrentarse al saberse equivocados.

La actividad presentada a los alumnos fue un plan de unas 30 preguntas y consignas, en las cuales se les recordaban algunas de las definiciones con que se había trabajado hasta ese momento y se les pedía que definieran con sus palabras cuestiones como asíntota, dominio, infinito y aproximación infinita.

Algunas de las partes más relevantes de este trabajo se transcriben a continuación.

Funciones Racionales

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

1. Presenta un ejemplo de este tipo de funciones.

2. Dominio de las funciones racionales.

$$Dm = \Re - \{C^0 \in Q(x)\}$$

2.1. ¿Puedes explicar a qué se debe esto?

2.2. ¿Qué es lo que ocurre en esos puntos? ¿Qué representan gráficamente?

3. Asíntotas verticales y horizontales 1120

Si $a \notin Dmf(x)$ y además $f(a) \to \infty$, se define a $x = a$ como asíntota vertical.

3.1. Representa una función que presente una asíntota vertical.

3.2. Define con tus propias palabras una asíntota

3.3. ¿Qué quiere decir “aproximarse infinitamente”?

3.6. Si cuando $x \to \infty$, $f(x) \to a$, se define a $y = a$ como asíntota horizontal de la función.

3.7. Representa una función que presente una asíntota horizontal.

3.8. ¿Cómo lees la expresión $x \to \infty$?

3.9. ¿Cómo aparece en la gráfica representado $x \to \infty$ *?*

3.25De acuerdo a todo lo trabajado define en términos matemáticos el infinito

Lo que los alumnos dicen al respecto del infinito

El inicio de la actividad no tiene mayores problemas, los gráficos y ejemplos pedidos fueron correctamente presentados y descriptos. Frente a la definición de dominio de las funciones racionales, los alumnos han construido los elementos necesarios para saber que “no se puede dividir por cero”:

> *“Todos los reales pertenecen al dominio menos el conjunto de ceros del denominador. Esto se debe a que el denominador sería cero y sería imposible de resolver”*

Y también pueden decir qué es lo que ocurre en esos puntos que no son parte del dominio de la función:

> *“Esos puntos representan asíntotas verticales o discontinuidades puntuales”*

Esperábamos hasta aquí que no se presentaran mayores conflictos, pero cuando iniciamos con las preguntas puntuales sobre las asíntotas, los problemas aparecen:

> *“Es una línea recta que indica que no hay imagen en ese punto”*

> *“Punto que no pertenece al dominio de la función. Al reemplazar x por ese punto, la función dará infinito”*

Ese tipo de respuestas podrían aceptarse aunque suenan mucho a memorización de definiciones. Otros alumnos sin embargo, fueron menos académicos pero el discurso suena más a lo que en verdad piensan al respecto:

"Es una línea discontinua que marca el espacio irreal donde no existe ningún punto"

"Una asíntota es un número inexistente dentro de un dominio dado que divide a la gráfica. Ningún número se le va a semejar, se le van a aproximar"

Y es frente a respuestas como estas en donde vemos que en nuestros alumnos hay mezcladas definiciones con ideas que tienen que ver con lo que han construido para poder internalizar esas nociones.

La frase "aproximarse infinitamente" es una noción que habitualmente surge en la clase de matemática asociada a estas cuestiones, en especial con las asíntotas verticales, pensando que en realidad comprenden esa idea que involucra nada menos que a la continuidad del conjunto de los números reales. Esa idea también es contradictoria: en la vida, las cosas no pueden aproximarse infinitamente sin tocarse. Por eso resulta que cuando indagamos en esas cuestiones podemos observar que no lograron incorporar ese elemento presente en el DME. Algunas referencias a esto pueden encontrarse en (Lestón, 2008) y otras, las podemos ver en lo que dicen los alumnos cuando son cuestionados al respecto de manera directa:

"Que siempre se acerca al punto pero nunca logra alcanzarlo"

"Quiere decir que la función tomará un valor con una diferencia cada vez menor a la asíntota pero nunca lo alcanza, aunque parece que sí"

"Que se acerca al número, en decimales, pero nunca llega"

"Que hay muchos valores que se le aproximan con decimales (3,49539 al 4 se aproxima) pero la función nunca llega al resultado entero de ese valor (el 4)"

"Que se va como pegando pero en realidad no se pega porque por eso es asíntota, así que parece que sí se tocan pero si se pudiera ver más de cerca se ve que no, pero parece que sí"

"Es que se siguen pegando porque el límite no existe y los números pueden dividirse infinitamente"

"Los números son interminables y pueden multiplicarse y dividirse eternamente, definiéndolos como números incalculables"

La justificación que logran hacer de este comportamiento de las funciones puede construirse sin la noción de continuidad, basta con la densidad de los números racionales. Y en algunos casos, el ser y el parecer son tratados como elementos de argumentación. La graficación a la que están acostumbradas hace que construyan ese tipo de argumentos: se dibuja sólo de la función una parte, y en esa parte se ven ciertas cosas, pero les pedimos que crean que, de seguirla, seguiría ocurriendo lo mismo, aún cuando parece que no. No hay argumentos matemáticos consistentes, excepto el saber que puedo seguir encontrando números entre dos dados.

A continuación, les preguntamos entre otras cosas cómo leían la expresión $x \to \infty$, frente a lo cual la naturaleza con que aparece el infinito se deja ver:

"x es igual a infinito"

"x tiende a ser infinito"

"x comprende a todos los reales"

"x tiende a ser cualquier número"

"Todos los números existentes"

"Es un símbolo o manera de representar que los valores numéricos de una función no tienen fin, pues continúan"

"Que la línea es ilimitada, sin fin"

"Es el valor numérico que sucede cuando el coeficiente principal de P es mayor que el coeficiente principal de Q"

Puede observarse entonces que ese infinito es de una naturaleza diversa: puede ser un número, puede ser todos los números juntos, puede ser un conjunto como el de los números reales, puede ser una recta que continúa sin límite, puede ser el resultado de una operación entre polinomios. Y algo que pensábamos era comprendido por todos (la variable se incrementa infinitamente) no lo es. Y sin esa idea, difícilmente hayan logrado comprender lo que representa una asíntota horizontal.

Y finalmente, retomamos algunas de las definiciones que nos dieron para infinito de acuerdo a lo que habían estado pensando y discutiendo a lo largo de toda la actividad.

“El infinito indica que una función continúa”

“Es un valor que nunca tiene fin”

“Es un valor que nunca llega a su fin”

“Inalcanzable”

“El infinito son aquellos valores (o números) a los cuales nunca se puede terminar se llegar o cerrar”

“Son aquellos valores, números o dibujos que nunca se pueden cerrar”

Lo que podemos ver de estas respuestas es que el infinito es una calificación de sin fin, ilimitado, inalcanzable; o es un valor o número o dibujo, pero que no “cierra”, que en la cultura de estos alumnos puede entenderse como un “no convence”. El infinito aparece como un punto o número que se va alejando, no es sino que se va haciendo. Llamativo es además que este infinito no contemple al infinitamente próximo: no se acerca mucho sino que se aleja mucho. Lo que queda entonces es una noción muy próxima a la natural, a la intuitiva, a la que construyeron en casa de pequeños: muy grande, tan grande que no se acaba.

Conclusiones

Sostenemos la hipótesis de que nuestros alumnos entran al aula con toda una cultura construida previamente, y que, aunque la escuela la rechace, se hace presente cada vez que piensan, hablan o niegan algo de lo que les presentamos. Y esa cultura que les es propia y que les sirve “en el mundo real” que en ningún caso es el de la escuela, tendrá siempre un peso mayor que el que puede tener lo que construyen en la escuela. Si en nuestras clases renegamos de esas ideas, e intentamos ignorarlas y dejarlas fuera de toda discusión, no haremos más que alejarnos de lo que en realidad nuestros alumnos están pensando.

La forma en que se tratan las funciones, el trabajo con límites, provocarán en los modelos que los alumnos se han formado, inconsistencias en más de una ocasión: los conceptos se confunden, las propiedades y definiciones se aprenden y aplican, pero poco significan. Evidencia de esto es la dificultad general que presentan los alumnos en la primera aproximación que tiene ante el estudio del análisis matemático.

Este trabajo, muestra la existencia de conceptos que, como el infinito, se construyen fuera de la escuela y cuando entran en el aula de matemática, se manifiestan de manera conflictiva, si no se exploran las construcciones previas. El proceso de construcción del infinito en la escuela, se ve influido por ideas intuitivas y extraescolares que reaparecen generando obstáculos epistemológicos que se ponen en evidencia al enfrentar ideas relacionadas al infinito escolar.

> *"El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, especialmente porque fuera de la matemática el infinito no es contradictorio. En los sentimientos, en el tiempo, en el espacio, en la religión, el infinito "cierra": convence, caracteriza de manera tal que todo el mundo sabe de lo que se está hablando. Los conflictos aparecen sólo dentro de la matemática: entonces, ¿por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que "no convence" (el modelo matemático)? La matemática escolar debe tomar parte en la modificación del discurso de manera tal que los alumnos encuentren en el sistema matemático un modelo compatible y sin problemas." (Lestón, 2008, 115)*

El infinito matemático es complejo, contradictorio con el sentido común, desafiante. Los docentes lo sabemos y sabemos también que la discusión de este tipo de problemas lleva más tiempo del que tenemos disponible para lo que los planes de estudio nos dicen es importante. Sin embargo, lo importante se está apoyando en una idea sin sustento teórico, se está construyendo sobre una base de arena que, ante la primera brisa de contradicción, se cae. No sabemos aún si es posible llevar el infinito matemático con todas sus complejidades a la escuela, nos lo seguimos preguntando. Pero sí sabemos que suponer que con lo que saben alcanza no sirve: el infinito que traen y que es de ellos, sirve para muchas cosas, pero no para la matemática. El de ellos, lo han construido en casa, en la plaza o con sus amigos, mirando el cielo y preguntando desde cuándo o hasta dónde. El infinito matemático, en cambio, es nuestro y si queremos que sea también de ellos, deberemos hacer algo al respecto. Al menos establecer que no todo es lo mismo aún cuando se llama igual.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. En Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, (pp. 503-508). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo Crespo, C. (2001). Acerca de la comprensión del concepto de continuidad. En *Boletín de SOAREM* nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (I), (pp. 529-534). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View. *Educational Studies in Mathematics. 4,* 175-197.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN.

Lezama, J. (2005). Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(8), 339-362.

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DE LEIBNIZ A RIEMANN

Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora — México
guty@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Epistemología — Nivel: Superior

Resumen. *En el presente trabajo se plantea una concepción de contexto en el que un elemento fundamental es el constituido por los sistemas de prácticas desarrollados por quienes se enfrentan a situaciones problémicas relacionadas con la matemática. Enmarcado en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática propuesto por Godino, Batanero, Font [2008] y otros, se concibe que el lenguaje desarrollado por los sujetos que hacen matemáticas, sus procedimientos, las propiedades que atribuyen a los objetos, sus formas de organización y los conceptos que reconocen, determinan, en buena medida, la actividad matemática que desarrollan al enfrentar nuevas situaciones problémicas. Tomando como sujeto a la comunidad de expertos, en esta ocasión mostramos elementos en la dirección señalada, para la construcción del objeto matemático "integral de una función", siguiendo la línea de desarrollo iniciada por Leibniz a fines del Siglo XVII.*
Palabras clave: Contexto, objeto matemático, diferencial, integral

Presentación y consideraciones generales

En los últimos años se han incrementado las investigaciones que se realizan en matemática educativa respecto al papel que juega el contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos, con respuestas diferentes dependiendo de la perspectiva teórica que se asuma.

Pero no existe una forma única de concebir al contexto. en algunos casos se hace referencia al ambiente extramatemático en el que se ubica un objeto, en otras se hace referencia a las restricciones matemáticas en el que se está tratando un problema, en otras al tipo de representación que se esté empleando, por señalar algunas de las más empleadas.

La perspectiva que asumimos en Grijalva [2008], es que, adicionalmente a aspectos como los anteriores, el contexto no podemos asumirlo como un ente preconcebido e inalterable, y está determinado primordialmente por las significaciones que los sujetos asignan a los objetos matemáticos, por medio de las cuales le dan sentido a las situaciones matemáticas que enfrentan y, consecuentemente, plantean soluciones acordes con dicha significación. Esto es, un aspecto fundamental del contexto está constituido por los significados personales con la que los sujetos que enfrentan una determinada situación problémica interpretan la situación misma.

Este tipo de observaciones nos ha llevado a desarrollar proyectos de investigación para estudiar las significaciones que los sujetos dan a los objetos matemáticos a partir de los sistemas de prácticas que han venido usando a lo largo de su formación escolar. Asimismo, nos formulamos cuestionamientos similares respecto a la forma en la cual las comunidades de expertos han ido construyendo el conocimiento matemático, centrando nuestra atención precisamente en los sistemas de prácticas desarrollados como parte del contexto en el cual ese conocimiento se construye.

En esta ocasión presentamos algunas ideas generales sobre los sistemas de prácticas desarrollados en la construcción del objeto matemático "integral de una función", en tres épocas o periodos que nos parecen claves en su desarrollo, partiendo de los trabajos de Leibniz, continuando con los de Euler y concluyendo con los de Cauchy- Riemann. La pretensión es mostrar precisamente cómo el contexto, entendido en el sentido que hemos indicado, jugó un papel de primera importancia en la construcción de la noción de integral, conformando diversas versiones, en diferentes momentos de la historia, de lo que podemos caracterizar como objeto institucional "integral de una función".

El estudio lo realizamos utilizando elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, propuesto por Godino, Batanero, Font y otros [2008]. Posados en esta teoría concebimos a un *objeto* como todo aquello de lo cual hablamos o nos referimos, ideal o material y, para caracterizar a los *objetos matemáticos*, nos apoyaremos en las prácticas desarrolladas por un sujeto determinado (persona o institución). Entendemos por *práctica matemática* a toda actividad o expresión empleada por un individuo o una comunidad para resolver una situación problémica, para validar su solución, comunicar sus resultados a otros o generalizarlos a otros problemas y situaciones. Cuando enfrentamos situaciones problémicas recurrimos no sólo a prácticas únicas o aisladas, sino a un conjunto o sistema de prácticas operativas y discursivas y a este *sistema de prácticas* lo concebimos como el significado de un objeto matemático. Si este sistema de prácticas es de un individuo en lo particular, decimos que se trata de un *significado personal*. Cuando un sistema de prácticas es compartido por una comunidad que analiza situaciones problémicas similares, decimos que se trata de un *significado institucional*.

Al resolver situaciones problémicas se ponen en juego sistemas de prácticas y se utilizan objetos como gráficas, desarrollos analíticos o algebraicos, concepciones, definiciones, proposiciones, etc. que hacen surgir nuevos objetos. A los objetos emergentes de un sistema de prácticas matemáticas los denominamos objetos matemáticos y, cuando los sistemas de prácticas son desarrollados por una persona en lo particular decimos que los objetos emergentes son *objetos personales* y si los sistemas de prácticas son compartidos al seno de una comunidad hablamos de *objetos institucionales*.

Los objetos que emergen de los sistemas de prácticas no sólo son conceptos, surgen también otros elementos que nos llevan a considerar seis tipos básicos de objetos matemáticos: *Situaciones problémicas, Lenguaje, Procedimiento, Conceptos, propiedades y Argumentaciones.*

En términos generales las situaciones problémicas determinan el contexto de trabajo y desarrollo de la actividad matemática, pero no es posible restringirlo a este elemento y en el caso de nuestra investigación estamos incluyendo a estos seis elementos como los componentes del contexto que se introducen para darle significado a los objetos matemáticos. La base para ello es que cuando se desarrolla una actividad matemática los sujetos se enfrentan no sólo a las situaciones problémicas sino también a un lenguaje previamente existente, se promueven procedimientos y argumentaciones, se parte de determinadas concepciones y de atribuir previamente propiedades a los objetos, que determinan en algún sentido la asignación de significados para los mismos.

La integral de Leibniz (sumas)

Los primeros trabajos de Leibniz en el camino a la construcción de su teoría del cálculo se refieren a la manipulación de sucesiones finitas, donde, partiendo de una sucesión dada

$$A, B, C, D, E$$

y considerando la sucesión de diferencias

$$L, M, N, D$$

en la cual $L = B - A$, $M = C - B$ y así sucesivamente.

Entonces $L + M + N + D = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) = E - A$

de aquí que la suma de las diferencias consecutivas es igual a la diferencia del primero y último términos de la sucesión original.

Trabajando con las diferencias y sus sumas, obtuvo diversos resultados matemáticos que posteriormente extendió al caso de diferencias y sumas infinitas, como en el caso de lo que denominó “triángulo armónico”, que mostramos a continuación:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Haciendo la suma de las cantidades que aparecen en las líneas oblicuas, las cuales son las diferencias de las líneas previas, Leibniz obtiene, con la consideración de que el último término decrece continuamente o “deviene en cero”.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+etc.=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+etc.=\frac{1}{2}$$

Multiplicando por términos adecuados pudo ahora obtener resultados como los siguientes:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+etc.=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+etc.=\frac{3}{2}$$

Aquí podemos observar cómo las prácticas desarrolladas previamente por Leibniz para diferencias y sumas finitas son extrapoladas al caso de las sumas infinitas. Esto es, enfrentado ahora a una nueva situación problémica, la del caso infinito, Leibniz asumió que se podían aplicar las reglas de operación válidas para el caso finito, estableciendo con ello las propiedades del caso infinito, como es considerar que en el caso infinito se puede multiplicar término a término los elementos de una suma infinita y obtener como resultado la multiplicación de la suma original por el múltiplo considerado.

Una extrapolación aún más "audaz" la tenemos cuando caracterizó a las curvas como "polígonos infinito-angulares", en la que cada lado era la unión de dos puntos consecutivos de la curva. Estos segmentos eran, a su juicio, de "longitud inasignable" y, por analogía con las diferencias finitas, los denominó "diferenciales". Así, tomando una curva de longitud *s*, Leibniz denominó a cada segmento que unía dos puntos consecutivos con la notación *ds* y consideró que la suma de todas ellos daba como resultado *s*, lo cual escribió por medio de $\int ds = s$. Extendiendo este caso a sumas de figuras de "área inasignable" o de cuerpos geométricos de "volumen inasignable", estableció propiedades para las sumas, a partir de los resultados obtenidos en el caso de las sumas numéricas, creando con ello lo que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral. Leibniz concebía en estos casos el tratamiento de las sumas como una extensión al caso geométrico de lo desarrollado anteriormente y, aunque era consciente de la aplicabilidad a la resolución del problema de la búsqueda de un procedimiento general para la cuadratura de las curvas, lo que resaltaba y enfatizaba eran las sumas, como puede verse en el caso del siguiente comunicado a Bernoulli en 1690, el cual reproducimos en una traducción libre de nuestra parte:

"Dejo a tu reflexión si no sería mejor en el futuro, por el bien de la uniformidad y la armonía, no sólo entre nosotros mismos sino para todo el campo de estudio, adoptar la terminología de suma en lugar de tus integrales. Entonces por ejemplo $\int y\,dx$ significaría la suma de todas las *y* multiplicadas por el correspondiente *dx*, o la suma de tales rectángulos. Solicito esto primordialmente porque de esta manera las sumas geométricas o cuadraturas, se corresponden mejor con las sumas o sumas de sucesiones (…) Debo confesar que encontré completamente este método considerando la reciprocidad de sumas y diferencias, y de ahí que mis consideraciones avanzaron de las sucesiones de números a las sucesiones de líneas u ordenadas". [Bos 1974: 21].

Por su parte Bernoulli, quien aceptó la sugerencia de Leibniz, planteó sus propias reflexiones señalando que:

"Además, en lo que toca a la terminología de la suma de diferenciales, gustosamente usaré en el futuro tu terminología de suma en lugar de nuestras integrales. Debía haberlo hecho así ya mucho antes si el término integral no fuera mucho más apropiado para ciertos geómetras, quienes me conocen como el inventor del término. Debía ser pensado por lo tanto que he obscurecido bastante el asunto, si ora indiqué la misma cosa con un término y ora con otro. Confieso que ciertamente la terminología no coincide con la cosa misma (el término mismo me lo sugirió cuando consideré a la parte infinitesimal de un todo o *integral*; no pensé nada más acerca de ello)." [Bos 1974: 21]

Conforme el cálculo se fue desarrollando, el problema de las cuadraturas al que Bernoulli hace referencia implícita para la creación del término "integral" cobró fuerza, por su aplicabilidad, más que el tratamiento de sumas, como procedimiento general al que Leibniz aludía, de tal suerte que hasta la actualidad es el que seguimos usando. Con ello reforzamos nuestra idea de que el mismo lenguaje creado y modificado en matemáticas es consecuencia de las situaciones problémicas al que corresponden y a los procedimientos, propiedades, argumentos y concepciones de quienes los proponen.

La integral de Euler

Por la forma en que Leibniz desarrollo el cálculo diferencial e integral, las sumas y las diferencias eran vistas como simples operaciones inversas, lo cual estableció mediante lo que llamó "Principio Fundamental del Cálculo":

"Diferencias y sumas son las inversas una de otra, es decir, la suma de las diferencias de una serie es un término de la serie, y la diferencia de las sumas de una serie es un término de la serie" [Leibniz 1680: 142], lo cual escribió como $\int dx = x$ y $d\int x = x$.

Posteriormente Euler se propuso aplicar los elementos del cálculo a problemas físicos de movimiento, de hidráulica y otros, pero se enfrentaba al problema de extender dichos elementos a casos no geométricos, en el cual las entidades ya no eran "segmentos" sino variables físicas. Para lograrlo, Euler basó el desarrollo del cálculo sobre la noción de función en el cual las variables tenían un carácter generalizado, planteándose entonces el problema de establecer lo que ahora se entendería por "diferencial", esto es, por una cantidad "infinitamente pequeña". Después de una serie de consideraciones filosóficas, Euler concluye que las cantidades diferenciales o cantidades infinitamente pequeñas realmente son cero y, por lo tanto, susceptibles de tratarse como tales sin dar lugar a controversias. El siguiente pasaje es bastante ilustrativo de sus conclusiones:

"Dado que vamos a mostrar que una cantidad infinitamente pequeña es realmente cero, primero debemos conocer la objeción de por qué no siempre usamos el símbolo *0* para las cantidades infinitamente pequeñas, en lugar de algunos especiales. Puesto que todas las nadas son iguales, parece superfluo tener diferentes signos para designar una cantidad tal. Aunque dos ceros son iguales uno al otro, por lo que no hay diferencia entre ellos, sin embargo, tenemos dos maneras de compararlos, aritmética o geométrica, observemos los cocientes de las cantidades a ser comparadas con el fin de ver la diferencia. La razón aritmética entre dos ceros es una igualdad. Éste no es el caso con una razón geométrica. Esto podemos verlo fácilmente de la proporción geométrica $2:1=0:0$, en la cual el cuarto término es igual a *0*, como lo es el tercero. De la naturaleza de la proporción, dado que el primer término es el doble del segundo, es necesario que el tercero sea el doble del cuarto". [Euler 1755: 51].

Una vez establecida una forma de definir y concebir a las cantidades diferenciales para el caso de las variables generalizadas, la integral pudo ser tratada idénticamente a como se hacía en el caso de Leibniz y sus continuadores más inmediatos, asumiendo que la integral era la operación inversa de la diferenciación y aplicando el Principio Fundamental del Cálculo de Leibniz.. Así, al inicio del primero de sus libros sobre el cálculo integral dice [Euler 1768: 1]:

"Definición 1.

1. El Cálculo integral es el método para, a partir de una relación diferencial dada, encontrar la relación entre las mismas cantidades; y la operación que conduce a esto suele llamarse integración. [Euler 1768: 1].

A continuación, por medio de tres corolarios y dos escolios, extiende sus ideas respecto a la integral.

Corolario 1.

"2. Así pues, como el cálculo diferencial enseña a encontrar una relación diferencial a partir de una relación dada de cierta cantidad variable, el cálculo integral se dedica a investigar el método inverso.

Corolario 2.

3. Resulta claro que del mismo modo que en el Análisis perpetuo las operaciones binarias se oponen entre sí, como la sustracción a la adición, la división a la multiplicación, la extracción de raíces a la potenciación, así también, por razones semejantes, el cálculo integral es lo opuesto del cálculo diferencial".

Consecuente con su concepción del cálculo para las variables generalizadas, de las que ahora el cálculo geométrico de Leibniz sólo era un caso particular más, importante pero uno más, en su libro de cálculo integral no incluye una sola gráfica y está destinado, primordialmente, a determinar la función integral para una gran cantidad de funciones o, como él decía, "fórmulas diferenciales".

La integral de Cauchy-Riemann

Ante las inconsistencias de fundamentación sobre la naturaleza de las cantidades diferenciales, los matemáticos estaban en búsqueda de nuevas formas de organizar el cálculo, con la conciencia de que su uso mostraba una potencia considerable para el estudio de muchos problemas tanto físicos como matemáticos, lo cual debía rescatarse.

Esta búsqueda cristalizó con la obra de Cauchy, en la cual el cálculo se organizó con base en las nociones de convergencia y continuidad, sustituyendo a las cantidades diferenciales por la derivada de una función y, retomando el establecimiento de la integral con el tratamiento de las sumas, se estableció su relación con la derivada, con la cual no existía una conexión inmediata.

Con la reorganización del cálculo el Principio Fundamental del Cálculo dejó de ser evidente y la relación entre derivada e integral se estableció por caminos más intrincados, hasta concluir con lo que ahora conocemos como teorema Fundamental del Cálculo.

La situación-problema fundamental que abordaron tanto Cauchy como Riemann, (quien refinó y extendió algunos de los resultados del primero), fue la fundamentación del cálculo sobre bases distintas a las de Leibniz y Euler, y en sus trabajos podemos percibir, una vez más, la creación de un lenguaje diferente, procedimientos diferentes, argumentos y concepciones diferentes a los de sus antecesores.

Conclusiones

Con nuestro estudio histórico-epistemológico mostramos cómo, en dependencia de los significados preliminares puestos en juego y las nuevas situaciones problémicas que se les presentaron, Leibniz, Euler, Cauchy, Riemann y otros, interpretaron de diferente manera a objetos matemáticos que en apariencia eran los mismos, imprimiendo diferentes significados para las nociones fundamentales del cálculo y el análisis, desarrollando nuevas situaciones problémicas, nuevos lenguajes, procedimientos, atribuyendo diferentes propiedades a los objetos, nuevos conceptos y nuevas formas de argumentar.

Referencias bibliográficas

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90.

Grijalva M., Agustín (2008). El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos, El Caso de la Integral de una Función. Tesis doctoral. CICATA, Unidad Legaria.

Euler, L. (1755). *Instititutiones Calculi Differentialis*. Traducido al inglés (2000) como Foundations of differential calculus. Rochester NY, USA: Springer-Verlag.

Euler, L. (1768). *Instititutionum Calculi Integralis. Volumen primum*. Tercera edición (1824). San Petersburgo, Rusia: *Impensis Academiae Imperialis Scientiarum*.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

Leibniz, G. W. (1680). *The elements of the new calculus for differences and sums, tangents and quadratures, maxima and minima, dimensions of lines, surfaces, and solids, and for other things that transcend other means of calculation*. The Royal Library of Hanover (1846). En The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz (1920). Chicago, USA, London, England: The Open Court Publishing Company.

UN ESTUDIO DE LO INVERSAMENTE PROPORCIONAL, EL PAPEL DEL CONTEXTO

Natividad Olea Salgado, Juan Alberto Sánchez Montalvo, Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero México
natty.olea@gmail.com, alberto.sm85@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Medio

Resumen. *El presente trabajo se realiza bajo la visión Socioepistemología la cual adopta a las prácticas sociales como el motor que permite la construcción del conocimiento. Desde esta perspectiva nuestro trabajo toma las prácticas de modelación matemática como el eje que guía nuestro diseño; donde el objetivo es la construcción de lo Inversamente Proporcional (IP) por medio de la interacción de los modelos analítico, numérico y el planteamiento de la situación. El papel que le otorgamos al contexto es primordial para poder dotar de significado lo IP. Presentamos el desarrollo y los resultados obtenidos del diseño de aprendizaje elaborado con base en la Ingeniería didáctica de Artigue (1998). El reporte es parte de una investigación en curso.*
Palabras clave: Contexto, modelación, Socioepistemología, Ingeniería didáctica, Formas de predecir

Introducción

Uno de los grandes cambios que presenta el conocimiento en la escuela es la descontextualización que sufre al ser enseñado; en la vinculación que debe existir entre el conocimiento escolar y su entorno social encontramos que el contexto juega un papel importante en tal unión, todo conocimiento se construye en estrecha interrelación con los contextos en que se usa (Arrieta, 2003). Aquí radica la importancia de crear situaciones adecuadas en contextos propicios para la construcción de significados de los objetos matemáticos donde se determinara la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad.

Ledesma (2004) señala que en el tratamiento curricular se deja ver una perspectiva estático – algebraica que pretende dotar de sentido a la proporcionalidad inversa. Este marco epistémico raya una cancha muy difícil de remontar para una actividad de educación matemática de la Proporcionalidad Inversa que aporte significatividad a los estudiantes. En esta dirección guiamos nuestra investigación, proporcionando un diseño de aprendizaje que dote de significatividad a lo IP por medio de las practicas de modelación.

Desde nuestra perspectiva las “Prácticas sociales” connota hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos, (Arrieta, 2003). Desde esta visión tomamos las prácticas de modelación matemática como base para la construcción del conocimiento matemático.

En la presente investigación se analizan las herramientas, los consensos y los argumentos que surgen por parte de los alumnos a la hora de abordar un diseño de aprendizaje basado en la modelación Inversamente Proporcional (IP) en los contextos que hemos adecuado, es decir estudiamos el proceso de construcción de lo IP.

El estudio de lo IP es caracterizado como una red de modelos y prácticas articuladas entorno a un fenómeno como lo presenta Castro (2007). Tomando estas bases procedimos a elaborar un diseño de aprendizaje basado en la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998). Presentamos a continuación las fases del diseño de aprendizaje de lo Inversamente proporcional.

Análisis preliminar:

Estudio cognitivo sobre las dificultades y obstáculos que presentan los profesores al enfrentarse a situaciones IP

- Centración en lo lineal (utilización de la regla de tres directa)
- La ausencia de significados
- No se refieren al contexto para verificar las respuestas
- Carencia del algoritmo de la regla de tres inversa (RTI)

Analizamos el estado de lo IP en el nivel secundaria y preparatoria.

Nivel secundaria:

- Se estudia en los primeros años la división por cero, el inverso multiplicativo y localización de puntos en el plano, estos conceptos son empleados en el tratamiento de las relaciones inversas.
- El estudio de lo IP se centra en el estudio de la función $\frac{a}{x}$, analizando sus características tales como la localización de puntos en el plano, dominio y contradominio de la función.

Para el caso particular de la función $\frac{1}{x}$, se apunta que a cada número de la primera columna se le asocia su inverso. Para el caso general $\frac{a}{x}$ el producto de las columnas debe ser una constante.

Nivel Medio Superior (Preparatoria)

- Se estudia la localización de puntos en el plano de la función $\frac{1}{x}$, simbolizando su dominio de la siguiente manera: $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $I=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
- Dentro de la actividad se señala que la división por cero conduce a una indeterminación, por eso no se le asigna ese valores a x.

Concepción y Análisis a priori:

Dentro de este análisis elegimos las variables que controlaran nuestro diseño.

Variables:

- Valor inicial de los datos
- El contexto en que se ubican las actividades
- El modelo algebraico $\frac{a}{x}$
- Los valores que toma los datos independientes
- La regla de tres inversa

Los objetivos del diseño

- Construir la forma de predecir fundamental
- Construir el modelo algebraico $\frac{a}{x}$
- Otorgarle un significado a las relaciones establecidas

Diseño de aprendizaje: “Contando los pasos”

Fase 1

Construyendo una forma de predecir para situaciones IP

Objetivo:

Construir la forma de predecir fundamental.

Discusión 1:

Carlos, en cada zancada avanza 0.70 metros, da 80 pasos para ir de la tienda al cine

¿Cuantos pasos dará Luís si su zancada es de 1.40 metros?

Predicción:

Calcularan la distancia recorrida multiplicando 0.70 por 80. Ya teniendo la distancia recorrida la dividirán entre la zancada de Luís o sea entre 1.40 dando como respuesta 40.

Otra forma de predecir es decir el tamaño de la zancada de Luís es el doble que la de Carlos entonces tendrá que dar la mitad de pasos.

Tal vez utilicen regla de tres directa.

Discusión 2:

¿Cuantos pasos dará Pedro si su zancada es de 1.21 metros?

Predicción:

Toman a distancia recorrida y la dividen entre el tamaño de la zancada resultando los pasos que tendrá que dar Pedro**.**

Diseño de aprendizaje: "Los pintores"

Fase I

Construyendo una forma de predecir para situaciones IP

Objetivo:

Construir la forma de predecir elemental

Discusión 1:

Diez pintores pintan una barda en 30 días ¿En cuanto tiempo lo harán 20 pintores?

Predicción:

a) Ellos dirán que lo harán en 60 días (centración en la proporción directa, no se refieren al contexto para verificar su respuesta) el conductor hace una pregunta para que reflexiones sobre esta respuesta.

b) Otros dirán bueno es el doble de trabajadores entonces es la mitad de tiempo (esta es una forma de predecir elemental en situación de razón inversa)

Discusión 2:

¿En cuanto tiempo lo harán 30 pintores?

Predicción:

Si hay el triple de trabajadores el tiempo debe ser una tercera parte o sea 10 días

Discusión 3:

¿En cuanto tiempo lo harán 5 pintores?

Predicción:

Si hay la mitad de trabajadores el tiempo debe ser el doble de días o sea 60 días

Fase II

Destrucción /construcción de otra forma de predecir: la cantidad constante

Objetivo:

Destruir la forma de predecir elemental y construir la fundamental

Discusión 4:

¿En cuanto tiempo lo harán 17 pintores?

Utilizan regla de tres. 10 es treinta como 17 es a x y, resulta alrededor de 36, imposible.

Otra forma, multiplico 10 por 17/10 y a 30 lo divido por 10/17

Otra forma es utilizar la tabla y colocar en la columna C la multiplicación de las columnas A y B

Numero de trabajadores	Días	AB
10	30	300

20	15	300
30	10	300
5	60	300
17	?	300

Y después concluir que en el lugar de la incógnita debe de ir 300/17

Discusión 5:

¿En cuanto tiempo lo harán 33 pintores?

Predicción:

Utilizarán el método anterior más rápido y de forma mas efectiva, o sea dirán 33 por los días me dará 300 entonces los días utilizados da 300/33

Etapa III

La generalización y la construcción del modelo algebraico

Objetivo:

Construir el modelo algebraico

Discusión 3:

Si colocamos n trabajadores ¿Qué tiempo tardarían?

Predicción:

Los alumnos darán un procedimiento de cómo encontrar los días. Insistiendo llegarán a establecer el modelo algebraico $t = 300/n$

Numero de trabajadores	Días	AB
10	30	300
20	15	300
30	10	300
5	60	300
17	300/17	300
33	300/33	300
n	¿	300

Experimentación

La situación de aprendizaje fue implementada en alumnos de bachillerato de primer grado, se formaron tres equipos, dos de cuatro estudiantes y uno de tres, en total 11 alumnos. El diseño fue puesto en escena en dos sesiones de 50 minutos cada una.

Para recoger las evidencias se grabaron los desempeños de cada equipo.

Análisis a posteriori y validación

En el análisis a posteriori de la primera actividad "Contando los pasos" reportamos que se presento una gran variedad de procedimientos, a saber:

- Los estudiantes predicen utilizando la "Forma elemental"
- Se presenta la "Centración en lo lineal" aplicando la regla de tres directa
- Uno de los equipos construye la forma fundamental de predecir. El contexto en el que se ubicaba la actividad permitió argumentar en términos físicos la noción implicada, a saber la distancia. Posterior a esta actividad todos los equipos emplearon esta forma de predecir.
- Un obstáculo que se presenta es la falta de significado para los decimales.

Los pintores

- En esta actividad los alumnos recurren a la regla de tres inversa. Algunos todavía emplean la forma de predecir elemental.
- En las tres primeras actividades del diseño les causo ruido las distintas variaciones del tiempo en función del número de empleados.
- El método que logran generalizar los alumnos es multiplicar las columnas de la tabla de datos, en este caso el producto es 300, y dividir por el número de pintores para obtener el tiempo que tardaran en pintar la barda. Sin embargo a pesar de que todas los procedimientos son correctas no lograban atribuirle un significado al producto del tiempo por el número de pintores, el significado se logra después de una discusión grupal.
- Dentro de las conclusiones se llega a establecer el modelo general.

Conclusión

El contexto en el que fueron adecuadas las actividades permitió el desarrollo de argumentos, herramientas y el tránsito de los alumnos por dos momentos, de la forma de predecir elemental a la fundamental, en este proceso se logro dotar de significado a lo IP.

Uno de los obstáculos que se presentan en el tratamiento de lo IP es la centración en lo lineal, el cual encierra a los estudiantes a un pensamiento lineal, es decir tratan de resolver los diversos problemas que se les presentan recurriendo a herramientas que son propias de lo lineal y olvidan o dan poca importancia a otros formas de proceder.

El trabajo es una investigación en curso que tiene objetivo construir una socioepistemología de lo IP, analizando a lo IP desde las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social, e intenta responder a la problemática planteada por los diversos fenómenos escolares que ocurren en su tratamiento.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aul*a. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.

Castro, G. (2007). *La analogía en la construcción del conocimiento, construyendo lo inversamente proporcional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas UAG.

Ledesma F. (2004). Significatividad para la proporcionalidad inversa en estudiantes del décimo año de escolaridad. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, (pp. 334-340). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

EL AULA DE MATEMÁTICA, HOY: UNA MIRADA DESDE LA DOCENCIA Y A INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada México
CICATA–IPN
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El aula de matemática, y la escuela en general, ha adquirido en los últimos tiempos, características que son producto de los constantes cambios ocurridos en la sociedad. La construcción del conocimiento ya no se restringe a la escuela: se halla presente en la actualidad en todos los escenarios académicos y no académicos en los que actuamos. La socioepistemología debe poner su atención no sólo en los escenarios escolares en los que se construye el conocimiento matemático, sino también en escenarios no académicos en los que actúan nuestros estudiantes. Han surgido investigaciones recientes que buscan reconocer, estudiar y analizar las construcciones de conceptos que fueron hechas fuera de la escuela y que entran al aula de matemática y muestran un camino para intentar comprender su naturaleza y la importancia de tenerlas en cuenta en el discurso matemático escolar.*
Palabras clave: socioepistemología escenarios socioculturales, escenarios académicos, escenarios no académicos

Introducción. El aula de matemática, hoy

El aula actual tiene características totalmente distintas de las que tenía hace unos años, que incluso eran impensables en la época en que nosotros fuimos alumnos en la escuela. Los docentes de matemática muchas veces nos planteamos cómo afrontar sus características, cómo revertir algunas de ellas, cómo interesar a nuestros estudiantes, cómo motivarlos, cómo hacer que muestren entusiasmo y se interesen por lo que les presentamos en clase... Estos interrogantes e inquietudes se han puesto de manifiesto a través del surgimiento de grupos de investigadores que intentan en los últimos tiempos dar respuestas a los mismos, creando distintos marcos teóricos para interpretar la realidad del aula de matemática en reuniones y publicaciones en las que compartimos opiniones, realidades y propuestas. Las características de la matemática educativa como ciencia social que intenta dar respuesta a problemas que se plantean en el aula de la matemática, mientras que su reciente reconocimiento como disciplina científica dificultan una formulación clara y universal de los rasgos que caracterizan a sus investigaciones.

Jesús Barbero realizó una clara descripción de las características de la escuela actual en comparación con la escuela de hace un tiempo (Barbero, 2008). La escuela de hace unos años se caracterizaba por tener tareas que son disciplinadas y racionales, que permitían distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del que obedece. El fondo de la crisis que padece el sistema escolar en nuestros países se halla en un cambio que parece que no ha sido percibido: la educación ya no es pensable desde un modelo escolar basado tanto espacial como temporalmente en procesos de formación correspondientes a una era informacional en la que la edad para aprender es todas, el lugar para estudiar puede ser cualquiera. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2008, p.65) cuya dimensión educativa atraviesa todo: el trabajo y el ocio, la oficina, la empresa, la escuela, la universidad y el hogar. En la actualidad, los requisitos y las modalidades curriculares se están constituyendo en experimento para el diseño de nuevas formas de aprendizaje.

> *"El simulacro sobre el que, con tanta lucidez como ironía, escribiera Pierre Bourdieu y J.C. Passeron (1970) –el de una escuela donde los maestros hacen como que enseñan a alumnos que hacen como que aprenden y donde todo funciona- ha comenzado a estallar estruendosamente. Y no por causa de los maestros o de los alumnos sino de un modelo de comunicación escolar que nada tiene que ver con las dinámicas comunicativas de la sociedad, es decir por causa de una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar fuera ella su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas, sea éstas orales, gestuales, sonoras, visuales, musicales, narrativas o escriturales" (Barbero, 2008, p.68).*

La escuela y la familia aunque siguen manteniendo una posición preponderante y respetada dentro de la sociedad, han visto erosionada su capacidad educadora y su autoridad no sólo por su incapacidad de hacerse cargo de las nuevas tareas que la sociedad les está reclamando por la "des-ubicación" por la crisis que atraviesan las instituciones de la modernidad en estos tiempos. Se trata, entonces de una crisis que se genera como consecuencia de intentar sostener las instituciones de la modernidad en tiempos de la posmodernidad. Se habla actualmente de que la educación debe estar regida por la transmisión de la herencia cultural, la capacitación y la formación de ciudadanos, refiriéndonos a que los estudiantes deben ser los depositarios de los conocimientos de nuestra cultura, de que deben adquirir destrezas y capacidades para afrontar el campo laboral y educativo y que sean personas capaces de pensar y participar activamente en la construcción de la sociedad.

Cabe preguntarnos qué ocurre en la ciencia en la posmodernidad, de qué manera esto puede influir en nuestras aulas y en la enseñanza y el aprendizaje de una ciencia como la matemática (Crespo Crespo, 2008). La visión de la matemática como resultado de construcciones socioculturales, hace que no podamos apartarnos de lo que ocurre en los escenarios en los que actuamos.

La escuela actual... El adentro y el afuera del aula

Las funciones de la escuela no han sido las mismas a lo largo de toda la historia, se han ido modificando de acuerdo con los requerimientos de la sociedad. A la escuela actual se le reconocen básicamente tres funciones: la transmisión de la herencia cultural, la capacitación y la formación de ciudadanos capaces de pensar y participar activamente en la sociedad. Las sucesivas generaciones, han ido acumulando un patrimonio cultural durante siglos y se constituye en herencia a ser transmitida a las generaciones siguientes. Esta herencia, en su transmisión se va enriqueciendo a través de nuevos aportes que se construyen e institucionalizan en la sociedad. También es preocupación para la sociedad lograr capacitar a los jóvenes por medio de la adquisición de habilidades y competencias, además de la transmisión de conocimientos que permitan y faciliten la inserción laboral o el acceso a estudios superiores. En relación a la formación del ciudadano, se busca lograr la formación integral de personas que participen activamente en la vida social y manifiesten capacidades de pensamiento y acción acordes a los ideales de la sociedad.

En muchas oportunidades, es posible observar en las instituciones educativas la priorización de alguna de estas funciones por encima de las otras. Esta priorización se realiza en ocasiones como resultado de presiones, más que por convicción de sus actores. Por ejemplo, algunas escuelas priorizan la adquisición de competencias orientadas al ingreso en universidades. De esta manera, pueden mostrar a los padres de los estudiantes, resultados inmediatos muchas veces basados en la resolución de determinados tipos de problemas y ejercicios que son acordes al estilo que exigen en su ingreso algunas universidades. En otras escuelas, se enfoca la enseñanza priorizando la transmisión de la herencia cultural, lo que puede dar origen a lo que algunos pueden denominar enseñanzas enciclopedistas, amplias, pero que necesitará más tiempo para manifestar competencias inmediatas orientadas a lo laboral o a resultados en exámenes de ingreso, muchas veces orientados a resoluciones algebraicas y mecánicas.

Es importante que las instituciones educativas tengan en cuenta el cumplimiento de las tres funciones mencionadas de una manera equilibrada y armónica y que sus integrantes colaboren en el logro de ese equilibrio de acuerdo con los intereses presentes en el escenario sociocultural correspondiente.

La matemática educativa es conciente cada vez más de la necesidad de modificar, reorganizar y fortalecer el discurso matemático escolar. Este fortalecimiento y reorganización no se reduce a la ampliación de los conceptos basada en resultados de carácter didáctico y epistemológico. Se orienta además a revisar la ciencia para definir su origen, determinar sus criterios de validez, revisar su consistencia lógica y predecir sucesos, entre otras acciones (Castañeda, 2006).

Algunas investigaciones que miran qué pasa fuera del aula

En los últimos tiempos, es posible encontrar algunas investigaciones desarrolladas independientemente que bajo el marco teórico de la socioepistemología han comenzado a reconocer y mirar construcciones que los estudiantes no realizan en el aula, sino en escenarios socioculturales no escolares, y que penetran en el escenario del aula (Carrasco, 2005; Lestón, 2008; Crespo Crespo, 2007a). Estas construcciones, al llegar al aula, entran en conflicto con las significaciones compartidas por la comunidad matemática y en general son ignoradas por los docentes y por lo tanto no son tenidas en cuenta en el discurso matemático escolar.

Algunos de los resultados a los que llegan estas investigaciones, al respecto, son las siguientes:

a. El tiempo en escenarios no escolares (Carrasco, 2005)

Esta investigación indaga los obstáculos que presentan los estudiantes para trabajar con gráficas de distancia-tiempo. Reconoce la concepción previa del tiempo (variable involucrada) como un obstáculo en su aprendizaje matemático y se focaliza en las significaciones y representaciones de los estudiantes, compartidas o no con la comunidad matemática.

Al analizar las representaciones escolares de un movimiento en función del tiempo, es posible caracterizar el tiempo no escolar. Es construido socialmente como una polisemia de significados, que el estudiante pone en acción en la actividad tanto fuera como dentro del aula, es negociable, discreto, finito. Por el contrario, el tiempo en matemática, es concebido como una distancia, teniendo las características de ser continuo, uniforme y eterno. Quiénes ya conocen el tiempo matemático, incluso en algunas oportunidades, siguen utilizando las características del tiempo no escolar frente al planteo de situaciones problemáticas (Díaz, 2007), o sea que aún tras construir el tiempo matemático, sobrevive fuera de escenarios escolares la construcción previa.

En resumen, en estas investigaciones, se observa que el tiempo construido fuera de la escuela tiene características distintas que el tiempo matemático. Esta construcción no tiene contradicciones fuera de la escuela, pero actúa como obstáculo en la construcción del tiempo matemático.

b. El infinito en escenarios no escolares (Lestón, 2008)

En esta investigación, se indagan los obstáculos que presentan los estudiantes al enfrentar el infinito escolar y focalizándose en las significaciones y representaciones de los estudiantes, compartidas o no con la comunidad matemática, reconociendo la concepción previa del infinito como un obstáculo en su aprendizaje matemático.

El infinito no académico, construido por los estudiantes fuera de escenarios escolares, es asimilado a lo que no termina y lo que no se puede contar. Se relaciona con los sentimientos y con las creencias. En la literatura, se pone de manifiesto la existencia de un infinito relacionada con el infinito potencial generalmente, que es cuestionado por los estudiantes, es visto como un "engaño", como una fantasía, pero que ellos no reconocen como un objeto bien construido, científicamente.

El infinito escolar, según esta investigación, es reconocido como algo contradictorio, que se diferencia de cómo es definido teóricamente a cómo es visto en sus aplicaciones prácticas. Los estudiantes lo aceptan, lo comprenden, pero lo ven como un "artilugio", no tiene la fuerza suficiente para hacer tambalear lo que creen, lo que se construyó a lo largo de toda la vida.

c. Las argumentaciones en escenarios no escolares (Crespo Crespo, 2007a)

En esta investigación, se indagan los obstáculos que presentan los estudiantes para argumentar. Se reconoce la presencia de formas de argumentar construidas previamente a la deductiva, identificándolas como obstáculo en la argumentación matemática. También se focaliza en las argumentaciones de los estudiantes y profesionales, compartidas o no con la comunidad matemática.

Mediante el análisis de argumentaciones construidas en escenarios sin influencia aristotélica, se detecta la relación del pensamiento lógico de esas culturas (Egipto, India, China, América precolombina) y la construcción de conceptos matemáticos que en occidente tuvieron una construcción muy costosa, como el cero y el infinito (Crespo Crespo et al., 2008).

Asimismo, se identifican formas de argumentar no aristotélicas en el aula de matemática (argumentaciones abductivas, inductivas, no monotónicas, gestuales, visuales, a conocimiento cero). En algunos casos, incluso, los estudiantes manifiestan cierta resistencia a la utilización de argumentaciones deductivas (Crespo Crespo, 2007b)

Al estudiar las argumentaciones que están presentes en escenarios no escolares, se ponen de manifiesto construcciones de naturaleza totalmente distinta de la argumentación matemática, inmersas en prácticas sociales diferentes de la demostración y que adquieren su fuerza no a través de inferencias deductivas, sino de otros factores de carácter social.

En resumen, esta investigación muestra una diferenciación entre la argumentación científica y la argumentación construida en escenarios no académicos. Mientras en la ciencia, se ve subyacente la bivalencia y el tercero excluido, en los escenarios no académicos, la defensa de una postura no es unida fuertemente al tercero excluido. Las argumentaciones que se realizan en escenarios no matemáticos no se sustentan en principios aristotélicos, no son estos principios los que les dan fuerza, el estudio formal de la lógica no es reconocido como base en escenarios no académicos ni correspondientes a disciplinas no matemáticas. Las argumentaciones son reconocidas por ellos como construcciones culturales, con sentido en lo social, en la comunicación.

Comentarios y reflexiones

A partir de lo presentado anteriormente, se ve claramente la necesidad de identificar las características del aula actual y reconocer a la matemática como construcción sociocultural. Asimismo es cada vez más indispensable la comprensión de la necesidad de la formación integral de los docentes e investigadores de los distintos niveles, dispuestos a profundizar, observar, comprender y la apertura reconocer y aprovechar la coexistencia de ideas que vienen de fuera de la escuela. Las tres investigaciones fueron realizadas de manera independiente y casi simultánea, sin embargo puede verse en ellas una preocupación que lleva a los investigadores a empezar a buscar fuera de la escuela el origen de algunos problemas que se manifiestan en el aula.

La matemática educativa es conciente cada vez más de la necesidad de modificar, reorganizar y fortalecer el discurso matemático escolar. La socioepistemología debe empezar a mirar fuera del aula, fuera de escenarios académicos. Este fortalecimiento y reorganización no se reduce a la ampliación de los conceptos basada en resultados de carácter didáctico y epistemológico, sino que se orienta a la comprensión del estudiante como actor de escenarios distintos.

La escuela actual intenta ignorar el modelo de comunicación escolar actual es distinto de las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, no reconociendo que el escenario en el que los estudiantes se desenvuelven es distinto del escolar… Ellos actúan simultáneamente en escenarios académicos y no académicos. Los estudiantes no pueden separar ambos escenarios, para ellos su vida se desarrolla entre ambos, en ambos aprenden, en ambos transfieren conocimiento. Nuestra sociedad ya no construye conocimiento sólo en las instituciones educativas y lo transfiere fuera de ellas. Sin embargo la no comprensión de ese “ida y vuelta” del conocimiento entre escenarios académicos y no académicos hace que la escuela siga con un discurso unidireccional y no comprenda el origen de algunas dificultades que aparecen en el aula.

Si se intenta resumir las ideas presentadas en relación a estas construcciones que se realizan fuera de escenarios escolares y que penetran en el aula de matemática a pesar de que los docentes las reconozcan o no, acepten su aparición o no, es posible reflexionar sobre el siguiente pensamiento:

> *"De este modo cuando un yo cognitivo habla en expresiones cotidianas, también habla un yo colectivo y anónimo, expresando el saber y el sentir de un estrato social y cultural, enunciando un imaginario cultural particular, imaginario que no siempre es coherente con el saber matemático escolar" (Carrasco, 2008).*

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 6 (1), 27-40.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo.* Tesis de Maestría no publicada. Cicata-IPN.

Carrasco, E. (2008, 29 de mayo). *Chat para discutir avances 2.* Seminario de Investigación en Matemática Educativa I. Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa. CICATA-IPN, México.

Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra De L´Hospital y María G Agnesi. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 9 (2), 253-265.

Crespo Crespo, C. (2007a). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN.

Crespo Crespo, C. (2007b). Los estudiantes ante formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias.* 2 (1). 84-100.

Crespo Crespo, C. (en prensa). *Reflexiones acerca de la ciencia y la enseñanza de la matemática en las postrimerías de la modernidad.* Aprobado para su publicación en Revista Academia (Revista de la Universidad Mariano Gálvez, Guatemala).

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* Clame, México. (aprobado para su publicación)

Díaz, L. (2007). Coherencias cognitivas vs. matemáticas en el estudio del cambio. En C. Crespo Crespo (Ed.), (394-399) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20

Lestón, P. (2008). *Ideas Previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de Maestría no publicada. Cicata-IPN.

REPRESENTACIONES SOCIALES ACERCA DEL CONCEPTO MATEMÁTICA

Gerardo Neri Clavel Sandoval, Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero México
badboy_gnc@hotmail.com
Campo de investigación: Estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *La presente investigación centra la atención en el contexto de la Teoría de Representaciones Sociales propuesta por Moscovici en 1961. Apoyándonos en esta teoría, realizamos un estudio y análisis de las Representaciones Sociales acerca del concepto "Matemática", trabajo que tiene por objetivo identificar, analizar e interpretar algunos de los elementos que forman parte del sistema central, mediante un cuestionario aplicado a 29 estudiantes de preparatoria que forman parte del Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal.*
Palabras Clave: Representaciones Sociales, Matemática, Sistema Central

Introducción

Los seres humanos construyen conceptos sobre el entorno que los rodea, sobre sí mismos, sobre la sociedad y sobre la naturaleza en la cual se constituyen como personas. En este sentido, podríamos decir que la construcción del conocimiento es, por antonomasia, un hecho eminentemente social; siendo las Representaciones Sociales una fuerte herramienta para entender este proceso.

La teoría de las representaciones sociales se ha ganado un lugar importante en las ciencias sociales en la medida en que permite introducir el lenguaje y la cognición como dimensiones básicas de la cultura y la vida cotidiana. Esta teoría constituye un espacio de investigación, donde el campo de la comunicación y el de la vida cotidiana se unen. Permite analizar cómo determinado grupo social "ve", "interpreta", "da sentido", a una zona de sus vivencias individuales y colectivas. Las representaciones sociales son entendidas como modalidades del pensamiento de sentido común que se generan, permanecen y transforman mediante procesos comunicativos cotidianos y mediáticos.

El presente trabajo forma parte de una investigación en proceso, sin embargo contamos con un primer análisis de los resultados obtenidos de una fase exploratoria como primera etapa de la misma. La segunda etapa consiste en el diseño de un reactivo tomando como base los resultados mencionados con el fin de lograr cierto acercamiento al núcleo central de las Representaciones

Sociales alrededor de la Matemática, ya que según Jean Claude Abric (1976) el sistema central tiene una marcada relevancia pues estructura los contenidos que están fuertemente anclados sobre la memoria colectiva del grupo que lo elabora, dotando a la representación de estabilidad y permanencia, por lo cual constituye la parte más coherente y rígida. Sin embargo, los resultados que se mostrarán en el presente trabajo son los de la primera etapa de la investigación.

Acerca del Concepto de Representación Social

Dentro de la psicología social contemporánea ha tomado auge en los últimos años una teoría que aparece como un intento de superación a los modelos conductistas y al enfoque positivista de la ciencia psicológica. Aunque ha sido sometida a grandes críticas, la Teoría de las representaciones sociales ha ganado seguidores que dedican su valioso tiempo a la investigación no sólo en el campo de la Psicología, (desde Moscovici, 1976), sino también, hay trabajos en sociología (por ejemplo Dollo, 2001) y algunos dentro de la Matemática Educativa como la investigación hecha por Puglisi (2007). Creemos entonces importante reflexionar sobre el concepto de "Representación Social" ya que es un término que encontramos actualmente en diversas investigaciones.

Hasta el momento ni en la primera obra de Moscovici se evidencia una definición acabada sobre este fenómeno. Al respecto el propio Moscovici expresó: *"... si bien es fácil captar la realidad de las representaciones sociales, no es nada fácil captar el concepto..."* (Moscovici, 1976, referido por Perera, 1999, p. 7).

La Representación social es: un conocimiento de sentido común, socialmente elaborado y compartido, que se construye para la comprensión de la realidad y que tiene un carácter práctico en la vida cotidiana, dando posibilidades de comprender al otro, saber cómo conducirnos ante él y asignarle un lugar en la sociedad, permitiendo entender el pasado, el presente y el futuro, otorgándole un significado y sentido. Sin embargo años mas tarde el mismo autor señalaba: *"...Representación social es un conjunto de conceptos, enunciados y explicaciones originados en la vida diaria, en el curso de las comunicaciones interindividuales. En nuestra sociedad se corresponden con los mitos y los sistemas de creencias de las sociedades tradicionales; incluso se podría decir que son la versión contemporánea del sentido común... constructos cognitivos* *compartidos en la interacción social cotidiana que proveen a los individuos de un entendimiento de sentido común, ligadas con una forma especial de adquirir y comunicar el conocimiento, una forma que crea realidades y sentido común. Un sistema de valores, de nociones y de prácticas relativas a objetos, aspectos o dimensiones del medio social, que permite, no solamente la estabilización del marco de vida de los individuos y de los grupos, sino que constituye también un instrumento de orientación de la percepción de situaciones y de la elaboración de respuestas...”*. (Moscovici, 1981, en Perera, 2005, p. 44). En 1986, Jodelet incorpora nuevos elementos a su definición refiriendo que son *“... imágenes condensadas de un conjunto de significados; sistemas de referencia que nos permiten interpretar lo que nos sucede, e incluso, dar un sentido a lo inesperado; categorías que sirven para clasificar las circunstancias, los fenómenos y a los individuos con quienes tenemos algo que ver... formas de conocimiento práctico que forja las evidencias de nuestra realidad consensual...”*. (Jodelet, 1986, citado por Perera, 1999, p. 9).

Recientemente, ha apuntado que *“Las representaciones sociales conciernen al conocimiento de sentido común que se pone a disposición en la experiencia cotidiana; son programas de percepción, construcciones con status de teoría ingenua, que sirven de guía para la acción e instrumento de lectura de la realidad; sistemas de significaciones que permiten interpretar el curso de los acontecimientos y las relaciones sociales; que expresan la relación que los individuos y los grupos mantienen con el mundo y los otros; que son forjadas en la interacción y el contacto con los discursos que circulan en el espacio público; que están inscritas en el lenguaje y en las prácticas; y que funcionan como un lenguaje en razón de su función simbólica y de los marcos que proporcionan para codificar y categorizar lo que compone el universo de la vida.”* (Jodelet, 2000, citado por Perera, 2005, p. 47). De los párrafos anteriores, podríamos definir a las Representaciones sociales cómo las imágenes, ideas y nociones que le damos a los conceptos que construimos socialmente. Dicho de otra manera, dentro de la Matemática Educativa lo podemos concebir como una asociación de significados.

¿Cómo se forma una Representación Social?

Para llegar a conformarse la representación es imprescindible que ocurran dos procesos: la objetivación y el anclaje, fases que se encuentran muy ligadas por el hecho que una presupone a la otra. Tan solo la representación objetivada, naturalizada y anclada es la que permite explicar y orientar nuestros comportamientos.

*La objetivación:*Puede definirse como aquel proceso a través del cual llevamos a imágenes concretas que nos permiten comprender mejor lo que se quiere decir, aquellos conceptos que aparecen de manera abstracta. Consiste en transferir algo que está en la mente en algo que existe en el mundo físico.

Este mecanismo se encuentra bajo la influencia de la inserción de los sujetos en la sociedad, de sus condiciones sociales. Se realiza a través de tres fases: la construcción selectiva, la esquematización estructurante y la naturalización.

La construcción selectiva: Aquel proceso a través del cual los diferentes grupos sociales y los sujetos que los integran se apropian, de una manera muy particular y específica, de las informaciones y los saberes sobre un objeto. Esta forma de preparación implica la retención de algunos elementos de la información y el rechazo de aquellos que no resulten significativos. Los elementos retenidos se someten a una transformación con el objetivo de que puedan encajar en las estructuras de pensamiento que ya están constituidas en el sujeto, es decir, estos nuevos elementos van a adaptarse a las estructuras formadas anteriormente.

La esquematización estructurante: Una vez seleccionada la información y convenientemente adaptada a través del proceso de apropiación, se organiza internamente para conformar una imagen del objeto representado de manera coherente y de fácil expresión. Esto da lugar a la formación del núcleo central.

La naturalización: Es en tanto proceso donde el núcleo central adquiere un status ontológico que lo sitúa como un componente más de la realidad objetiva. El núcleo central es el resultado de un proceso de construcción social de una representación mental; sin embargo, se olvida el carácter artificial y simbólico del núcleo y se le atribuye plena existencia fáctica. El núcleo pasa a ser la expresión directa de una realidad que se le corresponde perfectamente y de la cual no parece constituir sino un reflejo fiel. Una vez que ha quedado constituido, el núcleo tiene toda la fuerza de los objetos naturales que se imponen “por sí mismos” a nuestra mente.

El Anclaje: Moscovici (1976) refiere que "...es el mecanismo que permite afrontar las innovaciones o la toma de contacto con los objetos que no son familiares. Utilizamos las categorías que nos son ya conocidas para interpretar y dar sentido a los nuevos objetos que aparecen en el campo social.".

Es aquí donde se manifiestan los procesos de asimilación y acomodación, pues las informaciones recibidas son deformadas por nuestros esquemas ya constituidos, y a su vez, esta nueva información cambia nuestros propios esquemas para acomodarlos a sus características. Se puede afirmar entonces que este proceso se refiere al enraizamiento de la representación social y su objeto.

El proceso de anclaje articula las tres funciones básicas de la representación: función cognitiva de integración de la novedad, función interpretativa de la realidad y función de orientación de las conductas y las relaciones sociales.

Tanto el anclaje como la objetivación hacen familiar lo no familiar; el primero transfiriéndolo a nuestra esfera particular donde somos capaces de compararlo e interpretarlo, y el segundo, reproduciendo entre las cosas que podemos tocar y en consecuencia, controlar.

Metodología

El instrumento utilizado surge de una revisión bibliográfica sobre algunas técnicas de recolección de datos que favorezcan la emergencia de representaciones sociales entre ellas el cuestionario, éste puede contener preguntas cerradas o abiertas.

Las preguntas cerradas contienen categorías o alternativas de respuesta que han sido delimitadas por la investigadora o el investigador y pueden ser dicotómicas o incluir varias alternativas de respuesta. En cambio, las preguntas abiertas no delimitan de antemano las alternativas de respuesta. Por lo anterior, para el estudio de las representaciones sociales, el cuestionario debe ser concebido de manera que permita y valorice la actividad de la persona interrogada, por medio de la inclusión de un número mayor de preguntas abiertas y proponiendo a la persona entrevistada un amplio abanico de respuestas ofreciéndole la posibilidad de emplear su propia gestión.

La metodología de la primera etapa, esencialmente de tipo cualitativa, consistió en aplicar un cuestionario, con tres preguntas de carácter abierto, a saber: *¿Para ti qué es la matemática?; ¿Cuál crees que es la importancia de la matemática?; ¿Consideras que cualquiera puede aprender matemáticas?* pretendiendo con ellas esbozar un primer acercamiento a la representación social emergente alrededor de las matemáticas al analizar las respuestas obtenidas de 29 jóvenes de preparatoria que formaban parte del Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal.

Análisis y Resultados

Este trabajo constituye uno de los pocos estudios realizados, con el fin de obtener representaciones sociales acerca de la matemática ó bien en algunos de sus conceptos como el de "función" (Ej. Sánchez y Camacho, 2007), sin embargo, un mayor número de producciones prefieren usar en sus marcos teóricos creencias y/o concepciones (Ej. Albert, 2003). En nuestro trabajo pretendemos conocer cómo interpreta la sociedad el concepto de matemática no tanto como objeto escolar sino, como concepto social. De esta manera, después de analizar las respuestas al cuestionario, procedimos a categorizar los resultados según su parecido y semejanza, agrupando así, las respuestas dentro de las categorías que aparecen en orden de jerarquía en cada una de las Tablas, siendo la número 1 las respuestas con más coincidencias y así sucesivamente.

Tabla 1: ¿Para ti qué es la matemática?

Categoría	Explicación
1.- Fenómenos y sucesos	Aquí se agruparon todas las respuestas que relacionaban a la matemática como una ciencia que se encarga del estudio de los diferentes tipos de fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.) sus causas y consecuencias.
2.- Símbolos y operaciones	En esta categoría relacionan al concepto como un conjunto de símbolos, operaciones y números.
3.- Conocimientos	Las respuestas agrupadas aquí coinciden en que la matemática es una materia que nos sirve para adquirir y ampliar nuestros conocimientos
4.- Ciencia Exacta	En este apartado se toma al concepto como una ciencia exacta, cabe mencionar que definen ciencia exacta como una ciencia sin errores, totalmente acertada.
5.- Lenguaje	Hacen referencia a que la matemática es un lenguaje, algunos mencionaron que es el lenguaje universal, lo que resulta muy interesante.

Tabla 2: ¿Cuál crees que es la importancia de la matemática?	
Categoría	**Explicación**
1.- Fenómenos y sucesos	Nuevamente los encuestados dan prioridad a esta categoría donde la importancia de dicha disciplina radica en ayudar a comprender el por qué de los diferentes tipos de fenómenos y sucesos.
2.- Vida Cotidiana	Muchas de las respuestas coinciden en que la matemática está en todas partes y que además es indispensable en la vida cotidiana (al ir de compras, al trabajo, en la escuela, etc.);
3.- Ampliar Conocimientos	Nos volvemos a encontrar con esta categoría en donde se expresa la importancia en ampliar y adquirir nuevos conocimientos, otros por otra parte mencionaban que sólo sirve para pasar de grado en las escuelas.
4.- Medicina	Algo interesante pero en la que muy pocas respuestas coincidieron es en la importancia de la matemática para el desarrollo de medicinas y de nuevas tecnologías.

Tabla 3: ¿Consideras que cualquiera puede aprender matemáticas?	
Categoría	**Explicación**
1.- Capacidad	La mayoría de las personas no estuvo de acuerdo en que cualquier persona puede aprender matemáticas y las categorías encontradas fueron las siguientes: la primera determina que el aprendizaje de las matemáticas depende de la capacidad de las personas y podríamos seguir con las siguientes categorías.
2.- Métodos de enseñanza	
3.- Inteligencia	
4.- Motivación	
5.- Habilidad	

Discusión

Después de analizar detenidamente los resultados del cuestionario aplicado logramos identificar algunos de los elementos que constituyen, en cierta manera, parte del sistema central de la representación social. Por citar algunos elementos, está el hecho de que las personas relacionan a la matemática con símbolos, operaciones y números, es decir, cuando escuchan el concepto de matemática, inmediatamente le asocian la imagen de los elementos ya mencionados. Nos resulta interesante que muchas de las respuestas coincidan en relacionar este concepto con la explicación de fenómenos (físicos, químicos, sociales, económicos, etc.), por otra parte, está el hecho de que en el aprendizaje de la matemática influyen mucho la capacidad, los métodos de enseñanza y el ser inteligente, según los resultados obtenidos.

Si bien la matemática es un concepto muy general, no bastarían unas cuantas personas para hablar de representaciones sociales. Consideramos que estos resultados nos ayudan a generar un primer consenso para construir un reactivo que nos permita profundizar este acercamiento. Es por ello que nuestra investigación se sigue llevando a cabo con el propósito de ahondar en este concepto mediante las representaciones sociales.

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (2001). *Prácticas Sociales y Representaciones Sociales*. México: Ediciones Coyoacán.

Albert, J. (2003). College Students Conceptions of Probability. *The American Statistician.* Vol. 57 (1).

Dollo, C. (2001). La methodologie de recueil des représentations sociales. En *Quels determinants pour l'evolution des savoirs scolaires en ses? (L'e exemple du chomage*). (Capítulo 3, pp.117-162) tesis doctoral no publicada. Universite Aix-Marseille I.

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, concepto y teoría. En S. Moscovici: *Psicología Social. II: Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales*. Barcelona, España: Paidós.

Jodelet, D. (2000). Representaciones sociales: contribución a un saber sociocultural sin fronteras. En D. Jodelet y A. Guerrero: *Develando la cultura. Estudios en representaciones sociales*. México: UNAM.

Moscovici, S. (1976). *Social Influence and Social Change*. London, England: Academic Press.

Moscovici, S. (1981). On social representation. En J.P. Forgas (Comp.): *Social cognition. Perspectives in everyday life*. Londres, Inglaterra: Academic Press.

Perera, M. (1999). *A propósito de las representaciones sociales: apuntes teóricos, trayectoria y actualidad*. Informe de investigación. CIPS. La Habana. Cuba.

Perera, M. (2005). *Sistematización crítica de la teoría de las Representaciones Sociales.* Tesis no publicada de doctorado. Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente. Centro de Investigaciones Psicológicas y Sociológicas.

Puglisi, M.L. (2007). Habilidades y representaciones sociales de alumnos de escuelas estatales del municipio de São Paulo (Brasil). *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado.* 11 (1). 1-11.

Sánchez, B.I, Camacho, A. (2007). *El concepto de función matemática a través de las representaciones sociales*. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIEM. México.

UNA APROXIMACIÓN AL PRIMER MOMENTO DE LO LOGARITMICO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez
Universidad Autónoma de Guerrero, México México
Cinvestav-IPN
marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo comentamos una experiencia realizada con 15 estudiantes de bachillerato de sexto semestre donde el propósito era generarles un ambiente particular que favoreciera la emergencia de lo logarítmico. Nos centramos en observar y analizar las argumentaciones que generaron los estudiantes, así como la red de modelos y de significados que evidenciaran su acercamiento o distancia a la covariación logarítmica. Nuestro estudio se fundamenta en la socioepistemología, adoptando a la Ingeniería didáctica como metodología.*
Palabras clave: Socioepistemología, logaritmos, facilitar cálculos

Al analizar algunos reportes de investigación interesados en la función logarítmica podemos identificar fundamentalmente dos líneas: aquellos que se enfocan en lo cognitivo (Dubinsky, 1992, Berezovski y Zazkis, 2006) esbozando algunas explicaciones sobre esta problemática y otros que reflexionan sobre la historia de esta noción (Oliver, 2000; Burn, 2001) sin intencionalidades escolares. Sin embargo, otros como Confrey y Smith (1995), Martínez-Sierra (2005) respecto a la función exponencial o Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001, 2008) respecto a la función logarítmica se preocupan además de las dimensiones cognitiva y epistemológica por reflexionar sobre la didáctica y la sociocultural, en estudios sistémicos que robustecen sus reportes. Efectivamente, abordamos la problemática que genera el aprendizaje de esta función desde la socioepistemología, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

En nuestra indagación epistemológica (Ferrari, 2001) concluimos que se pueden distinguir, bajo esta óptica, tres momentos: los logaritmos como *transformadores*, como *modelizadores* y como *objeto teórico*; etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1619) para su primera definición. Hablamos así, de *facilitar cálculos* y de *modelar*, como prácticas sociales asociadas a la de *predicción*, argumentos robustos para el desarrollo de los logaritmos, donde sus usos, formulaciones e institucionalizaciones a veces se entremezclan, otras, la mayoría, se distancian del discurso matemático escolar (Ferrari, 2008).

En nuestro trabajo buscamos evidenciar que lo numérico, lo gráfico y lo algebraico como red de modelos entremezclados con las prácticas de referencia y sociales nos crean un ámbito de argumentación que posibilite la emergencia de la construcción de un discurso sobre *lo logarítmico*. Para ello, respetando las etapas que propone la ingeniería didáctica como metodología de investigación es que, luego del análisis preliminar, hemos diseñando actividades que propicien en los estudiantes la construcción de su red de modelos, y por ende de su red de significados. Si bien el diseño del curso consta de tres momentos: *transformación numérica - curva logarítmica - cuadratura antesala de la integración* siendo siempre el eje implícito, la covariación logarítmica, sólo reportamos en este artículo el desarrollo del primer momento de los logaritmos, aquel respecto a facilitar cálculos.

Cada sesión, de duración una hora y media, fue videograbada con tres cámaras generando un triángulo con el apoyo de tres grabadores de voz colocado en cada equipo de trabajo seleccionado para analizar. Sin embargo, sólo reportaremos las argumentaciones del Equipo 1 formado por Viri, Fanny y Antonio. En la primera sesión se les entregaron las hojas de trabajo así como las fichas logarítmicas que consisten en cuatro rectángulos de foami (ver Figura 1) con los números escritos siguiendo una progresión geométrica en la parte superior y una progresión aritmética en la inferior.

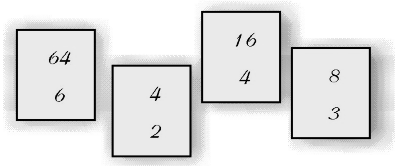


Figura 1: Fichas logarítmicas en base 2

Tres son las actividades que se les proponen a los estudiantes, esperando provocar la evolución de los argumentos iniciales más cercamos a ideas exponenciales que logarítmicas, pero ambas consideradas el centro de la covariación logarítmica. Decidimos iniciar la discusión con la base dos, continuar con la base 10 incorporando la calculadora, y finalizar la discusión con un problema clásico donde se presentaba un modelo exponencial con su expresión algebraica. La actividad matemática de las dos primeras sesiones involucra tres partes, cuyos objetivos particulares son: a) Percibir los patrones de crecimiento y relacionarlos; b) Acercarse a las propiedades logarítmicas y usarlas para facilitar cálculos; c) Abstraer la covariación que rige el juego. En la tercer sesión se les dejó libres para resolver un problema y se les invita, en la última sesión a comentar con sus compañeros lo que habían desarrollado en las clases.

Primera sesión: Jugando con fichas logarítmicas

Antonio, Viri y Fanny abstraen rápidamente los patrones de variación de las fichas. El primer argumento que explicitan es que las fichas siguen los números naturales por abajo en tanto que arriba es el doble del anterior. Para determinar la regla de multiplicar que se les solicita, no falta en este equipo un intento de multiplicar cruzado, como la mayoría de sus compañeros habían propuesto, pero en este caso aparece en la extensión de las fichas, no así en la búsqueda de la regla de multiplicación ya que Fanny descubre, por simple inspección, que con dos fichas puestas una al lado de la otra se puede sumar los valores de abajo y ver que la ficha que le corresponde a ese número tiene que ver con la multiplicación de los números de arriba.

Al construir las fichas, Antonio propone agregar la ficha 2//1 en tanto que Viri hace lo propio con la 1//0. En esta primera parte de la actividad, los estudiantes perciben dos elementos importantes que no se encontró en los otros equipos, aceptar el 1//0 como parte del juego sin mayor discusión y, fundamentalmente describir los patrones de crecimiento desde las operaciones básicas involucradas: “aumenta al doble” que algebraicamente escriben como $y = 2x$ y “aumenta en una unidad” denotándola como $y = x + 1$ dos saltos importantes hacia el acercamiento a la covariación, reconocer una convención e intentar denotar algebraicamente las dos variaciones. Descubren también la regla detrás de la división (dividir implica restar), aceptando rápidamente la presencia de negativos y decimales; donde Antonio expresa que: *Porque la multiplicación y la* *división… la haces más fácil si sumas o restas acá para verificar aquello… por ejemplo sumas acá y ya está…*

Pese a que durante todo el desarrollo de la actividad el equipo va descubriendo sin gran problema la esencia del diseño que los va acercando a ideas logarítmicas, desde el trabajo con progresiones, no logran abstraer una relación algebraica más general pero dejan evidencias claras de su razonamiento covariacional. Al solicitarles que argumenten sus respuestas, Antonio inicia un proceso de concentrarse en su hoja de trabajo y olvidarse de su entorno, luego de comentarle a Fanny: *Nos pide que expliquemos… a ver… éste va al doble y éste va al doble… y éste al doble… y éste al doble… pero… esto sería encontrar una relación entre lo de abajo y lo de arriba… por ejemplo entre menos dos y punto veinticinco… para así sacar la general*. Produce entonces una tabla vertical con los valores de las fichas etiquetando con *x* a la progresión aritmética y con *y* a la progresión geométrica evocando quizás los cánones escolares, donde el 1, 2, 3 etc… se reserva para las variables independientes. Sin embargo para Antonio, quién es quién no es importante, son sólo nombres que les permite manipularlos.

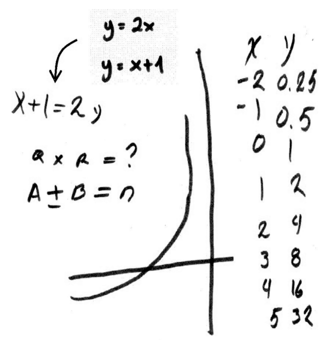


Figura 2: Esbozo de una red de modelos espontánea

En la síntesis de Antonio, encontramos cierto acercamiento a ideas covariacionales, así como la búsqueda de una expresión algebraica que vincule a ambos patrones de crecimiento. La construcción de esta idea, la íntima relación entre los valores involucrados en cada ficha, se evidencia en el esbozo de una curva que etiqueta como una hipérbola. Comenta además, que hay una relación entre *x* e *y*, para lo cual utiliza letras diferentes para denotar la relación entre sumar y multiplicar, lo que informa sobre su interés de descubrir lo que hay detrás de estas fichas, aunque no logra abstraer la expresión algebraica que las vincula.

Segunda sesión: Explicitando los logaritmos

Los integrantes del Equipo 1, no tuvieron problemas para aceptar al 10 como elemento integrador de los incisos aunque, al igual que todos los equipos, la primera explicación de cómo se construyen las fichas y cómo se puede escribir la ficha general, se haya argumentado desde el número de ceros que marca el número inferior de la ficha permitiéndonos observar que inicialmente no estaban considerando a ese 10 como una base en el sentido de potencias y/o logaritmos. Ante la primer pregunta, donde se esperaba que reconocieran la base diez que estaba en juego, así como la extensión del uso de la regla de multiplicar que habían construido la sesión anterior, se observa un interesante entramado de ideas, aquellas como las que anuncia Viridiana respecto a "seis ceros" que se convierte, en el informe de Estefanía, en: "…*tenemos la teoria que el numero inferior indica la cantidad de ceros, despues del numero 1, deben de ir para llegar al resultado"* (se respeta la ortografía de los estudiantes). Sin embargo, Antonio modifica esta primer respuesta y la presenta apoyándose en la idea de variaciones cosa que mantendrá en todas sus intervenciones. Al igual que en la primera sesión, Antonio construye desde el principio dos fichas clave para este tipo de juegos, la 1//0 convención que nos asegura la posibilidad de facilitar cálculos, y la 10//1 que nos anuncia la base que está en juego.

El uso de la calculadora los introdujo en un ambiente numérico diferente ya que la idea de multiplicar por 10 tiende a desaparecer, al intercalar otros números entre los pertenecientes a la progresión geométrica generada por 10^n. La covariación existente cambia de aspecto, algo sobre lo que los muchachos no reflexionaron. El inciso 5, propone construir las fichas utilizando la ficha general a//log(a), donde la progresión geométrica es reemplazada por una progresión aritmética restringida, la de los números naturales. Lo que no cambia, y se mantiene en la actividad, es la regla de multiplicar y dividir, es decir, las propiedades de los logaritmos, ideas sobre las que se les hizo trabajar a los muchachos. Para llegar a estas conclusiones, los alumnos construyen las fichas en foami tarea que los demás equipos esquivan, convirtiéndose su manipulación en un apoyo fundamental para reforzar los argumentos que ya habían consensuado, permitiéndoles incluso abstraer con mayor profundidad y seguridad. Para ellos, el uso de las reglas de multiplicar y dividir emergen espontáneamente, tanto en la construcción de otras fichas (inciso 6) como en el cálculo del pH (inciso 7), por tanto, en el uso de las propiedades de los logaritmos. Los otros equipos, fuerzan su uso ya que la calculadora es su fuente de seguridad y argumentación.

En la búsqueda de una respuesta a ¿qué es un logaritmo? Antonio y sus compañeras extienden ordenadamente en su mesa de trabajo las fichas de los dos juegos que habían manipulado. El desafío lo propone la maestra al observar que ya habían terminado su trabajo con antelación a los otros equipos y que Viri varias veces había solicitado las "fichas verdes", para solucionar algunas de las preguntas de la actividad, cosa que había sido inhibida por Antonio. Sin embargo, él es el único que responde a este desafío, quien se dedica varios minutos a observar los arreglos de las fichas, preguntar en voz alta varias cosas pero que no logra incorporar a sus compañeras en sus reflexiones. Se refugia esta vez en el ámbito numérico, utilizando la calculadora, y en el algebraico intentando interpretar la relación entre la notación exponencial y la logarítmica, red de modelos que no logra armar. Se le escucha decir: *mmm… es que aquí el logaritmo es de diez… pero acá no* (indicando las fichas de la primera sesión en base 2)… *mmmm… entonces ¿qué tiene que pasar para que sea un logaritmo?*... idea con la que termina la sesión.

Tercera sesión: Usando los logaritmos

Se observa a medida que se desarrolla el curso que los estudiantes se sienten desafiados por las actividades, y como en las sesiones se va hablando de logaritmos, exponentes, bases, patrones de crecimientos, entre otros elementos, van intentando utilizar este lenguaje en sus discusiones. En esta sesión, se les proponte calcular la cantidad de mosquitos que habría en un cierto tiempo así como el tiempo en el que se tendrían 10,000 mosquitos, lo cual genera un ambiente de discusión y debate. Es Antonio quien propone que cada uno trabaje en su hoja, división de trabajo que provoca que cada estudiante produzca diferentes maneras de abordar el problema propuesto. En el inicio, Fanny convoca la expresión analítica para estudiar el problema en tanto que Viri y Antonio generan una tabla con los datos que poseen en el enunciado y extienden los cálculos hasta exceder los 10,000 mosquitos.

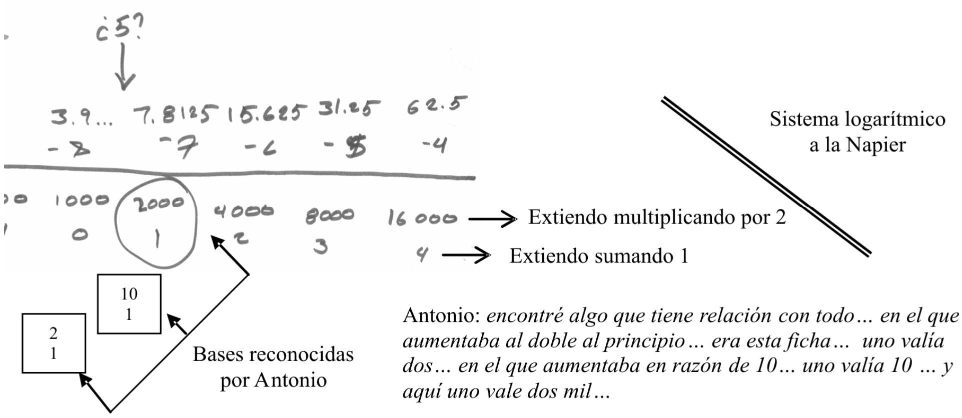


Figura 3: Intentando extender el uso de las fichas

Sin conciencia de ello, Antonio se topa con la misma problemática que hallara Briggs en el siglo XVII ante las ideas de Napier, respecto a que toda covariación de una progresión geométrica y otra aritmética constituye un sistema logarítmico, pero para que se logre utilizar la idea de “facilitar cálculos” requiere que el punto (1, 0) esté presente. Vemos así que Antonio genera una vinculación interesante entre tiempo y cantidad de mosquitos, generando una tabla regida por la covariación logarítmica ya que va dividiendo por dos arriba al ir moviéndose hacia la izquierda y restando una unidad en la sucesión de abajo (ver Figura 3). Lo que busca es un número en la parte superior que le permita multiplicar al 2000 para llegar al 10,000. Sin embargo, abandona esta búsqueda ya que al atrapar el 5 entre dos números decimales y no determinarlo directamente, se desanima y se concentra en la fórmula dada desde la cual logran determinar, luego de batallar con manipulaciones algebraicas, las respuestas solicitadas.

Conclusiones: Argumentando sobre ¿Qué entiendo por logaritmos?

Luego de las tres sesiones donde se les invitó a explorar las propiedades de los logaritmos así como las reglas que los rigen, enfocándonos en observar las argumentaciones que producían los diseños desde un juego de fichas, inicialmente, en base dos y luego en base 10 introduciendo también el uso de la calculadora, para terminar con el problema de los mosquitos, fenómeno exponencial que requería utilizar los logaritmos para hallar el tiempo, se los desafía a presentar sus exploraciones así como sus indagaciones sobre: ¿qué entienden por logaritmos? Cambia así la dinámica de la clase, se trata ahora de sintetizar y organizar la información que deseen compartir con sus compañeros por lo que la argumentación perdería la frescura que se observan en instancias de exploración, dando lugar a un discurso más pulido, dirigido por una exposición en diapositivas.

Todos explicaron con mayor o menor detalle su visión de las actividades, centrándose en las dos primeras, en aquellas donde trabajaron con fichas, sin incorporar la tercera actividad donde se trabajara desde una expresión algebraica. Sólo el Equipo 1 se esfuerza por integrar las ideas, ya que presenta las dos actividades de manera conjunta con el fin de evidenciar las analogías que existían, la importancia de reconocer la base así como la ficha 1//0, elementos ausentes en la argumentación de los otros equipos, y que consideramos importantes en el acercamiento a ideas covariacionales logarítmicas. Sin embargo, Antonio cierra su participación diciendo: *¿qué es un logaritmo?... Básicamente es una función que números pequeños… se vuelvan más grandes y números muy grandes se vuelvan números más pequeños… Bueno... según una definición de matemáticas… es el número de veces que se tiene que multiplicar un número por sí mismo para igualar a otro…* respaldando sus argumentos con aquellos ya establecidos, práctica presente en nuestro quehacer.

Observamos así que logran acercarse a ideas importantes sobre lo logarítmico, desde las discusiones que establecen en sus interacciones y que se reportan en extensión en Ferrari (2008).

Referencias bibliográficas

Berezovski, T. & Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2. (pp. 145-152). Praga, Czech República checa. Obtenida en octubre de 2007 en http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/29/8c/0d.pdf

Burn, R. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica 28*, 1-17. Disponible en: *http://www.idealibrary.com.* Consultada en octubre de 2005

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Martínez-Sierra, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa 8*(2) ,195-218.

Napier, J. (1619). *A description of the admirable table of logarithms.* London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html. Consultada en abril de 2003.

Oliver, J. (2000, Noviembre). The Birth of logarithms. *Mathematics in school,* 9–13.

INFLUENCIA DE LA CONCEPCIÓN ARISTOTÉLICA DEL MOVIMIENTO EN LA MODELACIÓN– GRAFICACIÓN DEL PROBLEMA DE LOS TRES CHORROS

Cristóbal Cruz Ruiz
Facultad de Ingeniería, UNACH, CIMATE Chiapas México
cristobalcruzruiz@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *La búsqueda de consenso en el salón de clases, pone de manifiesto ciertas concepciones que tienen los estudiantes, y que cuando dichos actores pertenecen a disciplinas distintas como Ingeniería y Pedagogía, por ejemplo, los matices de éstas, son distintos. En este trabajo, se muestra un ejemplo de los tipos de argumentos que tienen los estudiantes cuando describen los tres chorros al salir de un recipiente cuyo volumen de agua se mantiene constante. Esto se logra a partir del uso de las gráficas como una herramienta central en la generación de argumentos en el estudiante para construir significados y procedimientos asociados a la variación y al cambio, como lo propone Suarez (2008); categoría de la Matemática Escolar que posibilita hablar de nuevos elementos. Por lo que, aquí los "errores" son vistos como ideas que pueden ser enmarcadas en paradigmas como el paradigma Aristotélico (paradigma epistémico) y por paradigmas disciplinarios (paradigma social), dando como resultado que el salón de clases sea un escenario con ideología.*
Palabras clave: *paradigma social, paradigma epistémico, concepción Aristotélica*

Introducción

En una prueba aplicada a 40 estudiantes de la carrera de ciencias de la educación con especialidad en Física y Matemáticas de la universidad Valle del Grijalva, ubicada en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Se planteó a los estudiantes el siguiente problema:

Un recipiente cilíndrico está lleno con agua, como se muestra en la figura. Tiene tres orificios del mismo tamaño. Si se destapan al mismo tiempo los tres orificios, dibuje cómo serán los chorros (suponga que está entrando agua en la parte superior del recipiente de manera que el volumen se mantenga constante).

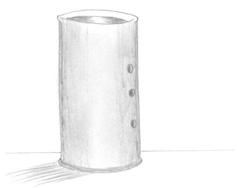


Figura 1. El problema de los tres chorros

Dicho problema, también, ha sido estudiado y documentado por Slisko y Cruz (1997) con diversos estudiantes; así como mediante un análisis de libros de texto de física escolar (Slisko, 2000). Y, aunque en dichos trabajos se muestra que hay tres modelos predominantes, con su respectiva cadena lógica subyacente; resultados con los cuales coincidimos totalmente, tal como se presenta en la tabla I.

Para llegar a los resultados de la tabla I, se pidió a los estudiantes que formaran equipos de tres, con la condición que deberían estar en cada equipo los tres modelos (lo cual se logro en un 70% del grupo). Además, cada participante tenía que explicar su modelo a los otros dos, y mientras tanto los otros dos, únicamente podían hacerle **preguntas** a su modelo (no podían argumentarle o refutarle). De la misma forma, todos deberían hacer lo mismo.

A continuación se presentan los principales argumentos que dan vida a cada modelo:

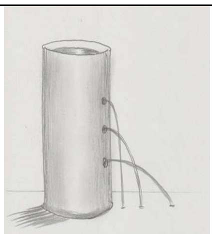
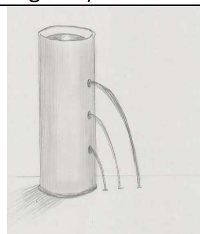
Modelo A	Modelo B	Modelo C
- A mayor **profundidad** mayor presión - A mayor **profundidad** mayor velocidad - A mayor volumen de agua mayor presión - A mayor **profundidad** mayor peso del agua … por lógica, mayor ALCANCE	- Los chorros se afectan unos a otros en la intersección - Tomé en cuenta la **altura** sin tomar en cuenta la presión - La presión hidrostática es la misma en todos los puntos (PASCAL) - **A mayor presión mas fuerza, pero la distancia de los orificios, al fondo no es la misma en los tres chorros**	- Los chorros tendrán que salir de manera horizontal y no se logran unir - El orificio de arriba tiene una menor presión pero adquiere más velocidad y por lo tanto un mayor alcance y así sucesivamente - Por el principio de pascal, pero influye la **altura** de cada agujero en el recipiente - A mayor profundidad mayor es la presión pero no mayor alcance ya que interviene la **altura** - El chorro de abajo es más chico porque la **distancia** entre el orificio y el piso es menor - La distancia es proporcional a la **altura** (Pitágoras)
		

Tabla I. Los modelos A, B, C y sus principales explicaciones dadas por los estudiantes cuestionados

Problema de investigación

El salón de clases es un escenario donde se presenta una diversidad de ocasiones difíciles para el profesor, como la de dar sentido a los distintos pensamientos que tienen los estudiantes, en torno a temas que, aún en los libros de texto pueden presentar falta de coherencia con el sentido común. Los estudiantes pierden de vista el significado que podría tener la gráfica de una parábola en relación con un fenómeno de este tipo. Por ejemplo: la modelación-graficación del problema de los tres chorros. Este hecho da razón de ser al presente trabajo.

Los estudios de Slisko (2000), dan cuenta sobre algunos mitos en la modelación de los chorros y los documenta en su artículo: "los mitos más populares de la física escolar". Pero, surge un interés que va más allá de mostrar los "errores" de los estudiantes, los libros y los profesores, que llevó a la presente investigación a dar cuenta de: *¿Cómo está presente en los libros de texto, en los maestros de secundaria y preparatoria el paradigma epistémico de Aristóteles en la modelación-graficación del problema de los tres chorros y, cómo impacta en los estudiantes de niveles superiores?*

Aspectos teóricos

La hipótesis que ha guiado la presente investigación considera que las explicaciones de los estudiantes están basadas en ciertos paradigmas, en este caso el paradigma Aristotélico. Por lo que, a partir de los trabajos de Muñoz (2002) sobre el papel de las cosmovisiones o concepciones sociales del mundo; así como de los trabajos de Piaget & García (1998), donde refieren que las cosmovisiones condicionan todo el conocimiento que se genera y que de alguna manera esas cosmovisiones son como matrices donde nacen concepciones "erróneas"; lo que se mostrará en este trabajo, es que esas concepciones "erróneas" a que refiere Slisko, son generadas por una cosmovisión y una concepción que se ha denominado Aristotélica.

Mediante el uso de las gráficas, como una categoría de la Matemática Escolar (Suarez, 2008) que posibilita hablar de nuevos elementos que se han dejado de tratar en los estudios realizados por Slisko y sus antecesores; y porque ahora, se muestra a los "errores" como ideas que pueden ser enmarcadas en ciertos paradigmas (social y epistémico) a partir de los trabajos de Piaget y García (1998). Es decir, que los "errores" están condicionados por el paradigma epistémico, visto como "*una concepción que ha pasado a ser parte inherente del saber aceptado y que se transmite con él, tan naturalmente como se transmite el lenguaje hablado o escrito de una generación a la siguiente*" (Piaget & García, 1998, pp. 232), así como por el paradigma social que hace "*que la atención del sujeto sea dirigida a ciertos objetos (o situaciones) y no a otros; que los objetos, sean situados en ciertos contextos y no en otros; que las acciones sobre los objetos sean dirigidas en cierta forma y no en otras: todo esto está fuertemente influido por el medio social y cultural*" (Piaget & García, 1998, pp. 235).

El análisis de aquello que se erige como discurso escolar plasmado en los libros de texto, permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas escolares. De este modo, la forma de enunciar una definición o un teorema depende del paradigma que se quiere reproducir, de la disciplina de aplicación del saber matemático, del uso de ciertos métodos de estudio de la matemática (Castañeda, 2000).

Arrieta (2003) plantea que en la actividad dentro del aula, el alumno debe construir sus argumentos, defenderlos, discutir hasta encontrar su verdad y en consenso con sus compañeros y con el profesor como moderador de ésta retórica, se establezca el hecho científico. Es decir, plantea el concebir a la ciencia no como algo acabado y externo al estudiante, sino más bien como algo que es construido en el discurso desde la perspectiva del alumno y no del profesor o del autor del texto. En esta investigación se muestra que el alumno puede "construir sus argumentos, defenderlos, discutir hasta encontrar su verdad y en consenso con sus compañeros y con el profesor como moderador de ésta retórica, se establezca el hecho científico", pero no puede ser independiente de la perspectiva del profesor y de los textos, ya que hasta el profesor está influenciado por el texto y por el paradigma dominante, en este caso por el paradigma Aristotélico.

Finalmente, este trabajo pretende mostrar, que cualquiera de los modelos clásicos que normalmente presentan los estudiantes al graficar y explicar las trayectorias que describen los chorros, tienen detrás dicha concepción, y que el paradigma social se caracteriza mediante los elementos de cada disciplina en que están los estudiantes.

Aspectos metodológicos

Se aborda la investigación mediante una perspectiva sistémica como la socioepistemología porque aborda al saber (libros de texto e históricos), estudiantes y profesor desde un enfoque netamente sociocultural.

Mediante un análisis preliminar se han encontrado los siguientes elementos que muestran cuál puede ser la veracidad de las expectativas que se tienen en torno a la pregunta de investigación:

Por ejemplo el libro de física para secundaria La Magia de la Física, nuevo texto elaborado según programa SEP 94 muestra una gráfica que concibe al chorro de abajo como recto y que concuerda con el modelo A de la tabla I.

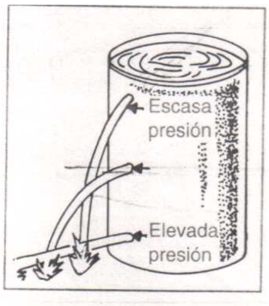


Figura 2. Libro de texto secundaria

Así también, se puede ver en el libro de Física General para bachillerato, que con la intención de mostrar el principio de Torricelli dibuja el comportamiento de los chorros como si fuera el modelo A de la tabla I.

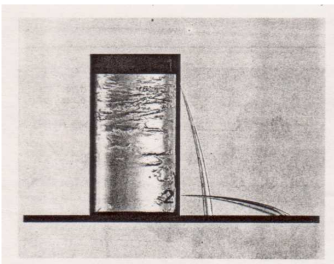


Fig. 9.8 La velocidad con la que sale un líquido por un orificio es mayor conforme aumenta la profundidad (teorema de Torricelli).

Figura 3. Libro de texto para bachillerato

Esto parece indicar que los autores tienen la idea de que los chorros pueden llegar a tener un comportamiento como el que creía Aristóteles y que también comparten los estudiantes actualmente, es decir, los chorros siguen una trayectoria recta hasta que se les acaba la fuerza y caen.

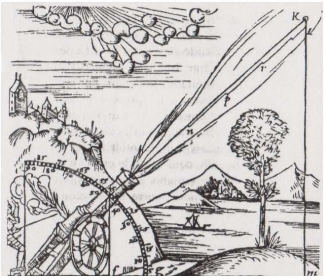


Figura 4. Concepción Aristotélica del lanzamiento de un proyectil

Sin embargo, para Tartaglia (1998) en su libro LA NUEVA CIENCIA escrito en 1537, la trayectoria que seguía la bala en el aíre incluía una parte curva (figura 5), con lo cual estaba haciendo caso omiso de uno de los puntos centrales de la doctrina aristotélica del movimiento, y también puede encontrarse en los estudiantes de las escuelas de hoy (figura 6).

Figura 5. Concepción de Tartagliana del lanzamiento de un proyectil

En la actualidad, los estudiantes de ingeniería, pueden inmediatamente establecer el consenso de que las trayectorias de los chorros coinciden con el modelo A de la tabla I, pero tienen detrás, una concepción Tartagliana, y puede verse en el siguiente modelo:

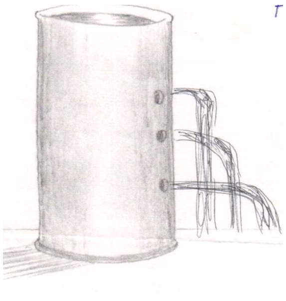


Figura 6. Consenso clásico de los estudiantes de ingeniería

En cambio para los estudiantes de carreras como pedagogía o humanísticas (que normalmente no son del área de físicos matemáticos) y que NO han tenido interés por la matemática durante su formación escolar, el consenso es distinto, ya que el modelo que predomina es el modelo C de la tabla I. Pero, ahora presenta un argumento muy marcado, en cuento a la concepción Aristotélica, ya que en el momento de explicar el porque de su modelo usan argumentos gráficos como el que se presenta a continuación:

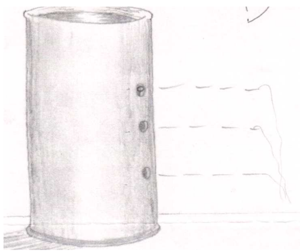


Figura 7. Los chorros como trayectorias rectas

Cabe plantear la siguiente pregunta: *¿Hasta dónde los estudiantes de ingeniería están convencidos de que si el modelo A según la tabla I, es el correcto, al hacer un orificio casi en la base del recipiente, el chorro llegará más lejos?* En caso de ser afirmativa la respuesta, estarían confirmando la hipótesis de que el chorro sigue una trayectoria recta, y cae cuando se le acaba la fuerza. Posiblemente con la variante de que puede tener una parte curva como pensaba Tartaglia. Argumento que los estudiantes de humanidades no dudan.

Conclusiones

Las prácticas escolares están enmarcadas por escenarios donde la diferenciación entre el estímulo y el rechazo de ciertos temas como dignos de apoyo, y la aceptación o la negación de ciertos *esquemas conceptuales* como válidos, hace la diferencia entre un paradigma dominante y otro.

Es importante conocer las características particulares que adquirieron las teorías científicas a lo largo de la historia, así como los condicionantes extracientíficos (socio-históricos) que imprimieron esas características a las teorías, para saber cuál es el sentido que tienen las explicaciones escolares.

Pero también, no se puede soslayar que, "*cómo un sujeto asimila un objeto, depende del sujeto mismo; qué es lo que él asimila, depende, al mismo tiempo, de su propia capacidad y de la sociedad que le provee la componente contextual de la significación del objeto*" (Piaget & García, 1998, pp. 245).

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Castañeda, A. (2000). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Castañeda, A. et al. (2001). Elementos para el análisis de textos Matemáticos antiguos desde la perspectiva Socioepistemológica. *Antologías.*1, 125-147.

Muñoz, G. (2002). Lo conceptual y lo algorítmico como base de la didáctica del Cálculo Integral. *Antologías.* 2, 281-310.

Piaget, J. & Garcia, R. (1998). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI, 8ª Ed.

Slisko, J. & Cruz, A. (1997). Chorros sorprendentes. *Correo de maestro.* 1 (16), 20-24.

Slisko, J. (2000). Los mitos más populares de la física escolar. La parte I: Trayectorias erróneas de tres chorros de agua. *Alambique: Didáctica de las ciencias experimentales*. 25. 96-102.

Suarez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Tartaglia, N. (1998). *La Nueva Ciencia*. México: Universidad Autónoma de México. Colección MATHEMA. 1ª Ed.

ANÁLISIS COGNITIVO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN MEDIANTE REPRESENTACIONES SOCIALES

Bertha Ivonne Sánchez Luján, Alberto Camacho Ríos
I. T. de Cd. Jiménez; CICATA-IPN; I. T. de Chihuahua II México
ivonne_mx_2000@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Se reportan los resultados de la componente cognitiva de un análisis preliminar que servirá para diseñar una situación de aprendizaje, en tanto mejorar la enseñanza del concepto de función a partir de argumentos de carácter variacional. El estudio se llevó a cabo a partir de la teoría francesa de las Representaciones Sociales, la cual tiene como eje central a las prácticas sociales, que son sistemas de acción socialmente estructurados y muestran pertenencia a un grupo. De la componente cognitiva destacan las concepciones de los profesores, sobre el concepto, que se estiman como estáticas y fijas a una definición rigurosa, institucionalizada, ampliamente influenciados por los libros de texto y planes de estudio.*
Palabras clave: función matemática, prácticas sociales, representaciones sociales, sistema central, sistema periférico.

Introducción

Un constante problema de entendimiento del concepto de función, como una relación entre variables, ha suscitado desde el siglo pasado diversas investigaciones a su alrededor (p. e, Sierpinska, 1992; Ruiz, L, 1998; Guzmán, 1998). En este marco es que nos interesamos en las concepciones de los profesores y estudiantes del nivel superior de ingeniería. El proyecto se inició a partir de un análisis cognitivo del concepto, para el que hicimos uso de la aproximación teórica francesa llamada "Teoría de las Representaciones Sociales" (TRS). Por otro lado, realizamos un análisis epistemológico y un estudio del currículo escolar (los cuales no se consignan en este artículo), de los que rescatamos caracterizaciones del concepto que dieron pie al diseño de la situación desde una perspectiva variacional.

Según Johsua y Dupin (1993) la didáctica de las matemáticas ha incorporado diversas aportaciones de la psicología cognitiva, de la psicología genética y de los estudios de interacciones sociales, con lo que se han desarrollado conceptos y postulados sobre el aprendizaje. Conciben el conocimiento matemático como una construcción social determinada por los procesos necesarios para transformar el propio conocimiento del individuo en un saber socialmente aceptado. De esta forma, parten de la hipótesis que los alumnos puedan adoptar, modificar o enriquecer sus conocimientos. De esta manera, todo conocimiento que se suponga para el aprendizaje depende de la movilización que el sujeto haga de sus concepciones. Es a través de ellas que quien aprende interpreta la información y produce eventualmente un nuevo conocimiento. Cada vez que hay comprensión de un modelo o movilización de un concepto, su estructura mental se reorganiza completamente.

Representaciones o concepciones

Para nuestra investigación, es importante establecer el concepto teórico de "representación" puesto que posee diferentes acepciones. Nos centraremos en la definición de la psicología social de este concepto. Según Jodelet (1984) una (RS) es "una forma de conocimiento socialmente elaborado y compartido" (p.473).

En el ámbito escolar, la representación no es un reflejo de la realidad escolar o de sus funciones sociales efectivas, sino una construcción original. Es decir, es un proceso de construcción de un saber basado en experiencias sociales.

1.2 Preguntas de investigación

¿Cuáles son las concepciones de los profesores en torno al concepto de función?

¿En esas concepciones, está presente el aspecto variacional y dinámico del concepto?

¿Existe vinculación o un eje rector entre esas concepciones?

¿Cuáles son los factores socioculturales que intervienen en la formación de esas concepciones?

¿Cómo pueden ayudar las concepciones de los profesores para el diseño de la situación de enseñanza que pretendemos?

Marco Teórico

La Teoría de las Representaciones Sociales

Las (RS) son formas de interpretar nuestra vida diaria, estilos de modelos del conocimiento social. Toda actividad mental individual está determinada a través del contexto grupal en que se desarrolla el individuo, por tanto la noción de (RS) nos sitúa en un punto en que aprehendemos diariamente de nuestro medio ambiente la información que se vierte sobre el de las demás personas. El conocimiento es, en este sentido, “espontáneo”, socialmente elaborado y compartido.

> *“La representación social es una modalidad particular del conocimiento, cuya función es la elaboración de los comportamientos y la comunicación entre los individuos. (. . .) es un corpus organizado de conocimientos y una de las actividades psíquicas gracias a las cuales los hombres hacen inteligible la realidad física y social, se integran en un grupo o en una relación cotidiana de intercambios.” (Farr, 1984, p.504).*

Estructura de las representaciones: núcleo central y elementos periféricos

El “núcleo central” o “sistema central” es el elemento que sostiene a la representación. Toda representación está construida alrededor del núcleo o sistema central, formado por uno o varios elementos que dan significación a dicha representación. El núcleo central es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. La identificación del núcleo central es determinante para conocer el objeto propio de la representación. El sistema periférico, por su parte, se organiza alrededor del sistema central, da concreción al significado de la representación ya que es la interfase entre el núcleo central y la situación concreta en que es elaborada o utilizada, asociado a las características individuales, permite, de esta forma, una adaptación en función de las experiencias personales en torno al núcleo central. El sistema periférico no se considera menor que el central, es fundamental para la preservación o transformación de la RS.

Luego, y para nuestro propósito, entendemos las (RS) como una construcción personal que integra elementos y que se ha generado en la práctica del profesor. Estas (RS) transforman e impactan las concepciones de los estudiantes al momento de impartir su clase mediante procedimientos y actividades en el aula.

SISTEMA CENTRAL	SISTEMA PERIFÉRICO
Vinculado a la memoria colectiva y a la historia de grupo	Permite la integración de las experiencias e historias individuales
Consensual, define la homogeneidad del grupo	Soporta la heterogeneidad el grupo
Estable, coherente y rígido	Flexible: soporta las contradicciones
Resiste al cambio	Evolutivo
Poco sensible al contexto inmediato	Sensible al contexto inmediato

Características de los sistemas central y periférico. (Abric, 1994)

Metodología

Primera etapa: Recolección del contenido

En esta parte, nuestra intención fue conocer las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función, por lo que consideramos conveniente permitir que ellos escribieran "espontáneamente" las palabras que evocan al pensar en este concepto, para contar así con una serie de ideas del "sentido común"(Dollo, 2001). A partir de un término inductor "función", respondieron mediante asociación libre. Sus respuestas proporcionan una manera de sondear el nodo estructural latente de las RS.

Proposición 1: ¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en (el concepto) la palabra Función? (Función, ¿qué es?). Escriba al menos cuatro y máximo diez.

Proposición 2: ¿Cuáles son las palabras o expresiones que vienen a su mente al pensar en la definición de Función que usted enseña? (Función, ¿por qué?). Escriba al menos cuatro y máximo diez.

Segunda etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Al requerir una jeraquización de proposiciones relativas al concepto, elegimos aquellas que son presentadas en diversos libros de texto como relacionadas con el tema, y tomando en cuenta que nos llevarán explícitamente a reconocerlas en el esquema de las (RS). En el caso de la palabra "variabilidad", aún cuando no se menciona en los libros de texto, se incluyó, pues consideramos importante su relación con otros significados asociados, como son: "variable" y "variación", para la comprensión del concepto en estudio (Camacho, 2007).

Proposición 3: Lea atentamente las siguientes expresiones:

1. Ley de Causa – efecto
2. Modelo matemático
3. Variabilidad
4. Ley
5. Dependencia entre cantidades
6. Ecuación
7. Regla de correspondencia
8. Contradominio
9. Tabla de valores
10. Predicción
10. Predicción
11. Fórmula
12. Dependencia de variables
13. Gráfica
14. Variable independiente
15. Dominio
16. Inferencia
17. Expresión analítica
18. Variable dependiente
19. Variación
20. Otras _____________

A partir de ellas deberán jerarquizar las cinco expresiones que más se ajusten al concepto de función, así como las cinco más alejadas del mismo.

Para verificar la información del sistema de representación

Proposición 4. Se presentan una serie de proposiciones referentes al tema de función matemática a las cuales deberá responderse de la siguiente forma:

1. Totalmente de acuerdo
2. Parcialmente de acuerdo
3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo
4. Parcialmente en desacuerdo
5. Totalmente en desacuerdo

El análisis nos llevará a conocer el grado en que los conocimientos están arraigados.

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

La siguiente proposición permitirá observar la organización interna y ensamble de los elementos de la representación. Muestra, además, un método de asociación libre.

Proposición 5: Lea atentamente la siguiente lista:

1. Inferencia	6. Ecuación	11.Dependencia	16. Modelo matemático
2. Algebraico	7. Modelo	12. Interpretar	17. Gráfica
3. Fórmula	8. Patrón	13. Representación	18. Regla de correspondencia
4. Aproximación	9. Idealización	14. Tabla de valores	19. Predicción
5. Variabilidad	10. Predicción	15. Ley de causa efecto	20. Conclusiones

Después de haber leído atentamente, construya diez cadenas asociativas acerca del término función. Cada cadena inicia con el término función y debe tener cuatro términos incluyendo el de función. Cada término puede ser utilizado en varias cadenas.

Función→________________→_________________→___________________

Tercera etapa: Verificación de la centralidad

La proposición 6 se presentan con una serie de 30 palabras relacionadas con el concepto, de las cuales deben formar grupos y escribirles un título, lo que permite mostrar la organización del contenido de una representación en un sistema de categorías mediante grupos de palabras. Es un método indirecto para encontrar una relación de similitud entre sus partes.

Análisis de la población

Se aplicó el cuestionario a cinco docentes del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez y a ocho docentes del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II.

Resultados de la aplicación del cuestionario

Primera etapa: recolección del contenido

Las palabras más utilizadas fueron: dominio, contradominio, dependencia, correspondencia, expresión y conjuntos.

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Comprueba la existencia de una jerarquización colectiva. Pone en evidencia los elementos centrales de la representación.

Cinco mas importantes o cercanas del concepto	Cinco mas alejadas del concepto de función
Ley de causa-efecto, gráfica, interpretar, fórmula, modelo, modelo matemático, ley, idealización.	Numérica, números reales, ordenada, origen. El 10% respondió que todas las palabras tienen que ver con el concepto.

Para verificar la información del sistema de representación:

Proposición 4. Fundamentada en conceptos matemáticos teóricos, los resultados muestran un dominio del tema entre un 45% y 60%.

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

Proposición 5: Mediante asociación libre deben construirse diez cadenas de cuatro términos cada una iniciando con el de función. La mayoría de los encuestados construyó las diez cadenas completas. De un total de 21 palabras mostradas, el promedio de utilización es de 13 a 18 palabras. Las más utilizadas fueron “Tabla de valores” con frecuencia de 26 por todos los sujetos encuestados, seguido por modelo, dependencia, representación y gráfica.

Tercera Etapa: Verificación de la centralidad

La pregunta 6, permite mostrar la organización del contenido de una representación en un sistema de categorías mediante grupos de palabras: número promedio de palabras utilizadas 14 a 20. El 76% completaron el número total de cadenas con los términos sugeridos. El 61% nombró los grupos, el resto no lo hizo. Se percibe dificultad para nombrar los grupos y/o seguir las instrucciones.

Conclusiones

Esta investigación se organizó en torno a dos ejes principales: 1. Tener un mejor conocimiento de las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función, y 2. Determinar los factores socioculturales que intervienen en la formación de dichas concepciones.

La intención de aplicar los cuestionarios fue para cumplir con el primer punto, de ello, obtuvimos que el núcleo central está formado por los significados asociados al concepto de función: dependencia de variables, regla de correspondencia, grafica, tabla de valores, modelo y dependencia; los elementos periféricos: variable independiente, relación, dominio y rango. De acuerdo a la teoría de las (RS) son estos últimos los que permiten una adaptación de las experiencias personales al concepto y son fundamentales para el mejor entendimiento del sistema central que le presta estabilidad y coherencia.

Para el segundo eje encontramos que las prácticas desarrolladas en torno a una (RS) no pueden manejarse alejadas del sistema de normas y valores sociales. La influencia del medio en que se realicen es indiscutible. Encontramos que estas prácticas están fuertemente influenciadas por conocimientos institucionalizados, que de cierta forma controla “y regula” el conocimiento que se encuentra alrededor del concepto de función, tanto en los libros de texto como en los programas oficiales. Por lo que esta institucionalización norma las prácticas escolares en torno al tema.

En consecuencia consideramos:

a) Las definiciones dadas para el concepto de “función” son mostradas como una dependencia de variables.

b) Los profesores están influenciados por los libros de texto.

c) En consecuencia, los estudiantes están influenciados por los profesores.

d) La noción de variación no aparece en el discurso actual.

En cuanto al alcances de la investigación, tal como lo predice la TRS los elementos periféricos tienen una función de defensa, mas pueden ser agregados (removidos, cambiados, modificados, aumentados) bajo el efecto de una modificación de las prácticas sociales, lo cual, de acuerdo a Flament (1994), tiene como consecuencia un cambio gradual de la representación, su desintegración o transformación total. Los resultados del análisis cognitivo, junto con los resultados del análisis epistemológico y del análisis didáctico, serán el sustento para diseñar situaciones de aprendizaje, integraremos en el diseño la noción de "variabilidad", que hemos reconocido en el dominio de prácticas sociales: procedimentales y de observación, que ocurrieron a lo largo de los siglos XVIII y XIX, y que nos permitirá caracterizar de mejor forma el concepto de función. Con este significado asociado al concepto de función, intentaremos influir en los elementos periféricos de la congnición de los estudiantes, al colocarlos en un proceso de deconstrucción y recontextualización del concepto.

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (1994). *Pratiques sociales et représentations*. Paris: PUF.

Camacho, A. (2007). Las nociones de variable, variación y variabilidad en la enseñanza del concepto de función. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Querétaro, México.

Dollo, Ch et Joshua S. (2002) Conceptions d´élèves et diversité des paradigmes en sciences économiques et sociales (l´exemple du chômage) Article paru dans L'Année de la Recherche en Sciences de l'Education. En http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ses/didactique/obst.html

Farr, R. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *Las representaciones sociales*. (pp.495-506). Barcelona, España: Paidós.

Flament, C. (1994). Pratiques et représentations sociales. En J. Abric (Ed.): *Représentations sociales et pratiques.* París. PUF.

Giordan, A. y De Vecchi, G. (1988). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conocimientos científicos*. España: Diana Editora.

Jodelet, D. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *La representación social: fenómenos conceptos y teoría*. (pp.469-494). Barcelona, España: Paidós.

Joshua, S. y Dupin (1993). Introduction á la didactique des sciences et des mathématiques. París. PUF.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sánchez, B. I, Camacho, A, (2007). El concepto de función matemática en los docentes a través de las representaciones sociales. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* . CIEM. México

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemolofy and pedagogy* (pp. 25-28) Washimgton, DC, USA: Mathematical Association of America.

LA NOCIÓN DE PRAXEOLOGÍA: UN INSTRUMENTO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO POSIBLE UTIL PARA LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Corine Castela
IUFM Haute-Normandie - Équipe Didirem Université Paris 7 Francia
Corine.Castela@univ-rouen.fr

Campo de investigación: Estudios socioculturales Nivel: Superior

Resumen. *Esta conferencia se centra en la noción de praxeología. En la primera parte intento mostrar para aquellos que no conocen la TAD una idea de sus orientaciones fundamentales, por lo menos de las que est en juego a continuación. En la segunda parte, presento la definición de la noción de praxeología que dentro de la didáctica de las matemáticas, se encuentra en los trabajos de Y.Chevallard y otros TADistos; la ilustraré con dos ejemplos que vienen de libros de textos chilenos y franceses. En la tercera parte propongo ciertas evoluciones del modelo de Chevallard que, en mi parecer, aumentan la eficacia de este instrumento sin salir de la TAD, específicamente para tomar en cuenta los aspectos dinámicos que también interesan a la socioepistemología.*
Palabras claves: teoría y práctica, producción y circulación de saberes, institución

Este texto resulta como una de las formas que pueden tomar las interacciones entre marcos teóricos diferentes, pero con cierta proximidad: una aproximación hace interpelaciones a la otra, la cual ésta puede entender y tomar en cuenta mediante ciertas evoluciones pertinentes dentro su marco. De esta fase de la interacción que puso en movimiento la segunda teoría puede resultar que la primera teoría se enriquezca a su vez. Así presento aquí el nuevo modelo de la noción de praxeología que, entre otros elementos, los intercambios con especialistas de la Socioepistemología me condujeron a desarrollar dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). A mi parecer, esta herramienta puede interesar a la Socioepistemología, pero la validación de esta opinión no me corresponde.

Una introducción a la Teoría Antropológica de lo Didáctica

La Teoría Antropológica de lo Didáctico será presentada como la obra del investigador francés Y. Chevallard: quien la introdujó en 1992 en la revista RDM (*Recherches en Didactique des Mathématiques*) y desde esa fecha de fundación le ha dado sus mayores impulsos. Naturalmente, otros investigadores trabajan dentro de este marco y contribuyen en su desarrollo, con un grupo específicamente importante en España, en torno de M.Bosch y J.Gascón (ver por ejemplo las Actas del Primer congreso sobre la TAD: 2007 *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la TAD,* Universidad de Jaen).

Uno de los aspectos a destacar es que la TAD se interesa en las dimensiones sociales de los fenómenos didácticos, ya sean de producción, de circulación, de enseñanza del saber así como de aprendizaje. Es decir, esta teoría no pretende agotar la realidad didáctica.

Este enfoque tiene una concepción social de la índole humana. Para realizar su potencial como ser humano, un individuo requiere, en cada momento de su vida, de recursos sociales e históricamente producidos que se ubican fuera de él, en ciertas organizaciones sociales. De ahí, que las nociónes de institución y de sujeto sean centrales en la TAD: una *institución* es una organización social estable (una estabilidad que necesita cierta adaptabilidad); en ésta existen *sujetos* que realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas *restricciones* institucionales, aprovechando ciertos *recursos* disponibles en dicha institución. Los objetos siguientes son ejemplos de instituciones: la enseñanza básica chilena, el bachillerato en México, el libro de texto Arráyan 2ndo Medio, la noción actual de exponente real, como también la demostración matemática, la manera de seducir en una cultura dada.

La noción de Institución es un elemento clave de la TAD, y la de Práctica social un elemento clave de la Socioepistemología, considero que estos elementos son inseparables: uno no se puede definir sin el otro y a la inversa. En el sentido que N.Covián (2005) le da a esta noción, una práctica social es una institución: « la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen ». Una práctica social crea un marco para el hacer de los individuos dentro del cual, estos son sus sujetos, es decir que según esta práctica, hay maneras de hacer que son posibles y otras que son prohibidas. A su vez, provee a dichos sujetos de recursos que potencian sus actividades. A la inversa, una institución se constituye como tal por las prácticas sociales de institucionalización; acoge, permite y regula prácticas sociales, quizás es por eso, y para eso que se mantiene.

De lo anterior se deprende: en el marco de la TAD toda investigación abarca un estudio institucional, específicamente si se trata de cambiar algo para mejorar una situación.

Se plantean preguntas como: ¿Qué instituciones *Is* influyen en el fenómeno que se estudia y se pretende cambiar? ¿Qué recursos ofrecen las *Is*? ¿Qué restricciones ejercen? ¿Cuáles son los márgenes de maniobra? ¿Cómo aprovechar estos márgenes? o ¿Cuáles *Is* se deben (pueden) cambiar y cómo? para que lo imposible se vuelva posible. Tal estudio de la ecología de los fenómenos didácticos constituye un momento insoslayable de cualquier investigación.

La noción de praxeología

En este parte la atención se centra en la noción de praxeología tal y como se presenta dentro de la TAD (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997, Chevallard, 1999).

El modelo de Chevallard

La introducción de esta herramienta corresponde a las intenciones siguientes: 1. luchar contra una visión monumental de la obra matemática, donde se pierden las cuestiones que generaron el desarrollo de los saberes sabios; 2. proponer un modelo universal de las actividades humanas y de los recursos que los grupos humanos producen para llevar a cabo las tareas problemáticas que enfrentan socialmente, es decir, en ciertas instituciones.

Este modelo se representa de la manera siguiente: $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Se compone de dos bloques:

- el saber-hacer o la *praxis* $[T, \tau]$;

  T es un tipo de tareas, τ una técnica, es decir un conjunto de procedimientos (no necesariamente un algoritmo), que permite tratar ciertas tareas del tipo T (posiblemente no todas), en ciertos dispositivos, con ciertos medios;

- el saber o el *logos* $[\theta, \Theta]$;

  θ representa la tecnología de τ, el discurso que se elabora para justificar, hacer inteligible y producir esta técnica; la teoría Θ es el discurso que garantiza la validez de θ.

Cabe subrayar algunos elementos:

Una praxeología es un *objeto social*, una institución. Si bien es una construcción cognitiva, no es la construcción personal de un individuo en su mente. Sin embargo, cada persona que debe enfrentarse a las tareas de tipo T, se verá posibilitada a reconstruir dicha praxeología para sí misma.

Con la componente *T* y la noción de tipo de tareas, el modelo destaca los aspectos *invariantes* en las tareas problemáticas que encuentran los grupos humanos. Que las tareas no sean siempre diferentes constituye una condición imprescindible para que pueda emerger una técnica. Para que esta técnica se pueda estabilizar, transmitir y legitimar en una institución donde los sujetos se enfrentan al tipo *T*, es (generalmente) menester que exista un discurso mínimo que justifique que la técnica hace bien lo que pretende hacer; que, si uno logra hacer todos los procedimientos que la componen, entonces lleva a cabo la tarea. Además este discurso intenta hacer inteligible la técnica: porque tal procedimiento produce tal efecto.

En cuanto a la teoría, frecuentemente *falta*. Es decir que en estos casos, el lugar de la teoría en el modelo está vacío. Puede ser que no exista ninguna teoría o que exista una en una institución *I* pero que ella no viva en la institución I' donde se considera la praxeología.

Determinar una medida inaccessible: ejemplo de dos praxeologías

Para illustrar lo anterior, presento ahora dos praxeologías relativas al tipo de tareas "*Determinar una medida inaccessible*" que se encuentran en las instituciones siguientes: por una parte, en el libro de texto Arráyan del nivel Segundo Medio (décimo año de escolaridad) en la enseñanza chilena de matemáticas; por otra parte, en el libro de texto Terracher del nivel Première Scientifique (onceavo año) en la enseñanza francesa de matemáticas (Proyecto Ecos-Conicyt, Castela y Al, 2006).

Empecemos por el caso chileno. El tipo de tareas "*Determinar la distancia de un punto A a un punto P inaccessible*" se encuentra en el capítulo "Semejanza de figuras planas". Se brinda la técnica con el texto siguiente:

> *"Ubicar un punto B a cierta distancia de A y considerar las visuales de A a P y de B a P. Medir los ángulos determinados por ambas visuales <PAB et <ABP. Medir* $\overline{AB}$ *. Construir a escala un triángulo A'B'P' semejante al triángulo ABP. Medir con regla o huincha la longitud de* $\overline{A'P'}$*. Calcular la longitud de* $\overline{AP}$ *, teniendo en cuenta la razón de semejanza de la escala empleada".*

La tecnología, es decir los resultados que justifican que con esta técnica es cierto que se consigue la medida buscada, se compone de la definición de la noción de triángulos semejantes, del criterio AA de semejanza y de algunos resultados respecto al tratamiento numérico de la proporcionalidad.

La teoría que propone el libro se organiza así: el teorema de Tales con verificación por mediciones en un dibujo, sin destacar la necesidad de otra forma de validación; demostración efectiva con el teorema de Tales del teorema fundamental: « Toda paralela a uno de los lados de un triángulo determina un triángulo semejante »; presentación de los criterios de semejanza con el comentario que evoca la existencía de una demostración: « Los criterios de semejanza se pueden demostrar a partir del teorema fundamental de semejanza », es decir que se hace referencia al aval epistemológico de otra institución donde existe una teoría más completa.

En este ejemplo tres elementos me parecen importantes: 1.*T* incluye la realización efectiva de las mediciones en el terreno; 2. τ se sitúa en el ámbito de la geometría de los dibujos con instrumentos, la medición es un proceso admitido para obtener respuestas; 3. θ se justifica por un embrión de teoría que podríamos considerar como conforme con las restricciones de la geometría axiomática y de la ciencia matemática actual si no hubiera huellas de una concepción experimental de la validación.

En el contexto francés, el tipo de tareas no se encuentra de manera sistemática antes del onceavo año, opción científica. En el libro de texto que considero, *T* consiste en *"Calcular las medidas de los lados de un triángulo si se conocen las medidas de un lado y dos ángulos"*. No se contempla la posibilidad que los alumnos realicen las mediciones en el terreno. La técnica utiliza la ley de los senos que con los mismos resultados numéricos que en el caso chileno constituye la tecnología. La teoría se presenta como una parte de una geometría axiomática natural (área de un triángulo, altura, trigonometría) con demostración formal.

No se puede imaginar que la praxeología chilena se enseñe en el liceo francés, ni tampoco en los séptimo y octavo años.¿Por qué? Si buscamos las razones de tal situación, tenemos que tomar en cuenta una escala de especificaciones, de restricciones, que surgen de una cadena de instituciones desde organizaciones internas a la disciplina matemática hasta niveles tan altos como la sociedad y aún más la civilización: no se puede porque la geometría de referencia, por lo menos a partir del

8^{o} año es una geometría de objetos ideales, con la demostración como único medio de validación. ¿Por qué? Pues los matemáticos desempeñan un papel dominante en la determinación de las orientaciones de la enseñanza de las matemáticas. ¿Por qué? Pues la sociedad francesa les reconoce esta legitimidad. ¿De cuál proceso histórico viene? No pretendo dar repuestar a esta pregunta, sino dar una idea de la aproximación institucional a lo didáctico que se desarrolla con la TAD.

¿Extensión de la noción de praxeología o nueva representación?

Este título requiere de una explicación. Hasta la fecha no me es posible decir si lo que voy a presentar a continuación brinda o no un cambio del modelo de Y. Chevallard. Esta incertidumbre se deprende de dos razones. Primero, los textos de Chevallard toman en cuenta la complejidad de los fenómenos. Pero, las investigaciones consideran generalmente formas más esquemáticas de los instrumentos propuestos. Considero que la propuesta que presento es una evolución del modelo praxeológico tal y como se presenta en sus usos. La segunda razón es que algunos de los términos empleados para definir los objetos, específicamente la tecnología, son ambiguos: por ejemplo ¿qué significa exactamente justificar la técnica? Entonces, se podría considerar que el modelo que propongo es solamente una explicitación del modelo de Chevallard, que está acompañado de una nueva representación. Antes de presentar mi proposición, explico a continuación las razones que generan este trabajo.

Los saberes que favorecen la utilización de praxeologías matemáticas en la resolución de problemas

Mi interés en el modelo praxeológico nace de mi línea de investigación en didáctica que se centra en la resolución de problemas, más precisamente en las dificultades que tienen los alumnos cuando, a medida que avanzan en la escolaridad, se enfrentan con problemas que exigen de ellos más autonomía. Por ejemplo, a nivel del décimo año, los estudiantes franceses pueden encontrar ejercicios en los cuales deben elegir sin ayuda del enunciado entre varios teoremas ya enseñados para calcular una longitud. Frente a tal situación la organización clásica del saber sabio matemático, según los conceptos, no es basta. Es útil reorganizar este saber según los tipos de tareas: ¿cuáles son las técnicas posibles para determinar una longitud? Es decir, la noción de praxeología proporciona una herramienta interesante para el docente: el cual puede formar a sus estudiantes para identificar y desarrollar praxeologías.

Pero postulo que es necesario ir más allá de esta reorganización praxeológica en términos de tipos de tareas y técnicas, al igual que es necesario construir saberes que no se consideran en el saber sabio (Castela 2005, 2008). Para apoyar esta afirmación, contemplemos el tipo de tarea *Demostrar una igualdad vectorial en un contexto de geometría afin*. La técnica de decomposición vectorial es fundamental, la tecnología que la justifica es la regla del paralelogramo. La cual, no es suficiente para resolver los casos complejos. Se tiene que saber por ejemplo: que para demostrar a = b, se puede empezar con a para obtener b, o a la inversa, se puede también calcular a menos b; que para descomponer los vectores, es posible utilizar sólo los puntos que se introducen de manera independiente, etc.

Estos saberes con finalidad práctica sobre el funcionamento matemático no sirven para justificar ni para hacer inteligible la técnica. La pregunta es ¿Cuál es el lugar de estos elementos en el modelo? Generalmente, los especialistas de la TAD consideran que pertenecen a la técnica, o bien que son de naturaleza didáctica, o que son conocimientos que se construyen individualmente, no se consideran en un modelo social tal como la praxeología.

De hecho, si consideramos lo que Chevallard (1999) dice del proceso de construcción de una praxeología entre los matemáticos o de reconstrucción en una institución escolar, parece que el proceso de institucionalización de una praxeología es un proceso de refinación que deja fuera los efectos de las peripecias del proceso de emergencia y los aspectos demasiado específicos de la institución de producción, llegando a una praxeología lista para circular en otras instituciones de utilización o de enseñanza.

Se puede ahora plantear mi problema con el modelo praxeológico: esta forma de esqueleto en que se pierde una parte de la funcionalidad de la praxeología, ¿es la única forma de lo que se reconoce como una praxeología matemática? Y ¿más allá de todas las praxeologías? Si la respuesta es positiva, el modelo original no conviene y se debe trabajar para proponer otro modelo con las intenciones siguientes:

1. Considerar explícitamente los saberes prácticos, incluso los que se construyen dentro de las comunidades de sujetos, el *folklore.* El uso del término *folklore* es en su sentido etimológico de origen inglés, es decir *the lore of the folk*, el saber del pueblo.

2. Dar cuenta de todas las formas que toma el saber social a lo largo de su vida en instituciones donde se produce y/o se transmite y/o se utiliza.

3. Explicitar el papel de las prácticas sociales e instituciones en el proceso de producción-legitimación-validación de las praxeologías.

Para alcanzar estos objetivos, es necesario aclarar lo que se entiende por tecnología, de manera que ésta abarque los diferentes componentes del saber práctico. Con este fin, desarrollo la descripción de las funciones de este saber que atañe a la técnica.

Las funciones de la tecnología

Diferencio 6 funciones a quienes corresponden differentes saberes.

- *Describir:* una descripción es una explicitación; contrario a otros TADistos, no la considero como una parte de la técnica. Quiero así destacar el papel que desempeña la producción de tal discurso descriptivo, con todo el vocabulario necesario, en el proceso de emergencia, institucionalización y transmissión de una praxeología.

- *Motivar*: se trata de comprender la técnica y los procedimientos que se cumplen a través de sus fines; ¿para qué se hace tal procedimiento? ¿cuál es el efecto buscado? ¿qué pasa si no se hace? Un ejemplo matemático: la transformada de Laplace se utiliza para transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica que se puede resolver.

- *Facilitar:* les remito aquí a los saberes que favorecen la utilización de la técnica; por ejemplo, estos saberes prácticos que contemplamos en el caso del cálculo vectorial.

- *Validar*: probar qué la técnica hace bien lo que pretende que hace.

- *Explicar:* se trata esta vez de una inteligencia de las causas: ¿por qué la técnica hace bien lo que pretende que hace?

Validar y explicar son las dos funciones racionales que atribuye Chevallard a la tecnología.

• *Evaluar:* se refiere esta función al campo de eficacia y a los límites de la técnica, en comparación con otras disponibles.

Proposición de un modelo extendido

Con esta concepción de la tecnología, propongo una nueva esquematización del modelo:

$$I \rightarrow \left[T, \tau, \begin{matrix} \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{p} \end{matrix}\right] \begin{matrix} \leftarrow I_{th} \\ \leftarrow I_{u} \end{matrix}$$

A la izquierda se representa la Institución o las instituciones en las que se plantearon los problemas que dieron origen a la construcción de la praxeología (por ejemplo una práctica social como la predicción que se desarrolla en cierta institución).

A la derecha, las flechas simbolizan las prácticas sociales de validación, legitimación e institucionalización. Se desarrollan en dos tipos de instituciones: las Instituciones teóricas (*théoriciennes*) I_{th} que respecto a T están en una posición de espectador, su función social es la producción de saberes; las Instituciones utilizadoras, I_u, en las que algunos de los sujetos tienen que cumplir tareas del tipo T. En cada nivel, están en juego cadenas de instituciones de tamaño variable, empezando con comunidades que constituyen los sujetos de cierta institución I_u que se enfrentan a T en su vida institucional.

Las prácticas sociales de validación toman formas diferentes según el tipo de institución. En las I_{th}, se desarrollan procesos de validación científica: validación interna (búsqueda de coherencia, de consenso) o externa (de tipo experimental) de la teoría que a su vez valida la tecnología; se debe también contemplar la posibilidad de una tecnología sin teoría, resultando de experiencias de verificación sistemática (por ejemplo, fórmulas en ciertos dominios de ingeniería). En las *Iu*, los procesos de validación son de índole empírica, se desarrollan en el enfrentamiento cotidiano con T y la utilización de la técnica. Así, según el tipo de validación, se distinguen dos componentes (θ^{th}, Θ) y θ^{p} del bloque tecnologico-teórico.

Volviendo al problema inicial, en el caso de los saberes de los cuales depende la funcionalidad de una técnica matemática para la resolución de problemas matemáticos, las instituciones I_{th} e *Iu* son comunidades de matemáticos, que se ubican respecto à la técnica en momentos diferentes de su desarrollo. Entre las comunidades que se interesan en el uso funcional de la técnica, se deben considerar los equipos de investigación, pero también las comunidades que forman un docente y sus estudiantes. Si tal comunidad no se constituye, es el estudiante quien tiene que enfrentar la tarea de desarrollar θ^p.

Potencialidades de este modelo para la socioepistemología

Para concluir este breve texto, quiero señalar algunas de las potencialidades de este modelo, que en mi parecer pueden interesar a la Socioepistemología. Dicho modelo permite dar cuenta de varios estados de desarrollo de los recursos socialmente producidos respecto a un tipo de tareas problemáticas; entonces brinda posibilidades para considerar el dinamismo del saber social. Por ejemplo, a partir de estados donde existe solamente una technología de natureleza empírica, tal como lo pone en evidencia el trabajo de Covián, el modelo abre varias direcciones de investigación: ¿cómo se institucionalizó este saber? Pero también ¿cómo permitió históricamente el desarrollo de un saber teórico? O bien ¿cómo desde un punto de vista didáctico, podría apoyar en los aprendizajes relativos a este saber teórico?

Constituye también una herramienta para el estudio de la circulación de praxelogías entre instituciones con preguntas tales como: ¿cómo se transforma la tecnología práctica de una técnica matemática al pasar por ejemplo de una institución matemática a una institución física o profesional? En el caso de una praxeología con teoría, al cambiar de institución, ¿se puede cambiar la teoría ? ¿con la validación de que institución? Si se considera que, a través del proceso de resignificación, una gran parte del trabajo didáctico de la socioepistemología se propone modificar el componente teórico de las praxeologías matemáticas enseñadas, esta dirección de investigación que el modelo permite plantear es ineludible.

En resumen, este modelo extendido se presenta como una herramienta para hacer preguntas, problematizarlas en objetos de investigacón y organizar su estudio.

Referencias bibliográficas

Castela, C. (2005), A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. *RELIME*, 8(2), 111-127

Castela C., Consigliere L., Guzman I., Houdement C., Kuzniak A., Rauscher J-C. (2006), *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français.* Cahier de Didirem Spécial n°6, IREM Paris 7

Castela C. (2008), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 28(2), 135-182.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabon perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Covián, O. (2005), *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura Maya.* Tésis de Maestría no publicada. Cinvestav.

UN ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO DEL BINOMIO DE NEWTON A LA SERIE DE TAYLOR EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL

Hipólito Hernández Pérez
CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas México
polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación buscamos elementos de interacción entre los contenidos de los fenómenos físicos y el cálculo como una alternativa didáctica de la enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de cálculo, física e ingeniería en el nivel universitario. Exploramos el fenómeno de estabilidad en sistema discreto de una partícula sobre una superficie lisa para determinar la energía potencial, consideramos a la predicción como práctica social, el binomio de Newton a la serie de Taylor como herramienta de interpolación para obtener un modelo matemático y el análisis de la energía potencial y los conceptos de máximo y mínimo dentro del marco de la aproximación socioepistemológica.*
Palabras claves: Socioepistemología, predicción, práctica social, estabilidad

Introducción

En los programas de estudios de cálculo, física e ingeniería de las instituciones de educación superior están los contenidos de máximos, mínimos y el fenómeno físico de la energía potencial respectivamente. En el discurso de la matemática escolar actual se ha visto que estos contenidos están desvinculados entre uno y otro, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos y físicos en los planes de estudios vigentes, así como en los textos que son utilizados en los programas. Una manera de vincular estos contenidos es por medio de la predicción como un eje integrador desde la aproximación socioepistemológica entendida como práctica social.

En los textos de física e ingeniería utilizadas en nuestro medio encontramos argumentos como el siguiente: "Si s representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo t, un momento después $t+\Delta t$, este parámetro será $s+\Delta s$ ...", que requiere para su conceptualización el pensar un tanto como la serie de Taylor en cuanto instrumento de predicción para resolver problemas propios de la física, esta forma de pensar son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes.

En esta investigación se hace un análisis epistemológico de los procesos de matemátización de la energía potencial por medio de la predicción como práctica social y buscar las posibles relaciones o indicios de ellas de la estabilidad del equilibrio en un sistema mecánico y sus configuraciones, con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático, los fenómenos físicos y la práctica social de predecir como eje central en tanto unidad de análisis.

Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los contenidos matemáticos y físicos están desvinculadas y sin enfatizar los aspectos históricos, filosóficos y epistemológicos.

En los programas y textos de cálculo el binomio de Newton es expresado con la estructura $(a+b)^n$ y utilizado en forma algorítmica sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de la física el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación cuando es desarrollado como una serie de potencias fraccionarias o negativas de algún fenómeno físico, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas son transposiciones de dos saberes matemáticos que están desvinculados entre uno y otro, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo: $s(x)$ y $s(x+\Delta x)$ para funciones de una variable independiente, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? ¿Cuáles son los elementos de relación entre el cálculo y los fenómenos físicos?

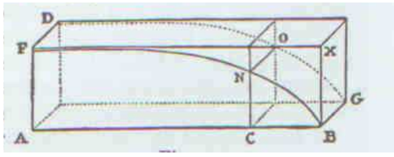
El objetivo de esta investigación es: Robustecer la epistemología inicial de la matematización de fenómenos físicos asociado a la transición del binomio de Newton a la serie de Taylor a través de la predicción e interpolación en el sentido de construir una epistemología actualizada que incluya los argumentos de los estudiantes con la finalidad de reconstruir la matemática escolar mas integral en el contexto de la Ingeniería Civil, en particular la estabilidad de un cuerpo a través del estudio de su energía potencial.

Antecedentes

En los últimos siglos se ha tenido un registro de los logros de la especie humana en la construcción de estructuras, máquinas, monumentos, que han durado muchos años, durante esos milenios la humanidad ha construido también otras estructuras tales como catapultas, barcos, puentes que funcionaron con éxito durante un período de. Antes de la mitad del siglo XVII, las estructuras se construyeron principalmente con base a la experiencia. En cada generación, los "ingenieros" tuvieron que pasar por largos aprendizajes de manos de técnicos con más experiencias para dominar el oficio de ingeniero, lo que implicaba, tal vez, tanto fracaso como éxitos. No existe una evidencia clara de que esos ingenieros de antaño hubiesen desarrollado o tenido capacidad para sustentar sus experimentos con cualquier tipo de cálculo (Bickford, 1997)

Un acercamiento científico a la mecánica de sólidos o resistencia de materiales como es llama a menudo, inició con Leonardo da Vinci (1452-1519). El fue el primero en aplicar los principios de la estática para determinar las fuerzas internas en elementos estructurales, y el primero en efectuar experimentos sobre la resistencia de los materiales ingenieriles. En experimentos con alambre de hierro y con vigas y como resultados de sus ensayos en vigas concluyó que la resistencia de una viga apoyada en ambos extremos varía inversamente con la longitud y directamente con el ancho (Timoshenko, 1983; Bickford, 1997).

Galileo (1564-1642) realizó los primeros intentos de aplicar lógicamente el análisis de esfuerzos. Los resultados publicados están en Dos nuevas Ciencias en 1638, representa el principio de la ciencia de la resistencia de materiales, los experimentos consistieron en la tensión y concluyó que la resistencia de materiales de una barra es proporcional al área de su sección transversal e independiente de su longitud, así como experimentos de flexión en la cual concluyó de manera incorrecta que los esfuerzos necesarios para contrarrestar la flexión se distribuye de modo uniforme sobre la sección transversal de la pieza como se muestra en la figura 1, (Timoshenko, 1983; Bickford, 1997).

	
Figura 1. Ensayo de flexión de Galileo	Figura 2

Galileo (1991) escribe que la resistencia en cualquier sección transversal CN será incluido entre la base AD , el plano rectangular AG, la línea BG y la superficie DGBF, donde la curvatura es idéntica con la parábola FNB. Este sólido tendrá la misma resistencia en todo punto, entonces el momento de fuerza varia en la misma proporción al momento flexionante debe tomar la curva o parábola FNB, como se muestra en la Figura 2. Esto satisface la ecuación de resistencia $\frac{(AF)^2}{(CN)}=\frac{BA}{BC}$

Marco teórico

En esta investigación, nuestro marco teórico está matizado en la aproximación socioepistemológica en donde se analizan de manera sistémica la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social. Cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellas al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía (2004) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción del objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, mostramos el papel de la interpolación y la predicción en el cálculo con énfasis en el fenómeno de estabilidad en sistema discreto de una partícula sobre una superficie lisa para determinar la energía potencial, considerando a la predicción como práctica social, y a la interpolación como herramienta para la transición del binomio de Newton a la serie de Taylor para el análisis de la energía potencial en el sistema de equilibrio y los conceptos de máximo y mínimo dentro del marco de la aproximación socioepistemológica, con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

Interpolación y predicción explícita

En el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación y predicción, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Hernández, 2002). En la investigación de Cantoral (2001) considera la noción de predicción como una práctica social para conocer el movimiento de un flujo de agua a partir de un estado inicial, es decir, que *P* es un estado inicial y se quiere predecir el estado ulterior *P + PQ*, donde *PQ* es la variación de un estado a otro, con esta idea y la interpolación Newton descubre su teorema del binomio, el cual es dado como $(P + PQ)^{m/n}$ y utiliza la noción de interpolación, así como las diferencias finitas para construir la serie de Taylor.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y usando las diferencias finitas se llego a; $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$. En esencia Taylor consideró el límite $\Delta x \to 0, cuando, n \to \infty$ y x es fija, para construir

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\dot{y}_0 / \dot{x}_0 + (x - x_0)^2\,\ddot{y}_0 / 2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3\,\ddot{y}_0 / 6(\dot{x})^2 + \ldots .$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

Estabilidad de sistemas discretos

En el presente contexto, la estabilidad del equilibrio se refiere cuando un sistema elástico en equilibrio es separado ligeramente de esa configuración de equilibrios: ¿Permanece el sistema elástico en una nueva configuración? ¿Regresa a la configuración original de equilibrio? ¿Cambia a otra configuración de equilibrio cercana o lejana?

En la figura 3. Muestra la estabilidad de una partícula, (a) estabilidad neutra, (b) estabilidad estable y (c) inestabilidad

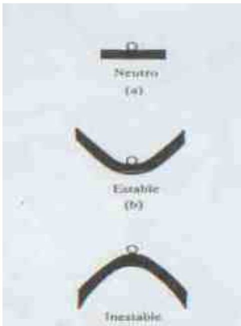


Figura 3. Estabilidad del equilibrio de una partícula que se mueve sobre una superficie lisa

Las configuraciones de equilibrio de un sistema mecánico conservativo se pueden determinar resolviendo las ecuaciones

$$\frac{dV}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,....,n \text{ son los grados de libertad}$$

Para un sistema con un grado de libertad, la estabilidad de una configuración particular de equilibrio se determina con base en la segunda derivada de la energía potencial evaluada en la configuración de equilibrio.

Esta conclusión se obtiene con base en el desarrollo de la energía potencial en la proximidad de una configuración de equilibrio. Si x es el único grado de libertad en una configuración de equilibrio, la energía potencial total de un sistema mecánico conservativo se puede expresar como:

$$V_n = (1+\Delta)^n V_0 = V_0 + n\Delta V_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 V + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 V_0 + etc.$$

$$x_n - x_0 = n\Delta x, x = \frac{x_n - x_0}{\Delta x}$$

$$V_n = V_0 + \frac{x_n - x_0}{\Delta x}\Delta V_0 + \frac{\frac{x_n - x_0}{\Delta x}(\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 1)}{2!}\Delta^2 V + \frac{\frac{x_n - x_0}{\Delta x}(\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 1)(\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 2)}{3!}\Delta^3 V_0 + etc.$$

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\frac{dV(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)}{2}\frac{d^2V(x_0)}{dx^2} + ...$$

$$\Delta V = V(x) - V(x_0) = (x - x_0)\frac{dV(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2V(x_0)}{d^2x}\Big|_{x=x_0} + ..$$

En una configuración de equilibrio $x = x_0$, la primera deriva $V^{'}(x)$ es igual a cero, por lo que para pequeños cambios la posición $x - x_0$, el signo del cambio en la energía potencial depende de

$$\Delta V = \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2V(x_0)}{d^2x}\Big|_{x=x_0} + ..$$

Para ΔV sea positiva, lo cual significa que para cualquier pequeño cambio de posición desde la posición de equilibrio $x = x_0$ el cambio en la energía potencial es positivo, la segunda derivada debe ser positiva. Este cambio se indica en la figura 2.

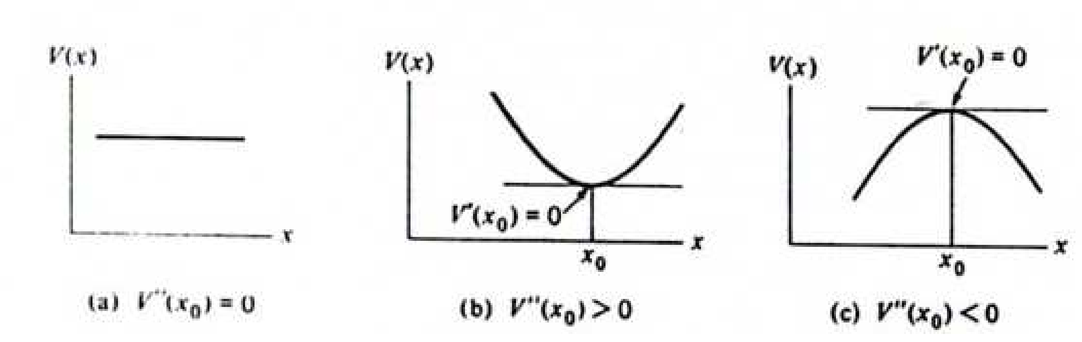


Figura 2. Criterio energético para la estabilidad del equilibrio

En la figura 1c, la segunda derivada es negativa en la posición de equilibrio, entonces la posición de equilibrio es inestable ya que el signo de ΔV es negativo para cualquier cambio de posición. Si la segunda derivada es igual a cero en la configuración de equilibrio, no se puede tomar una decisión sin recurrir a la derivada de orden superior. Este caso, mostrado en la figura 1a, se llama comúnmente caso crítico de equilibrio neutro (Bickford, 1997).

Cuando la segunda derivada se anula en $x = x_0$, es necesario evaluar las derivadas superiores para calcular la estabilidad. Con $V^{'}(x_0) = V^{''}(x_0)$, escribimos

$$\Delta V = \frac{(x-x_0)^3}{6}\frac{d^3V(x_0)}{dx^3} + \frac{(x-x_0)^4}{24}\frac{d^4V(x_0)}{dx^4} + \ldots$$

Para el cambio pequeño $x - x_0$, el signo de ΔV está establecido por el término $(x-x_0)^3 V^{'''}(x_0)/6$. Si $V^{'''}(x_0) \neq 0$, el signo de $(x-x_0)^3 V^{'''}(x_0)/6$ será negativo para $x > x_0$ o para $x < x_0$; esto es, ΔV será menor que cero para cualquier desplazamiento desde la configuración de equilibrio. Por tanto, si $V^{''}(x_0)$ y $V^{'''}(x_0)$ ≠ 0, la configuración de equilibrio será inestable. Esto corresponde a lo que se llama punto de inflexión de la función energía potencial.

Si tanto $V^{''}(x_0)$ = 0 como $V^{'''}(x_0)$ = 0, la cuarta derivada debe evaluarse. Si $V^{IV}(x_0)$ > 0, la posición de equilibrio es estable y si $V^{IV}(x_0)$ < 0, la configuración de equilibrio es inestable. Si $V^{IV}(x_0)$ = 0, se debe considerar derivadas de orden superior.

Debería quedar claro al estudiante que este análisis es equivalente al de los máximos y mínimos de funciones de una variable, el cual se estudia en cálculo, y que en la presente clase de problemas físicos requerimos que la energía potencial sea un mínimo apropiado para tener equilibrio estable.

Conclusión

Nuestra aportación es una análisis epistemológico del fenómeno físico de energía potencial, para estudiar la estabilidad del equilibrio de una partícula que se mueve sobre una superficie lisa como una forma de construcción del conocimiento, donde nos proporcionan elementos que relacionan el cálculo y los fenómenos físicos para un cambio epistemológico del cálculo escolar por medio de una visión Newtoniana-Tayloriana, considerando a la predicción como práctica social y eje para reorganizar el Cálculo escolar (Hernández, 2006). En particular en la modelación matemática de los problemas de ingeniería, en la cual se localiza una sólida entidad conceptual y algorítmica que da pie a nuevos acercamientos didácticos y que pueden estar inmersos en los estudiantes en una situación escolar, tal es el caso de las prácticas sociales de la predicción que favorecen la construcción del conocimiento matemático y físico.

Referencias bibliográficas

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. México. Editorial CECSA, vol. I.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav, IPN.

Bickford, W. (1997). *Mecánica de sólidos, conceptos y aplicaciones*. Mc Graw Hill/Irwin. México

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2003). *Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados*. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(1) (pp. 73-78). México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Edward, H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. U.S.A. Springer–Verlag.

Galileo (1991). *Dialogues Concernig Two New Sciences*. Translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio. U.S.A. Prometheus Books.

Hernández, H. (2006). *Una visión soioepistemológica de la matemátización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría no publicada. UNACH.

Timoshenko, S. (1953). *History of Strenght of materials*. U.S.A. McGraw-Hill Book Company.

USO DE LAS GRÁFICAS DESDE UNA PERSPECTIVA INSTRUMENTAL. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Eduardo Carlos Briceño Solís, Francisco Cordero Osorio
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN México
ebriceno@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología, tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *El documento brinda evidencias de cómo el uso de calculadoras gráficas no está integrado para que el estudiante construya conocimiento matemático. Para entender lo anterior, se optó por un marco que estudia la manera en que afecta la tecnología a su conocimiento por un proceso de instrumentación e instrumentalización. La aproximación socioepistemológica que estudia los usos del conocimiento, considera a la "Graficación" como una práctica social generadora del conocimiento matemático y lo estudia a través del constructo "uso de las gráficas". Con la conjunción de estos marcos se analizo las producciones de los estudiantes en una situación de aprendizaje con el uso de calculadoras y sensores. Se encontró indicadores de que justo el "uso de las gráficas" norma la instrumentación e instrumentalización de dicha tecnología.*
Palabras clave: "uso de gráficas", instrumentalización, instrumentación y tecnología

Introducción

La tecnología escolar tiene un impacto positivo parcial, dentro los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 2002). En el sentido de que brinda al estudiante la oportunidad de desenvolverse en distintos ambientes de forma dinámica. Sin embargo, cuando se revisan teorías educativas más comunes, tales como: constructivismo, conductismo, teoría de los campos conceptuales, teoría de las situaciones didácticas, entre otros, se percibe que parecen insuficientes cuando se desea analizar con precisión, cuál fue el impacto que se adjudica a la tecnología escolar en función de lo que aprendieron los estudiantes (Ballesteros, 2007). Lo anterior refiere a cuánto influyó el uso de la tecnología escolar en el aprendizaje del estudiante. La investigación que se describe en el documento ha cuestionado el papel del uso tecnológico escolar como factor en el aprendizaje de las matemáticas. A partir de la revisión bibliográfica que se realizo, se ha definido el problema de investigación: *las dificultades que se encuentran cuando las tecnologías escolares no están integradas a las formas de construir conocimiento matemático en el estudiante.* La escuela francesa considera que para resolver tal problemática es necesario que la tecnología se integre al estudiante para resolver sus actividades matemáticas. Se crea entonces el marco de la génesis instrumental, que concibe que el artefacto (dispositivo tecnológico) se convierte en un instrumento (la palabra instrumento tiene un significado más profundo) producto de la propia construcción del estudiante (Artigue, 2002), (Trouche, 2000; 2004) y (Defouad, 2000).

Nuestra perspectiva para resolver tal problemática, es optar por la aproximación socioepistemológica, ya que considera a la práctica social como el medio para estudiar la construcción social del conocimiento matemático. Al estudiar los usos del conocimiento se estudia los métodos del "uso de las gráficas" como un constructo donde damos evidencias de nuestra hipótesis de que es esté uso es lo que norma una integración tecnológica en una situación específica. A continuación presentamos algunas dificultades del uso de calculadoras gráficas, nuestros marcos teóricos y evidencias de nuestra hipótesis.

El estudio del comportamiento al infinito

En Trouche (2005a), reporta que el estudiante con el uso de la calculadora gráfica, no logra incorporarlo a su conocimiento matemático. Se considera que una posible causa es debida a la representación gráfica de la función que en la "ventana" de la calculadora no la representa en su totalidad. Esto llevo al estudiante a que tenga una apreciación equivocada del comportamiento de

la función según su expresión analítica. Algunas evidencias al respecto son discutidas por Trouche de la siguiente manera: en el estudio se detectó un alto porcentaje de estudiantes que contestaron correctamente a técnicas con lápiz y papel. Pero sintomáticamente con el uso tecnológico la situación se invierte, los estudiantes responden equivocadamente con el uso de calculadoras gráficas a la siguiente pregunta "*Dada la función* $f(x) = \ln x + 10 \sin x$ *(ilustración 1) ¿Si* $x \to +\infty$ entonces $f(x) \to +\infty$ *?"* Ante esto nos preguntamos, ¿Qué les llevo a tales razonamientos erróneos con el uso de la calculadora gráfica?

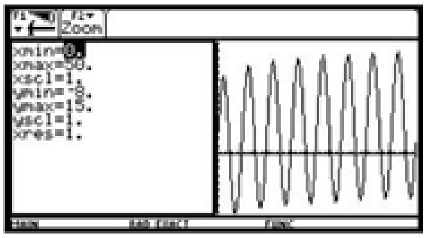


Ilustración 1. Gráfica de la función $x \mapsto \ln x + 10 \sin x$ (Trouche, 2005a).

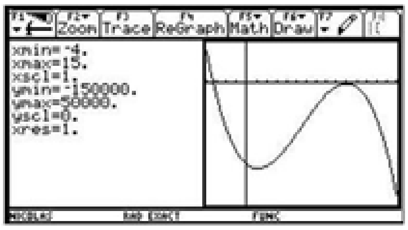


Ilustración 2. Gráfica del polinomio (Trouche, 2005b).

Otro ejemplo de comportamiento al infinito es la siguiente actividad: "Dado el polinomio $P(x) = 0.03x^4 - 300.5003x^3 + 5004.002x^2 - 10009.99x - 100100$ (ilustración 2), determinar el límite de este polinomio cuando $x \longrightarrow +\infty$ y dar una ventana de su calculadora que ilustre este resultado". En esta actividad se encontró diversidad de comportamientos de los estudiantes lo cual se clasificaron por sus procedimientos de solución (Trouche, 2005b). Lo anterior nos lleva a reflexionar ¿por qué se identificaron distintos comportamientos de los estudiantes, a la luz de analizar sus procedimientos? En otras palabras, ¿Qué ha llevado a tal comportamiento del estudiante con el uso de la calculadora gráfica?

Esta investigación es un ejemplo de fenómenos con el uso tecnológico, existen más ejemplos en otras investigaciones Trouche (2000; 2004), Artigue (2002) y Defouad (2000). Estos autores afirman que la integración de esta matemática con la ayuda de las calculadoras gráficas al conocimiento matemático del estudiante no es fácil, su estudio requiere cuidado para entender la matemática creada por el estudiante.

La génesis instrumental

La Génesis Instrumental es un concepto que surge de observaciones cuando se ha implementado la tecnología escolar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es un tema en el que Artigue se ha interesado, como profesora e investigadora desde hace más de diez años (Artigue, 2007). Este concepto está en desarrollo, pero actualmente cuenta con suficientes bases teóricas que permiten demarcar directrices específicas para el educador o investigador en educación. El foco de preocupación de la teoría, es que la tecnología escolar incrementa habilidades o técnicas, pero también se cuestiona ¿de qué manera este incremento de habilidad o técnicas está afectando la parte conceptual? Es decir, hay una preocupación si en realidad el estudiante esta aprendiendo. Por lo anterior, este marco ha desarrollado dos elementos teóricos para atender a tales preocupaciones del uso tecnológico. Nos referimos a la *instrumentalización* enfocada al conocimiento del propio artefacto a usar y la instrumentación, elemento que hace que el estudiante se adapte a la tecnología de tal forma que con su uso genere cierto tipo de conocimiento matemático (Artigue, 2002; Trouche, 2004).

La Aproximación Socioepistemológica

En la Aproximación Socioepistemológica, se estudian los "usos" del conocimiento en situaciones específicas. Estos usos consideran a las prácticas sociales como un medio para estudiar como se construye el conocimiento matemático escolar, ya que señala otras dimensiones que nos son explícitas de la actividad matemática anclada a los conceptos, como son las prácticas en lo social y las argumentaciones en lo situacional (Cordero y Buendía, 2005). La graficación es considerada una práctica social, en la socioepistemología, y no asociada directamente al concepto de función. Como se estudian los usos del conocimiento se concibe el término "uso de las gráficas" como un constructo, el cual tiene un desarrollo epistemológico, puesto que al manifestarse un uso de un conocimiento X en una situación específica, el uso provino de otro uso de un conocimiento Y: el funcionamiento (la tarea) y la forma (la clase de tareas) debaten (uso del conocimiento Y) para que surja un nuevo funcionamiento y una nueva forma (uso del conocimiento X) (Cordero y Flores, 2007). Entonces se detectan funcionamientos y formas del uso de las gráficas que llevan al estudiante construir conocimiento matemático.

Con estos dos marcos teóricos el trabajo reporta indicadores de cómo "el uso de las gráficas" norma una integración tecnológica en una situación específica. Se encontró funcionamientos y formas de las gráficas que normo la instrumentalización e instrumentación de la tecnología en una situación específica.

Evidencia de la normatividad del "uso de las gráficas" en una situación especifica

En Briceño (2008) se reporta algunos indicadores de cómo el "uso de las gráficas" norma cierta integración tecnológica en una situación específica. Se analizo de manera conveniente los datos de una situación de modelación del movimiento realizada por Torres

(Torres, 2004). Esto por la dinámica interactiva del estudiante y calculadoras con sensores de movimiento. Otra razón es que al modelar el movimiento, los estudiantes simulan y explican sus resultados a través de las gráficas obtenidas. Es decir, hacen un "uso de las gráficas" para explicar fenómenos de cambio, donde la variación tiene un sentido específico que no depende de las propiedades analíticas de la función que ahí interviene.

La situación es la siguiente: Se pide a los estudiantes (nivel medio superior de primero, tercero y quinto semestre) resolver la actividad que consiste en bosquejar la gráfica de posición de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros pero que durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. El trabajo de los estudiantes se efectúo en dos momentos la graficación a papel y lápiz y simulación con el uso de la tecnología. Presentamos, primero extractos de explicaciones de los estudiantes de sus gráficas simuladas y posteriormente el análisis donde se explica como el uso de las gráficas norma la instrumentalización e instrumentación de la tecnología.

Extractos

Se presenta las explicaciones de Juan Pablo donde se les cuestiona por la investigadora el porque la diferencia de sus dos gráficas la de lápiz y papel y simulación con la tecnología (ilustración 3 y 4)

1. Profesora guía: ¿Cuál es la diferencia entre la 1ª y la 2ª?

2. Juan Pablo: La diferencia son las curvaturas.

3. Profesora guía: ¿Qué significan esas curvaturas?

4. Juan Pablo: Primero que nada… son los momentos…

5. Profesora guía: Y eso… ¿qué significa?

6. Juan Pablo: Esto significa que hay una disminución de la velocidad, entonces cuando va a dar la vuelta, hay una disminución, llega aquí y no hay velocidad, se da la vuelta vuelve a haber otra velocidad y hay otra velocidad empieza a caminar.

7. Juan Pablo: Nuestro error es haberlo presentado de golpe

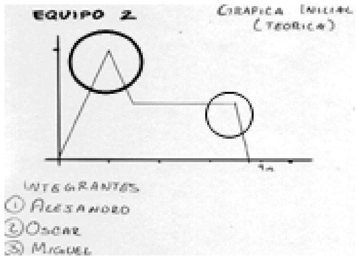


Ilustración 3. Gráfica a papel y lápiz

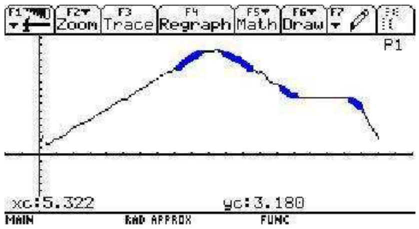
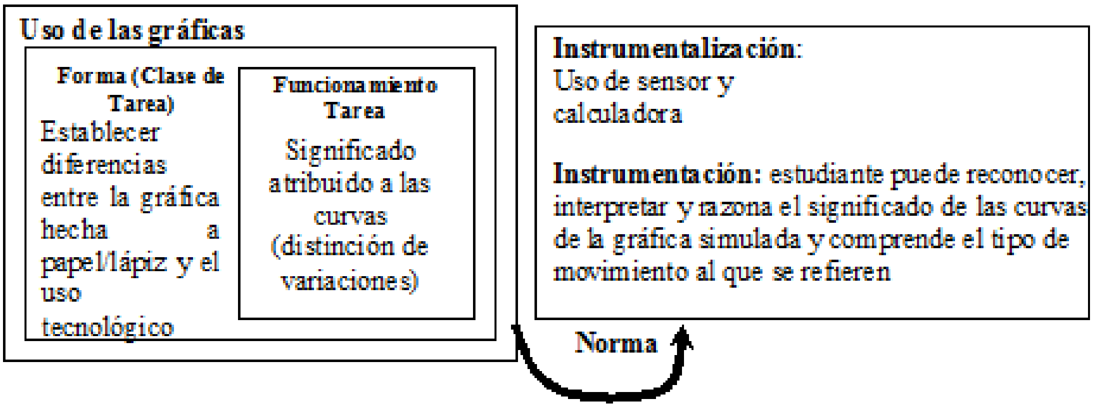


Ilustración 4. Gráfica con el uso tecnológico

Análisis de los datos

Se identifico la forma del uso de las gráficas, es decir, la clase de tareas en la que trabajo Juan, que fue el de *establecer diferencias entre la gráfica* a papel y lápiz y de simulación. Esto llevo a un funcionamiento (la tarea) que es haberle atribuido un significado a las curvas (Extracto 4). La actividad intencionada al "uso de las gráficas" llevo a la instrumentalización, es decir, conocer y adaptarse al uso del sensor y la calculadora. Porque pudieron definir los tiempos, las distancias y velocidad en la que Juan se va a mover. La instrumentación se aprecia en las explicaciones de Juan, él observar la gráfica e interpreta y razona el tipo de movimiento que se hizo (ilustración 4; extracto 6 y 7).En este sentido Juan le dio un uso de la gráfica al reconoce un error en la elaboración de la gráfica a papel y lápiz (extracto 7).

Lo anterior se debe a que él reflexiona que esto implicaría un movimiento muy brusco que ninguna persona podría simular con el sensor, ya que una persona no puede llevar en todo momento un movimiento constante. En ese sentido Juan distingue variaciones constantes y proporcionales implícitamente con el uso de la tecnología que está integrada (entiende la tecnología) en una situación específica.



Conclusiones

La investigación ayudo a construir un marco de referencia donde se estudia una epistemología de prácticas. El "uso de las gráficas" através del funcionamientos y forma normo la instrumentalización e instrumentación en un situación de aprendizaje. De esta manera el "uso de las gráficas" es un constructo, ya que brindo indicadores de su carácter normativo para que el estudiante integre la tecnología al usarla y construya algún conocimiento matemático.

El haber relacionado la Génesis Instrumental y la Aproximación Socioepistemológica conllevó a encontrar ciertos aspectos que la Génesis Instrumental se enfoco en el objeto matemático y soslayó el estudio de su construcción con el uso tecnológico. Esto nos dio pauta, a reflexionar, de que debemos hacer estudios del uso tecnológico pero orientado hacia epistemologías de prácticas, para encontrar una génesis instrumental que rinda cuenta hacia comportamientos que modelan las gráficas (en esta situación). Esto ayudara al estudiante, a la construcción de conceptos matemáticos y robustecer el papel del constructo "uso de las gráficas", donde a través de su funcionamiento y forma, incide como un factor en el aprendizaje de las matemáticas.

El análisis presentado, es un parte de los datos analizados en la investigación (Briceño 2008). Pero es un ejemplo de haber encontrado un elemento científico de lo que norma una integración de la tecnología escolar al conocimiento del estudiante, es decir, reportamos cómo Juan al hacer un "uso de las gráficas" en la situación hizo un desarrollo (funcionamiento y forma) que lo llevó a la integración (instrumentalización e instrumentación) de la tecnología.

De esta manera se fortalece la hipótesis socioepistemológica de que la práctica social cumple con un carácter normativo en la construcción del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002).Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Artigue (2007) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En Mancera E. y Pérez C. (Eds.) *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática*. 12, 9-21.

Ballestero E. (2007) Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación en ecuación matemática*, 4, 125-137.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemológical Study. *Educational Studies in Mathematics*. 58, 299-333.

Briceño, E. (2008) *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2006a).El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral,R., Oncovían,Ol.; Farfán,R.M., Lezama,J.,Romo. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano.* Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.A.C.265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione gráfica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica,* 20, 1, 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 10(1) 7-38.

Defouad, B. (2000) *Etude de genèse instrumental liées a l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première.* Thèse de doctorat no publié. Université Paris 7 France.

Hitt F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2).

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, CICATA-IPN, México.

Trouche L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.

Trouche, L. (2004): Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process through Instrumental Orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.

Trouche (2005a). The didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument. En G Dominique & K Ruthven (Eds.), *Une Approche Instrumentale de l' Apprentissage des Mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique* (pp. 188 - 214). Montpellier, France: Mathematics Education Library Springer.

Trouche, L. (2005b). The didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument. En G Dominique & K Ruthven (Eds), *Genèses Instrumentales Aspects Individuels et Collectifs* (pp 243-275). Montpellier, France: Mathematics Education Library Springer.

UNA CARACTERIZACIÓN DE UNA POBLACIÓN DE ESTUDIANTES CON RESPECTO A SU PRODUCCIÓN MATEMÁTICA CONSIDERANDO CATEGORÍAS DE USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Estelita García, Francisco Cordero, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
egarcia@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El estudio que se presenta se encuentra en la línea de investigación construcción social de conocimiento matemático, al seno de la Aproximación Socioepistemológica. Se considera como problemática la necesidad de realizar estudios sobre el uso de conocimiento matemático en una situación específica, para contribuir en la construcción de modelos teóricos que asuman a la práctica humana como el eje explicativo de la constitución social del conocimiento matemático. Considerando el enfoque etnográfico de la metodología cualitativa, se observó un grupo de investigadores en formación en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. La investigación brindó un marco de categorías de uso del conocimiento asociado a la función matemática en el escenario observado.*
Palabras claves: Categorías de uso, producción, Socioepistemología, uso de conocimiento matemático

Introducción

Cordero (2006a) señala que el modelo que se ha adoptado para explicar la construcción de conocimiento matemático, el cual ha permeado el sistema educativo, tiene como característica principal la *centración en los conceptos*, es decir, que éstos constituyen los únicos referentes para explicar la construcción de conocimiento matemático. Por tanto, el marco para reconstruir el conocimiento es precisamente el matemático. Por ejemplo, en el estatus escolar, al Cálculo se le concibe como un saber centrado en conceptos matemáticos, tales como: la función, el límite y la derivada.

De esta manera, las epistemologías que se formulan sobre el conocimiento matemático son modeladas por la actividad matemática misma. Lo anterior, enfatiza un estatus utilitario del conocimiento matemático y, por tanto tal conocimiento no contribuye a transformar la realidad del individuo, ni éste participa en la transformación del conocimiento.

El ser humano produce conocimiento según necesidades específicas de una sociedad, la cual se ubica en un determinado contexto y momento histórico. Entonces, las circunstancias que condicionan la construcción de conocimiento matemático son de naturaleza social al seno de un grupo humano. De esta manera, se vislumbra necesario que la epistemología del conocimiento matemático reconozca a la práctica humana, en tanto su constitucional social, como fuente de construcción de conocimiento.

Marco teórico de la investigación

La investigación que se presenta se ubica en la línea de investigación de construcción social de conocimiento matemático, a través de la Aproximación Socioepistemológica (ASE) como marco teórico. La Socioepistemología surge como una aproximación teórica al seno de la Matemática Educativa y "sostiene que el conocimiento matemático, aún aquel que se considera avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas" (Cantoral, 2004, p. 1).

La ASE problematiza la construcción social de conocimiento matemático ya que no centra su atención en los conceptos, sino en los elementos que dieron origen a su construcción en una sociedad determinada, entendiendo que el saber únicamente puede ser explicado dentro del escenario que lo posibilita.

La ASE sostiene como principal hipótesis que el conocimiento matemático se construye socialmente y que las *prácticas sociales* asociadas a un saber, son las generadoras de conocimiento matemático al seno de una comunidad. Las prácticas sociales son entendidas como constructos teóricos que orienta las epistemologías en cuestión, como la normativa de la práctica humana.

Uso del conocimiento matemático

Al seno de la ASE se toma a la práctica social como la unidad de análisis en el estudio de la constitución social del conocimiento matemático, de esta forma lo que interesa del individuo es su manera de constituir conocimiento matemático.

Por ejemplo, la graficación en la ASE se considera como una práctica social, es decir, la argumentación de ciertas situaciones del Cálculo; la graficación permite construir conocimiento matemático en situaciones específicas. Por tanto, bajo esta perspectiva, la gráfica de una función no solo se considera como una representación de la misma, sino que a través de las gráficas se "formulan argumentos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los individuos son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente" (Cordero, 2006b).

Cuando el individuo realiza una práctica a través de la cual construye conocimiento, evidencia usos del conocimiento y al mismo tiempo se implica el desarrollo de tales usos.

La ASE propone construir modelos de uso de conocimiento y su desarrollo para crear marcos que ofrezcan las prácticas de referencia donde se construye la matemática.

En este tenor, la presente investigación responde a la necesidad de realizar estudios sobre el uso de conocimiento matemático para contribuir en la construcción de modelos de uso y su desarrollo y, de esta manera aproximarse a una matemática funcional para el individuo. Nuestra investigación tuvo como objetivo:

Caracterizar el uso del conocimiento matemático asociado a la función que un grupo de investigadores en formación en Matemática Educativa desarrolló en un escenario específico, para evidenciar de esta manera su producción en dicho escenario.

En la investigación la noción de uso de conocimiento matemático tuvo un papel central, motivo por el cual se caracterizó de cierta manera, la cual se presenta a continuación:

El uso de conocimiento matemático se explica por la cuarteta *(CM, S, Fo, F):*

Para hablar de uso se debe hacer referencia a un *conocimiento matemático* (CM) en una *situación específica* (S). El uso en esa situación específica se evidencia a través de la *forma del conocimiento* (Fo) y el *funcionamiento del conocimiento* (F). Por *forma* se entiende la clase de tareas asociadas a la situación y por *funcionamiento* la función orgánica de la situación que se manifiesta por la tarea específica que compone la situación, es decir, el funcionamiento permite establecer lo que hace el individuo con el conocimiento en esa situación específica. "Las tareas hacen referencia a las construcciones, actividades, acciones, ejecuciones o alternancias de dominios que el individuo puede realizar en la situación" (Cordero y Flores, 2007, p. 13).

Como se mencionó anteriormente, los usos dependen de una situación específica expresada de alguna manera, donde se identifica cierto funcionamiento y cierta forma, de esta manera entenderemos por *desarrollo del uso de conocimiento* la reorganización de los funcionamientos y las formas establecidos para dar lugar a nuevos funcionamientos y formas. Asimismo, el desarrollo del uso puede dar luz a patrones de usos, obteniéndose *categorías de uso.*

Aspectos metodológicos

Población de estudio

La población de estudio que se eligió estuvo conformada por un grupo de investigadores(as) en formación, que iniciaban el primer semestre de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, Área Nivel Superior del Cinvestav – PN, México, D.F. El grupo de investigadores en formación se integró por seis mujeres y seis hombres. Cada uno de ellos con diferentes formaciones académicas, procedentes de diversos estados de la Republica Mexicana y de otro país.

Los(as) investigadores(as) en formación fueron observados en un seminario denominado: *Pensamiento Matemático*. El seminario se desarrolló considerando de manera implícita ciertos conceptos matemáticos ubicados en el dominio del Cálculo en Educación Superior. En particular, nuestro interés se centró en la *función matemática*. La forma de presentación de la función no se realizó de manera tradicional. Es decir, no se consideró el modelo de secuenciación de saberes ni conceptos matemáticos a enseñar, subordinados a una temporalización.

El objetivo del seminario no era formalizar conceptos matemáticos a través de su definición, sino explorar su proceso de construcción a través de las situaciones presentadas. En este seminario se presentaron un conjunto de doce situaciones que implícitamente versaron sobre la función matemática.

Las situaciones fueron diseñadas bajo cierta premisa de construcción de conocimiento que corresponde a la Aproximación Socioepistemológica. De esta manera, se asume que la investigación se interesó por un escenario donde el individuo usa conocimiento en su práctica, al mismo tiempo que construye conocimiento.

El desarrollo del seminario permitió inferir como objetivo del mismo: *la estructuración de diferentes formas de análisis de la función matemática, mediante las prácticas de graficación y* *visualización matemática*. Las dos prácticas anteriores no se asumen al inicio del seminario, sino que se infieren de las situaciones planteadas y el discurso del investigador que impartió el seminario.

Metodología

Para responder al objetivo planteado anteriormente, se recurrió al enfoque etnográfico de la metodología cualitativa. La postura de la investigadora consistió en una observadora no participante, no se interviene en la realización del seminario.

El seminario se desarrolló en un total de catorce sesiones, en un período de tres meses. La observación de su desarrollo permitió a la investigadora identificar y establecer cuatro etapas, las cuales se describieron de acuerdo a las situaciones presentadas y los objetivos perseguidos.

En el escenario de estudio se consideraron diversas fuentes de información tales como: observación no participante, exploraciones aplicadas a los investigadores en formación, notas de campo, grabaciones de audio y video, fotos digitales, reportes y apuntes de los investigadores en formación. Las fuentes de información se triangularon para integrar los datos.

Análisis de los datos a través de las formas y funcionamientos

La búsqueda de categorías de uso asociadas a la función matemática dirigió el análisis de los datos. Para establecer las categorías fue necesario analizar las producciones de los investigadores en formación en cada una de las situaciones presentadas (considerando las diferentes fuentes de información) y determinar formas y funcionamientos del conocimiento matemático asociado a la función. Una vez establecidas las formas y funcionamientos se determinó un patrón de uso, lo cual permitió hacer referencia a las categorías de uso (**CU**).

La naturaleza del escenario de estudio permitió reflexionar sobre la necesidad de considerar tres tipos de uso, ubicados en el contexto del cálculo: *uso gráfico de la función, uso algebraico de la función* y *uso numérico de la función*.

- El uso gráfico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas a la gráfica de una función *f*.

- El uso algebraico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas al desarrollo algebraico que permite la expresión algebraica de una función *f*.
- El uso numérico consistió en las formas y los funcionamientos asociadas a la expresión *f*(*a*) = *b*, es decir, los valores numéricos asociados a la función *f*, donde $a \in D_f$ y $b \in I_f$.

Algunos resultados de la investigación

Los diversos usos que se presentaron en el seminario permitieron identificar como método de uso, respecto a la función el *Análisis de comportamientos*. Podemos afirmar que éste fue el uso eje que integró las siete categorías de uso identificadas. *Análisis de comportamiento gráfico (ACG), Relación entre variables, Pares ordenados, Graficación por punteo, Relación función-derivadas, Variación de parámetros y Modelación-graficación*

Para fines de este escrito, se hará mención únicamente del desarrollo del uso gráfico en los investigadores en formación, señalando categorías de uso asociadas.

Durante el seminario fue posible observar un determinado desarrollo del uso gráfico asociado a las prácticas de graficación y visualización consideradas de manera conjunta. Los investigadores en formación transitaron por cuatro etapas de graficación, las cuales no se consideran excluyentes, ya que en una misma situación los investigadores podían ubicarse en más de una etapa.

En el desarrollo del seminario se observó, a través del uso, cómo los investigadores aumentaban de forma gradual la abstracción de propiedades para conformar un lenguaje gráfico que permitiera predecir una forma gráfica dada una expresión analítica o viceversa.

La tabla siguiente tiene como objetivo mostrar diversas producciones de los investigadores en formación para evidenciar las etapas que se identificaron en cuestión al uso gráfico y, que refieren al análisis de comportamientos gráficos. Las producciones presentan en las tablas se relacionan con iniciales que indican al investigador en cuestión.

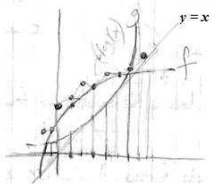
Situación 5: Dadas las gráficas de las funciones *f* y *g*, obtener la gráfica de la función $h = f \circ g$.	Situación 6: ¿Qué modificaciones sufre la gráfica de la parábola cuando se le suma a su expresión analítica una función lineal?
CU: Graficación por punteo *Sesión 5, 04/10/2007, Lu, E, K*  Figura 1: Bosquejo de la gráfica $y = f \circ g$	**CU: ACG** *Extracto 1,11/10/2007, sesión 6, MV* **MV**: cuando la <u>recta</u> es <u>decreciente</u> la <u>mueve a la derecha</u>, si es creciente el vértice se mueve a la izquierda. *Extracto 2, 11/10/2007, sesión 6, R* **R**: Como que la recta desplaza a la parábola, pero <u>conserva la concavidad</u>.

Tabla 1 (parte 1): Producciones de los investigadores y categorías de uso asociadas

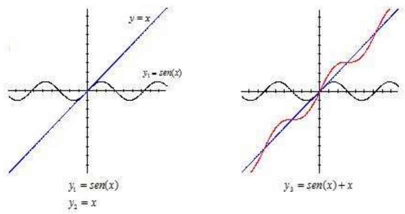
Situación 9: Explicar usando la calculadora ClassPad 300 los efectos gráficos que ocurren cuando a una función cúbica se le suma una función cuadrática.	Explicar los efectos gráficos que ocurren cuando a la función seno se le suma una función polinomial.
CU: Variación de parámetros *Extracto 3, 18/10/2007, sesión 9, F* **F**: yo vi una cosa, el parámetro *a* lo puse en [-5, 5] para ver, una forma de la parábola así, pero traslada así, de no hacer el cambio así como se muestra, del lado derecho hace una función suave, no le mete así algo.  Figura 2: Imagen de un investigador en formación al momento de explicar F: <u>la gráfica resultante se forma de esa manera, cuando la parábola se va haciendo hacia la derecha horizontalmente, la gráfica resultante pierde esa forma y agarra como una línea</u>.	CU: ACG, variación de parámetros  Figura 3: Gráfica de la función $y = sen(x) + x$ *Extracto 4, 22/11/2007, sesión 13, D* D: La gráfica resultante de la operación suma se comporta como la función polinomial para valores grandes de *x* y, para valores en un intervalo alrededor del punto (0, *f*(0)) la función resultante toma la forma de la función seno.

Tabla 1 (parte 2): Producciones de los investigadores y categorías de uso asociadas

Etapa 1: Se consideran parejas de pares ordenados asociados a la función correspondiente. Los puntos se asociaron con características de las gráficas, tales como: cortes con los ejes, cambios de concavidad, puntos máximos o mínimos. Por ejemplo, en la situación 5 para bosquejar la gráfica de la función composición fue necesario ubicar puntos en el plano, según la definición analítica de la función composición, considerando cortes entre gráficas, intersecciones con los ejes, tal y como se observa en la figura 1.

Etapa 2: El análisis se realizó de tal forma, que se consideró el comportamiento global de la gráfica través de la determinación de patrones. Es decir, ahora los investigadores no observaban únicamente puntos, sino comportamientos, aunque aún asociados a puntos específicos de la gráfica, por ejemplo el vértice de la parábola, como se observa en la situación 6.

Etapa 3: El análisis de comportamiento se realiza considerando a la gráfica como un objeto susceptible de experimentar movimientos. Los investigadores implícita o explícitamente variaron los parámetros asociados a la estructura algebraica $f(x) = A[f(BX)+C]+D$. En el ejemplo de la tabla (situación 9), se varía el parámetro *a* de la expresión $y = x^3 + (x-a)^2$. Los investigadores en esta etapa logran visualizar el comportamiento tendencial de la función $y = x^3$, es decir, a qué se parece la gráfica cuando se le suma una función cuadrática. Los investigadores ya no centran la atención en puntos, sino en comportamientos de una gráfica con respecto a otra. El análisis se realiza en un intervalo alrededor del punto (0, *f*(0)).

Etapa 4: El análisis nuevamente se realiza mirando el comportamiento de una gráfica con respecto a otra, sin considerar la fijación en puntos, pero en esta etapa se determinan patrones de comportamiento para explicar y predecir la forma grafica de *una familia de funciones o de tipos de funciones*: polinomiales, racionales, trigonométricas, tal y como se observa en el extracto 4.

La integración de las cuatro etapas permitió analizar el comportamiento de las curvas asociadas a las funciones primero por partes y, luego como entidades completas dotadas de cierto significado.

Consideraciones finales

En esta investigación se analizó la producción sin intervenir en su proceso, pero considerando el escenario, el cual resultó *ad hoc* para la construcción de conocimiento matemático. El uso fue el elemento que permitió mirar las producciones de los investigadores en formación y evidenciarlas en términos del binomio graficación-visualización. Se dio muestra de cómo el uso de la función matemática se desarrolló y de cómo *evolucionó según las maneras de hacer de los investigadores en formación.*

El desarrollo del uso en un escenario específico puede mirarse como un mecanismo de construcción de conocimiento, al mismo tiempo que evidencia indicadores de conocimientos institucionalizados. Es decir, el desarrollo del uso deja ver un conjunto de elementos constantes, a pesar de las diferentes formaciones y lugares de procedencia de los investigadores. Por ejemplo, en la tabla anterior se observa que todos los investigadores sienten necesaria la graficación por punteo. Lo anterior, refiere a la presencia de conocimientos institucionalizados.

Referencias bibliográficas

Cantoral R. (2004). Desarrollo del pensamiento matemático y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática* 17 (pp. 1–9). México: Comité latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cordero F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione gráfica nell'insegnamento apprendimento della matemática. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS HINDU-ARABES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Angélica María Martínez, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
angelicmar5@yahoo.es; marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio

Resumen. *Presentamos un breve recuento de la evolución histórica de la ecuación de segundo grado durante los siglos VII al XIII d.C., época en la que se destacan diversos aportes a la Matemática por parte de la civilización Hindú y Árabe. El trabajo pretende destacar cómo se concibieron distintas explicaciones entorno a dicha ecuación a modo de clarificar aspectos didácticos que contribuyan en el proceso de su enseñanza-aprendizaje en Educación Media. Bajo el análisis de las configuraciones epistémicas (Godino, Batanero y Font, 2008) y utilizando una metodología cualitativa, se realiza una revisión documental para concluir las situaciones-problema, técnicas, lenguajes, notaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego durante este período de la humanidad, y cómo pueden trabajarse en el aula.*

Palabras clave: ecuación de segundo grado, configuración epistémica, cultura hindú-árabe

Introducción

Por la importancia que tiene la enseñanza y aprendizaje de la ecuación de segundo grado en la educación básica, es de interés establecer posibles alternativas de tipo didáctico para su enseñanza; de esta necesidad, surge el presente informe bajo la perspectiva epistemológica, inmerso en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008). Es así, como se tiene para este trabajo el propósito de mostrar brevemente el análisis de las configuraciones epistémicas realizadas en torno a la ecuación de segundo grado durante los siglos VII al XIII d.C. En esa época se destaca la civilización Hindú-Árabe, portadora de diversos avances en el ámbito matemático y de la cual se puede destacar su trabajo con la ecuación de segundo grado.

La relevancia de un estudio epistemológico e histórico dentro de un trabajo investigativo de tipo didáctico es tenida en cuenta por muchos investigadores en Didáctica de la Matemática, tal es el caso de Artigue (1990), quien habla de los alcances del análisis epistemológico; o el caso de González (1991) que refiere los aportes específicos del conocimiento de la historia a la práctica docente; o por ejemplo Sierpinska & Lerman (1996), quienes junto con Gascón (1999) han analizado la relación entre epistemología, matemática y educación; o también Godino (2003) quien ve su implicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje; por citar algunos.

Ahondando lo anterior, el análisis histórico de las matemáticas, interpretado desde un punto de vista epistemológico, posibilita recabar información sobre los sistemas de prácticas utilizados para solucionar situaciones-problemas, en relación a marcos institucionales específicos, pero a su vez puede sustentar el tipo de técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, puestas en juego en cada momento y circunstancia. Es más, según Godino y Font (2007) la forma como estos aspectos se relacionan originan las configuraciones epistémicas; entendidas, como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas institucionales. Con el estudio de estas configuraciones epistémicas y de las entidades primarias, se puede concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada y tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo.

Gracias a esto y para dar contexto al presente informe, se realizó un estudio documental a través de la revisión y lectura de diversas fuentes, entre ellas tesis doctorales, libros de filosofía de la matemática, artículos de revistas de Educación Matemática relacionadas con el tema; para precisar el desarrollo de la ecuación de segundo grado, destacar la problemática, los métodos, los argumentos y las diferentes maneras de concebir esta ecuación durante la civilización Hindú-Árabe, a modo de reconstruir aspectos que pueden ser herramienta didáctica en el proceso de su enseñanza-aprendizaje.

Se muestra a continuación, en forma sucinta, tres apartados: Configuraciones Epistémicas de la ecuación de segundo grado, Conclusiones generales a nivel didáctico y Referencias Bibliográficas.

Configuraciones epistémicas y desarrollo histórico

Es de notar que en todo el proceso histórico en el cual se va configurando la ecuación de segundo grado, tanto el simbolismo como el trabajo de algunos personajes influyeron notoriamente para que la noción de ecuaciones en general evolucionara. Por esto, a lo largo de la historia ha sido diferente la manera de concebir la ecuación de segundo grado y más aún, difiere de cómo hoy en día la vemos. Sin embargo, las nociones cuadráticas han estado presentes en diferentes períodos históricos de las Matemáticas.

Para detallar uno de estos períodos, se tomará en el presente trabajo la evolución de la ecuación cuadrática durante la civilización Hindú-Árabe, desarrollada entre los siglos VII al XIII d.C, analizando las entidades primarias: lenguaje, situaciones problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Evolución de la Ecuación de Segundo Grado

En el año 1.020, de acuerdo a Franco (1964) el matemático Sriahara, inventó el "método hindú" para resolver la ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$, este método consistía en multiplicar los dos miembros de la ecuación por 4 veces el coeficiente de x al cuadrado, luego se agrega el cuadrado del coeficiente de x a ambos miembros y finalmente se extraía la raíz cuadrada.

Ribnikov (1987) comenta que la mayoría de los trabajos matemáticos de la cultura hindú, quedaron plasmados en los libros: Sutras y Vedas. En estos libros se manifiesta el uso del teorema de Pitágoras, métodos de cuadratura de círculos, operaciones numéricas, trabajos geométricos, etc., relacionados con problemas que vinculaban la arquitectura, la economía, la producción, entre otros.

Diversos aspectos señalados por Orellana (1996), indican que los hindúes usaron en un inicio el lenguaje retórico pero luego pasaron al sincopado (sincopar viene de abreviar) y en su mayoría las obras terminaron escritas en lenguaje poético y metafórico, planteando problemas de interés matemático. Un ejemplo es el siguiente problema, mencionado por Perelman (1959), narrado en forma de verso y que conlleva una ecuación cuadrática:

"Regocíjanse los monos

divididos en dos bandos:

su octava parte al cuadrado

en el bosque se solaza.

Con alegres gritos, doce

atronando en el campo están.

¿Sabes cuántos monos hay

en la manada, en total?” (pag. 129)

Orellana (1996) también expresa cómo los árabes toman los conocimientos de los griegos y de la cultura hindú, para retransmitirlos y ampliarlos durante sus conquistas territoriales, influyendo culturalmente en la India, Irán, Asia Menor y gran parte de Europa.

Luque, Mora y Torres (2004) al citar al árabe Tabit Ben Qurra expresan que: “*representó geométricamente el polinomio* $x^2 + 3x + 2$ *como un producto de factores, así:* x^2 *como el área de un cuadrado de lado x, a 3x como tres rectángulos cada uno de dimensiones x y 1; y a 2 por dos cuadrados de lado 1*” (pag. 212); esto se muestra en la figura 1.

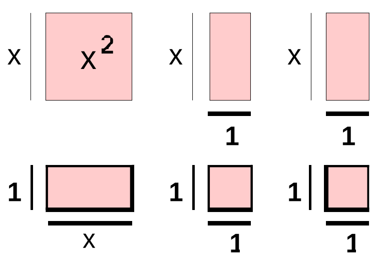


Figura 1

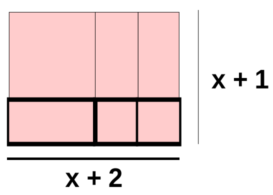


Figura 2

Ahora, lo interesante es que la suma de estas áreas equivale a un producto notable, el cual se deduce al formar un rectángulo con todas la áreas antes descritas y por lo tanto llegamos a la conclusión de que el polinomio dado equivale a la forma: (x + 1).(x + 2), tal como se ve en la figura 2.

Otro árabe, Al-Tusi (s. XII d.C.) usó ecuaciones de grado menor o igual a tres, y hasta introdujo nociones de análisis local para hallar el máximo de una función a través de la solución de una ecuación (Malisani, 1999). En general, los árabes logran aportar mucho al álgebra por la correspondencia que establecen entre ésta y la geometría para la solución de ecuaciones. Llegaron a transformar las igualdades por los principios fundamentales de “al-jabr” y “wa’l-muqabala” que significan reducción y cancelación, dados por Al-Khwarismi (750-850 d.C.) y quien según Cadenas

(2004) pudo solucionar ecuaciones de segundo grado usando la completación de cuadrados, tal como se ve en las figs. 3, 4 y 5, referentes a los casos que él denominaba: cuadrados y raíces iguales a números (actualmente de la forma $x^2 + bx = c$); cuadrados y números iguales a raíces (es decir, $x^2 + c = bx$); raíces y números iguales a cuadrados (en otras palabras de la forma $bx + c = x^2$).

Un ejemplo, es el caso de resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, para lo cual realiza el siguiente procedimiento, y cuya construcción se ve con ayuda de la fig. 6:

1.- Se comienza por construir el cuadrado de lado x, ABCD, cuya área es x^2.

2.- Luego se prolongan los lados AB y AD en 3 unidades respectivamente (obteniéndose dos rectángulos de área 6x, que serán el segundo término de la ecuación).

3.- Se completa el cuadrado construyendo un nuevo cuadrado de superficie 9 u^2.

4.- Puede verse que el área total del cuadrado es $x^2 + 6x + 9$, y por esto, para resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, se le suma 9 a ambos miembros, quedando $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16$, lo cual es a su vez $(x + 3)^2 = 4^2$, quedando $x + 3 = 4$ (considerando la raíz positiva por tratarse de distancia), y por lo tanto $x = 1$.

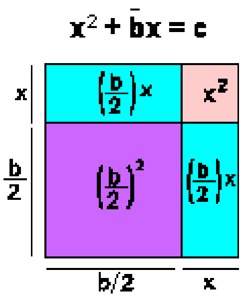


Figura 1

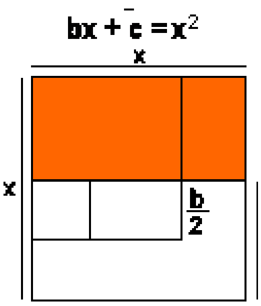


Figura 2

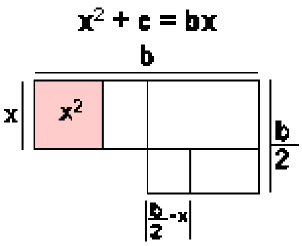


Figura 3

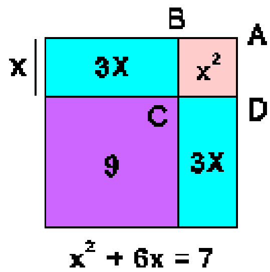


Figura 4

Elementos Primarios y Configuraciones Epistémicas

A través del anterior recorrido, donde se perciben aspectos históricos y epistemológicos, se pueden extraer conclusiones generales de cómo evolucionó la ecuación de segundo grado; pero más interesante resulta esbozar estas conclusiones partiendo del enfoque teórico en el cual se basa nuestro estudio. Según el enfoque onto-semiótico (EOS) de la cognición matemática, es de interés el análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, pues permite recabar información sobre los sistemas de prácticas, definidas como: *"toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas"* (Godino y Batanero, 1994, p. 334), puestas en juego para solucionar situaciones-problemas.

Las situaciones-problema, se refieren a *"situaciones y aplicaciones extramatemática e intramatemáticas que inducen la actividad matemática y a partir de las cuales han emergido los conceptos y teorías"* (Godino, 2003, p. 88). Es más, según Godino y Cols. (2008), un estudio epistemológico no llega solo hasta aquí, sino que también puede llevar al análisis de la tipología de los objetos primarios, con lo cual se puede describir la actividad matemática y los productos resultantes de la misma, y para esto considera a dichos objetos primarios en: *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, etc.), *Situacionales-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.), *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.), *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos...), *Procedimientos* (algoritmos, técnicas de cálculo...), Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...).

Según lo anterior, se puede ver que se presentó un uso de lenguaje entre retórico y sincopado; las situaciones problema iban acorde con las necesidades propias de las comunidades, a nivel de construcción, comercio, etc., pero comienza un interés por temas meramente matemáticos. También, entre los conceptos matemáticos usados en este período, se tiene que no se aceptaban los números negativos, ni como coeficientes de las ecuaciones, ni como raíces, muy a pesar de que, algunos matemáticos antiguos de la India, como Brahmagupta si conocían las raíces negativas y tal como lo expresan Luque y Cols. (2004) no se trabaja con ellas en lugares fuera de la China o la India, mientras que otros conceptos como recta, cuadrados, insertar, reducir; etc., si fueron usados. De las proposiciones y los procedimientos se podría decir que están el método hindú y la completación de cuadrados. Mientras que los argumentos empleados fueron al inicio la transmisión de técnicas específicas según el caso particular a resolver y luego se extendió a casos más genéricos aplicando razonamiento deductivo y geométrico.

En general, el paso por estas culturas ayuda a develar cómo el trabajo con la ecuación cuadrática fue de utilidad para aspectos socio-comerciales de la época, para el progreso intelectual-científico y las implicaciones geométrico-matemáticas desarrolladas, en consonancia con los recursos del momento.

Veamos en el siguiente cuadro una síntesis de lo analizado:

Cuadro A. Red de Entidades Primarias vs. Período histórico

Entidades Primarias / Períodos histórico	Lenguaje	Situa-prob.	Conceptos	Proposici.	Procedi.	Argument.
India (S. VII dC)	Retórico y Sincopado	Situaciones geométrica-necesidades	-números negativos -recta, rectan.	La ec. de la forma $ax^2 + bx = c$ se multiplicar 4 veces por el coeficiente de x al cuadrado...	Introducción abreviaturas y mét. Indú	Se transmite la técnica a caso particular
Arabia (S. VIII dC)	Retórico Sincopado	Situaciones geométrica-necesidades	-recta, rectan. cuadrados Insertar-reducir	Resuelven $x^2 + bx = c$ $x^2 + c = bx$ $bx + c = x^2$ por completación de cuadrados.	Completación de cuadrados Despeje de variable	Se transmite la técnica a casos generales Razonamiento deductivo

Conclusiones generales de tipo didáctico

Por lo general en la enseñanza del álgebra predomina la manipulación de símbolos de acuerdo a reglas preestablecidas, pero puede hacerse más uso del trabajo geométrico, o de las diversas técnicas que acá se expusieron, en el momento de la enseñanza de la ecuación de segundo grado, a modo de favorecer la comprensión por parte del alumno de este concepto, ya que encuentra una nueva forma de resolverla y representarla.

A través del análisis epistemológico, se puede tener una visión más global del lenguaje, los problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que han entretejido el surgimiento de este objeto matemático, con el fin de precisar su origen y rescatar su importancia tanto en el contexto matemático como en el educativo, sobre todo se ha podido constatar lo enriquecedor de este período histórico en el aspecto geométrico al momento de resolver una ecuación de segundo grado.

Tal como sucedió en la historia y basándonos en la solución de problemas, se podrían considerar ciertas etapas para superar los grados de dificultad en el aprendizaje de la ecuación de segundo grado. Se podría pasar:

1º De lo sencillo, formulando problemas que involucren ecuaciones de segundo grado incompletas con sus múltiples variantes y con coeficiente 1 para la variable al cuadrado.

2º Luego, formular situaciones en las que el alumno agregue términos para que un binomio se convierta en trinomio cuadrado perfecto.

3º Planteando problemas con ecuaciones de segundo grado completas que requieran el uso de los métodos de Al-Kwarizmi, los cuales en el fondo pretenden analizar como convertir la ecuación emergente en trinomio cuadrado perfecto (o hacer variantes con el método de Sriahara).

4º Pasar luego, a realizar la construcción gráfica de los anteriores problemas, para darles conexión entre el álgebra y la geometría.

5º Solucionar ecuaciones de segundo grado por factorización y así profundizar en la descomposición en factores de la ecuación dada.

6º Llegar a los casos donde la ecuación de segundo grado contenga un número distinto de 1 en la variable al cuadrado, lo cual llevará a su resolución con la fórmula general.

7º Por último, llegar a la enseñanza de las manipulaciones operativas de carácter literal, para solucionar las ecuaciones de segundo grado completas, con diversas aplicaciones.

Finalmente, estas conclusiones son apenas un pequeño aporte, sólo al momento de establecer contacto de este tema con los alumnos es que podemos establecer otras estrategias. Lo importante es que a través de este rescate histórico-epistemológico del desarrollo de la ecuación cuadrática, podemos vislumbrar cuan importante es la enseñanza de ésta y posibilitar otras maneras para enseñar este objeto matemático y convertirlo en un tema más accesible a nuestros alumnos.

Referencias bibliograficas

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10* (2/3), 241-286.

Cadenas, R. (2004, Noviembre). *La ecuación de segundo grado. Un estudio Histórico - Didáctico*. V Congreso Venezolano de Educación Matemática. Instituto Pedagógico de Barquisimeto "Luis Beltrán Pietro Figueroa", Barquisimeto, Venezuela.

Franco, R., (1964). *Didáctica del álgebra, la geometría y la trigonometría*. Medellín, Colombia: Bedout

Gascón, J. (1999). *Epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática. Posición de la Didáctica Fundamental*. XIII SI-IDM. Madrid, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.ugr.es/local/jgodino/ indice_eos.htm

Godino, J. D., y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 10 de abril de 2007, de http://www.ugr.es/local/ jgodino/indice_eos. htm

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 8 de junio de 2008, de http://www.ugr.es/ local/jgodino/indice_eos.htm

González, U. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 9(3), 281-289

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2004). *Algebra Antigua.* XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. *Revista IRICE*. *13*, 105-132

Orellana, M. (1996). *Historia de la Matemática*. (2ª ed.). Caracas, Venezuela: Autor.

Perelman, Y. (1959). *Algebra Recreativa*. Moscú: Ediciones en lenguas extranjeras.

Ribnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática* (J. D. Godino, Trad.). En: Bishop, A. J., et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876.

UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO EN LA PRÁCTICA TOXICOLÓGICA

Isabel Tuyub, Ricardo Cantoral, Francisco Cordero
Cinvestav-IPN México
ituyub@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación evidencia la función normativa de la práctica social, en el momento en que una comunidad de toxicólogos produce conocimiento innovador, a través del estudio de la práctica de un científico experto (M). Se utiliza una metodología etnográfica apoyada con un Modelo que presume explicar la construcción del conocimiento de acuerdo a la función normativa de la práctica social, enfatiza la descentración de los conceptos, tomando en cuenta al saber en la práctica. Los datos se obtuvieron por el análisis de situaciones clave, considerando tres ejes de análisis (análisis de prácticas, identificación de saberes funcionales y determinación de procesos de institucionalización en su toma de decisiones). Se apreciaron procesos de institucionalización al manifestar qué es lo que le permite a M hacer lo que hace, por medio de su toma de decisiones. Se identificó que M utilizó la optimización-estandarización como un mecanismo de construcción y saberes funcionales, en particular se evidenció la importancia de la functilidad (uso del concepto función).*
Palabras claves: prácticas sociales, modelo, institucionalización, toxicólogos

Introducción

Una problemática de la matemática educativa son los cuestionamientos sobre cómo se construye conocimiento matemático, entender los procesos de aprendizaje, incidir en el sistema didáctico, además de cómo se puede lograr una visión científica del mundo. Se ha reflexionado que el problema de la enseñanza de las matemáticas no es un problema matemático sino social ya que se ha desarrollado porque ha estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 1998).

Por ello es de suma importancia estudiar la construcción de conocimiento matemático en otros dominios, donde no es expresamente el objeto de estudio pero si se encuentra en su carácter funcional, con la intención de inferir cómo "vive" y cuál es su importancia.

Marco Teórico

La investigación se interesa en comprender por qué se hace lo que se hace desde el propio marco de referencia de quien actúa, para ello se consideró conveniente abordarse bajo un *enfoque socioepistemológico,* caracterizado como una *epistemología* que modela las *prácticas sociales* que le dan origen, que son fuentes y explican la construcción del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003). Se considera una *teoría particular* porque no trata de generalizar elementos teóricos sino más bien dar evidencia de ellos a través de los datos encontrados en sus investigaciones.

Objetivo y problema de la investigación

El objetivo es evidenciar la *función normativa de la práctica social* cuando una comunidad científica de toxicólogos (científicos que estudian los efectos adversos que producen las sustancias químicas en los organismos vivos) produce conocimiento innovador. Apoyado en un Modelo Teórico que diseñamos con la intención de entender qué elementos intervienen en la construcción de un conocimiento.

En (Covián, 2005) y (Cordero, 2006) se reporta que la función normativa de la práctica social se evidencia en los *procesos de institucionalización* de las prácticas. Entonces ¿Cómo se produce la función normativa de la práctica social en el proceso de institucionalización de las prácticas, cuando una comunidad produce conocimiento? Fue la pregunta que motivó esta investigación, lo que llevó a aterrizarla al preguntarse ¿Cómo construyen conocimiento innovador los toxicólogos, a través de la realización de un *protocolo* nuevo (conjunto de pasos a seguir para realizar un experimento de importancia en su campo) sobre la identificación de genes, para impactar en su comunidad?

Modelo Teórico de "Construcción" (MTC)

El MTC se edificó al seno de una comunidad Socioepistemológica en discusiones sobre el *aprendizaje como cambio de práctica*. Este Modelo presume explicar la construcción del conocimiento de acuerdo a la *función normativa* de la práctica social, enfatiza la descentración de los conceptos considerando al *saber* en la práctica. También se desea darle evidencia experimentalmente para modificarlo o apreciar su robustez. Un antecedente al mismo se encuentra en (Tuyub y Cantoral, 2007).

Se observa el esquema del Modelo en la figura 1: Se parte del supuesto teórico de la existencia de prácticas sociales como base del conocimiento, con la intención de no permitir una regresión infinita de términos, por la naturaleza de ser un estudio de prácticas. Se aprecia la relación que puede tener las prácticas, la experiencia, la socialización, el conocimiento, las creencias, las expectativas, las concepciones y las *Representaciones Sociales* (en el sentido de Moscovicci, 2003), aunado a un *saber funcional* (en el sentido de Cordero y Flores, 2007), en un contexto cultural, histórico, institucional y social. Considerar al saber permite que el Modelo no quede solo en un plano cognitivo, por ser situado, también enfocarse a prácticas y no centrarse en conceptos u objetos matemáticos.

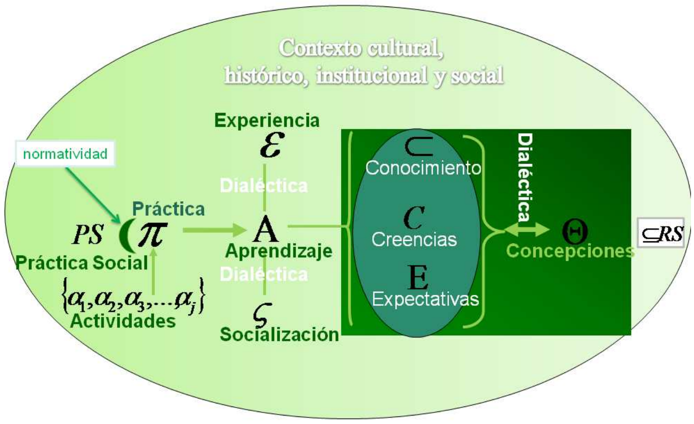


Figura 1. Esquema del Modelo Teórico de "Construcción"

Estado del arte

Existen algunas investigaciones en Matemática Educativa, dentro de la Socioepistemología, que toman en cuenta la construcción social de conocimiento y no se enfocan en un contexto escolarizado. Por ejemplo: El trabajo de (Covián, 2005), evidencia la normatividad de la práctica social con un modelo a través de la permanencia y el cambio, en la construcción de la casa tradicional maya. Canúl (2007), explicó la construcción en el momento de bordar la vestimenta típica de una comunidad maya. Ambas se realizan en un contexto cultural.

Las últimas investigaciones que estudian la construcción social de conocimiento y prácticas sociales, se enfocan en un contexto profesional: García (2008), aborda las producciones de investigadores en formación de Matemática Educativa sobre su uso del concepto función. García-Torres (2008) estudia prácticas de una comunidad profesional (ingenieros biomédicos) que produce conocimiento especializado para evidenciar cómo cierto conocimiento se origina a través de procesos de institucionalización, al inferir mecanismos de construcción de conocimiento.

Existen otras investigaciones que estudian prácticas profesionales, un ejemplo se puede apreciar en (Kent & Noss, 2001; Noss, Hoyles & Pozzi, 2000). La diferencia de estos estudios con los que está realizando la Socioepistemología está en su rigidez metodológica, cuando realizan análisis aprioris rigurosos antes de observar alguna comunidad profesional, predeterminan un objeto matemático a estudiar; al momento de observar, sus análisis los realizan con una idea previa de lo que puede ocurrir y desean encontrar, qué tanto se acercó a este y qué cosas nuevas de utilizar el objeto se localizaron. La Socioepistemología se enfoca en las prácticas, toma en cuenta la naturaleza del ambiente, utiliza estrategias más que un protocolo para el estudio y toma de guía un saber funcional.

Elementos Metodológicos

Se utilizó una metodología *microetnográfica* (Ogbu et. al, 1988 citado en Moreira, 2002) para dar evidencia de las prácticas de una comunidad de toxicólogos, por medio del quehacer cotidiano de un científico experto, capaz de tomar decisiones denominado M, un posdoctor en biología molecular (grado obtenido después de que M hizo un doctorado en genética). Se sabe que una sola persona no basta para estudiar una comunidad, pero estudiar prácticas de una persona permite realizar un estudio de una comunidad, porque su hacer no sólo depende de la experiencia sino de cierto conocimiento y expectativas, de interacciones.

Para la recolección de la información, se empleó la *observación participante*, entrevistas y grabaciones de su quehacer diario. Se realizó un análisis directo del video, una obtención selectiva de situaciones-clave por medio de tres ejes de análisis: análisis de prácticas asociadas que anteceden determinado objeto toxicológico, identificación de saberes funcionales (en particular los asociados al *uso* del concepto de *función matemática*, denominado *functilidad*) y determinación de *procesos de institucionalización* en su toma de decisiones; apoyados de transcripciones de ciertas interacciones y de lo que se infirió en sus actividades gracias a la *cotidianidad*.

Análisis de los datos

La práctica de M se basó en la elaboración de un p*rotocolo modificado* para la obtención de los genes T1 y M1 en DNA de personas expuestas a pesticidas, importante para identificar el porcentaje de la población que los poseen. Se apreciaron tomas de decisiones que dieron "luces" para saber qué es lo que permite a M hacer lo que hace, qué regula su práctica. Para ello se necesitaron de prácticas asociadas: obtención de DNA a partir de tejidos, amplificación de genes por PCR (Reacción en Cadena de la Polimerasa) y monitoreo de los genes (M1 y T1), todas organizadas para permitir la obtención del protocolo.

Para la obtención de DNA a partir de tejidos, era la primera vez que M lo realizaba, así que se basó en un protocolo que estipula los pasos a seguir; sin embargo, colocó pasos de más como cortar tejidos con tijeras:

> *E: ¿Por qué lo estás cortando?*
>
> *M: Porque te acuerdas el otro día, bueno, este es un tejido muy duro y…el otro día no lo recuperé, este, también como que no, hay que romperlo y hacerlo así…entonces para que se disuelva mucho más rápido cuando le ponga el trizol. (Sesión 11. 5'42''-6'17'')*
>
> *Utilizó el trizol para homogenizar, en lugar del homogenizador:*
>
> *M: Te acuerdas que esto lo hacia yo con el ¡homogenizador! Y, ¿si?, bueno, ya si te has fijado que esto lo he ido [habla como si se quiere reír] optimizado ¿si? [Silencio]¡No! y a parte ¡la baba! y cosas así [risas] [silencio], y yo veía que la pastilla era ¡muy poquita! lo que obtenía. (Sesión 11. 6'20''-6'48'')*

En la figura 3 se observa un esquema de los cambios que realizó M debido a la toma de decisiones, apreciadas en las reiteraciones de esta práctica asociada.

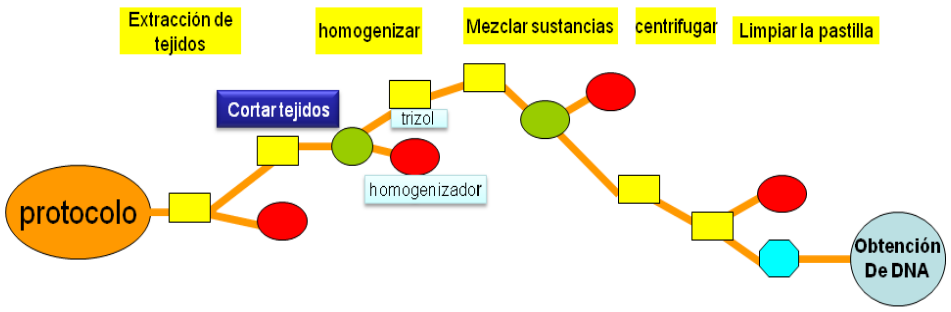


Figura 2. Esquema de la práctica asociada "obtención de DNA a partir de tejidos", realizado por M, inferido de las reiteraciones

Con respecto a la *functilidad*, en la figura 3 se puede apreciar que su práctica puede verse como una función matemática de varias variables donde tiene que decidir qué dejar constante y qué variable para determinar por qué no obtiene los resultados deseados. Otro ejemplo está dentro de su hacer y se expresa cuando dice "poco a poquito", habla de flujo:

M: Si te fijas, o sea, cada vez que estoy haciendo esto, estoy haciendo cosas nuevas, optimizo ¿si? Antes de, por ejemplo ahorita con este, no le voy a echar todo el trizol porque luego batallo para re suspenderlo, se lo voy a ir poniendo ***poco a poquito****, que si viste que ahorita se lo eché todo y estuve batalle y batalle. (Sesión 14. 73' 35''- 74' 02'').*

Una vez obtenido el DNA, M lo utiliza para realizar una PCR que consiste en colocar ciertos reactivos en determinada medida en cada DNA y obtener una "foto", como la que se aprecia en la figura 3, para ver si las cantidades que colocó son las deseadas. Este análisis de fotos en realidad es un uso de función reflejada en un análisis de gráficas en tres dimensiones: eje de las x (DNA distinto (A-J)), eje de las y (la altura en peso molecular que puede alcanzar el gen en ese DNA (va de 100 en 100 pares de base)) y la intensidad de la banda (debe ser igual para todos los DNA a estudiar). Los genes que amplifican son las bandas o segmentos definidos a determinada altura.

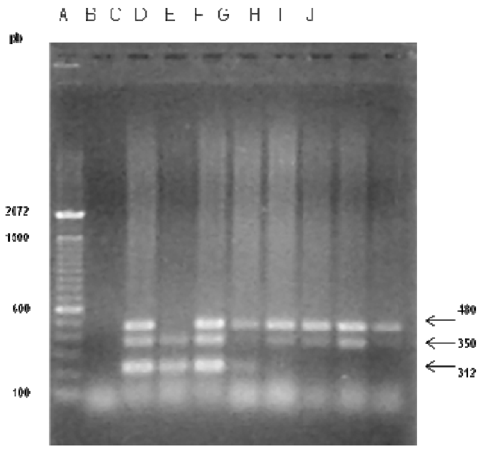


Figura 3. Gráfica obtenida experimentalmente. Resultado del esfuerzo de M. Se muestran las amplificaciones como bandas definidas aplicando su protocolo

Al preguntarse cómo M toma decisiones, el análisis de gráficas es de suma importancia porque por medio de él determina si su esfuerzo, en el que intervinieron conocimientos, expectativas, concepciones, creencias entre otros, fue certero o se requiere modificar algo más, en donde intervendrán de nuevo estos elementos. Es decir, la *functilidad* es importante para la toma de decisiones. Aunado, los procesos de institucionalización rigen su práctica cuando realiza experimentos con la intención de amplificar los genes “como debe ser”, como la comunidad lo acepte, para que permita el continuo y la utilización de su protocolo; se manifiesta un debate entre el conocimiento teórico y el experimental, con una intencionalidad que es la obtención de los genes M1 y T1 de forma clara y con la menor cantidad de recursos, esfuerzo y tiempo.

Consideraciones finales

Al estudiar prácticas, la evidencia y los datos sobrepasan el nivel del discurso explícito. La *cotidianeidad* permite conocer sus problemáticas, intereses, sus relaciones, convivencias, expectativas, creencias, concepciones, representaciones sociales; lo cual proporciona una mejor información y estudio de la población. La forma de pipetear las muestras o de colocar los reactivos son propias de la comunidad y esto se refleja cuando los resultados de su investigación son aceptados. El discurso oral oculta la naturaleza del conocimiento matemático en juego y lo vuelve funcional: “*coloco el trizol ahora **poco a poquito** para no batallar en homogenizar el tejido”.*

Se detectó *socialización* con sus colegas sobre cómo homogenizar "mejor", la *creencia* de que no salían los resultados porque tenía muchas sales los DNAs, la *concepción* de que eran los DNAs que se encontraban en mal estado debido al conocimiento sobre el tiempo de congelación, la forma de su extracción y conservación, la *Representación Social* de M respecto a ser un posdoctor, como una persona independiente y experta, regulaba su práctica al actuar como tal, y a la vez eran factores que permitían la construcción de su conocimiento en manos de saberes funcionales y procesos de institucionalización.

Con base en el análisis se apreció la importancia de la *functilidad* y el mecanismo de construcción *optimización-estandarización*, M optimiza (economiza tiempo, esfuerzo, recursos sin perder la calidad y certeza de sus datos), con la intensión de estandarizar. Es la dupla "mecanismo-función (uso)", base del mecanismo empleado por M: tubos, centrífuga, reactivos (instrumento), los emplea en sus experimentos de forma óptima (mecanismo) con base en su experiencia, conocimientos, creencias, concepciones, representaciones sociales, con la intención de estandarizar (función).

Procesos de institucionalización, evidenciados en el por qué de las modificaciones y permanencias, al momento de realizar un protocolo. Son *relativos* de acuerdo a cómo se observe lo que se desea estudiar. La permanencia y cambio solo ponen la alarma de que ha habido un proceso de institucionalización, éste se debe inferir en la continuidad de las prácticas al cuestionarse sobre qué es lo que permite esa permanencia y cambio.

Esta investigación abre una brecha al poner el foco de atención en la *descentración de los conceptos*, brinda a la Socioepistemología elementos metodológicos para el estudio de prácticas. En consecuencia amplía el panorama de la problemática que atiende la Matemática Educativa: que el "meollo del asunto" es hacer que las personas "vivan" experiencias, que construyan su realidad mediante cambio de prácticas, que infieran procesos y tomen en cuenta el sentido funcional del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Canul, G. (2007). *La práctica del bordado como generadora de conocimiento matemático*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19 (824-830). México, D.F., México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

García, E. (2008). *El uso del conocimiento matemático asociado a la función en la producción institucional. El caso de investigadores en formación en Matemática Educativa*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN.

Kent, P. & Noss, R. (2001) *Investigating the mathematical components of engineering expertise*. Trabajo presentado en la 25th Psychology of Mathematics Education Conference, septiembre, Utrecht, Holanda.

Moreira, M. (2002). *Investigación en educación en ciencias: Métodos cualitativos*. Recuperado el 6 de septiembre de 2007, del sitio Web del Programa Internacional de Doctorado en enseñanza de las ciencias de la Universidad de Burgos, España: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/metodoscualitativos.pdf

Moscovicci, S. (2003). La conciencia social y su historia. En J. Castorina (Ed.). *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles* (pp. 91-110). Barcelona, Cataluña, España: Editorial Gedisa.

Noss, R., Hoyles, C & Pozzi, S. (2000). Working Knowlegde: Mathematics in use. En A. Bessot & J. Ridgway (Eds.). *Education for Mathematics in workplace* (pp. 17-35). Netherlands: Kluwer academic publishers.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2007). Las prácticas sociales como base del conocimiento en toxicólogos. Un modelo. En G. Montiel (Ed.). *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 141 – 153). México, D.F., México: Red Cimates.

LA RELACIÓN ENTRE COMUNIDADES, PRÁCTICAS SOCIALES Y HERRAMIENTAS. LA UNIDAD BÁSICA

Magdalena Rivera Abrajan, Raúl Salas Vega
Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas México
magrivab@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Durante los últimos años, hemos escuchado hablar de los contextos sociales como parte fundamental para la construcción social del conocimiento, sin embargo, los contextos sociales por sí solos, desde nuestra perspectiva teórica, la Socioepistemología, no son tan fuertes si no se habla de las prácticas sociales, las cuales al estudiarlas no podemos aislarlas de las comunidades donde viven, al igual que de las herramientas que se construyen para realizarlas, por lo que su separación para su estudio se vuelve difícil y poco factible, por esta razón, consideramos una unidad básica entre comunidad-Práctica social-Herramientas. En este trabajo, presentamos algunos ejemplos encontrados durante nuestras investigaciones en distintas comunidades, donde ponemos de manifiesto lo antes mencionado, tomamos como base metodológica para la recolección de datos un acercamiento etnográfico. De este modo pretendemos dar bases teóricas a la línea de investigación de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, revalorando el papel de los conocimientos establecidos socioculturalmente en las distintas comunidades.*
Palabras claves: socioepistemología, comunidad, práctica social, herramientas

Introducción

Desde nuestra perspectiva teórica, la Socioepistemología, el aprendizaje es una actividad humana, que los actores realizan como una acción cotidiana en su contexto social, presentándose de manera inevitable (Arrieta, 2003). El aprendizaje en este sentido va unido a las prácticas sociales (Arrieta, 2003; Rivera, 2005) que son ejercidas en las distintas comunidades, existiendo una relación intrínseca entre prácticas sociales ejercidas y conocimiento construido. Aceptamos el acercamiento de Arrieta (2003, p.63) donde declara *"la noción de "práctica social" connota hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado".* Este acercamiento, como lo menciona incluye tanto los aspectos explícitos como los implícitos. Incluye lo que se dice y lo que se calla. Lo que se presenta y lo que se da por supuesto. Incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos las imágenes, los símbolos, *los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los contratos* que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos (Arrieta 2003, p.63). En particular, nos interesa estudiar las prácticas sociales que nos llevan a la construcción de conocimiento matemático, para posteriormente intervenir en el sistema educativo a través de ellas.

Problemática

El uso recurrente de ciertas prácticas sociales nos conduce, algunas veces, a querer sintetizar o reducir algunos aspectos con la finalidad de omitir aquello que se considera no necesario para su ejercicio. Esto la convierte algunas veces en una práctica constituida carente de la intencionalidad inicial con la que era ejercida, sin comprender que esta intencionalidad es lo que originó y dio vida a la práctica social, lo cual se refleja en la identificación de las herramientas matemáticas utilizada para su ejercicio, esto ocasiona que a pesar de que existan muchas situaciones donde la matemática es una herramienta para el mejor desempeño de las prácticas, en muchos casos, no son utilizadas y, en ocasiones, se ignora cómo pueden hacerlo.

Nuestro interés, en este sentido, gira alrededor de estudiar las relaciones existentes entre la triada comunidad-Práctica social-Herramienta en los contextos sociales donde se desarrolla la comunidad. Para ello, observamos e intervenimos en las relaciones entre personas, herramientas y prácticas sociales en las comunidades, considerando estas relaciones como una sola entidad teórica abarcadora.

Antecedentes

Algunos de nuestros antecedentes son los trabajos de Rivera (2005); Patricio, Rivera & Arrieta (2005), en estos trabajos se estudian dos comunidades, la de ingenieros en Sistemas Computacionales y la comunidad de agricultores de Huehuetán, Guerrero, respectivamente, donde observamos que a pesar de que existen muchas situaciones donde la matemática es una herramienta fuerte para el mejor desempeño de sus prácticas cotidianas, los miembros de la comunidad no encuentra una relación con la matemática aprendida escolarmente o simplemente ignoran cómo pueden utilizarla. Es decir, las matemáticas escolares no son consideradas herramientas dentro de dichas comunidades.

Así también, tomamos las bases de Trejo (2008) para la deconstrucción de la práctica, esto con el fin de recuperar las intenciones y las herramientas matemáticas utilizadas en las prácticas sociales constituidas, sin perder de vista que nuestro interés es mostrar la relación existente en la triada C-P-H. Trejo (2008) propone dos formas de hacer la deconstrucción de las prácticas, una estudiando sus orígenes (Histórica) y la otra, estudiando el ejercicio en la comunidad actual. En nuestro caso tomamos la segunda opción.

Los ejemplos

A continuación, mostramos extractos de algunas entrevistas a miembros de diversas comunidades, estas entrevistan son incluidas en trabajos de investigación ya concluidos o en proceso, sin embargo, aquí realizamos un análisis de la triada para mostrar su importancia.

La primera entrevista es tomada de Rivera (2005, pp. 68-69) y es un ejemplo de cómo las herramientas que se utilizan en las comunidades son socialmente compartidas y dependen de la intencionalidad de la práctica.

¿Tanteo?

Héctor (H), es Ingeniero Bioquímico trabaja en una planta potabilizadora de aguas residuales, en Acapulco.

M: Nos puede comentar ¿cuáles son sus actividades cotidianas?, aquí en su trabajo.

H: Sí, mira, yo me encargo de suministrar los químicos para potabilizar el agua, supervisar la contaminación de las aguas, y vigilar las descargas que llegan a la planta.

M: Utiliza alguna herramienta matemática, para realizar su actividad.

H: No ninguna

M: Nos puedes explicar ¿cuál es el proceso para la potabilización?

H: Si, mira, tengo que agregar estas sustancias (nos señala unos químicos que están en una esquina)

M: ¿Qué cantidad de sustancia tiene que agregar?

H: Mira, la cantidad te la da esta tabla (nos enseña una tabla que está en su mesa), pero muchas veces la cantidad no es la adecuada, por la contaminación en exceso del agua.

M: y entonces ¿cómo lo hace?

H: Pues mira, si no es suficiente la cantidad que marca la tabla, le agrego más y se acabó.

M: ¿Así nada más?

H: Si más o menos tú sabes la cantidad necesaria, la experiencia en este caso es lo más importante

M: Cuando llegó ¿Así se hacía?

H: Si, el ingeniero anterior me enseñó y eso me decía.

M: No te has preguntado ¿Porqué se hace así? Y ¿Qué herramientas escolares utiliza?

H: No, la verdad no, creo que eso no importa lo que importa es que realices tu trabajo bien, y eso en la escuela no lo enseñan.

La intencionalidad de la práctica es encontrar una proporción adecuada entre contaminación y solución química para tratar la contaminación, podríamos decir que lo ideal sería tener un modelo del fenómeno de la contaminación de las descargas para poder tomar decisiones acerca del mejor modo de potabilizar las aguas.

En el plan de estudios de Ingeniería Bioquímica, se lleva la materia de Ecuaciones Diferenciales, donde se modelan fenómenos de contaminación de aguas, así como la de optimización y toma de decisiones, de las cuales se podrían tomar ciertas herramientas matemáticas que les pueden servir para la realización de su trabajo. Además nos menciona algo que es muy interesante, -así me dijo el ingeniero anterior-, es decir que las herramientas que el utiliza son herramientas que le enseñaron miembros de la misma comunidad. Estas modificaciones muchas veces no son consideradas herramientas y son despreciadas institucionalmente. Sin embargo, dentro de las comunidades son aceptadas y heredadas como conocimiento empírico.

La siguiente entrevista es presentada en Rivera (2005, pp.66-67) y se pone de manifiesto herramientas diferentes con la misma base matemática planteadas en dos situaciones diferentes.

¿Es lo mismo?

Linda Angélica (L-A) es un Médico general y se le plantea la siguiente hipótesis.

Tiene que suministrar Trimetropil a un niño que pesa 12 Kg. ¿Cuál es la dosis que debe suministrar?

L-A: Cada 5 ml. es igual a 40 mg. y se suministra 10 mg. por Kg. Entonces la dosis es de 15 ml.

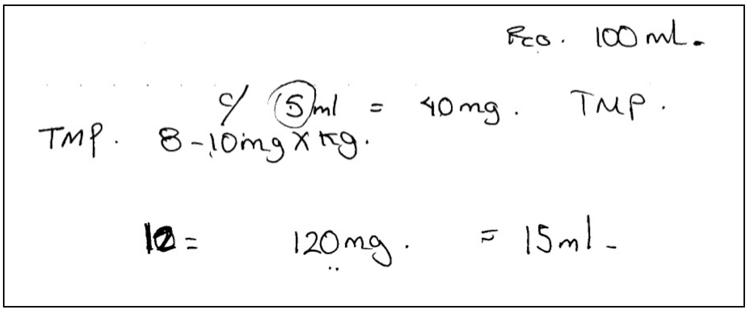


Fig. 1 Operación construida por L-A

Ahora se le pone el siguiente supuesto:

En una tienda departamental está en promoción una blusa que quieres comprar, la blusa cuesta \$120 y tiene un descuento de 30% ¿Cuánto vas a pagar?

L-A: Eso es fácil, mira el 10% es 12 pesos lo multiplicas por tres y eso es \$36 ese es el 30%, entonces la blusa me va a costar 120 menos 36, 36 menos 20 es 16 y 100 menos 16 como \$84 ¿no?

En este ejemplo nos interesa precisar acerca del papel de las herramientas en distintas situaciones, como se puede notar la base matemática es la misma en los dos casos, una regla de proporcionalidad directa, sin embargo en las dos situaciones L-A no analiza el problema desde el mismo punto de vista, en el primer caso debe cerciorarse de que lo que hace es correcto (Intencionalidad de la práctica), en el segundo caso realiza las operaciones de forma más informal y con menos precisión, una herramienta modificada de la primera, que es una herramienta aprendida en la escuela.

La siguiente entrevista se realiza en la comunidad pesquera de la Barra de Tecoanapa Gro. Y es tomada de un trabajo en proceso, que estudia las prácticas sociales en esta comunidad pesquera. Tomamos un extracto de una entrevista con un pescador que refleja cómo las herramientas dependen de la comunidad y de la práctica que se realiza.

Ubicando un Punto. El caso de los pescadores

José es un Pescador de 50 años de la Barra de Tecoanapa desde hace 45 años sale a pescar cada tercer día por la madrugada.

El comenta que existen días donde llegan bancos de peces que permanecen por varios días en el mar, "Es ahí cuando tenemos que aprovechar, pescamos seguido para poder venderlos en el mercado".

M: ¿Qué hace cuando encuentra un banco de peces?

J: Ubico lo mejor posible el lugar para poder regresar nuevamente

M: ¿Cómo hace esto?

J: Esto me lo enseño mi apá. Encuentro dos marcas (Puntos específicos en la orilla del mar, parte alta, rocas árboles, cerros, etc.) y me ubico entre ellos.

M: ¿Me puede explicar más detalladamente?

Se pone de pie para explicarme- J: Deben estar dos cosas en línea recta de mí cuando me paro en la lancha, y después busco otras dos marcas, deben estar separadas de las primeras, así sé a donde tengo que regresar después.

M: ¿Para qué te sitúas entre dos cosas, no puede ser solamente un punto?

J: No, si fuera un punto me puedo confundir, deben ser dos.

M: ¿Por qué te funciona ese método?

J: Porque es lo que utilizan todos aquí y mi abuelo, mi apá y siempre ha funcionado

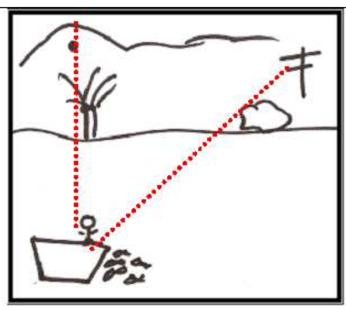


Fig. 2: Dibujo explicando la forma de encontrar el banco de peces posteriormente

En este caso mostramos cómo la intencionalidad de las herramientas no está presente, José no sabe por qué deben ser dos puntos y no uno, pero la experiencia le dice que de esa forma debe hacerse, la práctica se ha vuelto una práctica constituida y las herramientas son propias de la comunidad.

Podemos resaltar que el buscar dos puntos uno detrás del otro para visualizar una recta imaginaria y lo mismo hace con los otros dos puntos y el pescador se sitúa en la intersección de las mismas ubicando el punto aproximado de pesca.

Por último, presentamos un extracto de una investigación donde se estudia las herramientas construidas durante el ejercicio de la práctica social del tejido de hamacas (Iturbide & Rivera, 2006), y al igual que en el caso anterior nos muestra la relación entre comunidad-práctica-herramientas.

La comunidad de los artesanos del CERESO

Se entrevisto a un tejedor (P) obteniendo estos los siguientes datos:

Los tejedores toman el hilo de nylon y dan *vuelta* alrededor del *bastidor*, aclarando que:

1 vuelta = 2 hilos.

> *R: si deseo una hamaca para tres personas ¿Cuál me recomendaría?*
>
> *P: Pensando que tienen un peso aproximado de 130 Kg. Tendría que hacer la recomendada para ese peso, lo cual equivale a una hamaca de tamaño grande, es decir de 300 vueltas que son 600 hilos*
>
> *E: ¿Quién le enseño a hacer las hamacas?*
>
> *P: Aquí no se tiene un instructor en sí, el que quiere aprender aprende observando a los demás compañeros cuando están tejiendo, uno aprende por necesidad para poder sobrellevar la situación dentro del penal.*

Figura 3: Bastidor, y varias fases de la hamaca

Algo que nos llamó la atención es que ellos utilizan algunos tipos de medición como lo hacían anteriormente, como por ejemplo brazadas y gemes, que son equivalentes a un metro y una cuarta respectivamente. En los acercamientos con la comunidad hemos visto que una de las herramientas utilizadas (algunos cálculos referentes a su práctica), tiene las bases, muchas veces, de los conocimientos enseñados escolarmente, por ejemplo: 15+13= 10+10+8=28.

Nuestro interés específicamente de mostrar estos resultados es revelar cómo el lenguaje en esta comunidad es una herramienta propia de la misma, existen una amplia gama de herramientas matemáticas subyacente a las prácticas, como resistencia de materiales, relaciones entre resistencia y densidad de tejido, métodos de aproximación, etc.

Como punto final queremos mencionar que estas prácticas que muchas veces son desdeñadas son la base de nuestro conocimiento como miembros de alguna comunidad.

Conclusiones

La Unidad Básica como la hemos llamado la podemos resumir de la siguiente forma

Las comunidades, sus prácticas sociales y sus herramientas están interrelacionadas, formando una unidad básica. Las comunidades se identifican por sus prácticas sociales, durante el ejercicio de las mismas se construyen herramientas y las herramientas son conocimiento social que permiten la evolución de las comunidades. Y las podemos representar en el siguiente diagrama.

Fig. 1. Unidad básica C-P-H

Las herramientas que son utilizadas en las comunidades, dependen de sus prácticas sociales y son situacionales, dependen del contexto, del tiempo y el lugar, donde son utilizadas, es decir, depende de cada comunidad. Por lo que las herramientas pueden modificarse en la misma práctica varias veces, dependiendo de la utilidad de las mismas, es decir, las herramientas dependerán de los intereses de los actores cuando realizan la práctica, y éstas pueden ser diferentes en los actores que ejerzan la misma práctica social, sin embargo, lo que no cambia es la intencionalidad de la práctica, que se encuentra subyacente en dichas prácticas, y esto basta para construir conocimiento ya sea matemático o no matemático.

Las herramientas para nosotros no sólo son objetos físicos, sino también lo son el lenguaje y los conocimientos matemáticos construidos.

Una de las consecuencias de mostrar y evidenciar las relaciones existentes entre comunidad-práctica social-herramienta, es dar bases teóricas a la línea de investigación de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, revalorando el papel de los conocimientos establecidos socioculturalmente en las distintas comunidades. Uno de los objetivos finales es realizar las deconstrucciones de las prácticas para tomarlas como base de diseños de aprendizajes las cuales nos permitan la intervención en los sistemas educativos.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav IPN.

Iturbide, R. y Rivera, M. (2006). Las prácticas de los tejedores de hamacas en la comunidad del CERESO de Técpan de Galeana Guerrero. *Resúmenes de la X escuela de invierno y seminario Nacional de investigación en didáctica de las matemáticas*, Tlaxcala Tlax. México.

Patricio, H. Rivera, M. y Arrieta, J. (2005). Lo periódico como construcción social: En la comunidad de Huehuetán Guerrero. *Resúmenes de la IX escuela de invierno y seminario Nacional de investigación en didáctica de las matemáticas*, Chiapas, México.

Rivera, M. (2005*). La algoritmia; Una práctica social de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Trejo, M. (2008). *Hacia una deconstrucción de las prácticas: Las técnicas Bromatológicas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

BÚSQUEDA DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA COSMOVISIÓN MAPUCHE

Daniela Soto S1, Héctor Silva S1, Siegfried van-Lamoen G.2
1Cinvestav-IPN México
2 PUCV Chile
dani1064@hotmail.com
Campo de investigación: Estudios Socioculturales Nivel: Básico

Resumen. *El pensamiento matemático se puede concebir e identificar dependiendo de la perspectiva teórica en la cual el investigador sostenga sus fundamentos. En nuestro estudio concebimos el pensamiento matemático como aquel que no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana (Cantoral et al, 2005). Desde esta concepción adentramos en el estudio de la cosmovisión Mapuche, con el fin de identificar pensamientos sobre tópicos matemáticos y/o procesos avanzados de pensamiento como la abstracción. Este estudió pretende por una parte, dar visibilidad al conocimiento creado por el pueblo mapuche y por otra, proporcionar características del pensamiento matemático mapuche, que no pueden seguir siendo soslayadas en la discusión de la enseñanza contextualizada.*
Palabras claves: cosmovisión mapuche, pensamiento matemático, contextualización

El pueblo mapuche

Ubicados, hasta la llegada de los españoles, desde de el valle del Aconcagua hasta la isla grande de Chiloé, el pueblo Mapuche (Mapu: tierra Che: gente) es uno de los pueblos originarios más antiguos de Chile, y la actualidad el más numeroso que sobrevive, concentrándose la mayor cantidad en la novena región de Chile. Los Mapuches deben su nombre a su estrecha relación con la tierra que no sólo abarca el ámbito de subsistencia material, también encuentra allí su expresión espiritual, su cosmovisión, la forma en que representa al mundo, y su relación con las fuerzas sobrenaturales.

La educación del pueblo mapuche ha pasado por distintos momentos. Hasta 1881, año que se realizo la llamada “Pacificación de la Araucanía”, el pueblo Mapuche estaba a cargo de su educación por medio de sus propios parámetros culturales, después de dicha fecha se les impuso la lengua castellana y rasgos culturales de la sociedad chilena. Durante gran parte de la primera mitad del siglo XX numerosas organizaciones mapuche luchan por una educación asimilacionista, que, entre otras cosas, contempla la alfabetización en castellano como una forma de acceder a los beneficios de la sociedad dominante y ascenso social en un contexto de colonialismo interno (Oñate, 2002). Pero a fines del mismo siglo, la diferentes organizaciones mapuches reclaman una educación bilingüe (español-mapuche) sin hacer mención explicita de los aspectos culturales. En la actualidad se ha implementado un programa de *Educación Intercultural Bilingüe* enfocada desde dos aspectos, primero como una política estatal, del Estado hacia los indígenas en forma vertical, y por otro lado como una demanda circunscrita a un proyecto político de autonomía. En este sentido podemos decir que el pueblo mapuche demanda una educación propia en los términos de que controlen el proceso de transmisión cultural y lingüística, dentro de los términos establecido por ellos mismos (Oñate, 2002).

Motivación

Nuestro estudio nace a partir de dos consideraciones: por una parte, un estudio realizado por el Instituto de Estudios Indígenas de la Universidad de la Frontera en cooperación con el Servicio civil Alemán de Cooperación Social y Técnicas para la Paz, nos da cuenta de las concepciones subyacentes, en los discursos que aparecen en planes y programas y textos escolares de educación matemática, y analiza el acercamiento de esas concepciones a la interculturalidad. En cuanto al análisis de los fundamentos del currículo se concluye que las matemáticas que se pretende que los niños aprendan son aquellas que han sido desarrolladas bajo orientaciones cognoscitivas de la cultura occidental, teniendo como una estrategia fundamental en el plano metodológico el hecho de hacer uso del contexto, de la vida cotidiana de los niños, para que tales aprendizajes se produzcan (Sánchez y Herrera, 2003). Mientras que en el análisis de los textos oficiales concluyen, en cada una de las revisiones de textos de estudio, que pareciera partir de un sentido general, que implícitamente, nos dice que todos los niños son iguales en lo que respecta a las comprensiones y que independientemente de cuales son los contextos donde se desarrollan sus experiencias de vida están culturalmente aptos para comprender y desarrollar exitosamente las actividades que se les ponen a su disposición. (Sánchez y Herrera, 2003), en otras palabras casi no existe evidencia de contextualización, solo algunos ejemplos como: en la Unidad 9, llamada Decenas, aparecen rumas de troncos y pequeños sacos de papas (Sánchez y Herrera, 2003). En este sentido creemos que si bien puede haber un intento de contextualizar, la contextualización se está entendiendo como el cambio de enunciados de los problemas como la explicitación de objetos visuales.

Por otra parte los resultados de las pruebas nacionales nos evidencia la baja calidad de los aprendizajes de los estudiantes mapuches. Concretamente, los resultados de la prueba SIMCE

(Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), que se desarrolla de anualmente en todo Chile, continuamente nos muestra como la novena región, la cual cuenta con la mayor concentración de población de origen Mapuche en Chile, obtiene los peores resultados a nivel nacional tanto en lenguaje como en matemáticas.

Estas dos consideraciones han incentivado a nuestro grupo de investigación a plantear un estudio que revise el conocimiento que los mapuches han desarrollado, para posteriormente proponer situaciones realmente contextualizadas y ver su efectividad.

Problemática y objetivos

Considerando que la contextualización es un fundamento del currículo y la manera en que los textos de estudio la conciben, evidenciado por el estudio de Sánchez y Herrera (2005), además de los bajos resultados de los estudiantes de la novena región en las pruebas nacionales, nuestro grupo de investigación se ha planteado las siguientes problemáticas:

1. Reconocemos como problemática esencial de la enseñanza impartida a nuestros pueblos originarios "La contextualización" ya que ésta es entendida como el cambio de enunciado de las situaciones o como la explicitación de objetos visuales
2. Reconocemos la problemática de la educación impartida al pueblo mapuche, como una educación carente de significados culturales y contextuales.

Ya reconocida la problemática, declaramos que uno de nuestros objetivos es dar visibilidad al pueblo mapuche junto con profundizar la discusión sobre la contextualización, y para esto nos hemos propuesto:

- Encontrar pensamiento matemático en la cosmovisión mapuche,
- Establecer tópicos de la Matemática, que sean fuente de conocimiento de la cultura mapuche. para que otras investigaciones puedan proponer situaciones, bajo estos tópicos, para contextualizar la enseñanza.

Marco teórico

La investigación en matemática educativa, se ha apoyado en la psicología y otras disciplinas para estudiar y entender la naturaleza del pensamiento matemático. Nuestro grupo de investigación ha decidido considerar como referencia la obra de Cantoral et al (2005) titulada "Desarrollo del Pensamiento Matemático", ya que estos investigadores se preocupan principalmente de la construcción social del cocimiento matemático.

Con el fin dar claridad a nuestro marco teórico nos hemos propuesto tres preguntas:

1. ¿Cómo se entiende el pensamiento matemático?

   El pensamiento matemático suele interpretarse de distintas formas: por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invenciones en matemáticas. Por otra, se entiende al pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en a resolución de tareas; finalmente una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas. (Cantoral et al ,2005)

2. ¿Cuál será nuestra perspectiva?

   Para fines de nuestro trabajo adoptaremos la tercera interpretación del pensamiento matemático concebida por Cantoral et al (2005): El pensamiento matemático no esta enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, si no que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana.

   De esta manera debemos entender que existen diferentes niveles y profundidades de pensamiento matemático y no solo identificarlo como el pensamiento de los que hacen matemática.

3. ¿Cómo identificaremos el pensamiento matemático?

> De este modo habremos de entender en un sentido moderno, que el pensamiento matemático, incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otros procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. (Cantoral et al, 2005)

Por tanto identificaremos el pensamiento matemático, cuando nos encontremos frente a pensamientos sobre tópicos matemáticos o procesos avanzados de pensamiento, como los que se describen en la cita.

Metodología

Nuestro estudio busca identificar en la cosmovisión mapuche rangos de pensamiento matemático, según nuestro marco teórico. Para ello haremos un análisis bibliográfico de dos fuentes principales; "Cosmovisión Mapuche" de los autores María Ester Grebe, Sergio Pacheco y José Segura, quienes describen la forma en que los mapuches ordenan el cosmos, avalado en expediciones en terreno que duraron entre 2 a 5 años. Nuestra segunda fuente es "La Ciencia Secreta de los Mapuches" una antología del autor Aukanaw (Etnólogo, hierólogo e historiador mapuche) realizada por la etnóloga Marie Dubois**.**

Análisis

"Una cosmovisión es el conjunto de opiniones y creencias que conforman la imagen o concepto general del mundo que tiene una persona, época o cultura, a partir del cual interpreta su propia naturaleza y la de todo lo existente."

Estructura del Cosmo según los mapuches

Como hemos visto, la definición de cosmovisión es muy amplia, por tanto nuestro estudio solo se centrara en la estructura del cosmos según los mapuches.

Una concepción en la cual parecen estar de acuerdo las diferente fuentes, es la de que los mapuches conciben el espacio de acuerdo a dos ideas; una idea vertical del cosmo relacionado con un orden jerárquico, ético o temporal (Grebe et al, 1972) y una idea horizontal, asociado tanto a un orden ceremonial, a un orden ético, los cuales se relacionan con los fenómenos geográficos y climáticos específicos de la región (Grebe et al, 1972).

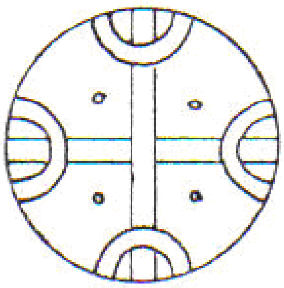
Para fines de este artículo solo haremos referencia al análisis de la concepción horizontal, de la cual consideramos extraer la mayor cantidad de información.

Concepción horizontal

Los cuatro puntos cardinales

El universo mapuche está orientado según los cuatro puntos cardinales, reconociéndose, por lo tanto, cuatro direcciones organizadas a partir del Este, lugar de la Cordillera de los Andes y región

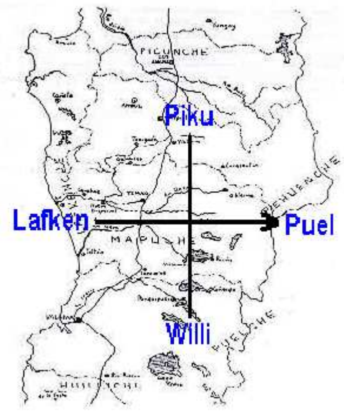
Dibujo del *kultrún*



matriz de la presente concepción espacial. Consecuentemente, el ciclo solar diario parece ser decisivo en la elección de este punto de referencia, puesto que en el área andina el sol nace en la cordillera (Este) y se pone en el mar (Oeste) (Grebe et al, 1972). Una Evidencias de que los mapuches establecieron esta cuatro dirección y la importancia de esto en su forma espiritual, se encuentra en la imagen que ellos plasman en el instrumento que utilizan para sus ceremonias religiosas."El kultrun".

En cuanto al punto de referencia, es importante destacar que este punto sigue siendo un referente espiritual que afecta en sus vidas cotidianas hasta la actualidad, un ejemplo de ello es la construcción de la casa mapuches "La Ruka", en la cual la entrada a esta se encuentra en dirección al Este (puel).

Otro antecedente acerca de los puntos cardinales es el nombre con el cual llaman a sus diferentes comunidades dependiendo del lugar de ubicación.



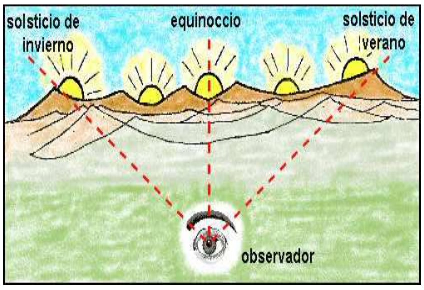
Los mapuches que se ubican en el norte de la región son los Pikunches (piku= Norte), los del sur se llaman williches (willi= sur), al este se ubicaban los puelches (puel= este) y al oeste los lafkenches (lafken= mar).

Las diferentes evidencias que hemos mostrado, tiene la intención de ser una prueba fidedigna, de que los mapuches si lograron establecer estos puntos de referencia, antes de la llegada del español a sus tierras, por tanto constituye un conocimiento propio que se encuentra en todo ámbito, destacando el espiritual, por tanto podríamos decir significativo. Lo anterior es una primera evidencia del pensamiento matemático en la cosmovisión mapuche, ya que la orientación espacial es un tópico de la matemática que necesita cierto nivel de abstracción. Además esto nos muestra que el tópico "orientación espacial" podría ser abordado, para el caso de los estudiantes mapuches, desde una perspectiva diferente de la usual, integrando los aspectos culturales e históricos en la contextualización de dicho conocimiento. En este sentido creemos importante destacar que existe una clara diferencia, entre la percepción del espacio de los mapuches y la de nuestra cultura occidental, en relación al punto de referencia. Para el mapuche el punto de referencia es el Este, mientras que para el occidental, generalmente es el Norte.

El estudio del movimiento

A la luz de nuestra búsqueda, hallamos una interesante declaración del pueblo mapuche, que se refiere a la manera en que ellos construyen conocimiento: la metodología que utiliza el mapuche para construir conocimiento (Kimün) es el Inarrumen. INARRUMEN, es aquella capacidad innata del Mapuches para la observación, analizada, estudiada en el tiempos como fenómenos propios de la naturaleza, y que tienen una explicación, lógica y racional, es decir observada y comprobada (Ñanculef, 2005)

Los mapuches, con el inarrumen lograron predecir la posición del sol, llegando a establecer fechas del solsticio de invierno, de verano y de equinoccio. Aukanaw (2003) comenta que las distintas posiciones ocupadas por el sol en su carrera anual tienen dos límites extremos que se alcanzan en los solsticios de verano e invierno. De ahí la expresión mapuche "hasta allí llega el Sol".



Otra evidencia del estudio del movimiento que llevo a cabo el pueblo mapuche es el calendario que establecen. El Pueblo Mapuche generó hace miles de años un calendario de 13 meses de 28 días fijos cada uno con un ciclo anual de 364 días el TXIPANTU (se piensa). Este calendario se establece a través del estudio del sol (su ciclo anual) y a través del estudio del movimiento de la luna (su ciclo mensual). (Ñanculef, 2005)

Por tanto podemos decir que el pueblo mapuche a través de la observación, logra reconocer fenómenos y los describen con su propio lenguaje. En otras palabras vemos como los mapuches fueron capaces de explora de manera consiente a partir de la observación y de la percepción de su entorno, estableciendo relaciones entre los elementos que son posibles de observar, además de construir expresiones para estas relaciones.

Conclusiones

Al considerar que el pensamiento matemático, incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otro procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis (Cantoral et al, 2000), e identificar en nuestro análisis como los mapuches establecieron el estudio consiente del espacio a través de la observación para formular cuestiones relativas a sus necesidades, además de establecer una orientación autentica y ordenada, podemos concluir que los mapuches desarrollaron el estudio de dos tópicos matemáticos: el movimiento y la orientación, por tanto se muestra evidencia del pensamiento matemático en la cultura mapuche.

Otra conclusión que nos parece importante, es que estos dos tópicos matemáticos, forman parte de la cultura mapuche, es decir están enraizadas a priori. Por tanto la creación de situaciones que consideren la observación como un método para construir conocimiento, el movimiento como tópico de estudio y la orientación desde la perspectiva mapuche, por una parte estarán aportando elementos de la cultura de los niños y por otra estarán evidenciando una real contextualización de la matemática para la enseñanza de los niños mapuches.

Por ultimo quisiéramos enfatizar que nuestro estudio ha evidenciado que "El Pueblo Mapuche Fue un Pueblo Sabio". Lo que echa por tierra el estereotipo instaurado por siglos de que los mapuches son un pueblo ignorante, el menosprecio del conocimiento y las tradiciones mapuches, que fueron pensados mucho antes de la llegada del español a sus tierras**.**

Referencias bibliográficas

Grave, M.; Pacheco. S y Segura. J, (1972) Cosmovisión Mapuche, *Cuadernos de la Realidad Nacional* 14, 46-73. Santiago: Centro de Estudios de la Realidad Nacional - CEREN

Aukanaw (2003). La estructura del cosmos según los mapuches, *La Ciencia Secreta de los Mapuches*. Obtenido en enero de 2008 desde http://www.aukanaw.org/pages/cadre.html

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanis, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2000) El pensamiento matemático, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 17-24) México: Editorial Trillas

Oñate. D. (2002) Conclusión, *Autonomía mapuche y educación: Una reseña histórica*. Obtenido en enero de 2008, de http://www.edal8-8.com/chile.html

Sánchez, M. y Herrera, A (2003) Análisis de Planes y Programas de Estudio en tres Subsectores de Aprendizaje de Nb1 y Nb2, y de textos escolares usados para la enseñanza de alumnos mapuche en las comunas de Cañete, Contulmo y Tirúa, Provincia de Arauco, VIII Región, Chile. Temuco: Instituto de Estudios Indígenas. Obtenida en enero de 2008, de http://www2.estudiosindigenas.cl/educacion.htm

Ñanculef. J. (2005) Los fundamentos del mapuche kimün. *La Data Cultural Mapuche y los 12.000 Años*. Obtenido en enero de 2008 de http://www.sepiensa.net/edicion/index.php?option=content&task=view&id=543&Itemid=40

¿COMO SE PERCIBEN LAS NOCIONES DE COMPARACIÓN, CONSERVACIÓN Y CUANTIFICACIÓN DEL AREA POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS? UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LOS ARGUMENTOS

Guadalupe Cabañas Sánchez, Omar Mejía-Mozo
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México
gcabanas.sanchez@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Esta contribución se interesa por mostrar cómo se percibe por estudiantes universitarios a la comparación, conservación y cuantificación del área. El estudio se apoya en el análisis de las estructuras argumentativas, reconstruidas desde los argumentos producidos por los estudiantes para justificar una conjetura en el contexto de la noción de área. Para la consecución del objetivo se analizan desde las estructuras argumentativas, los procedimientos, definiciones, propiedades y relaciones en que se apoyan para garantizar que el área de una región plana se conserva. Este trabajo se fundamenta en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa (Cantoral y Farfán, 2003) y en el modelo argumentativo de Toulmin. Los resultados muestran cómo los estudiantes perciben que el área se compara, se conserva o se cuantifica, al apoyarse en las relaciones de paralelismo; el uso de algoritmos, y; en la simulación de movimientos al trasladar un punto sobre una recta.*
Palabras clave: argumentos, aproximación socioepistemológica, transformaciones geométricas, nociones de conservación, comparación y cuantificación del área

Introducción

En este artículo interesa por revelar cómo se percibe por estudiantes de matemáticas a la comparación, conservación y cuantificación del área. Estudio que se fundamenta en el análisis de las estructuras argumentativas, reconstruidas desde los argumentos producidos por los estudiantes al justificar una conjetura. Los argumentos son producto de las reflexiones y razonamientos que realizan en el proceso de transformación de polígonos convexos y no convexos. Un resultado de estas transformaciones es que el área de estos polígonos se conserva y lo que cambian son tanto su *forma* como su *posición*. El cambio en la forma y posición en dichos polígonos es consecuencia de los procedimientos que se realizan en el proceso de transformación. En las transformaciones objeto de análisis en este trabajo (transformaciones geométricas), identificamos procedimientos vinculados con: a) las relaciones de paralelismo, y con; b) la simulación las acciones cortar y pegar. La comparación es intrínseca a cualquiera de estas transformaciones. Se evidencia al momento en que se analizan, las propiedades invariantes de los polígonos así como aquellas que no varían después de una transformación. Respecto de la cuantificación, en la actividad objeto de discusión y análisis en este reporte, está implícita en el uso de fórmulas para calcular áreas de polígonos. Particularmente cuando se alude a la que se usa para calcular el área de un triángulo. Aun cuando el uso de una fórmula está vinculado a un número, en esta actividad es utilizada por los estudiantes como un *soporte*. Especialmente al momento en que identifican que tanto la base como la altura se mantienen constantes posterior a la transformación. Las preguntas que orientaron nuestro estudio fueron:

1. *¿En qué procedimientos se apoyan los estudiantes para realizar las transformaciones?*
2. *¿Cuáles son las propiedades, relaciones, conceptos y algoritmos que contribuyen en la percepción por los estudiantes de la comparación, conservación y cuantificación del área?*

Marco teórico y conceptual

a) La aproximación socioepistemológica en el estudio de argumentos

Al seno de la aproximación socioepistemológica se ha evidenciado la importancia por estudiar los argumentos producidos por estudiantes durante las clases de matemáticas, desde contextos y propósitos distintos (Crespo y Farfán, 2005; Cabañas y Cantoral, 2006a, 2006b; Cabañas y Cantoral, 2008a). En el estudio de argumentos desde esta aproximación teórica, se precisa la incorporación de aspectos como la comunicación, el análisis de las formas de razonamiento, búsqueda de consensos, la negociación de significados y el diseño de situaciones. El diseño de situaciones toma como base la epistemología de prácticas, de usos, contextos y procedimientos previo al estudio de los objetos. Los diferentes usos y contextos en que se presenta la noción de área se retoman del estudio reportado en Cabañas 2006, Cabañas y Cantoral (2008a, 2008b), resultado de un estudio epistemológico sobre la nociones de área e integral. Las actividades de este trabajo se situaron en un *contexto* estático y se centraron en el *uso* de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área a diferentes niveles.

Al estudiar a la *percepción* por los estudiantes de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área desde esta perspectiva teórica, esta investigación toma como unidad de análisis a la práctica discursiva. Especialmente nos centramos en analizar desde las estructuras argumentativas, los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos en se apoyan los estudiantes para justificar una conjetura en el contexto de algunos de los *usos* del área: la comparación, conservación y cuantificación.

b) Estudio de la percepción

Para analizar el papel de la percepción desde las explicaciones y justificaciones de los estudiantes al realizar las transformaciones, nos apoyamos en la ciencia cognitiva. Tomamos una postura desde la cognición, que considera a la percepción como la capacidad fundamental que nos mantiene en contacto con el mundo (González, J., 2006).

En González (2006) se describen tres aspectos fundamentales de la percepción: El funcional, el fenoménico y el simbólico. Percibir el mundo desde el aspecto funcional equivale a operar adecuadamente en él. Desde el aspecto fenoménico percibir el mundo equivale a experimentarlo (i.e. modalidad auditiva, olfativa y visual). Y finalmente desde el aspecto simbólico o lingüística conceptual permite percibir el mundo en función de conceptos y descripciones comunicables que, al tenerlos disponibles y aplicarlos le otorgan una identidad a lo que percibimos. Es a partir del segundo y tercer aspecto desde el que analizamos a la percepción de las nociones de comparación, conservación y cuantificación del área. Desde el segundo aspecto interesa lo visual, que contribuye en identificar propiedades como: *cambio de forma* (al disminuir o incrementar el número de lados en polígonos) y *cambio de posición* de la figura (al trasladar puntos). A partir de las relaciones entre figuras, algoritmos y procedimientos es que se relaciona al tercer aspecto.

El modelo argumentativo de Toulmin

La reconstrucción de los argumentos se apoya en el modelo argumentativo de Toulmin, particularmente nos basamos en la descripción presentada en Inglis y Mejía-Ramos (2005) e Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. y Simpson, A. (2007). A través de este modelo es posible reconstruir y representar desde los argumentos de los estudiantes: a) La conjetura a probar y que es objeto de debate; b) Los datos que identifican en el problema como punto de partida de sus explicaciones; c) Las propiedades, relaciones, definiciones y analogías en que se apoyan para justificar y sostener una conjetura. El modelo está constituido por seis elementos básicos a los que denominamos categorías, cada una desempeña un papel diferente en un argumento. Los elementos de este modelo son: La aserción (A) es la tesis a defender, a debatir, por parte del que argumenta ya sea en forma oral o escrita. La evidencia (E) es la información en la cual se basa la aserción. La garantía (G) justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, ya sea por medio de una regla, una definición, o mediante una analogía. La garantía es apoyada por el soporte (S) a través de nueva evidencia. El calificativo modal (C) especifica el grado de certeza, la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis; y la refutación (R) presenta las excepciones de la aserción. Las seis categorías del modelo están conectadas en la estructura que se muestra en la figura 1.

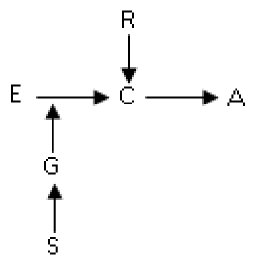


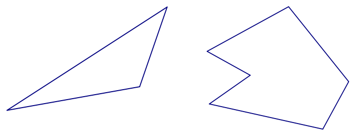
Figura No. 1. Modelo argumentativo de Toulmin

Categorías que no siempre van a estar explícitas en un texto argumentativo. Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) sostienen que cuando se modelan argumentos apoyados en el esquema argumentativo de Toulmin (1958), se da el caso en que algunas partes del argumento no son verbalizados explícitamente por el argumentador. Se refieren explícitamente al soporte y la excepción.

Métodos y participantes

En la investigación participaron trece estudiantes (19-21 años) que cursaban el tercer semestre de una licenciatura en matemáticas, cuyos antecedentes académicos fueron algunos tópicos de geometría euclidiana que habían trabajado semestres previos al estudio. Esto nos aseguraba al menos hipotéticamente, que estarían en condiciones de realizar las transformaciones. Los estudiantes fueron invitados a escribir los procedimientos en que fundamentaron sus respuestas, objeto de discusión durante una entrevista. La entrevista fue individual y se llevó a cabo en la oficina de un investigador. Para la reconstrucción de las estructuras argumentativas se recurrió a la grabación, transcripción y análisis de la entrevista, así como al análisis de las producciones escritas de los participantes. Una de las actividades en que se apoyó este trabajo y que es objeto de análisis es la siguiente:

Actividad 1. En los siguientes polígonos realiza las transformaciones que consideres necesarias de tal forma que la medida de sus áreas no cambie. Argumenta tu respuesta para cada caso.



Reconstrucción y análisis de las estructuras argumentativas

a) Análisis de las transformaciones

Cinco de los trece estudiantes realizaron las transformaciones. Algunos consideraron conveniente etiquetar los vértices de los polígonos. En el proceso de solución, sus procedimientos se sustentaron en la relación de paralelismo, en el interés por reducir el número de sus lados polígonos. La tesis (*aserción*) que sostienen los estudiantes al realizar ambas transformaciones es que el área del polígono resultante se conserva (algunos lo dicen en términos de que son iguales). Una *evidencia* (dato) en que se apoyan desde la actividad, que el área del nuevo polígono no debe cambiar.

a.1) Transformación del polígono convexo

Los estudiantes reconocen que no es posible reducir el número de lados del triángulo. En consecuencia, cambian su forma y su posición relativa. Trazan una recta paralela a uno de los lados del triángulo (al que llaman base del triángulo), de tal forma que pase por el vértice opuesto a dicho lado. Enseguida construyen otro triángulo desde un punto cualquiera ubicado sobre la recta paralela

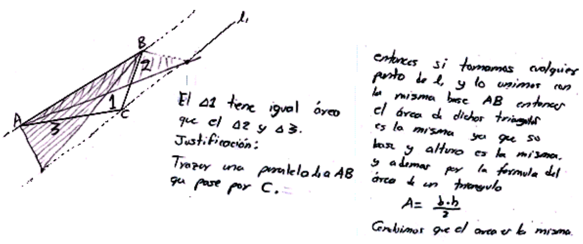


Figura 2. Transformación basada en la relación de paralelismo

1281

hasta los vértices del lado que forma la base del polígono original. Para los estudiantes, la *garantía* de que el área de ambos triángulos se conserva se fundamenta en el trazo de la recta paralela. Afirman que la base y la altura es la misma (miden lo mismo). Algunos estudiantes apoyan (*soporte*) este argumento en la fórmula para calcular el área de un triángulo (ver figura 2 y episodio 1). La excepción a la regla no aparece en sus argumentos. Enseguida se muestra un episodio reconstruido desde los argumentos de Homero, uno de los estudiantes (E) durante la entrevista con su profesor (P).

Episodio 1

E: *El triángulo uno es el ABC, y el triángulo dos es el AB y este punto, y el triángulo tres es AB y este otro punto (el punto es el otro vértice de los triángulos 2 y 3). El triángulo uno tiene igual área que el triángulo dos y el triángulo tres.*

P: ¿Cómo justificas que el área de los tres triángulos son iguales?

E: Trazando una paralela al lado AB del triángulo ABC

P: ¿Por dónde debía pasar esa recta?

E: Que pasara por el punto C. Si tomamos cualquier punto de la paralela l1 que trazamos y lo unimos con la misma base AB, entonces el área de dichos triángulos es la misma, ya que su base…es la misma . . . y su altura.

P: ¿Pensaste en formar otro triángulo? ¿Por eso dices que si tomas un punto y lo unes con la base?

E: Exactamente …que me resultaran otros triángulos de tal manera que fueran de área igual

P: ¿Porqué crees que las áreas de los triángulos son iguales?

E: Ya que su base y su altura son la misma y además por la fórmula . . . ahí la justificación de porqué su área siempre es igual. Aplicando la fórmula del área de un triángulo que es base por altura sobre dos, ya que su altura . . . si es paralela es la misma, tomando cualquier punto concluimos que $\frac{bh}{2}$ *es igual.*

Estructura argumentativa caracterizada a partir de los argumentos presentados por Homero.

Figura 3. Estructura argumentativa reconstruida desde los argumentos presentados por Homero

a.2) Transformación del polígono no convexo

Los estudiantes reconocen que en polígonos con lados mayor a tres es posible disminuir el número de sus lados. La transformación que realizan se fundamenta en la relación de paralelismo. Los estudiantes sitúan dicha transformación en una parte del polígono, en el interés por trabajar sobre un triángulo, situado entre rectas paralelas (*garantía*). Por lo que unen dos vértices del polígono, que les permita visualizar un triángulo. Construyen una recta paralela a ese lado del triángulo (el que se forma al unir los vértices del polígono).Lo que sigue es transformar el triángulo utilizando el mismo método que en el caso de polígono convexo. Para lograr que el número de lados disminuya, el punto sobre el que construyen el otro triángulo tiene una característica particular, debe ser colineal a uno de los vértices de la base que comparten el triangulo original con el triángulo resultante, como se muestra en la figura 4. Durante la entrevista, Homero explica que la recta l_1 debe ser paralela a AB.

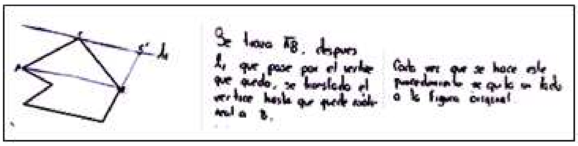


Figura. En la transformación, el número lados del polígono

Reflexiones finales

La conjetura (*tesis*) a debatir por los estudiantes está centrada en la conservación del área. La *garantía* de que el área de los polígonos se conserva, la justifican en la construcción de rectas paralelas. El procedimiento se fundamenta en situar la transformación sobre triángulos limitados por dos rectas paralelas, como se muestra en la figura 4. El triángulo a transformar, *cambia de posición* y *de forma*, conservando el área. En consecuencia, las nociones de comparación y conservación del área se perciben por los estudiantes a partir de la relación de paralelismo. Especialmente porque esta relación les asegura que la altura y la base de los triángulos permanecerá constante. Este método lo usan al transformar ambos polígonos. La cuantificación del área se percibe cuando los estudiantes aluden a la fórmula para calcular el área de un triángulo. Este algoritmo lo usan como un *soporte* a la *garantía*, cuando se les cuestiona el por qué las áreas de los polígonos son iguales (el original y el resultante) o incluso en sus razonamientos escritos. La excepción a la regla no aparece en las explicaciones de los estudiantes. Los aspectos visuales son básicos en este trabajo. A partir de lo visual, los estudiantes perciben por ejemplo, *cambio en la forma* (al disminuir el número de lados de los polígonos) *y de posición* de las figuras al trasladar un punto, *sin que cambie el área* del polígono dado. En algunos casos, el cambio de posición también conlleva al cambio de forma, como la transformación que se muestra en la figura 2.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. (2006). *Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral definida*. Memoria predoctoral no publicada. Cinvestav-IPN.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2006a). Percepción de la noción de conservación del área entre estudiantes universitarios. En G. Buendía (Ed), *Memoria de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 34-46. México: Red de Cimates. Descargado el 9 de enero de 2008 desde: http://www.red-cimates.org.mx/Documentos/xeime.pdf.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2006b). La conservación en el estudio de Área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las* *matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 199-226). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2008a). Studying arguments in mathematics classroom. A case study. *Topic Study Group 24: Research on Classroom Practice.* México: Icme-11. July, 2008.

Cabañas, G. Cantoral, R. (2008b). Estudio socioepistemológico del área y la integral. *Resúmenes del History and Pedagogy of Mathematics, The HPM Satellite Meeting of ICME 11*, p. 29. México, D.F. 14-18 July, 2008.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53* (3), 255-270.

Crespo, C., Farfán, R.M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287-317.

González, J.C. (2006). Presentación: La congnición como objeto de estudio filosófico y científico. En J. C. González (Ed.), *Perspectivas contemporáneas sobre la cognición: categorización, percepción y conceptualización* (pp. 11-36). México DF, México: Siglo XXI Editores.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación matemática. *Revista Ema 10* (2), 327-352.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P., Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics 66* (1), 3 – 21.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University Press.

ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO A LA HISTORIA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gabriela Buendía Abalos, Gisela Montiel Espinosa
CICATA-IPN, Legaria. México
gbuendia@ipn.mx, gmontiel@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: medio y superior

Resumen. *Problematizando al propio saber matemático, en este trabajo de investigación recurrimos a la historia con una mirada socioepistemológica a fin de dar cuenta de aquellos elementos que den cuenta del carácter social de su construcción. Estos elementos conforman una base de significados para la epistemología de prácticas que se propone con la finalidad de incidir en el rediseño del discurso matemático escolar.*
Palabras clave: prácticas sociales, función trigonométrica, historia

Introducción

Bajo una visión socioepistemológica, queremos proporcionar evidencia del papel de la historia en la investigación en matemática educativa, el cual no se limita a un mero aspecto informativo o motivacional, pues si bien la reconocemos como parte de la cultura matemática del individuo, estamos interesados en cómo puede aportar elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Realizar una búsqueda de carácter histórico implicará reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización a los cuales se vio sometido. Se analiza, entonces, al hombre haciendo y usando matemáticas en un contexto social específico y no sólo a la producción matemática final que logra. El análisis de los *usos* del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas.

En la formulación de epistemologías de prácticas –llamadas *socioepistemologías* – los aspectos históricos permiten conformar una base de significados para el conocimiento matemático y para su introducción, también significativa y articulada, al sistema didáctico.

Elementos socioepistemológicos de la función trigonométrica

Dentro del modelo que propone Montiel (2005) de la construcción social de la función trigonométrica, ubicamos nuestro análisis de la historia de la *funcionalidad trigonométrica* en el segundo momento, aquél regulado por la práctica social de *predicción*. Este momento abarca el periodo que va desde el surgimiento del álgebra hasta la introducción de *lo trigonométrico* al cuerpo de la familia de funciones, situación que ocurre explícitamente con los trabajos de Euler.

Los conceptos físicos están indisolublemente asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando una relación constituyente más que instrumental (Levy-Leblond, 1999) y en el periodo que estamos caracterizando, la física proveyó de gran variedad de situaciones y planteamientos científicos donde nacen conceptos matemáticos de gran relevancia. En particular, es la matematización del movimiento oscilatorio la práctica de referencia en la construcción de modelos mecánicos que describen movimientos periódicos.

El paso del fenómeno celeste al modelo mecánico, representa la transición de la trigonometría en el plano geométrico al plano funcional, el abandono de las razones para poner atención en las cantidades trascendentes trigonométricas y sus relaciones. Dicho en otros términos, la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo, pero visto éste como una curva (o trayectoria en el plano de la física). De hecho, es la cuadratura de esta curva donde se va a originar la expresión en serie infinita de la función seno: una expresión algebraica de lo trascendente.

Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

A partir de los trabajos desarrollados por Buendía (2004) y Montiel (2005) y los aspectos metodológicos desarrollados en otras investigaciones del área (Buendía y Cordero, 2005; Cordero, 2006), se propone un esquema metodológico (figura 1) para la investigación en matemática educativa interesada en incorporar los elementos socio-culturales que norman la construcción de conocimiento matemático en escenarios específicos.

Fig. 1. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

Se parte de identificar una problemática de estudio o un fenómeno didáctico particular lo cual reconoce la necesidad por explicar un hecho escolar desde una perspectiva científica. La problemática planteada en (Montiel, 2005) sostiene que la didáctica de las funciones no puede abordarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada tipo de función y las condiciones socio-culturales de su construcción.

Con relación a la función trigonométrica la investigación ha reconocido que para el alumno no hay distinción entre las razones y las funciones, o al menos que hay una mezcla de conceptos para resolver problemas relacionados con las funciones, pero, por otro lado, las investigaciones favorecen el método del triángulo rectángulo para la enseñanza de este concepto.

Desde nuestra visión lo que sucede es que dichos trabajos están problematizando el cómo se aprende y cómo se enseña, pero no el qué se enseña, el objeto matemático en sí. Esta es la causa principal por la cual en el nivel medio superior el concepto de función trigonométrica se enseña como una *extensión* de la trigonometría clásica, que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro *el dominio de la función en todos los reales*, *el significado de un ángulo negativo*, *la conversión de la unidad de medida: grados* $\leftrightarrow$ *radianes*, *la equivalencia entre radianes y reales*, *la periodicidad* y *el acotamiento de la función*.

Este *fenómeno didáctico de la extensión* permeará en tanto no se haga distinción entre los momentos y circunstancias que dan origen, significado y necesidad de construcción a cada concepto escolar

Así, en el programa general de la Socioepistemología de las Funciones, se plantea *la construcción social de la función trigonométrica* como problemática de estudio y se inicia una revisión, de corte socioepistemológico, de los aspectos cognitivos y didácticos de la problemática de estudio, orientados por la naturaleza epistemológica del saber en juego y las condiciones sociales que posibilitan su construcción.

Revisión socioepistemológica: hacia la funcionalidad trigonométrica

La introducción de las funciones trigonométricas al cálculo, por primera vez en la obra de Euler (s. XVIII), es un hecho histórico a partir del cual se puede reflexionar sobre las formas de saber y sobre los mecanismos de su producción. Particularmente, nos interesa obtener elementos para construir una primera *base de significados* para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir con su auxilio en el *discurso matemático escolar*.

Hasta antes de Euler los aspectos geométricos del seno y del coseno eran el objeto de estudio y no sus propiedades analíticas. Katz (1987) señala que las funciones trigonométricas pudieron ser evitadas porque no se veía un *uso razonable* de ellas. Fueron quizá los *nuevos usos* de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico: pasaron de considerarse líneas en un círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. Consideramos que dichos usos son por completo de carácter sociocultural pues surgen y se desarrollan dentro de tareas específicas relativas a la *matematización del movimiento oscilatorio*.

Los usos de la función trigonométrica en Euler

En 1739, Euler presenta el trabajo *De novo genere oscillationum* sobre movimientos con propiedades comunes: la oscilación. Entre ellos reconoce a la cuerda vibrante, las ondas de sonido que produce la campana, las ondulaciones del agua y los flujos (o corrientes) marinas. Actualmente lo denominamos movimiento de un oscilador armónico.

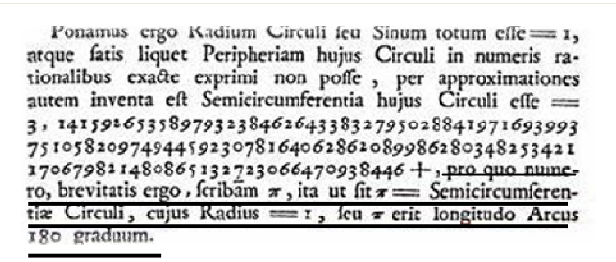
En este estudio empiezan a percibirse cambios importantes como el cambiar el foco de atención del tiempo al movimiento, de lo periódico del tiempo a lo periódico del movimiento, pero siempre referido al comportamiento del objeto en cuestión; así, lo periódico califica un cierto tipo de comportamiento.

De manera coherente con este tratamiento, al proponer su solución al problema de la cuerda vibrante, afirma que la propiedad de periodicidad que se le pedía a la forma inicial de la cuerda es restrictiva y que no toma en cuenta funciones algebraicas y algunas otras curvas trascendentes. Su propuesta es *hacer* funciones periódicas a partir de extender, por ejemplo, una función $f(x) = hx(a-x)$: explota pues el carácter repetitivo que da pie a la propiedad periódica.

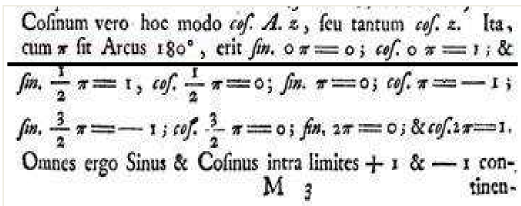
Algunos años después, en *Introductio in analysin infinitorum* (1748) Euler presenta un estudio de las funciones para el análisis, donde ya reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes, junto con el logaritmo y la exponencial. En ese momento, se hacía necesario un análisis sistemático del conocimiento generado hasta entonces sobre la función, y entonces, la función trigonométrica entra formalmente al análisis.

Su trabajo, como el de sus contemporáneos está influenciado por el paradigma dominante del siglo XVIII: la matematización del movimiento. Es después de esta obra que el análisis ya no trata solo sobre las propiedades de las curvas, sino sobre las propiedades de las funciones (Dunham, 2001). En este momento de formalización, propiedades como lo periódico quedan asociadas a la función trigonométrica.

Así pues, reconocer el carácter social de la matemática implica distinguir desde los momentos del uso del concepto hasta aquellos momentos donde se hacía necesaria una presentación sistemática y ordenada de las herramientas, nociones y conceptos; *Introductio in analysin infinitorum* pareciera una obra con tales fines. Por ello es que en dicha obra coexiste, por ejemplo, la presentación de la medida de un ángulo en grados y radianes (fig 2).



Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse = 1, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384446 +, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π, ita ut sit π = Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius = 1, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.



Cosinum vero hoc modo *cos. A. z*, seu tantum *cos. z.* Ita, cum π sit Arcus 180°, erit *sin.* $0\pi = 0$; *cos.* $0\pi = 1$; & *sin.* $\frac{1}{2}\pi = 1$, *cos.* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *sin.* $\pi = 0$; *cos.* $\pi = -1$; *sin.* $\frac{3}{2}\pi = -1$; *cos.* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *sin.* $2\pi = 0$; & *cos.* $2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 con-

M 3 tinen-

Figura 2. Pag 23 del Tomo I Cap VIII: *Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis*

La literatura actual señala con mucho énfasis los conflictos que desencadena el manejo ambiguo de la unidad de medida para la variable de la función trigonométrica, en contraste observamos que Euler maneja y transita entre ambas unidades (grados y radianes) sin complejidad, en tanto su método para calcular la cantidad trascendente no se limita al triángulo rectángulo. Esto es, para el alumno el origen de la cantidad trigonométrica está en el triángulo rectángulo, solo en este contexto geométrico-estático le es posible operar para obtener los valores de *x* y *sen x*, ubicar la coordenada (*x*, *sen x*) en un plano y trazar la gráfica... ¿no resulta natural que el eje *x* lo gradúe en grados?

Lo acotado de la función (fig. 3) se extrae también a partir del *círculo* donde nace la cantidad trascendente trigonométrica, cuando Euler considera los valores característicos y concluye que todos los senos y cosenos están contenidos entre los límites +1 y –1.

Coſinum vero hoc modo $\text{coſ.}\ A.\ z$, ſeu tantum $\text{coſ.}\ z$. Ita, cum π ſit Arcus 180°, erit $\text{ſin.}\ 0\pi = 0$; $\text{coſ.}\ 0\pi = 1$; & $\text{ſin.}\ \frac{1}{2}\pi = 1$, $\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$; $\text{ſin.}\ \pi = 0$; $\text{coſ.}\ \pi = -1$; $\text{ſin.}\ \frac{3}{2}\pi = -1$; $\text{coſ.}\ \frac{3}{2}\pi = 0$; $\text{ſin.}\ 2\pi = 0$; & $\text{coſ.}\ 2\pi = 1$.
Omnes ergo Sinus & Coſinus intra limites + 1 & − 1 con-
M 3 tinen-

Hinc loco y ſubſtituendo Arcus $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$, &c., erit

$\text{ſin.}(\frac{1}{2}\pi+z) = +\text{coſ.}\,z$	$\text{ſin.}(\frac{1}{2}\pi-z) = +\text{coſ.}\,z$
$\text{coſ.}(\frac{1}{2}\pi+z) = -\text{ſin.}\,z$	$\text{coſ.}(\frac{1}{2}\pi-z) = +\text{ſin.}\,z$
$\text{ſin.}(\pi+z) = -\text{ſin.}\,z$	$\text{ſin.}(\pi-z) = +\text{ſin.}\,z$
$\text{coſ.}(\pi+z) = -\text{coſ.}\,z$	$\text{coſ.}(\pi-z) = -\text{coſ.}\,z$
$\text{ſin.}(\frac{3}{2}\pi+z) = -\text{coſ.}\,z$	$\text{ſin.}(\frac{3}{2}\pi-z) = -\text{coſ.}\,z$
$\text{coſ.}(\frac{3}{2}\pi+z) = +\text{ſin.}\,z$	$\text{coſ.}(\frac{3}{2}\pi-z) = -\text{ſin.}\,z$
$\text{ſin.}(2\pi+z) = +\text{ſin.}\,z$	$\text{ſin.}(2\pi-z) = -\text{ſin.}\,z$
$\text{coſ.}(2\pi+z) = +\text{coſ.}\,z$	$\text{coſ.}(2\pi-z) = +\text{coſ.}\,z$

Figura 3. Pag. 93 Tomo I Cap VIII: Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis

Figura 4. Pag. 94 Tomo I Cap VIII: *Des quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis*

Posteriormente, usa esta propiedad en las últimas fórmulas de la tabla (fig 4) para después generalizarlas en expresiones del tipo:

$$\text{ſin.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right) = +\text{coſ.}\,z$$
$$\text{coſ.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right) = -\text{ſin.}\,z$$

Fig. 4. Generalización

Donde la expresión $4n/2= 2n$ representa el periodo de repetición del ciclo. Finalmente, en el Tomo II, *Capítulo XXII: On Trascendental Curves* Euler construye una curva de $\frac{y}{a} = arc\ sen \frac{x}{c}$ (fig. 5) señalando el número infinito de arcos de un círculo cuyo seno es $\frac{x}{c}$, y donde la ordenada *y* es una función multivaluada.

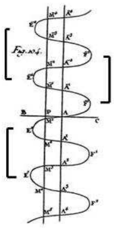


Figura 5. El comportamiento periódico del arco seno

El eje *y* y cualquier otra línea vertical paralela, intersecta a la curva en un número infinito de puntos.

Caracteriza el periodo de la curva arco seno señalando aquellos trozos que son iguales. Señala que los intervalos $E^1 E^2$, $E^2 E^3$, $E^1 E^{-1}$, $E^{-1}E^{-2}$; así como $F^1 F^2$, $F^1 F^{-1}$, $F^{-1}F^2$ son todos iguales a $2a\pi$

Es un argumento que, haciendo uso del comportamiento de la gráfica, caracteriza la propiedad periódica de la función seno.

Funcionalidad trigonométrica

La revisión socioepistemológica señalada en nuestro esquema metodológico propone que para que la cantidad trascendente adquiriera un carácter funcional, fue necesario un nuevo escenario, uno donde se desarrollará una concepción matematizable del movimiento. En este escenario es donde se desarrollan significativamente elementos como lo acotado y lo periódico de las funciones trigonométricas. Ello resulta coherente con la socioepistemología de la periodicidad (Buendía 2004; Buendía y Cordero, 2006) que propone que esta propiedad puede constituir un lenguaje (sin definiciones) aún antes de que aparezca la institucionalización de la periodicidad a través de la definición.

Ahora bien, con fundamento en esta socioepistemología de prácticas, éstas deberán reinterpretarse en una situación a fin de imprimirles cierta intencionalidad didáctica. Transponer las actividades (como calcular) en el contexto de las prácticas de referencia (como matematizar el movimiento) reguladas por prácticas sociales (como predecir) requiere de una investigación científica en todos los sentidos.

Esta situación será entendida como el conjunto de actividades o preguntas que propicie una problematización, será el instrumento que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico (Suárez, 2008). En ella, la práctica de predicción funciona como un argumento: aquello que motiva la resignificación del saber matemático.

Lo periódico –aquello en un sentido histórico, social y cultural que tiene que ver con la periodicidad- se asume ahora como lo que el estudiante construye cuando ante situaciones específicas (movimientos repetitivos, periódicos o cuasi-periódicos) desarrolla herramientas como la identificación y uso de una unidad de análisis o como una visión dual local-global al tratar con esos movimientos.

Los diseños hasta ahora propuestos (Buendía, 2004; Cantú, Canul, Chi, Flores, López-Flores, y Pastor, 2007) han favorecido la integración de dichos elementos socioepistemológicos al fundamentarse en la interacción del estudiante con una gráfica-fenómeno a través de la presentación de una *situación de movimiento* en la que se pide desarrollar –intencionalmente- una práctica de predicción.

La práctica de predicción es lo que permite entonces resignificar propiedades como la periodicidad y lo acotado de la función pues éstas adquieren significados en el ejercicio de dicha práctica y no como aplicación de sus respectivas formas analíticas.

Comentarios finales

La socioepistemología favorece el reconocimiento del carácter social de la matemática donde éste es entendido como las circunstancias que generan conocimiento matemático. Esta aproximación teórica puede entenderse en dos sentidos: el primero referente al planteamiento de epistemologías de prácticas y el segundo, en su aspecto metodológico, para desarrollar intencionalmente dichas prácticas al seno de los sistemas didácticos. En ambos aspectos la investigación es necesaria

Dado el hecho que una revisión de corte socioepistemológico puede referirse a diferentes aspectos del saber –como el histórico, presentado en este escrito- en la medida que dicha revisión se amplíe, las epistemologías propuestas se enriquecen. Por otra parte, las situaciones si bien pueden dar cuenta de la viabilidad de dichas epistemologías subyacentes en sus diseños, resulta necesario desarrollar diseños explícitos para el aula. En dicho desarrollo deberán tomarse en cuenta fenómenos como el de reproducibilidad y otras variables –internas y externas- que no pueden minimizarse a fin de incidir, efectivamente, en el rediseño de la obra matemática.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practices Framework. Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 58 (3), 299–333

Cantú,C., Canul, E., Chi, A.,Flores, F.,López-Flores, I.,Pastor, G. (2007) Resignificación de lo periódico en un ambiente tecnológico. En Buendía, G. y Montiel G. (eds) Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 57-77) México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R. Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A. (eds) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte latinoamericano. (pp. 265-286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Díaz de Santos.

Dunham, W. (2001). Euler. El maestro de todos los matemáticos. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones.

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. Historia Mathematica. 14, 311-324

Levy-Leblond, J. (1999). Física y Matemáticas. En F. Guénard y G. Lelíèvre (Eds.), Pensar la matemática, (pp. 75-92). España: Tusquets Editores.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Suárez, L. (2008) Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN

Nota. Este trabajo de investigación se lleva a cabo bajo el apoyo del proyecto SIP de investigación *2008-2650* Didáctica de la razón trigonométrica: su incorporación al discurso matemático escolar.

LA MATEMÁTICA NO SIEMPRE SE ESTUDIA DE LIBROS. UN ESTUDIO DE CASO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México
CICATA–IPN
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se reporta una experiencia que lleva a reflexionar acerca de los métodos de estudio y de las formas de comunicación presentes en la clase de matemática actual. Desde el marco teórico de la socioepistemología, es posible asumir la importancia que tienen las formas de comunicación que se basan en los avances tecnológicos originados en escenarios no académicos de la sociedad actual, y que los alumnos llevan a escenarios académicos, como el aula de matemática. Ante el uso de métodos de estudio por parte de los estudiantes en los que la palabra escrita no es central, se abre la posibilidad de seguir indagando acerca de las maneras en las que estudian matemática los alumnos actuales y de las aplicaciones que realizan ellos de la tecnología. Un mejor conocimiento de esos métodos, podrá orientarnos a intentar aprovecharlos en nuestras clases y ver cómo hacer un uso positivo de ellos en el que se apunte a la comprensión y no a la memorización.*
Palabras clave: comunicación, socioepistemología, discurso matemático escolar

La socioepistemología frente a fenómenos de transferencia entre escenarios no académicos y académicos

La problemática de estudio de la matemática educativa es "*el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza*" (Farfán, 2003, p.5). Este proceso por el cual se incorporan los saberes matemáticos en el sistema educativo, plantea una serie de problemas de carácter tanto teórico como práctico que necesitan acercamientos teóricos y metodológicos adecuados. "*La socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales*" (Lezama, 2005, pp.341).

La socioepistemología, en su visión de la matemática como una construcción sociocultural, no puede dejar de poner su atención fuera de la escuela. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2008, p.65). Esta idea parece cada vez más vital, ya que llama la atención para que se busquen fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y para que se traten de identificar la manera en la que se los construyen (Crespo Crespo, 2007). La escuela pasa, de esta manera, a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única. Se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento no sólo en las instituciones educativas. A ellas llegan construcciones socioculturales que se construyen fuera de escenarios educativos; pero también llegan avances tecnológicos que no fueron pensados inicialmente con fines educativos. Los estudiantes viven simultáneamente en escenarios académicos y no académicos; por ello intentan importar y transferir conocimientos y tecnología de un escenario a otro. Estas transferencias no siempre son exitosas, en parte porque no se adaptan a las diferencias esenciales entre los escenarios en los que se originaron y en los que son aplicados. Los docentes debemos esforzarnos en comprender ese fenómeno y capitalizarlo en beneficio de nuestras clases.

Una experiencia durante un examen

El caso que se reporta en este trabajo, fue observado durante un examen final de Matemática 1 de la carrera de Profesorado de Informática. En esta materia, inserta curricularmente en el primer año de la carrera, se desarrollan conceptos de cálculo dirigido a estudiantes de informática, por lo que su tratamiento no hace hincapié en aspectos formales, sino prácticos de la asignatura. Los alumnos que acceden al examen final, han aprobado durante la cursada, dos parciales de carácter práctico. El examen final, de característica integradora, consta de una parte práctica y posteriormente una parte teórica. En él se evalúan conceptos básicos que han sido trabajados durante la cursada.

El alumno al que llamaremos A, tras haber aprobado la parte práctica del examen, recibió la parte teórica, se dirigió a su asiento y comenzó a escribir. Los temas solicitados fueron:

a) Propiedades del valor absoluto y,

b) Interpretación geométrica de la derivada.

En la instancia práctica previa, había resuelto satisfactoriamente un problema de minimización en el que aplicó el concepto de derivada y otro que involucraba el cálculo de área bajo una curva.

Tras escribir uno minutos, el estudiante se detuvo, cerró los ojos y comenzó a “hamacarse” en su silla mientras murmuraba algo con gran concentración. Las dos docentes que formaban el tribunal examinador y estaban presentes en el examen, se preguntaron entre sí, si estaría rezando. Claramente repetía algo con suma concentración, pero se hacía imposible saber qué era. En esa actitud permaneció unos minutos, tras los cuales se paró, vino hacia las dos docentes, entregó su examen y se suscitó el siguiente diálogo entre el alumno A y la docente P, que tiene a su cargo la cátedra correspondiente y con la cual había cursado la materia:

A: Las propiedades del valor absoluto, las escribí; pero lo de derivada no lo recuerdo.

P: ¿Qué es lo que no recuerdas?

A: No lo recuerdo. Lo estudié, se lo aseguro, pero no lo recuerdo.

P: Veamos, ¿recuerdas cómo definíamos derivada?

A: No, estuve intentando llegar a eso, pero me pierdo un poco antes...

P: ¿Te pierdes? Pero si aplicaste bien la idea en el problema anterior. ¿Cómo te pierdes? Explícame.

A: Profe, le aseguro que lo estudié. Desde hace dos meses que lo vengo escuchando...

P: ¿Escuchando? ¿Qué vienes escuchando?

A: Mire, usted sabe que matemática, a mí, me cuesta. Hace dos meses grabé las clases teóricas en mi ipod. Cuando viajo en un colectivo, en vez de escuchar música, me escucho. Me escucho a mí leyendo sus clases teóricas. Yo estudio así. Retengo lo que oigo. Es como una canción, de escucharla y escucharla, uno la aprende, la entiende, entiende lo que dice, lo que el autor está comunicando...

P (escuchaba asombrada la descripción): ¿Tienes aquí tu ipod?

A: Por supuesto. Vine en el viaje escuchando matemática.

P: Entonces, siéntate, ponte el ipod y responde la pregunta.

A: ¿Ahora? (preguntó incrédulo)

P: Sí.

Las dos docentes intercambiaron entre sí una mirada, mientras el alumno se dirigía a su banco. Se sentó, se colocó el ipod y comenzó a escuchar. En determinado momento sonrió y dijo a su profesora que lo observaba: *"Acá está".* Esperó unos segundos sonriendo y mirando el vacío. Claramente, estaba recordando lo que había escuchado tantas veces. Entonces comenzó a escribir. Poco después entregó la hoja con la respuesta solicitada.

Algunas reflexiones

La experiencia que se acaba de relatar, conduce a una serie de reflexiones acerca de los métodos de estudio y la sociedad actual. Nuestros estudiantes se encuentran inmersos en una sociedad que ha evolucionado mucho en los últimos tiempos. La época actual, también se ha caracterizado como una sociedad de la información y necesita de personas capaces de consultar, comprender, relacionar interpretar y aplicar gran volumen de información en poco tiempo.

La comunicación de ideas en matemática, se lleva a cabo en las instituciones educativas a través del discurso matemático escolar. Como en otras disciplinas, el lenguaje utilizado en el discurso puede ser oral o escrito. El papel de los libros en la transmisión escrita del conocimiento ha sido durante siglos fundamental. En la actualidad, han surgido otras formas de transmisión del conocimiento, pero la importancia de los libros, sigue siendo indudable.

Sin embargo, la comunicación escrita ha cambiado. Los docentes estamos acostumbrados a que el estudio se realice a partir de libros o apuntes. Solemos quejarnos de que nuestros alumnos no leen y cuando leen no comprenden lo que leen. Es usual oír quejas acerca de que nuestros estudiantes no leen lo suficiente y no estudian utilizando libros de texto. Según algunos especialistas, "*la tarea académica en la que los profesores solemos ubicar a los alumnos en clase es la de escuchar nuestras explicaciones y tomar apuntes (de los que nos desentendemos). Asimismo, esperamos que los estudiantes –fuera de la clase– lean la bibliografía proporcionada (pero no nos ocupamos de ello). Es decir, concebimos nuestro rol como transmisores de información; recíprocamente, los alumnos se ven a ellos mismos como receptores de nuestros conocimientos. A pocos sorprende este esquema porque es al que nos hemos acostumbrado*" (Carlino, 2005, p.3).

La tecnología ofrece posibilidades que eran impensadas hace unos años, como lo es el uso del ipod. Los estudiantes, acostumbrados al uso de la tecnología, descubren en ellas posibilidades que hacen que satisfagan sus necesidades.

Podemos espantarnos inicialmente ante el uso de un ipod en el estudio, podemos pensar que está favoreciendo el aprendizaje memorístico, pero analicemos las palabras del alumno:

> *"Retengo lo que oigo. Es como una canción, de escucharla y escucharla, uno la aprende, la entiende, entiende lo que dice, lo que el autor está comunicando..."*

El estudiante compara lo que estudia con una canción. Es cierto que se la recuerda después de oírla repetir, pero si se sigue oyéndola esas palabras repetidas, expresan sentimientos, ideas. Lo mismo ocurre con una poesía que se recuerda después de repetirla y se evoca por su significado. Si no se hace un análisis profundo, podemos quedarnos en una etapa memorística, pero también es posible llegar a la comprensión. Existen investigaciones acerca de la nemotecnia como fenómeno que se manifiesta en el aula de matemática (Carrillo, 2006).

Otro caso que nos deja pensando...

Unos meses después de ocurrido lo que se acaba de relatar durante una mesa de examen, un alumno me preguntó acerca de si sabía de páginas web en las que se pudieran bajar audiolibros. Personalmente conocía algunas de estas páginas y la utilidad que reportan a personas no videntes. Al preguntar acerca de qué buscaba, dijo que quería encontrar el libro *Cien años de soledad.* Explicó que tenía varias horas de viaje diario desde su casa hasta su lugar de estudio, de allí al trabajo y nuevamente a su casa. Afirmó que en muchas oportunidades viajaba parado en el medio de transporte, y que incluso cuando conseguía sentarse, la luz en el medio de transporte no era óptima, lo que le impedía leer, pero que como siempre le había gustado leer, solía grabarse audiolibros e irlos escuchando durante su viaje, disfrutando de esta manera de la literatura.

Este caso, quizá en otra oportunidad, hubiera pasado desapercibido, pero unido a la experiencia anterior, consideramos que refuerza la necesidad de una reflexión profunda en relación a afirmaciones que se realizan sobre la falta de interés por la lectura que presentan los jóvenes en la actualidad.

Comunicaciones orales y escritas. De la cultura de la escritura a una cultura de la oralidad

Hace unos años, si se accedía a un material grabado, por ejemplo de una conferencia, para estudiarlo, se transcribía la conferencia. El desgrabado y posterior copiado era una práctica usual entre estudiantes. Se llevaba la palabra hablada a la palabra escrita. Se estaba en una sociedad donde la palabra escrita era predominante. Para la civilización occidental, el lenguaje escrito ha sido la principal fuente de desarrollo del conocimiento y del propio pensamiento.

En la actualidad, si bien la palabra escrita sigue teniendo gran importancia, vemos que ha cobrado notoriedad la palabra oral y la comunicación visual. Sonidos y gráficos compiten con palabras escritas, son utilizados a diario para transmitir ideas en los escenarios no académicos, pero también han penetrado en escenarios académicos.

En el aula aún no se hace un uso medular de estas formas de comunicación. La palabra suele combinarse con lo visual de los gráficos en la explicación, al menos en matemática. Sin embargo, finalmente se traduce en palabra escrita en las carpetas de los estudiantes.

Según Barbero, *"podríamos hablar de que las masas urbanas latinoamericanas están elaborando una 'oralidad secundaria': una oralidad gramatizada no por la sintaxis del libro, de la escritura, sino por la sintaxis audiovisual que se inició con el cine y ha seguido con la televisión y, hoy con el videoclip, los nintendo y las maquinitas de juego*" (Barbero, 1991, p.5). Hacia finales del siglo pasado, se ha tenido en cuenta cada vez con más fuerza la necesidad del desarrollo de una cultura de la oralidad, de una cultura del diálogo y para el diálogo y de una cultura que permita la integración entre el pensar, sentir y actuar. Para este autor, las masas urbanas con estas características, se están incorporando a la modernidad y modificando la concepción social de cultura. Sin embargo en la escuela recién estamos dándonos cuenta de este cambio de cultura y seguimos asidos a la cultura de la palabra escrita, una cultura en la que el libro de texto tiene una función prioritaria e indiscutible dentro de los sistemas de enseñanza. Las reformas curriculares han tenido que modificar estos materiales que el docente tiene como apoyo a su labor, de acuerdo con metodologías para el aprendizaje de la matemática acorde a nuestra época altamente tecnificada. En la actualidad, la tecnología está poniendo a nuestro alcance recursos que en tiempos venideros se transformarán en recursos didácticos y redundarán en un cambio del discurso matemático escolar mediante su empleo.

Acerca del discurso matemático escolar y los métodos de estudio

Esta experiencia abre la posibilidad de seguir indagando acerca de los métodos de estudio que emplean los estudiantes y de las aplicaciones que realizan ellos de la tecnología. Logrando conocer esos métodos, podremos intentar aprovecharlos en nuestras clases y ver cómo hacer un uso positivo de ellos en el que se apunte a la comprensión y no a la memorización. La socioepistemología lleva a buscar, identificar y caracterizar métodos y construcciones que habiendo sido construidos fuera del aula, penetran en ella. De esta manera, no sólo iremos observando y reconociendo fenómenos didácticos e instrumentos, sino que los utilizaremos en el diseño de actividades para la construcción de conceptos matemáticos.

Durante siglos, nuestra cultura ha intentado que los textos de saber, en particular los de matemática, sean presentaciones despersonalizadas, expuestas de manera racional y que presenten un desarrollo progresivo y lógicamente ordenado de los temas a enseñar. En muchas oportunidades, en el aula son presentados resultados y secuencias que no tienen en cuenta la manera en las que se construyó el conocimiento matemático.

Los avances tecnológicos no siempre, por no decir casi nunca, han surgido pensando en su aplicación a la enseñanza, en su utilización en el aula. Sin embargo, en muchas ocasiones han entrado en el aula y posteriormente se han convertido en herramientas casi imprescindibles. Es su uso y aplicación lo que hace que se realice esa transformación y aceptación.

La socioepistemología está proponiendo en los últimos tiempos un cambio del discurso matemático escolar. Quienes hemos trabajado en este marco teórico, muchas veces hemos reflexionado acerca de la componente social y su papel en la construcción del conocimiento matemático.

La componente social en este cambio será vital y en ella deberemos fijar nuestra atención entre otros factores, en las formas de comunicación del conocimiento que utilizan nuestros estudiantes, en cómo incorporan a sus actividades académicas escolares, recursos tecnológicos. De esta manera se podrá comprender también de qué forma estos recursos favorecen la cognición de los contenidos matemáticos para poder hacer uso de ellos en nuestras aulas de matemática y convertirlos en verdaderos recursos didácticos. Los recursos tecnológicos como los blogs, las wikis, los ipods, por mencionar algunos, van penetrando al aula, sin que muchas veces propongamos explícitamente su aceptación. De nosotros, de los docentes, depende su aprovechamiento.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Barbero, J. (1991). *Dinámicas urbanas de la cultura.* Artículo de Internet extraído de la Revista Gaceta de Colcultura Nº 12 Diciembre. Editada por el Instituto Colombiano de Cultura. Consultada el 29/11/2007,

http://www.cesc.cl/pdf/centrodedocumentacion/CIUDAD-MULTICULTURALIDAD-MIGRACION/DINAMICASURBANASDELACULTURA_MARTIN-BARBERO.pdf

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Carrillo, H. (2006). *Recursos nemotécnicos de las funciones trigonométricas básicas.* Tesis de maestría no publicada, CICATA, IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas*. En J. R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16*(1). (pp.5-10). Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

Lezama. J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 8 (3), 339-362.

METÁFORAS, HERRAMIENTAS PARA INTERPRETAR ARGUMENTOS VARIACIONALES

Leonora Díaz, Eduardo Carrasco
U. Metropolitana de Ciencias de la Educación y U. de Valparaíso Chile
leonoradm@yahoo.es, ecarrascr17@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En este estudio se asume una naturaleza de la noción de variación como red semántico-operacional transversal, que imbrica distintos contenidos escolares de ciencia experimental y de matemática, particularmente aquellos de tiempo, distancia y velocidad. Se estudian metáforas cotidianas, escolares y matemáticas para el tiempo y la determinación de posibles eslabones entre ellas, postulados con base en un estudio de aspectos histórico epistemológicos, didácticos, cognitivos y socioculturales, propios del acercamiento socioepistemológico y en el marco de desarrollo de una ingeniería didáctica (Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco, 2006) Y de este modo aportar una visión compleja y dinámica para entender la naturaleza de la construcción de saberes matemáticos*
Palabras clave: metáforas, actividad matemática, pensamiento variacional

Las textualidades estudiantiles provinieron de las secuencias surgidas de esa ingeniería y se analizaron recurriendo a las metáforas para interpretar argumentos variacionales. Se las consideró en su calidad de herramientas de la cognición. Por su parte los elementos historico-epistemológicos y socioculturales exigieron su uso en calidad de analizadores sociales. En ese marco conceptual las metáforas entran a escena en el aula de secundaria, a propósito de la actividad matemática con la variación. Recurrir a esta herramienta en sus dos acepciones, permitió distinguir un tiempo cotidiano formado por una red compleja de intencionalidades y coordinaciones que se estructuran a partir de las necesidades de coordinación con lo otro, con los otros y de las proyecciones intencionales hacia un futuro y un pasado, y, un tiempo matemático en su calidad de parámetro y figurado sobre la base de la metáfora de una distancia horizontal. Este estudio ilustra la utilidad de la metáfora -en tanto herramienta de la cognición y como analizador social- para determinar saberes matemáticos comprometidos en prácticas de referencia tanto del aula, como de la vida cotidiana, de las profesiones y de la comunidad matemática.

La metáfora conceptual

Informa el diccionario de la Real Academia Española (2001) que esta voz proviene del latín metaphŏra, y esta a su vez del griego μεταφορ, traslación. Añade que *consiste en* *trasladar el sentido recto de las voces a otro figurado, en virtud de una comparación tácita. Por ejemplo: Las perlas del rocío. La primavera de la vida. Refrenar las pasiones (*RAE, 2001*).* En tanto que una analogía requiere conocer los dos campos de conocimiento que ella relaciona, la metáfora recurre a un solo campo, conocido, llevando al campo por conocer tanto las posibilidades que la hacen útil, así como las restricciones propias de ese campo ya conocido. Da cuenta del proceso de construcción de saber, trasladando esquemas conceptuales que explican lo conocido, hacia lo que queremos conocer. Tales esquemas son los que permiten significar y actuar en las nuevas situaciones, diferentes a las ya conocidas.

La metáfora como herramienta de la cognición

Asumimos que la cognición no actúa con esquemas conceptuales preconcebidos sino que se despliega en una co-definición con el entorno, en un constante redefinirse según la actividad que ejercemos en los distintos escenarios que nos toca vivir. Es decir la cognición se co-define en la medida que estamos en el mundo. Un estar que se entiende en las acciones que desarrollamos con nosotros mismos, con otros y con el medio. En el desarrollo de esas acciones, al seno de nuestros entornos culturales, vamos construyendo nuestra forma de ser, de estar y las estructuras cognitivas que nos permiten actuar y en las que, a su vez, se manifiesta nuestra acción. De modo que, reconocer qué prácticas humanas han estado al seno de la construcción de ideas matemáticas, inicia con asumir que éstas se construyen desde la actividad matemática ejercida, que por tanto no se entienden como objetos establecidos que están ahí para ser usados. Investigaciones actuales desde las ciencias cognitivas y en particular desde la lingüística, entienden a la metáfora como una herramienta de la cognición.

El estudio epistemológico de las matemáticas es un estudio epistemológico de las matemáticas humanas, unas matemáticas que son corporales, sociales y entretejidas con el mundo que viven quienes las usan, las construyen o las enseñan. Núñez y Lakoff (2000, p. 5) señalan: (…*) el análisis de las ideas matemáticas muestra que la matemática basada en la mente humana usa metáforas conceptuales como parte de la matemática misma… la mayor parte de las personas da sentido a los conceptos abstractos en términos concretos, usando ideas y modos de razonamiento basados en el sistema sensorio-motor. El mecanismo por el cual los conceptos abstractos son comprendidos en términos de lo concreto, es el llamado ´metáforas conceptuales´. El pensamiento matemático* *también usa metáforas conceptuales, como cuando relacionamos a los números con los puntos de una línea*. Metáforas que se usan en la construcción de ideas matemáticas y que, una vez que ellas han actuado, siguen ejerciendo su poder heurístico y de significado.

La metáfora como analizador social

Las metáforas son compartidas socialmente. Identificarlas permite no solo reconocer como se da la construcción de las matemáticas en la cognición de las personas, sino también reconocer esa construcción en grupos de referencia, sociedades y culturas humanas. Tal elaboración se expresa en metáforas compartidas por comunidades que construyen o trabajan con las matemáticas. Como describe Lizcano (1999, p. 31): (…) *el análisis sistemático de los conceptos en tanto que metáforas es una vía privilegiada de acceso al sustrato social que constituye todo discurso y, en particular, permite traslucir la articulación social que vértebra ese discurso opaco por excelencia, ese discurso que hace del concepto 'claro y distinto' su seña de identidad: el discurso científico*.

Cómo operan las metáforas

Lizcano (1999) ve en la resta la metáfora de extraer: "*restar es quitar*". Esta resta tiene un gran poder hacia el pensamiento heurístico y el entendimiento del estudiantado, al asociar a la resta con una acción muy conocida por éste. Al mismo tiempo, y sin querer, esta resta entendida como quitar porta la imposibilidad de quitar más de lo que se tiene: "*para obtener realmente una cantidad negativa aislada, habría que quitar (retrancher) de cero una cantidad efectiva, sacar (óter) algo de nada: operación imposible*" (Camot citado en Lizcano, 1999, p. 38).

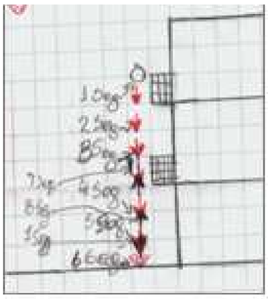


Figura 1

Por su parte John Wallis ilustra en su "Arithmetica Infinitorum" (1972) las restricciones que ejerce en él esta metáfora de la resta para establecer a los negativos como legítimos números en la obra matemática. Argumenta que constructos tales deberían ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero, por lo que le son ¡inconcebibles! De este modo la metáfora como analizador social, da cuenta de coacciones que un saber socialmente construido impone a la actividad de las personas que la usan. Por tanto permite reconocer lo concebible y lo inconcebible cristalizados en prácticas sociales que condicionan la actividad matemática de hoy. En otras ilustraciones de cómo opera la metáfora en tanto herramienta de la cognición, constatamos que estudiantes de secundaria representan la caída de la pelota al tratar de conocer y trabajar con el tiempo, tal como se muestra en la Figura 1. En su dibujo el tiempo se superpone al desplazamiento y este desplazamiento se representa como una trayectoria.

Observemos distancias epistémicas: la que el dibujo estudiantil guarda con respecto a la *gráfica tradicional distancia- tiempo* de la Figura 2. El tiempo, que no encuentra espacio propio en la Figura 1, en la gráfica tradicional se dispone en uno de los ejes. Mientras que en la representación que construye Galileo respecto de la caída (Figura 3) el tiempo sí tiene su espacio propio. Toma lugar en el segmento AB del esquema de Galileo, en tanto que el segmento CD corresponde a la distancia recorrida. Observemos que esta composición galileana de ejes es paralela, a diferencia de la composición cartesiana de la gráfica tradicional *distancia- tiempo,* que es perpendicular. Ello muestra que la humanidad ha construido arduamente el significado del tiempo matemático y su visualización. En esta construcción

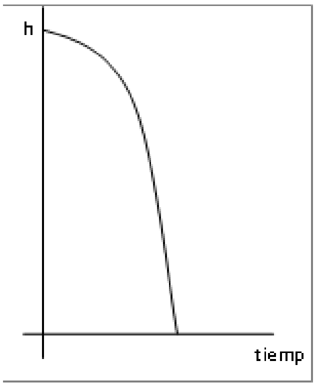


Figura 2

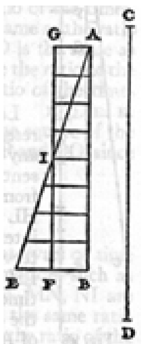


Figura 3

podemos reconocer una metáfora en la cual *el tiempo es una distancia*. Así, esta metáfora traslada, las distinciones y significados que tenemos sobre las distancias espaciales, al tiempo matemático, construyendo un significado para este último. Por ejemplo tenemos que una distancia ha de ser recorrida y entonces recorreremos el tiempo matemático de igual forma. Nos basta colocar un parámetro que de cuenta de este ´tiempo/distancia´ y tal parámetro asumirá valores tanto hacia el futuro como hacia el pasado. Ello permite que funciones con una de sus variables el tiempo matemático, se puedan graficar en ejes coordenados, fungiendo el tiempo matemático como una distancia recorrida.

La metáfora que construimos, no sólo define prácticas posibles para actuar con el concepto, sino que establece restricciones. Así al pensar el tiempo bajo la metáfora de flujo continuo representado en el eje X, no podemos dar cuenta adecuadamente del sentido subjetivo del tiempo, dar cuenta por ejemplo de cómo el tiempo subjetivo varía su velocidad. Ello explica en parte las fuertes resistencias vividas por la comunidad científica para concebir un tiempo matemático a contrapelo de esa vivencia subjetiva, implicando grandes esfuerzos establecer la metáfora de una distancia. Esta metáfora de ´tiempo-distancia´ debe ser construida entre nuestros estudiantes. Ellos han construido significados del tiempo como sujetos sociales y por tanto las metáforas que portan son aquellas que la cultura cotidiana sustenta en tanto estructuras estructurantes, a su vez, de su subjetividad.

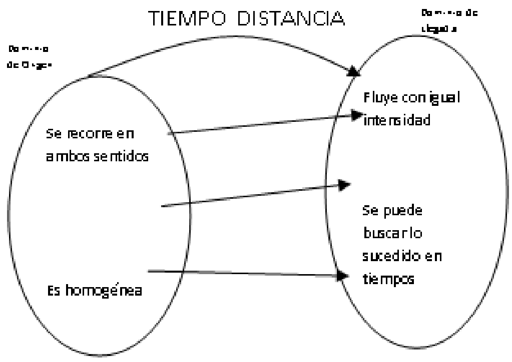


Figura 4

Metáfora del tiempo subjetivo

La metáfora del río dota de significado al transcurrir del tiempo en la subjetividad de las personas, semantizando nuestra experiencia subjetiva temporal como una corriente en la que, por una parte, en todo momento el futuro vendría al presente y se alejaría al pasado; y, por otra parte, en todo momento se experimenta un avance progresivo desde el momento presente hacia el futuro. Toboso (2003) añade a esta metáfora cotidiana del tiempo, un vértice con el que destaca la participación activa de la persona, quien no se deja llevar simplemente por la corriente. Tal vértice modula un flujo discontinuo, distinguiendo a la vez que articulando el ahora y el momento presente, elementos constitutivos de esta experiencia subjetiva del tiempo. En el ahora nos experimentamos nosotros mismos aún cuando, instante a instante, a su vez, cambiamos. El momento presente es el momento fugaz en el que somos distintos al momento anterior. Tal vértice marca la distinción y la relación entre la visualización psicológica de futuro (protensión o tensión de proyecto personal) y de pasado (retensión o tensión ejercida desde nuestra historia personal). Entre los tiempos que construye el cotidiano y aquellos que portan nuestros estudiantes, se encuentra el tiempo subjetivo (Toboso, 2003) cuya episteme dista de modo sustantivo de aquella que caracteriza a la concepción del ´tiempo-distancia´, como se observa en el diagrama de la Figura 6.

Algunas de las textualidades estudiantiles recabadas por Carrasco (2006) ilustran distancias entre epistemes de tiempos subjetivos y del tiempo matemático:

"En esta clase el tiempo no pasa nunca"
(E15, Cuestionario)

"El tiempo pasa lento y pasa rápido, pero cuando me gusta es cuando yo lo hago, es decir, yo hago mi tiempo"
(E19, Cuestionario)

"(Cuando escucho la palabra tiempo, se me vienen a la mente) momentos de mi infancia, imágenes de mí, alegre"
(E6, Cuestionario)

"Ya es tiempo de ir a estudiar"
(E19, Cuestionario)

Con las flechas del esquema de la Figura 6 (Díaz, 2007) se busca sintetizar aspectos principales de cada tiempo. En la faceta proyectivo-cualitativa encontramos una componente retensiva que da cuenta de un tiempo pasado que se trae al presente y a la vez una componente proyectiva con la que se significa al tiempo futuro, que el sujeto visualiza desde ese mismo presente. Por su parte las líneas punteadas bajo la faceta paramétrica representan ese tiempo medido por un reloj y que el estudiantado se representa, para unas situaciones, como intervalos y, en otras, como cifras o números. El tiempo matemático, que responde a la metáfora de la distancia, se representa en el esquema como una recta infinita en ambas direcciones.

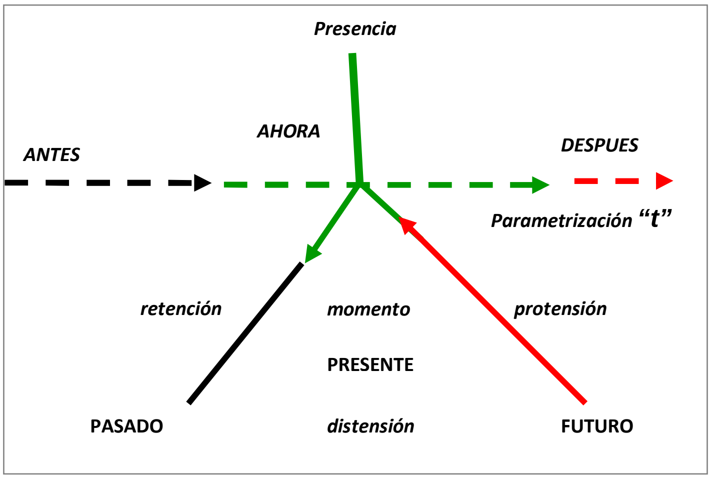


Figura 5

Así entonces la decodificación de las metáforas subyacentes a la actividad matemática desarrollada, permite identificar restricciones que están viviendo al seno de esa actividad, posibilitando determinar como en la actividad matemática del aula se hacen presentes prácticas de referencia y eventualmente visualizar prácticas sociales asociadas a la actividad matemática con gráficas de variación en el tiempo que el estudiantado desarrolla. Como señala Lizcano (1999)

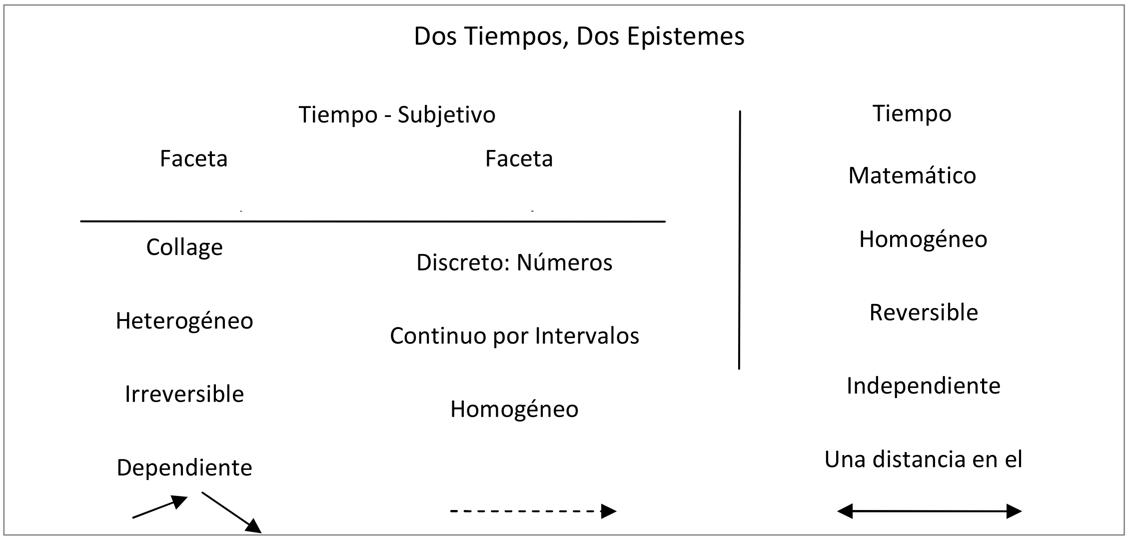


Figura 6

identificar las metáforas le permite ir decodificando imaginarios culturales, entendidos como un elemento esencial de la cultura, como un conjunto de imágenes simbólicas y representaciones míticas de una sociedad, imágenes no siempre conscientes en todos sus miembros. Es en el lenguaje que podemos indagar aquello, como señala Lizcano (1999, p.27) "*Creemos estar expresándonos libremente y estamos diciendo lo que la estructura de nuestra lengua y la multitud de metáforas que la habitan (que nos habitan) nos obligan a decir*".

Proyecciones de la metáfora como herramienta de la cognición individual y social

La socioepistemología acentúa el foco de la actividad humana, atendiendo a que la cognición no es un conjunto de símbolos, ideas e imágenes estáticas sino que se va co-definiendo con el mundo en la medida que se interactúa con él. En palabras del neurobiólogo Varela, la cognición es la "*historia del acoplamiento estructural que enactúa (hace emerger) un mundo*" y que ésta funciona "*a través de una red de elementos interconectados capaces de cambios estructurales durante una* *historia ininterrumpida*” (Varela, 1990, p. 109). Así el campo de las ciencias cognitivas pone el centro en la experiencia humana. Entonces nuestra mirada a la metáfora no va detrás de qué estructuras ideacionales se pueden reconocer a través de ella, sino que, con base en la metáfora, busca identificar unas actividades posibles de realizar y aquellas otras que la metáfora desalienta. Y cómo es que, en esas actividades, se van significando y construyendo conceptos-herramientas matemáticos (Considerar los conceptos matemáticos como herramientas significa reconocer su intencionalidad, en el uso y que el mismo se resignifica mientras su uso así lo requiere, en un marco de acciones de carácter retroactivo).

La socioepistemología considera tres planos de análisis: Actividad, Práctica de Referencia y Práctica Social (Cantoral, 2009). El recurso a ellos se inicia identificando actividades que individuos y/o grupos sociales realizan con determinado saber. Las prácticas sociales regulan las de referencia, las que a su vez lo hacen con las actividades. De este modo, onjuntos sistematizados de prácticas de referencia permiten identificar aquellas compartidas por la sociedad -que integran esos grupos que desarrollan esas actividades- que trascienden generaciones en el tiempo, constituyendo por ende, una práctica social. En el esquema de la Figura 7 ilustramos las relaciones antedichas. Para nuestro propósito interesan esos vínculos entre una práctica social, prácticas de referencia y unas actividades entre las que circulan argumentos variacionales. Las primeras ejercen su influencia a través de las prácticas de referencia, pero también las personas en la actividad van modificándolas por lo que resignificarán a su vez esas prácticas sociales, cada uno de estos procesos ocurren en escalas temporales distintas, en una co-definición dinámica y compleja.

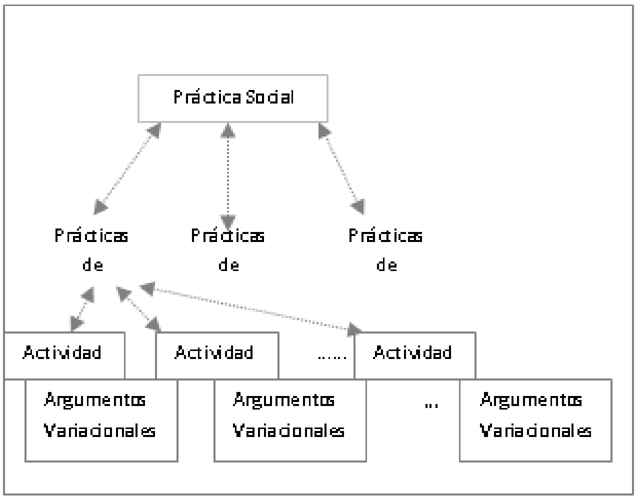


Figura 7

De este modo, en un primer nivel tendremos un conjunto de argumentos para actividades intencionadas, a la luz de prácticas de referencia. Las metáforas en su calidad de herramientas de la cognición y subyacentes a estos argumentos, nos permitirán reconocer, de acuerdo a un análisis de discurso de las textualidades de las personas, aquello que se hace en los dominios de partida respecto de los dominios de llegada. Por su parte las metáforas en su calidad de analizadores sociales, y mediante una descentración para entender cada espacio –de partida y de llegada- en sus propias relaciones, permiten distinguir aquellas prácticas que subyacen a ciertas distinciones en cada espacio (Lizcano, 1999). Aquí la metáfora se presenta en dos modos: naturalizada y viva. La primera como reflejo de lo institucionalizado, que oculta su construcción pero que aún actúa, tanto en sus posibilidades como en sus restricciones, y que por tanto, puede dar cuenta de prácticas institucionalizadas. Y la metáfora viva que, en vías de institucionalizarse, da cuenta de la emergencia de conocimientos.

Reconocer ambos tipos de metáforas presentes en argumentos traídos a escena a propósito de actividades matemáticas, relativas a prácticas de referencia tanto del aula, como de la vida cotidiana, de las profesiones y de la comunidad matemática, aporta una visión compleja y dinámica para entender la naturaleza de la construcción de saberes matemáticos.

Referencias bibliográficas

Carrasco, E. (2006). *Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Cantoral, R. (2009, enero). *Prácticas sociales en el eje de la escuela.* Conferencia efectuada en el VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, universidad de los Lagos, Puerto Montt, Chile.

Díaz, Gutiérrez, Carrasco y Ávila (2007). Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos*.* Proyecto Fondecyt 1030413. Informe Final. CPEIP. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2007). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano *(pp. 287-308). México: Díaz de Santos-CLAME A.C.*

Díaz, L. (2008). Matrices de Sentido para las Nociones de Velocidad y Tiempo. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, (pp. 223-229). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Estados Unidos: Basic Books.

Lizcano, E. (1999). La metáfora como analizador social. *EMPIRIA, 2,* 29-60. Obtenido el 30 de diciembre de 2008 desde http://www.uned.es/dpto-sociologia-I/Lizcano/index.htm.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española 22.* Extraído el 30 de diciembre de 2008 desde www.rae.es.

Toboso, M. (2003). Tiempo y sujeto: nuevas perspectivas en torno a la experiencia del tiempo. Extraído el 25 de enero de 2005 desde http://aparterei.com/

Varela, F. (1990). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Wallis, J. (1972). Arithmetica Infinitorum, *Opera Mathematica 1.* 355-478. New York: Georg Olms Verlag.

EL PAPEL DE GALILEO GALILEI EN LA CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexánder Villa Ochoa
Universidad de Antioquia Colombia
yadiramarcelamesa@yahoo.es; javo@une.net.co
Campo de investigación: Epistemología e historia de las matemáticas Nivel: Superior

Resumen. *En los últimos años, numerosas investigaciones entre ellas las de Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989), Sfard (1991) y Ruiz (1998) han resaltado la importancia del concepto de función en el estudio del álgebra y el análisis matemático, de igual manera, han destacado el papel de la historia de las matemáticas como una herramienta para la reflexión docente a la hora de diseñar situaciones didácticas. En este documento se muestra el resultado de una indagación documental en la cual se pudo determinar los aportes de Galileo Galilei (1564-1642) en la construcción del concepto de función cuadrática; particularmente se muestran algunas características de su pensamiento matemático en el momento de iniciar sus estudios. De este trabajo se resalta nuevamente la importancia de aproximarse al concepto de función cuadrática en contextos modelación de situaciones de variación; para tal efecto, los trabajos de Galilei (1638) pueden ser fuente de inspiración para muchas de esas situaciones.*
Palabras clave: función cuadrática, cinemática, cónicas, modelización

Introducción

El estudio de un objeto de aprendizaje matemático no debe concebirse como un producto estático y acabado; por el contrario, dicho estudio debe orientarse hacia las concepciones y obstáculos que lo originaron y consolidaron a través de la historia, Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989) y Sfard (1991) retomados por Posada & Villa (2006, p.11) coinciden en que la historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le sirve al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje de las matemáticas; además de ser una herramienta para identificar las dificultades o, incluso los obstáculos, que aparecieron en un concepto y pueden reaparecer en el aula (Tzanakis & Arcavi, 2000, p. 206).

Obedeciendo a esta premisa, en este documento se presenta un análisis histórico del papel que jugó los trabajos de modelización de situaciones de variación de Galilei en la construcción del concepto de función cuadrática. Para tal efecto, se considera *modelización* al proceso involucrado en la construcción de *modelos* que representan de alguna manera un fenómeno, situación o problema del "mundo real". Como proceso, la modelización involucra una serie de pasos, que van desde la identificación del fenómeno o problema hasta la construcción, validación y/o modificación del modelo. Dicho proceso ha sido referenciado en algunos trabajos como Fowler (1998) y Villa (2007) Algunos de ellos han sido reportados en Mesa & Villa (2007; 2008a; 2008b).

Conocimientos previos de Galilei

Éstos suponen un acumulado de saberes construidos hasta su tiempo que pondrá a su disposición para elaborar nuevo conocimiento que en este caso tiene que ver con modelización de fenómenos de variación, particularmente de la cinemática. Por ende es posible afirmar que a partir del mismo conocimiento que poseía Galileo es posible realizar un estudio del movimiento, y como se verá en este documento, de la función cuadrática aunque ésta no sea nombrada explícitamente por él su pensamiento de tipo funcional cuadrático sugería su acepción. Al respecto cabe entonces preguntarse ¿qué sabía Galileo? Y su respuesta demanda un vistazo a la historia de las matemáticas nos dará su respuesta, por ello es posible afirmar que sus saberes correspondía a 5 elementos tales como:

Geometría euclidiana

Prácticamente las primeras nociones cuadráticas estuvieron asociadas a conceptos de la geometría. Particularmente en los *Elementos* de Euclides (1999, p. 84) cuadrado se define de la siguiente manera *"… entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular"* posteriormente esta acepción cuadrática la retomarían los árabes como una aproximación al álgebra y que para la época de Galilei permanecía vigente, para ampliar la relación entre la geometría y el álgebra se sugiere consultar Vasco (1985).

Progresiones y sucesiones aritméticas

La disposición pitagórica de los números en formas visuales permite categorizar los números figurados, entre ellos los cuadrados, permitiendo establecer leyes generales que se construyen a partir de las variaciones entre una cantidad con sus anteriores y como consecuencia de ella la identificación de un patrón constante. Puertas (traductora y comentarista de Euclides 1996, p. 90) afirma que *"los pitagóricos y matemáticos griegos posteriores hablan de distintas clases de* *números según las distintas figuras geométricas que formen (números triangulares, cuadrados, planos, sólidos, etc")*. Así es posible a partir de la toma de datos observar cierta la descripción de algunas variaciones según de la distribución de los números.

Álgebra geométrica

El dominio de un *álgebra sincopada* desde la generalidad tiene fuertes raíces en la geometría. Los historiadores y matemáticos han notado una estrecha relación entre su álgebra propuesta por Al-Quaritmi con el Libro II de los Elementos, así como lo menciona Escohotado (traductor y comentarista de Newton, 1982).

> *[En los árabes] su alta capacidad y su interés por la geometría y la aritmética-que culmina con la formulación sistemática del álgebra por el famoso Al-Quaritmi no les conduce tampoco a hacer física matemática teórica. Es como si de alguna manera Grecia hubiese dado ya el marco genérico, y a los árabes solo les interesase perfeccionar el cuadro con exactitud y sutileza. (p. 39)*

Bien es sabido que los trabajos griegos fueron traducidos al árabe, quizás sus obras fueron estudiadas por los árabes y haya repercutido en sus posteriores constructos de las magnitudes desde una perspectiva geométrica.

Cónicas

Aunque desde Platón se evidencia el interés por el estudio de los cuerpos en movimiento Kline (1972, p.77) es Galilei (1638) quien unifica lo construido por Apolonio con fenómenos naturales, con el fin de obtener una mayor comprensión del mundo que les rodea en la medida en que elabora una matematización de ese fenómeno. Con Galilei se inaugura un gran momento para la consolidación de concepto de función cuadrática estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura, que tenía la siguiente propiedad: *"… de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l"*. (Apolonio citado por González), a ser considerada como el resultado del comportamiento de fenómenos de variación. Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes para el estudio de las relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones relativas al concepto de función. Con base en esta aserción vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos es de manera conjunta. Al identificar esta ruptura y de acuerdo con la premisa con la que se inició este documento se afirma entonces que la actividad pedagógica y didáctica debe considerarla de manera que se permita la reflexión del docente acerca de su concepción de parábola y las implicaciones que éstas tienen en el aprendizaje y construcción de este concepto por parte de los estudiantes. Es un llamado a unificar conceptos y permitirle construirse a partir de su consideración epistemológica.

Oresme 1323 – 1382

Según Ruiz (1998) uno de los objetivos de Oresme fue representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo ésto lo explica en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuun,* (citado por Ruiz, 1998) en donde llega a afirmar que: *"Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua*" (Ruiz 1998, p. 113) de donde se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número como algo diferente a las magnitudes. Según Ruiz (1998) el propósito de Oresme era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica y afirmó que las propiedades de la figura podrían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

Los puntos anteriores pueden entenderse como el constructo de conocimientos de los que dispuso Galilei (1638) para emprender su explicación acerca de los fenómenos de movimiento presentando una ruptura en la forma de concebir y representar el mundo, por ello este hecho demanda un nuevo conocimiento y ése fue su gran aporte, el vínculo de la física con las matemáticas y partir de allí la modelización matemática.

Los aportes de Galilei

En Galilei (1638) se observa la forma en que recurre a sistemas de representación a partir de gráficas rectangulares, es una demanda además de la comprensión geométrica del *gnómon*, como dirían los griegos clásicos, o el concepto de perpendicular y ángulo recto, que representa distancia, altura, etc. Esta comprensión a su vez relaciona este segmento con la media proporcional o la raíz cuadrada, por lo que le da un valor agregado a las consideraciones de Oresme respecto a la perpendicular.

Así mismo es evidente la preocupación por el estudio y el entendimiento de los fenómenos de movimiento de caída de los cuerpos y de aquello involucrado en la experimentación (simplificación, abstracción, obtención de datos, etc.) de dichas situaciones. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son:

1. Dado un cuerpo
2. Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido.
3. Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo.
4. Análisis de los datos recolectados
5. Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la
6. relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas.
7. Formulación de problemas en su obra en la que se plantean *ecuaciones* de carácter funcional como el de *"…hallar la distancia en el instante t*", de lo que se evidencia una relación unívoca y de dependencia entre la distancia y el tiempo.

Observando detalladamente lo anterior puede afirmase que se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado.

Obra de Galilei (1638)

En la obra de Galilei pueden esgrimirse ciertas bases que generaron posteriores implicaciones para el desarrollo de las matemáticas. En la siguiente situación puede observarse un cierto tratamiento de la variación cuadrática.

> *[…] si en tiempos iguales tomados sucesivamente desde el primer instante o comienzo del movimiento, tales como AD, DE, EF, FG, se recorrieren los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares a partir de la unidad; es decir, como 1,3,5,7; porque ésta es la razón de los excesos de los cuadrados de las líneas que van excediendo una de otras, y cuyo exceso es igual a la menor de ellas; vale decir, es la razón de los excesos de los cuadrados consecutivos a partir de la unidad. Por consiguiente, mientras la velocidad se acrece, durante tiempos iguales, según la sucesión simple de los números, los espacios recorridos, durante estos tiempos, reciben incrementos según la sucesión de los números impares, a contar de la unidad. (Galilei, 1638, p. 236)*

Se observa un razonamiento de carácter deductivo que involucra el trabajo con las cantidades continuas, sin embargo, en el procedimiento de obtención de los datos se realiza un proceso de discretización y en su razonamiento (con el que argumenta el concepto de cuadrado) se identifica un componente aritmético como esta afirmación galileana de que la parábola es un punto en movimiento. Al respecto se aleja de la mirada sobre las cónicas como objetos matemáticos estáticos y se acerca a una visión dinámica, ya que al relacionarlas con las situaciones de movimiento permite asociarlas a las trayectorias de cuerpos que se mueven de acuerdo a una ley, patrón o causas las cuales pueden ser estudiadas con elementos de la geometría y la aritmética.

Puede evidenciarse entonces cómo la parábola se convierte en representación geométrica del movimiento de caída de los cuerpos y de esta manera se consolida como un modelo que explica las características del fenómeno. En este proceso de modelización, queda claro que la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades, por ejemplo, una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, sino que considera la variación de las cantidades y la relación de dependencia que las determina. De igual manera, se evidencia cierto grado de comprensión de la variación de segundo orden, es decir, una cuantificación de la manera en cómo varía la variación, lo cual sugiere una aproximación a la noción de función cuadrática como aquella en la cual su razón de cambia varía linealmente. Lo anterior tiene cierta relación con lo que posteriormente se denomina *primera y segunda derivada de la función cuadrática*, en consecuencia, esta función, puede comprenderse y construirse a partir del concepto de función lineal y de la identificación de la razón de cambio la cual le ofrece un significado a los incrementos y permiten comprenderla en un contexto variacional.

A modo de cierre

Para finalizar Galilei (1638) presenta un acercamiento a los objetos matemáticos que estudia por medio de procesos de modelización, siendo muy significativo para la didáctica del concepto de función cuadrática, en tanto permite evidenciar algunas situaciones que provoca el estudio por parte de los estudiantes y que permite una integración con otras ramas de las matemáticas como la aritmética, la geometría y el álgebra. Una mirada a esta obra permite identificar algunos obstáculos en el proceso de formulación de las observaciones realizadas y sus inferencias a manera de reconstrucción de conceptos algunos de los cuales fueron presentados en Mesa y Villa (2008).

De una manera retrospectiva se puede identificar la presencia de un pre-concepto de función cuadrática en la medida en que se observan las relaciones cuadráticas cumpliendo ciertas características propias del concepto, a saber: el establecimiento (tal vez no consciente) de una correspondencia biunívoca y en la necesidad de hallar para cualquier punto en movimiento su correspondiente espacio, tiempo y una velocidad determinada.

La historia como herramienta para el docente, permite reflexionar sobre la construcción epistemológica de los objetos matemáticos exigiendo de su parte el abordaje de éstos atendiendo a sus dificultades y oportunidades en el aula.

Referencias bibliográficas

Euclides. (1996). *Elementos I-VI.* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid, España: Planeta de Agostini.

Fowler, A. C. (1998). *Mathematical models in the applied sciences*. New York: Cambridge University Press.

Galilei, G. (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

González, P. *Apolonio ¿262 a.C. - 190 a.C?.* Extraído el 2 enero, 2007 desde http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte 21*, 1-18

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2008). Construcción histórica y epistemológica del concepto de función cuadrática: Algunas reflexiones e implicaciones didácticas. En C. Tzanakis (Ed.), *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics.* Ciudad de México, México.

Mesa, Y. M., y Villa, J. A. (2008). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, (pp. 922-930). México: Comité Latinoamericano de matemática Educativa.

Posada, F., y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Jaén: Universidad de Jaén.

Newton, I. (1982). *Principios Matemáticos de la filosofía natural*. (A. Escohotado, Trad). Madrid: Editora Nacional

Sierpinska, A. (1992). Undertanding the notion of funtion. En G. Harel, y E. Dubinsky, *The concept of funtion . Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of American.

Tzanakis, C., y Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

Vasco, C. (1985). *El Algebra Renacentista.* Bogotá: Empresa Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas 19*, 51-81.

ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN UNA PRÁCTICA PROFESIONAL EN INGENIERÍA BIOMÉDICA

Erika García Torres, Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN México
egarciat@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *La investigación que aquí se presenta contribuye al estudio de la naturaleza de la construcción social de conocimiento, en ámbitos profesionales desde la aproximación socioepistemológica. El objetivo de la investigación fue postular un mecanismo de construcción de conocimiento desde la problemática de la institucionalización de conocimiento: equilibración de relaciones asimétricas. Los resultados apuntan a la existencia de roles en el aprendizaje que hacen presentes a instituciones y la simultaneidad de los procesos de institucionalización, dentro de los procesos sociales.*
Palabras claves: Institucionalización, saberes, socioepistemología, prácticas profesionales

Introducción

Las reflexiones acerca de la construcción social de conocimiento desde la aproximación socioepistemológica han propiciado el desarrollo de investigaciones a la luz de la hipótesis de que las prácticas sociales son generadores de conocimiento matemático mediante su función normativa evidenciada (Covián, 2005). Esta aproximación asume, como base filosófica, que el uso de los objetos es el que produce significado. Por sí mismo un objeto no existe, es y existe para un individuo o grupo y en relación con ellos. De tal forma, la socioepistemología es una epistemología de prácticas y no de conceptos. En este sentido se postula que antes que los conceptos existen prácticas asociadas que les dan significación, como se reporta ampliamente (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Problemática

Un postulado de la socioepistemología es que no es posible construir conceptos ni sistemas conceptuales sin la constitución y la mediación de instituciones. La problemática es de corte teórico al seno de la socioepistemología: hacer explícito un mecanismo de construcción social de conocimiento dentro de los procesos sociales.

Sobre la noción de institucionalización

La escuela es una institución en el sentido que es *fija* –acepción clásica-, construida por los seres humanos para conservar conocimiento. Sin embargo, hay otro sentido de institución *dinámico*: entidad permanente cuyas reglas de funcionamiento se comunican de una generación a otra a través de patrones de comportamiento. Dentro de los procesos sociales, la vestimenta es una institución, permite vestirse con variantes pero también impone restricciones de carácter cultural. Los seres humanos construyen y usan estas acepciones de institución que caben en una categoría: entidades que posibilitan la conservación de saberes en las sociedades, como formas organizadas que establecen roles a los participantes.

La socioepistemología pretende explicar los procesos de institucionalización, es decir, aquellos procesos que explican cómo se constituye una institución. Si existen prácticas cotidianas que se vuelven institucionales, es coherente preguntarse ¿cómo se da el mismo fenómeno entorno de un saber? En el ámbito del conocimiento matemático las instituciones aparecen como conceptos evidentes e inalterables, es decir, no se indagan sus procesos de institucionalización. Por ejemplo, la derivada, se estudia como un conocimiento dado y evidente sin considerar las prácticas asociadas que le dan significación.

Mecanismos de construcción social del conocimiento

Se plantea la hipótesis: los saberes se institucionalizan por la existencia de *mecanismos* que lo posibilitan, inmersos en la institucionalización; no se observan a priori, sino se requiere de un método para dar evidencia de ellos. En (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004) se menciona que en las investigaciones de Martínez se ha dado evidencia de un mecanismo de construcción de conocimiento, al que ha denominado *convención matemática*. "Este mecanismo de dotar de significado a los objetos nuevos a partir de otros ya establecidos es lo que se llama principio de consistencia" (Cantoral, et al, 2000, p. 22).

La institucionalización desde el punto de vista de la Sociología

Las reflexiones al interior de la socioepistemología acerca de la institucionalización tienen un fundamento en la sociología. Cordero (2006) menciona que Durkheim considera que la sociedad humana presenta un fenómeno de una naturaleza especial, la cual consiste en el hecho de que ciertas formas de actuar son impuestas, o por lo menos sugerida *desde afuera* del individuo.

Sociólogos contemporáneos consideran que la institucionalización tiene sus orígenes en la *habituación*. “La institucionalización aparece cada vez que se da una tipificación recíproca de acciones habitualizadas por tipos de actores. Dicho en otra forma, toda tipificación de esa clase es una institución” (Berger y Luckmann, 2006, pag. 74).

Las instituciones implican historicidad y control: se construyen en el curso de una historia compartida y no pueden crearse en un instante. Las instituciones se encarnan en la experiencia individual por medio de los *roles* (Berger y Luckmann, 2006).

El proceso de institucionalización propicia que los saberes lleguen a ser aceptados, por tanto se estudió los procesos de institucionalización de las prácticas, en un ámbito profesional específico de la Ingeniería Biomédica. Nuestro interés se ubicó al nivel de comprender cómo un saber se constituye como tal, y no sólo a tratarlo una vez constituido.

Objetivo

Asumimos que la matemática es funcional, lo cual hace referencia a la presencia y movilización en diversas situaciones de saberes, incorporados a él en un sentido orgánico. De modo que el objetivo la investigación fue: Identificar la existencia de mecanismos de construcción social de conocimiento considerando los saberes relativos a la Matemática en los procesos de institucionalización las prácticas constitutivas de una práctica profesional en Ingeniería Biomédica.

Estudios de prácticas

Se han realizado investigaciones que centran su atención en la observación de prácticas profesionales. Hoyles, Noss y Pozzi (2000), identificaron el uso visible de la matemática (*situated abstraction*) en tres prácticas profesionales: métodos y algoritmos que periten solucionar problemas. Kent y Noss (2001) y Romo (2007) estudiaron la naturaleza del conocimiento que usan los ingeniero reflexionando sobre qué matemáticas deben incluirse en la enseñanza de sus cursos escolares. Existe una diferencia entre estas investigaciones y la nuestra: No se estudia qué conocimiento matemático usan como objetivo principal, sino asumiendo que en esos escenarios se usa la matemática funcionalmente, se estudia el proceso de institucionalización de un saber, privilegiando el estudio de los procesos sociales inmersos en dichas prácticas.

Metodología y práctica de referencia

Se eligió una comunidad científica específica de un laboratorio de un centro de investigación del más alto nivel científico, en el área de Ingeniería Biomédica, "actividad interdisciplinaria entre las ciencias exactas e ingenieriles con las ciencias de la vida" (Suaste, 1998, p.1).

Se consideró el modelo expuesto por Montiel (2006) para caracterizar la construcción social de conocimiento. Este modelo sigue la siguiente ruta: *actividad*, observable tanto en los individuos como en los grupos humanos que articulada con otras actividades se asocian a una *práctica de referencia* y son reguladas por una *práctica social*.

La información recabada a través del método etnográfico permitió caracterizar una práctica de referencia a través de triangulación de información: Registros de audio y video, revisión de literatura especializada y entrevistas no estructuradas a los participantes. La práctica se referencia se denomina: *desarrollo y caracterización de cerámicas ferroeléctricas con innovación*. Los participantes de la investigación –**A**: aprendiz y **D**: experto- desarrollan cerámicas utilizadas para diferentes aplicaciones de equipo médico. La innovación se refirió a implantar en ellas un alambre de platino. El comportamiento de las cerámicas lo obtienen al medir una característica eléctrica -la constante dieléctrica-, e identificar la *temperatura de Curie* (T_c), la cual indica el punto de temperatura a partir del cual la cerámica pierde unas propiedades ferroeléctricas (figura 1).

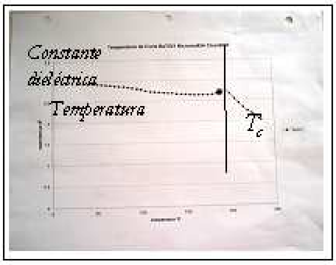


Figura 1. T_c representa un máximo o un punto de inflexión

Para la comparación de cerámicas con y sin implante obtienen la curva de la cerámica sin implante que denominan testigo, realizan la comparación *gráfica testigo vs. gráfica implante*.

Con la finalidad de inferir un mecanismo de construcción de conocimiento se elaboró el método de *secuenciación de episodios*, el cual asociado al modelo de construcción de Montiel (2006) permitió analizar actividades dentro de la práctica de referencia citada. La *secuenciación* consiste en seleccionar un conjunto de episodios –fragmento de video seleccionado con cierta intención, que se acompaña de su transcripción- y estudiar los casos donde el tránsito entre ellos permite inferir un mecanismo existente.

Resultados

El mecanismo que se infirió de ese análisis se denominó *equilibración de relaciones asimétricas* y se caracterizó como: proceso en el que se busca el equilibrio en una relación de naturaleza jerárquica manifestada a través de dos *roles*, representados por el saber experimental y el saber teórico, teniendo como base el principio de consistencia y un problema común. El término de saber teórico se refiere al saber sabio, y el término saber experimental al saber funcional. El saber teórico se hizo presente a través del *rol* del experto (**D**) y el saber experimental a través del *rol* del aprendiz (**A**). A través de una entidad matemática como la gráfica se manifestó la relación de asimetría, pues cada participante *usó* la gráfica de acuerdo al saber que hizo presente. Se mostrará un ejemplo que manifiesta la equilibración en esta relación de asimetría.

Ejemplo: Secuencia 1: Compuesto TBP, ¿cómo subió tanto?

A y **D** discutieron sobre los resultados obtenidos de la Temperatura de Curie para el compuesto de titanato de bario con platino –que denominamos TBP- **A** muestra a **D** los resultados de la experimentación, y **D** hace un contraste para verificar que sean coherentes con la teoría ya establecida. **A** y **D** comparten una misma mirada de la gráfica, en el sentido de que es la gráfica un *medio para interpretar propiedades experimentales*.

Episodio 1: Confianza en el experimento

Sesión 9, 24/10/08, duración 00:02:30

Este episodio evidencia la confianza de **A** en la experimentación: usa la gráfica como un argumento para sostener una hipótesis empírica, por lo que sus argumentos giran en torno a la conjetura formulada desde su experimentación. Para **D** la gráfica es un criterio de confirmación empírica, que debe sustentar un hallazgo teórico.

D: Híjole, no lo puedo creer eh.

D: Hay no puede ser esto.

A: Está grabado todo doc.

D: No, no puede ser, ¿cómo subió tanto?

A: Todo está grabado.

D: Pero de 130 grados subió a (…) ¿Cuánto tienes? ¿Trescientos que?

A: En trescientos noventa grados.

D: Yo no puedo creer que esta curva salga, mira aquí está

A: La repetimos.

Episodio 2: Transición

Sesión 9, 24/10/08, duración 00:01:47

D argumenta con base en la comparación de parámetros la plausibilidad del resultado de **A**. Este episodio muestra un estado intermedio entre la confianza en el experimento y la confianza en la experiencia o conocimiento, es decir, en el conocimiento que **D** representa a través del rol de saber teórico. La interacción de ambos saberes se encuentra en otro nivel, en la medida en que **A** y **D** discuten cada uno intentando defender sus argumentos.

Episodio 3: Confianza en la experiencia

Sesión 9, 24/10/08, duración 00:01:56

Los argumentos que proporciona **D** evidencian que el resultado no es tan plausible, sin embargo, **A** continúa confiando en la gráfica que obtuvo y esto lo manifiesta cuando le dice a **D** que puede hacer otro tipo de prueba con la que quizá obtenga resultados favorables similares a los que obtuvo.

Consideraciones generales de la secuencia 1

La secuencia expresa el desequilibrio existente en la relación de asimetría cuando en el episodio 1 el énfasis está en el saber experimental. En el episodio 2 hay manifestación de ambos saberes -experimental y teórico- y los argumentos de ambos *roles* pueden ser plausibles; sin embargo en el estado final los argumentos de **D** manifestando el rol del saber teórico produjeron una equilibración, en el sentido de que los dos *roles* quedan al mismo nivel argumentativo. La equilibración se produjo por un consenso con base en el uso de la gráfica.

Conclusiones

Se proporcionan indicios de que la identificación del mecanismo expuesto no es un problema que atienda la transposición didáctica al centrar su atención en los efectos del paso del saber teórico al saber escolar; y tampoco un problema que atienda la transferencia pues no explica el paso del saber escolar al saber funcional. Más bien, el estudio de prácticas referidas a contextos en los que se manifiesta un saber funcional puede motivar la identificación de elementos que propicien reflexiones acerca del conocimiento teórico.

El estudio de los procesos de institucionalización de las prácticas, aporta elementos a un modelo de construcción social de conocimiento (Montiel, 2006), que reconoce a la práctica social en su función normativa. Si bien las instituciones controlan el comportamiento humano estableciendo pautas definidas de antemano que lo canalizan en una dirección determinada, un mecanismo como el que se postula en esta investigación, permite vislumbrar que la práctica social permite que se desarrollen procesos de institucionalización de manera *simultánea*, que no se contradicen, es decir, la práctica social está en un nivel posterior que los procesos de institucionalización (figura 2).

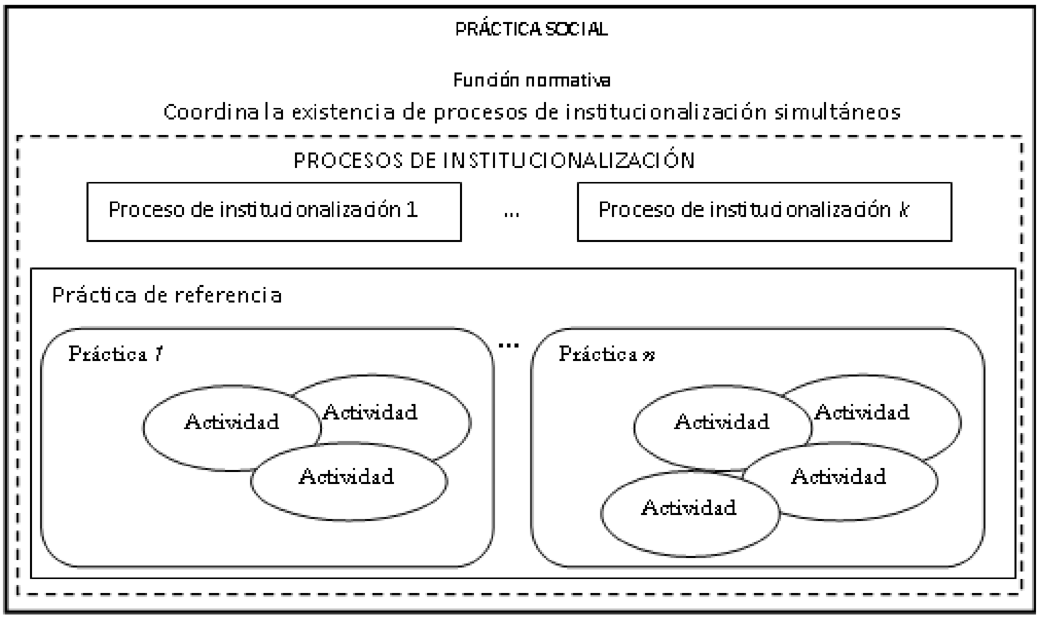


Figura 2. Modelo para la construcción social de conocimiento matemático considerando los procesos de institucionalización

Esta conclusión se nutre a la luz de un resultado que apunta hacia la existencia de 2 procesos de institucionalización que no se contradijeron: El primero referido al proceso de institucionalización de un **saber experimental a un saber teórico**, es decir, la práctica de generación de cerámicas con innovación se fue institucionalizando. El segundo, referido al **aprendizaje de A**, pues en la *evolución de las prácticas* se observó que construyó y habituó su conocimiento a situaciones específicas.

Estudiar este tipo de contextos más amplios como las prácticas profesionales, deviene importante pues la transferencia de conocimiento se da en esos contextos y no en la escuela, por tanto, entender la lógica de las prácticas apoya la ampliación de un modelo de construcción social de conocimiento: La práctica social como normativa y reguladora de procesos de institucionalización simultáneos; los procesos de institucionalización como formas de estudiar a través de *roles* las manifestaciones de las instituciones, donde están inmersos mecanismos de construcción como la equilibración de relaciones asimétricas; la práctica de referencia como contexto y las prácticas como ejecución reiterada e intencional de la actividad.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* (p.p. 418-122). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero F., Alanís J., Rodríguez R. y Garza A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación, algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Número especial*, 83-102.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Berger, P. y Luckman, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Madrid: Amorrortu.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano*, 265-286. México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Hoyles, C., Noss, R. y Pozzi, S. (2000). Working Knowlegde: Mathematics in use. En A. Bessot y J. Ridgway (Eds.) *Education for Mathematics in workplace* (p.p. 17-35). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kent, P. y Noss, R. (2001). Investigating the mathematical components of engineering expertise. *25th Psychology of Mathematics Education Conference*. Utrecht, Holanda.

Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. En G. Martínez (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19* (p.p. 818-823). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Romo, A. (2007). The role of mathematical knowledge in a practical activity: engineering projects at university level. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.) *Fifth Congress of the European Society* *for Research in Mathematics Education* (p.p. 2150-2159). Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Suaste, E. (1998). *Ingeniería Biomédica: Antecedentes, Desarrollo y desenlaces en México.* México: México.

CARACTERIZACIÓN DEL USO DE LA ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE LA BIOLOGÍA

Edgar Vázquez, Francisco Cordero
CINVESTAV-IPN México
evazquezg@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta un avance de una investigación que consiste en hacer un estudio socioepistemológico para caracterizar una justificación funcional del uso de la matemática en una situación de profesión cuyo dominio especifico es la biología. Para ello se está creando un marco de referencia en el cual la modelación de la estabilidad de una ecuación diferencial o de un sistema dinámico proporciona argumentos que predicen el comportamiento de diversos fenómenos biológicos, especialmente la resistencia viral y el comportamiento de la propagación del SIDA, fenómenos que comúnmente no son estudiados mediante este objeto matemático y que no tienen la intencionalidad de ser enseñados en el aula.*
Palabras Clave: Justificación funcional, modelación, estabilidad, biomatemáticas

Introducción

Para encontrar una respuesta contundente de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo desde la disciplina de la Matemática Educativa, cada vez es más clara la necesidad de establecer relaciones entre la Obra Matemática, la Matemática Escolar y la Matemática de la Sociedad. La aproximación socioepistemológica, en consecuencia, ha creado un marco teórico que da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático donde la organización de los grupos humanos, manifestada en prácticas sociales, es el principal reactor de esa construcción.

Un mecanismo del marco teórico consiste en postular que las prácticas sociales norman la construcción del conocimiento matemático lo que conlleva a estudiar cómo las producciones matemáticas varían según las características del grupo humano. Bajo este marco se considera importante investigar a la modelación de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales en una justificación funcional, categoría que hace referencia a que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en una situación especifica son funcionales como contraparte de una justificación razonada, es decir lo que norma la justificación funcional no es una proposición lógica sino aquello que le es de utilidad a lo humano (Cordero y Flores, 2007). Investigación que está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestion para el Nivel Superior*. Clave: No. 77045.

Así, caracterizar el uso de la estabilidad, en una situación de profesión, en el dominio de la biología y que no tiene la intencionalidad de ser enseñada en el aula, será la tarea que nos ayudara a cumplir nuestro cometido.

La Investigación

En el ámbito escolar es común encontrar que la enseñanza y el aprendizaje de la estabilidad de una ecuación diferencial o de un sistema dinámico esta vinculada a la modelación matemática de algún fenómeno físico, químico, económico o biológico, sin embargo, la forma en que se presenta este objeto matemático es simplemente como una aplicación de la matemática en otra ciencia soslayando la idea de que la estabilidad puede ser una herramienta funcional en el estudio de algún fenómeno. Esto quizás este ligado a la forma en que se ha caracterizado el concepto de modelación.

Existe una concepción tradicional de lo que es modelación matemática y de lo que es un modelo matemático. De estas podemos destacar dos aspectos importantes, uno referente a que modelación es referida a establecer vínculos entre fenómenos, situaciones o problemas y otras construcciones, llamadas modelos, para diferentes fines; el otro aspecto que destacamos es que el modelo matemático, generalmente, se concibe como una ecuación o un sistema de ecuaciones. La idea que identifica los modelos matemáticos con las ecuaciones es ampliamente difundida en los medios escolares (Arrieta, 2003).

La aproximación socioepistemológica en consecuencia ha tomado diversos elementos de construcción del conocimiento que han llevado a considerar a la modelación como una práctica social, Suárez (2008) describe estos elementos de la siguiente manera:

a) Nos interesa la matemática funcional, es decir aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente.

b) El volumen y el carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre vienen determinado por el nivel de desarrollo de las prácticas sociales, es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior.

c) La construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana.

d) El rediseño del discurso matemático escolar requiere de la formulación de nuevas epistemologías, basadas en las prácticas sociales.

Es así como se puede afirmar que caracterizar el uso de la estabilidad en un dominio específico, en este caso la biología, nos proporcionará elementos que pueden, en un futuro, afectar la forma en que se enseña este objeto matemático y, en consecuencia, el currículo escolar.

Metodología

El enfoque de la investigación es de corte cualitativo. Un aspecto metodológico importante para la investigación ha consistido en crear un marco de referencia para observar la situación de profesión. El camino que se ha convenido para tal fin es el siguiente:

a) Analizar la obra de un profesionista del área biológica y caracterizar una justificación funcional. Algunas de las obras analizadas fueron: Hernández y Velasco (1999), Velasco (2000, 2006).

b) Analizar su rol en la práctica profesional a través de métodos etnográficos.

Resultados

Análisis de las obras. Es interesante observar que la relación que existe entre la matemática y la biología surgió desde hace mucho tiempo, cuando pensadores como Malthus en el siglo XVIII, Verhulst en el siglo XIX y Vito Volterra en el siglo XX, matemátizan algunos conceptos y procesos biológicos (Hernández y Velasco, 1999); actualmente existen diversas investigaciones que hacen uso de objetos matemáticos, como es el caso de la estabilidad, para explicar alguna situación o predecir comportamientos específicos tales como: el crecimiento de alguna planta por medio del modelo de Von Bertanlanffy, la propagación de alguna enfermedad a través de los modelos SIR, SEIR, SIS, o la interacción de dos especies con el modelo Depredador-Presa; cabe mencionar que existen modelos que se asemejan cada vez más a la realidad, sin embargo, en la naturaleza existen factores que impiden que el modelo sea totalmente eficaz, debido a esto, existen científicos del área biológica que sostienen la teoría de que la matemática es una herramienta, útil pero no única, que ayuda a sus estudios.

Lo anterior llevo al análisis de una Alternancia de Saberes que existe entre estas dos ciencias; según Velasco (2000) la aplicación de las matemáticas a la biología se ha dividido en dos partes tal y como se muestra en la figura 1, la aplicación rutinaria se refiere a aquellas técnicas que se presentan comúnmente en la matemática escolar y, los nuevos métodos hacen referencia a que en la actualidad existen cada vez más estudios que hacen uso de la modelación como metodología la cual ayuda a dar respuesta a un problema real de la biología.

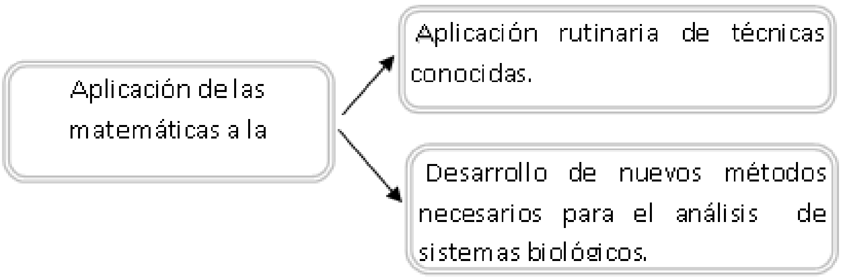


Figura 1

A pesar de esto, construir un modelo y analizarlo no significa hacer biología, es necesario considerar otros elementos propios de la naturaleza del fenómeno (Velasco, 2006) por lo que la matemática será comparada con un microscopio metodológico ya que esta permitirá describir, explicar o predecir fenómenos de naturaleza biológica y, así como existe gran variedad de microscopios, por ejemplo el ultravioleta, el infrarrojo y el óptico, también existe una amplia gamma de objetos matemáticos que pueden ser usados para resolver un problema, como es el caso de la estabilidad.

Aspectos como los anteriores propiciaron el surgimiento de la biología matemática o biomátematica, disciplina de reciente creación cuyas caracterizaciones encontradas coinciden en que se ocupa de estudiar a aquellas áreas de la biología experimental, de campo o teórica en donde se han aplicado de manera relevante métodos matemáticos.

También, como resultado del análisis de las obras, se ha logrado establecer una epistemología de modelación de un fenómeno biológico el cual consiste en tres categorías que son caracterizadas de la siguiente manera:

- **Análisis de la Información.** Patrón de tareas en el cual se recopilan, organizan, comparan e interpretan datos e información del fenómeno en tablas y gráficas, Flores (2005).
- **Análisis de Comportamientos.** Patrón de tareas en el cual se establecen compartimentos del fenómeno y se analizan y determinan comportamientos de cada uno de ellos.
- **Análisis de Estructuras.** Patrón de tareas en el cual se altera algún compartimiento del fenómeno y se analizan los efectos en el sistema.

El diseño de la entrevista. Una vez terminado el análisis de las obras, se diseñó una entrevista con base a los elementos que se han encontrado hasta el momento. La entrevista consistió en 3 actividades, en la primera se preguntan aspectos propios de la relación que existe entre las dos ciencias, la matemática y la biología; en la segunda parte se le preguntan aspectos propios de la modelación de un fenómeno para un biólogo y en la última parte se preguntan algunos detalles de carácter gráfico.

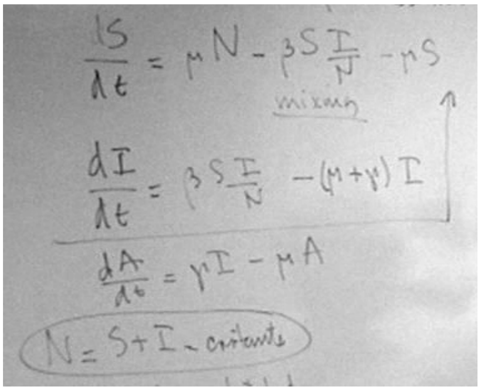
Resultados de la entrevista. La propagación de enfermedades fue el tema que más resalto durante la entrevista. El siguiente fragmento describe la forma en que un biólogo determina el índice de propagación del SIDA en homosexuales, en él están presentes aspectos propios de la categoría de análisis de compartimientos.

> *JV: En el SIDA, para homosexuales, el, es simple y sencillamente el número, la tasa de cont…, el número de contactos sexuales que tiene per capita un infeccioso por la probabilidad de que ese contacto resulte en infección por el tiempo de duración del periodo de infección, ese es el número para enfermedades de transmisión directa…*

$$R_0 = \beta\phi D$$

Posteriormente, haciendo uso de la matemática como metodología, se puede observar claramente en la Figura 2 que esta presente también un análisis de compartimientos, y se obtiene un número reproductivo básico distinto al que puede desarrollar un biólogo.

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$$



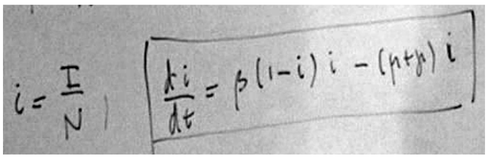


Figura 2. Modelación de la transmisión del SIDA desde la matemática.

El concepto de *modelación* también causo controversia ya que, como se menciono anteriormente, presenta distintas concepciones. En la biología:

> *JV: ¿Cuáles son los modelos importantes en esta área? Los modelos animales, el ratón, fundamentalmente el ratón, la drosofila… z*
>
> *JV: … porque con esos los puedes agarrar, los puedes alterar, puedes cambiar genes, puedes cambiar hormonas, y puedes ver como resulta el cambio de forma, la generación de otra antena, el cambio de sexo, lo que quieras…*

En la matemática:

JV: … la primera critica es bueno lo que saque del ratón para servir para ese ratón y si lo hago en diez ratones pues en 10 ratones y además va a ser estadísticamente, y si lo generalizo para más y para llevarlo a, a como se genera mi forma pues, pues no puede ser ¿Qué necesitas? un modelo general que sirva para todo,…

Consideraciones Finales

La resistencia viral y la propagación del SIDA son los temas principales que se analizan en las obras del biólogo que se entrevisto, gracias a estos fenómenos los resultados que se han obtenido son: la construcción de una epistemología del uso de la modelación de la estabilidad en biomátematicas, la cual consta de 3 categorías: análisis de la información, análisis de comportamientos y análisis de estructuras; y el análisis de aspectos, como la concepción de modelación, los cuales surgen de una alternancia de saberes entre dos ciencias con metodologías tan diferentes como lo son la biología y la matemática.

Para los biólogos, además del análisis de la estabilidad, es necesario considerar otros aspectos importantes tales como la historia y las condiciones físicas y biológicas involucradas en el problema.

La estabilidad puede considerarse una *herramienta* matemática que ayuda a predecir el comportamiento del fenómeno, proceso o concepto biológico en cuestión.

Se ha observado tambien que el binomio modelación–graficación tiene un papel relevante en la estabilidad ya que, como se menciona en Cordero, (2006), además de ser una herramienta que ayuda a hacer representaciones adecuadas y eficientes de cada una de las situaciones es una práctica que trasciende y se resignifica. Ejemplos de esto se encuentran en Biología de Poblaciones donde existen diversas investigaciones que utilizan el modelo Lotka-Volterra para explicar el comportamiento de dos especies bajo el efecto de algún fenómeno, como el efecto Allee o en Epidemiología en el estudio de la propagación del virus del SIDA bajo el efecto de alguna droga. En estas investigaciones, el uso de las gráficas es de gran importancia para determinar el comportamiento del fenómeno.

Lo expuesto anteriormente describe solo algunas características de una justificación funcional del uso de la matemática en una situación de profesión, en el dominio de la biología.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cordero, F. (2006). *El* uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En Cantoral, R., Covian, O., Farfán, R. M., Lezama, J., y Romo, A. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (p.p. 265- 286). México: Reverté.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1)*, 7-38.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Hernández, G. y Velasco, J. (1999). *El manantial escondido, un acercamiento a la biología teórica y matemática.* México: Fondo de Cultura Económica.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una categoría para la matemática escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Velasco, J. (2000). El gene, la forma, el virus y la idea: una perspectiva personal de la biología matemática. *Miscelánea Matemática.* 32, 5-38.

UNA APROXIMACION SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LA CULTURA MATEMATICA DEL ESTUDIANTE DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE OAXACA

Luz María Mingüer Allec
Instituto Tecnológico de Oaxaca México
luzminguer@gmail.com; luzma16@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El marco teórico de la aproximación socioepistemológica nos permite analizar las prácticas sociales que rodean al fenómeno de cultura matemática del estudiante del ITO, dichas prácticas provienen del entorno sociocultural que rodea al estudiante, específicamente, del medio familiar, del medio ambiente social y del medio escolar. Presentamos en este documento las nociones teóricas que sustentan una investigación en curso denominada "Una aproximación socioepistemológica de la cultura matemática del estudiante del ITO" que persigue como principal objetivo analizar y comparar las prácticas sociales de un grupo de estudiantes actuales, con las prácticas sociales de estudiantes de matemáticas de hace treinta años, de esta manera tener elementos para entender porqué y cómo cambian éstas.*
Palabras clave: práctica social, cultura matemática

Introducción

La aproximación socioepistemológica analiza los procesos de construcción de conocimiento matemático tomando en cuenta las influencias socioculturales que rodean dicha construcción, es decir vincula fuertemente los procesos de construcción con su entorno sociocultural. Surge la reflexión acerca de los cambios estructurales que México ha sufrido en los últimos treinta años, mismos que han incidido en las formas de interpretar el mundo circundante y como consecuencia en nuevas formas de dar significado a la educación, a la comunicación, a la información, etc. Resaltando entonces las preguntas: si las influencias socioculturales que rodean la construcción de conocimiento matemático en una comunidad van cambiando con el paso del tiempo, debido a un desarrollo social, económico, cultural, tecnológico, ¿cambiarán estonces algunas prácticas sociales? ¿Y cómo cambiarían? Estos temas están en el centro de la aproximación socioepistemológica.

En la investigación que abordamos "Una aproximación socioepistemológica de la cultura matemática del estudiante del ITO" estamos analizamos un fenómeno sociocultural que denominamos «cultura matemática» , dicho análisis nos permitirá identificar cuáles son las prácticas sociales que intervienen en la conformación de la cultura matemática del estudiante del ITO, así mismo reconocer si las prácticas sociales que conforman dicha cultura son las mismas o son diferentes, a las prácticas sociales de hace treinta años. De esta manera deseamos llegar a entender porqué y cómo cambian éstas, contribuyendo con la búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas anteriormente.

Presentamos entonces en este escrito algunas consideraciones teórico-metodológicas que están en el centro de esta investigación, enseguida, a manera de ejemplo, se muestran algunas prácticas sociales -relacionadas con la enseñanza de las matemáticas- de hace 30 o 40 años, con la idea de vislumbrar si habrá cambios importantes en las prácticas en el aula de matemáticas en la actualidad.

Consideraciones teóricas

El Marco teórico de la socioepistemología

En esta investigación abordaremos la «cultura matemática del estudiante del ITO» desde la perspectiva de la aproximación socioepistemológica, que focaliza su atención en los contextos socioculturales que rodean a la construcción de conocimiento matemático, analizando factores determinantes que propician dicha construcción, en los ámbitos: familiar, del medio ambiente social y escolar, que ocurren durante las etapas de la vida de un estudiante de Ingeniería.

En este marco teórico, recurriremos a las herramientas que R. Cantoral propone en su tesis doctoral: *Un estudio de la formación social de la analiticidad*, (Cantoral, 2001a) la naturaleza de las investigaciones –plasmadas en dicha tesis– definen un paradigma de investigación que posibilita abordar objetos de estudio que no aparecen de manera explícita en los escenarios que forman las diferentes problemáticas de investigación en Matemática Educativa, al establecer un método de acercamiento a tales problemáticas en las que se estudian fenómenos de construcción de conocimiento matemático.

En dicho estudio, Cantoral recurre al estudio minucioso de los contextos socioculturales vigentes en los momentos históricos cuando se ha construido conocimiento matemático, así como de otras formas de acercamiento a los fenómenos de construcción de tal conocimiento, señalando así las diversas posibilidades que la aproximación socioepistemológica provee al campo de la Matemática

Educativa para poder abordar todo tipo de investigación que lleve implícita la construcción de conocimiento matemático en contextos escolares o fuera de ellos, en épocas pasadas o contemporáneas.

Dentro de la lista de tareas propuestas por Cantoral, para enfrentar su problemática propia, expone que persigue como uno de sus objetivos «reconocer el grado de permeabilidad de las construcciones originales en la didáctica de entonces y recíprocamente el nivel de influencia de ésta sobre las estrategias que favorecen la construcción de conocimientos matemáticos» (Cantoral, 2001a, p.viii).

Otro objetivo planteado en esta lista es: «reconocer el fenómeno de la transposición didáctica que opera entre las nociones de predicción y convergencia en el discurso matemático escolar del cálculo» (Cantoral, 2001a, p.ix).

Para llegar a reconstruir el discurso matemático escolar, Cantoral estructura, a través de su propio paradigma, una metodología que gira alrededor de cinco elementos estratégicos, conceptos claves, que definen las herramientas por excelencia de la «aproximación socioepistemológica», los cuales son: la génesis histórica, la didáctica de antaño, la fenomenología intrínseca, los constructos característicos, la reconstrucción de los significados asociados y la praxis educativa.

La tesis de Cantoral se instituye en un marco teórico enriquecedor, ya que provee de categorías, métodos y herramientas que permiten problematizar y organizar aquellos elementos de orden sociocultural que pueden estar presentes en lo que denominamos la cultura matemática del estudiante del ITO.

Otros referentes

La tesis doctoral: "Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Una aproximación socioepistemológica" (Mingüer, 2006) fue desarrollada en el marco teórico conformado por las investigaciones doctorales de Cantoral. Por lo que los resultados obtenidos por Mingüer constituyen parte de los referentes de la presente investigación. Los principales resultados que arroja la investigación sobre la cultura matemática de los profesores del ITO son:

Primero, la cultura matemática de un individuo es reconocida como una sucesión de construcciones de conocimiento matemático que proviene de prácticas sociales vinculadas a la matemática, a su enseñanza y a su aprendizaje; segundo, la cultura matemática es concebida como un fenómeno en el que, además del conocimiento matemático puro, existen múltiples significaciones de origen sociocultural (prácticas sociales ligadas a la matemática) que definen la forma en la que el individuo concibe a las matemáticas y se relaciona con ellas; tercero, se identificaron las prácticas sociales que intervienen en la conformación y definición de la cultura matemática de un profesor del ITO; cuarto, se analizó la naturaleza y acción de las prácticas sociales que intervienen en la conformación de la cultura matemática de los profesores del ITO; quinto, se identificó el fenómeno de la socialización del conocimiento matemático en la conformación de la cultura matemática de los profesores del ITO.

La realización del estudio del fenómeno sociocultural de la cultura matemática de los profesores de matemáticas del ITO, mostró interés fundamental porque permitió la identificación del mecanismo mediante el cual actúan las prácticas sociales en la conformación de dicha cultura.

Las prácticas sociales

Algunas influencias socioculturales pueden ser concebidas como prácticas sociales que un grupo humano con una cultura específica practica en su comunidad; estas prácticas sociales envuelve y permea a dicho grupo humano, posibilitando su propia reproducción, y la reproducción de nuevas prácticas sociales que son el resultado de las necesidades y motivaciones internas y externas a la comunidad (Mingüer, 2006)

De lo anterior se desprende que las *prácticas sociales* son el conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, ejerciendo influencias en la psique de los individuos que forman parte de un grupo social. Mingüer comenta las características de las prácticas sociales identificadas en su investigación *"La práctica social no es estática es activa se está construyendo día a día y es producto del hombre mismo, su característica principal es que es vigente y genera consenso, no siempre se manifiesta o percibe con toda claridad, puede estar oculta, pero se intuye y se presiente, la práctica social puede estar constituida por actividades motrices o intelectuales, es decir, puede tratarse de una práctica de uso de la matemática (utilización del compás de forma* *intuitiva para el trazo de una espiral sobre un bloque cilíndrico de madera) o de una idea o sentimiento, creencia, acerca de las matemáticas ("las matemáticas son difíciles"), otra característica de la práctica social en matemática educativa es que ésta no atañe a un solo individuo sino a comunidades de individuos"* (Mingüer, 2006, p.9).

Como el objetivo perseguido en esta investigación es comparar las prácticas sociales relacionadas con las matemáticas de hace 30 años, con las prácticas actuales, para identificar qué prácticas son las que cambian y cómo lo hacen; presentamos algunas de las prácticas escolares (de hace 30 ó 40 años) identificadas entre un grupo de profesores de matemáticas del nivel superior, con el propósito de distinguir algunas diferencias con las prácticas actuales.

Prácticas sociales relacionadas con el medio escolar.

TÉRMINOS INCLUSIVOS	TÉRMINOS INCLUIDOS
"Sí, en tercero de prepa nos dio un profesor que empezó a darnos las clases, pero sin el concepto, sólo algoritmos y fórmulas y también se me hizo fácil, yo decía que las matemáticas eran fáciles para mí. A mí me gustaba como daba la clase, ya que era muy práctico y decía: "vamos a hacer ejercicios", entonces mecanizábamos todo y no había problema"	Métodos de enseñanza
"(…) el segundo año yo lo volví a repetir, porque había una maestra que nos regañaba mucho, nos pegaba y me acuerdo que, para aprendernos de memoria las tablas de multiplicar, hacíamos cola y de tal tabla… del uno hasta la del cinco repetir y repetir y luego pasar y si no nos las sabíamos nos pegaba y yo me ponía muy nerviosa. Con mi abuelito yo podía hacerlo, pero, en la escuela, cuando hacíamos cola y cuando me tocaba, no me sabía las tablas; la maestra preguntaba por qué no me sabía las tablas y yo le decía que era "porque salía con mi mamá". Reconozco que no me gustaba estar repitiendo como perico las tablas y comencé a desinteresarme en las clases… sí, la maestra tenía una forma de ser que……"	Métodos de enseñanza

"Sí, o pon tú: el maestro nos explicaba los ejercicios y ya no utilizaban otras técnicas, no nos ponía a trabajar con otro compañero; no, el maestro estaba solo en el pizarrón, él lo resolvía todo, no había confianza para preguntar, no había esa relación entre maestro y alumno y, sobre todo, en Matemáticas, en otras materias sí, sí había más confianza, pero en Matemáticas no; como dicen: es una área fría, una materia muy… fría".	Métodos de enseñanza
"(…) y sí, él es de las personas que llegaban y rápidamente llenaban el pizarrón, explicaba, ponía unos ejercicios y hasta ahí, nadie preguntaba nada; para los exámenes era muy estricto y muy limitado, ya que si no se le daba el resultado numérico exacto el ejercicio estaba mal, no enseñaba el concepto, su enseñanza era únicamente algorítmica y en estas condiciones te vas volviendo muy… "mecánico" y luego te decepcionas de las Matemáticas, o sea… tu mismo te das cuenta que vas mal en Matemáticas, el que sabe es el maestro, que tu no sabes, que no entiendes, que el único que sabe es el maestro… Eso va atentando contra tu desarrollo de estudiante y con tu futuro, el futuro de tu vida profesional. Posiblemente nunca digan "las matemáticas son difíciles", pero, te lo hacen sentir en todo momento a través de sus actitudes como maestros".	Métodos de enseñanza
"Ahí fue diferente [en profesional], fue entonces cuando entendí por qué decían que las matemáticas eran difíciles, pues tuvimos una maestra que venía del Tecnológico de Monterrey, acababa de terminar su maestría y su nivel académico estaba muy por arriba del de nosotros y comencé a sentirme muy mal, pues no entendía las transformadas de Laplace y otras cosas más. Algunos maestros en la carrera eran muy jóvenes y sin experiencia para enseñar. Por ejemplo la maestra de Matemáticas que te cuento, era muy joven, y no tenía ninguna experiencia en enseñar. Claro, ella ponía todo su empeño y llenaba y llenaba el pizarrón, pero la mayoría no entendíamos nada (había unos compañeros que sí), y para mí eso era lo insoportable, ya que no tenía opción	Métodos de enseñanza

de preguntar a la maestra mis dudas, ya que no entendía nada, pero, por otro lado, yo veía que había compañeros que sí entendían, entonces yo me sentía más ignorante, frustrada, mi autoestima estaba por los suelos y, sobre todo, tremendamente sola, ¿a dónde recurrir?”	
“En secundaria, me sucedió algo parecido a lo de la maestra de primaria, teníamos un maestro muy bueno, excelente maestro como ser humano, y la primera vez que me sorprendí yo fue cuando estábamos viendo lo relacionado con áreas, ¿si? Entonces, una vez nos dijo: “mañana se traen una bola de hilo”, y luego nos llevó al estadio de futbol y allí nos dijo: “a ver, tú clava esto aquí y órale, traza como tú quieras diferentes formas, individual o en equipo, como gusten”, y ahí íbamos trazando, “ahora sí, quítenlo y midan esto, esto es el perímetro”; y esta era la forma para explicar diferentes cosas: perímetros, áreas y volúmenes, y así nos enseñó también a obtener el área de una superficie irregular, seccionando la figura en varias figuras (triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios etc.), como era a principios de las matemáticas; pero, pues cada quien tiene su técnica para enseñar”.	Métodos de enseñanza

La metodología

Deseamos aplicar el método y las herramientas que Cantoral implementa en su investigación doctoral, desde la concepción, aplicación, y el análisis de *la entrevista no estructurada en profundidad* que constituye la técnica empleada para la obtención de los datos en nuestra investigación acerca de la cultura matemática del estudiante del ITO, sistematizando la búsqueda de datos que no aparecen de manera explícita ante nuestros sentidos pero que existen y son parte importante de la naturaleza de los objetos de investigación.

Realizaremos, mediante la *entrevista no estructurada en profundidad* un análisis sistemático de los contextos socioculturales (la familia, el medio ambiente circundante y la escuela) que rodean a la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes del ITO, con el objeto de descubrir aspectos, situaciones, conductas, medios, que favorecieron o intervinieron en la construcción de conocimiento matemático.

La *entrevista no estructurada en profundidad* es una herramienta de investigación idónea, ya que por sus características, es capaz de extraer la información deseada. Hay que señalar que en ocasiones la información requerida ha sido olvidada o los entrevistados no son concientes de algunos "hechos" relacionados con la conformación de su cultura matemática, por ello es necesario ir a la búsqueda de esta información a través de las propiedades que la entrevista no estructurada en profundidad ofrece.

La entrevista iniciará y girará alrededor de una pregunta: «A lo largo de tu vida, ¿qué consideras que haya favorecido o desfavorecido tu gusto por las matemáticas, en la casa, en la escuela, en la calle? ¿Recuerdas hechos significativos?»

La selección de los estudiantes encuestados será al azar con 16 estudiantes del 1° al 8° semestre de las diferentes ingenierías.

Para el proceso general del análisis de los datos nos apoyaremos en las nociones que Rodríguez et als. (1999) proponen.

Conclusiones

Actualmente la presente investigación se encuentra en proceso, en una fase inicial en la que está definido el marco teórico y la metodología a seguir, el trabajo de campo será realizado en los próximos meses, por lo que no tenemos aún resultados concretos, sin embargo alcanzamos a visualizar el interés de la información obtenida a través de la comparación de las prácticas sociales de estudiantes actuales del ITO con las prácticas sociales realizadas hace treinta años por un grupo de estudiantes (hoy profesores), dicha información nos permitirá abrir espacios de reflexión para conocer y discutir la naturaleza de la noción de *práctica social.*

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). La Socioepistemología: una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. En F. Cordero (Ed.), *Serie Antologías Número 1*, (pp. 331-333). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camilleri, C. (1985). *Antropología cultural y educación*. Lausana, Suiza: UNESCO.

Chevallard, Y. (1997). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori-ICE.

Mingüer, L. (2006) *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigaicón en Cinecia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Nanda, S. (1987). *Antropología cultural*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pérez, A. (2000). *La cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid, España: Morata.

Rodríguez, G., Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Archidona, Málaga: Aljibe.

LA EXPERIENCIA COMO LA EVOLUCIÓN DE LAS PRÁCTICAS SOCIALES

María Esther Magali Méndez Guevara, Jaime L. Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero México
mguevara83@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio superior

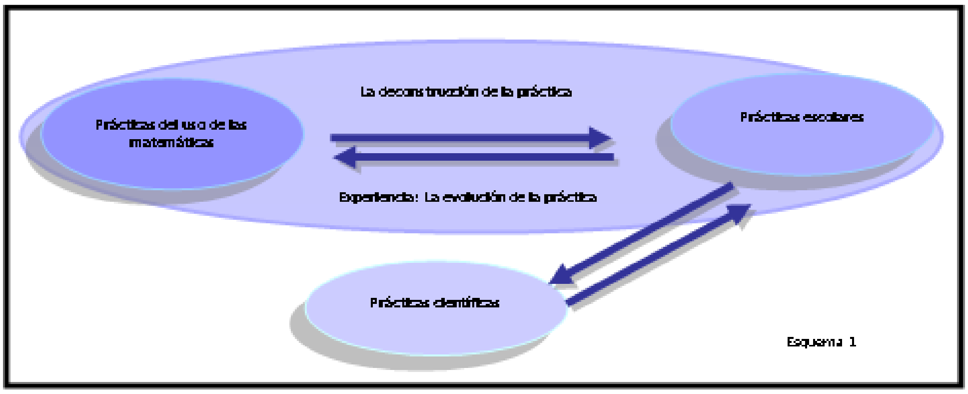
Resumen. *En este artículo reportamos cómo al ejercer una práctica recurrentemente, esta se modifica, modificándose también las herramientas, las intencionalidades y los argumentos que se generan a su alrededor, produciendo así la evolución de la práctica, como una experiencia adquirida durante el proceso de su ejercicio. En nuestro caso tratamos con la práctica de modelación lineal, analizamos su evolución en situación escolar con estudiantes de nivel medio superior, lo anterior se realizo mediante exploraciones de actividades de aprendizaje, basadas en la práctica de interés.*
Palabras claves: Práctica, Modelación, lineal, Experiencia

Antecedentes

La investigación es producto de una tesis de maestría realizada bajo la visión socioepistemológica, la antecede directamente Méndez (2006) y Arrieta (2003), además de las investigaciones realizadas bajo el estudio de la tensión entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares (por ejemplo: Galicia, 2004 y Rivera, 2005). Estas investigaciones han dado evidencias sobre las hipótesis acerca de la construcción social de conocimientos mediante el ejercicio de prácticas sociales. Nuestra tesis principal es que en el ejercicio de la modelación lineal los estudiantes construyen y articulan modelos lineales, mediante la predicción de fenómenos físicos de elasticidad (Méndez 2006, y Arrieta 2003).

Perspectiva teórica y planteamiento del problema

La investigación se centró en prácticas sociales, adheridas a la aproximación socioepistemológica, en donde uno de los elementos fundamentales son las prácticas sociales, noción cuya caracterización está en debate. La problemática se atiende es la surgida de la tensión entre el quehacer escolar y el quehacer extraescolar. La visión que sustenta esta problemática centra su atención en prácticas sociales, considerando tres esferas primordiales en donde es necesario para lograr un impacto una continuidad.

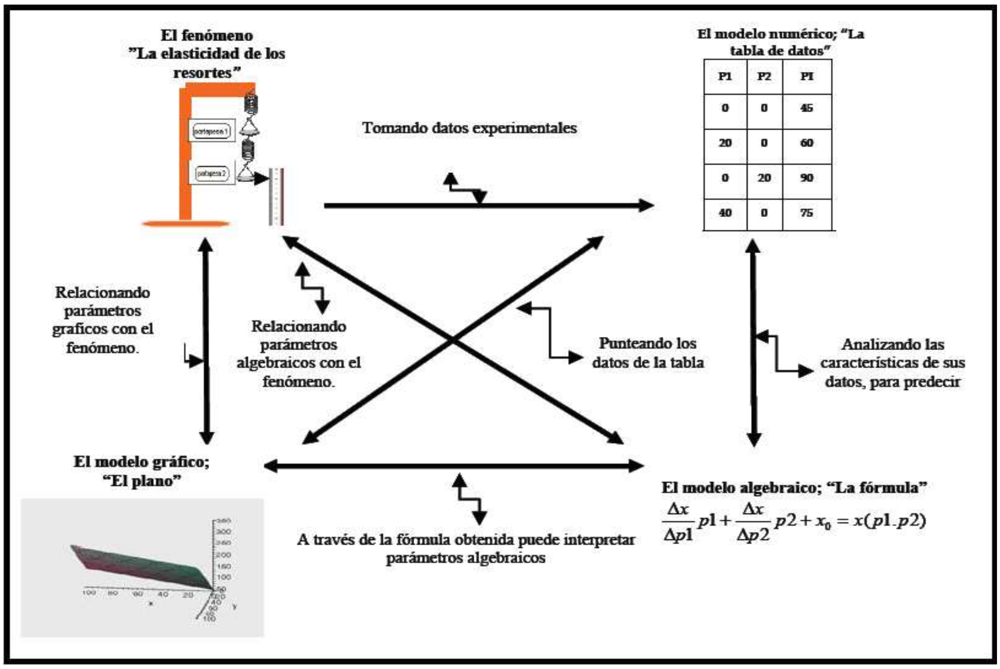


Esquema 1. La ubicación de la problemática atendida en la investigación

Desde esta visión miramos hacia un esquema centrado en prácticas, que considera como nodos principales las prácticas científicas, las prácticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas. Específicamente nos interesan las relaciones que surjan entre las dos esferas enmarcadas en el esquema 1. Con respecto a éstas creemos en la posibilidad de vincularlas mediante la experiencia, vista como la evolución de las prácticas, y la deconstrucción de las prácticas.

Ubicamos este trabajo en el análisis de la dirección prácticas escolares-prácticas del uso de las matemáticas, dando evidencias de cómo la experiencia que se crea mediante el ejercicio de una práctica social, como la modelación lineal, otorga herramientas matemáticas y argumentativas a los estudiantes para enfrentarse a situaciones análogas, y cómo la experiencia puede ser usada de forma más sistemática en las comunidades, que han ejercido esta práctica más recurrentemente, llegando así a la constitución de la práctica, es decir nos interesa analizar cómo se da la continuidad de prácticas.

Metafóricamente se podría relacionar a la evolución de las prácticas con la evolución de los organismos vivos, debido a que los seres vivos evolucionaron mediante la adaptación a las diferentes situaciones que vivieron, es decir, la adaptación al medio ambiente, al tiempo, y todo lo que esto implica. De este modo, en nuestro caso, la experiencia provee a los estudiantes la posibilidad de adaptar y evolucionar sus herramientas y por ende sus conocimientos, recordando que práctica-herramienta-comunidad es una triada indisoluble y que la evolución en una de éstas influye en las otras.

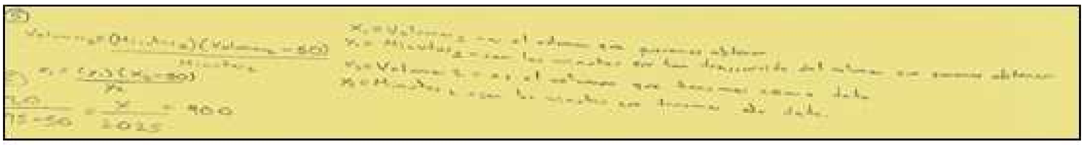


Descripción del escenario y diseño de aprendizajes

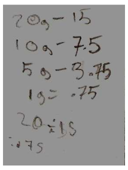
Los diseños de aprendizaje se realizaron siguiendo los pasos de la ingeniería didáctica, el objetivo general fue que los estudiantes construyeran en el ejercicio de la modelación lineal, lo lineal como una red de prácticas y herramientas (Méndez y Arrieta, 2005). La forma en la cual se buscó evidencias de la evolución de la práctica fue mediante la realización de puestas de estos diseños con varios grupos de estudiantes de nivel medio superior que cursaban el segundo y cuarto semestre. Para analizar la evolución de las prácticas se consideraron aspectos, como el tiempo transcurrido entre una situación y otra, el nivel de dificultad de las situaciones, y el tipo de contexto de las situaciones.

Se intentó que los participantes pasaran por situaciones de modelación de: compras-costos, elasticidad de resortes y llenado de un estanque, se llamaron situaciones análogas porque estas situaciones son modelables por modelos lineales, además, es posible que los estudiantes construya la red de lo lineal.

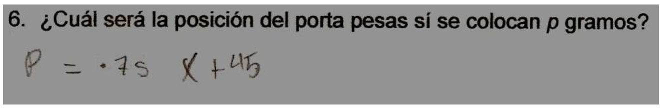
Evidencias sobre la evolución de la práctica de modelación lineal



Modelo algebraico creado mediante la generalización de la regla de tres



Método de bisección, como modelo numérico



Modelo algebraico

Con respecto a las métodos, herramientas y los argumentos

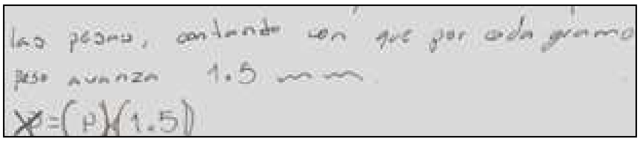
En general los métodos de predicción se mantienen, la bisección, la regla de tres y la razón de los incrementos, siempre a parecen al modelar linealmente. La investigación da evidencias de como la práctica de modelación lineal provee a los estudiante de herramientas matemáticas, que pueden ser usada en situaciones análogas, mediante la experiencia de modelar linealmente un fenómeno, es decir, mostrar cómo la modelación lineal evoluciona con su ejercicio, reflejado en el uso de las herramientas creadas en alguna situación anterior. Por ejemplo en una de las situaciones, *de la situación de compras a la situación de la elasticidad del resorte,* se observó:

En la primera situación los participantes usaron los métodos de predicción: bisección, regla de tres y la división de los incrementos de las dos variables en juego, hasta llegar al modelo algebraico para esta situación, los modelos consideraban sólo que se pagaría por las naranjas o por las naranjas y lo(s) costalillos. Finalizando la actividad con modelos similares a que muestra la figura.

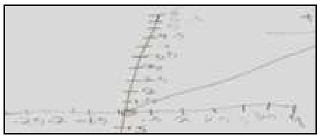
Modelos algebraicos

Para la segunda situación los estudiantes, recurrieron prácticamente de inmediato al modelo que crearon en la actividad pasada, cabe mencionar que recurrieron a esto porque notaron que al igual que los datos anteriores, los datos de la segunda situación eran proporcionales.

Una de las integrantes del equipo, explicó: *"… Si en la actividad pasada bastaba con saber cuánto costaba cada naranja, para saber cuánto pagamos por cualquier cantidad que quisiéramos…. Entonces ahora bastaría con saber cuánto estira el resorte por cada gramo que se coloque"* Con esta analogía el equipo construyó el modelo algebraico y grafico, notamos el primer cambio en la práctica, pues ahora bastaba con corroborar que se puede usar el modelo y ajustarlo al nuevo fenómeno.



Modelo algebraico, para la segunda situación



Modelo gráfico

Así para que los actores construyan los modelos es necesario que interpreten las características del fenómeno y las relacionen con algún fenómeno más cercano a él o antes estudiado, esto será determinante para poder comunicar y explicar cómo es posible la construcción de herramientas y la adecuación de estas a otras situaciones.

Con respecto a la comunicación de la experiencia

Durante la investigación, notamos que la experiencia cambia el actuar de los individuos, los argumentos, las herramientas usadas y construidas, así también la forma de ejercer la práctica, y nos preguntamos si es debido a la evolución de la práctica social que se pierde el interés de hacer participar a otros en todo el proceso de la construcción de las herramientas y por ende del conocimiento, mismo que le da sentido a la práctica y posibilita su evolución. Esto pasa en el discurso escolar cuando el profesor da una información o trabaja él sobre un contenido, olvidando el proceso que él tuvo que pasar construir su conocimiento.

El siguiente episodio, es ejemplo de como se da la comunicación de la experiencia, después de participar en tres diseños basados en la modelación lineal.

Estuvo presente el papel de la didáctica

Los diálogos de los jóvenes que participaron se representaran de la siguiente manera: Alumno invitado (AI) y Alumno Experto en la situación (AE).

Se pidió a dos alumnos que explicaran a dos compañeros, que no participaron en los diseños, como se abordad las situaciones que ellos realizaron.

Episodio. Ya después vimos que necesitamos una fórmula…

> *"AE: Primero debemos experimentar luego se va ha hacer la fórmula…. Se colocan pesas de 20 en 20 gramos… y se observan las posiciones… a través de esto obtienes los datos de la tabla, en esta intervienen el peso y la posición…"*

Con primera frase, se quiso hacer referencia a la necesitad de entender el experimento.

Después **AE** preguntó a su compañera que características puede tener la tabla de datos que se obtiene del experimento, se da cuenta que su compañera no entiende, por lo cual decide explicarle a detalle.

> *"Pues que son datos proporcionales… Fueron aumentando de 20 en 20 y bueno cuando la balanza no tenia nada ya media 45 mm. de ahí cuando se agregaron 20 grs. aumento a 60 que es una diferencia de 15, y te pones a pensar que por cada 20 va aumentando 15…"*

Luego trató de llevar a su compañera a pensar en como debería ser una fórmula, mediante predicciones, al no haber respuesta, comento una anécdota de su experiencia, en donde a pesar de saber que eran datos proporcionales y que debía obtenerse un modelo lineal no sabían como establecerlo.

> *"Ya después vimos que necesitamos una fórmula, pero ahorita no lo tenemos y una forma es ir haciendo calculitos al ahí se va, con datos… Cómo crees tú que tendríamos que hacer si nos piden saber cuánto mide al colocar 30 grs. y no lo tenemos aquí (señalando la tabla de datos)…."*

La AI contesta tímidamente “Saber lo de 10”, Inmediatamente AE comentó sin dejar participar a AI

“Tendríamos que sacar lo de 10, cuánto aumenta por 10grs. y para sumarle a 20grs. o restarle a lo de 40grs... Pero si en 20grs. aumenta 15mm en 10grs. son 7.5mm,… si me estas entendiendo...

AI *mueve la cabeza diciendo que sí*. Luego **AE** comentó como serían las diferentes formas de predecir, bisección, regla de tres y finalmente razón de incrementos.

“... sacamos el valor de cuanto aumenta por un gramo, si tengo que en 10grs. son 7.5... Entonces 0.75 equivalen a un gramo, lo que se estira, y eso lo multiplicamos por el numero que quieras, pues como una fórmula, si tomamos a una como p y otra como y quedaría (escribe la siguiente expresión $y = P\left(0.75mm/grs.\right) + 45mm$ *) p son los gramos, por qué 45, porqué si te fijas cuando no tenía nada ya media 45, si quieres chequeamos una que ya tenemos...”*

AE finalizó comentando “*Nosotros lo que queríamos era hallar la fórmula desde el principio, pero nos dimos cuenta que no podíamos, así que al contestar las preguntas fuimos encontrándola”* Después de este comentario se le preguntamos, por qué crees necesario explicarle todo lo que hicieron a tu compañera, y contesto de la siguiente forma.

“Para que posteriormente, pueda resolver problemas que no necesariamente tiene que ser iguales, que siga el procedimiento como una base, que se tiene que analizar los datos y cada una de las características, y eso”

Esto es lo que posiblemente pase con algunos de nuestros profesores en servicio o con nosotros mismos, en ocasiones olvidamos que no es suficiente dotar a nuestros estudiantes las herramientas para tomarlas como base y pueda afrontar otras situaciones, y más aun olvidamos la forma en como nosotros obtuvimos esas herramientas, es decir nuestra práctica a evolucionado de tal forma que perdemos de vista la necesidad de otros de ejercerla.

Perspectivas de investigación

A manera de conclusión podemos decir que la práctica social de modelación al ejercida en diferentes situaciones, modifica el actuar, los argumentos y las herramientas de los actores, de modo que se vislumbra niveles distintos de la práctica, es decir una evolución de ella. Sin embargo hace falta mayor estudio de la evolución de la práctica.

Así consideramos que la evolución de la práctica se da en la transición de los contexto, a demás para su estudio no basta con un diseño de aprendizaje, sino que se requiere de una red de diseños que permita al estudiante evolucionar su práctica.

Falta también analizar desde la perspectiva de la evolución de las prácticas, no como prácticas estáticas, la consecuencia de la evolución en la didáctica.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Galicia, A (2004). *La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Académica Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

Méndez, M (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de Licenciatura no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

Méndez, M y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 575-582). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rivera, M (2005). *La algoritmia una práctica en las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Académica Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

LA PRÁCTICA SOCIAL COMO NOCIÓN FUNDAMENTAL EN LA APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA A LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

José Iván López-Flores
Cimate UAGRO México
jilopez@usal.es
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta una reflexión sobre el estado de la práctica social, como noción fundamental en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. En los últimos años, este constructo teórico ha sido el foco de atención para estudios de corte teórico, que en su conjunto, vienen a delimitar una muy fructífera línea de investigación cuyo fin es la de caracterizar lo que significa "construcción de conocimiento" en términos socioepistemológicos, se mostrarán dos ejemplos de investigaciones en este mismo sentido.*
Palabras clave: construcción social del conocimiento

Introducción

El momento teórico que vive la Socioepistemología, es el de una aproximación teórica que está en proceso de caracterización de términos teóricos propios, tal es el caso de la noción de práctica social (López-Flores, 2005).

La reflexión que se presenta en este escrito parte de un pilar que se ha venido consolidando al paso de los años, la idea de que es mediante el ejercicio de las prácticas sociales que se construye conocimiento, como se afirma en Cantoral & Farfán (2003):

> *(se)…considera como necesidad básica, el dotar a la investigación de una aproximación sistémica situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transimisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos "la cuarta dimensión", le hemos llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico.*

La aproximación teórica denominada Socioepistemología tiene su origen al seno de un grupo de investigación en el Cinvestav IPN (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional), en la ciudad de México. Los trabajos antecedentes pueden localizarse en la década de los años ochentas, pero es en (Cantoral, 1990, 2001) donde el enfoque alcanza su mayor claridad, se torna más preciso. Posteriores investigaciones han profundizado el enfoque según se puede leer en (Arrieta, 2003), (Cantoral, Farfán, 2003), (Montiel, 2005), (López–Flores, 2005), (Covián, 2005), (Mingüer, 2006), (Cordero, 2001, 2006), (Farfán, 1997), (Martínez-Sierra, 2003) entre otros.

Dada la naturaleza de los trabajos iniciales, centrados en la noción de predicción en sistemas físicos determinísticos, las disciplinas específicas correspondientes fueron el Análisis Matemático Clásico, la Teoría de Ecuaciones Diferenciales y el Cálculo Infinitesimal, ello explica que éstas hayan sido más atendidas por los socioepistemólogos hasta hace algunos años.

El rumbo de las investigaciones

Desde los inicios de los estudios socioepistemológicos relativos al análisis y al precálculo, la idea de práctica social ha estado presente en las explicaciones sobre la construcción de conocimiento, sin embargo, esta noción ha sido usada de muchas maneras, pudiendo, en algunos casos, estar encontradas algunas de estas concepciones (López–Flores, Alatorre, Carrillo, 2006) y el caso es que al día de hoy la mayoría perviven; este estatus actual de la noción de práctica social puede explicarse como algo característico del desarrollo de la aproximación: está construyendo sus términos teóricos propios.

Si dejamos de lado los usos dados a la noción y miramos el conjunto de investigaciones que en Socioepistemología se han hecho, podremos encontrar que un cierto número de ellas ha elegido el camino, total o parcialmente, de contribuir a la consolidación de la práctica social como noción teórica fundamental de la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa, en su conjunto estas investigaciones conforman una línea de investigación que a últimos años ha sido fructífera.

Es en esta perspectiva que se enmarcan trabajos como por ejemplo, los de Alatorre, López–Flores, Carrillo (2006), Alatorre (2007), Covián, (2005), Arrieta (2003), García (2004), García Torres (2008), Montiel (2005), Sierra (2008), Tuyub (2008).

A continuación abundaremos en un par de ellos, para posteriormente presentar algunas reflexiones sobre ellos, de ningún modo pretendemos hacer una generalización sobre los demás.

Sobre la evolución de las prácticas sociales

La tesis "El carácter evolasutivo de las prácticas sociales. El caso de la predicción" (Alatorre, 2007) es una investigación de tipo histórico epistemológico que por una parte analiza cómo se concibe a la predicción desde la Socioepistemología y por otra hace un recorrido histórico conceptual alrededor de la génesis y el posterior desarrollo de los fractales.

Una comparación de estos dos análisis permite afirmar que todo el conocimiento, las herramientas y la teoría creados en torno a los fractales fueron guiados por la práctica social de la predicción, concebida como una práctica social en el siguiente sentido:

> *…aquella referida a que ante ciertas situaciones que se necesita conocer qué pasará con cierto sistema y ante nuestra incapacidad de mover el tiempo a voluntad nos vemos en la necesidad de predecir (Cantoral y Farfán, 2003).*

Son de resaltar que proviene de una necesidad, la de anticipar y el hecho de hacerlo con una cierta racionalidad. Otro punto identificado como central en la caracterización de la predicción es el hecho del uso de una metáfora muy particular:

> *Un amplio programa de matematización de los fenómenos que se podían modelar con una muy fructífera metáfora del agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales (Cantoral y Farfán, 2003).*

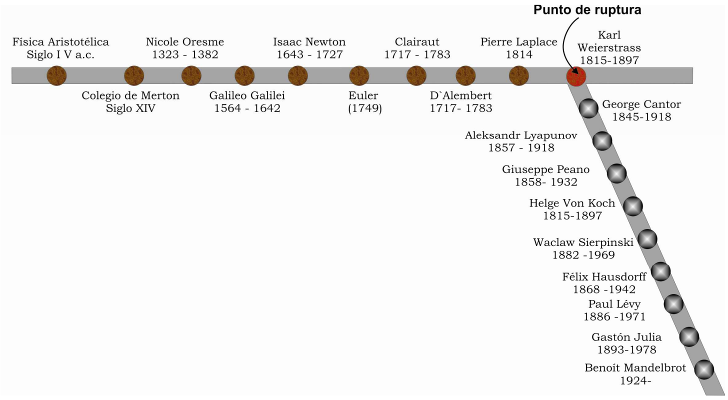
La pregunta pertinente en este momento es, ¿qué pasa cuando se elimina esa metáfora?

Antes de Weierstrass el uso de la metáfora del flujo de agua hizo posible que se construyera lo que escolarmente se conoce como Cálculo, Análisis, Ecuaciones Diferenciales; es a partir de la puesta en primer plano de una función continua en todos sus puntos pero sin cociente de diferencias bien definido en ninguno de ellos, que la idea de Fractal, casi 100 años después, pudo concretarse.

Nuestra revisión histórico epistemológica nos permite entender el desarrollo de la noción de predicción, la idea presentada por Weierstrass se consolida como un punto de ruptura, en el desarrollo de la ciencia.

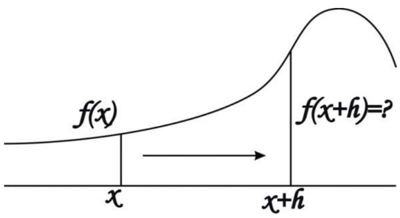
Sin esta metáfora y con este ejemplo, fue posible que gente como Cantor, Sierpinsky, Peano, Menger construyeran más de este tipo de entes que en un inicio eran llamados "monstruos" y se decía que estaban fuera de la Matemática, fue sólo hasta que Hausdorff y Lévi determinaron las características fundamentales de los fractales, la autosimilitud y la dimensión fraccionaria, que fue posible considerarlos dentro de la matemática. Posteriormente, personajes como Julia y Mandelbrot potenciaron el estudio, ahora teórico, sobre los fractales; la aparición de las computadoras finalmente diversificó tanto los ejemplos como las aplicaciones a los diversos campos de la ciencia.

El siguiente gráfico muestra esta ruptura:

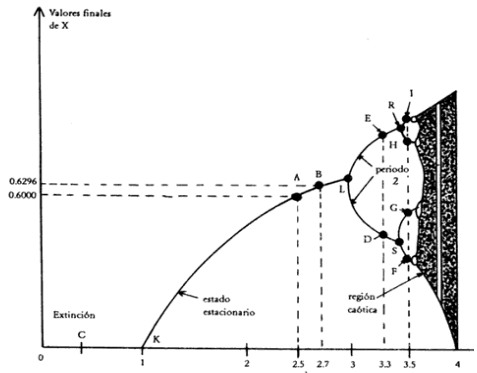


El punto de ruptura en el desarrollo histórico-conceptual de la predicción

Además de esto, se hace un análisis de lo que llamamos ejemplos característicos, se analizaron dos problemas, uno en el que en Alanís (2003), se presenta la aplicación de la serie de Taylor como herramienta predictiva (aplicada a un problema de decaimiento radioactivo) y otro, que implica la aparición de un fractal clásico, un estudio de Robert May hecho en 1976, (citado en Braun, 2003) sobre poblaciones de insectos, en el campo de la Biología (para detalles mirar, Alatorre, 2007).



Modelo visual de la predicción.
(Alanís, et al, 2003)



Modelo para la población de insectos
(Braun, 2003)

Los dos problemas planteados presentan preguntas que nos permiten afirmar que se trata de situaciones donde la predicción como argumento es fundamental; en cuanto a diferencias, encontramos que si bien en ambas está presente la predicción, el tipo de respuestas que a cada una se dan son muy distintas. Por un lado, para el caso del decaimiento radioactivo, tenemos que el uso de la serie de Taylor nos permite construir una predicción del tipo $F(x_0)=a$, no importando el x_0 del que se hable; en tanto que en la situación de los insectos, para valores específicos de un parámetro es posible dar una predicción del tipo anterior, mientras que para otros valores, no es posible siquiera conocer algún valor aproximado, si acaso es posible de manera general conocer el comportamiento de este sistema.

Se muestra así una evolución de la práctica social de la predicción caracterizándola en predicción determinista y predicción no determinista.

Un estudio sobre el uso de medidas premétricas

La tesis "Pesas y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc" (Sierra, 2008) es una investigación que parte de dos modelos teóricos para la práctica social (Covián, 2005; Montiel, 2005) previamente validados con datos empíricos para plantear una integración, asimismo se propone un robustecimiento a partir de la misma, haciendo uso de dos conceptos nuevos: la no-práctica y la institucionalización primaria.

Se propone el modelo de Montiel, como un *análisis longitudinal*, en el sentido de que con él es posible mirar a una comunidad en la cual está presente una práctica social, en un cierto momento en el tiempo con el fin de identificar las prácticas de referencia y actividades.

En el modelo de Covián la variable tiempo es central, es por eso que fue propuesto como un *análisis transversal:* se analiza la evolución de una práctica de referencia específica con respecto al tiempo, en el sentido de que se señala a la práctica social como algo que norma la actividad y la praxis, para ello realizó un análisis de los aspectos que permanecen al paso del tiempo, como parte esencial de la normatividad de la práctica social. Se estudia el proceso de institucionalización de las prácticas.

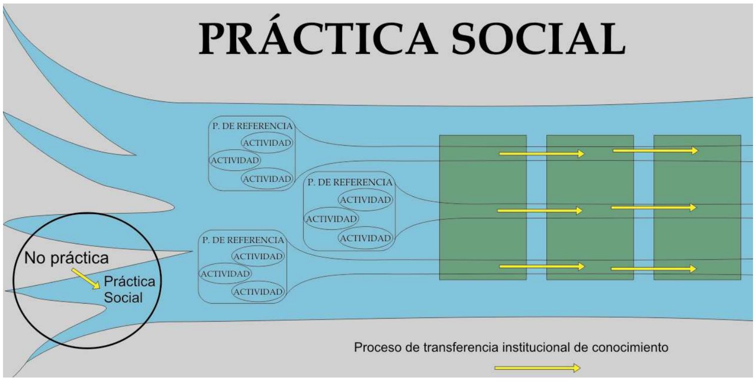
El análisis "de lo que permanece" fue generalizado en lo que nos dimos a llamar procesos de transferencia institucional de conocimiento".

Ambos modelos parten de un análisis que supone un conocimiento institucionalizado, una pregunta que surge entonces de manera natural y que desde luego, que no ha sido atendida, es la siguiente: *¿cómo se transita de un estado de no-institucionalización a uno de institucionalización de un conocimiento?,* y en consecuencia, las siguientes:

¿Cómo una comunidad (en el sentido amplio, sea científica o no) transita de un estado en el que la práctica social no está presente a uno en el que es la práctica social la que norma el quehacer humano?

La propuesta para fortalecer este nuevo modelo estará centrada en dar cierta luz al paso de un estado donde no está presente la práctica a uno donde si está presente, a este paso o salto es a lo que desde este momento llamaremos *institucionalización primaria*.

La misma suposición de los modelos anteriores les hizo mirar de manera primordial dónde la práctica estuvo presente y fundamentar el hecho de que es normativa.

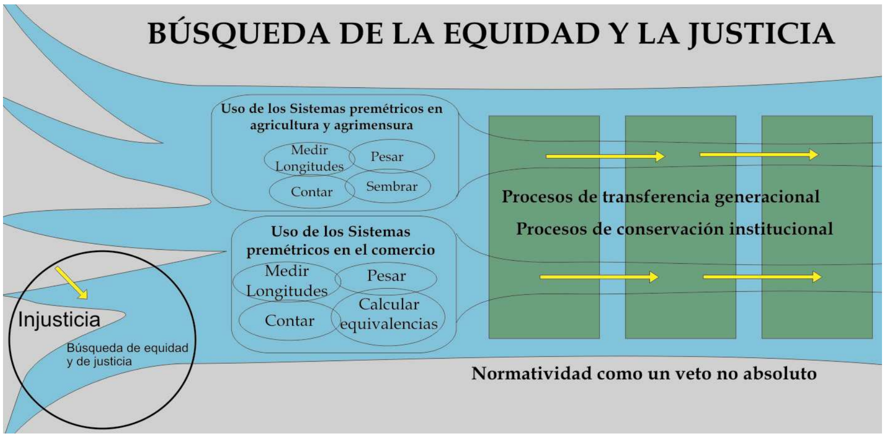


Modelo teórico para la práctica social (Sierra, 2008)

Esta normatividad expresada en los anteriores modelos plantean a un ser humano condicionado a actuar de un cierto modo ante situaciones específicas, antes de esa normatividad, existieron situaciones en las que los individuos no estaban normados por esta práctica social y por lo tanto, sucedía lo contrario o simplemente otra cosa distinta a lo que la práctica social dictaría, a estas situaciones las llamaremos como la presencia de la ***no-práctica***.

Sostenemos que es en el estudio de cómo reacciona la gente ante la posibilidad de que se presente la no-práctica que podemos conjeturar cómo es que se da la institucionalización primaria. El modelo teórico para la práctica social queda de la siguiente manera:

Para mirar la pertinencia del modelo se tomaron datos de una persona de una comunidad en el estado de Guerrero y nos interesó mirar el uso que él y su comunidad hace de las medidas premétricas, el modelo con los datos recopilados quedó de la siguiente manera:



El funcionamiento del modelo teórico en la caracterización de una práctica social específica

Este modelo es un intento por caracterizar cómo el quehacer humano puede ser explicado en términos de prácticas sociales, para más detalles ver (Sierra, 2008).

Reflexiones finales

Éstos son dos ejemplos del intento por encontrar una caracterización de lo que significa, de la manera en cómo podrían integrarse los demás constructos teóricos con la noción de práctica social. Una de las labores a futuro de esta línea de investigación es dar evidencia del papel que juegan estas explicaciones teóricas en contextos escolares.

Por otra parte, consideramos la unificación de las caracterizaciones de la práctica social como un proceso que es difícil de alcanzar, sin embargo que se vive en estos momentos, que tendrá que pasar por el consenso de la comunidad a un mediano plazo. La delimitación de cuando menos un campo de acción para esta caracterización permitirá abordar problemas aún pendientes, como por ejemplo el de la medición en términos socioepistemológicos de lo que significa construir conocimiento.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. M., Garza, A. y Rodríguez, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Alatorre, H. (2007). *El carácter evolutivo de las prácticas sociales*. Tesis de Maestría, no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*, Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Braun, E. (2003). *Caos, Fractales y cosas raras.* México: Fondo de Cultura Económica.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6 (1)*, 27-40.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(4),* 103-128.

Cordero, F (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). D.F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Editorial Iberoamérica.

García, C. (2004). ¿Son las prácticas sociales fundamento para la democratización de la matemática? En J. Lezama, G. Molina y M. Sánchez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 511-516). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

López – Flores, J (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

López-Flores, I., Carrillo, C., Alatorre, H (2006). La evolución de una práctica social: el caso de la predicción. En Buendía (Ed.) *Actas de la Décima Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 12- 21). México: Red de CIMATES.

Martínez–Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Mingüer L.M (2006). *Entorno Sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso: el Instituto Tecnológico de Oaxaca: Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Sierra, E. (2008). *Pesas y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

EL ANTECEDENTE ESCOLAR DE LAS GRÁFICAS DE USO SOCIOECONÓMICO

Crisólogo Dolores Flores, Edilberto Meza Fitz
Universidad Autónoma de Guerrero México
mezafitz@hotmail.com
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Básico y Medio

Resumen. *El presente trabajo forma parte de una más amplio que tiene como objetivo establecer la forma en que las gráficas son acomodadas a las circunstancias y son movilizadas en las interacciones sociales que se establecen como consecuencia de la realización de la actividad socioeconómica, pudiendo fungir como herramientas o como argumentos para intervenir en un escenario cuyos intercambios económicos se generan principalmente por el comercio y la prestación de servicios. El estudio se realizó bajo la perspectiva teórica denominada socioepistemología haciendo énfasis en sus componentes epistemológica y didáctica. Como resultado establecemos el referente escolar para caracterizar las gráficas utilizadas en este contexto, considerando que los profesionales que intervienen en tales actividades tienen en común su formación básica y la del nivel medio superior.*
Palabras clave: gráficas, socioepistemología, comportamiento, discreto, representación

Las gráficas que se usan en la actividad socioeconómica

Una exploración acerca de las gráficas que utilizan 18 empresas o Instituciones Públicas de Chilpancingo Guerrero México, arrojó los siguientes datos: Las gráficas pueden originarse en el mismo centro de trabajo o en una oficina central que las envía a sus sucursales o dependencias. Independientemente de su origen los dos tipos de gráficas más usadas son las de barras y la de pastel, la razón para tal preferencia es la facilidad con que se pueden interpretar los datos y/o procesos que se representan, sin importar la formación escolar de los destinatarios. También se utilizan gráficas de dispersión y radiales, sin embargo los usuarios manifestaron que había dificultades por parte de quienes debían interpretarlas, por ello es que su uso no es generalizado. Además de las anteriores resultaron tres tipos de recursos gráficos de uso poco común: la gráfica de Pareto; los planos que son específicos en el trabajo topográfico; y un arreglo llamado "colorama" que consiste en pequeños cuadros en una retícula, cada cuadro puede tener uno de cuatro colores: verde, amarillo, naranja o rojo, con valores numéricos de 4, 3, 2 y 1 respectivamente. Este último caso refuerza la idea de que la facilidad de interpretación es la norma para utilizar un determinado tipo de gráfico, pues está dirigido a profesores universitarios.

La orientación teórica que guió el trabajo es la socioepistemología y de las cuatro componentes que utiliza parar analizar los objetos de investigación nos enfocamos en la epistemológica y la didáctica, pues las evidencias mostraron la necesidad de indagar en la evolución que tuvieron las gráficas a través del desarrollo de las sociedades, lo cual nos sirvió para establecer el antecedente que ese tipo de gráficas tiene en la escuela, considerando que gráficas pueden ser de dos tipos: las de uso intramatemático y las de aplicación en la solución de las necesidades sociales.

Concordamos con Castelnuovo (1995) en ubicar en épocas prehistóricas el origen de las representaciones gráficas de las matemáticas y en considerar que la imagen visual tiene sobre nuestras acciones y sobre las decisiones de la sociedad, una influencia superior a la del texto escrito, en consecuencia analizamos las gráficas considerándolas como una *representación visual que refleja la variación de un fenómeno concreto o abstracto.* En ese sentido el origen de las gráficas se ubica en la evolución de las representaciones pictóricas los hombres primitivos plasmaron en las cavernas en las que se manifiesta un sentido matemático que se observa en las proporciones que guardaban hombres, animales u objetos; tal forma de representar los hechos de interés para los artistas pudo evolucionar cuando se utilizaron herramientas geométricas como la sección áurea y la perspectiva que permitieron dar profundidad y volumen a sus representaciones.

La graficación intramatemática

Se ubica a la graficación intramatemática en la geometría que se estudiaba 300 años a. C. cuando un astrónomo e importante geómetra griego de la Academia de Platón llamado Menaecmo descubrió las cónicas (la elipse, la parábola, y la hipérbola), como parte de la solución para el problema de la duplicación del cubo. A Euclides se le atribuye un trabajo sobre secciones cónicas, incorporado más tarde a *Las Cónicas* de Apolonio, al cual González (2007) reconoce como el autor original del estudio. El mismo autor consigna que Arquitas de Tarento ya había estudiado el problema de la *Duplicación del Cubo* y también atribuye a Arquímedes importantes resultados acerca del área del segmento parabólico.

Posterior a los griegos, hubo un periodo bastante largo en el que no hubo aportaciones importantes a lo que conocemos como Geometría Analítica. El gran salto lo atribuyen varios autores a Nicolás de Oresme (1323-1382); O'Connor y Robertson (2003), Deum (2007) y Castelnuovo (op. cit. 1995), reconocen que la Geometría Analítica se aborda en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* escrita en 1361, en la cual aprecian la idea de la representación gráfica por medio de coordenadas rectangulares de las funciones, que Oresme en latín denomina *Formae*. No obstante a quien se reconoce a como creador de la Geometría Analítica y por lo tanto del Sistema de Coordenadas es a René Descartes, que en el año de 1637 publicó su *Geometrie* dividida en tres libros, de los cuales dedica el segundo a lo que se ha llamado *Geometría Analítica*. De acuerdo con Collete (2007), Descartes decidió interpretar el producto de dos líneas, no como un área, sino como una sola línea, lo cual le permitió interpretar cualquier potencia arbitraria de x como una longitud.

Sin embargo González (op. cit. 2007), hace notar que P. de Fermat (1601-1665) se dedicó a la reconstrucción de muchas de las obras perdidas de Apolonio y precisamente en esta labor estuvo el origen de su Geometría Analítica. El enfoque que le dio Fermat a la geometría analítica era más completo y sistemático que el de Descartes, pues 8 años antes de la publicación del Discurso del Método obtuvo las ecuaciones generales de la recta, el círculo con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola rectangular, referida a las asíntotas como ejes.

Siguiendo la pista de la graficación intramatemática Miranda (2001) plantea que fue Isaac Newton quién en 1704 evolucionó la geometría analítica al publicar la obra, “Enumeración de las curvas de tercer orden”, en la que estableció las nuevas posibilidades del método de las coordenadas, definiendo los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes. Por su parte Méndez (2003) considera que todos los libros de texto de cálculo elemental y superior desde 1748, son esencialmente copias de los tratados de Euler.

La graficación aplicada a la solución de las necesidades sociales

Los primeros vestigios de la representación gráfica se encuentran en los diagramas geométricos, en las representaciones de las posiciones de las estrellas y otros cuerpos celestes, y en la elaboración de mapas de ayuda en la navegación y la exploración. La idea de las coordenadas fue utilizada por los antiguos topógrafos egipcios cuando representaban las ciudades, y medían y localizaban terrenos de cultivo o representaban las posiciones de los cuerpos celestes con algo similar a la latitud y longitud, por lo menos 200 a. C.; en esos hallazgos se incluye la proyección de la latitud y la longitud en un esférico de la tierra por Claudio Ptolomeo (85–165) en Alejandría, lo cual serviría como sistema de referencia hasta el siglo XIV.

Castelnuovo (op. cit. 1995) reproduce un anónimo del siglo X se considera una de las primeras representaciones gráficas de la información cuantitativa, con series temporales múltiples en un gráfico de la evolución de la posición de los siete cuerpos celestes más destacados en el espacio y el tiempo. Friendly y Daniel (2007) analizaron una serie de eventos que muestran el progreso de la representación gráfica, entre otros el desarrollo de la triangulación y otros métodos para determinar con precisión los lugares en la cartografía, el registro de las funciones matemáticas en tablas de valores (tablas trigonométricas por Georg Rheticus, 1550), y el primer atlas cartográfico moderno (Teatrum Orbis Terrarum de Abraham Ortelius, 1570). Lo cual constituye los comienzos de la visualización de datos.

En el siglo XVII la representación gráfica tuvo relación con la búsqueda de soluciones a los problemas más importantes que enfrentaron los científicos de la época; entre otros la medición física del tiempo, de la distancia y el espacio para la astronomía, la agrimensura, la elaboración de mapas, la navegación y la expansión territorial, cuya representación pudo contar con el surgimiento de la geometría analítica y los sistemas de coordenadas, las teorías de los errores de medición y de estimación, el nacimiento de la teoría de la probabilidad, el comienzo de las estadísticas demográficas y de la "aritmética política", el estudio de la población, la tierra, los impuestos, el valor de las mercancías, etc. con el fin de comprender la riqueza del estado. Friendly y Daniel (op. cit. 2007), consideran que la primera representación visual de los datos estadísticos se encuentra gráfica elaborada en 1644 por Michael Florent Van Langren (1600-1675), la cual se puede tomar como el primer ejemplo conocido en el que se empleó el principio "del orden de los datos representados" y a William Playfair como el inventor de la mayor parte de las formas gráficas utilizadas ampliamente en la actualidad, el primer gráfico lineal y gráfico de barras y la empanada o gráfico circular, incluso una combinación creativa de las diferentes formas visuales: círculos, líneas y pastel.

La graficación como contenido en la educación básica y en el nivel medio superior

En Roth (2003) se plantea que la graficación consiste en un arreglo de prácticas significativas que incluyen hablar, escribir, gesticular, y dibujar. Esas prácticas se despliegan simultáneamente y cualquiera es tan importante en forma individual o asociada con las otras; el hecho es que cada una de ellas sólo puede ser entendida dentro de la red de prácticas, esto es, en sus relaciones con las otras prácticas cuando intervienen en el proceso de la graficación. Este planteamiento fue el referente para el análisis de los programas de estudio y otros documentos que norman la educación básica y los subsistemas de bachillerato del Estado de Guerrero, para establecer el referente escolar de las gráficas de uso socioeconómico, el cual encontramos tanto en el nivel básico como en el Nivel Medio Superior (NMS), la gráfica de barras se aborda de manera constante en los seis años de la educación primaria y hasta la mitad del primer año de la secundaria cuando se inicia con la representación de expresiones algebraicas, su tratamiento se retoma en los cursos de Estadística del NMS como parte de una serie de procedimientos para procesar y representar grandes conjuntos de datos. Las gráficas circulares o de pastel son abordadas de manera marginal en el nivel básico y adquiere mayor importancia en el NMS. Las gráficas de dispersión se estudian en el sexto año de la primaria y el primero de la secundaria siendo utilizadas para representar fenómenos de proporcionalidad. Su uso en el NMS está relacionado con los polígonos de frecuencias.

Encontramos en el sistema de educación básica un eje articulador llamado “Tratamiento de la Información”, que incluye en la asignatura de matemáticas los contenidos que el NMS contempla en la materia de Estadística. Esos contenidos son el referente escolar de las gráficas que se utilizan en la actividad socioeconómica, sobre todo las que se estudian en la educación básica, pues el tipo de situaciones de las cuales surgen generan conjuntos numéricos similares a los que se originan en los procesos que se llevan a cabo en las empresas e instituciones públicas de Chilpancingo Guerrero. Sin embargo existe una ruptura en los currícula en el segundo y tercer año de la secundaria y en los cursos del NMS, consistente en que dejan de abordarse fenómenos cotidianos para darle paso a al estudio de objetos intramatemáticos. Los fenómenos que se estudian en el NMS generan conjuntos de una cantidad relativamente grande de datos para los que es necesario el procesamiento propio de la disciplina. En las actividades cotidianas por el contrario las empresas e instituciones manejan conjuntos de datos en los que la variable tiempo toma sus valores de los días de la semana, los meses del año o un número de escuelas no mayor a cuarenta; para cada uno de ellos determinan un valor correspondiente y entonces el par se representa directamente, sin realizar ningún otro procedimiento. Se puede decir entonces que los fenómenos que se encuentran en la actividad socioeconómica no se modelan de la misma forma como se hace con los ejemplos de la escuela, luego entonces los estudiantes no tienen el entrenamiento requerido para representarlos y para interpretar dicha representación.

En el caso de los programas de matemáticas en el NMS esas situaciones no se estudian, por lo que aquel punto de contacto entre la escuela y la actividad social evidenciado en las gráficas de Playfair en la proporción guardada entre el valor del área de la figura utilizada (rectángulo o sección circular) y el dato que representaba, se pierde al llegar a este nivel. Otro punto de ruptura detectado está relacionado con el momento en que se dejan de estudiar los objetos matemáticos que requieren un análisis puntual como la solución de ecuaciones y se transforma esos mismos objetos en funciones que requieren de analizar todo su recorrido en el dominio para entender su comportamiento; los programas en ningún momento proponen la forma de realizar esa transición.

En relación con lo anterior las funciones de conjuntos finitos de puntos no han logrado la ciudadanía en las matemáticas escolares y por ello los fenómenos que les dan origen no son tratados en la escuela. Eso establece una contradicción con las teorías de la educación actuales, que plantean que la actividad en el aula debe procurar el desarrollo de la habilidad de aprender a aprender, porque el proceso de aprendizaje es uno que cada persona se verá obligado a desarrollar durante toda su vida y los tipos de uso de las gráficas que estamos reportando se han mantenido ligados a la actividad social por varios siglos.

Prospectiva

La evidencia obtenida nos hace pensar que la graficación de funciones de comportamiento discreto a partir de conjunto finitos de pares de valores que represente fenómenos conocidos por los estudiantes debiera considerarse en el estudio de las funciones en los Niveles Medio Básico y Medio Superior. Los fenómenos que se encuentran en la vida cotidiana no se pueden modelar como se hace con los ejemplos de la escuela, pues las gráficas utilizadas en esa parte de los procesos productivos del país son fundamentalmente de pastel, de barras y de dispersión; esas gráficas pueden usarse en la escuela como se hace en las actividades cotidianas para representar funciones de comportamiento discreto. Con ello se tiene una alternativa para intentar la construcción del concepto de función sobre la bases de conjunto finitos de pares de valores que representen un fenómeno cotidiano que después permitirá el proceso de generalización que nos lleve al manejo de las representaciones analíticas comúnmente utilizadas.

Referencias Bibliográficas

Castelnuovo, E. (1995). *Las representaciones gráficas en matemáticas: un estudio histórico-crítico.* Extraído el 26 de octubre de 2007 desde http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/JAEM/Archivos/jaem7-1.p df

Collette, J. (2007). *Historia de las matemáticas Vol. II.* México, D.F.: Siglo XXI.

Deum, P. (2007) *Nicole Oresme.* Extraído el 26 de octubre de 2007 de http://www.newadvent.org/cathen/11296a.htm.

Friendly, M. y Daniel J, (2007). *Milestones in the History of Thematic Cartography, Statistical Graphics, and Data Visualization.* Obtenido el 13 de octubre del 2007 desde http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/

González, P. (2007). *Historia de las matemáticas.* Extraído el 8 de septiembre de 2007 desde http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Mate Ospetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Méndez, J. (2003). *Las matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones.* Extraído el 10 de noviembre de 2007 desde http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/Mendez2003-04.doc

Miranda, J. (2001). *Breve Historia de la Geometría Analítica.* Extraído el 10 de noviembre de 2007 desde http://groups.msn.com/cgj4ulm362gqkj1h4g4 qtuud87/files.msnw

O'Connor, J. y Robertson, E. (2003) *Nicole d' Oresme.* Extraído el 26 de octubre de 2007 desde http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Oresme.html

Roth, W. (2003). *Toward an Anthrophology of graphing. Semiotic and Activity-Theoretic Perspectivas*. Netherlands: Kluwe Academic Publishers.

ASPECTOS QUE FUNDAMENTAN EL ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Apolo Castañeda Alonso
CICATA-IPN México
apcastane@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *Se presenta un análisis sobre los propósitos de la investigación del discurso matemático escolar, los tipos de discursos que se desarrollan en el aula, así como las contribuciones que ofrecen los estudios en este campo, particularmente, en la reconstrucción del discurso matemático escolar.*
Palabras clave: discurso, aula

Antecedentes

Conocer con mayor detalle el funcionamiento del aula ha motivado el desarrollo de investigaciones (Brousseau, 1983; Marcolini y Perales, 2005) que se proponen identificar y caracterizar regularidades que se presentan en el desarrollo de una clase, el objetivo es acrecentar el conocimiento de la dinámica del aula; por un lado, prever las reacciones, circunstancias o problemáticas que acontecen regularmente y por otro, modelar con mayor detalle su funcionamiento. La posibilidad de anticipar y prever las reacciones así como conocer su origen permite al profesor planificar y coordinar de mejor manera el desarrollo de su clase. El modelo del sistema didáctico introducido por Brousseau, describe las relaciones que establece el profesor, estudiante y conocimiento, permitiendo así guiar las investigaciones del aula; al reconocer la naturaleza, condiciones y características de cada uno de los elementos que conforman el sistema y por otra parte, identificando el sistema como unidad básica de relaciones al interior del aula.

Los estudios en este ámbito plantean desentrañar las relaciones que se dan entre las componentes del sistema didáctico a través de un análisis integral y no como lo sugiere el sentido común; estudiar independientemente cada una de las partes y después intentar unir resultados. Nuestro postura es que cada elemento del sistema se modifica a medida que evoluciona la clase a consecuencia de la propia dinámica del aula, así por ejemplo, las reacciones de un estudiante están originadas, por la matemática que aprende, por el profesor que le enseña, por los libros que usa, por la idea de actividad matemática que el sistema escolar le transmite, es decir; asumimos que la condición situada del estudiante en el aula determina muchas de sus manifestaciones. Nuestro enfoque, al que denominamos sistémico, no propone estudiar los factores y elementos involucrados en el desarrollo de una clase de manera simultánea; es una relación muy compleja de manejar en términos metodológicos. En cambio, se ha optado por desarrollar estudios *transversales* cuyas temáticas se desarrollan reconociendo la dinámica del sistema didáctico, su propia naturaleza y su funcionamiento en conjunto. Citemos el caso del estudio del discurso matemático escolar (Castañeda, 2006; Marcolini y Perales, 2005; Cantoral, 2000) las investigaciones realizadas en relación a este concepto abordan aspectos del discurso escrito, que aparece en los libros de texto y el discurso oral; tanto del profesor como del estudiante.

Estudio del aula

El aula construye una cotidianidad que empieza a configurarse desde el primer día de clases, a medida que el ciclo escolar avanza las relaciones que se establecen en el sistema didáctico empiezan a guardar ciertas condiciones de estabilidad. A través de instrumentos de observación y registro de información así como un análisis minucioso de las evidencias empíricas se puede describir el funcionamiento del aula. Sin embargo, definir o hallar regularidades es una tarea más compleja, ya que debe de establecerse un parámetro para definir la condición de regularidad. Este es un problema de validación metodológica, ya que el parámetro puede resultar ligero o demasiado exigente. Aunque hay que reconocer que un rasgo distintivo de la "regularidad" es su aparición reiterada en la clase; con un cierto patrón, en situaciones o contextos similares, basada en argumentos o planteamientos equivalentes. El trabajo de Brousseau es muy representativo en cuanto al estudio del funcionamiento de aula se refiere; las prolongadas observaciones que realizó al desarrollo de una clase de matemáticas le permitió concluir la existencia de un tipo de contrato en el que el profesor y el alumno negocian y hacen acuerdos implícitos en relación al conocimiento. En esta negociación y también de forma implícita, el profesor define su postura en relación a la *actividad matemática* que se adoptará clase; es decir, el tipo y la naturaleza de problemas, situaciones, actividades que se implementarán durante todo el curso los cuales representan el objetivo de enseñanza. Esta definición no proviene de una decisión arbitraria del profesor (Sfard, 2000); depende de varios factores, como la perspectiva que tiene el docente acerca de lo que significa aprender matemáticas, la orientación que tienen los programas de estudio, el tipo de libros que se utilizan para la clase, los acuerdos que realizan las academias escolares, entre otros.

Este marco regula las actividades de la clase y ejerce influencia en la evaluación, particularmente en el tipo de planteamientos que deben incluirse en los exámenes ya que deben corresponder con el tipo de situaciones realizadas en el curso. La noción de '*lo que es prioritario*' determina en parte su estructura. Los estudiantes también formulan un punto de vista acerca de las actividades que se realizan en clase, en particular, aquellas que el profesor determina como prioritarias y que forman parte del objetivo educativo de la clase; ya sea un procedimiento, algoritmo, una definición o concepto. *Aquello* que resulta *prioritario* para el profesor está estrechamente relacionado con el punto de vista que se forma el estudiante sobre su clase; sobre lo que 'debe hacer' para acreditar el curso, es decir, en términos muy pragmáticos: cómo sobrevivir en la clase. El trabajo de Eisenberg y Dreyfus (1991) evidenció que algunos estudiantes mostraban rechazo a ciertas actividades donde se involucraban la visualización como argumento, una de las justificaciones que hallaron fue la opinión de los propios estudiantes de que "lo visual carece de fundamento matemático", es decir, lo visual no es *hacer* matemáticas. La idea parece ser heredada por la escuela; por la visión que se tiene acerca de la matemática y de lo que significa aprender matemáticas, plasmada en los programas de estudio, en los libros y en el discurso del profesor.

El discurso escolar

La definición de 'lo prioritario' fundamenta el tipo de actividades y tareas que se realizan en la clase, pero además configura el *discurso* del profesor a partir del cuerpo de conocimientos dispuestos para la enseñanza, en particularmente las explicaciones y los argumentos, que forman parte de este discurso, contribuyen a esclarecer y fortalecer los conceptos que se estudian a través de ejemplos, ejercicios resueltos, metáforas u otros recursos que el docente tiene a su alcance. Usualmente el docente asume que su tarea es la de 'ayudar' a sus alumnos para que adquieran los conocimientos de la mejor forma. Esta postura epistemológica del profesor asume que las explicaciones deben ser lo más claras posibles y los ejemplos perfectamente expuestos para lograr que los estudiantes adquieran plenamente un saber. En ocasiones esta perspectiva *simple* confronta el enfoque adoptado en los programas de estudio, sin embargo, el paradigma sobre la *actividad docente* que pondera el papel explicativo del profesor como base para desarrollar un proyecto educativo está ampliamente difundido en nuestro medio.

El saber dispuesto para su enseñanza aparece en los programas de estudio y representa la base a partir del cual el docente realiza ajustes, organiza y prepara el saber para su enseñanza. Estos cambios, si bien menores en comparación con los ocurridos en la transposición didáctica de los saberes sabios, son ajustes de trascendencia que realiza el docente (Chevallard, 1991) considerando aspectos; como el tiempo disponible para abordar los temas, los libros que usa como referencia, su perspectiva o punto de vista sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje. El libro de texto forma parte de las referencias empleadas en la preparación de la clase, pero depende de las características del diseño o planificación de clase la forma en cómo interviene. Es usual que el libro se emplee como complemento a la clase para que los estudiantes realicen actividades adicionales; necesariamente el enfoque de la clase debe de ser compatible con el tratamiento del libro; en particular la naturaleza de las actividades y ejercicios. Una obra asume, por lo general, un paradigma sobre lo que significa estudiar y aprender matemáticas y sobre lo que son las *matemáticas,* esto se refleja en la forma en cómo se aborda el contenido, en el tipo de actividades propuestas incluso aspectos que pueden ser menos trascendentes como el lenguaje que utiliza.

Nuestra perspectiva de investigación considera necesario el estudio del origen del saber así como su eventual introducción a los sistemas de enseñanza, el propósito es caracterizar con amplitud la naturaleza de la matemática que se estudia. La *problematización del saber* implica debatir sobre la actual forma de la matemática escolar, posteriormente continuar el debate sobre su estructura epistemológica. Como resultado de este análisis se pretende incidir positivamente en la matemática escolar proponiendo modificaciones y ajustes pues *asumimos a la matemática como algo vivo y cambiante, con posibilidades de reorganizarse y resignificarse* (Cantoral, 2000). Para Cordero (2006), la problemática fundamental de la matemática educativa se refiere la confrontación entre al obra matemática de origen y la matemática escolar, ambas son de diferente naturaleza y tienen funciones distintas, pero es importante discutir sobre la matemática de origen para reinterpretar y reorganizar a la matemática escolar.

La resignificación no significa literalmente aportar 'otros' significados a un concepto matemático, tiene que ver con la reconfinguración epistémica del conocimiento a partir de aspectos de la actividad humana que le dan sentido y utilidad. Buendía (2004), explica que la resignificación se forma de significados y procedimientos desarrollados en una situación específica (diseñada para tal efecto), por ejemplo, la práctica de predicción, asociada tradicionalmente a un dominio físico, está asociada con la resignificación del aspecto periódico de las funciones (Buendía, 2004). Los libros de texto, como portadores del saber, son la primera fuente a partir de la cual se lleva a cabo el análisis de la matemática escolar. Este análisis aborda diferentes aspectos de la obra. El plano epistemológico que se refiere al análisis de la matemática; su estructura, la organización conceptual, los significados y naturaleza de los objetos matemáticos. El plano didáctico, referido al tratamiento de la matemática para su transmisión a lo estudiantes; secuenciación, tipos de actividades, función didáctica de los ejemplos y aplicaciones. También la referida al análisis del discurso, que se refiere al estudio de la organización y representación del saber en los libros de texto (Zaldúa, 2007). En una primera fase de análisis se estudia la estructura del texto específicamente en las relaciones semánticas y funcionales entre las frases, es decir, la organización y distribución del saber en el texto (Dijk, l992). En la segunda fase se analizan las funciones del texto así como la forma en que se "representa" o reconstruye el saber en la obra de texto.

Un análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto se propone identificar los manejos conceptuales, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso oficial para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase e incluso se desarrollan programas de estudio. Díaz, L. y Morales, L., (2005) advierten que la forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden.

Discurso del aula

En Cubero, R., Cubero, M., Santamaría,A., De la Mata Benítez, M. L., Ignacio-Carmona, M. y Prados, M. (2008), se explica que existe una relación entre el tipo del discurso del profesor y el que adoptan los estudiantes durante los periodos de la clase de socialización del conocimiento. Esta relación se fortalece, en parte, por las reglas que se establecen en el *contrato didáctico*, aunque también existe una aspiración por parte de los alumnos de lograr reproducir las explicaciones y argumentaciones del docente con toda fidelidad, para responder en los exámenes, pero también para crear un sentido de pertenencia o identidad al incorporar a su *vocabulario* frases o palabras que los identifica dentro de una misma experiencia de aprendizaje. Sfard, A. (2000b) atribuye el uso y dominio de un *discurso* como indicador del sentido de pertenencia que tiene una persona en una comunidad. Particularmente para el ámbito de la clase, podemos conocer el grado en que se involucra el alumno al identificar los argumentos que se emplean, las expresiones, términos, palabras que usa cuando se socializa el conocimiento. (Edwards y Mercer, 1989).

En la clase, el control de lo que se habla está *oficialmente* en manos del profesor, él formula un discurso donde está involucrado el conocimiento que quiere transmitir a los alumnos, así como otros elementos que contribuyen a elaborar explicaciones y argumentaciones. Lo anterior nos permite argumentar, que el discurso no es únicamente una mera vía de comunicación, sino que constituye un medio para la construcción de significados en el aula. Cazden, (1991) explica que hay dos tipos de argumentación en el aula; aquellas de tipo retórico cuya función es la de convencer, consensar e institucionalizar las ideas, y por otra parte aquellas de tipo *racional* que se elaboran para resolver planteamientos o problemas las cuales se basan en las definiciones y teoremas.

La investigación sobre el discurso escolar se proponen caracterizar las formas argumentativas que se usan en el aula, las cuales contribuye a la construcción de conocimiento; en términos de lo que plantea Cubero, R. et al. (2008) ...*el habla (discurso) se materializa en la actividad docente en una serie de recursos semióticos y discursivos, preferentemente en el profesor, pero también en los alumnos.* En un sentido más general, el propósito de estos estudios es interpretar la interacción del profesor y de los estudiantes e identificar ciertos patrones en el discurso oral, rutinas (Sfard, A., 2000b), con el fin de analizar su *funcionamiento* en la construcción del saber. Para llevar a cabo esta tarea es necesario realizar registros del desarrollo de una clase durante largos periodos de tiempo, detallando la calidad y profundidad de las interacciones. También se busca caracterizar las *formas* verbales del discurso ya que permite identificar patrones o regularidades en el discurso. Cross (2000), comenta que el docente utiliza un dialogismo en el discurso *expositivo* que mantiene una relación con otros discursos que Calsamiglia, 1998 (citado por Cross, 2002) denomina discursos primeros; como los libros de texto y los programas de estudio. Finalmente se constituye un discurso *único* en el salón de clase, que de paso, le permite al docente expresar su autoridad a través un discurso legitimado por otras fuentes. Cross explica que esto puede identificarse a través de formas pasivas y expresiones que le permiten tomar distancia y despersonalizar sus afirmaciones.

Consideración final

La investigación sobre el discurso escolar adquiere relevancia, particularmente cuando se desea analizar el proceso de institucionalización del conocimiento en la clase. Hay que considerar que la versión legitimada del conocimiento representa para los estudiantes un conocimiento con el estatus de verdadero; aquel ha sido avalado por el profesor, no obstante, para convencer, cosensuar, validar ese conocimiento necesita un discurso legitimador que sistematice y organice las actividades realizadas en clase.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2),* 165-198.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a *13* (pp. 54-62). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Carrillo, H. (2006). *Recursos nemotécnicos de las funciones trigonométricas básicas*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L' Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(2)*, 253-265.

Castejón, L. y España, Y. (2004). El discurso expositivo en el aula como acto de comunicación y como texto para ser comprendido. *Aula Abierta 83,* 107-126

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Paidós-MEC.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19* (pp. 824-830). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Cros, A. (2000). El discurso docente: entre la proximidad y la distancia. *Discurso y Sociedad 2(1)*, 55-76.

Cros, A. (2002). Elementos para el análisis del discurso de las clases. *Cultura y Educación 14(1)*, 81-97.

Cubero, R., Cubero, M., Santamaría, A., De la Mata Benítez, M. L., Ignacio-Carmona, M. y Prados, M. (2008). La Educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula. *Revista de Educación 364*, 71-104.

Dijk, V. (l992). *Text and Context: Explorations in the Semantics and Pragmatics of Discourse*. Londres: Longman.

Edwards, D. y Mercen, N. (1989). Reconstructing context: The conventionalization of classroom knowledge. *Discourse Processes 12*, 91-104.

Eisenberg, T., and Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman y S. Cinningham, (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-38). Washington: Mathematical Association of America.

Jiménez, A., María Pilar, J. (2003). Discurso de aula y argumentación en la clase de ciencias: cuestiones teóricas y metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias 21(3)*, 359-370.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(1)*, 25-68.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning 2(3*), 157-189

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. En R. Speiser, C. Maher, C.

Walter (Eds), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Zaldúa, A. (2007). El análisis del discurso en la organización y representación de la información y el conocimiento. *Acimed 16(1)*. Extraído el 20 de abril de 2008 desde http://bvs.sld.cu/revistas/aci/vol16_1_07/aci05707.htm

Categoría 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

RELEVANCIA DE LOS ESTUDIOS SOBRE EL CAMPO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Javier Lezama Andalón

En ICME 10 (2004), fue presentada en una plenaria de dicho evento denominada "Professional Development of Mathematics Teachers", y que después publicada en (Adler et al, 2005) se llama la atención a la emergencia de un amplio número de investigaciones que giran alrededor de lo que se puede denominar el "campo de investigaciones sobre la formación y desarrollo de los profesores de matemáticas". El supuesto del que se parte es simple, ante el fenómeno de masificación de la enseñanza de la matemática en la escuela, se impone la necesidad de más y mejores profesores de matemáticas, la calidad de la instrucción o enseñanza depende de los profesores, de su preparación y un continuo desarrollo profesional. El trabajo reporta una amplia indagación documental de investigaciones de un número importante de revistas del campo de la Matemática Educativa. El reporte nos muestra la diversidad de temas y métodos de investigación alrededor de la figura del profesor de matemáticas. El grupo de investigadores decidió ante el amplio número de trabajos que abordaron, establecer sólo unos cuantos aspectos que resaltan por su importancia y que agrupan adecuadamente las investigaciones analizadas: ¿Qué es investigar en el campo y que ayude a la mejora de la formación de los profesores de matemáticas? Observando la diversidad de actividades y condiciones en las que éstas se realizan, pusieron especial atención en aquellas dedicadas a la formación de profesores. ¿Qué investigaciones contribuyen a la necesidad generalizada de apoyar el aprendizaje y el desarrollo de los profesores de matemáticas? Mostraron interés básicamente en dos aspectos, aquellas que permiten entender cómo los profesores aprenden, con qué oportunidades y en qué condiciones lo hacen y las que mejoran las oportunidades de aprendizaje de los profesores.

Un aspecto que no podemos dejar de señalar sobre el reporte que hemos comentado más arriba, y que los autores denominaron como "temas emergentes", es que las investigaciones sobre el profesor que analizaron fueron realizadas en países donde el inglés juega un papel como lengua dominante. Sólo en el PME se encontraron reportes de investigaciones en el Brasil, Ibid. p.373.

Desde nuestra visión Latinoamericana, a través de la comunidad de Clame, es posible reconocer también atención al campo del profesor de matemáticas en las propuestas y reportes de investigación que se proponen en la RELME. Desde Alme 18, ha habido una preocupación en los subsecuentes editores, por que las investigaciones enfocadas a la formación, actividad y desarrollo del profesor de matemáticas sean plenamente identificables. Aspecto de especial interés consiste el énfasis de investigaciones de carácter sistémico, en las que la actividad del profesor no se puede ver aparte de la actividad del alumno y la naturaleza del contenido matemático a estudiar, así como la comprensión de los escenarios socioculturales e institucionales donde se desarrolla la actividad educativa.

Actualmente, en el 15^{th} ICMI study sobre *The professional education and development of teachers of mathematics* (Even y Ball, 2009) pp. 1-2, coloca como premisa de partida del estudio que “los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes”. Qué elementos, condiciones, actitudes son las que los convierten en dicha clave, es contenido de tal estudio. Las tres principales razones que motivaron la realización del ICMI study, son muy interesantes y reflejan de alguna manera la relevancia de continuar realizando más y mejores investigaciones en el campo del profesor de matemáticas, de amplia y corta escala y considerando múltiples aspectos.

Los editores declaran tres factores que justifican un diálogo intercultural sobre la formación profesional de los profesores de matemáticas en el mundo. Si bien se declaran exploraciones globales, sigue habiendo una fuerte atención a investigaciones en lengua inglesa. Haciendo una relectura de lo ahí planteado, entendemos esos factores de la manera siguiente. El primero se basa en el reconocimiento del rol fundamental del profesor en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos, dicho rol se traduce en demandas específicas al trabajo del profesor, a lo que sabe y lo que es capaz de hacer. En el segundo, se señala que todo esfuerzo de mejora en las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en los distintos niveles educativos, va a la par con oportunidades de aprendizaje y formación de los profesores. La formación profesional de los profesores de matemáticas es crucial en el proyecto de una mejora en la educación matemática de la sociedad. Por último afirman que la formación del profesor “Teacher education” es un proyecto amplio y constituye un área específica de estudio, de reciente reconocimiento pero de rápida expansión.

La formación de los profesores de matemáticas está determinada por la región o país donde ésta se produce, responde a condicionamientos sociales, políticos y culturales así como a tradiciones institucionales. Las prácticas de los profesores de matemáticas responden en muchos casos a sistemas de representación sobre dicha labor, construidos en largos y complicados procesos de naturaleza cultural.

Conocer los sistemas de representación que inducen prácticas en los profesores de matemáticas y que no son posibles calificar de manera inmediata por agentes ajenos al medio donde los profesores se desenvuelven y regidos por criterios que contrastan con estos sistemas de representación, constituye un problema a estudiar por los especialistas que buscan intervenir en dichas prácticas con pretensión de modificarlas.

En este contexto se inscribe la necesidad de indagar sobre las prácticas de los profesores y los contextos socioculturales que las rodea y motivan, a fin de contar con elementos concretos que permitan después crear propuestas de formación específicamente en profesores que cuentan ya con años de servicio. Podemos señalar tres grandes grupos y perfectamente distinguibles de investigaciones a realizar, las centradas en la formación de los nuevos profesores de matemáticas, aquellas centradas en los profesores en servicio (con diferentes años de servicio) y las orientadas a la formación de los formadores de profesores de matemáticas.

Por último, invitamos leer los trabajos aquí presentados con la clave que los estudios internacionales nos proveen para reconocernos en contraste con ellos y para así convencernos la relevancia del campo del profesor y en un futuro próximo, iniciar o continuar investigaciones centradas en la actividad y desarrollo del profesor de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Adler, J.; Ball, D.; Krainer, K.; Lin, F,; Novotna, J. (2005) Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60 (3) 359-381.

R. Even, D. L. Ball (eds.) (2009). The professional Education and Development of teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study. Vol. 11. Springer

APRENDIZAJE Y DOCENCIA DE MATEMÁTICAS DE LOS PROFESORES DEL TELEBACHILLERATO EN VERACRUZ (MÉXICO)

Pedro Salazar, Javier Lezama
Cicata-IPN México
psalazarv55@yahoo.com.mx, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Estudios socioculturales Nivel: Medio

Resumen. *El Telebachillerato (Teba), es una institución nacida en el estado de Veracruz (México), en 1980, con el propósito de atender la demanda de egresados del nivel medio básico: secundarias y telesecundarias de las regiones rurales, ofertándoles la educación de bachillerato en su comunidad, bajo una modalidad inspirada en el funcionamiento de la telesecundaria. Nace de esta forma una figura en la institución que denominamos el maestro tebano. Él es el responsable directo de apoyar y verificar el aprendizaje de sus alumnos. Un rasgo sobresaliente de esta modalidad, es que el maestro tebano puede impartir cualquier asignatura del bachillerato, a pesar de que su perfil profesional no sea acorde con ésta. Se presenta así el caso que da lugar a la investigación: profesores ajenos al perfil de matemáticas, trabajan enseñando matemáticas. Nuestra finalidad es conocer: cómo aprende matemáticas el maestro tebano y cómo se desempeña en su función educativa.*
Palabras clave: telebachillerato (teba), docentes, aprendizaje matemático

El problema de investigación

Existen algunos supuestos Institucionales que marcan o regulan la práctica del docente. Señalamos los más visibles:

- El profesionista con nivel licenciatura, ha transitado ya por el bachillerato, por lo que es capaz de desempeñarse como maestro en tal nivel educativo.
- El maestro tebano, no necesita poseer en la totalidad el conocimiento del nivel bachillerato. Con su experiencia y voluntad, puede desempeñarse al mismo tiempo como estudiante reaprendiendo lo que no recuerda o no aprendió en su paso por el bachillerato, al mismo tiempo que toma la función docente y conductora de aprendizaje de sus alumnos en el grupo. De esto se desprende cierto supuesto de formación docente al menos en el campo disciplinario.
- El alumno puede aprender directamente de los instrumentos de apoyo con los que cuenta: Guía didáctica y Video educativo, (cuando el maestro no puede apoyarle).

El campo de investigación del fenómeno que surge con este modelo de bachillerato es muy amplio. En particular nos interesó el caso del docente tebano, especialmente cuando debe de trabajar con asignaturas de matemáticas y éstas se encuentran fuera de su perfil profesional. Las preguntas que guiaron la investigación fueron las siguientes:

- *¿Cómo aprende el docente de telebachillerato cuyo perfil es ajeno al área técnica, matemáticas?*
- *¿Qué hace para enseñar esta disciplina, de la cual desconoce en principio su contenido?*

Tales preguntas nos llevaron a la formulación del siguiente objetivo de investigación:

- Explorar las estrategias a través de las cuales los maestros del telebachillerato veracruzano, cuyo perfil profesional es ajeno al área técnica, desarrollan su pensamiento matemático, a la vez que a través de su rol de maestros, buscan promover en sus alumnos el aprendizaje de matemáticas.

Marco teórico

Sustentamos nuestra investigación en el enfoque Socioepistemológico promovido por Cantoral, en el que se consideran cuatro componentes fundamentales en la construcción social del conocimiento matemático: epistemológica, social, cognitiva y didáctica. En Cantoral y Farfán (2000, Pág. 71) se comenta: "*La línea de investigación que desarrollamos considera, por el contrario, como necesidad básica, dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos "la cuarta dimensión", le hemos llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico".*

Más adelante se proporcionan de manera más concreta los cuatro elementos de dicho enfoque en Cantoral (2001, Pág. xvi): *"Así pues, nuestro trabajo aborda la problemática que suscita la conjunción de los elementos citados: el saber matemático, el ámbito en que se sucede su construcción y los instrumentos cognoscitivos con los que el sujeto se apropia de ellos. En cierto sentido apunta hacia una reflexión sobre aquellos aspectos o situaciones de construcción de la matemática que plantean la plausibilidad del rediseño del discurso matemático escolar."*

En estos dos comentarios, expresados en momentos diferentes Cantoral plantea el significado de la Aproximación Socioepistemológica con sus cuatro dimensiones:

- Lo cognitivo en referencia al saber, lo que tiene relación con lo que se enseña.
- Lo epistemológico, esto es, un acercamiento del objeto a través del cómo nace, en dónde y cómo se desarrolla, antes que el objeto de conocimiento pierda significación en el sentido de su aprendizaje.
- El ámbito social: en dónde, quién, a quién y bajo qué condiciones se enseña.
- La didáctica asociada a la acción educativa.

En Salazar (2008, Pág. 41), se expresa: "*La socioepistemología nos permite entender la transposición que sufren los conceptos matemáticos, conforme cambian los entornos o las necesidades que se tienen de ellos, incluso la visión de los individuos en relación con ellos. Evidentemente la matemática es algo que nace y se desarrolla a la par que el hombre. En tal sentido es indisoluble con él, con su cultura, con sus necesidades, con su forma de ver las cosas, con su humanidad. Por ello resulta interesante y útil hacer el análisis de este conocimiento desde una perspectiva social. El hombre aprende y construye matemáticas como una actividad relacionada con su comunidad. Por ello se puede afirmar que son las prácticas sociales las que permiten al individuo relacionarse con los conceptos matemáticos; sea para construirlos o para aprenderlos y manejarlos.*"

Sobre las prácticas sociales, (PS) vistas en primera instancia como el accionar de los grupos sociales, aquello que los identifica como tales, y en tal sentido, los norma, Covián (2005, Págs. 55-72) expresa que la práctica social ha sido reconocida como sinónimo de la actividad humana (nivel sinonímico). Covián va más allá estableciendo toda una clasificación sobre lo que se ha expresado en distintos reportes de matemática educativa, en relación a prácticas sociales. Así, más adelante establece una diferencia entre la práctica social, del significado específico de actividad humana.

En relación a las PS, en Montiel (2005, Pág 102) se expresa lo siguiente: "E*n cada práctica de referencia podemos distinguir acciones específicas, como lo son la producción de teoremas, lemas, definiciones, entre otros. Es claro también que estas producciones pertenecen a cierta tradición científica, sin embargo, lo que nos interesa es identificar aquello que las regula, las norma, la* ***práctica social***."

Y en relación a las prácticas de referencia citadas, Montiel (2005, Pág. 102) también comenta: *"La práctica social ha sido caracterizada por medio de actividades sujetas a condiciones de un contexto particular, contexto que a su vez es determinado por las prácticas de referencia. […] Para explicar cómo interactúan estas tres entidades partimos afirmando que la práctica de referencia consiste de un conjunto de actividades reguladas por la práctica social. Esta es la mediación necesaria para alcanzar el estatus socio. Medir, por ejemplo, es una **actividad** regulada por una necesidad de orden mayor cuyo origen, práctico o teórico, depende del contexto o circunstancia que la envuelve."*

Así, existe una subordinación entre práctica social como la reguladora, o normativa de un grupo social, lo que lo identifica. Las prácticas de referencia, aquellas que requieren de seguirse, a través de un conjunto de acciones o actividades, pero siempre reguladas por una necesidad de orden mayor, en realidad, la Práctica Social que define al grupo, comunidad.

Los grupos sociales están ubicados en un ámbito de acción, al que se le denomina "Escenario sociocultural", Crespo (2007, Págs. 32-38) lo describe como más que el lugar físico en el que se ubica el grupo social. Éste se encuentra íntimamente ligado a las acciones que ocurren en ellos, acciones que definen las prácticas sociales del grupo, ya que estas mismas se ven influenciadas por el escenario.

En relación al carácter de los escenarios, Crespo establece también un acercamiento al escenario sociocultural, desde el significado de "Escenario de conducta" proveniente de la "Psicología ecológica", expresado en Rojas (2004, Pág. 85) y citado en Crespo (2007, Pág. 33). En éste se hace ver las características de los escenarios, el cómo se relacionan con el grupo social. (Por ejemplo: el clima, el locus espacial y temporal; otros como el humor, Etc.). Más adelante, Crespo clasifica a los escenarios socioculturales como: "Académicos" y "No Académicos". Los primeros poseen la intención explícita de la construcción del conocimiento, aunque no deja de reconocer que el aprendizaje puede ocurrir también fuera de ellos (Crespo, 2007, Pág. 37-38).

El Telebachillerato como un grupo social

El Telebachillerato es una comunidad que nace a través de una propuesta de enseñanza en el nivel medio superior, con una modalidad propia, que involucra individuos, y prácticas sociales y referenciales en un escenario. Tiene un lugar en el tiempo y en el espacio, posee características propias y está regulado por prácticas sociales específicas; la principal, ser una institución educativa del nivel medio superior, con el propósito inherente a su rol social. Tal práctica la define socialmente, ya que los demás actores sociales; sus individuos, “conocen”, por lo que la institución representa, el rol social que desempeña. La Institución obedece así, a construcciones sociales emanadas al interior y exterior de ella como: currículo, condiciones de trabajo, reglas (dictadas en los manuales), su misión, las mismas prácticas que son aceptables para las comunidades en donde se ubican los Centros de Teba. Todo ello convierte a la comunidad tebana en su conjunto, en un actor reconocido socialmente por sus prácticas.

Los personajes principales de este grupo social son: el estudiante, el docente, y los directivos y administrativos escolares (oficinas centrales). Ciertamente, en el escenario aparecen además: los padres de familia y las autoridades civiles de cada localidad en donde se encuentran emplazados los centros escolares. Cada uno de sus individuos posee un rol social que es conocido por los demás. Por ejemplo, el docente sabe qué esperar de sus alumnos y a su vez éstos de su profesor. Y ambos conocen lo que deben de hacer en el ámbito escolar.

Retomando la concepción de PS de Montiel, vemos las prácticas de referencia, propias de la comunidad, particularmente asociadas a los docentes; dentro del caso de estudio las siguientes:

- Aprender matemáticas (Dimensión cognitiva).
- Aprender a enseñar matemáticas (Dimensión didáctica).

El maestro tiene como labor, apoyar el aprendizaje de sus alumnos; ello le implica aprender y aprender a enseñar. No es éste su propósito, sino su necesidad para el cumplimiento de rol encomendado, (El orden mayor).

La Dimensión Epistemológica tiene en este caso un sentido diferente, al del trabajo de Cantoral y Montiel, en cuanto a que no se trata de la epistemología de los objetos matemáticos en sí, sino en la ocurrencia del fenómeno que describimos y el cómo se da la práctica en sí misma en el escenario que se señala. De hecho la epistemología asociada es sobre la identificación de los mecanismos de construcción de saber del profesor y la naturaleza de dicho saber. El rasgo importante es la inmediatez y lo que está implícito, el maestro aprende no por el saber mismo, sino para enseñarlo. Lo que motiva la necesidad de saber en el profesor es poderlo comunicar inmediatamente.

Y ciertamente, la dimensión social, está omnipresente, ya que se trabaja con individuos, los docentes, que conforman parte del escenario ya descrito.

La investigación se enfocó en las actividades o acciones, (referidas en Montiel), a través de las cuales los maestros tebanos llevan a cabo el aprendizaje de matemáticas, y desde luego, su función como educadores, en esta disciplina.

Metodología

El trabajo se describe ampliamente en Salazar (2008, Págs. 60-82). Éste se realizó bajo un enfoque cualitativo; la razón era el tiempo y los recursos económicos con que se contaban. Por ello, se seleccionó un grupo de 6 docentes de la institución. Se emplearon tres instrumentos, que hubieron de elaborarse: Dos de ellos, cuestionarios, y otro, una video-entrevista.

En primera instancia se aplicó el cuestionario 1. Éste tenía como finalidad observar el nivel de conocimiento matemático que poseía el docente, a través de preguntas de presentación y ordenación de temáticas del álgebra, comenzando con la propuesta de diez, a las cuales, se les solicitaba, que considerara un número menor. La calidad de la ordenación, los agrupamientos nos permitía ver parcialmente su conocimiento matemático, (limitado a lo algebraico).

En segundo término se realizó la video-entrevista, la cual partía siempre de preguntas iniciales ya programadas. Tal entrevista tenía como función primaria, la de conocer de viva voz, la opinión del docente en relación a su práctica: lo que él pensaba, lo que observaba para sí y del Sistema de Telebachillerato. Cómo era su praxis y cómo había evolucionado en ella.

Finalmente el cuestionario 2 se aplicó después de la entrevista. Éste tenía como propósito conocer la formación del docente, sobre todo en el nivel formal: cursos, antigüedad en el sistema, número de veces que había impartido álgebra, la bibliografía y el peso de ésta en su curso, etc.

Particularmente para el análisis de la entrevista, fue necesario primero, hacer una transcripción total de ellas, y más adelante, hacer una especie de clasificación en los comentarios, a fin de presentar lo expresado por los diferentes sujetos, de manera organizada, al mismo tiempo que se respetaba lo expresado, en extensión suficiente para evitar hacer interpretaciones o cambios en el sentido de lo dicho. Se presentan así las acciones o estrategias de aprendizaje realizadas por los sujetos, o compañeros, clasificadas de la siguiente manera: estrategias de actitud, motivación, disponibilidad, formación, delegación de funciones, y gestión administrativa. En algunos casos hubo necesidad de establecer una subclasificación, por la diversidad de los comentarios.

Resultados y conclusiones

La muestra de maestros considerada, no es representativa de la población, apenas 6 de 3500. Tampoco son maestros típicos, en realidad, pertenecen al nivel sobresaliente (Poseen grado de maestría en educación 5 de ellos, son entusiastas, dedicados, poseen una gran actitud). Por ello los resultados pueden servir como una primera exploración en la investigación del suceso. Lo que se observó fue lo siguiente:

- **Nivel cognitivo**:

1. De los seis casos analizados, uno de ellos poseía conocimientos adecuados de matemáticas.
2. El aprendizaje, cuando existió (4 casos), no rebasa la parte operatoria, excepto en el caso señalado antes.
3. Cinco de los seis docentes entrevistados (salvo el caso mencionado en 1) son conscientes de su deficiencia y claman por un cambio en el modelo de funcionamiento del Teba; al menos para el caso de matemáticas.

- **Estrategias de formación de los docentes**:

1. Fueron muy variadas, la principal es la autoformación, porque los cursos que imparte la institución cada receso escolar (40 h, una vez por año), en su opinión no son generalmente pertinentes y suficientes.
2. La autoformación se realiza de diversas formas: libros adicionales, cursos particulares de matemáticas, sobre todo al inicio. Tal formación es de fines de semana si el docente permanece en la comunidad; ciertos días de la semana, cuando se traslada a diario a la comunidad desde su lugar de origen. En estas primeras etapas, el docente prepara las clases de la semana con su asesor y se prepara en el turno que tiene libre.

3. Recurre a los alumnos destacados en la asignatura, para aprender él mismo, y para apoyar al grupo.

Existen ciertas prácticas que se presentan en algunos casos de manera temporal; es la delegación de la enseñanza de matemáticas a un tercero (externo); alguien que toma la responsabilidad del grupo, con o sin presencia del maestro tebano. Tal práctica no es reconocida oficialmente, pero es tolerada como algo temporalmente necesario. (Se reportan casos en donde los padres tienen conocimiento y en ocasiones contribuyen con el sueldo de este asesor externo. Esto no puede hacerse abiertamente sin el conocimiento (no oficial) de los supervisores).

Los resultados anteriores nos permiten conocer algunos aspectos de la cotidianidad del Telebachillerato. Contra lo que se pudiera suponer, la institución logra su cometido social, (al menos en lo que respecta a proporcionar el servicio), lo atestigua la gran penetración en el Estado: 892 escuelas, 3,566 docentes, 3,466 grupos, 80,082 alumnos (2006 – 2007), son constancia de ello. Por otra parte, los alumnos del Telebachillerato, acceden a los Institutos tecnológicos regionales. Algunos de estos centros de estudio, poseen mayoritariamente una matrícula de egresados del Teba.

Como toda institución, el Teba está obligado a revisar sus estrategias. Nace con la televisión, deriva al video educativo, conforme se desarrolla esta tecnología, y convierte ahora al DVD como el soporte de su material audiovisual. El desarrollo tecnológico actual, puede dotar a este tipo de educación de mejores materiales, que le permitan competir a las formas tradicionales de enseñanza. Esperemos que ello venga acompañado de mayores y profundos análisis y de investigaciones que le permitan considerar las mejores alternativas.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: Un estudio de la función social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán. R. M. (2000). *Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis.* pp. 69-91. En R. Cantoral (ed.), El futuro del Cálculo Infinitesimal. ICME 8. Sevilla, España. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradiciones: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav IPN. México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la Socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. Cicata IPN. México.

Montiel G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada. Cicata IPN. México.

Salazar P. (2008). *Un estudio de estrategias y Prácticas de los docentes en relación a las Matemáticas, de profesores del Telebachillerato en el estado de Veracruz.* Tesis de maestría no publicada, Cicata IPN. México.

PRÁCTICAS DE LOS DOCENTES DE INGENIERÍA

Yolanda Serres Voisin
Universidad Central de Venezuela — Venezuela, Guatemala
Universidad Rafael Landívar
yolanda.serres@ucv.ve
Campo de investigación: Formación de profesores — Nivel: Superior

Resumen. *El objetivo de esta investigación es explorar las prácticas de los docentes de ingeniería de la Universidad Rafael Landívar (URL). Para ello se estudió el componente matemático del plan de estudio de la carrera y se dictó un taller para analizar las prácticas de los docentes. Los docentes tienen la percepción de que no hay claridad sobre el objetivo del estudio de la matemática en ingeniería ni sobre la relación de los estudios de matemática en ingeniería, con las prácticas propias de la profesión. La discusión acerca de los conceptos y procesos claves de la matemática en ingeniería genera reflexión de los aspectos didácticos, de cómo utilizar distintas actividades de aprendizaje (como los proyectos) y la tecnología para lograr los objetivos de la matemática planteada en los planes de estudio de la institución. Existe mucha dificultad para reportar las prácticas docentes, por la poca participación de estos en el taller.*

Palabras clave: prácticas docentes, plan de estudio de ingeniería, componente matemático

Para lograr el objetivo de esta investigación se trabajó con una **metodología** de investigación-acción en el marco de un taller que permitió explorar las prácticas de los docentes de ingeniería, y siguiendo el principio de la investigación-acción donde se investiga con los docentes y su participación. Este taller, como toda actividad de formación docente, tuvo por objetivo el análisis, discusión y sistematización de las prácticas docentes (Serres, 2007); para lograr esto específicamente se planteó:

1. Conceptualizar la educación matemática para ingeniería.

2. Revisar los aportes de cada curso a la formación de profesionales de la ingeniería.

3. Revisar herramientas para diseñar estrategias y actividades de aprendizaje.

La primera estrategia fue la discusión de lecturas que llevo a la *reflexión sobre las acciones* y que permitió plantear interrogantes y necesidades acerca de la educación matemática impartida en la carrera. El acto de reflexionar ha sido considerado un elemento clave en programas de formación docente, dejando claro que hay distintos momentos en referencia a la acción para reflexionar (antes, durante y después de la clase) y distintos tipos de reflexión (narrativa, cognitiva, crítica) para promover cambios en las prácticas (Serres, 2007).

Los elementos teóricos necesarios para abordar el objetivo de la investigación fueron en primer lugar los referentes a las prácticas docentes; luego al rol de la reflexión en una actividad de formación docente; a la educación matemática, específicamente al significado de aprender matemáticas y a los elementos que forman parte de la matemática; y por último se abordó una concepción de competencias en carreras de ingeniería.

Las prácticas docentes son consideradas como las acciones intencionadas y contextualizadas que lleva a cabo el docente producto de la reflexión, la explicación y la discusión sobre su quehacer (Serres, 2007). Las prácticas docentes comprenden:

- la contextualización con un currículo específico y con las características de una institución educativa particular;

- la planificación de actividades antes de la clase;

- la ejecución del plan en el aula, durante la clase, y

- la evaluación de las acciones educativas después del trabajo en aula.

Para explorar las prácticas de los docentes de ingeniería de la URL en Quetzaltenango, Guatemala, el contexto que se tiene es una institución que imparte carreras de ingeniería civil, industrial y de sistemas, y el componente matemático de su plan de estudio comprende los siguientes cursos:

<table>
<tr><th>AÑO</th><th>CIVIL</th><th>INDUSTRIAL</th><th>INFORMÁTICA Y SISTEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1ro</td><td colspan="3">Matemática I. Matemática II. Cálculo I</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Matemática Discreta I y II</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2do</td><td colspan="3">Cálculo II. Probabilidades y Estadísticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cálculo III</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Métodos Numéricos</td><td>Estadística inferencial Álgebra Lineal (electivo)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ro</td><td colspan="3">Ecuaciones diferenciales</td></tr>
<tr><td>Programación lineal y Matemática</td><td>Estadística inferencial</td><td></td></tr>
</table>

El objetivo general de los cursos es desarrollar la capacidad para trabajar con modelos matemáticos, partiendo del desarrollo de la capacidad de análisis, razonamiento y pensamiento lógico en los dos primeros cursos hasta la construcción y uso de modelos en ecuaciones diferenciales.

Los docentes de matemática de esta institución son ingenieras e ingenieros dedicados a la docencia, trabajan por horas en esta institución y la mayoría también trabaja en otras universidades como docentes o administrativos. Esta situación hace difícil que los docentes coincidan en la institución y en consecuencia que puedan participar en reuniones y capacitaciones. Si embargo, durante el primer ciclo del 2008 se logró dictar un taller de Educación Matemática.

Las reflexiones de los docentes en este taller fueron de tipo narrativas, pues consistieron en explicitar sus prácticas e interpretarlas en el contexto de la institución donde se desempeñan (De Vicente, 2000); las primeras reflexiones fueron:

1. Hay que buscarle una dirección a la enseñanza de la matemática que se imparte en la institución, y cooperar entre los docentes para seguir esa dirección.

2. Hacer una puesta en común de las competencias y habilidades necesarias para el estudio de la matemática en ingeniería.

3. Buscar caracterizar los grupos de clases para determinar cuál es el mejor tipo de clase: demostrativa, trabajo grupal, magistral.

4. Canalizar las ideas que tienen algunos catedráticos acerca de actividades específicas como por ejemplo el trabajo con proyectos matemáticos y con tecnologías.

5. Aprender a manejar situaciones para lograr aprendizajes.

6. Trabajar en sintonía, que haya unos contenidos mínimos a alcanzar en cada cátedra.

7. Trabajar los niveles de dificultad de los problemas de manera de escogerlos de la forma más adecuada para que los estudiantes sientan que sí pueden resolverlos.

Estas reflexiones se pueden agrupar en dos categorías:

- las referentes a los contenidos, competencias y habilidades necesarias para el estudio de las matemáticas en ingeniería, lo cual está relacionado con el ***qué*** y ***para qué*** enseñar matemática en ingeniería;

- las referentes a ***cómo*** enseñar matemática en ingeniería, a través de qué estrategias de enseñanza (clase magistral, el trabajo grupal y el papel de las demostraciones) y con qué actividades de aprendizaje (problemas de distinta dificultad, proyectos matemáticos, uso de tecnologías). Para comenzar a trabajar el qué se comenzó con un análisis del componente matemático del plan de estudio de ingeniería de la URL.

Para analizar el componente matemático del plan de estudio de ingeniería se utiliza un organizador avanzado denominado la trilogía CRP -conceptos, relaciones y procesos- (Cruz, 2006) pues se considera que para aprender matemática, más allá de aprender conceptos y procedimientos de forma aislada (concepto de función, de límite, procedimientos para graficar, para hallar un límite) hay que aprender las relaciones entre los conceptos, y entre los conceptos y los procesos. Al principio lo docentes tuvieron dificultad para identificar y diferenciar entre los conceptos, las relaciones y los procesos; la tendencia era tomar como conceptos los temas del programa y como relaciones y procesos los puntos de cada tema. Sin embargo, a medida que se fue discutiendo la complejidad de cada caso se fue aclarando cuáles eran los conceptos y los procesos claves de la matemática de ingeniería.

En las expectativas de los docentes de matemática de ingeniería está que sus estudiantes tengan un buen manejo de las operaciones numéricas y algebraicas, con los números reales, con el despeje de ecuaciones, factorizaciones, simplificaciones y con el desarrollo de expresiones algebraicas. Sin embargo, docentes de tercer año, en el curso de ecuaciones diferenciales, todavía encuentran que sus estudiantes tienen dificultades con estas operaciones básicas. Por esta razón los docentes opinan que las pruebas de admisión a la carrera de ingeniería de la URL deben tener un nivel de exigencia más elevado.

En cuanto a los cursos de Matemática I y II su principal objetivo es el estudio del concepto de función, el proceso de graficación de las funciones, y la utilización de estas para modelar. Otro proceso intrínseco al estudio de las funciones es el paso de una representación a otra (verbal, algebraica, visual y numérica), en el cual los estudiantes presentan dificultades al hacer un estudio a partir de una de las expresiones de las funciones, generalmente la algebraica, y pasar a su gráfica o hallar algunos valores numéricos claves de la función como son los cortes con los ejes. Una de las reflexiones hechas en el taller es la crítica al trabajo apegado al libro de texto, el cual no presenta el estudio de funciones de manera integral y además le falta aplicaciones a la ingeniería (el libro a que se hace referencia es el de Precálculo de Stewart, Redlin y Watson, quinta edición, de editorial Thomson).

En los cursos de Cálculo I y II se estudia los conceptos de límite, derivada e integral; los procesos que se espera desarrollar son el cálculo de límites, derivadas e integrales, su interpretación gráfica, y las aplicaciones de estos conceptos a la economía y a la biología, surgiendo nuevamente la reflexión de dónde quedan las aplicaciones a la ingeniería.

En ecuaciones diferenciales los principales conceptos estudiados son las ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones lineales de orden superior; los procesos son la modelación matemática y los métodos numéricos. Una de las principales dificultades de este curso es que requiere de muchos conocimientos previos tanto de cálculo como de física.

Acerca de las competencias necesarias en la carrera de ingeniería, se discutió el informe final del proyecto Tuning América Latina, la parte correspondiente a ingeniería civil y de las competencias profesionales genéricas de ingeniería más relevantes para ingeniería civil (Proyecto Tuning-América Latina, 2007) los docentes consideraron que las más relacionadas con el componente matemático son:

1.Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.

2. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

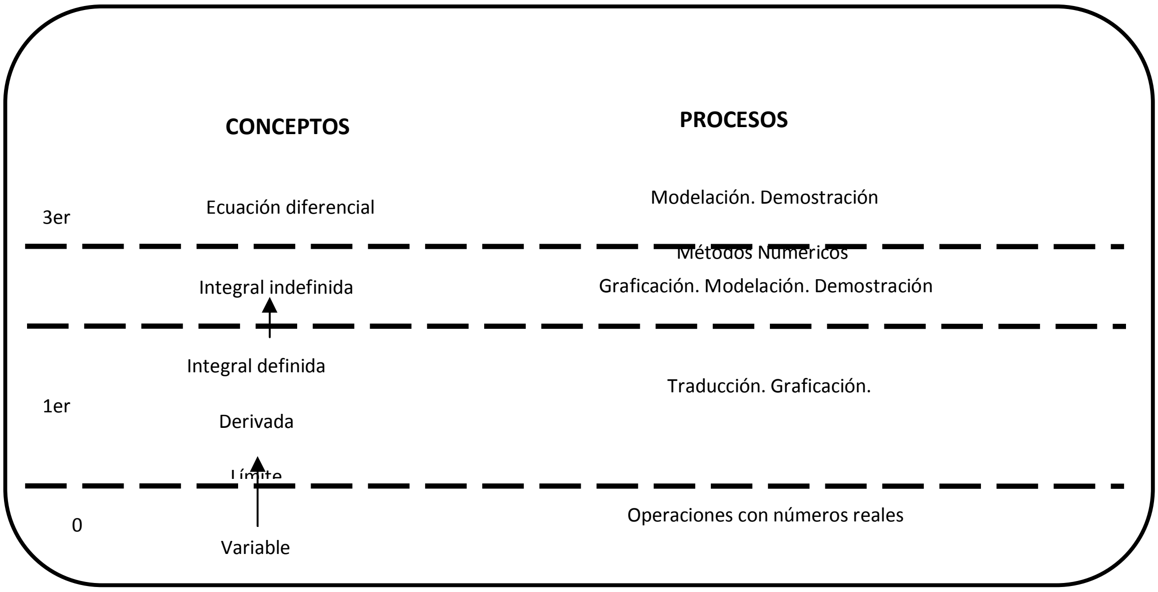
3. Capacidad para tomar decisiones.

4. Compromiso con la calidad. Se discutió que cada una de estas competencias está relacionada con el desarrollo del pensamiento estratégico y matemático; por ejemplo, en matemática I, para desarrollar el concepto de función y su proceso asociado de graficación hay que *analizar* el tipo de función, cuáles son los elementos claves que permiten *tomar decisiones* acerca de la forma de la gráfica (pendiente de la función lineal, grado y coeficiente principal de una función polinómica, asíntotas de una función racional).

Y la competencia dos está directamente relacionada con el objetivo general de la matemática en la URL: *desarrollar la capacidad para trabajar con modelos matemáticos*.

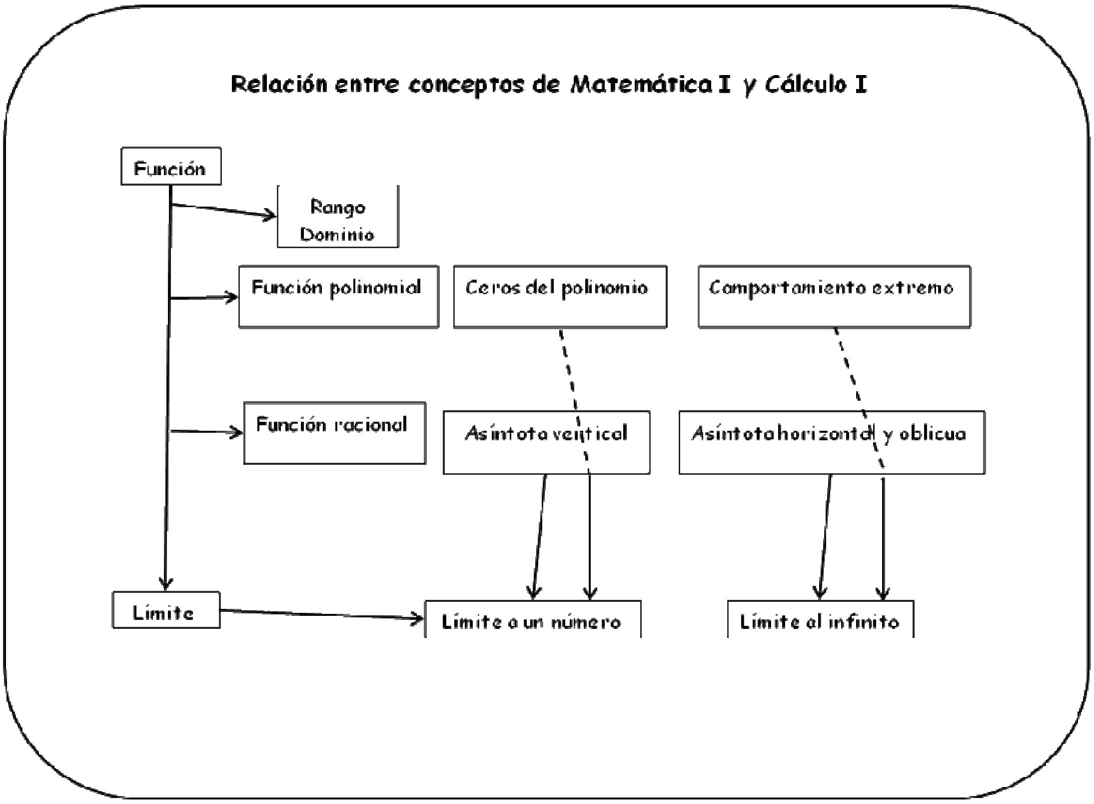
Otra reflexión fue que el proyecto Tuning identifica las competencias de las carreras de ingeniería actuales pero no hace una crítica acerca de si esas deben ser las competencias de los profesionales de ingeniería que se quiere, por ejemplo no se menciona el aspecto de la creatividad y del diseño como parte de las competencias, ni se discutió en el taller cómo la matemática en ingeniería promueve el desarrollo de la creatividad y el ingenio. Falta mucha reflexión acerca de para qué se estudia matemática en ingeniería y cómo el desarrollo del pensamiento matemático se vincula con las prácticas de ingeniería.

En las discusiones del Taller se concluyó que el componente matemático del plan de estudio de Ingeniería de la URL, está organizado de la siguiente forma:



Es importante que el docente tenga claras también las distintas relaciones entre los conceptos y los procesos para que pueda integrarlas en su propuesta didáctica. De esa forma puede tener un mapa más amplio de la matemática que se estudia en ingeniería y tener mayor claridad acerca de qué conocimientos previos necesita el estudiante para adquirir uno nuevo y este nuevo a qué conocimiento sirve de base. Esto también ayuda para diseñar actividades de recuperación y de motivación para los estudiantes desventajados y aventajados respectivamente.

Un ejemplo de algunas relaciones más específicas entre los cursos de Matemática I y Cálculo I, claves para la consolidación didáctica son:



Desde el punto de vista didáctico, o del cómo enseñar matemáticas en ingeniería, en el taller se discutieron dos aspectos:

1. el rol de la tecnología en el estudio de la matemática, específicamente el uso de graficadores de funciones bien sea a través de la computadora o de las calculadoras;

2. el trabajo por proyectos y la necesidad de documentar el proceso de manera de que esta estrategia pueda ser utilizada por todos los docentes de la carrera.

La URL, cuenta con un laboratorio de computación donde pueden trabajarse algunas clases para aprovechar la ventajas que ofrecen algunas paquetes computacionales para trabajar las funciones y sus distintas representaciones. La única experiencia comentada por un docente acerca del uso de la tecnología fue el uso de una página web personal donde tiene un enlace a un graficador y le asigna tareas a sus estudiantes usando ese graficador. Este año la Universidad implementó el uso de un portal donde se puede colocar materiales de apoyo los estudiantes, pero el uso es todavía muy limitado. Acerca de los proyectos, algunos docentes los trabajan como una actividad más de evaluación, pero no existe una sistematización de la experiencia que permita implementarla en todos los cursos y que conlleve a una relación más directa del componente matemático con un que hacer de la profesión de ingeniería como es plantear y ejecutar proyectos. Algunos de lo proyectos trabajados en Matemática I fueron: modelación de la función que calcula la tarifa eléctrica de una vivienda, cálculo de la pendiente de una calle, cálculo de la capacidad de un parqueo; estimación del crecimiento poblacional de Quetzaltenango en los próximos 5 años, de la población mundial y de la diferencia de intensidad de los terremotos ocurridos en la zona en los últimos meses.

Conclusiones

Los docentes tienen la percepción de que no hay un objetivo claro del estudio de la matemática en ingeniería, y de que esto causa que no se alcancen unos contenidos mínimos en cada curso. También se percibió en el taller que no es clara la relación de los estudios de matemática en ingeniería con las prácticas propias de la profesión. La discusión acerca de los conceptos y procesos claves de la matemática en ingeniería genera reflexión de los aspectos didácticos, de cómo utilizar distintas actividades de aprendizaje (como los proyectos) y la tecnología para lograr los objetivos de la matemática planteada en los planes de estudio de la institución.

Existe mucha dificultad para reportar las prácticas docentes. Una dificultad de forma es la poca participación de los docentes en las capacitaciones. Esta dificultad de forma crea una dificultad de fondo pues los docentes reflexionan y discuten durante el taller pero es poco lo que reportan acerca de cómo planifican una clase, de cómo desarrollan una clase o cómo evalúan su trabajo. Sin embargo, en las evaluaciones hechas al Taller los participantes opinaron que sí se cumplieron los objetivos y proponen mantener reuniones periódicas y comunicación entre los docentes, de manera de compartir las didácticas utilizadas y exitosas, y documentarlas.

Referencias bibliográficas

Cruz, C. (2006). Desarrollo del pensamiento matemático y del pensamiento estratégico. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: CLAME AC -Díaz de Santos.

De Vicente, P. (2000). La formación del profesorado como práctica reflexiva. En L. Villar (Coord.), *Un ciclo de enseñanza reflexiva. Estrategia para el diseño curricular*. Bilbao: Mensajero.

Proyecto Tuning-América Latina. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina*. Informe final-Proyecto Tuning-América Latina, 2004-2007.

Serres, Y. (2007). *El rol de las prácticas en la formación de docentes de matemática*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN, México.

UNA EXPLORACIÓN DEL DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR. UN ESTUDIO ETNOGRÁFICO DE LA RAZÓN DE CAMBIO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Gladys Monroy Vázquez, Santiago Ramiro Velázquez B.
Universidad Autónoma de Guerrero México
gladiola_mvs@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Lenguaje matemático Nivel: Medio básico

Resumen. *Este trabajo centra su atención en el papel del discurso del profesor de matemáticas en el salón de clases y discute la importancia que éste tiene en la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos. Sostenemos que el discurso matemático escolar es un medio para construir, negociar e interpretar significados en interacción social. Se trata de una exploración del discurso matemático desde la práctica del profesor en el aula, cuando aborda con sus alumnos de tercer grado de secundaria la noción de razón de cambio. Para tal exploración se diseña un estudio etnográfico, que permite realizar un estudio secuencial de las situaciones de enseñanza (Reséndiz, 2006). La etnografía como metodología de investigación, asegura el reconocimiento de cual es discurso matemático de maestros y alumnos, y permite obtener información relevante del contexto de la clase, que es importante para nuestra interpretación. Esta investigación esta sustentada en el enfoque interaccionista como marco teórico de la investigación.*

Palabras clave: discurso matemático escolar, práctica del profesor, interacción discursiva, etnografía

Introducción

Es notable el incremento de investigaciones en matemática educativa enfocadas al estudio del proceso de la enseñanza de las matemáticas. Algunas procuran describir o definir este proceso, y otras buscan determinar qué procesos de enseñanza son eficaces en relación con los resultados deseados, como por ejemplo, el rendimiento escolar de los alumnos. Uno de los factores más notables que influyen en el bajo rendimiento escolar por parte de los alumnos es la falta de comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos con que se está trabajando, particularmente, procedimientos y conceptos de tipo variacional (Ávila, 2005; Reséndiz, 2004 entre otros).

Una de las formas que permiten al alumno comprender los conceptos matemáticos que se describe en clase es a través del discurso, puesto que es el medio por el cual se produce gran parte de la enseñanza, donde maestros y alumnos trasmitan e intercambian conocimientos en la interacción discursiva (Cazden, 1986). Nos interesamos en el estudio del discurso matemático del profesor, porque consideramos que el profesor, dentro de una de sus funciones como guía y orientador, selecciona y diseña situaciones de aprendizaje en las que pretende lograr producciones satisfactorias para el buen desempeño de sus estudiantes. Sostenemos que el discurso matemático escolar es el medio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social, como lo señala Reséndiz (2006). Reconocemos que el papel de las interacciones entre el profesor y los estudiantes enfatiza la importancia de las formas discursivas que se implementan en el aula. Muchas veces en el aula tal interacción es limitada y utiliza un discurso formal, rígido, repetitivo y acabado, en donde resaltan un conjunto de definiciones que carecen significados.

Reséndiz (2004), documenta que el actual discurso matemático que domina en las clases de cálculo inhibe el desarrollo de ideas variacionales entre los estudiantes, debido a que la enseñanza de tal asignatura ha sido entendida sólo como el medio para el desarrollo de habilidades algorítmicas, de naturaleza algebraica, que permitan el cálculo de derivadas e integrales, así como su aplicación en problemas de optimización. La enseñanza, bajo este enfoque, plantea al estudiante escenarios limitados para la significación de la variación.

Velázquez, Cabañas, Marmolejo, Nolasco, García, Flores, Díaz y García (2005), documentan las condiciones académicas de profesores de matemáticas de nivel medio superior en el sentido de que, en lo general, no comparten un discurso matemático como medio para la construcción social de saberes, en su lugar se maneja una relación entre lenguaje matemático y común. De modo similar, en su práctica laboral prevalece el abordaje de los contenidos desvinculados de las condiciones en que surgen y de las prácticas donde están inmersos.

Consideramos que en el salón de clases, debe existir un discurso abierto y amplio basado en nuevos y propios conocimientos por parte de los estudiantes, un discurso que esté en constante evolución y considerado en sus diversas manifestaciones como práctica social. El problema de investigación queda formulado en la siguiente pregunta científica: ¿Cómo es el discurso del profesor cuando aborda la noción de razón de cambio en la educación secundaria? Del problema planteado se deriva el objetivo que consiste en explorar la práctica del profesor de secundaria haciendo centro en el discurso matemático escolar, cuando aborda nociones de razón de cambio con sus alumnos. Con este trabajo se pretende conocer cómo el profesor promueve en intercambio comunicativo entre sus estudiantes.

Para el logro de este objetivo, se diseña un estudio etnográfico que consta de tres fases: la primera, es una entrevista inicial a los profesores que nos permita conocer cómo planea abordar contenidos que impliquen razón de cambio, la segunda es una observación en el aula que nos permita observar la práctica del profesor en el aula, y la tercera es entrevista final que permita profundizar en los anteriores reconocimientos.

El marco teórico en el que se sitúa esta investigación es el enfoque interaccionista. Este enfoque concibe el desarrollo de la comprensión personal de los individuos a través de su participación en la negociación de significados en la interacción discursiva en el aula (Godino y Llinares, 2000).

Antecedentes

A través de los diversos estudios realizados a cerca del discurso matemático escolar, se sostiene que la comunicación es central en el aprendizaje de las matemáticas mediante un discurso matemático escolar como práctica generadora de saberes.

Velázquez, Santos y Fernando (2006), dicen que estudiar temas elementales de determinados conceptos asociados a la práctica en donde están inmersos, aseguran la comprensión y la negociación de sentidos y significados por parte de los alumnos, y consideran la necesidad de un estudio de un discurso matemático escolar en continua evolución, que dé cuenta de un sistema didáctico que considera las diversas prácticas sociales como generadoras de saberes.

Aparicio y Cantoral (2006), sostienen que el discurso matemático escolar se debe mirar en su forma oral, escrita, gestual y por ende, vinculado a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento.

Reséndiz (2006), afirma que por lo general, se ha concebido a la matemática como un cuerpo de conocimiento individual y como un lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo. El nuevo saber matemático, individual o compartido, se construye a través de interacciones y conversaciones entre profesores y alumnos, de ahí que el movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido resulta crucial para que se lleve a cabo el aprendizaje.

Quesada y Torregrosa (2007), nos dicen que el papel de las interacciones entre el profesor y los estudiantes enfatiza la importancia de las propias interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo, y afirma que la coordinación de procesos cognitivos y de razonamiento es fundamental para la comunicación y difusión de saberes.

Como hemos venido mencionando, construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que se describe como discurso. El discurso incluye tanto la comunicación oral o escrita entre los participantes (Candela, 1999). Así, el estudio de la forma en la que maestros y alumnos participan en la interacción nos ayuda a entender cuáles son las condiciones de significación que se crean en una clase ordinaria cuando se pretende enseñar la noción de razón de cambio.

Escenario de trabajo

En virtud de que este trabajo es de corte exploratorio-descriptivo se utiliza el método de investigación etnográfica para analizar las interacciones discursivas en el aula. Concebimos a la etnografía como un estudio de la vida cotidiana de una comunidad, la escuela, el aula, un estudio de las actitudes, las formas de relacionarse, de pensar y actuar de los que componen la comunidad educativa y especialmente de las condiciones reales en que las que la actividad educativa y concretamente el quehacer docente se lleva acabo (Calvo, 1992).

Se pretende trabajar con dos profesores de diferentes instituciones de este nivel educativo, como estudio de casos.

Selección de la muestra

La selección de los maestros estudiados no tiene alguna característica especial (formación docente, grado de estudios, años de servicios, etc.). Los criterios que hemos tomado han sido la disponibilidad y posibilidad de acceso al salón de clases. Se trata de profesores de escuelas secundarias diferentes. Los contenidos con los que se trabaja es la noción de razón de cambio, que se imparte en el tercer grado educación secundaria.

Procedimiento de recogida de la información

Para la recogida y registro de la información se utilizan tres fuentes importantes: grabaciones (grabadoras y videograbadoras) de las sesiones, toma de notas de campo por parte del observador en el momento de la grabación y entrevistas a cada profesor.

- Antes de iniciar la unidad temática, se hace una entrevista inicial al profesor con el propósito reconocer cómo el profesor planea abordar contenidos en los que está inmersa la razón de cambio, sí considera las orientaciones didácticas que se sugieren en el programa de estudio y cómo las considera.
- Posteriormente, al inicio de la unidad temática, se procede a las observaciones de clase. En la observación, se propone reconocer el discurso del profesor y de los alumnos, así como identificar los tipos de interacción discursiva.

  En cada aula se graban todas las sesiones que conforman el contenido temático de la razón de cambio. Las grabaciones en video y audio son realizadas con una cámara y videograbadora situadas estratégicamente en las aulas. Las grabaciones son realizadas en el contexto de la clase, en el cual se llevan a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje, de tal modo que se puedan alcanzar un cierto grado de validez al tratarse de una actividad cotidiana.

  Respecto a las notas de campo, de acuerdo a la metodología utilizada, el rol del observador es el no participante. Por tanto, el papel del observador consiste en grabar las sesiones y tomar notas de campo sobre las mismas, registrando las características más generales de la actividad llevada a cabo por profesores y alumnos.
- Una vez finalizado el desarrollo de la unidad temática, y por tanto finalizando el proceso de grabación, se entrevista los profesores. En esta entrevista final se pretende profundizar en los anteriores reconocimientos, de tal manera que permita conseguir información para completar los análisis de las observaciones de clase.

  Las entrevistas (tanto entrevista inicial como final) son de tipo no estructuradas y se realizan en un ambiente de cierta informalidad.

Sistematización de los datos

Una vez finalizada la grabación de todas las sesiones, se procede a ver el material completo, a describirlo en una hoja de registro etnográfico. Una vez completadas las hojas de registro etnográfico en cada aula, se seleccionan las secuencias relevantes para el objetivo de la investigación, sí las hay. La relevancia de las mismas ha venido determina por la presencia de situaciones que son significativas para analizar los procesos de interacción discursivas en el salón de clases, estas pueden ser:

- Situaciones de desacuerdos o malentendidos en la continuidad del discurso.
- Situaciones de negociación de significados.
- Momentos de discusión en los que se dan intervenciones discursivas de distintos alumnos y el profesor.

Análisis e interpretación de resultados

El análisis e interpretación se realiza a partir de los registros etnográficos, ya que se trata de identificar el discurso matemático de los participantes. Parte de lo estrictamente descriptivo hasta llegar a la explicación de la situación.

A partir del análisis e interpretación, se formula una explicación al objeto de estudio, resaltando lo verdaderamente significativo y estableciendo conexiones con el contexto global en el cual se inserta la situación a analizar.

Consideraciones finales

Como se trata de una investigación en proceso, lo que hasta el momento se aborda es la estructura de un estudio del discurso matemático escolar desde la práctica del profesor de secundaria.

Se considera que el estudio del discurso escolar tiene gran importancia porque mediante él se imparte la mayor parte de la enseñanza matemática. Con esta investigación se pretende lograr una apropiación del concepto de razón de cambio en el proceso de construcción del discurso y del conocimiento. Se espera que los resultados tengan una aportación en la intervención educativa, así como en la formación inicial y permanente de los profesores.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(1), 7-30.

Ávila, I. (2005). Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav- IPN, México.

Calvo, B. (1992). Etnografía de la educación. *Nueva Antropología* 24, 9-26.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula: los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México-Buenos Aires- Barcelona: Paidós.

Cazden, C. (1986). Classroom discourse. En Wittrock (ed.) *Handbook of Research on Teaching.* 432-463. New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Godino, D. y Llinares, S. (2000.). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*. 12(1), 10-92.

Quesada, H. y Torregrosa, G. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10(2), 275-300.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav- IPN, México.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 9(3), 435-458.

Velázquez, S., Santos, R. y Fernando, M. (2006). Puedo aprender probabilidad jugando canicas en la feria. Trabajo premiado en la Quinta Jornada Científico Estudiantil, no publicado, Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

Velázquez, S., Cabañas, G., Marmolejo, E., Nolasco, H., García, G., Flores, C., Díaz, M. y García, V. (2005). *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores*. México: Santillana.

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Marger da Conceição Ventura Viana, Célia Maria da Silva
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
margerv@terra.com.br
Campo de investigación: Historia Nivel: Superior

Resumen. *El objetivo de esta investigación ha sido conocer las concepciones de los profesores sobre el uso de la Historia de las Matemáticas (HM) en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de Matemáticas. Mas a HM pode contribuir, de hecho, para el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas? Para ello, se ha hecho una revisión de la literatura sobre el uso de la HM como instrumento auxiliar al PEA y elaborado un cuestionario que fue aplicado a profesores de Matemáticas de Enseñanza Fundamental y Media de escuelas de las redes municipal y estatal de enseñanza de Ouro Preto, MG,Brasil, para recoger datos. Las preguntas se basaron en argumentos favorables al uso de la HM, encontrados en la literatura. Los datos fueron organizados y analizados cualitativa y cuantitativamente, según la naturaleza de cada pregunta. Se concluyó que la mayoría de los profesores busca elementos de la HM para utilizarlos en el PEA, principalmente como motivación, a ejemplo de mostrar como surgieron ciertos contenidos, muchas veces como curiosidad*

Palabras clave: historia de las matemáticas, proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, concepciones de los profesores sobre el uso de la historia de las matemáticas

Introdução

Na escola é freqüente ouvir alunos questionarem a utilidade de estudar certos conteúdos. Acredita-se, porém, que a abordagem histórica pode levá-los à compreensão da necessidade e do surgimento de tais conteúdos. Nobre (1996) sugere partir do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos: "Ao invés de se ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de se ensinar o para quê, se ensina o porquê das coisas" (p. 31).

Esta pesquisa partiu do pressuposto de que a Educação Básica forma o alicerce do conhecimento que se adquire na vida acadêmica. Além disso, considera que a Educação Matemática procura encontrar instrumentos metodológicos.

Nesse sentido, Baroni e Nobre (1999) destacam que o movimento da Educação Matemática incorpora, de tempos em tempos, componentes que visam a fornecer instrumentos que podem ser utilizados pelo professor de Matemática. Entre estes a Resolução de Problemas, a Modelagem

Matemática, a Etnomatemática e a Informática. Mas esta pesquisa inclui entre eles a HM, que nos últimos tempos, vem ganhando destaque.

Por outro lado, Baroni e Nobre (1999) afirmam que a HM (assim como a Análise, a Álgebra, a Topologia, etc.) constitui uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica. Portanto consideramos uma ingenuidade considerá-la apenas um instrumento metodológico. A proposta que se fez foi investigar acerca do uso da HM como fornecedora de elementos necessários para a construção de caminhos lógicos com vistas à construção de conceitos que se deseja ensinar, proporcionando aos alunos uma visão do significado e da totalidade da matéria. Mas a HM pode contribuir, de fato, para o êxito do processo de ensino-aprendizagem da Matemática?

Considerando os aspectos citados, esta pesquisa se justifica.

A pesquisa

A pesquisa teve início com uma revisão da literatura sobre a HM como instrumento auxiliar ao PEA da Matemática e, a partir daí, foram determinados o problema, objeto e objetivo de estudo.

Embora o uso da HM seja indicado pelos PCNs e apontado por vários pesquisadores como auxiliar ao PEA, será que isso tem chegado aos professores? O que eles pensam sobre o assunto? Têm seguido a recomendação? Como fazem? Quais resultados têm obtido?

Neste contexto, pretendeu-se dar resposta a tais questões. Foi, então, elaborado o problema: Quais são as concepções de professores de Matemática do Ensino Fundamental (séries finais) e do Ensino Médio sobre o uso da HM no PEA da Matemática?

Portanto o objetivo foi conhecer concepções de professores sobre a utilização da HM no PEA da Matemática e o objeto de estudo foram concepções de professores de Matemática sobre o uso da HM no processo de ensino-aprendizagem.

Como instrumento para coletar os dados necessários à investigação, foi elaborado um questionário (SILVA, 1999, p.55), com perguntas baseadas nos argumentos favoráveis à utilização da HM analisados por Miguel (1997). E a opção pelo questionário deveu-se à possibilidade de rapidez no retorno das respostas e à maior facilidade para contatar professores, visto que eles dispõem de pouco tempo para atendimento a pessoas externas à escola.

Foi definida a população-alvo da pesquisa: professores de Matemática do Ensino Fundamental (séries finais) e do Médio de escolas da rede municipal e estadual da cidade de Ouro Preto - MG, para que o estudo contemplasse a Educação Básica.

Realizada a validação do instrumento, foram contatadas escolas e professores por meio de uma carta-convite. Os questionários foram entregues diretamente aos professores, assim que a pesquisa foi autorizada pela direção das escolas.

A HM no processo de ensino-aprendizagem: algumas leituras

Segundo Milies (2003), a HM pode ser um instrumento eficaz para o PEA da Matemática, ao permitir entender por que o conceito foi introduzido nesta ciência e por que isso ocorreu em determinado momento histórico. Permite também estabelecer conexões da História com a Filosofia, com a Geografia e várias outras manifestações da cultura. O conhecimento da HM possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização. Isso é confirmado por Nobre (1996), ao constatar que muitos conhecimentos matemáticos são transmitidos como se fossem obtidos de forma natural e apresentados como desprovidos de erros e dificuldades. Nesse sentido, o autor, destaca a necessidade de o professor observar que a forma acabada na qual hoje se encontra o conceito matemático esconde modificações sofridas ao longo de sua história e que isso deve ser levado em conta na elaboração de atividades para aprendizagem, já que a forma como um assunto é tratado influencia a sua compreensão. A essência da proposta deve estar na "busca das contradições da ciência para que surjam outras contradições" (NOBRE, 1996, p.31). É uma proposta que proporciona ao aluno e ao professor, a oportunidade de levantar questões sobre temas que, muitas vezes, aparecem como inquestionáveis e intocáveis.

Uma forma de participação da HM no ensino de Matemática, manifestada na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998), diz respeito ao uso de problemas históricos, por considerar que os conceitos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas: "A própria HM mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática" (PCNs, 1998, p. 40).

Para os PCNs, conceitos abordados em conexão com sua História constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A HM é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural, o que se pode confirmar:

[...] "verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração" (PCNs, 1998, p.43).

Para D'Ambrosio (1999), em Matemática é impossível discutir práticas educativas que se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições sem recorrer à História, que compreende o registro desses fundamentos: "Desvincular a Matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na Educação Matemática" (p. 97). Propõe ele que se recupere a presença de idéias matemáticas em todas as ações humanas. Para isso, em afinidade com o pensamento de Paulo Freire, argumenta ser necessário recorrer à História no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Para o próprio D'Ambrosio, a HM também ajuda a definir o que se entende por Matemática. Isso porque é necessário entender e destacar as origens da Matemática nas culturas da Antigüidade Mediterrânea e seu desenvolvimento na Idade Média, criando estilo próprio e incorporando-se ao sistema escolar das diversas nações colonizadas a partir do século XVI. Ensinar a Matemática recorrendo à sua história é tratá-la como uma manifestação cultural. Dessa forma, a HM e sua interpretação podem ser vistas como imprescindíveis à Educação Matemática.

Struik (1985), assim como D'Ambrosio, considera que a HM ajuda a entender a herança cultural, aumenta o interesse dos alunos pela matéria, possibilita a compreensão das tendências em Educação Matemática podendo servir tanto ao ensino quanto à pesquisa.

Mendes (2003) considera que a HM deva ser utilizada na elaboração e realização de atividades voltadas à construção das noções básicas de conceitos matemáticos, fazendo com que os alunos percebam o caráter investigatório presente na geração, organização e disseminação desses conceitos ao longo do seu desenvolvimento histórico. Segundo esse autor, o aluno deve participar da construção do conhecimento escolar de forma ativa e crítica, sendo uma das exigências a relação com a necessidade histórica e a social que sustentaram o surgimento e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Para Miguel (1997), deve ser feita uma reconstituição não apenas dos resultados matemáticos, mas principalmente dos contextos epistemológico, psicológico, sociopolítico, e cultural. Sendo assim, os alunos observariam onde e como esses resultados foram produzidos, contribuindo para a explicitação das relações que a Matemática consegue estabelecer com a sociedade em geral, com as diversas atividades teóricas específicas e com as práticas produtivas. Mendes (2003) sugere dois caminhos a ser seguidos.

No primeiro é necessário que a atividade seja revestida também pela pesquisa. "Isso significa ser necessário ao professor levantar na HM, problemas que necessitem respostas, visando assim torná-los como ponto de partida das atividades pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula" (p.229). Os resultados obtidos podem contribuir para a organização sistemática do conhecimento matemático objetivado pelo conteúdo programático. Mendes entende que a investigação possa contribuir para que os alunos percebam os "porquês" matemáticos, também recomendados por Nobre (1996). Contudo, para Mendes, este caminho é mais viável em instituições de ensino superior, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática.

O segundo caminho "diz respeito à utilização das informações históricas presentes nos livros de HM ou similares e, a partir de tais informações, elaborar atividades de ensino visando com isso fomentar a construção de noções matemáticas pelo aluno" (MENDES, 2001, p.230). Assim, de acordo com Mendes, as atividades históricas podem conduzir os alunos a um processo dinâmico da construção do conhecimento matemático.

A utilização da HM no PEA é tratada por Miguel (1997), ao apresentar e analisar argumentos reforçadores e questionadores de há potencialidades pedagógicas. Entre os que reforçam estão estes: a HM é fonte de motivação, de objetivos, de métodos, de seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos; é instrumento de desmistificação e desalienação do ensino, de formalização de conceitos, de promoção do pensamento independente e crítico, como unificador dos vários campos da matemática, de promotor de atitudes e valores, de conscientização epistemológica, promotor de aprendizagem significativa e de resgate da identidade cultural.

Miguel (1997) apresenta pontos que justificam individualmente cada um desses argumentos. Explica, ao mesmo tempo, que tomados isoladamente, apresentam-se frágeis para a defesa da inclusão da HM no ensino. Portanto, paralelamente aos doze argumentos reforçadores, Miguel apresenta quatro argumentos questionadores muito fortes: ausência de literatura adequada, a natureza imprópria da literatura disponível, o fator complicador que pode representar o elemento histórico e a ausência na criança do sentido do progresso histórico.

Miguel (1997) faz menção a duas posições extremadas, que tentam convencer de que no uso da HM "tudo pode ou nada pode". Há possibilidade, entretanto, de uma posição intermediária em que a HM só pode surtir efeitos desejados se for compatível com os fins pedagógicos e articulados com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático.

Também segundo Miguel (1997), a Matemática colocada nos currículos oficiais e nos manuais didáticos apresenta os conteúdos como reprodução de resultados sem contextualização. E para que o uso da HM se torne pedagogicamente útil, é necessário que ela seja escrita sob o ponto de vista do educador matemático. Enfim, a utilização dos recursos da HM tem de ser feita de forma "pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica [...] poderia constituir-se em ponto de referência para a prática pedagógica problematizadora em Matemática" (p. 103).

Portanto, ao abordar a HM em sala de aula, o professor deve revelar a Matemática como uma criação humana, levando os alunos a encará-la como fruto da necessidade do homem. Sendo assim, o conteúdo vinculado à História pode despertar interesse nos alunos.

Análise e Resultados

Dos 41 questionários distribuídos, 58,5% retornaram. Os 41,5% que não responderam, podem indicar desinteresse em colaborar, em utilizar a HM ou até mesmo falha do próprio instrumento. De fato, a questão 4 recebeu críticas de alguns professores, alegando ser extensa, difícil e trabalhosa, o que pode indicar falta de leituras sobre essa tendência do ensino da Matemática. Contudo se acredita que tal questão cumpriu o papel de estimular respostas.

Segundo os pesquisados, a utilização da HM no PEA da Matemática faz com que as aulas transcorram de maneira mais tranqüila, permitindo mais compreensão do conteúdo que está sendo estudado. Acreditam na importância do tema, que pode trazer contribuições para o PEA da Matemática. A maioria deles, 75%, diz buscar elementos da HM para ser utilizados em sala de aula, até mesmo os 33,3% que afirmaram não ter cursado a disciplina específica HM em seu curso de formação inicial.

Ainda segundo os professores, com o conhecimento histórico pode-se explicar para os alunos o trabalho que foi despendido trabalho no estudo de muitos tópicos. E também que tudo foi construído a partir da realidade das pessoas. Com isso, a partir do momento que se conhece a HM, as aulas ficam mais interessantes e com aprendizado de qualidade. Por isso busca motivação para o PEA da Matemática na própria História, que pode ser utilizada para ilustração de fatos, análise de erros dos alunos, elaboração de atividades, etc. Dos pesquisados, 25% afirmaram utilizar a HM na introdução de conteúdos, 29,2% para mostrar como surgiram, 12,5% como curiosidade e 33,3% de outras maneiras.

Também 50% das respostas indicaram que a HM constitui-se num instrumento unificador dos vários campos da Matemática. No entanto as ações tomadas como exemplo, como a do Professor P_{11} [“Digo para eles que sem Matemática não há vida (do amanhecer ao anoitecer) só vivermos em função de quantidades”] parece não poder estabelecer a pretendida unificação. Além desse tipo de utilização ser difícil, talvez a pergunta não estivesse clara o suficiente, para o respondente.

Percebeu-se também que a HM vem sendo empregada por 75% dos professores pesquisados como motivação para iniciar um assunto, geralmente utilizando textos trazidos nos livros didáticos e/ou paradidáticos e na internet. Afirmaram contar histórias de fatos ocorridos ou como ocorreu a construção desta ciência. Mas Baroni e Nobre (1999) consideram que a HM não deve ser usada apenas como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo: “sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional” (p. 132).

Os respondentes também afirmaram que a abordagem histórica pode justificar o surgimento da Matemática e que com isso os alunos se mostram mais interessados em aprender. Para eles, a HM representa um material de apoio, base imprescindível para lecionar. E também dizem que ajuda muito na conscientização dos alunos de que a Matemática não é uma coisa pronta.

O maior ganho dessa forma de utilizar a HM na Educação Matemática é a possibilidade de discutir-se crenças, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu. Isso pode favorecer uma elaboração mental dos alunos similar à que historicamente ocorreu na abstração dos conceitos matemáticos, gerando aprendizagem rica em significados. Dos pesquisados a metade afirmou acreditar que a HM se constitui num instrumento promotor de aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática.

Outro aspecto citado por 54,2% dos professores é a HM como fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a ser incorporados nas aulas.

Um pouco citado pelos professores foi a HM como objetivo para o ensino (29,2%), assim como extrair dela métodos pedagogicamente adequados (33,3%).

Observou-se que, em geral, os professores utilizam os argumentos analisados por Miguel (1997), com algumas justificativas apresentados por esse autor. Para Silva (2001), esses argumentos são mesmo muito fortes para o ensino da Matemática.

Ainda há professores que, como ocorreu na pesquisa de Garcia (2005), apesar de achar importante o uso da HM em sala de aula, dizem não saber como utilizá-la, pois têm pouco conhecimento do assunto, mas gostariam de fazê-lo. Nesse contexto, valem as sugestões de Silva (2001): utilizar informações contidas em periódicos, jornais, enciclopédias, dicionários biográficos e alguns endereços na Internet sobre HM.

Recomenda-se que os cursos de formação inicial dêem mais atenção ao tema e que na formação continuada se realizem oficinas oferecendo opções de utilização da HM no PEA da Matemática.

Referências bibliográficas

Baroni, R. L. S. E Nobre, S. (1999). A Pesquisa em História da Matemática e Suas Relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, pp. 129-136.

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'ambrosio, U. (1999). A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, pp. 97-115.

________, (1996). História da Matemática e Educação. In: *Cadernos CEDES 40*. *História e Educação Matemática*. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, pp.7-17.

Garcia, F. T. (2005). *A participação da História da Matemática no Ensino da Matemática: A visão dos professores das séries finais do Ensino Fundamental de Itabirito*. Monografia (Especialização) Curso de Especialização em Educação Matemática, Ufop, Ouro Preto.

Mendes, I. A. (2001). Construtivismo e História da Matemática: uma aliança possível. In: IV *Seminário Nacional de História da Matemática.* Natal, RN. Anais. Rio Claro, SP: Editora da SBHMat, 228-234.

________, (2003). História da matemática: um enfoque transdisciplinar. In: XI CIAEM. FURB. Blumenau: FURB, CD-CARD.

Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké,* 8, 73-103.

Milies, C. Polcino.(2007). *História da Matemática***.** Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/>. Acesso em: 26 fev. 2007.

Nobre, S. (1996). Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. In: *Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus, pp.29-35.

Silva, C. M. S. (2001). A História da Matemática e os cursos de formação de professores. In: Helena Noronha Cury (org.). *Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada.* Porto Alegre: EDIPUCRS, pp. 129-165.

Silva, C. M. (2007). *Concepções de Professores de Matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem*. Monografia (Graduação) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.

Struik, D. J. (1985). Por Que Estudar História da Matemática? Trad. De Célia Regina A. Machado e Ubiratan D'Ambrosio. In: *História da técnica e da tecnologia: textos básicos.* Ruy Gama (org.). São Paulo: T. A. Queiroz e EDUSP, pp. 191-215.

POSTURAS DE PROFESORES UNIVERSITARIOS DE CÁLCULO ANTE UNA PROPUESTA DE CAPACITACIÓN EN DIDÁCTICA

Luis Manuel Cabrera Chim
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
lmcabrera@cinvestav.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En la actualidad existen diversos esfuerzos para proveer al profesor universitario una adecuada capacitación, buscando actualizar y mejorar su desempeño profesional. Capacitación que no sólo incluye aspectos disciplinares, sino también aspectos didácticos y pedagógicos. Sin embargo, tales esfuerzos parecen no lograr incidir en su práctica docente. Este fenómeno plantea la necesidad de observar las distintas posturas que los profesores toman ante los temas que se abordan en los cursos de formación en didáctica. Consideramos que los resultados aquí presentados pueden constituir un adecuado marco de referencia para la elaboración de cursos de formación dirigidos a profesores universitarios del área de ciencias exactas.*
Palabras clave: profesores universitarios, formación didáctica, práctica docente

Introducción

A continuación presentamos los resultados del desarrollo experimental de una propuesta de un curso-taller de capacitación en didáctica, en el área de cálculo, para profesores universitarios. Se buscó determinar el grado de aceptación y el tipo de actitud de los participantes ante este tipo de cursos-talleres y los temas abordados. Cabe hacer mención que el presente documento se desprende del trabajo de tesis de licenciatura denominado “Una propuesta de formación didáctica para profesores que imparten la asignatura de cálculo en el nivel superior” (Trabajo financiado por CONACYT[1]), que a su vez formó parte del proyecto: “Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: el caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán”.

Antecedentes y marco de referencia

Es innegable la existencia de problemas en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, y en general en toda la matemática. Problemas que derivan, por ejemplo, de la complejidad inherente de los propios conceptos y de la evolución que estos han sufrido a lo largo de la historia. Como resultado

[1] Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México

de dicha evolución, ideas fundamentales que dieron origen a dichos conceptos han sido relegados a un segundo plano, privilegiándose su estudio desde un enfoque formal.

Lo anterior permite vislumbrar lo acertado de las voces que señalan que no basta con dominar una disciplina para llevar a cabo una adecuada enseñanza de ella. Sin embargo, ésta afirmación no parece tener eco en el nivel superior de la educación (nivel universitario). Se alega que los alumnos se encuentran en un nivel de madurez tal, que aún sin profesores, están en condiciones de lograr aprendizajes (Campanario, 2003). De este modo, se tienen condiciones adversas para lograr que los profesores universitarios reconozcan la necesidad de la capacitación en didáctica.

La Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, por cierto, única universidad pública en todo el estado, no escapa de la situación anterior. El perfil del profesorado se caracteriza por una formación matemática amplia, pero con muy pocos estudios pedagógicos y didácticos (García, 2006; García Torres, 2006). El profesor se caracteriza por ser la "autoridad didáctica", el responsable de guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos temáticos, y por un uso excesivo de la técnica expositiva para lograr esto último (García, 2006; García Torres, 2006).

A este respecto, Vivas, et al. (2003) mencionan que las actividades de los profesores no pueden seguir siendo intuitivas, espontáneas, aisladas, tradicionales o centradas en el aula. Su saber profesional debe abarcar conocimientos actualizados de la disciplina que enseña, de la didáctica universitaria y de la didáctica especial correspondiente. En nuestro caso la didáctica de la matemática.

En lo respecta a la didáctica de la matemática, Brousseau (1990) postula que cada conocimiento o saber debe poder ser determinado por una situación. En la cual el conocimiento debe surgir como un elemento que permite la realización o mantenimiento de la situación correspondiente. Bajo esta premisa, muchos profesores esperan que la didáctica les proporcione lo esencial de las *técnicas específicas de las nociones que hay que enseñar*, que sean compatibles con sus concepciones educativas; *técnicas locales y comunes*, que le proporcionen métodos listos para usar; así como *técnicas especiales* para guiar a alumnos con dificultades especiales.

Otros aspectos que los profesores esperan de la didáctica (Brousseau, 1990), es el conocimiento sobre su trabajo, es decir, de la enseñanza: *los comportamientos de los alumnos en las condiciones* *específicas de enseñanza; las condiciones que hay que crear en las situaciones a proponer y las que hay que mantener en la gestión de la enseñanza; así como los fenómenos didácticos que enfrentan los participantes*.

Sin embargo, poseer un catálogo de técnicas o situaciones de enseñanza no proporciona capacitación para la creación de verdaderas situaciones de aprendizaje. Se necesita que el profesor se interese por el estudio de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje ligadas al contenido matemático a enseñar, así como también por el estudio de las condiciones de creación, difusión y adquisición provocada de tal contenido. Siendo los resultados de las investigaciones científicas sobre tales temas, un medio para lograr esto.

Por otra parte, además de los puntos señalados antes, Artigue (1995) señala algunas restricciones y problemas que debe enfrentar la formación en didáctica:

1. Los profesores novatos, a los que por lo general se dirigen estos cursos, sólo conocen el ambiente escolar a través de su experiencia como estudiantes. Ellos esperan, por tanto, una ayuda inmediata para mejorar su desempeño docente.
2. Los profesores en práctica, difícilmente reconocen el aporte de los saberes que de ella derivan. La didáctica se vive frecuentemente, en un principio, como una visión que desestabiliza, pero que no ofrecen una contribución inmediata a las problemáticas que enfrentan.
3. Las estrategias que se promueven exigen frecuentemente mucho conocimiento y experiencia por parte del profesor, así como también que éste sea capaz de anticipar y de desarrollar sistemas de recolección de información, de interpretación y de toma de decisiones.

Aspectos metodológicos

En primer lugar, se realizó una revisión bibliográfica. Se analizaron propuestas de formación de profesores, así como resultados provenientes de la didáctica de la matemática. Se buscó identificar elementos que los profesores de cálculo pudieran emplear en su tarea diaria y que permitieran incidir en su práctica. Esto último teniendo en cuenta los reportes de García (2006) y García-Torres (2006).

Posteriormente, se procedió a la conformación de la propuesta experimental denominada "Curso-Taller de formación en didáctica de las matemáticas". Ésta constó de cuatro sesiones de hora y media cada una, las cuales se llevaron a cabo una vez por semana.

El diseño del curso-taller pretendió introducir a los profesores al ambiente de la didáctica del cálculo. Para ello el curso se dividió en dos partes: una teórica y una práctica. En la primera parte se discutieron algunos aspectos teóricos; aquí se pretendió generar desestabilización en la práctica docente de los profesores. En parte práctica se enfrentó al profesor con actividades que le permitieran vislumbrar los aportes de los conocimientos teóricos. Dentro de esta parte, se incluyó la puesta en escena de una actividad didáctica elaborada para tal propósito y la elaboración de un diseño didáctico por parte de los profesores. Algunos temas abordados en el curso fueron: pensamiento y lenguaje variacional, la visualización, la dualidad de los conceptos matemáticos y la noción de tranferencia.

Los profesores participantes en el curso-taller provenían de la Facultad de Matemáticas y la Faculta de Ingeniería Química, ambas escuelas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Cabe mencionar que todos los profesores eran egresados de la Facultad de Matemáticas.

El registro de información se llevó a cabo mediante la grabación en audio de los diálogos y las discusiones generadas. Se analizaron también las producciones de los profesores. Para el análisis de los resultados, se contempló el supuesto de que todo curso de formación puede impactar en diferentes niveles: en el discurso, en la acción o en ambas.

Resultados y discusión

Cuando los profesores asisten a cursos de formación, ellos no dejan atrás su experiencia, ya sea ésta como profesional o como estudiante. Esa experiencia transformada en creencias y concepciones resulta un punto a vencer en los cursos de formación.

Extracto 1, sesión 1.

…díganme si no es verdad {…}, aprender es un problema doloroso ( ) y eso nadie lo puede evitar, eso creo que debemos quitárnoslo de la mente los que en algún momento vamos a estudiar cálculo, ( ) eso hay que decírselo al estudiante, tienen que entenderlo.

Extracto 2, sesión 2.

Si muestras una cosa gráfica, por ejemplo, a la gente como decía […], aquella gente analítica no lo va a entender de manera gráfica, conviene más que lo pongas de forma analítica, y estas haciendo a un lado a los geométrico, y por el contrario si atiendes al analítico haces un lado al geométrico.

Un aspecto que preocupa a los profesores es la reacción de los alumnos ante un cambio en la forma de desarrollar las clases.

Extracto 3, sesión 1.

Sin embargo, el alumno, en un momento dado, ante prácticas diferentes… como que se ponen nerviosos ¿no?, empiezan a decir "haber, haber". Por ejemplo la discusión en matemáticas a tres o a cuatro estudiantes no les gusta, yo por ejemplo soy uno de ellos, bueno quizás una de las razones por las que estudié matemáticas es por que ahí no había discusiones […] ahí era lo que tu pudieras demostrar eso es lo que es, entonces era la única carga eso.

Por otra parte, los profesores consideran, según su experiencia, que no es factible dejar que el alumno se haga cargo de su propio aprendizaje. Esta idea también proviene de la preocupación del profesor por *formalizar* los conocimientos bajo estudio. Con lo cual busca asegurarse de que se han adquirido los aprendizajes con el nivel y profundidad deseada.

Extracto 4, sesión 1.

… mucho depende (de cómo) tú entiendes las cosas, aunque yo me pare de cabeza si mi alumno no hace de su parte, no porque sea "burro", porque no se le pega la gana, ósea de mi parte no hay mucho que yo pueda hacer y me he parado de cabeza casi, casi ¿no?, […] no tocan su libreta, y les da igual porque así están acostumbrados, porque vienen con esa idea me van a dar todo , un día antes estudian, copian la tarea o sea, y esa mentalidad de la prepa se quita con trabajo.

Extracto 5, sesión 3.

P1 Muchas veces creemos que para que lo aprendan y lo entiendan se lo tenemos que explicar nosotros los profesores…

P2 Más que nada para que sepamos que si lo aprendieron.

Sin embargo, es también su experiencia docente la que lleva a algunos profesores a vislumbrar la necesidad de modificar sus prácticas “tradicionales”, y ha intentar realizar algunos cambios a la misma.

Extracto 6, sesión 1.

Cuando vimos la derivada por ejemplo de un campo escalar, les dije (a los alumnos), vamos a construir, vamos a inventarnos la definición, y me empezaron a dar unas y pues no puse nada (en la pizarra) pues por que no funciona, y ellos mismos me iban diciendo no funciona por tal cosa… Los nerviosos (alumnos que se ponen nerviosos ante un cambio en la forma de desarrollo de la clase), que pasa con los nerviosos, ya estaban artos, decían -- “ya danos la definición” – “ya nos cansamos de buscarla, ya dánosla”…

Extracto 7, sesión 1.

otra manera, lo visual, hay muchos conceptos que se entienden muy bien con un dibujo, con un movimiento.

Extracto 8, sesión 4.

Sabes que es bueno, un tema abordarlo desde diferentes enfoques, el de límite por ejemplo, una tabla sirve para ver lo que pasa en el límite, incluso en varias variables…

Sin embargo, el profesor no es reflexivo sobre su trabajo. Esto dificulta que las acciones anteriores pudieran realmente tener un impacto positivo en su práctica docente.

Extracto 9, sesión 1.

¿Quién va ha determinar si estoy enseñando bien o no? O sea, es una pregunta fundamental, ¿Quién lo va a determinar?

Si bien, muchos de los profesores participantes en el taller consideran como necesarios los cursos de capacitación didáctica, ellos consideran que los cursos hasta ahora tomados no han cumplido con sus expectativas.

Extracto 10, sesión 4.

Una de mis principales quejas (en un curso de docencia tomado con anterioridad) era que no había nada en matemáticas, (y ante esa queja le respondían) – Ok. No hay nada, entonces que lo hagan

> ustedes". -- cómo que háganlo -- digo – Se supone que vine a que me digas que hacer ¿no?, o que me des un libro nuevo donde diga que voy a hacer.

Extracto 11, sesión 4.

> En otros cursos de docencia hablan de que nuestro máximo logro debe ser un plan de clases y al menos alguna vez yo lo he hecho, por que en la facultad de ingeniería química he trabajado con […] y el tiene hecho ahí una historia de sus planes de clase y a veces le pregunto – oye ¿y te sirve de algo?— no, pero me lo piden – yo a eso del plan de clases en matemáticas no le veo mucho sentido.

Aquí podemos observar que lo que los profesores esperan son métodos y técnicas que puedan aplicar como "recetas".

Comentarios como los anteriores nos permiten vislumbrar que la dualidad de los objetos matemáticos (proceso-objeto), la visualización, el uso de la tecnología y el uso de diversos sistemas de representación, son temáticas que pueden incidir en la práctica profesional de los profesores. Ello basándonos en el hecho de que las ideas subyacentes a tales temas habían sido ya bosquejadas por los profesores, considerándose ellas importantes y de ayuda real para la enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, también pudimos darnos cuenta que la teoría de las situaciones didácticas, constituye un medio adecuado para incidir sobre las prácticas docentes de los profesores, pues no contraviene fuertemente sus concepciones respecto a la enseñanza y aprendizaje, al contrario parecen complementarse.

Extracto 12, sesión 3.

> Para mi aprender es algo duro, es un proceso nada lúdico y muchas veces hasta doloroso, […] pero esto (las situaciones didácticas) me parece factible.

Extracto 13, sesión 3.

> Yo creo que estos métodos favorecen costumbres, de que tú intentes por ti mismo buscar respuestas, y pues ya no es que simplemente te presenten las cosas y te las dan, yo siento que es mejor proceso mental (ésto), que tú intentar entender eso que te están diciendo, del modo que te lo están presentando.

Extracto 14, sesión 3.

P1 Tendríamos que reconocer el carácter experimental de la matemática. De repente como que no estamos muy acostumbrados a reconocer ese carácter experimental de la matemática ¿no?

P2 ¿Quiénes no lo consideramos? ¿los profesores?

P1 Y en general los matemáticos, ¿no?, como que no vemos a las matemáticas con el carácter experimental.

P3 Como sería en biología, química, economía…

P1 Por ejemplo como que la matemática no la vemos así, la vemos más como axiomática, ya esta hecha, pero como que hasta hace poco tiempo se pensó en ver ese carácter experimental de la matemática ¿no? {…}, deberíamos recuperarlo y eso embonaría muy bien con la acción, formulación y validación, pero de repente no lo hemos reconocido así.

Entonces dentro de los cursos de formación es necesario convencer al profesor de la capacidad del alumno de generar aprendizajes por cuenta propia.

Sin embargo, para algunos profesores la dificultad del diseño de las situaciones es un problema para aceptar el cambio en la forma de enseñar. Ellos esperan que con favorecer, por ella misma, la forma de trabajo inherente a la teoría, se tengan mejores resultados.

Extracto 15, sesión 3.

Si fuera el mismo resultado […], pero si el nuevo (la propuesta de la teoría de las situaciones didácticas) me lleva más tiempo y llegó al mismo resultado, entonces para que cambiamos, sino está siendo mejor…

Extracto 16, sesión 4.

El método debe garantizar que el alumno aprenda … debemos entonces ser expertos en ese tipo de cosas para que funcionen…

Para finalizar mencionaré algunos comentarios que resumen la perspectiva de la mayoría de los profesores y pueden servir para la organización de otros cursos.

Extracto 17, sesión 3.

> …lo que me gusto de este curso es que primero no te paraste ahí a hablar y hablar y nosotros te oímos, sino que se armó la discusión por ratos y dimos opiniones y creo que nadie se quedo callado.

Extracto 18, sesión 4.

> … Estas es la primera vez (en todos los cursos que he tomado) en la que hay la oportunidad de discutir cosas de matemáticas y de nivel licenciatura, y las cosas que hemos hecho acá son de las cosas que yo puedo decir que es útil.

A modo de conclusión

En el taller pudimos observar que los profesores, como una exigencia común, solicitan el establecimiento y comunicación de técnicas que puedan aplicar en sus clases. Lo cual se deriva de factores tales como su concepción sobre la didáctica y la necesidad de satisfacer exigencias no cubiertas por otros cursos. Este último hecho generó que los profesores tuvieran desconfianza de la utilidad de la formación en didáctica. Sin embargo, el haber abordado temas centrados en la propia matemática, y problemáticas inherentes a la disciplina, hizo que los profesores cambiaran parte de esa postura.

También pudimos observar que el esquema de trabajo presente en la teoría de las situaciones didácticas parece no contravenir fuertemente las creencias y concepciones de los profesores. Al parecer, fue ésta la razón de que los profesores la consideraran como una adecuada forma de trabajo. Pues, como es natural, se posee un mayor rechazo a aquello que va en contra de la experiencia, aún cuando se es conciente de la necesidad de un cambio.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la aplicación en el aula de tal teoría se producirá de forma inexperta al inicio. Y serán los resultados de tal aplicación (como la reacción de los alumnos y los aprendizajes logrados) los que pesarán para que el profesor decida seguir con la transformación de su práctica o regrese a su método “tradicional exitoso”. Por lo cual, con base en la experiencia de esta propuesta de capacitación, se sugiere que las acciones destinadas a la formación de los profesores se organicen en etapas más accesibles y congruentes con sus concepciones, buscando que etapas y concepciones evolucionen a la par. Permitiendo que los profesores puedan poner en práctica los contenidos abordados y madurar tales ideas, para luego complementar dicha formación. Resulta importante agregar que el abordar y profundizar, en la medida de lo posible, temáticas que el profesor ha vislumbrado como adecuadas para la enseñanza o para el aprendizaje, resulta importante para lograr incidir sobre las creencias y concepciones de los docentes.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995a). El lugar de la didáctica de las matemáticas en la formación de los profesores. En Artigue, M. (Ed). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo*. (7 - 23) Bogotá, Colombia. Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3), 259-267

Cabrera, L. (2006). *"Una propuesta de formación didáctica para profesores que imparten la asignatura de cálculo en el nivel superior"* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

Campanario, M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 21 (2), 319-328.

García-Torres, E. (2006). *Una caracterización de la cultura didáctica al interior del aula de cálculo. Factor reflexivo del quehacer docente en los estilos de aprendizaje.* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

García, E. (2006*). Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elementos de análisis en la reprobación y rezago de cálculo.* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

Vivas, M. et. al. (2003). Propuesta para la formación del profesorado universitario. *Revista Acción pedagógica,* 12 (2), 60-66.

EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA. UNA MIRADA A LA PRÁCTICA DEL DOCENTE

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Carlos Bustamante Q, Mario Berrio A., Anibal Osorio C., Diego Ocampo B.
Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Colombia
Universidad de Antioquia
javo@une.net.co
Campo de investigación: Modelación matemática, formación de profesores Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan los resultados parciales de una investigación que pretende dar cuenta del papel que cumple el proceso de modelación matemática en las aulas escolares de una subregión colombiana. En particular, se muestran las características de una de las tipologías de profesores, a saber, aquellos docentes en los cuales existen divergencias entre lo que afirman que debe ser la educación en matemáticas y lo que verdaderamente ejecutan en las aulas de clase. Dicha tipología ha sido detectada mediante la interpretación de las observaciones de las sesiones de clase y algunos cuestionarios y entrevistas. Finalmente se establecen algunas implicaciones sobre lo que significa conocimiento del profesor de matemáticas en el campo de la modelación matemática.*

Palabras clave: modelación matemática, conocimiento del profesor, sentido de realidad

Introducción

El estudio de los problemas del *mundo real* ha sido fuente de inspiración para que muchos matemáticos construyan nuevas teorías y modelos que expliquen y solucionen problemas de un fragmento de esa realidad. Adicionalmente, algunos investigadores en Educación Matemática destinan parte de sus esfuerzos hacia el estudio de dicha realidad, sus vínculos con el conocimiento matemático y su aprovechamiento como recurso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Como fruto de estos esfuerzos, ha llegado a consolidarse un campo de investigación denominado "*Modelling and Applications in Mathematics Education*" (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007). Algunos investigadores sugieren que parte de los resultados en este campo de investigación formen parte del llamado *conocimiento del profesor de matemáticas* (Doerr, 2007; Doerr & Lesh, 2003; Schorr & Lesh, 2003), en parte, por las múltiples ventajas que este proceso representa en la construcción de conceptos matemáticos y porque son los profesores, uno de los agentes que influyen de forma directa en el aprendizaje de los conceptos matemáticos en las aulas escolares.

La inclusión de la modelación como un proceso en la clase de matemáticas en Colombia se propone desde 1998 con la presentación, por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN), del documento de los Lineamientos Curriculares en donde además se sugiere el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la implementación de otros cuatro procesos, a saber: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN,1998, p. 18). De manera complementaria, el MEN (2006) establece que la educación matemática en Colombia debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos. En este sentido, la modelación debe ser uno de los procesos que al desarrollarse en las aulas de clase permite alcanzar este ideal de educación. Para profundizar en la noción de *modelación* el MEN (2006) parte del concepto de modelo, el cual entiende en los siguientes términos:

> *Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo.* (p.52)

Con base en esta idea, el MEN equipara el concepto de modelación con el concepto de matematización de Hans Freudenthal estableciendo que "*La matematización o modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente*" MEN (2006, p. 53)**.** Puede observarse así una estrecha relación entre los procesos de modelación y resolución de problemas sin establecer los límites de cada uno de estos éstos. En esta investigación se asumen la modelación y la resolución de problemas como dos procesos diferentes, pero en algunos casos, con características similares. Así, la resolución de problemas incorpora el uso de diferentes contextos, por ejemplo: intra-matemáticos, artificiales, de otras ciencias, y de la *vida real* etc. Cuando la solución de problemas aborda los dos últimos contextos con el ánimo de construir un modelo matemático para solucionar dichos problemas, tiene un significado análogo al de la modelación. Por tal razón entendemos la modelación como una actividad que va mas allá de la generalizada idea de construir modelos, para ubicarse en la noción de *práctica implicada en la solución de problemas* *reales mediante la construcción, (re)elaboración e interpretación de modelos*. En consecuencia, cuando en este documento se hable de *problemas*, se asumirá como *problemas en contextos reales de modelación*. Por *contextos reales de modelación* se entienden aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, y a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución. Cabe anotar que al interior de las aulas escolares, en ocasiones se acostumbra usar más el término *resolución de problemas* del mundo real, que modelación.

Lo que dicen los profesores y lo que verdaderamente hacen sobre la modelación en las aulas escolares de matemáticas

En el desarrollo de este trabajo se asume como método de investigación a los estudios de caso. Para tal efecto se entiende como estudio de caso al "*método empleado para estudiar a un individuo o una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible*" Salkind (1999, p. 211).

En este documento se presentan las características de una tipología de profesores, la cual se estableció a partir de confrontación entre las observaciones durante tres meses de las sesiones clase, las bitácoras de dichas observaciones, un cuestionario y una entrevista. Los *casos* reportados corresponden a dos profesores con más de 10 años de experiencia docente en los niveles de Educación Básica secundaria (11 a 15 años). En dichos profesores se observa un desfase entre lo que *expresan* sobre la importancia de las matemáticas y algunas formas de enseñanza, y lo que *su práctica educativa refleja* al interior del aula de clase. En la Tabla 1 se presentan algunas de las afirmaciones que los *dos casos* establecieron frente algunos tópicos de las matemáticas escolares, y las respectivas manifestaciones al interior del aula de clase.

TÓPICO	AFIRMACIONES	ACCIONES EN EL AULA
El papel de las matemáticas en el currículo escolar.	*"Las matemáticas deben ofrecer al estudiante el desarrollo de habilidades para resolver problemas e interpretar el mundo"* Profesor 1 "[Las matemáticas] *ayudan al*	Los temas son presentados siguiendo la secuencia*: Introducción →Definición del concepto →Explicación→ Ejemplos →Ejercicios y/o Aplicaciones*.

	desarrollo del pensamiento". Profesor 2	
El papel de los "problemas reales" en la enseñanza de las matemáticas	*"Son muy importantes porque permiten ver las aplicaciones de la matemática*" Profesor 1. *Se deben explicar algunos ejercicios de aplicación a problemas reales de otras ciencias*. Profesor 2	Se presentan una colección de ejercicios recopilados de varios libros de texto. Dichos ejercicios, favorecen la ejercitación algorítmica y algunos pocos se presentan en forma de problemas en contextos artificiales. Profesor 1 Los ejercicios prestados son tomados de algunos libros de texto, sin embargo en este caso, algunos "problemas de palabras" incluían sugerencias por parte del maestro y preguntas que les permitieran orientar la atención del estudiante en su resolución. Profesor 2.
La modelación como un *proceso*.	Se deben resolver problemas de traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. Profesor 1y2 *"Hay que enseñarle al estudiante a que resuelva problemas de la vida real"* Profesor 1 "*Se les debe ayudar* [a los estudiantes] *a identificar las variables y las relaciones para crear la fórmula*". Profesor 2	Los ejercicios y "problemas" eran presentados a los estudiantes sin ninguna sugerencia adicional, salvo indicaciones verbales como "lean bien…" "debe entender qué le están preguntando…" Profesor 1. Los problemas presentados al estudiante, aunque estaban en contextos artificiales, tenían algunas indicaciones por parte del profesor, por ejemplo: entienda bien el problema, saque las preguntas, miren bien las cantidades que intervienen, analice si son constantes o no, establezca relaciones entre las cantidades, escriba el problema en símbolos. Profesor 2.

Tabla 1. Algunas afirmaciones y sus manifestaciones en el aula de una tipología de profesor.

Ambos profesores han sido parte de programas de formación continuada de profesores, en los cuales han abordado temas relativos a la implementación de los Lineamientos y Estándares Curriculares para el área de matemáticas. (MEN, 1998, 2003)

Para estos profesores las matemáticas deben ocupar un lugar imprescindible en los currículos escolares, en parte, por los aportes que tiene en la formación de un pensamiento lógico y crítico. Sin embargo, consideran que dichos aportes se alcanzan promoviendo "*la actividad de transmisión*" de las matemáticas y fortaleciendo la ejercitación procedimental. En la introducción a los temas, el profesor 1 generalmente hace una breve síntesis de los contenidos anteriores que le permitan articularse con el nuevo tema. *"En la clase pasada vimos que….eso nos permite ver que…"*. De otro modo, el profesor 2 utiliza actividades como: adivinanzas, juegos de estrategias, reflexiones y algunos "problemas de palabras" que en la mayoría de los casos traducían relaciones literalmente del lenguaje verbal al matemático (*el doble de un número→2x).* Si bien estas actividades contribuían a que los estudiantes se dispusieran para el nuevo concepto, no siempre eran situaciones en las cuales se podrían observar cimientos para el concepto a abordar. En el siguiente diálogo, se observan algunos argumentos presentados por uno de los profesores frente al uso de los problemas en la clase de matemáticas.

Investigador	:	*¿Por qué los problemas se dejan para lo último como ejercicios de aplicación?*
Profesor 2	:	*Pues porque los estudiantes deben saber que las matemáticas son más que fórmulas y que se pueden aplicar a problemas.*
Investigador	:	*¿Pero los pueden trabajar* [los problemas] *antes de ver* [estudiar] *los temas?*
Profesor 2	:	*Y ¿cómo las van ver si no las conocen? necesitan saber las matemáticas para poderlas aplicar.*
Investigador	:	*O sea que entonces ¿no se podrían utilizar algunos problemas de la vida real para poder introducir los conceptos?*
Profesor 2	:	*Sí, pero tienen que ser sencillitos, porque los estudiantes todavía no saben de las matemáticas que se van a aplicar. Además, eso gastaría mucho tiempo.*

Es claro entonces que para este profesor, las matemáticas tienen vínculos con los problemas del "mundo real" pero sobre todo desde las *aplicaciones* y poco desde un verdadero ejercicio de modelación. Además el poco uso de los problemas de modelación para la introducción de los conceptos matemáticos se justifica en el "poco conocimiento del estudiante" frente al tema; de esta forma, puede observarse la concepción *"las matemáticas deben conocerse primero para* *poder aplicarse*". Por otro lado, los "problemas del mundo real" aparecen vinculados a contextos ideales y simplificados, en los cuales los estudiantes no son sometidos a un verdadero proceso de experimentación, simplificación y abstracción tal y como son descritos en Bassanezi (2002)

Desde el punto de vista de la práctica dentro del aula de clase, se observa cierta diferencia entre el profesor 1 y el profesor 2. Mientras el primero utiliza una práctica con métodos expositivos, y actividades de ejercitación algorítmica apegados a los libros de texto, el segundo profesor intenta reconstruir algunos ejercicios y problemas con el ánimo de ayudar al estudiante a establecer un método para resolverlos.

En el caso del profesor 1, existe un fuerte abismo entre lo que *dice* y *hace* en el salón de clase, lo cual refleja que algunos elementos teóricos presentados en los textos (entre ellos los Lineamientos y Estándares del MEN) pueden ser replicados verbalmente sin que ello implique una interiorización y una transformación de la práctica del profesor al interior del aula. En el segundo caso, el profesor 2 intenta insertar en su práctica algunos cambios significativos que promuevan el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, sin embargo, para la modelación, se hace necesario fomentar una evolución de algunas de sus concepciones frente a los problemas del *mundo real* y a su *papel como herramienta* en la construcción de conocimiento matemático en el aula de clase (Villa, 2007; Bassanezi, 2002). En consecuencia, es importante que los maestros desarrollen la capacidad de identificar en el entorno sociocultural, verdaderos problemas de modelación, que se conviertan en un motivo para favorecer la comprensión conceptual de los conceptos matemáticos escolares.

Algunas implicaciones teóricas

Esta tipología de profesores sugiere elementos para la reflexión, en especial para los programas de educación inicial y continuada de profesores. En la Fig. 1 se representan algunos elementos que Villa, et al (2009) considera deben hacer parte del *conocimiento del profesor de matemáticas frente a la modelación*. Dicho conocimiento está mediado (y hacen parte de él) por: *el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y las creencias y concepciones* frente a las matemáticas escolares. El componente dinámico de este conocimiento, se establece mediante la conjunción de los elementos *reflexión* y *sentido de realidad.* En Villa et al. (2009), la reflexión es entendida como una forma que tiene el profesor para observar y evaluar su propia práctica, los comportamientos y las formas de aprendizaje de los estudiantes; de otro modo, el ***"Sentido de realidad"*** se entiende como *la sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, que a su vez involucra la intuición y la capacidad para identificar las situaciones del contexto sociocultural y la capacidad para detectar oportunidades frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes*. El *sentido de realidad*, más que un componente racional del conocimiento del profesor, es una componente subjetiva que metafóricamente actúa como una lupa con la cual el profesor observa la realidad objetiva y le posibilita la (re)significación de dicha realidad a partir de un proceso de modelación matemática.

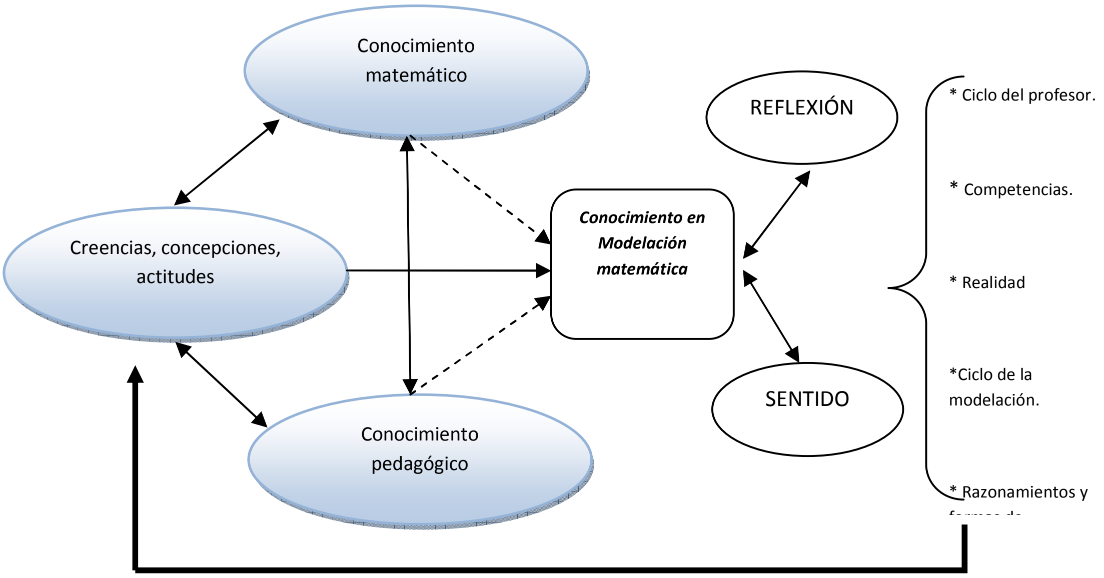


Fig. 1. Representación diagramática del conocimiento del profesor frente a la modelación matemática escolar

La conjunción de al menos estos dos elementos, *reflexión y sentido de realidad*, posibilita una visión más crítica de otros elementos implicados en el proceso de la modelación al interior de las aulas escolares, a saber: el desarrollo de competencias (Greer & Verschaffel, 2007), el conocimiento de las formas como los estudiantes aprenden (Schorr & Lesh, 2003), ciclo de la modelación por parte del profesor (Villa, 2007), entre otros.

Este conjunto de elementos y relaciones que hacen parte del conocimiento del profesor frente a la modelación matemática, conforman un sistema dinámico que permite transformar la *realidad* *subjetiva* del maestro, y por tanto, movilizar sus creencias, concepciones y actitudes frente a las matemáticas escolares.

Conclusión

Queda en evidencia que algunos programas de formación de profesores que centran sus esfuerzos en la presentación de elementos teóricos, lo cual puede promover una apropiación retórica de dichos elementos, sin que necesariamente trasciendan a la transformación de la práctica del profesor en las aulas escolares. Un programa de formación de docentes debe tener presente las concepciones y conocimiento de los mismos, y contar con diversas estrategias que potencien una *movilización* hacia el cambio de aquellas concepciones que lo requieran. Por último una propuesta de formación de profesores frente a temas como el de la modelación, debe incluir procesos de reflexión y propender por el desarrollo del *"sentido"* hacia la modelación, de tal manera que se aminore *la creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las prácticas del aula de matemáticas* (Agudelo-Valderrama C. , 2006).

Agradecimientos

A la Dirección de Regionalización y al Comité para el Desarrollo de la Investigación-CODI de la Universidad de Antioquia, por la financiación de este proyecto mediante acta N. 559 de febrero de 2008. A la Red colombiana de modelación en Educación Matemática, al grupo FORDAD y al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación-Colciencias por el apoyo a este trabajo mediante la beca "Créditos Condonables" 2007.

Referencias bibliográficas

Agudelo-Valderrama, C. (2006). The growing gap between colombian education policy, official claims and classroom realities: Insights from mathematics teachers' conceptions of beginning algebra and its teaching purpose. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4(3)*, 513-544.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study.* New York: Springer.

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). New York: Springer.

Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In ,. R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-139). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies-overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study.* (pp. 219-224). New York: Springer.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curricularres: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Curriculares de matemáticas.* Bogotá: Magisterio

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

Salkind, N. (1999). *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

Schorr, R. Y., & Lesh, R. (2003). A modeling approach for providing teacher development. In R. Lesh, & H. M. Doerr, *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas* , 51-81.

Villa, J. A., Berrio, M., Bustamante, C., Ocampo, D., & Osorio, A. (2009). *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares del suroeste antioqueño.* Informe de Investigación no publicado, Universidad de Antioquia, Medellín.

LA EVALUACIÓN FORMATIVA EN LA FORMACIÓN DE FORMADORES

Liliana Milevicich, Alejandro Lois

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar

Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En general se ha asociado más la evaluación con la medición de los aprendizajes y de los logros de los mismos, que con un proceso de reflexión y de toma de conciencia de las dificultades de adquisición de conceptos, de comprensión de obstáculos cognitivos o epistemológicos que impiden a un sujeto apropiarse de un saber, en un campo de conocimiento determinado. En ese sentido, la caracterización del desempeño de los alumnos resulta fundamental a la hora de diseñar cualquier acción docente futura. Enmarcados en esta problemática diseñamos, implementamos y evaluamos una propuesta, dirigida a la formación de formadores, con el doble propósito de poder vivenciar la evaluación como una componente sustancial y formativa del proceso de enseñanza aprendizaje, y reflexionar sobre la importancia (indisociable de los procesos de enseñar y aprender) y características distintivas (actividad interactiva de construcción y negociación de significados) de la evaluación.*

Palabras clave: evaluación formativa, autoevaluación, coevaluación, medición, calificación

Introducción

Consideramos la evaluación como un proceso inherente al enseñar y al aprender que está directamente ligado a favorecer u obstaculizar la relación del alumno con el conocimiento. Reconocer esta dimensión didáctica de la evaluación, "evaluar para enseñar" en los términos de Camilloni, significa reconocer este proceso como un acto de conocimiento que permite fundamentalmente interrogar y problematizar la marcha de la enseñanza en función de una adecuada articulación con los procesos de aprendizaje de los alumnos. (Camilloni et al, 2005). Es muy habitual asociar la evaluación, más, con la medición de los aprendizajes y de los logros de los mismos, que con un proceso de reflexión y de toma de conciencia de las dificultades de adquisición de conceptos, de comprensión de obstáculos cognitivos o epistemológicos que impiden a un sujeto apropiarse de un saber, en un campo de conocimiento determinado. En ese sentido, la caracterización del desempeño de los alumnos resulta fundamental a la hora de diseñar cualquier acción docente futura. En otras palabras: evaluamos para adecuar nuestros procedimientos y estrategias a las necesidades de nuestros alumnos (Litwin, 1997; Camilloni et. al, 2005).

Parafraseando a Litwin, es habitual que en las prácticas de enseñanza, la actitud evaluadora invierte el interés de conocer por el interés por aprobar en tanto se estudia para aprobar y no para aprender. Es el mismo profesor que, cuando enseña un tema central o importante de su campo, destaca su importancia diciendo que será evaluado y lentamente va estructurando toda la situación de enseñanza por la próxima situación de evaluación. (Litwin, 1997). Sin embargo, estos debates acerca de la centralidad como patología podrían modificarse si los docentes recuperaran el lugar de la evaluación como el lugar que genera información respecto de la calidad de su propuesta de enseñanza. Desde esta perspectiva, la evaluación debiera ser tema periférico para informar respecto de los aprendizajes de los estudiantes, pero central para que el docente pueda recapacitar respecto de su propuesta de enseñanza. Coincidimos con Litwin cuando sostiene que los alumnos acumulan a lo largo del sistema educativo variadas propuestas de reproducción de los conocimientos, en donde el almacenamiento de la información juega un lugar privilegiado (Litwin, 2008). Evaluar el almacenamiento de información en situaciones en donde el alumno fundamentalmente recuerda hechos y datos, ha sido una práctica constante en los diferentes niveles del sistema educativo. Desde una perspectiva cognitiva, planteamos actividades que cambien el lugar de la evaluación como reproducción de conocimientos por el de la evaluación como producción, pero a lo largo de diferentes momentos del proceso educativo y no como etapa final.

Uno de los principales problemas reside en la construcción de los criterios con que se evalúan las actividades. Estos facilitan los juicios y permiten el mejoramiento de las prácticas o producciones que nos hayamos propuesto. Para cada actividad es posible que, como docentes, nos planteemos cuáles son los criterios que nos permiten reconocer su concreción. Los criterios son recursos muy potentes para evaluar las producciones de los alumnos, pero son elaborados a partir de las experiencias y, por tanto, no son infalibles ni debieran cristalizarse. Son instrumentos que nos ayudan a reconocer el valor de las actividades (Ausubel, Novak y Hanesian, 1976).

En este contexto, consideramos valioso realizar una caracterización de este modo de evaluación a partir de tres preguntas orientadoras:

¿Cuáles son los aspectos de la evaluación formativa?

- Plantea una situación de sorpresa con el propósito de que el alumno no se prepare para ella.
- Implica exigencias de procesos reflexivos novedosos que nunca formaron parte de los procesos de enseñanza.Es parte de un proceso y no es, generalmente, la última etapa.La información proveniente de distintos procedimientos es el material a partir del cual se inicia, realmente, el proceso evaluativo, no la evaluación misma.
- No es, ni puede ser un apéndice de la enseñanza ni del aprendizaje; es parte de la enseñanza aprendizaje. En la medida en que un sujeto aprende, simultáneamente evalúa, discrimina, valora, critica, opina, razona, fundamenta, decide, enjuicia, opta entre lo que considera que tiene un valor en sí y aquello que carece de él. Esta actitud evaluadora es parte del proceso educativo.
- Integra la evaluación a las actividades pedagógicas, sin centrar sólo en el profesor dicha tarea.

¿Cuáles son las características de las actividades en un proceso de evaluación formativa?

Consideramos que éstas deben:

- permitir los reajustes necesarios y sucesivos en el desarrollo de un nuevo programa, manual o método de enseñanza,
- plantear problemas que requieran el desarrollo de conocimientos y habilidades,
- ser susceptibles de tratamientos diversos y distintos niveles de resolución,
- permitir su expresión a través de formas alternativas,
- exigir el manejo de información precisa y rigurosa,
- facilitar la apertura interpretativa,
- solicitar la consulta a distintas fuentes de información y requerir el ordenamiento y sistematización de los datos,
- permitir la elaboración de redes conceptuales,
- promover la auto evaluación y la co evaluación grupal,
- promover la evaluación de la tarea.

¿Cuáles son los medios que dispone el docente, para recoger información?

Las intervenciones de los alumnos en clase, las preguntas, la manifestación de múltiples actitudes, los trabajos escritos (individuales o grupales), los exámenes, las planillas de observación de clase (Milevicich y Lois, 2008), las planillas de seguimiento de las producciones de los alumnos (Milevicich, 2008).

Metodología

Diseñamos, implementamos y evaluamos una propuesta, dirigida a la formación de formadores enmarcada en una metodología de investigación-acción (Elliot, 1993). El propósito de la investigación fue que los futuros formadores lograran, por una parte, vivenciar la evaluación como una componente sustancial y formativa del proceso de enseñanza aprendizaje, dirigida a mejorarlo, y por la otra, reflexionar sobre la importancia (indisociable de los procesos de enseñar y aprender) y características distintivas (actividad interactiva de construcción y negociación de significados) de la evaluación.

Nuestra población estuvo formada por profesores de Matemática, estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, en la Facultad Regional General Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional, y la muestra fue constituida por un grupo de 21 profesores (19 mujeres y 2 varones, con edades comprendidas entre 24 y 52 años) pertenecientes a tal población, al inicio el curso de la materia Análisis Real. En su mayoría, dictan clases en el nivel medio, a alumnos entre 13 y 18 años, en escuelas de la provincia de Buenos Aires.

Como parte de la experiencia, se diseñaron e implementaron varias etapas:

- una *evaluación inicial* previa al inicio de la unidad Cálculo Integral, destinada a describir que conocimientos y competencias posee cada alumno,
- un *trabajo conjunto de reflexión* sobre los errores cometidos y las dificultades encontradas, el *diseño*, también *conjunto*, de la unidad didáctica guiado por tales dificultades,
- la *propuesta de actividades diferenciadas* acorde a los obstáculos de cada alumno,
- la *evaluación de los logros y de la propuesta*.

La característica distintiva en cada una de las etapas es la interacción entre pares y docente - alumno.

La experiencia se pautó en 5 encuentros, espaciados semanalmente, dado que la carrera se cursa los días sábados.

Desarrollo de la experiencia

La evaluación inicial estuvo formada por 10 ítems. Por razones de espacio, se presentan algunas actividades representativas: la actividad 1 tiene como propósito que los alumnos/docentes relacionen la razón de cambio con el cambio total, en la actividad 2 deben explicitar la diferencia entre integral definida e indefinida, y en la actividad 3 deben reconocer y analizar la convergencia de una integral impropia.(ver Tabla 1).

En un segundo encuentro, con el propósito de promover la auto evaluación y la co evaluación grupal sobre los errores cometidos y las dificultades encontradas, se propuso trabajar grupalmente sobre la devolución realizada por el docente de las evaluaciones previas. Para llevarla a cabo, los alumnos debieron completar una tabla donde se expliciten los errores cometidos en la evaluación inicial y las consignas dónde el error aparece (ver Tabla2).

En un tercer encuentro se propuso la selección y resolución de actividades asociadas a las dificultades explicitadas. En la tabla 1 se exhibe un ejemplo de cada tipo.

Evaluación inicial	Ejemplo de actividad asociada
1) Una población de animales crece a razón de 200+50 t al año (t se mide en años). Encuentre numérica y gráficamente cuánto aumenta la población entre el 4º y 10º año.	La función f(x)=1+2x representa la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta , a) Calcule y grafique el desplazamiento de la partícula b) Grafique la curva que representa el cambio total a partir de una tabla de valores que asocie la variable y la integral

2) Calcule a) b) $\int (2x+1)dx$ $\int_0^2 (2x+1)dx$ Qué diferencias existen entre el cálculo solicitado en el punto a) y el punto b)?	a) Estime $\int_0^1 sen(x/2)dx$ utilizando a.1)la regla del punto medio a.2) la regla trapezoidal a.3) la regla de Simpson con 4, 10, 20 particiones sucesivamente. ¿Cuáles constituyen sobreestimaciones y cuáles subestimaciones? ¿Qué puede concluir sobre el valor verdadero de la integral? b) Grafique la curva sen(x/2) y la familia $\int sen(x/2)dx$
3) Calcule el área bajo la curva f(x)=1/x, con $x \geq 1$	Calcule el área bajo la curva f(x)= $1/x^3$, g(x)= 1/x, entre x=1 y x=10000 a través de aproximaciones sucesivas.

Tabla 1. Items de la evaluación diagnóstica inicial y actividades asociadas

Especificación del error	Nº de consignas
Aplicación de la regla de Barrow a curvas no continuas en el intervalo considerado	
No asocia la integral definida y el área bajo la curva que comprende	
No relaciona razones de cambio con cambio total	
...	

Tabla 2. Vinculación entre los errores cometidos y las consignas de la evaluación inicial

Con el propósito de integrar la evaluación a las actividades pedagógicas, para el cuarto encuentro, se solicitó a cada grupo, el diseño de una evaluación para la unidad Cálculo Integral.Se generaron 8 exámenes diferentes, uno por grupo; luego cada uno debió resolver una propuesta de evaluación creado por otro grupo. Finalmente, la corrección y retroalimentación estuvo a cargo del grupo que confeccionó la evaluación.

Análisis de resultados

La evaluación del desempeño de cada alumno estuvo a cargo del docente responsable del curso. Para ello se tuvieron en cuenta los siguientes ítems:

La selección de las actividades a desarrollar, asociadas a los propios errores cometidos en la evaluación inicial. Se consideró relevante que cada alumno pudiera identificar cuales actividades mejor se adaptaban a los aprendizajes que debían lograr, o bien reforzar.

La participación en el diseño de una evaluación de cierre de la propuesta, que integre los conceptos de cálculo integral. Se consideró relevante el diseño, la selección de problemas que cada grupo de alumnos incluyó como parte de la evaluación y la grilla de corrección.

La corrección de la producción de un grupo de pares *y su devolución*. En ese sentido, se tuvo en cuenta la claridad de las explicaciones en las correcciones realizadas.

Sobre un total de 21 alumnos participantes en la experiencia (5 grupos de 3 integrantes y 3 grupos de 2 integrantes), 4 alumnos (2 grupos de 2) no completaron las etapas, alegando falta de tiempo para cumplir con las exigencias requeridas para cada encuentro.

Se realizó una evaluación final del curso mediante una encuesta escrita semiestructurada en la que los 17 alumnos que completaron la experiencia debieron responder acerca de:

- *Qué papel juega la evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje.*
- *Quién es el responsable del proceso.*
- *Si el modo de evaluar, condiciona gran parte de los vínculos que se establecen en el aula; y en tal caso, cuáles.*

- *Si la evaluación está vinculada a la motivación y de que modo.*
- *Si considera que la evaluación constituye un proceso reflexivo y por qué.*

La mayoría de los alumnos encuestados (15 en total) consideran que la evaluación se utiliza sólo con el propósito de medir, y que en muchos casos resulta injusta.

La totalidad del grupo consideró que el docente es el responsable del proceso. Si bien piensan que la evaluación debiera formar parte de un proceso reflexivo, manifiestan que no se lleva a cabo en la enseñanza media, ámbito donde ellos se desempeñan.

Cabe destacar que no hubo consenso en cuanto a la vinculación entre evaluación y motivación. Algunos participantes argumentaron que dado el gran número de evaluaciones de recuperación que disponen los alumnos, no existe preocupación, en muchos de ellos, por la aprobación en primera instancia. Sin embargo, otros encuestados destacaron que los docentes, cada vez más, enseñan sólo aquellos contenidos que van a evaluar y trabajan sobre una ejercitación que luego formará parte de los exámenes.

Respecto de la influencia que ejerce el modo de evaluar en el aula, la mayoría de los encuestados opinó que los instrumentos de evaluación se usan a menudo con fines diferentes para los que fueron diseñados y eso entorpece la relación docente-alumno. Por ejemplo cuando se administran altas calificaciones como premios y bajas calificaciones como castigo convirtiéndolas así en un instrumento de control disciplinario.

Conclusiones

A partir de los registros de clase y de la información obtenida mediante las producciones individuales y grupales, pudimos realizar una valoración favorable. El grupo de alumnos que completó la experiencia, no sólo pudo vivenciar la evaluación como una componente sustancial en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral, sino además, reflexionar sobre la importancia y características distintivas de la evaluación, tal como se desprende del análisis de las encuestas. En ese sentido, la reflexión sobre el encasillamiento de la evaluación y la inducción hacia procesos memorísticos es muy valiosa, más aún si la asocia a la falta de motivación en los alumnos.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D; Novak, J y Hanesian, H. (1976). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Traducción al español de Roberto Helier, D., de la primera edición de Educational Psychology: a congnitive view. México: Trillas.

Camilloni, A; Celman, S; Litwin, E. y Palou de Maté, M. (2005). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Piados

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior.* Buenos Aires, Argentina: Piados

Litwin, E. (2008). *El oficio de enseñar.* Buenos Aires: Piados

Elliot, J. (1993), *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Milevicich, L. (2008) La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la universidad. En P. Lestón, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, pp. 339-349*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, L y Lois, A. (2008) Una perspectiva de la investigación educativa en su contexto natural. En: *Sharing Experiences Groups, 11th International Congress of Mathemaical Education*, Monterrey, Mexico.

ESTUDIO DE LOS EFECTOS DE UN TALLER DE APOYO EDUCATIVO PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN BÁSICA

María Teresa Ramírez Rangel, Simón Mochón Cohen
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
mariteyram@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Básico

Resumen. *El conocimiento requerido por los profesores para enseñar Matemáticas mediante una práctica docente eficaz necesita un constante fortalecimiento, por lo que es indispensable que el profesor trabaje en su propia superación profesional de diversas formas, una de ellas es a través de la reflexión constante con sus compañeros de escuela. La presente investigación indaga el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que posee un grupo de maestros de educación básica, la relación de este conocimiento con su labor profesional y las posibilidades de mejorar dicho conocimiento a través de la reflexión compartida de la práctica docente mediante un taller de apoyo educativo.*

Palabras clave: reflexión compartida, conocimiento matemático, conocimiento pedagógico, práctica docente, apoyo educativo

Introducción

Las evaluaciones internacionales (PISA), nacionales (Enlace y Excale) y locales del sistema educativo muestran resultados insuficientes del aprendizaje de las matemáticas de los alumnos a nivel básico en México.

A partir de esta situación surge nuestro interés por indagar si el profesor de segundo ciclo de educación primaria (3º y 4º grados) posee los conocimientos pedagógicos y de contenido matemático que requiere para llevar a cabo una labor profesional eficaz. Éste es el **problema** que guiará nuestro trabajo. Los **objetivos** de nuestra investigación son:

a) Identificar algunos elementos que permitan establecer relaciones entre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza del maestro y su práctica docente.

b) Reconocer elementos de reflexión compartida de los maestros acerca de su labor profesional a través del análisis de su práctica docente.

c) Identificar algunas manifestaciones de modificación del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los maestros participantes a partir de la implementación de un taller de apoyo educativo.

Marco Teórico

La NCTM (Nacional Council of Teachers of Mathematics), indica que una de las metas de la educación matemática es lograr que los estudiantes sean capaces de pensar creativa y reflexivamente acerca de los conceptos matemáticos y resolver los problemas matemáticos entendiéndolos.

Algunos investigadores consideran que una serie de conocimientos del maestro son indispensables para llevar a cabo una práctica docente eficaz. Shulman (1987) propone el término Conocimiento de Contenido y Pedagógico (Pedagogical Content Knowledge PCK), para una amalgama especial de conocimiento que vincula el contenido y la pedagogía, y que son del dominio del maestro; este conocimiento incluye el entendimiento de cómo temas particulares, problemas o situaciones son organizadas, representadas y adaptadas a los diversos intereses y habilidades de los estudiantes y presentados para la instrucción.

Ball y Bass (2000) toman los elementos que conforman el PCK y lo enfocan hacia contenidos matemáticos, designándolo como "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (Mathematical Knowledge for Teaching MKT) y consideran que implica la capacidad del profesor para planear actividades matemáticas con una secuencia didáctica conveniente y escuchar los razonamientos de los estudiantes siendo capaz de responder de manera adecuada a sus inquietudes gracias al conocimiento matemático que posee. Askew, et al. (2000) proponen cuatro componentes apropiados para llevarse a cabo en el aula: actividades, conversación, herramientas además de relaciones y normas.

Algunas estrategias para identificar elementos del Conocimiento Matemático para la Enseñanza que posee un maestro son:

a) Observación y análisis del trabajo en el aula considerando los cuatro componentes de Askew et al. (2000): tareas, conversación, herramientas y relaciones y normas.

b) Valorar el análisis de conceptos erróneos e ideas equivocadas que lleva a cabo el profesor.

c) Analizar las reflexiones del maestro sobre su propia práctica, tomando en cuenta las cuatro actividades centrales de Ball y Bass (2000): 1) Deducir lo que entienden los estudiantes; 2) analizar métodos y soluciones diferentes de las propias determinando su suficiencia y comparándolos; 3) desglosar ideas matemáticas complejas, procedimientos y principios; 4) escoger representaciones para comunicar de manera eficaz ideas matemáticas.

Para identificar los factores que contribuyen al incremento del conocimiento del profesor se han realizado varias investigaciones, entre ellas la de Baturo (2004) y Shulman (1986) quienes consideran necesario reforzar el conocimiento matemático de los profesores, remediar sus ideas falsas de matemáticas y construir su conocimiento pedagógico mediante secuencias eficaces de enseñanza de tareas.

En la investigación realizada por Chin et al. (2006), se encontró que los profesores pueden examinar su propia práctica educativa usando las técnicas de investigación, cuyos pasos son: planear, actuar, observar y reflexionar. Cooper, Baturo y Grant (2006) encontraron que en la planificación colaborativa de las sesiones de clase sería muy valioso involucrar a maestros e investigadores.

Método

Esta es una investigación de carácter cualitativo con intervención, y que tiene como propósito detectar modificaciones en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de un grupo de maestros de educación básica, mediante la reflexión compartida de su práctica docente, a través de un taller de apoyo educativo.

El presente es un estudio transversal descriptivo y exploratorio que se llevó a cabo durante un semestre con profesores que atendían niños de 3° y 4° grados de educación primaria (segundo ciclo) durante diez sesiones.

A través de las sesiones, se trabajaron temas de conocimiento matemático para la enseñanza (contenido matemático y pedagógico), relativas al 3º y 4º grados de educación primaria.

El estudio se efectuó en dos escuelas primarias oficiales situadas en la parte norte de la ciudad de México. Ambos planteles son de organización completa (atienden grupos de 1° a 6° grado). La comunidad es urbana, cuenta con todos los servicios y tiene un nivel socioeconómico bajo.

Sujetos. La investigación se realizó con once profesores, quienes atendían un promedio de 30 alumnos de 3° y 4° grado de educación primaria. El grupo estaba formado por nueve maestras y dos maestros, de los cuales ocho trabajaban doble turno y tres sólo un turno. Cinco maestros tenían menos de quince años de servicio, los otros seis entre 16 y 25 años de servicio. Seis de los maestros no habían estudiado algo más después de titularse como profesores.

Instrumentos metodológicos empleados**:** dos cuestionarios, uno inicial y otro final; observaciones iniciales y finales de clase y hojas de trabajo utilizadas en el taller de apoyo educativo; se llevaron a cabo dos observaciones de clase: una inicial y una final a cinco de los profesores participantes.

Procedimientos de validación**.** Para validar los resultados se utilizó la triangulación de datos obtenidos a través de los diferentes instrumentos de investigación: observaciones de clases (iniciales y finales), cuestionarios inicial y final, respuestas escritas por los maestros en las hojas de trabajo y las respuestas vertidas a través de las discusiones en el taller.

Resultados

Los resultados se presentan con respecto a cada uno de los instrumentos metodológicos utilizados y en el orden en el que se encuentran en la investigación:

a) Cuestionario inicial

La falta de conocimiento matemático que presentan los profesores es uno de los factores que propicia una actitud de desagrado hacia las matemáticas. Las técnicas de enseñanza que dijeron utilizar la mayoría de ellos, daban al niño un papel pasivo en el proceso de aprendizaje, centrando su interés en el resultado de ejercicios y tareas. La mayoría de ellos (ocho), utilizan casi exclusivamente libros de texto, pizarrón y material concreto; muy pocos (tres) propusieron técnicas diferentes como la experimentación, la observación, la reflexión, el trabajo en equipo y el trabajo grupal. Los maestros reflejaron un conocimiento y manejo muy general de los materiales con que apoyan su trabajo docente.

b) Taller de apoyo educativo.

- *Conocimiento y manejo del currículum*. Los docentes conocen el currículum que corresponde a su grado, pero el tipo de actividades mediante las cuales lo ejecutan no propicia el análisis de las mismas. Algunos profesores intentan tomar contenidos de grados superiores, pues existe una presión por parte de los padres (además de algunas actitudes del propio docente) que lo impulsan a tratar de trabajar muchas actividades sin tomar en cuenta si los alumnos están o no desarrollando sus capacidades, habilidades, actitudes, destrezas, además de construir su conocimiento correspondiente a sus características.

- *Ideas erróneas y conceptos equivocados de los alumnos*. A través del análisis de estos elementos, fue posible observar parte del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los maestros, ya que se pusieron de manifiesto dos de las actividades centrales de la enseñanza de las Matemáticas que Ball y Bass (2000) consideran que el profesor debe hacer:

1. Deducir lo que entienden los estudiantes, al localizar y entender las ideas erróneas y los conceptos equivocados. Todos los maestros identificaron ideas erróneas y conceptos equivocados que habían observado en sus alumnos, sin embargo, a la mayoría de ellos les fue difícil explicar las causas que los generaban, así como deducir lo que entendían los niños.
2. Escoger representaciones para comunicar ideas de manera eficaz. La mayoría de profesores (7) presentó dificultades para proponer representaciones adecuadas que permitieran al estudiante superar sus conceptos erróneos; sus propuestas eran mecanicistas y superficiales. La mayoría de docentes dieron causas muy generales a los conceptos erróneos, sin tomar en cuenta la manera en que influye el maestro en la formación de dichos errores.

Los profesores confundieron algunos problemas emocionales o carencias de conocimientos con ideas erróneas y conceptos equivocados.

- *Fracciones*. Se les presentaron tres tipos de actividades: las que requerían un mayor conocimiento matemático, las que necesitaban un mayor conocimiento pedagógico y aquellas que requerían de ambos conocimientos por igual.

Ejercicios que requerían mayor conocimiento matemático: cinco de los once maestros identificaron los conceptos que se les solicitaba; otros cinco maestros mencionaron algunos conceptos de manera muy general e incompleta. No es común para los profesores analizar los conceptos o conocimientos relacionados con el tema que se está trabajando.

Ejercicios que requerían mayor conocimiento pedagógico: tres profesores describieron el procedimiento y lo explicaron con un modelo, cuatro maestras no describieron el procedimiento, pero sí presentaron un modelo; tres maestros resolvieron estos problemas después de la discusión grupal, pues no sabían cómo hacerlo.

Ejercicios que requerían ambos conocimientos: una maestra dio el resultado explicando el proceso de manera muy general; seis maestros solo dieron el resultado sin explicación; otro sugirió dar directamente la respuesta al alumno; los demás no contestaron o lo hicieron de forma parcial. A través de estas actividades se observaron dificultades de los maestros para llevar a cabo dos de las cuatro actividades centrales de enseñanza propuestas por Ball y Bass (2000): Deducir lo que entienden los estudiantes y escoger representaciones apropiadas para comunicar de manera eficaz nociones matemáticas, es decir, los maestros poseen un conocimiento matemático limitado respecto al tema de las fracciones.

- *Cambio de afirmaciones por argumentos*. Este y el siguiente son documentos con información principalmente pedagógica. La mayoría de los maestros hacen preguntas cortas sin pretender desafiar intelectualmente a sus alumnos; las respuestas que de ellos esperan están relacionadas con la resolución de ejercicios de libros y cuadernos.

Luego del análisis de sus respuestas, los maestros reconocieron la importancia de que el alumno argumente, sin embargo, también enunciaron obstáculos reales que les dificultan llevarlo a cabo, principalmente el poco tiempo de que disponen a causa de las cargas de trabajo a las que se enfrentan.

- *Maestros eficaces*. Mediante el análisis y discusión del texto, los maestros reflexionaron acerca de las fortalezas y debilidades respecto a su práctica docente, reconociendo que la profesionalización y actualización docentes son dos factores en que necesitan incidir.

- *Sistema decimal de numeración*. Los maestros identificaron algunas de las dificultades que los alumnos tienen respecto a las operaciones básicas, sin embargo, las relacionaron más con la aplicación correcta del algoritmo que con los principios del sistema decimal de numeración; otros profesores no identificaron con claridad las causas de las dificultades de los alumnos; en ocasiones, el maestro considera que lo que está observando es sólo un descuido, una distracción o un olvido por parte del alumno y no una carencia de conocimiento. Todo ello muestra deficiencias en el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de los docentes.

- *Pedagogía en tres niveles*. Los maestros propusieron algunos elementos pedagógicos adecuados para mejorar la calidad de la enseñanza: utilizar el juego para interesar y desafiar el pensamiento del alumno, trabajo por parejas y por equipo; utilización de la argumentación, el análisis y la confrontación de puntos de vista diferentes, uso de diversos materiales y herramientas, creación de un ambiente de apoyo y respeto en el aula.

Se les solicitó que planearan una clase con base en los elementos teóricos discutidos (Askew et al., 2000); se observaron algunas deficiencias pedagógicas: actividades directivas y mecanicistas (no se permitía que el alumno propusiera, sino que sólo resolviera el ejercicio), uso de preguntas cortas que dan pauta a respuestas cortas y cerradas; manejo inadecuado de los errores de los niños, basaban algunas normas en los contenidos, ciertas actividades no desafiaban intelectualmente a los alumnos; otras actividades que proponían no correspondían totalmente al tema a tratar.

- *Cálculo mental*. El análisis de procesos diferentes a los establecidos por los algoritmos convencionales en la resolución de operaciones, presentó cierta dificultad para los profesores, al tratar de desglosar las ideas implícitas en el ejercicio. Tres maestras mostraron una gran dificultad para usar el cálculo mental en lugar de los algoritmos convencionales.

c) Observaciones de clase. Se hicieron a cinco de los once profesores

En las observaciones iniciales solo uno los cinco profesores presentó niveles adecuados de los criterios de Askew et al. (2000). En la observación final se detectaron avances significativos en dos profesores, poco avance en un maestro, el docente que había presentado niveles adecuados en la observación inicial se mantuvo en ese nivel y una maestra retrocedió de su nivel original, que era inicialmente bajo.

d) Cuestionario final

Mediante este instrumento metodológico se analizaron los posibles cambios o modificaciones en las actitudes y concepciones de los maestros respecto al Conocimiento Matemático para la Enseñanza que se requiere para llevar a cabo una práctica docente eficaz. Los maestros retomaron elementos teóricos trabajados en el taller: importancia de buscar diferentes herramientas, materiales y modelos de enseñanza; importancia de una práctica pedagógica adecuada; importancia y necesidad de conocer el pensamiento de los estudiantes; crear un ambiente adecuado en el salón de clase; trabajo colaborativo entre docentes.

Conclusiones

Los resultados obtenidos permitieron contestar las preguntas de investigación planteadas originalmente: ¿Qué relación existe entre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza del maestro y su práctica docente?

El Conocimiento Matemático de los maestros participantes en la investigación está relacionado con las actitudes que tienen hacia la materia, lo cual es producto de las experiencias vividas a través de su formación; ésta no propició una preparación adecuada que les permitiera comprender, disfrutar y presentar a sus alumnos la matemática de manera entendible y agradable. Aunque reconocen la importancia del conocimiento matemático, las deficiencias en su MKT originan un rechazo a la complejidad que advierten. En ocasiones no alcanzan a entender lo que se les pide a causa de la falta de elementos cognitivos que se requieren en una situación específica.

Los docentes presentaron deficiencias en el conocimiento pedagógico: uso de técnicas que no fomentan el desarrollo de otras habilidades; falta la utilización sistemática de estrategias para comprobar el avance de sus estudiantes. Las técnicas pedagógicas que utilizaban daban un papel pasivo a los alumnos; tenían un manejo muy general de los materiales didácticos.

¿En qué forma un taller de apoyo educativo permite a los maestros reflexionar acerca de su quehacer profesional? A través de las diversas actividades llevadas a cabo en las sesiones del taller, los maestros mostraron el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que poseían, algunos retomaron elementos del taller para implementarlos en su práctica pedagógica; la mayoría de docentes trataron de reflexionar, aunque de manera sencilla, acerca de su práctica profesional, además de reconocer la importancia del trabajo colaborativo entre maestros.

¿De qué manera la reflexión compartida de la práctica docente permite mejoras en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza del docente?

Como parte de la reflexión generada, los maestros propusieron que en las reuniones de Consejo Técnico Consultivo se invitara a todos los profesores de la escuela a organizar el trabajo de manera conjunta en beneficio de los estudiantes, ya que detectaron algunas carencias ocasionadas por un inadecuado trabajo docente realizado en años precedentes. Se comentó la importancia de respetar la forma de trabajar de cada maestro, estableciendo ideas centrales o ideas guía para coordinar la labor docente. Los argumentos que los profesores daban al participar en las discusiones de trabajo no siempre convencían a todos, sin embargo, se abrió la posibilidad de escuchar otros puntos de vista e involucrarse con los argumentos de los demás, reflexionando con base en todo lo comentado durante la sesión.

Son muchos los elementos que el maestro necesita tener y dominar para llevar a cabo su labor docente de manera adecuada. Independientemente de la cantidad de elementos que posea, es indispensable que reflexione acerca de ello, para determinar en dónde está y hacia dónde quiere encaminar sus esfuerzos, de esta manera puede haber cambios importantes en la forma de ver, entender y llevar a cabo la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. y Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. *Proceeding of PME-24,* 2, 17- 24. Hiroshima, Japan: PME

Ball, D.L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematic. (pp. 83-104).* Westport, C.T: Ablex.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help Year 5 students construct fraction understanding. *Proceeding of PME-28,* Vol. 2, 95-102. Bergen, Norway: PME

Chin, E-T., Lin, Y-C., Ko, Y-T., Chien, C-T., & Tuan, H-L. (2006) Collaborative action research on implementing inquiry-based instruction in an eighth grade mathematics class: An alternative mode for Mathematics teacher professional development. *Proceeding of PME-30,* Vol. 2, 41-48. Prague, Czech Republic: PME

Cooper, T. J., Baturo, A. R., y Grant, E. J. (2006). Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels. *Proceeding of PME-30,* 2, 361-368. Prague, Czech Republic: PME

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57(1), 1-22.

PERCEPCIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA SOBRE LA ESTADÍSTICA Y SU ENSEÑANZA

Edwin Chaves Esquivel, Mario Castillo Sánchez, Marianela Alpízar Vargas
Universidad Nacional Costa Rica
Universidad de Costa Rica
echa@una.ac.cr, mcastill@una.ac.cr, malvacr@yahoo.com
Campo de investigación: Factores afectivos y formación de profesores Nivel: Básico y medio

Resumen. *En la investigación realizada se analizó la percepción de los educadores matemáticos hacia la Estadística y su enseñanza en el ámbito preuniversitario. La investigación incluyó 291 profesores activos y en formación, a los cuales se les aplicó un cuestionario. Se logró determinar que un alto porcentaje de docentes concibe la disciplina como fácil de entender, cuyos problemas son de resolución simple y no presentan grandes complicaciones si se compara con otras áreas de Matemáticas. Pero, desde el punto de vista cognitivo surgió cierta contradicción, pues existe la creencia que la Estadística permite manipular la realidad; lo cual atenta contra la naturaleza aleatoria y objetiva de la disciplina. Los resultados revelan la necesidad de profundizar en temas relacionados con la forma en que cada docente percibe la disciplina y su rol en la formación de los jóvenes.*

Palabras clave: creencias en estadística, enseñanza de la estadística

Introducción

Rol de la Estadística dentro del quehacer educativo

Durante el Siglo XX la Estadística se convirtió en una herramienta fundamental del método científico experimental, por lo que su uso se hizo común en diferentes campos, y su enseñanza y aprendizaje debieron implementarse desde los primeros años de los procesos educativos (Batanero, 2002). Los esfuerzos por impulsar la enseñanza de la Estadística estaban encaminados a promover la formación de ciudadanos estadísticamente cultos, capaces de controlar sus ideas sobre el azar, diferenciar las que son correctas de las incorrectas y aplicar el razonamiento estadístico para controlar sus intuiciones en las situaciones de riesgo y la toma de decisiones (Batanero, 2002).

En Costa Rica la Enseñanza de la Estadística se incluyó en los programas de estudio en la educación preuniversitaria desde 1995 (Chavarría, 1998). Con ello, se pretendía desarrollar una actitud crítica en el estudiante ante la gran cantidad de información que se genera día con día. En estos programas, se destaca la importancia hacia la interpretación de los datos y de los análisis generados de ellos (MEP, 2005).

A pesar de las expectativas que se situaron con respecto a esta disciplina y su enseñanza, algunas investigaciones tendientes a evaluar el alcance de la propuesta han denunciado una gran cantidad de problemas asociados con dicho proceso (Chaves, 2007). Los resultados de la investigación de Chaves (2007), muestra que los profesores desconocen los principios que rigen los programas de estudio respecto a su enseñanza. Pero además, poseen una escasa formación no sólo en aspectos conceptuales de la disciplina, sino también en estrategias pedagógicas para su enseñanza.

Además se demostró que muchos docentes subestiman la Estadística y dan preferencia a las áreas matemáticas tradicionales, tanto que muchas veces deciden no enseñarla o hacerlo parcialmente.

Percepción hacia la Estadística

Ante el reto que significa realizar un proceso eficiente en la enseñanza de esta disciplina y la importancia del docente en dicho proceso; el presente documento analiza la percepción de los educadores matemáticos ante la Estadística y su enseñanza.

En estudio realizado por Bosch y Gascón (2001) con respecto a las prácticas docentes del profesor de Matemáticas, se discuten algunos modelos relacionados con estas experiencias. En los estudios relacionados con el tema, se asumen que los comportamientos del profesor y de los alumnos se influyen mutuamente en los salones de clase. El modelo de Bosch y Gascón (2001) denominado como "*modelo de investigación*", emplea tres elementos para explicar el comportamiento del profesor en el aula:

a) El conocimiento del profesor (que tiene tres componentes: el conocimiento del contenido matemático; el conocimiento pedagógico de los métodos de enseñanza; y el conocimiento de los mecanismos mediante los cuales los alumnos entienden y aprenden un contenido particular).

b) Las creencias del profesor (que tiene dos componentes: las creencias respecto a qué son las matemáticas; y las creencias respecto al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas).

c) Las actitudes del profesor.

La determinación de percepciones, actitudes y creencias constituye un elemento clave, si se desea que el docente de Matemáticas se convierta en agente generador de cambio con respecto a la enseñanza de la Estadística en la educación media. Solo por medio de la comprensión de estos elementos y de su influencia en el proceso educativo, será posible establecer estrategias que propicien dichos cambios. Tal como apunta Barrantes y Blanco (2004) el papel intermediario de los profesores entre el currículo y los estudiantes, no lo convierte transmisor de directrices y sugerencias ministeriales, debido a que el profesor interpreta y aplica el currículo según criterios que provienen de sus propias percepciones.

Estrada (2002) confirma la existencia de una relación entre las percepciones de los docentes en cuanto a sus aptitudes para enseñar y el rendimiento de los estudiantes; pero señala que esta relación tiene sentido cuando se considera que las creencias de los profesores influyen en sus percepciones y valoraciones, las cuales determinan su comportamiento en el aula. En la presente investigación se utiliza el modelo planteado por Estrada (2002) y Estrada, Batanero y Fortuny (2004), el cual hace referencia a varios componentes que han tenido una amplia aplicabilidad en diversas investigaciones. En la propuesta de Estrada, las actitudes y percepciones del docente se dividen en dos áreas: pedagógica y antropológica; cada una de ellas se subdivide en tres componentes. Desde el punto de vista pedagógico los componentes son (Estrada et al., 2004).

- Componente afectivo o emocional: está constituido por expresiones de sentimiento hacia el objeto de referencia. Recogería todas aquellas emociones y sentimientos que despierta la Estadística, y por ello son reacciones subjetivas positivas/negativas, acercamiento/huida, placer/dolor.
- Componente cognitivo: se refiere a las expresiones de pensamiento, concepciones y creencias, acerca del objeto actitudinal, en este caso, la Estadística. Incluye desde los procesos perceptivos simples, hasta los cognitivos más complejos.
- Componente conductual o tendencial: aparece vinculado a las actuaciones en relación con el objeto de las actitudes. Son expresiones de acción o intención conductista o conductual y representan la tendencia a resolverse en la acción de una manera determinada (p. 264-265).

Desde el punto de vista antropológico, Estrada et al (2004) considera los componentes:

- Componente social: relacionado con la percepción y la valoración del papel de la Estadística en el ámbito sociocultural de cualquier ciudadano.
- Componente educativo: vinculado al interés hacia la estadística y su aprendizaje, a la visión de su utilidad para el alumno, a su opinión sobre si debiese incluirse en el currículo y a la dificultad percibida.
- Componente instrumental: referido a la utilidad en otras materias, como forma de razonamiento y como componente cultural. (p.265)

Estos seis componentes han servido de base para el presente estudio y constituyen las categorías de análisis que rigieron esta investigación.

Metodología

La investigación realizada se considera del tipo cuantitativa, no experimental descriptiva, ya que en ella se relatan hechos que ocurrieron y se trata de dar interpretaciones a los mismos (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006). Los informantes de la investigación fueron profesores de Matemáticas de educación media, tanto activos como en formación. Los profesores activos laboraban, principalmente, en colegios ubicados en la zona central del país, especialmente, en las provincias de Heredia, Alajuela y San José. Los profesores en formación, eran estudiantes de, al menos tercer nivel, la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional.

Los datos fueron recolectados por medio de un cuestionario de 59 preguntas, 12 referidas a información general del docente y 47 relacionadas con las percepciones sobre la Estadística y su proceso de enseñanza y aprendizaje. La estrategia para valorar la percepción de los entrevistados se realizó mediante una escala de actitudes utilizada por Asunción Estrada Roca en la Universidad Autónoma de Barcelona, en su tesis doctoral (Estrada, 2002). Esta escala se divide en cinco categorías, tal como se muestra en el Cuadro 1:

Cuadro 1: Significado de las puntuaciones en la escala de actitudes

Puntuación	Grado de afinidad con la proposición planteada
5 puntos	Muy de acuerdo
4 puntos	En acuerdo
3 puntos	Indiferente
2 puntos	En desacuerdo
1 punto	Muy en desacuerdo

La investigación se llevó a cabo en el segundo semestre del 2006.

Resultados

El cuestionario fue aplicado a 291 profesores, en servicio y en formación, de los cuales, 242 ejercen como docentes de matemática, de segunda enseñanza y a nivel superior, importante indicar que la mayoría (62,3%) posee al menos el grado de bachillerato en la Enseñanza de la Matemática.

El Cuadro 2, muestra los principales datos estadísticos relacionados con el área pedagógica.

Cuadro 2: distribución de las opiniones de los docentes respecto a algunos ítems afines al área pedagógica

Componente	Medidas estadísticas			
	$\overline{x}$	**Mo**	**Me**	**s**
Afectivo				
1) Me molesta la información estadística de algunos programas de TV	2,7	3	3	1,16
2) Me divierto en las clases que se tratan de Estadística	3,7	4	4	0,97
3) Me gusta la Estadística porque me ayuda a comprender ciertos temas	3,8	4	4	0,96
4) Me siento intimidado ante datos estadístico	1,9	2	1	1,00
Cognitivo				
1) La estadística ayuda a entender el mundo de hoy	4,2	4	4	0,88
2) A través de la estadística se puede manipular la realidad	3,9	4	4	1,13
3) La estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	4,0	4	4	0,79

Comportamental				
1) Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	3,8	4	4	0,98
2) Los problemas de estadística me resultan fáciles	3,8	4	4	1,03
3) Utilizo poco la estadística fuera del salón de clases	3,1	4	3	1,20
4) La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas	4,1	4	4	0,89

Puede notarse que los entrevistados tienen una percepción positiva respecto a la Estadística y su área de estudio, así como la formalidad y objetividad con que esta disciplina realiza su trabajo. Existe cierta empatía hacia esta disciplina, esto puede notarse con las medidas estadísticas correspondientes a los primeros cuatro ítems. Llama la atención los resultados del primer ítem, la posición de indiferencia que se presentó pareciera señalar que los datos estadísticos de los medios de comunicación como la televisión no son muy atractivos, lo cual puede deberse a que los vinculen con temas políticos y electorales.

En relación al componente cognitivo existe una buena percepción sobre la Estadística; sin embargo, resulta interesante indicar que los entrevistados perciben que la Estadística es un vehículo para manipular la información. Esta percepción evidencia una fuerte contradicción en relación a los resultados analizados en el componente afectivo, pues los mismos entrevistados manifestaron que, esta disciplina se caracterizaba por su objetividad en el análisis de la información; por lo que no podría ser una herramienta para el engaño. Respecto al componente comportamental, surgen nuevas contradicciones en relación a las percepciones de los entrevistados sobre la Estadística, por un lado se concibe la estadística como útil para resolver problemas de la vida cotidiana, pero por otro lado, se percibe que se utiliza poco fuera del aula.

El Cuadro 3, muestra los principales datos estadísticos relacionados el área antropológica.

Cuadro 3: distribución de las opiniones de los docentes respecto a algunos ítems afines al área antropológica

Componente	**Medidas estadísticas**			
	$\overline{x}$	**Mo**	**Me**	**s**
Social				
1) No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa	1,9	1	2	1,03
2) Me siento intimidado ante datos estadísticos	1,9	1	2	1,00

3) Me entero más de las elecciones cuando hay representaciones gráficas	3,9	4	4	1,08
4) Evito las informaciones estadísticas cuando las leo	2,0	1	2	1,04
Educativo				
1) La estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	4,0	4	4	0,79
2) En el colegio no se debería de enseñar estadística	1,6	1	1	0,92
3) Encuentro interesante el mundo de la estadística	4,0	4	4	0,91
4) Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística	1,7	1	1	1,03
Instrumental				
1) Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	3,8	4	4	0,98
2) Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender ciertos temas	3,8	4	4	0,96
3) Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	4,2	4	4	0,86
4) Utilizo poco la estadística fuera del salón de clases	3,1	4	3	1,20
5) La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas	4,1	4	4	0,89

En relación con el componente social, los entrevistados entienden las informaciones estadísticas que se les presenta a través de los medios de comunicación y dejan entrever que hay una mejor comprensión de la información cuando se presentan análisis estadísticos. En este componente no se evidencian diferencias significativas entre las opiniones de los docentes que se encuentran en formación y los que no lo están.

En el componente educativo, resalta el hecho que los docentes consideran la Estadística interesante y vital para la formación del ciudadano, esto puede deberse, principalmente, al papel que tiene como herramienta de análisis de datos en otras áreas. Por otra parte, los docentes se encuentran, completamente, en desacuerdo con el hecho de eliminar el tema de estadística en secundaria Este hecho es contradictorio con algunos estudios realizados en el país, donde, muchas veces, este tema no se enseña o se enseña solo parcialmente, debido a que los docentes de Matemáticas dedican el tiempo a profundizar otras áreas (Chaves, 2007).

Al considerar el componente instrumental, los profesores se encuentran, en mayor medida, de acuerdo con la afirmación de que la Estadística ayuda a tomar decisiones documentadas y aprecian las investigaciones que involucran análisis estadísticos. También piensan que se puede utilizar para resolver problemas de la vida cotidiana y que el manejo de dicha materia los ayuda a entender algunos temas. En cuanto al uso de la Estadística fuera del salón de clase, desde un punto de vista instrumental, nuevamente hay una contradicción respecto a que, mientras que se acepta la utilidad de la disciplina, por otro se reconoce que, fuera del salón de clases se utiliza poco.

Al realizar la distribución de las opiniones referidas al componente instrumental por medio de la condición de ser estudiante o no, en la mayor parte de las afirmaciones no se dan diferencias significativas entre los grupos.

Conclusiones

Quedó en evidencia una actitud muy positiva por parte de docentes de Matemáticas en relación con la Estadística como área científica y también como disciplina a ser enseñada en secundaria.

Estos educadores conciben la disciplina como fácil de comprender, cuyos problemas son de resolución simple y no presentan grandes complicaciones si se compara con otras áreas de las Matemáticas. No obstante, según Chaves (2007) esta percepción podría estar asociada a que la propuesta ministerial ignora conceptos claves asociados con la naturaleza de la disciplina, especialmente en el ámbito metodológico y epistemológico. Por lo que esta actitud podría responder a creencias erróneas sobre los principios de la Estadística.

Desde el punto de vista de los seis componentes analizados, los entrevistados sienten que esta disciplina es entretenida, interesante y agradable. Esta percepción podría estar asociada con el nivel de aplicabilidad de la misma. Este aspecto podría ser un factor de motivación hacia los estudiantes de secundaria, al momento en que la enseñanza de la disciplina permita al estudiante tener una mayor interacción con la información estadística de su contexto. No obstante, surgió una importante contradicción respecto a las opiniones recabadas, debido a que los datos reflejaron la creencia entre los entrevistados que la Estadística permite manipular la realidad. Esto atenta contra la naturaleza aleatoria de la disciplina, la cual le asigna un alto grado de objetividad, que incluso se le ha catalogado como base del método científico experimental. También este hecho podría estar asociado a los problemas predictivos que han tenido las encuestas en las últimas elecciones presidenciales del país. También se reflejaron otros problemas de concordancia, pues mientras se nota una creencia positiva respecto al uso de la Estadística para la resolución de problemas cotidianos, se evidencia poco uso de ella fuera del salón de clase. Esto hace notar que, una gran parte de estos docentes, perciben la Estadística con fines didácticos dentro del salón de clase y no así fuera de él, por lo que quizá muchos de los ejemplos de aplicación son hipotéticos y no responden a problemas reales. Esta situación refleja, una vez más, la necesidad de profundizar en prácticas asociadas con el contexto de los estudiantes, de manera que su uso se asocie a problemas reales. Esta situación es concordante con los hallazgos obtenidos en el análisis del componente social, y también se discutió al analizar el componente afectivo.

Para finalizar se debe aclarar, que el presente estudio se fundamentó en un esquema de investigación planteado por Estrada (2002), por lo que el instrumento aplicado obedece a ese estudio. Sería importante adaptar el instrumento al contexto nacional de Costa Rica, debido a que los procesos educativos pueden tener diferencias respecto al contexto en que se realizó el estudio. Sin embargo, esto no le quita validez a la presente investigación, pues como puede notarse se han encontrado importantes hallazgos a tomar en cuenta al momento de diseñar cambios en el currículo de Estadística tanto de secundaria, como en los cursos universitarios para las carreras que forman educadores matemáticos.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias 22 (2)*. 241-250.

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística*. Conferencia inaugural de las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires

Bosch, M. y Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de Matemáticas*. (Versión preliminar) Recuperado el 29 de setiembre 2007 en:

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Chavarría, S. (1998). *La Política educativa hacia el siglo XXI: Propuestas y realizaciones*. San José: MEP.

Chaves, E. (2007). *Una valoración sobre la enseñanza de la Estadística en los colegios académicos diurnos: regiones educativas de San José, Alajuela, Heredia, Pérez Zeledón y Upala*. Tesis Doctoral. Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona, España

Estrada, A.; Batanero, C. y Fortuny, J (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias 22 (2)*. 263-274

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. (6 da Ed.), México D.F, México: McGraw-Hill Interamericana.

Ministerio de Educación Pública [MEP] (2005). *Programas de estudios de matemática: Tercer Ciclo*. San José.

DE LA INVESTIGACIÓN AL AULA: UNAS PRÁCTICAS DE LABORATORIO UTILIZANDO CALCULADORA

Osvaldo Samayoa Ochoa, Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas México
Cicata-IPN
osvals@hotmail.com; gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Básico

Resumen. *Este trabajo presenta el diseño de dos secuencias didácticas en forma de prácticas de laboratorio fundamentadas en resultados de investigaciones en matemática educativa de corte socioepistemológico. Se busca favorecer el uso inteligente de la tecnología (calculadoras graficadoras) en el aula de matemáticas así como un acercamiento entre el profesor y alumno de matemáticas para con la investigación en matemática educativa.*

Palabras clave: prácticas de laboratorio, investigación socioepistemológica, calculadora

Antecedentes

La tecnología ha hecho que las matemáticas se conviertan en una ciencia más empírica y le ha permitido al estudiante trabajar más fácilmente con una gran cantidad de información relacionada con problemas que ni hubiera podido resolver de otra forma. No existen técnicas instrumentadas (uso de herramientas tecnológicas) para que los profesores tengan reglas de estudio a fin de que puedan tener intervenciones en la educación de los alumnos como menciona Briseño (2008). Pero diferentes investigadores se han preocupado por estas carencias y han hecho estudios para construir un discurso teórico que sustente técnicas instrumentadas. Por ejemplo Cedillo (2006 citado en Briseño, 2008) hace un estudio con profesores con el uso de las CAS (Computer Algebra System), centrándose en los cambios que pudieran presentarse en las concepciones y prácticas de enseñanza de los docentes y la manera en que el uso sistemático en el aula de un sistema algebraico computarizado afecta la relación estudiante-profesor.

Con respecto a las investigaciones realizadas en Matemática Educativa acerca del uso de la calculadora en el aula de matemáticas, Ferrari y Martínez (2003) realizaron una investigación con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Los autores parten de considerar investigaciones que dan evidencia de que la utilización de calculadoras graficadoras ayuda a desarrollar una comprensión más global del concepto de función, pues permiten visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y sus expresiones algebraicas. Los resultados que obtuvieron fueron de considerar a las calculadoras graficadoras como una variable didáctica para el diseño y puesta en escena de ingenierías didácticas. Específicamente trabajaron con la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas. Las tareas que realizan se refieren a la variación de parámetros, completar binomios y trinomios para poder graficar y a operaciones elementales con funciones. La calculadora juega el papel de herramienta tecnológica que permite generar un universo gráfico rico en significados.

En el trabajo desarrollado por Apreza y Ramiro (2005) se señala que en algunas escuelas secundarias de la República Mexicana existen las denominadas aulas para la enseñanza de la matemática con tecnología, EMAT, y Secundarias para el Siglo XXI (Sec 21) en las que se demuestra que trabajando en este ambiente los alumnos activan diversos procesos cognitivos y metacognitivos. Los docentes transforman sus concepciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura y la escuela se organiza para promover el desarrollo de sus funciones sustantivas. El propósito de esa investigación consistió en elaborar el diseño de una situación didáctica para el tema de gráficas de funciones. La calculadora graficadora entra en juego como una de las herramientas principales en el desarrollo de las actividades propuestas.

Resulta notorio que una de las cuestiones que reportan estos investigadores es que con la utilización de la calculadora graficadora se rompe con las estructuras de monotonía en el docente. Consideramos que todos estos beneficios son para motivar el desarrollo y capacitación del docente, que en gran medida se ha quedado rezagado, cuando las nuevas generaciones vienen creciendo e interactuando con tecnología.

La problemática

Pérez (2008) hace mención que aunque el objetivo de las investigaciones hechas al seno de la Matemática Educativa sea la del impacto en el quehacer cotidiano del profesor en el aula, el sentir generalizado de los profesores es la falta de vinculación entre sus necesidades y las investigaciones que se llevan a cabo, no sólo por la falta de conocimiento en cuanto a las investigaciones en sí, sino porque los resultados de estas investigaciones les quedan aún lejanos en el sentido de poder incorporarlos a su práctica cotidiana. Por esto se sostiene que hace falta un puente de comunicación entre el saber de referencia que se genera en Matemática educativa y el quehacer de los docentes.

Al hablar de investigaciones que involucran aspectos tecnológicos, encontramos una complicación ya que en su mayoría los docentes muestran una cierta resistencia al uso de los mismos. Sin embargo como sabemos el uso de la tecnología en nuestro siglo es inminente.

El interés es, pues, plantear algunas secuencias que tuvieran el formato de una práctica de laboratorio para que fueran de más fácil acceso tanto para el profesor como para el alumno. Su diseño toma en consideración resultados de la investigación en socioepistemología y en cada práctica se detalla su ejecución a través de los diferentes comandos de la calculadora.

El proyecto

En el aula de matemáticas del siglo XXI, la calculadora no puede quedar relegada al papel de facilitador de cálculos. Su facilidad de transportación y uso la hacen un excelente instrumento para motivar en los alumnos desde nivel básico su uso inteligente, con fundamento en resultados de la investigación en Matemática Educativa.

En ese marco, la utilización de la tecnología se perfila como un medio que ofrece posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance para las metas y objetivos mencionados. Por ejemplo, es factible desplegar en pantalla representaciones múltiples de una misma situación o un fenómeno, y de manejar simultáneamente distintos entornos (tablas numéricas, gráficas, ecuaciones, textos, datos, diagramas, imágenes).

Marco teórico y metodológico

La investigación en Socioepistemología parte de reconocer fenómenos didácticos relacionados con un determinado saber matemático y su uso al seno del aula de matemáticas (Buendía y Cordero, 2005) como se muestra en la figura 1. Para el caso de las prácticas de laboratorio que utilizaremos en esta investigación, se abordaron temas propios de la educación media como función lineal, semejanza de triángulos, desigualdades.

Bajo una aproximación socioepistemológica, resulta necesario realizar una revisión, una búsqueda acerca de las circunstancias que tienen que ver con la construcción de esta propiedad. Ello involucra diferentes fuentes y diferentes tipos revisiones desde aquéllas que tienen que ver con el desarrollo histórico de las propiedades y temas involucrados en el fenómeno didáctico, hasta revisiones sobre la búsqueda del uso de dicho conocimiento en diferentes contextos. Con ello, se integra una epistemología de prácticas la cual presenta el papel de las prácticas en la generación de dicho conocimiento.

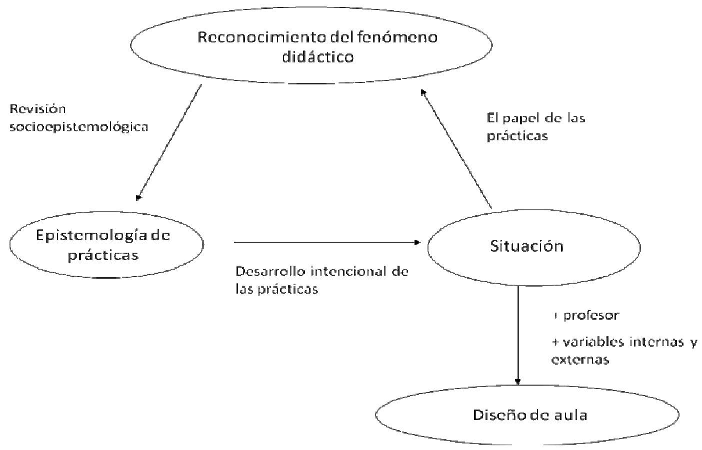


Figura 1. Esquema metodológico para la investigación en Socioepistemología

Sin embargo, dichas prácticas tendrán que reinterpretarse para poder ser llevadas al aula y en ese sentido hay que imprimirles intencionalidad. El proyecto que ahora presentamos utiliza las situaciones diseñadas en forma de *prácticas de laboratorio*, en las que se promueve el desarrollo intencional de ciertas prácticas sociales con el fin de desarrollar conocimiento significativo mediante el uso de calculadoras. Estos diseños en forma de prácticas de laboratorio son el mecanismo para lograr incidir en la reorganización de la matemática escolar.

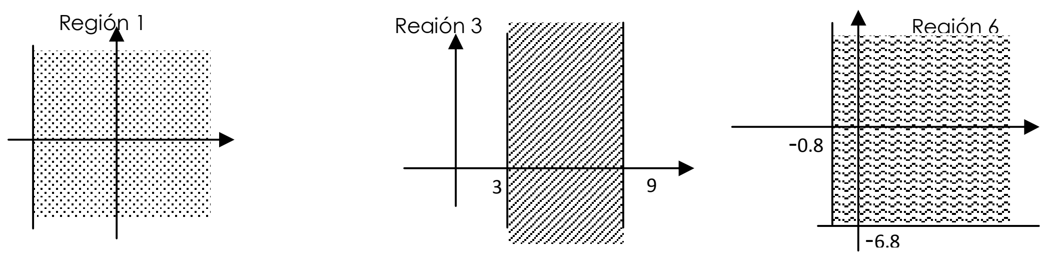
Dos ejemplos de prácticas

Presentamos a continuación dos ejemplos de prácticas con un breve análisis de las ideas de corte socioepistemológico subyacentes. Se incluye una parte representativa de las actividades propuestas en las mismas, así como una ilustración de cómo se va desarrollando con la calculadora –por escrito- en la práctica.

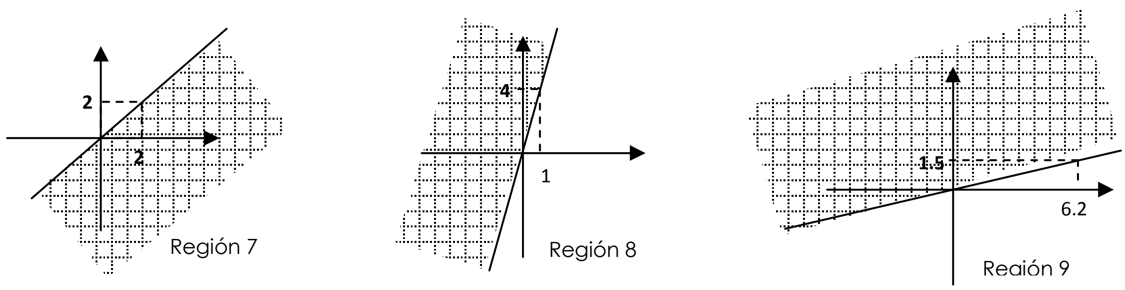
Ejemplo 1. Generando regiones en el plano

Se plantea el uso de de los signos “mayor que” y “menor que” para generar diferentes regiones finitas o infinitas. La calculadora favorece la generación de habilidades de visualización al poder representar de inmediato un cambio de región cuando cambia una instrucción: $y > a$ o $y < a$. Estas habilidades incluyen la generación de argumentos como “se ilumina arriba” o “se ilumna abajo” “a la derecha” o “a la izquierda”: son argumentos extraídos de la actividad que realiza el alumno al involucrarse en tareas matemáticas y no son sólo argumentos pertenecientes a la estructura matemática formal.

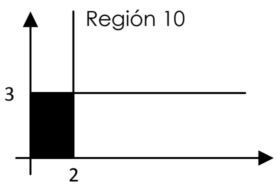
I. Mediante el uso de expresiones del tipo $x>a$, $x< b$, $y >a$, $y < b$, en las que a y b son constantes, generar las siguientes regiones en el plano. Nótese que se trata de regiones infinitas de alguna manera.

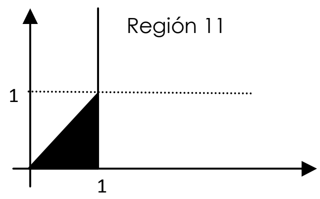


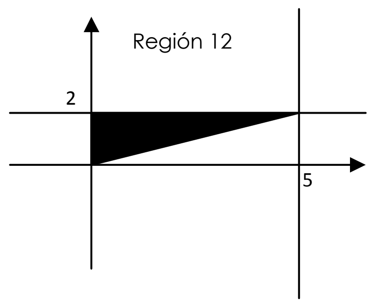
II. Genera las siguientes regiones. En esta ocasión, se hará uso de la expresión $y < ax$ o bien $y > ax$ en las que a es la pendiente de la recta. Como sugerencia, grafica primero la recta que consideres se asemeja a la pedida ($y = ax$) y posteriormente, establece el signo de la desigualdad para hallar la región.



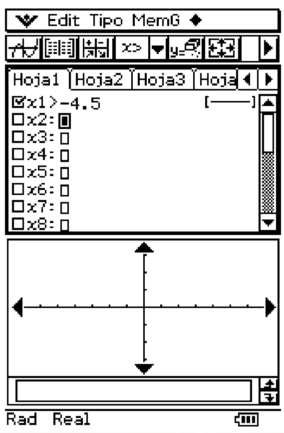
III. Mediante el uso de expresiones del tipo $x>a$, $x<b$, $y>a$, $y < b$, $y<x$, generar las siguientes regiones en el plano. Ahora se trata de regiones finitas

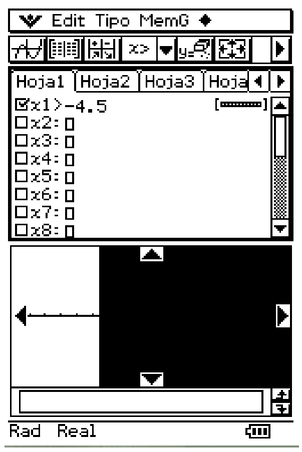






Ejemplo del Desarrollo





Con el lápiz táctil presionar en el recuadro de *x1* Teclear la constante -4.5 y al presionar EXE se formará la expresión x > -4.5; también quedará "palomeada".

Con las desigualdades seleccionadas, graficarlas tocando l lápiz.

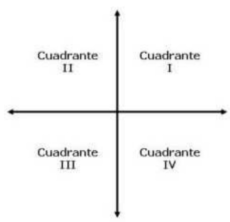
Ejemplo 2. Puntos de intersección

Esta práctica favorece el reconocimiento del significado de los parámetros en una función lineal. Es bien sabido la necesidad de establecer una correspondencia entre el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico, de tal manera que una función lineal no sea vista sólo como un proceso en el que hay que darle valores a una variable *x* para obtener los valores de otra variable *y*. Una función es ahora una instrucción que organiza un cierto comportamiento y es el reconocimiento del efecto de los parámetros el que lo favorece. El menú dinámico de la calculadora permite una manipulación especial de los parámetros ya que el alumno puede ver no sólo un cambio, sino una infinidad de ellos. Adicionalmente, se pretende reforzar la articulación de otros conocimientos como la existencia de cuatro cuadrantes que componen el plano cartesiano. Si normalmente, el discurso escolar favorece la adquisición de un algoritmo para hallar una intersección entre rectas, estas prácticas pretenden que el alumno pueda manipular a voluntad las rectas a fin de que la intersección se encuentre en diferentes secciones del plano: no sólo puede encontrar un punto de intersección, puede hacer que este punto se encuentre donde él lo desee.

I. Grafica el siguiente sistema de ecuaciones : $4x + y = 14.3$; $-2x + 3y = 8$

II. Visualiza la intersección de las rectas; es decir, la solución del sistema de ecuaciones. ¿En qué cuadrante está? Si lo deseas puedes hallar las coordenadas de la intersección con la calculadora

III. Modifica una sola de las ecuaciones moviendo el parámetro ***a*** ó ***b*** de la ecuación ***y = ax+b*** de tal manera que la intersección esté en el tercer cuadrante.

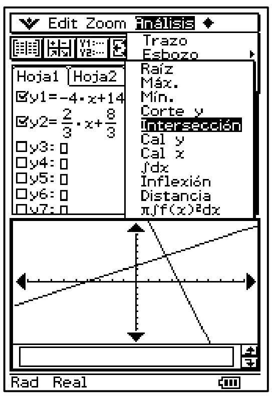


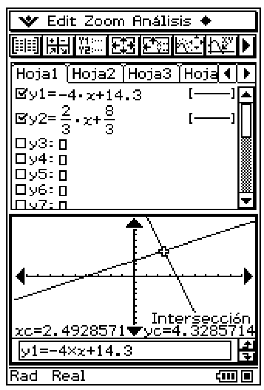
IV. Modifica una de las ecuaciones para que la intersección esté en el segundo y luego en el cuarto cuadrante.

V. Discute las diferentes posibilidades que se tienen al mover los parámetros de las ecuaciones.

Ejemplo del desarrollo

Para encontrar la solución del sistema de ecuaciones abre la ventana de ***Análisis***, pulsa ***Resolución G*** y finalmente ***Intersección***. La calculadora muestra cuál es la intersección de las rectas.





Comentarios finales

Las prácticas diseñadas fueron sólo probadas en un primer ejercicio empírico el cual mostró la viabilidad de las mismas: lenguaje claro, desarrollo de instrucciones para el uso de la calculadora realmente ilustrativo, relación efectiva con el currículo actual. El interés ahora es realizar una investigación más amplia para dar evidencia de su uso en el aula de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Apreza, E. y Ramiro, S. (2005). El Uso de la Calculadora Graficadora en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. En J. Lezama, M. Sánchez, G. Molina (eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, pp. 723-726

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 58. Número 3. 299-333

Briseño, E. (2008). E*l uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav.

Ferrari, M. y Martínez, G. (2003) Construcción de funciones con calculadoras graficadoras. En J. Delgado, (ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16 , pp 710-716. Chile: Lorena Impresores

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología.* Tesis de maestría no publicada. México: Unach.

Este proyecto recibió apoyo del proyecto Conacyt 90398.

De la investigación al aula diseño de secuencias fundamentadas en socioepitemologías del saber matemático.

DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS: UNA ESTRATEGIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Irma Nancy Larios Rodriguez, Manuel Alfredo Urrea Bernal, Gudelia Figueroa Preciado
Universidad de Sonora México
nancy@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación institucional más general titulado "Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística, bajo el esquema del nuevo modelo curricular, del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora", proyecto que surge ante la necesidad de dar respuesta por parte del Departamento de Matemática a los cambios de un nuevo plan curricular implementado en la Universidad de Sonora. Este trabajo se centra en el diseño de actividades didácticas como una estrategia de formación de profesores, reportándose aquí las acciones y actitudes de los profesores en dicho proceso, así como una de las actividades didácticas diseñadas.*

Palabras clave: formación de profesores, estrategia de formación docente, diseño de actividades didácticas, situación didáctica, educación estadística

Introducción

Desde hace algunos años las Instituciones de Educación Superior (IES) en México han intentado resolver los problemas inherentes a la masificación de la educación, es decir la insuficiencia de servicios y, sobre todo, la devaluación de la calidad de enseñanza. Adicionalmente los efectos de la globalización, la elevada velocidad a la que se llevan a cabo los cambios sociales, políticos y económicos, así como los avances en el conocimiento y el desarrollo científico, tecnológico e industrial, han provocado que la sociedad tienda cada vez más a basarse en el conocimiento y la educación, de ahí que la educación superior sea parte fundamental del desarrollo cultural y socioeconómico del país. Lo anterior ha obligado a las IES a emprender procesos de profunda reforma de la educación superior, cambiando sustancialmente sus métodos de enseñanza. Es en el marco de lo planteado anteriormente la Universidad de Sonora ha realizado un proceso de cambio en el Modelo Curricular.

El trabajo

El trabajo se desarrolla dentro de la estructura de Los Lineamientos Generales para el Nuevo Modelo Curricular de la Universidad de Sonora (2003). Muy particularmente, se enfoca en los cursos de estadística que se imparten en el Área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora. Los cursos en mención están ubicados en el Eje Básico de dicho modelo; por otro lado, el Nuevo modelo curricular plantea:

- Fomentar en los estudiantes el descubrimiento y construcción del conocimiento, en oposición a la tendencia predominante de sólo transferencia de conocimientos.
- Centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante y no en el maestro.
- Fomentar la colaboración interdisciplinaria e interdepartamental, en vez de la fragmentación disciplinaria y departamental.
- Introducir el trabajo en equipo en la planta académica y en los estudiantes.
- Promover la flexibilidad, movilidad y vinculación en el desarrollo del currículo.

Lo anteriormente es una forma totalmente distinta a la manera tradicional en que se han presentado los contenidos de los cursos. Particularmente, en el caso de los cursos de estadística, se ha visto que la enseñanza tradicional no impacta significativamente en el entendimiento y retención de los conceptos, ya que habitualmente:

- Se enseñan técnicas aisladas que tratan de unirse al final con algún tipo de aplicación.
- Se enseñan primeramente teorías y fórmulas y después algunos ejemplos.
- Se enfatiza en calcular una respuesta correcta, sin entender para qué se está realizando ese cálculo.

Para el desarrollo del presente trabajo se consultaron diversas fuentes que permitieran exponer y conformar una propuesta, dentro del modelo curricular planteado y apegado a lo que investigadores en el área de educación estadística han formulado.

En la revisión bibliográfica realizada se confirma lo que la práctica de la enseñanza ha demostrado y es que para encontrar la manera más conveniente de diseñar un curso de estadística, lo principal es: Tener claro los objetivos del curso. Se ha visto que no se trata que el estudiante conozca muchas pruebas o herramientas estadísticas sin un objetivo definido, sino desarrollar el curso en términos de lo que estos estudiantes o sus futuros empleadores necesitarán, así como el desarrollar una cultura estadística. Se deben enseñar los conceptos básicos, enfatizar más el curso en el pensamiento o razonamiento estadístico y menos en los cálculos numéricos.

- Mostrar primeramente el uso de la estadística en la vida diaria.
- Poder realizar un análisis exploratorio de datos observados o recopilados en revistas, periódicos, Internet, etcétera y de esta manera la estadística descriptiva.
- Conocer las distintas maneras de obtener datos y las condiciones necesarias para que éstos sean confiables. (Este es un punto que generalmente se descuida en los cursos habituales de estadística)
- Enfrentar al estudiante con la estadística inferencial de manera natural, presentando primeramente el problema de investigación y los objetivos y alcances de ésta, los cuales conducirán de manera sencilla al planteamiento de las hipótesis estadísticas. Ya especificadas éstas, se aplicarán las herramientas adecuadas. Para todo ello se debe seguir un cierto orden, que facilite la exposición y entendimiento.
- Realizar trabajo basado en proyectos. Batanero, C. y Díaz, C. (2005).

Lo que se desea es desarrollar una cultura estadística, como la define Batanero (2002) que es algo más que capacidad de cálculo y conocimiento de definiciones.

Otro aspecto que fue ya señalado por Fischbein en 1975 (citado por Batanero, 2000, p.1) es el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas ha tenido hasta hace unos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: *"En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico".*

Por otro lado, una recomendación muy importante, sugerida por investigadores y contemplada también en el nuevo modelo curricular, es la incorporación de nuevas tecnologías de la comunicación y la información, es decir, el uso de la computadora, de la calculadora, de Internet y de la tecnología de redes, así como el manejo de paquetes computacionales, en la enseñanza de los cursos.

Todo lo expuesto anteriormente, sobre las características y recomendaciones para un buen curso de estadística fueron retomadas en los nuevos currículos; sin embargo para que los cambios realmente se efectúen y no sólo queden escritos en papel, es necesario realizar una serie de acciones, en donde los profesores adscritos al Departamento de Matemáticas, que van a impartir los cursos de estadística, juegan un papel de vital importancia. Dentro de estas acciones, consideramos de vital importancia las siguientes:

a) Capacitar o actualizar a los profesores en la implementación de nuevas formas metodológicas de enseñanzas, alternativas a la enseñanza generalmente sólo discursiva.

b) Capacitar a los profesores en el uso de nuevas tecnologías.

c) Diseñar materiales didácticos, así como notas y problemarios pertinentes.

Bajo el convencimiento que para lograr el real cumplimiento de los objetivos planteados en el nuevo modelo curricular era necesario primeramente incorporar a los profesores que imparten los cursos de estadística e involucrarlos en las actividades anteriormente descritas, ya que esto permitía dar un *seguimiento* exitoso a los cambios curriculares, tan necesarios e importantes que se están dando en La Universidad de Sonora, fue que los responsables del proyecto utilizamos como una *estrategia de capacitación* de los profesores que impartían los cursos de estadística en el Área de Ciencias Sociales el *diseño de actividades didácticas* como el eje central de la capacitación.

Metodología y fundamento teórico

El trabajo con los profesores se realizó en el marco de un Seminario-Taller sobre la enseñanza de la estadística durante dos semestres, en el marco del plan de trabajo del proyecto de investigación antes mencionado. El objetivo central del seminario taller fue el diseño de actividades didácticas para los cursos de Estadística Descriptiva e Inferencial del área de Ciencias Sociales, en el marco del nuevo modelo curricular en el que se concibe al estudiante como un sujeto activo en el proceso educativo en donde asumirá su propio aprendizaje resolviendo situaciones problemáticas.

En este Seminario-Taller se trabajó con 15 profesores que impartían cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales, con formaciones muy diversas. La metodología implementada se baso en la revisión de los lineamientos del nuevo modelo curricular; búsqueda de artículos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística; la realización de un seminario para análisis y reflexión de los mismos; búsqueda de ejemplos con orientación en el área en cuestión; implementación de un taller para el diseño de actividades didácticas, muchas de ellas fundamentándose en los artículos previamente analizados; aplicación de las actividades a los estudiantes con la intensión de retroalimentar y mejorar las propuestas. Aunque la responsabilidad de diseño fue en pares, estas fueron retroalimentadas por el colectivo tanto antes, como después de su aplicación a los estudiantes por parte de los profesores participantes.

El trabajo realizado por los profesores fue organizado de tal forma que ellos realizaran un proceso similar a la que se esperaría realizarán sus estudiantes durante el proceso de aprendizaje, de tal forma que el trabajo se fundamento en la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau. Brousseau (citado por Gálvez, 1994, p.10), definía la situación didáctica de la siguiente manera:

> *Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor como un fin de permitir a los alumnos a reconstruir algún conocimiento.*

En la estrategia, la situación didáctica para los profesores fue el diseño de las actividades didácticas para los cursos de estadística, utilizando para ello elementos de seminario, de su propia experiencia como docentes y/o realizando consultas bibliográficas diversas. Los responsables del proyecto asumimos el rol del profesor.

Resultados

Los profesores se interesaron en el reto que les implicaba diseñar la(s) actividades didácticas bajo un esquema diferente al tradicional; ellos formaron un papel activo en el propio proceso de formación, al diseñar actividades, exponerlas al resto del colectivo, discutirlas e incorporar las sugerencias que se consideraban pertinentes. Los profesores jugaron un rol distinto a los cursos de capacitación tradicionales, donde tradicionalmente el rol principal lo juega un instructor y los profesores son sólo receptores de la información.

Las actividades didácticas constaron de dos partes, una de uso exclusivo del profesor donde se plateaba: el objetivo de la actividad, los materiales necesarios, el tiempo estimado para su realización, antecedentes, la estrategia de trabajo y las referencias consultadas y de una hoja de trabajo para uso de los estudiantes.

A manera de ejemplo al final de este trabajo se presenta la primera parte de una actividad didáctica. La actividad completa así como el resto de las actividades didácticas que se diseñaron se encuentran disponibles en la siguiente página Web: http://estadistica.mat.uson.mx/. Estas fueron publicadas por el Departamento de Matemáticas y actualmente son de uso generalizado entre los profesores que imparten cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales, propiciando una retroalimentación al trabajo realizado.

Conclusiones

Un factor fundamental en el éxito de la estrategia fue la participación activa de los profesores en las diversas actividades realizadas ya que esto permitió por un lado que se convencieran de la necesidad de cambiar las prácticas tradicionales de enseñanza que casi todos ellos declararon realizar, en el sentido de ser el profesor quien presenta la información en la clase de manera verbal, realiza ejemplos de cierto tipo de ejercicios y posteriormente pone al alumno a resolver ejercicios del mismo tipo; por otro lado que conocieran formas metodológicas alternativas de desarrollar la clase. El hecho de ser los propios profesores los que diseñaron las actividades didácticas permitió que las implementaran con sus estudiantes con una estrategia didáctica pensada para incidir en el logro de los objetivos planteados en dichas actividades acorde a lo establecido en los objetivos generales del nuevo modelo curricular, situación que no es fácil de lograr cuando a los profesores se les solicita que implementen actividades diseñadas por terceras personas, aun cuando reciban una capacitación al respecto.

Sin lugar a duda existen muchas estrategias para la formación de profesores, el diseño de actividades didácticas nos parece una excelente estrategia, en nuestro caso la concreción del diseño de actividades, su aplicación y publicación como un producto colectivo, son un ejemplo de ello.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000*). ¿Hacia dónde va la educación estadística?, Blaix* , 15, 2-13.

Batanero, C. (2000*).Los retos de la Cultura Estadística*. Conferencia Inaugural en las Jornadas Interamericanas de la Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires.

Batanero, C. y Díaz, C. (2005). *El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística.* Conferencia presentada en el I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal Guimarães, Portugal.

Colegio Académico de la Universidad de Sonora. (2003). *Lineamientos Generales para un Modelo Curricular en la Universidad de Sonora*. Gaceta Unison (edición especial).

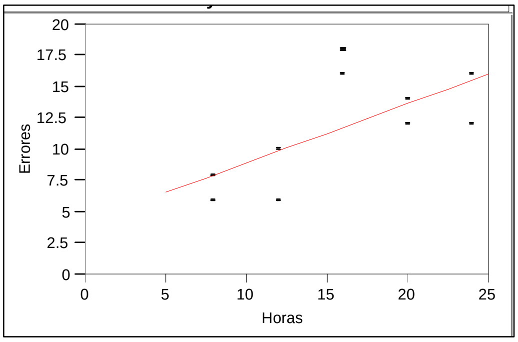
Galvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C, Parra, I. Sainz (comp.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

Anexo

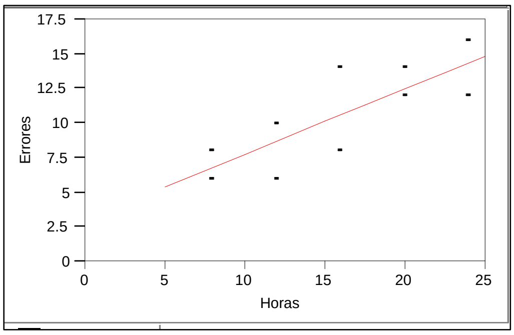
Regresión y Correlación
Objetivo
• Que el estudiante, sobre la base de un problema planteado, asocie ecuaciones de regresión con sus correspondientes diagramas de dispersión. • Que el estudiante interprete la ecuación de regresión obtenida en términos de las variables estudiadas. • Que el estudiante descubra que existe una relación entre los coeficientes numéricos de la ecuación de regresión y la pendiente e intersección de la línea de regresión. • Que el estudiante reconozca la importancia de efectuar un análisis gráfico al estudiar un conjunto de datos correlacionados.
Materiales
• Actividad por escrito • Lápiz y Papel
Tiempo Estimado
2 Horas

Antecedentes
Los estudiantes deben estar familiarizados con la construcción de diagramas de dispersión, con el cálculo de la ecuación de la recta de regresión y el coeficiente de correlación lineal.
Estrategia de Trabajo
1. La actividad se entregará por escrito a cada uno de los estudiantes. 2. Se formarán equipos para discutir la manera de asociar los diagramas de dispersión con las ecuaciones correspondientes. 3. Los estudiantes interpretarán las ecuaciones de regresión, en relación a las variables estudiadas. 4. Antes de finalizar la clase y a criterio del maestro, se solicitará que dos equipos expongan ante todos sus resultados. 5. Posteriormente se llegará a la solución correcta, trabajando en forma grupal. 6. Finalmente el profesor institucionaliza los conceptos. Nota: Se brindan cinco ecuaciones de regresión y solamente cuatro diagramas de dispersión con la finalidad de que el estudiante concluya porqué una de estas ecuaciones no es aplicable a ninguno de los diagramas proporcionados.
Referencias
Richard L. Scheaffer, M. Gnanadesikan, A. Watkins, J. A. Witmer, (1996), *Activity Based Statistics. Instructor Resources*. New York: Springer Mendenhall, W., Schaeffer L. Richard, Wackerly D. Dennis (2002). *Estadística Matemática con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica F.J. Anscombe, (1973). Graphs in statistical analysis. *The American Statistician,* Vol. 27, Num.1., pp. 17-21

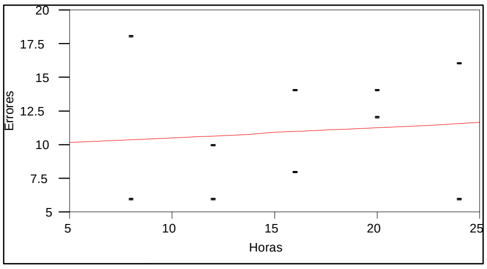
Problema 1. Se realizó un estudio para determinar los efectos que él no dormir tiene en la capacidad de las personas para resolver problemas sencillos. La cantidad de horas sin dormir varió de 8, 12, 16, 20 y 24 horas. Diez personas participaron en el estudio, y se asignaron dos para cada nivel de horas sin dormir. Se dieron a cada persona, después del período específico sin dormir, un conjunto de problemas sencillos de sumar, y se registró el número de errores efectuados. Se obtuvieron los siguientes resultados



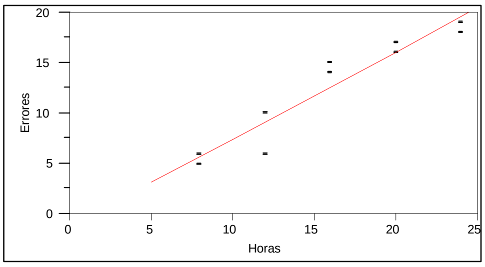
Gráfica a



Gráfica b



Gráfica c



Gráfica d

1. Núm. De Errores = 3 + 0.475 (Horas sin Dormir); Coef. De Correlación = 0.8015
2. Núm. De Errores = 4.2 + 0.475 (Horas sin Dormir); Coef. De Correlación = 0.6643
3. Núm. De Errores = 4.2 - 0.575 (Horas sin Dormir); Coef. De Correlación = -0.7515
4. Núm. De Errores = -1.2+ 0.8625 (Horas sin Dormir); Coef. De Correlación = 0.9561
5. Núm. De Errores = 9.8+ 0.075 (Horas sin Dormir); Coef. De Correlación = 0.1005

a) Sobre la base del problema planteado y antes de analizar cualquier gráfica, emita una opinión sobre las características del diagrama de dispersión y la ecuación de regresión a obtener.

b) Asocie cada uno de los diagramas de dispersión con alguna de ecuaciones propuestas.

c) Interprete la ecuación de regresión y el coeficiente de regresión seleccionado.

UNA EXPERIENCIA EN LA CAPACITACION DE PROFESORES: PROYECTO DE SEGUIMIENTO DE LA IMPARTICION DE LOS CURSOS DE ESTADISTICA, BAJO EL ESQUEMA DEL NUEVO MODELO CURRICULAR DEL AREA DE CIENCIAS SOCIALES DE LA UNIVERSIDAD DE SONORA

Irma Nancy Larios Rodríguez, Gudelia Figueroa Preciado
Universidad de Sonora México
nancy@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En el presente escrito, se describe el desarrollo, así como los productos obtenidos en un proyecto de investigación institucional, titulado "Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística, bajo el esquema del nuevo modelo curricular, del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora", el cual fue concebido como una estrategia de formación para los profesores que imparten cursos de estadística en las licenciaturas del área de Ciencias Sociales, ante la necesidad de dar respuesta por parte del Departamento de Matemática a los cambios de una reforma curricular implementada en la Universidad de Sonora, México.*

Palabras clave: formación de profesores, estrategia, reforma curricular

Introducción

La reforma en los planes de estudio que, se ha estado impulsando en la Universidad de Sonora en los últimos años, en la que de forma explícita se manifiesta la intensión de centrar el proceso educativo en los estudiantes, exige la necesidad de desarrollar estrategias didácticas por parte de los profesores a través de las cuales se espera que los estudiantes generen el conocimiento disciplinar que se contempla en los programas de las materias, así como desarrollar las habilidades necesarias, para que, como futuros profesionistas puedan resolver exitosamente la problemática que la sociedad genera.

La reforma curricular se realizó en todos los programas de licenciatura que ofrece la Universidad de Sonora y el Departamento de Matemáticas atiende los cursos de matemáticas en los distintos programas de licenciatura, los cambios curriculares repercuten en el quehacer de los profesores, ya que en los nuevos planes de estudio se plantea centrar el desarrollo del proceso educativo en los estudiantes, lo cual genera un compromiso institucional de formar a los profesores para que realicen una práctica docente distinta a la que actualmente realizan. Sin lugar a duda la formación de profesores es una de las acciones fundamentales a impulsar institucionalmente para que la reforma pueda ir avanzando y no quede sólo a nivel declaratorio.

A continuación describiremos la problemática de investigación, las consideraciones teóricas en que se fundamento el trabajo del proyecto, así como el desarrollo del mismo.

Problemática de investigación.

La reforma curricular en cuestión, pretende entre sus objetivos principales:

1. Fomentar en los estudiantes el descubrimiento y construcción de conocimiento, en oposición a la tendencia predomínate de transferencia del conocimiento.
2. Centrar el proceso de enseñanza - aprendizaje en los estudiantes y no en los profesores.
3. Fomentar la colaboración interdisciplinaria e interdepartamental, en lugar de la fragmentación disciplinaria y departamental.
4. Introducir el trabajo en equipo entre la planta docente y los estudiantes.
5. Promover la flexibilidad, movilidad y vinculación en el desarrollo del currículo.
6. Incorporar el uso nuevas tecnologías en la enseñanza.

Por otro lado para los cursos de estadística, diferentes investigaciones (algunas expuestas en Journal of Statistics Education), Batanero (2001), etc., recomiendan:

a) Enfatizar más en los cursos, en el pensamiento o razonamiento estadístico y menos en los cálculos numéricos
b) Mostrar primeramente el uso de la estadística en la vida diaria.
c) Realizar un análisis exploratorio de datos observados o recopilados en revistas, periódicos, Internet, etcétera y de esta manera la estadística descriptiva.
d) Conocer distintas maneras de obtener datos y las condiciones necesarias para que éstos sean confiables. (Este es un punto que generalmente se descuida en los cursos habituales de estadística)
e) Enfrentar al estudiante con la estadística inferencial de manera natural, presentando primeramente el problema de investigación y los objetivos y alcances de ésta, los cuales conducirán de manera sencilla al planteamiento de las hipótesis estadísticas. Ya

especificadas éstas, se aplicarán las herramientas adecuadas. Para todo ello se debe seguir un cierto orden, que facilite la exposición y entendimiento.

f) Realizar trabajo basado en proyectos.

La pregunta entonces es ¿cómo lograr desarrollar estrategias que permitieran ir concretando los objetivos y las recomendaciones planteadas anteriormente? teniendo además, en cuenta que al igual que el resto de las instituciones de nivel superior de México, la planta docente la conforman principalmente, profesionistas formados para desarrollar una actividad distinta a la docencia, de tal forma que los profesores que imparten los cursos de matemáticas en las diferentes programas educativos de la Universidad de Sonora, son licenciados en matemáticas, ingenieros en diferentes ramas, biólogos, geólogos, etc.

Una de las estrategias impulsada por la entonces administración del Departamento de Matemáticas, para la formación de profesores fue, el desarrollo de proyectos de investigación por áreas de acuerdo a la estructura universitaria, que incorporaran el mayor número posible de profesores que impartieran cursos en dichas áreas. En este trabajo, nos referiremos, muy particularmente a uno de ellos intitulado: *"Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística, bajo el esquema del Nuevo Modelo Curricular, del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora".*

Marco teórico

Uno de los referentes teóricos considerado en el desarrollo del proyecto, fue el enfoque sistémico como lo señala Brousseau (1989), esto es considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos, el saber enseñado y el medio; que es el subsistema sobre el cual actua el estudiante como son materiales, textos, situaciones didácticas, tecnología, etc.

Por otro retomamos el planteamiento hecho por Godino, D'Amore, y Font (2007):

"Las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir las siguientes expectativas:

- *El profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación;*

- *El alumno debe cumplir las condiciones establecidas por el profesor;*
- *La relación didáctica debe "continuar, cueste lo que cueste:*
- *Se supone que el profesor crea las condiciones suficientes para la apropiación de los conocimientos por los alumnos y debe "reconocer" esta apropiación cuando se produce"*

Particularmente en el diseño de actividades didácticas consideramos entre otras cosas, propiciar el desarrollo en los estudiantes una cultura estadística en el sentido que lo propone Batanero (2002), tratando de responde al cuestionamiento, ¿Cuáles son las destrezas, conocimientos y valores que permanecen inalterables o preparan a los estudiantes para la autoformación futura?

Adicionalmente se retoma como referente de enseñanza en la estadística, el desarrollo por parte de los estudiantes de proyectos tal como presenta Batanero (2001). Bajo el convencimiento de que los problemas y ejercicios, de la mayoría de los libros suelen concentrarse en los conocimientos técnicos y los cálculos, pero el trabajar con proyectos permite contextualizar la estadística y hacerla más relevante, reforzando el interés en los estudiantes, sobre todos si son ellos los que eligen el tema a desarrollar en el proyecto, mostrándoles además que la estadística no se reduce sólo a contenidos matemáticos.

Desarrollo del Proyecto y Metodología implementada

El objetivo principal del proyecto consistió en dar un seguimiento a las materias de Estadística del área de Ciencias Sociales. Este seguimiento tenía como intensión lograr que los profesores que impartían los cursos de estadística atendieran los contenidos temáticos en tiempos homogéneos, con estrategias de enseñanza didácticas similares, acordes a lo expuesto en el apartado de la problemática de investigación.

El proyecto se desarrolló desde 2004 hasta el 2007, se trabajó con 20 profesores que impartían cursos en el área de interés, con formaciones muy diversas y la mayoría con al menos 10 años de experiencia docente.

La metodología implementada fue:

1) Involucrar a la mayoría de los maestros que impartían cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales, esto era sumamente importante dado que la reforma curricular plantea nuevas

estrategias para abordar los cursos, que consideramos ellos desconocen. Así como para su participación en el diseño de materiales didácticos;

2) Revisión por parte de integrantes del proyecto de la nueva reforma curricular;

3) Se participo en diversos cursos de actualización disciplinaria y de formación didáctica;

4) Realización de un seminario sobre la enseñanza de la estadística, en el cual se expusieron, por los integrantes del proyecto, artículos de investigación sobre la enseñanza de la estadística, un producto adicional de dicho seminario fue la traducción y edición de dichos artículos;

5) Diseño de actividades didácticas;

6) Trabajo interdiciplinario con los docentes de licenciaturas del área;

7) Se impulso el trabajo basado en proyecto por parte de los estudiantes.

Nos parece importante señalar que los participantes en este proyecto, nos reunimos al menos una vez por semana, en sesiones de dos horas durante el tiempo que duro el proyecto, para dar seguimiento y/o concretar las diferentes actividades planteadas en el plan de trabajo semestral del proyecto. Adicionalmente durante los periodos inter semestrales, realizábamos sesiones de cuatro horas para la concreción del diseño de las actividades y/o realizar actividades de capacitación.

El diseño de actividades didácticas fue una de las acciones que permitió integrar la mayoría de las acciones que se realizaron durante el proyecto, por tal motivo nos parece importante describir su desarrollo. Lo anterior se realizó en el marco de un Seminario-Taller sobre la Enseñanza de la Estadística durante dos semestres, siendo objetivo central del seminario taller: el diseño de actividades didácticas para los cursos de Estadística Descriptiva e Inferencial del área de Ciencias Sociales, que permitieran la conducción del proceso de enseñanza, bajo los lineamientos de la reforma curricular, la cual concibe el estudiante como un sujeto activo en el proceso educativo en donde asumirá su propio aprendizaje resolviendo situaciones problemáticas.

Para el diseño de las actividades didácticas, se considero la revisión de los lineamientos de la reforma curricular, los contenidos disciplinares marcados en los programas de los cursos, las recomendaciones encontradas en artículos y reportes de investigación, previamente seminariados, así como la experiencia que como docentes los profesores tenían, además se incorporaron contextos con orientación en el área en cuestión. Las actividades diseñadas se aplicaban a los estudiantes con la intensión de retroalimentar y mejorar las propuestas y, aunque la responsabilidad de diseño fue en pares, estas fueron retomadas por el colectivo tanto antes, como después de su aplicación a los estudiantes por parte de los profesores participantes.

Es sumamente importante destacar que el trabajo realizado en el seminario-taller por los profesores, fue organizado de tal forma que ellos realizaran un proceso similar a la que se esperaría realizarán sus estudiantes durante el proceso de aprendizaje, así los responsables del proyecto asumimos el rol del profesor.

Productos

Entre los productos relevantes del proyecto podemos señalar los siguientes: diseño de actividades didácticas para los cursos de acuerdo a los lineamientos de la reforma curricular, estas actividades fueron editadas para su uso generalizado por el Comité Editorial del Departamento en Matemáticas; realización de foros de estudiantes basados en proyectos, traducción de artículos de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la estadística, presentación de ponencias en eventos académicos regionales, nacionales e internacionales, construcción de una página web (http://www.estadistica.mat.uson.mx), en esta página se encuentran puestos los productos obtenidos durante el proyecto, además que actualmente es otro recurso para los profesores que imparten cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales.

Enfatizamos el hecho, que, para el desarrollo de trabajo del proyecto se consideraron los contenidos disciplinares tanto del programa de materia del curso de Estadística Descriptiva, como del curso de Estadística Inferencial. A manera de ejemplo del tipo de actividades diseñadas, anexamos al final de este trabajo una de ellas, por cuestiones de espacio, sólo presentamos uno de los dos problemas que la conforman. El programa de materia y las actividades didácticas diseñadas, están puestas en línea en la página web, mencionada en el párrafo anterior.

Conclusiones

Como este trabajo está centrado en campo de investigación de formación de profesores, las conclusiones son en esa dirección, los resultados obtenidos con los estudiantes será motivo de otro reporte de investigación.

Sobre los aciertos, podemos señalar como el más importante, el hecho de haber incorporado a los profesores en el diseño de actividades didácticas, pensadas para incidir en el logro de los objetivos de la reforma curricular, ya que esto, permitió integra muchas de las actividades desarrolladas en el proyecto y que desde nuestro punto de vista incidieron directamente en una visión diferente del quehacer docente de los participantes, además que les permitió implementarlas adecuadamente en su salón de clase, situación que no es fácil de lograr cuando a los profesores se les solicita que utilicen actividades diseñadas por terceras personas, aún cuando reciban una capacitación al respecto.

Consideramos que logramos modificar sustancialmente, la práctica docente de los profesores involucrados, ya que la mayoría declaraba realizar una práctica docente basada exclusivamente en la exposición. Adicionalmente Logramos consolidar un grupo de trabajo convencido de continuar trabajando, en forma colaborativa en la misma dirección.

Así mismo creemos que el impulsar el desarrollo de proyectos de investigación por parte de los estudiantes, como uno de los ejes centrales del desarrollo de los cursos de estadística descriptiva, así como el presentar esos proyectos en foros abiertos, es otra de las muestra sobre un cambio de la práctica docente de los profesores que participaron en este proyecto.

Sin embargo, estamos consientes que este proyecto fue sólo el inició de un arduo trabajo para el logro del los ambiciosos objetivos que dieron origen este a él. Actualmente estamos desarrollando otro proyecto que empuja en la misma dirección.

Referencias bibliogáficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada, España: GEEUG. Departamento de Didáctica.

Batanero, C. (2002). *Los retos de la Cultura Estadística*. Jornadas Interamericanas de la Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Conferencia Inaugural.

Batanero, C y Díaz C (2005). ¿ *El papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística?*. I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal Guimarães, Portugal.

Brousseau, Guy (1986*). Fundamentos y métodos de la didáctica*, *RDM* Nº 9 (3). Versión en español publicada por Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.

Colegio Académico de la Universidad de Sonora (2003). *Lineamientos generales para un modelo curricular en la Universidad de Sonora*. Gaceta Unison (edición especial).

Godino J. Documento de trabajo del curso de doctorado *"Teoría de la educación Matemática"*. Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/.

Godino, J. B, D'Amore y V, Font (2007). *La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Paradigma, Vol. XXVIII, Nº 2, diciembre de 2007, p.49-77.

Anexo

Introducción al Análisis Descriptivo de Varias Muestras Independientes

Problema 1: En una escuela primaria hay cuatro grupos de quinto grado. De cada grupo se escogen, por sorteo, cinco alumnos a los que se les aplica una prueba de matemáticas. Si la recta numérica es una varilla sin peso, y en los puntos asociados a cada calificación se colocan tantos ganchitos, de igual peso, como veces se presenta esta calificación, entonces cada imagen corresponde a uno de los grupos evaluados. La media está representada por el punto en el que la varilla queda suspendida en equilibrio, y el valor del rango por la distancia entre los ganchitos extremos.

Imagen 1

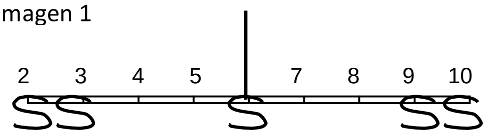


Imagen 2

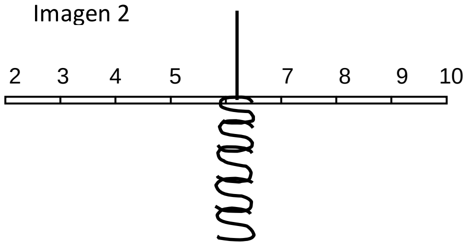


Imagen 3

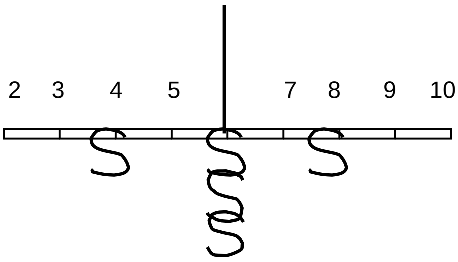
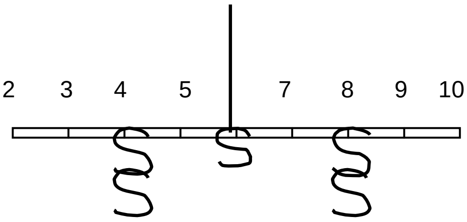


Imagen 4



a. Observe los valores que presentan la media y el rango en cada grupo y compare estos resultados entre los diferentes grupos. Diga si ello es suficiente para diferenciar a los grupos en cuanto a su aprovechamiento.

b. Intente comparar las varianzas observando solamente las imágenes, sin efectuar cálculo alguno. Proponga una ordenación de los grupos sobre la base de estas varianzas.

c. Realice ahora el cálculo analítico de las varianzas para cada grupo y compare los resultados con los que usted propuso en el inciso anterior. Sobre la base de los resultados obtenidos, decida cuál fue el mejor grupo en cuanto a su aprovechamiento

Nota: Todas las actividades señalan: El objetivo pretendido, los materiales necesarios, tiempo estimado y antecedes para su realización, así mismo la estrategia de trabajo para su implementación, como las referencias bibliográficas. Por cuestiones de espacio, aquí sólo presentamos una parte de una de las hojas de trabajo que se les proporciona a los estudiantes. Al entrar a la página web a ciencias sociales-actividades de Estadística Descriptiva o de Estadística Inferencial, a la vista sólo están las hojas de los estudiantes, para observar la actividad completa hay que ingresar a la instrucción maestros (ubicada en la parte central superior) la contraseña: lorena.

CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES: UN ESTUDIO EN UN ESCENARIO VIRTUAL

José Canché Gómez[1], Rosa María Farfán[1], Gisela Montiel[2]
[1]CINVESTAV – IPN México
[2]CICATA – IPN
jfcg20@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo pone en evidencia cambios en la concepción del profesor de matemáticas en servicio, referida particularmente a la noción de función lineal y de su proceso de enseñanza y aprendizaje, que se logran en un proceso de formación docente fundamentado en resultados teóricos y experimentales producto de la Matemática Educativa y organizado con base en las pautas instruccionales propias de la educación a distancia en línea. Es decir, no obviamos, ni trivializamos el escenario, por el contrario acentuamos las posibilidades de comunicación, interacción e interactividad que permite que este cambio de concepciones sea producto de la discusión, la reflexión y la producción personal y colectiva.*

Palabras clave: creencias, concepciones, cambio de concepciones, educación en línea

Introducción

Nuestra sociedad actual demanda que la Educación ofrezca nuevos escenarios para la formación de profesores, como consecuencia a ello, se ha optado como alternativa la Educación a distancia, en línea. Resulta claro que ofrecer alternativas que buscan transformar y adaptar la educación, no es una labor sencilla, factores como las concepciones arraigadas a un escepticismo sobre su uso pedagógico, pueden entorpecer dicho sendero educativo. Pero es con la práctica y el uso de esa tecnología que surge la necesidad de encontrar elementos teóricos que sustente los fenómenos de enseñanza y aprendizaje propios de la educación a distancia (Montiel, 2002).

En México, la educación en línea se ha empleado como un medio para colaborar en la formación de profesores de Matemáticas, en servicio. Partiendo que cualquier curso de formación y actualización en didáctica de la matemática filtra en una dualidad de estabilidad y cambio, y la necesidad de comunicación e interacción con otros es aún muy necesaria para la construcción social del mismo aprendizaje, resulta que para muchos profesores esto encierra un cambio sustancial de ideas, especialmente para aquellos que no son conscientes de sus creencias. Básicamente, requiere un proceso de deshacerse de sus propias ideas sobre los fines, métodos y la naturaleza de las matemáticas (Dörfler, 1990, citado en Flores, 1998).

Es válido señalar que los cursos de formación no son un acto mágico que transforme un todo, de la misma manera, se hace énfasis que la incorporación de herramientas tecnológicas no propicia radicalmente un cambio de ideas. Sin embargo, experimentar formas alternativas de hacer y aprender matemáticas puede producir cambios en la concepciones de cómo la matemática es aprendida y sobre formas efectivas de construir experiencias matemáticas para los aprendices (Llinares, 1991). Entonces, a través de la experiencia, los profesores nos vamos forjando una idea de los que es la matemática y de lo que significa hacer matemáticas; cómo debe ser transmitida,... Inmerso en ello se encuentran nuestras concepciones y creencias que nos permiten dar respuesta a cuestiones relacionadas con estos aspectos educativos (Uicab, 2006).

De manera muy particular, la concepción de la matemática está configurada por la formación inicial, la experiencia docente, el contexto y el grupo social donde uno se desarrolla, entre otros. Por su parte, los profesores en su estatus profesional enfrentan un doble rol en los cursos de formación, el de alumno y el de profesor, pero su aprendizaje es un fenómeno que refleja su propia naturaleza social como ser humano por lo que es imposible obtener aprendizajes sin generalizarlo, evaluarlo y categorizarlo en su mente, permitiendo cambios en la forma de percibir las cosas, entonces, resulta claro que para dilucidar las concepciones se necesita analizar lo que hacen y dicen.

El objetivo de este trabajo es: “Describir los cambios de concepciones de los profesores de matemáticas, cuando se encuentran participando en un curso de formación, en un escenario virtual”, para ello se planteó los siguientes objetivos particulares:

- Identificar las concepciones de cada uno de los profesores de matemáticas, antes del inicio del curso en línea.
- Identificar las concepciones de cada uno de los profesores de matemáticas, al concluir el curso en línea.
- Confrontar las concepciones iniciales con las concepciones finales de cada uno de los profesores.
- Analizar de manera particular y general, los cambios emergentes en las concepciones de los profesores

Sustento Teórico

La aproximación socioepistemológica busca una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas y busca intervenir en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción y adquisición y difusión del conocimiento matemático (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez, 2006). Lo anterior adquiere sentido bajo el supuesto de que existen cuatro dimensiones que condicionan la construcción social del conocimiento matemático: la dimensión cognitiva, la didáctica, la social y la epistemológica. La idea esencial que subyace a esta aproximación es que el ser humano posee diferentes dimensiones o componentes que los conforman como tal y que condicionan (aunque no lo determinen) la manera en que construye conocimiento. Esta suposición es un rompimiento con los enfoques reduccionistas que toman en cuenta sólo alguna de las dimensiones del ser humano (Martínez & Farfán, 2002).

En esta investigación se consideró a las concepciones como aquellos organizadores de naturaleza más compleja que las creencias, que incluye creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales y preferencias que influyen en los procesos de razonamiento que se realiza, tal como señalan Llinares (1991), Thompson (1992) y Moreno y Azcárate (2003). Además, las concepciones son parte del conocimiento, siendo un producto del entendimiento y actúan como filtro en la toma de decisiones (García, Azcárate & Moreno, 2006). Por lo antes señalado, a partir de las creencias, se quiere obtener información sobre las concepciones.

Las concepciones, entendidas como organizadores de naturaleza más compleja que las creencias, permiten analizar la cognición del individuo tanto en su construcción individual como en su pertenencia a un grupo social específico. Es decir, hablaremos de concepciones para denotar el aspecto cognitivo, conceptual y consciente que organiza el pensamiento del individuo, que afecta y es afectado por el contexto social al que pertenece.

Así, se entenderá que las creencias son aquellas ideas o conformidades que se tiene con respecto a algo y carecen de rigor para mantenerlas. De lo anterior, se puede constatar que las creencias se fundamentan sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que la hacen ser más conscientes y duraderas para cada individuo (Moreno & Azcárate, 2003; Llinares, 1991; Pajares, 1992). Además, es necesario tener en cuenta que las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas) (Gil & Rico, 2003).

Recolección de datos

Dado que nuestro objetivo es fundamentalmente descriptivo – interpretativo, se ha partido de un sistema de categorías de concepciones, elaboradas después de revisar el contenido y objetivos del tema "*Práctica educativa basada en la visualización y desarrollo del pensamiento matemático".*

Las categorías fueron:

- Concepciones sobre el concepto de función lineal.
- Concepciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal.
- Concepciones sobre proceso de evaluación del concepto de la función lineal

Cada categoría dará lugar a la obtención de información individual y del grupo.

Antes de iniciar el curso, se realizó una entrevista a través del MSN (Programa de mensajería instantánea), luego se aplicó dos cuestionarios de preguntas abiertas, donde los profesores plasmaron sus ideas, estos dos primeros cuestionarios se subieron a la página Web del Diplomado como parte de las actividades del curso, el primero es de tipo teórico y el segundo de tipo teórico – práctico. Finalmente, un día después de concluir el curso, se aplicó un cuestionario de preguntas abiertas de tipo teórico – práctico, y una semana después, se solicitó que los profesores expresaran sus opiniones y observaciones sobre sus propios cambios de concepciones sobre el concepto de función lineal, su proceso de enseñanza y aprendizaje y su proceso de evaluación.

Cabe señalar, que las categorías dieron la pauta para elaborar los ítems de la entrevista y de los cuestionarios. Además, todos los cuestionarios tenían referencias similares sobre la función lineal, el proceso de enseñanza y aprendizaje y su proceso de evaluación, con la intencionalidad de compararlas y explicitar mejor el cambio de concepciones. La utilización de estos métodos permitió acceder a los procesos internos de los profesores.

Escenario y Población de la Investigación

La investigación se llevó a cabo con 3 profesores de un total de 11 inscritos al tema "*Práctica educativa basada en la visualización y desarrollo del pensamiento matemático"* del Diplomado "Introducción a la matemática educativa" que se imparte en línea en el CICATA – IPN. Se eligió a los profesores que dieron pronta respuesta a la solicitud de la entrevista y que también hayan concluido todo el tema.

Los profesores seleccionados son:

Profesor Ángel. Es un profesor con 8 años de servicio a nivel superior con una formación en Ingeniería Eléctrica, indica que durante su formación tuvo dificultades por las matemáticas y que tiene un agrado por enseñar.

Profesora Alina. Es una profesora con 26 años de servicio en diferentes niveles (actualmente en Superior) con un postgrado en Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias. Indica que nunca tuvo dificultad con las matemáticas.

Profesor Luís. Es un profesor con 8 años en servicio a nivel medio superior con una formación de Licenciado en Educación Media con especialidad en Matemáticas. Declara que le gustaron las matemáticas desde pequeño.

Análisis y discusión de los resultados

En términos generales, después de realizar un análisis particular y general de las concepciones de los profesores, se puede inferir que al concluir el curso los tres profesores destacan la importancia de incorporar el carácter geométrico en la enseñanza, de igual manera reconocen que la tecnología es una herramienta que debe ponerse en uso en el aula.

A continuación se explica brevemente cada uno de los resultados obtenidos, presentando al final del apartado un cuadro de resumen de las concepciones identificadas antes y después del curso.

El cambio de concepciones sobre el concepto de la función lineal

Antes del curso se interpretó que los profesores tenían una concepción similar al concepto de la función lineal, se consideró como un concepto estático, pero después del curso lo trasladaron a un contexto geométrico con una formalidad en el concepto.

El cambio de las concepciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal

Existe un cambio considerable, inicialmente se parte de diferentes enfoques sobre el proceso y finalmente se converge a que el proceso de enseñanza y aprendizaje debe conllevar un acto de discusión, de investigación, de cuestionamiento y por consiguiente, autonomía del estudiante.

Las concepciones sobre el proceso de evaluación de la función lineal

Sobre el proceso de evaluación, se encontró discrepancias entre las ideas identificadas de cada profesor; sin embargo, las concepciones identificadas no aportan elementos suficientes para sistematizar que haya existido un cambio significativo en las concepciones.

Cuadro de resumen de concepciones de los profesores antes del curso

	Función Lineal	Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la función lineal	Proceso de evaluación de la función lineal
Ángel	Concepto incuestionable y útil en la vida diaria	Transmisión de habilidades por repetición de ejercicios sobre función lineal, a partir de la mecanización, repetición y memorización.	Verificación de saberes académicos e institucionales, basados en el recuerdo.
Alina	Concepto incuestionable y útil en la vida diaria	Transmisión de habilidades por repetición de ejercicios sobre función lineal, a partir de la mecanización, repetición y memorización. Fomento del aprendizaje individual, a través de autonomía y creatividad, resolviendo ejercicios de función lineal.	Verificación del proceso con la finalidad de mejorar el proceso mismo de enseñanza y aprendizaje de la función lineal.
Luís	Concepto incuestionable y útil en la vida diaria	Resolución de problemas aplicados a la vida diaria, repetición de ejercicios bajo una secuencia deductiva, a partir de la práctica.	Verificación de saberes académicos, basados en el recuerdo.

Cuadro de resumen de concepciones de los profesores después del curso

<table>
<tr><th></th><th>Función Lineal</th><th>Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la función lineal</th><th>Proceso de evaluación de la función lineal</th></tr>
<tr><td>Ángel</td><td rowspan="3">Concepto basado en reglas asociadas lógicamente. Acercamiento hacia un formalismo</td><td rowspan="3">Discusión, investigación, cuestionamiento y autonomía del estudiante.</td><td>Verificación de saberes académicos, institucionales basados en el recuerdo.</td></tr>
<tr><td>Alina</td><td>Verificación del proceso con la finalidad de mejorar el proceso mismo de enseñanza y aprendizaje</td></tr>
<tr><td>Luís</td><td>Verificación de saberes académicos, basados en el recuerdo.</td></tr>
</table>

Consideraciones finales

El identificar las concepciones iniciales permitió probar que la formación profesional de cada profesor, sus intereses, la vinculación y la utilidad del propio concepto de función lineal están directamente ligados con las experiencias de cada docente.

Los cambios significativos que aparecieron a luz, son respecto a las concepciones del concepto de función lineal y al proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto. Las concepciones de los 3 profesores se modificaron hacia una misma orientación, donde el contexto geométrico surge con mayor importancia. Lo anterior queda justificado, la construcción que elabora cada individuo tiene características, en forma, o en medio ambiente que lo hacen construir de una manera similar a los que pertenecen al grupo (Covián, 2005).Sin embargo, estas concepciones dependen más de sus propias ideas afectivas y experiencia que de un conocimiento fundado y de una formación profesional específica, tanto en didáctica como en la propia matemática (García, et al., 2006).

Para las concepciones de la evaluación en relación al concepto de función lineal, no se tiene elementos suficientes para poder inferir un cambio significativo en las concepciones de los profesores.

Este trabajo pone en evidencia de que algunos cambios de concepciones son radicales, clara evidencia de que un curso en línea puede modificar significativamente fuertes concepciones. Entonces, se juzga importante el papel que juega la educación en línea y las posibilidades de comunicación, interacción e interactividad, en la modificación de las concepciones de los profesores que atraviesan un curso de formación, producto de la discusión, la reflexión y la producción personal y colectiva. De esta forma, señalamos que no es válido obviar la organización del mismo.

Finalmente, es importante mencionar que no estamos validando la efectividad del curso, sino únicamente sacamos a luz la existencia de estos cambios y la importancia que se debe tomar, para el diseño de futuros cursos, pues como señala Carrillo (1998) no es efectivo pasar por alto las concepciones de los profesores, suponiendo que un mismo diseño de formación es aplicable a cualquier profesor.

Referencias bibliográficas

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Cantoral, R., Farfán, M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Número Especial), 83 -102.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México, D. F. México.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada, España: Comares.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 9 (1), 85 – 116.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 21 (1), 27 – 47.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla, España: GID, Universidad de Sevilla.

Martínez, G. y Farfán, R. (2002). La convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. En F. Cordero (Ed). *Serie Antológica* (Número 2, pp. 183-228). México: Clame-Red de Cimates.

Moreno M. y Azcárate C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265 – 280.

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning unp a messy contruct. *Review of Educational Research*, 62 (3), 307-332.

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D. (Ed.). *Handbook of research on mathematics Teaching and Learning*, (pp. 127 – 146) New York: Macmillan.

Uicab, R. (2006). *Concepciones y creencias del profesorado de Cálculo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Yucatán.* Recuperado el 26 de Febrero de 2007, del sitio Web de la Facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán: http://www.matematicas.uady.mx/indez.html.

IMPACTO DE UN TALLER DE DISCUSIÓN EN EL CONOCIMIENTO Y EN LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DOCENTE DE MAESTRAS DE PRIMARIA

Erika Lizeth Pérez Vértiz, Simón Mochón Cohen
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN México
lizettt07@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Básico

Resumen. *Este trabajo presenta los resultados del impacto de un taller de discusión en: a) el Conocimiento Matemático para la Enseñanza y b) la reflexión sobre la práctica docente de maestras de primaria. Se realizó un taller de discusión, sobre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza, de algunos temas básicos de aritmética. Las Actividades centrales (Ball & Bass, 2000) fueron elementos guía para diseñar el taller y evaluar resultados. Se hizo observación de clase inicial y final, y de la misma forma se aplicó cuestionario. Los resultados muestran sutiles cambios en el conocimiento de las profesoras: los errores de los niños empiezan a explicarse debido a razones ubicadas en su pensamiento matemático, en algunos casos; el desglose de ideas y las representaciones se enriquecen al impulsar una demanda más explícita en el discurso de las maestras. Sobre su práctica docente, afirman que no conocer las razones de un procedimiento influye en su enseñanza, reconocen la importancia de cuestionar más a los estudiantes y de pensar en representaciones útiles.*

Palabras clave: conocimiento matemático, enseñanza, taller discusión, práctica docente

Introducción

El conocimiento del maestro es complejo y exige una combinación de diferentes dominios de conocimiento: de contenido, de los estudiantes y de pedagogía; además de una serie de demandas en la práctica docente. No obstante, no todos los maestros tienen la combinación de habilidades pedagógicas y conocimiento matemático estructural (Baturo, 2004). Esto es un desafío que se les deja individualmente en los contextos de su trabajo, que si bien ocurre con la experiencia, no se da fácilmente y algunas veces no sucede (Ball & Bass, 2000).

De acuerdo con Martínez (2006) los programas de desarrollo profesional, enfatizan más conocimientos pedagógicos generales y técnicos, alejándose así del desarrollo del conocimiento profesional requerido para enseñar matemáticas.

La teoría del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* se enfoca en las demandas matemáticas del salón de clases y plantea la combinación de una serie de conocimientos tanto pedagógicos, como de contenido y estudiantes (Ball & Bass, 2000). Considerando dichos antecedentes creemos que este conocimiento es relevante en la formación docente y debe incluirse en ésta. Por tanto, llevamos a cabo un taller de discusión con un grupo de profesoras de educación básica, planteando así como problema de investigación: El análisis del impacto de un taller de discusión, en el “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” y en la reflexión de la práctica docente de las maestras.

Marco teórico

En 1986 Shulman introdujo el término *Conocimiento de Contenido Pedagógico* (PCK- Pedagogical Content Knowledge) designando así, a la mezcla de contenido y pedagogía que domina el maestro. Este conocimiento implica entender cómo tópicos particulares, problemas o situaciones se organizan, modelan, se representan y se adaptan a los diversos intereses, concepciones y dificultades de los estudiantes (Shulman, 1987).

Ball y sus colegas estudiaron y analizaron la práctica de enseñanza, desarrollando así, una teoría del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*MKT-Mathematical Knowledge for Teaching) que de acuerdo con Ball & Bass (2000) y Hill & Ball (2004) se enfoca en las demandas matemáticas del salón de clases y es una estructura formada por:

- *Conocimiento Común de Contenido:* conocimiento matemático básico y técnica usada en cualquier escenario.
- *Conocimiento Especializado de Contenido:* Implica descomprimir el conocimiento matemático. Evaluar el origen de un error, desarrollar definiciones utilizables, seleccionar representaciones, así como entender el significado de un procedimiento.
- *Conocimiento de Contenido y Estudiantes:* Enfocado en la familiaridad de ideas y misconcepciones comunes de los estudiantes. Consiste en interpretar su pensamiento incompleto y la emergencia del mismo.
- *Conocimiento de Contenido y Enseñanza:* Referente al diseño de una secuencia didáctica; crear tareas, evaluar las ventajas de las representaciones, identificar con qué métodos y procedimientos se dispone y plantear preguntas desafiantes a los estudiantes.

Inmersas en el MKT, Ball & Bass (2000) identifican las siguientes A*ctividades centrales para la enseñanza de las matemáticas:*

a) Comprender lo que los estudiantes entienden.

b) Analizar y comparar sus métodos y soluciones.

c) Desglosar ideas y procedimientos matemáticos familiares.

d) Elegir representaciones de transmisión efectiva de ideas matemáticas.

Para analizar el MKT en diversas investigaciones (Hill & Ball, 2004; Hill, Rowan & Ball, 2005) se han diseñado ítems, basados en dichas *Actividades centrales*. Por otra parte, Askew, Brown, Denvir & Rhodes (2000) también proporcionan elementos sobre cómo el conocimiento del profesor y su práctica, pueden analizarse. Ellos utilizaron 4 *Componentes del aula:* Actividades o tareas, Conversación, Herramientas, Relaciones y normas.

Otra de las interrogantes alrededor del MKT es cómo generar oportunidades para que los maestros mejoren este conocimiento. Al respecto, Hill et al. (2005) destacan: a) identificar el conocimiento matemático y la técnica más claramente y b) que el desarrollo profesional se focalice en contenido. Aunado a esto, se puede añadir un 3er aspecto: c) el conocimiento del profesor reconstruido a partir de la reflexión sobre su propia práctica (Elliot, 1990).

Considerando nuestro marco teórico y los 3 elementos ya mencionados, diseñamos y llevamos a cabo un programa de desarrollo profesional (un taller de discusión).

Planteamiento del problema y preguntas de investigación

El análisis del impacto de un taller de discusión en el MKT y en la reflexión de la práctica docente de maestras de primaria.

- ¿Cómo impacta el taller en el MKT y en la reflexión sobre la práctica docente de las profesoras participantes? ¿Qué elementos del taller les ayudan a reflexionar?

Método

4.1 Plan general: Estudio de carácter cualitativo, descriptivo y exploratorio. Taller de discusión sobre el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza,* centrado en algunos temas de aritmética del currículo del 1er ciclo de educación básica. Éste se dividió en 4 módulos: de exploración general, de problemas aditivos, de sistema numérico decimal, de algoritmos de suma y resta. Cada uno abarcó de 2 a 4 sesiones. Se aplicó cuestionario inicial y final y de la misma forma se realizaron las observaciones de clase.

4.2 Escenario: Colegio bilingüe de nivel socioeconómico medio en el Estado de México. Se contó con hora y media a la semana para cada sesión. Se dispuso de un aula con espacio suficiente, equipada con pizarrón, ventilador y buena iluminación.

4.3 Sujetos: Tres maestras voluntarias de 1º, y 3 de 2º de educación básica. Todas de licenciatura relacionada con la educación. Se tuvo interés de trabajar con este grupo por la disposición de su parte y por el apoyo de la dirección escolar.

4.4 Instrumentos metodológicos: Tabla para observación de clase (Askew et al., 2000), cuestionarios; inicial y final sobre aspectos del *MKT,* hojas de trabajo con tareas ubicadas en las *"Actividades centrales"* (Ball & Bass, 2000), por ejemplo:

Un niño resuelve la siguiente resta así: 4 12 502 - 6 406	*a)* ¿A qué se deberá su error? *b)* ¿Cómo solucionó la resta? *c)* Describe cómo le explicarías y *d)* haz un modelo de representación para llevarlo a una comprensión adecuada de la resta.

4.5 Procedimiento de validación: Se realizó triangulación de tareas (Cohen y Manion, 1990). Los resultados obtenidos en cada instrumento sirvieron como complemento.

Resultados

5.1 ¿Cómo impactó el taller en el MKT y en la reflexión sobre la práctica docente de las profesoras participantes?

En relación a las *Actividades centrales (a) y (b),* las maestras conocían algunos errores y formas en que sus alumnos interpretan ciertas ideas, sin embargo; éstos se explicaban debido a razones ajenas al pensamiento matemático del niño. Al cuestionarlas sobre las razones fundamentadas en la forma de pensar del alumno, se generó sorpresa, e inquietud en reconocer que hacerse ese tipo de cuestionamientos, era algo nuevo para ellas. Todas ellas afirmaron que a partir de que "se sintieron en los zapatos de los niños", comprendieron lo justificadas que pueden ser ciertas confusiones en los algoritmos. Después de analizar la estructura y operación de ciertos problemas aditivos, afirmaron que ambas operaciones se vinculan y por eso los niños se equivocan o encuentran diferentes caminos de solución.

Referente a la *Actividad central (c)*, se encontró cierta dificultad en su C*onocimiento Especializado de Contenido*. Los principios del sistema decimal, se daban por entendido en los algoritmos. En su discurso los conceptos no eran descompuestos en sus componentes básicos, o bien se mencionaban, pero sin explicitarlos. Los algoritmos de suma y resta, se entendían dentro del *Conocimiento Común de Contenido*, sin una clara comprensión del porqué del procedimiento. Al solicitar que discutieran con sus colegas las situaciones hipotéticas sobre cómo explicarían determinado concepto o problema, se encontró cierto interés por ayudarse, pero este creció, en las actividades en donde a partir de una base numérica diferente a 10, se les pedía solucionar una operación. Se encontró que esto les causaba cierto desafío y entonces, tendían a ayudarse más. Esto también influyó para que afirmaran que, a pesar de conocer el procedimiento algorítmico, realmente no tenían claro el porqué "se lleva una" o "se pide prestado".

En relación a la *Actividad central (d)*, sus representaciones eran escasas o sin especificación de lo conceptual; para sistema decimal, nulas; para algoritmos y para problemas verbales. Más bien en su práctica se enfatizaban ejercicios como series numéricas, algoritmos y solución de problemas centrados en identificar palabras clave para saber qué operación realizar. En algunos casos, cuando se les solicitaba que comentaran o compartieran al grupo de colegas, la representación que habían hecho para explicar un problema, o situación matemática y se impulsaba una demanda más explícita en su discurso, la mayoría de las maestras, proporcionaban opiniones o comentarios para enriquecer la representación o la explicación oral, sin embargo esto no sucedió en todos los casos.

En cuanto a la reflexión sobre su práctica docente y referente a las *Actividades (a)* y *(b),* reconocieron que generalmente califican la respuesta del estudiante, sin profundizar en la forma de cómo el alumno entiende un problema. Todas manifestaron que conocer el pensamiento de los niños, les puede ayudar a modificar su enseñanza. La mayoría reconoció la importancia de cuestionar más a los estudiantes para entender sus ideas y confusiones, sin embargo afirmaron que el factor tiempo, podía limitarlas a hacerlo.

Referente a la *Actividad central (c)*, afirmaron que el no conocer las razones de un procedimiento, influye por tanto en su forma de enseñar.

En relación a la *Actividad central (d),* expresaron que es importante pensar y planear actividades que permitan a los niños comprender el sistema numérico decimal y no sólo trabajar con operaciones. Manifestaron que necesitaban tiempo para planear cómo le harían para explicar un contenido y pensar en modelos de representación útiles.

De manera general, las maestras manifestaron que las cosas que cambiarían en su práctica docente eran: tratar de que sus alumnos justificaran sus respuestas, introducir una situación verbal al explicar los algoritmos; para ligarla conceptualmente con suma o resta y así introducir varios significados de adición y sustracción, cambiar numeraciones monótonas por ejercicios numéricos más desafiantes, utilizar representaciones y situaciones de agrupación que simbolicen el sistema decimal. Independientemente de lo que expresaron durante el taller en relación a la reflexión sobre su práctica docente, consideramos importante, contrastar lo manifestado en su discurso y lo realizado en el salón de clases, por tal motivo, a continuación se presentan los resultados de las observaciones correspondientes, con base en los *4 Componentes del Aula* (Askew et al., 2000):

En lo referente al 1er componente: *Actividades o tareas, s*e encontró que con frecuencia, la clase consiste en abordar el contenido de manera más teórica que práctica, en la cual, la maestra explica cómo hacerlo y posteriormente se plantean ejercicios de numeración, operaciones algorítmicas aisladas de situaciones contextuales, y problemas, en los cuales se maneja un formato de solución (datos, operación y resultado). El desafío del tipo de problemas planteados, no es variado, pues generalmente son de cambio. En la última observación de clase se presentó un intento por presentar actividades novedosas, lo cual despertó cierto interés por parte de los niños; pero en algunos casos el desafío de las tareas planteadas pudo ser mayor. En algunos casos, se introdujeron situaciones verbales, para que el niño las representara o solucionara concretamente.

En relación al 2° componente: *Conversación.* Se observó que esta se inclina a dar indicaciones acerca del trabajo de clase; más que a mantener un diálogo con los alumnos para saber cómo piensan. El tipo de cuestionamiento que se hace a los estudiantes, se basa más en afirmaciones que en argumentos, y por tanto se tiende a calificar correcta o incorrectamente sus respuestas. En la mayoría de los casos, los alumnos no se involucran con las participaciones de los demás. En la última observación de clase, se empieza con mayor ejercitación en el cuestionamiento a los niños y se les anima a participar, sin embargo todavía se tiende a calificar sus respuestas. Al trabajar por equipos en algunos casos, se propicia que entre los alumnos se establezca diálogo.

En lo referente al 3er componente: *Herramientas,* los materiales utilizados son básicamente el cuaderno y el libro de texto. Aunque este último contiene actividades en donde se solicita trabajar con material concreto; se usa en pocas ocasiones. En la última observación, se nota cierto esfuerzo en la utilización de representación con material y contacto con el mismo, para que los niños solucionen un problema.

Con respecto al 4° componente: *Relaciones y normas,* se encontró en general, buen nivel de empatía con los niños y normas de clase entendidas por ellos. Al final, se identificó un intento por establecer una mayor relación entre los alumnos.

5.2 ¿Qué elementos del taller les ayudaron a reflexionar?

El cuestionamiento sobre su propia práctica, indagar constantemente en su pensamiento sobre el error de los estudiantes, analizar la estructura y operación de los problemas verbales, enfrentarlas con actividades que demandaban pensar en el significado y porqué de un procedimiento, casos ficticios o situaciones hipotéticas de *"cómo le explicarías…",* compartir o generar entre ellas sus representaciones, solicitar que pensaran en cuales eran los conceptos involucrados en un ejercicio o representación, solicitar que plantearan y justificaran un ejercicio, el intercambio de ideas, opiniones y la discusión entre colegas.

Conclusiones

Una de las cosas que llamó la atención para trabajar con este grupo de docentes, fue su formación profesional, así como el tipo de escuela en la que desarrollan su práctica. Los resultados mostraron un MKT inclinado hacia el C*onocimiento Común de Contenido,* alejado de bases conceptuales claras, y por tanto esto influía a su vez en la forma de interpretar las ideas de sus estudiantes, así como en el manejo de las representaciones. Consideramos que el mayor impacto logrado, fue no sólo reconocer y aceptar abiertamente algunas características de su práctica docente, sino abrir cuestionamientos e inquietudes nuevas sobre cómo piensan los niños y visualizar desde otra perspectiva su forma de aprender. Tanto el desglose de ideas, como los modelos de representación, fueron los puntos donde se logró un menor impacto, pues independientemente que se generó un ambiente de colaboración entre las profesoras para desarrollar modelos de representación que se complementaban con su discurso, de manera individual no se presentaron grandes avances en la *descompresión* del contenido. Creemos que para influir de manera potencial en estos aspectos, sería conveniente diseñar un taller más amplio y sobre todo que acompañe al maestro en su proceso de planeación didáctica.

Referencias bibliográficas

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. & Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. *Proceedings of PME-24,* (2), 17-24.

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT.: Ablex.

Baturo, A. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding1. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2,* 95-102.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación cualitativa.* Madrid: La Muralla.

Elliot, J. (1990). *La investigación - acción en educación.* Madrid, España: Morata.

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, (5), 330-351.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42* (2), 371-406.

Martínez, M. (2006). *Educación matemática para todos.* Volumen 1. México: Diálogos Ediciones. Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 57(1)*, 1-22.*

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(*1*)*, 1-22*.

HISTORIA, MATEMÁTICAS Y PROFESORES EN LA UAN

Romy Adriana Cortez Godinez, Carlos Ernesto Ponce Ocegueda, Juan Felipe Flores Robles, Selene Muñoz Carrillo, Claudia Maria, Reynaga Luna
Universidad Autónoma de Nayarit México
romyadric@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación es de carácter no experimental y tiene como propósito obtener elementos que permitan diagnosticar cuanto saben de la historia de las matemáticas los docentes de la asignatura en la Universidad Autónoma de Nayarit UAN. Su implementación obedece a la posibilidad que la historia brinda a los profesores de llevar a sus estudiantes al reconocimiento de la procedencia de los conceptos y propiedades de la disciplina, en procesos reales del universo y a la existencia de una sociedad (Hernández, 2004), así como en la necesidad docente de contar con herramientas que permitan desarrollar la dimensión epistémica propuesta por Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006. Dicha investigación se realizó con maestros de matemáticas del nivel superior de la UAN, se utilizó estadística descriptiva. Los resultados revelan que la mayoría de los docentes desconoce las etapas de la historia de las matemáticas, aportaciones y principales exponentes.*

Palabras clave: profesores, epistemología

Investigación

El modelo académico actual de la Universidad Autónoma de Nayarit, demanda que el profesor sea un diseñador y promotor de estrategias que posibiliten al estudiante aprendizajes significativos y una visión holística de su campo profesional y de los problemas reales a los que se enfrentará, (Universidad Autónoma de Nayarit, 2004; 25) y considerando que la historia de las matemáticas proporciona al docente herramientas para contextualizar objetos matemáticos, así como la identificación de relación de esta ciencia con toda actividad social e incluso cognitiva, se consideró trascendente determinar el conocimiento de los profesores de la Unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático sobre la historia de las matemáticas.

Justificación

La unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático, surgió como una estrategia para desarrollar en sus estudiantes competencias para expresar conceptos mediante sus diversas representaciones, su vínculo y tránsito, desarrollar el pensamiento lógico, contextualizar los objetos matemáticos, modelar y solucionar situaciones problemáticas reales y desarrollar habilidades algebraicas, lógicas, gráficas y numéricas de algunas nociones matemáticas básicas (Castillo, et al, 2003) se consideró relevante la posibilidad de incorporar a la unidad algunos tópicos históricos que contribuyan a una mayor comprensión de los procesos matemáticos, no obstante como parte del proceso se requiere obtener elementos que nos permitan evidenciar las habilidades y limitantes que tienen los profesores de la unidad en la materia.

Sustento Teórico

De acuerdo con Orton (2003) el objetivo de la enseñanza "es promover el aprendizaje. Sin embargo la enseñanza se produce a veces sin que de ella resulte un aprendizaje y es conveniente considerar si puede mejorarse y lograr optimizar el aprendizaje como consecuencia de una mejor utilización de cuanto se sabe al respecto a su proceso" (p. 209), sin bien no tenemos un mecanismo exacto para hacerlo, contamos con diversas teorías que proponen características de un proceso de enseñaza-exitoso, tal es el caso de la Idoneidad Didáctica propuesta por Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi (2006).

Dicha teoría busca la articulación coherente y eficaz de las dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: *epistémico* (naturaleza relacional de las matemáticas; las matemáticas como actividad humana; las matemáticas como proceso, antes que como producto), *cognitiva* (adaptación consistente de los nuevos conocimientos a los previamente establecidos; interacción social y comunicación como motores del aprendizaje; complejidad del aprendizaje), *mediacional* (disponibilidad de recursos materiales y temporales), *ecológica* (relativa a la institución de referencia, al contexto social, a las directrices en política educativa, a las limitaciones económicas, etc.), *emocional* (el aprendizaje como proceso de participación e integración en una comunidad, para la aceptación en la misma) e interaccional.

Bajo esta perspectiva, la historia de las matemáticas toma especial relevancia en la dimensión epistémica ya que muestra la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollas los métodos, conceptos y teorías de si misma, de igual manera permite identificar y analizar las relaciones de la matemática con toda actividad social, sus limitaciones y avances. Aunado a esto Hernández (2004), señala que el estudio de la historia amplía el universo cultural del profesor, desarrolla hábitos de lectura, perfecciona habilidades investigativas y aumenta su vocabulario de la asignatura, lo que posibilita al docente para reconstruir situaciones históricas de objetos matemáticos para su estudio.

Como cada ciencia la historia de las matemáticas tiene un objeto de estudio, no obstante a diferencia de otras cuenta con diversas metodologías; por ejemplo, por culturas: egipcia, mesopotámica, chica e india (Gheverghese, 1996); áreas del conocimiento: *algebra y aritmética, análisis matemático y geometría*; y de manera cronológica.

Bajo la orientación cronológica, la historia de las matemáticas se divide en cuatro bloques según la periodicidad establecida por A.N. Kolmogorov.

> Nacimiento de las matemáticas: Este periodo se prolonga hasta los siglos VI-V a.C. cuando las matemáticas se conviertes en una ciencia independiente con objeto y metodología propios. También conocido como matemáticas antiguas o prehelénicas y en ella encontramos las matemáticas de las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India.
>
> Periodo de las matemáticas elementales: se prolonga desde los siglos VI-V a.C. hasta finales del siglo XVI. Durante este periodo se obtuvieron grandes logros en el estudio de las matemáticas constantes, comenzando a desarrollarse la geometría analítica y el análisis infinitesimal.
>
> Periodo de formación de las matemáticas de magnitudes variables: El comienzo de es periodo está representado por la introducción de las magnitudes variables en la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral en los trabajos de I. Newton y G.V. Leibniz. En el transcurso de este periodo se formaron casi todas las disciplinas conocidas actualmente, así como los fundamentos clásicos de las matemáticas contemporáneas. Este periodo se extendería aproximadamente hasta mediados del siglo XIX.
>
> Periodo de las matemáticas contemporáneas: en creación desde mediados del siglo XIX. En este periodo el volumen de las formas espaciales y relaciones cuantitativas abarcadas por los métodos de las matemáticas han aumentado espectacularmente (PNTIC, 2000).

Y de esta última forma, es como se ha abordado la investigación.

Metodología

La investigación se concibió bajo un enfoque cuantitativo con un diseño no experimental, mismo que se desarrolló de manera transversal; la población de estudio la constituyen los docentes de

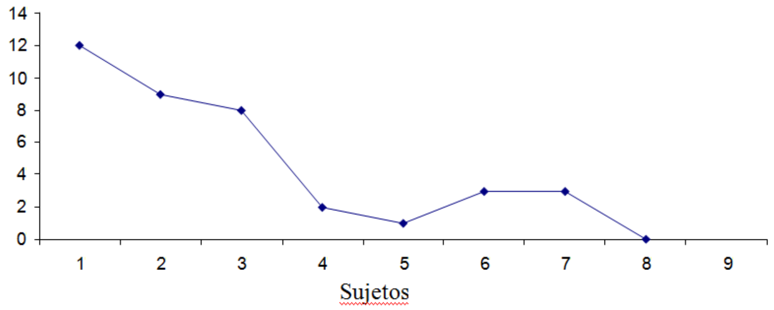
Lenguaje y Pensamiento Matemático, de los cuales se obtuvo una muestra no probabilística y cuya participación radicó en dar respuesta puntual a un cuestionario. Dicho cuestionario fue de rendimiento óptimo y se construyó atendiendo a las etapas de la historia (*I) Nacimiento de las matemáticas, II) Surgimiento de las matemáticas elementales, III) Formulación de las matemáticas de magnitudes variables y IV) Matemáticas contemporáneas*), sus aportaciones y principales exponentes (PNTIC, 2000), de tal forma que permitiera diagnosticar el estado que guardan los profesores con respecto al conocimiento de las matemáticas y su historia.

Se calcularon índices de dificultad y homogeneidad, así mismo se obtuvieron estadísticos de tendencia central, variabilidad y se construyeron intervalos de confianza.

Resultados y discusiones

Derivado del análisis estadístico y como se muestra en la Figura 1, la mayoría de los docentes desconocen el objeto de estudio.

Figura 1. Dominio de la historia de las matemáticas



Con un nivel de significancia de 0.5 se sabe que la población en promedio obtuvo un 4.75.

La presente investigación permitió diagnosticar el conocimiento que guardan los profesores con respecto al objeto de estudio, pues de acuerdo con el soporte estadístico, los docentes tienen un conocimiento deficiente de las matemáticas y su historia; así mismo deja en claro la necesidad de buscar estrategias –como talleres, diplomados, etc. para generar el interés y difusión de la misma, dada su contribución al desarrollo de la dimensión epistémica por cuanto desarrolla en el profesor habilidades para la contextualización de objetos matemáticos (Hernández, 2004; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006).

Referencias bibliográficas

Castillo, D. et al. (2003). *Programa de la Unidad de Aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático*. México: UAN.

Hernández, O. (2004). *Sobre la importancia del conocimiento de la Historia de las Matemáticas*. Consultado en febrero, 12, 2008 en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/matematicos/.

Gheverghese (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas.* Consultado en febrero, 12, 2008 en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

PNTIC (2000). *Historia de las matemáticas*. Consultado en 9 de marzo de 2008 en http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/.

Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula* (4ed.). España: Morata.

Universidad Autónoma de Nayarit (2004). *Nuevo Modelo Curricular.* México: UAN.

PRIMERAS PRÁCTICAS DOCENTES DE LOS ESTUDIANTES: NECESIDAD DE RESIGNIFICAR LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Liliana Homilka, Cecilia Crespo Crespo, Javier Lezama
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" Argentina, México
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
CICATA–IPN
lhomilka@yahoo.com.ar, crccrespo@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se reportan algunos resultados de una investigación realizada desde el enfoque socioepistemógico, centrada en analizar los factores que condicionan la formación del profesor de matemática en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. La formación docente es producto de las necesidades educativas de la sociedad; recibe influencias de diferentes grupos sociales, se desarrolla en escenarios socioculturales específicos. Sin embargo, en las primeras prácticas de enseñanza los estudiantes evidencian una formación sustentada sólo en la Matemática, alejada de un enfoque actualizado de la Matemática Educativa. Esta situación, puesta en evidencia en entrevistas a estudiantes y egresados recientes, en observaciones de clases, plantea la necesidad de revisar y resignificar los conocimientos y las prácticas formativas con la intención de que todos los actores puedan identificar el discurso matemático escolar vigente con el fin de modificarlo.*

Palabras clave: profesorado, escuela, profesor, practicante, práctica docente

Introducción

Las primeras prácticas docentes que realizan los estudiantes de profesorado de matemática del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de la Ciudad de Buenos Aires, evidencian una problemática compleja. Como se la ha planteado en Homilka (2008); el practicante tiene dificultades para:

a) Enfrentar los problemas que se le presentan al momento de organizar y desarrollar el ejercicio didáctico de estructurar la clase, seleccionar los recursos didácticos, determinar qué dar, cómo darlo.

b) Distinguir la naturaleza de la matemática escolar de cada uno de sus niveles.

c) Interactuar con profesores que poseen distintas visiones acerca de la labor docente en el aula.

El contexto en que se realizan, determinan que el practicante las viva como un proceso de evaluación permanente; no pueda unificar y aplicar los conocimientos construidos en los diferentes escenarios de formación y acción profesional.

El hecho de que no siempre puede o tiene libertad de decidir qué, y cómo enseñar, lo condiciona muchas veces a que no reproduzca en sus clases el modelo docente observado, el que actúa como su modelo de referencia, ese con el que se ha ido identificado durante el cursado de su carrera. De modo que, como alumno de profesorado, tiene que aprobarlas. Es por eso que, a veces calla o discute, pero, finalmente, hace en el aula lo que se le ordena, mostrando sólo lo que sabe de matemática.

Por lo antes expuesto, el objetivo de la investigación estuvo centrado en caracterizar algunos factores que condicionan la formación del futuro profesor y que inciden en su visión acerca de la labor docente en el aula de matemática.

Marco teórico

La investigación en matemática educativa desde el enfoque socioepistemológico, con sus conceptos teóricos básicos (Martínez, 2005) brinda las herramientas para identificar y estudiar de manera situada y sistémica, el fenómeno de las primeras prácticas docentes a partir de considerar aspectos que muchas veces no son visibles pero que están presentes en los escenarios históricos y socioculturales en los que se construye la profesión del profesor. Dichos escenarios, están estrechamente vinculados a la construcción de las ideas que caracterizan los diferentes significados que se otorgan a lo que es ser docente de matemática y que condicionan sus actividades y roles (Homilka, 2008).

La formación docente, no surge aislada de la sociedad, es producto de las necesidades educativas de la misma, se da en su seno; recibe influencias de los diferentes grupos sociales. Todos los aspectos de la vida social interactúan permanentemente con los de la vida escolar, esta interacción se da en ambos sentidos y ha cambiando la experiencia escolar de profesores y alumnos. Los lleva a reflexionar acerca de dispositivos, metodologías, relaciones, etc. La formación del formador se desarrolla en un escenario específico pero diferente al de épocas pasadas. Esto requiere ampliar la mirada, el profesorado debe ser visto desde afuera y desde adentro simultáneamente, para que pueda lograr sus funciones y objetivos. Esa mirada debe dirigirse por un lado, a la escuela media. El profesor tiene una responsabilidad social importante en la formación matemática de sus alumnos, en su trabajo en el aula. Por eso, desde el profesorado se debe reflexionar acerca de la forma en que se comunican hoy los docentes y alumnos en el nivel medio de enseñanza y la forma en que éstos lo hacen a su vez con los practicantes cuando realizan sus prácticas. Por otro, también debe dirigir su mirada y reflexionar sobre los diferentes enfoques de la investigación en matemática educativa (Cantoral & Farfán, 2003) para encontrar fundamentos que permitan entender por qué se hace lo que se hace hoy en la clase de matemática y evitar así malestares e insatisfacciones por las expectativas que en el proceso de formación del formador no se logran.

En la actualidad, la formación docente se da en una Sociedad Educativa. En la que el profesorado y la escuela se encuentran atravesando momentos de crisis. La sociedad reclama un cambio en la escuela (Barbero, 2008; Tenti Fanfani, 2008). Por lo que, ya no es pensable una formación matemática rígida. Es momento que estas instituciones se replanteen sus actividades y roles. Por lo que se hace necesario *“buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.”* (Crespo Crespo, 2007, pp.278-279)

En la búsqueda reflexiva de un modelo de profesor que requiere la sociedad actual, Lezama (2007) señala la influencia de las prácticas de investigación como uno de los elementos esenciales para mejorar la formación del profesorado y como vía de regulación de la práctica docente. Dado que, el conocimiento que produce la Matemática Educativa aporta a los docentes y estudiantes herramientas para el desempeño de un rol activo, un diálogo entre ellos, que aunque pueda, muchas veces ser difícil, es muy necesario en las instituciones educativas de hoy.

La socioepistemología considera que las prácticas sociales son generadas en un escenario determinado que condicionan en el que actúan los estudiantes y profesores. La reproducción de un saber matemático es reconocida como una práctica social institucionalizada. Es el docente quien reproduce un saber en el aula, los factores que norman esta actividad, le hace generar un discurso matemático escolar específico por su naturaleza e intencionalidad (Lezama, 2006).

Con la intención de lograr una reconstrucción del discurso matemático escolar, se considera fundamental que el profesor asuma que su profesión se sustenta en una didáctica nueva y no sólo en su experiencia docente.

La experiencia formativa del practicante

En el proceso de formación docente, se plantea la relación entre profesorado y escuela media, entre modelo docente observado como alumno y modelo docente que se explícita para los practicantes y se reproduzca cuando se es profesor. Lo que refleja la influencia que tiene la práctica docente sobre la visión del practicante. Dicha visión se origina a partir de su experiencia vivida durante su escolaridad secundaria, su formación terciaria y sus primeras experiencias como docente.

Durante las primeras prácticas docentes, interactúan el profesor de prácticas, el profesor de secundaria, el practicante y los alumnos. La comunicación entre ellos, a veces, se torna complicada y difícil, debido a que el discurso de cada uno obedece a lógicas e intencionalidades diferentes, no se complementan, se contradicen por momentos y por lo tanto, entran en conflicto.

Las observaciones de clases, han dado la posibilidad de ver que en muchos casos, la forma de pensar no es compartida por los practicantes, dado que la escuela les ha creado nuevas necesidades y los ha llevado a replantearse el sentido de su enseñanza a partir de lo vivido durante en su carrera y en sus primeras prácticas. Es decir, que no sólo la escuela está reclamando otra forma de educación matemática, los estudiantes de profesorado también.

Si el practicante asumiera que el profesor es responsable del discurso que construye, entonces, podría comprender lo que los docentes del nivel medio hacen y lo que quieren que se haga en su curso. Además, el profesor de prácticas estaría en mejores condiciones de ayudarlo y formarlo durante sus primeras experiencias como docente.

Relaciones entre el profesorado y la escuela secundaria

Con la finalidad de comprender e inferir algunos de los factores que tienen implicaciones formativas y que influyen o que son determinantes en la construcción de la profesión, se pide a los practicantes entrevistados que caractericen aquellos aspectos que consideran que se vinculan o relacionan con lo que se hace en las clases del profesorado y en la del nivel medio.

El análisis de las respuestas dadas a la pregunta *¿Qué proyección existe de la clase del profesorado a la de la escuela media?* Nos ha permitido conocer la visión del futuro profesor a partir de sus vivencias, experiencias, necesidades que se le han presentado en su tránsito por la escuela media desempeñándose como docente. Se las presentan a continuación:

La entrevistada A en función de sus primeras prácticas docentes realizadas comenta que no ha transferido conocimientos unificados en el momento de estar frente a un curso de la escuela secundaria, al respecto dice:

> *"No se proyecta nada, ni los conocimientos pedagógicos, porque no te enseñan a dar clases, sólo te salvan los contenidos disciplinares. La formación pedagógica general que posees, no se puede aplicar en las prácticas, te encontrás con otra realidad en las aulas."*

Lo que permite inferir que en el profesorado la profesión se construye sobre la base de los contenidos que están presentes en el eje disciplinar.

> *"Como alumno te enseñan procedimientos, ya los se, entonces no voy a tener problemas al dar clases, pero te encontrás que hay gente que no puede aprender esos procedimientos, no los puede retener. Entonces qué se hace, ves de explicarlo de diversas formas, si no da resultado consultás con un profesor, con otro, y nuevamente otro escollo."*

Se encontró con una realidad diferente, no sólo es practicar para aprender, la memoria no siempre ayuda a aplicar procedimientos matemáticos en las clases, ahora hay un alumno distinto en la escuela, la experiencia de otros docentes no alcanza. La experiencia como docente la lleva a manifestar:

> *"Pienso que debe haber otra forma de transmisión, ampliar el horizonte de herramientas, no es sólo imaginación, esto no alcanza, ni te alcanza lo que sabés de matemática, ni las cualidades personales del docente ni las del alumno. El profesorado no te prepara para enseñar, y eso se debe aprender también."*

En cambio, la entrevistada B manifiesta:

“Esa proyección existe, pero es relativa e inevitable porque cuando uno ejerce la docencia, de alguna manera, somos el reflejo de nuestras experiencias vividas, tanto en el profesorado como en nuestra formación secundaria.”

La actividad del profesor es una actividad humana, por lo tanto las experiencias en ambos niveles de formación van moldeando su visión. Pero, ¿qué papel cumple el conocimiento en la construcción del ser docente? ¿Podemos hablar de una visión estática cuando la realidad es cambiante?

“Uno toma modelos que luego reproduce en sus clases; si la experiencia fue mala, intenta nunca reproducirlas, en cambio, si la experiencia fue buena las recrea y las adapta a su realidad escolar.”

Se puede llegar a inferir de sus comentarios que si fue bueno para ella, entonces recrea en el aula lo positivo, lo que le fue útil, para determinar con qué criterio lo adapta, se cree necesario contar con más evidencias al respecto.

Lo cierto es, que plantea la relación explicita que se da entre profesorado y escuela media y entre modelo docente observado como alumno y modelo docente que se reproduce cuando se es profesor. Lo que esta reflejando la influencia que tiene la practica docente sobre la visión del estudiante.

“Si las clases de los docentes de nivel medio, en general, son expositivas es porque su formación docente fue expositiva. De lo contrario, no tendría porqué suceder.”

La entrevistada C, argumenta que:

“Lo que se hace en el profesorado no se hace en la escuela media, los contenidos si se trasladan.”

De lo que se puede inferir, que la transferencia sólo se da si se conoce la matemática, lo cual es cierto, pero, es en el profesorado, donde el rigor matemático está presente. Hace referencia a aspectos metodológicos:

“En Taller de Matemática se utilizan las mismas actividades que en la secundaria; algunos temas no se profundizaban en el profesorado.”

Distingue al alumno del estudiante:

“Los profesores del profesorado no tienen la misma actitud que en la escuela secundaria frente a los alumnos, el estudiante está en el profesorado porque quiere ser profesor, en la escuela el alumno está por obligación.”

Por ultimo, hace el siguiente comentario:

“En el profesorado hay más resolución de problema, es allí donde se muestra una matemática un poco diferente. En ambos casos el alumno adquiere los conocimientos pero es en el profesorado donde se aprende a pensar.”

También nos hace pensar que su visión está influenciada sólo en la matemática y que en el escenario institucional la profesión se construye fundamentalmente sobre la base del eje disciplinar.

La entrevistada D hace un interesante comentario:

“Pasar de las clases de matemática de la secundaria a las del profesorado es muy traumático, porque estás acostumbrado a una matemática más light, en el profesorado te hacen ver otra matemática, más interesante, otra forma de encarar su estudio, te plantean la necesidad de analizar diferentes caminos.”

Para ella, el transitar de un nivel educativo a otro, está signado por la dificultad que presenta la ciencia matemática, su forma de estudiarla.

“Pasar de las clases del profesorado a ver las clases de la escuela media es también traumático, porque te das cuenta que es aún más light la matemática que se hace en las aulas en los diferentes años de la escuela. El alumno está sentado, intenta hacer algo y son muy pocos los alumnos que pueden seguir al profesor, no entienden lo que hacen, ni para que les sirve, es como que están resignados y sufren la materia.”

Su opinión acerca de lo que encuentra en la escuela media, luego de algunos años, no tantos, ya que es la más joven de todas las entrevistadas, nos muestra que en la actualidad, la matemática que se hace en el aula es aún más recortada, más alejada de los alumnos y de la escuela. Establece que el trabajo docente es similar en ambos niveles, lo que se infiere de lo siguiente:

“En ambas instituciones el docente trabaja con el grupo de los mejores alumnos, algunas actividades que realizás en el profesorado también se repiten en la secundaria, quizá, aquí se repite más veces el mismo tipo de actividad.”

Es decir que por un lado, en el nivel medio, el hecho de que el profesor haga todo más fácil, no resuelve los problemas que se presentan hoy en la clase, en muchos casos, la naturaleza de la matemática del profesorado es similar a la de la escuela, por lo que en esta última se hace necesario repetir y repetir las actividades.

A modo de conclusión

Las ideas antes presentadas están indicando la necesidad de resignificar la actividad y rol docente en el escenario escolar de hoy.

Se manifiestan diferentes formas de mirar la existencia o no, de diversos aspectos que proyectan docentes y estudiantes en las clases de matemática de la escuela media.

- Se reclama una formación didáctica general y específica actualizada, lo que en el cursado de su carrera no se le ha brindado.

- Se pierde una de las características de la matemática escolar que es la de aprender a pensar.

- En las clases del profesorado se le plantean necesidades al estudiante que en el nivel medio no se le presentan. La distancia entre lo que se enseña y lo que se aprende es grande.

Se aprecian diferentes visiones acerca de la construcción de la profesión, para A es necesaria una formación docente que contemple los aspectos matemáticos y didácticos.

La profesión se construye en base a la experiencia y a las influencias de los modelos docentes con los que se ha relacionado y con los que ha tenido éxito. Ser profesor consiste en reproducir esos modelos, sin contemplar que toda profesión evoluciona en función de las necesidades que demanda la sociedad.

En el profesorado, se le da mayor peso a la formación disciplinar centrada solo en la matemática. Se está reclamando una didáctica actualizada, un trabajo que contemple explícitamente los problemas reales que hoy se presentan en la clase.

Todo lo hasta aquí planteado, pone de manifiesto, un conflicto mas para el practicante. Las ideas que en las aulas de profesorado y escuela media se comunican, muchas veces, no responden a la realidad de las mismas; no alcanza para cambiarla, con la experiencia de los profesores y estudiantes.

Hoy las crisis en el profesorado se generan por la necesidad de cambio, de transformación en la formación de un profesional. Para lo cual, es imprescindible ampliar la visión institucional, se debe mirar la escuela, los estudiantes, la práctica docente, a partir de las demandas actuales, desde una óptica que contemple los aspectos, científicos, académicos y profesionales.

Es importante y deseable que, el profesor se someta a un autoanálisis profundo de sus saberes y su práctica. Los resignifique, dado que son factores determinantes en la construcción de los significados que el estudiante le va otorgando al modelo docente que luego va a reproducir en los comienzos del ejercicio profesional. Todo ello, lleva a la reformulación de los discursos escolares.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1), 27-40.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada, Cicata-IPN, México.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de maestría no publicada. Cicata-IPN, México.

Lezama, J. (2006, octubre). *Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemologica.* En el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

Lezama, J. (2007, octubre). *Una mirada a la investigación en el campo académico de la Matemática educativa en América Latina.* V Congreso Virtual de Enseñanza de las Matemáticas.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8*, (2), 195-218.

Tenti Fanfani, (2008). Mirar la escuela desde fuera En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES EN PROFESORES EN FORMACIÓN

Juan Jesús Ortiz, Nordin Mohamed, Luis Serrano y Jesús Rodríguez
Universidad de Granada España
jortiz@ugr.es
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio de evaluación del razonamiento probabilístico de maestros en formación. Para ello analizamos las respuestas a tres ítems sobre asignación de probabilidades, tomados de Green (1983), en una muestra de 167 futuros profesores de Educación primaria. Se comparan el porcentaje de respuestas correctas y los argumentos utilizados con los obtenidos por los niños de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997). Concluimos con algunas implicaciones para mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad.*

Palabras clave: probabilidad, formación de profesores, educación estadística

1. Introducción

El interés de la enseñanza de la probabilidad se ha visto reforzado en España por el Real Decreto que establece las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (MEC, 2006), donde se incluye un bloque sobre Tratamiento de la información, azar y probabilidad desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006).

Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la probabilidad requiere mejorar la formación de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, podrían transmitir a sus estudiantes sus creencias, a veces erróneas (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano & Rodríguez, 2006). Un requisito, por tanto, es conocer las competencias probabilísticas de los futuros profesores de educación primaria.

2. Problema y objetivos

Debido a la importancia que está adquiriendo la enseñanza de la probabilidad, incluso en los niveles de primaria, donde el maestro es el encargado de impartir estos contenidos, nos planteamos la cuestión de qué conocimientos de probabilidad tienen los futuros profesores de educación primaria sobre problemas elementales de probabilidad, en particular, problemas relacionados con la asignación y comparación de probabilidades.

Pretendemos realizar una evaluación inicial de la capacidad de los futuros profesores de educación primaria para resolver problemas elementales de probabilidad y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997). En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio de evaluación del razonamiento probabilístico de maestros en formación. Para ello analizamos las respuestas de 167 estudiantes de magisterio a tres ítems tomados de Green (1983), estudiando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos. Nos apoyamos en el marco teórico del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero & Font, 2007), según el cual, las prácticas observables realizadas por los futuros profesores para resolver estos problemas elementales de probabilidad son los indicadores empíricos que nos permiten evaluar sus conocimientos.

Consideramos de interés este tipo de trabajo ya que como indican numerosas investigaciones, que exponemos a continuación, es fundamental conocer los conocimientos que sobre el contenido matemático y pedagógico de probabilidad tienen los futuros profesores. A partir de ahí podremos diseñar y poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los maestros. A continuación describimos la investigación previa, la metodología y los resultados obtenidos.

3. Investigaciones previas

3.1. Formación en probabilidad de futuros profesores

Aunque hay algunos trabajos interesantes sobre el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991; Kvatinsky & Even, 2002), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas. A pesar de ello progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en este colectivo (Azcárate, 1995; Franklin & Mewborn, 2006). Otros trabajos muestran que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad (Begg & Edwards, 1999; Watson, 2001; Nicholson & Darnton, 2003; Pereira-Mendoza, 2002) y del contenido pedagógico (Haller, 1997; López, 2006; Dugdale, 2001). Otras experiencias de enseñanza basadas en la simulación (Sánchez, 2002; Batanero, Godino y Cañizares, 2005), parecen ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los futuros profesores.

3.2. Comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes

La investigación sobre la capacidad de comparar probabilidades, comienza con Piaget & Inhelder (1951), quienes describen diferentes niveles, en función de las estrategias y respuestas correctas, utilizando como dispositivo experimental bolas en urnas, fichas y otros materiales. Otros autores han continuado este trabajo (Falk, 1983; Fischbein, Nello & Marino, 1991; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997; Way 1996), donde en tareas de elección binaria han descubierto que muchos estudiantes, especialmente los jóvenes, basan su elección en juicios idiosincrásicos o en un razonamiento restrictivo que se centra en el número de casos favorables. Otros estudios (Cañizares, Batanero, Serrano & Ortiz, 1997; Cañizares & Batanero, 1998) destacan que la mayoría de los alumnos al finalizar la educación primaria demuestran una adecuada concepción de la probabilidad, aunque el contexto en el que se presenta el problema (discreto o continuo) y algunos sesgos en el razonamiento probabilístico han mostrado su efecto sobre la dificultad de estos problemas.

4. Método

Los participantes fueron 167 maestros en formación de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla (Universidad de Granada), de los tres cursos y de todas las especialidades salvo Educación Especial y Audición y Lenguaje, con una edad media de 20 años. A continuación reproducimos los ítems del cuestionario, que se aplicó antes de la instrucción:

Ítem 1.- Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___

(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___

(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

Ítem 2.- Dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas: Caja G: 12 negras y 4 blancas.

Caja H: 20 negras y 10 blancas. ¿Qué caja da mayor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___

(B) Caja G ___

(C) Caja H ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

Ítem 3.- La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

(ROJO) (AZUL)

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo............................... ___

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul............................... ___

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3. .... ___

(D) No lo sé .... ___

¿Por qué eliges esa respuesta?

5. Resultados y discusión

Análisis ítem 1

Los resultados de los futuros profesores son mejores que los obtenidos por los alumnos (10-14 años) participantes en la investigación de Cañizares (1997). El porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores es del 86.7%. Por otro lado, un 8,3% elije el distractor C, que afirma que los dos sucesos son equiprobables. Consideramos que la respuesta (C) es debida a una incorrecta asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), por la cual para algunos alumnos un resultado que sea impredecible equivale a que todos los sucesos implicados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

La justificación mayoritaria proporcionada por ellos es la correcta "*porque hay más niñas que niños*" (70,8%), seguida de los que aplican la regla de Laplace y responden que es debido a que "*la probabilidad de niña es mayor*" (15,9%). Esta última estrategia no es utilizada por ningún alumno (10-14 años), lo que se puede considerar lógico, ya que, o no la conocen, o la han tratado de forma superficial. Sin embargo hay un importante porcentaje de futuros profesores que considera que "se debe al azar" (5,8%) y un (7,5%) que contesta de forma ambigua o no contesta".

Análisis ítem 2

Los resultados obtenidos por los futuros profesores, un 75% de respuestas correctas, son también algo mejores que los obtenidos por los alumnos (10-14 años). La mayor dificultad de este ítem se encuentra en que aunque existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables, la proporción no es la misma en cada urna. Aunque los futuros profesores son conscientes de esta falta de equivalencia, hay un alto porcentaje (18,3%) que elige la opción C, que considera que en la caja H hay más probabilidad de obtener una ficha negra, al haber mayor cantidad absoluta de casos favorables o mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables. Respecto a la investigación de Cañizares (1997) los futuros profesores usan más estrategias correctas, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional, aunque un grupo importante usa la comparación absoluta de casos favorables o desfavorables y estrategias aditivas.

Análisis ítem 3

El porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores (88,4%) es bastante mejor que los alumnos (10-14 años). Destaca un significativo porcentaje de futuros profesores (7,5%), aunque inferior que los alumnos (10-14 años), que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad, que son los que eligen la respuesta C. En este ítem, la justificación más utilizada está basada en la idea de área (46,7%), seguida de los que utilizan la regla de Laplace (23,3%) y de los que responden haciendo referencia al número de secciones de las ruletas (16,7%). En cuanto a los argumentos incorrectos, aparecen los que opinan que es debido al azar o por otro motivo (9,1%). En relación con la investigación de Cañizares (1997), las principales diferencias son que los futuros profesores utilizan la regla de Laplace mientras que los alumnos (10-14 años) no lo hacen, y también que los argumentos basados en áreas y en el recuento de secciones son más utilizados por los alumnos que por los futuros profesores.

6. Conclusiones

Aunque la mayoría de los maestros en formación demuestran una adecuada concepción de la probabilidad, obteniendo resultados mejores que los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997), este estudio indica que, a pesar de ser bastante elementales los problemas planteados, existen dificultades en su resolución por parte de algunos futuros profesores. Hay porcentajes importantes de ellos que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad en el problema de la clase y en el de las ruletas, y que utilizan la comparación de casos favorables o desfavorables y estrategias aditivas en el problema de las urnas. La variable contexto, discreto o continuo, observamos que ha influido cuando comparamos los resultados del ítem 2 (urna con bolas) y del ítem 3 (ruletas), siendo mayor el porcentaje de respuestas correctas en este último caso, en ambos colectivos. Con respecto a los argumentos pertinentes, el área solo aparece en el contexto de ruletas, mientras que la regla de Laplace y casos favorables/casos desfavorables, son utilizados en ambos contextos, aunque la regla de Laplace es más utilizada en los contextos de ruletas, y el último es utilizado mayoritariamente en los contextos de bolas. Esto se explica como consecuencia de que la ruleta, favorece el establecimiento de las relaciones parte-todo (o regla de Laplace), mientras que en los contextos de bolas esta consideración del “todo” no viene impuesta, y por lo tanto, favorece el establecimiento de relaciones parte-parte. En cuanto a los argumentos no pertinentes, el contexto tiene aquí también un fuerte impacto, pues el argumento de diferencia que no aparece en el contexto de ruletas, es utilizado para las respuestas incorrectas en contextos de bolas. Esta fuerte influencia del contexto en los argumentos de los alumnos pone de manifiesto que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son forzosamente en el plano cognitivo.

Una vez finalizado el estudio completo de los conocimientos probabilísticos de los futuros profesores, con la información obtenida podremos diseñar y poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los maestros, que debe incluir las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino & Roa, 2004) y realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* Johannesburgo, Sudáfrica: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education 12*. Extraído el 7 de julio de 2005 desde http://www.amstat.org/publications/jse/

Begg, A. y Edwards, R. (1999). *Teachers ideas about teaching statistics.* Trabajo presentado en The combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Granada, España.

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in childrens' comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volumen 2* (pp. 49-56). Lahti, Finlandia.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools 17(1/2),* 173-182.

Falk, R. (1983). Children's choice behaviour in probabilistic situations. En D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of de First International Conference on Teaching Statisitics* (pp. 714-716). Sheffield, England: Teaching Statistics Trust.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Franklin, C. & Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39 (1-2)*, 127-135.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et als. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics Volumen 2*, (pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Tesis de doctorado no publicada, University of Minnesota.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1997). A framework for assesing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics 32*, 101-125.

Kvatinsky, T. & Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. En, *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics 23*, 557-568.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahía, Brasil: International Statistical Institute.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, Nº 293.

N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Nicholson, J.R. y Darnton, C. (2003). Mathematics teachers teaching statistics: Wath are the challenges for the classroom teacher? En, *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute.* Vooburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca, España: SEIEM.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics.* Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (En CD-ROM). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* Dodrecht: Kluwer

Watson, J.M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education 4(4),* 305-337.

Way, J. (1996). Children's strategies for comparing two types of random generators. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education Volumen 4* (pp. 419-526). Valencia, España: Universidad de Valencia.

UN ESTUDIO DEL SIGNIFICADO IMPLEMENTADO PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES por PROFESORES DE ÁLGEBRA EN facultades DE INGENIERÍA

Silvia Elena Ibarra Olmos. Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora **México**
sibarra@gauss.mat.uson.mx; ravilag@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: **Pensamiento algebraico** Nivel: **Superior**

Resumen. ***Se presentan los resultados de un estudio cuyo objetivo fue caracterizar el significado institucional implementado, para los sistemas de ecuaciones lineales, por un grupo de profesores que laboran en facultades de ingeniería en una universidad pública de la República Mexicana. Las consideraciones teóricas en las cuales nos basamos para realizar esta investigación, pertenecen al Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, específicamente la parte que tiene que ver con el Análisis Sistémico de los Objetos Matemáticos y de sus Significados. Entre las conclusiones que reportamos están la identificación de las diferencias entre los significados implementados por cada uno de los profesores, las cuales nos permitieron, por otra parte, conocer las concepciones personales de los participantes respecto a los elementos que intervienen en los procesos de enseñanza y la influencia en su actividad cotidiana.***

Palabras clave: **significado institucional implementado, pensamiento algebraico**

El problema de investigación

Estamos interesados en conocer cuáles son las transformaciones que los profesores de matemáticas introducen a las propuestas institucionales cuando están conduciendo el proceso de aprendizaje de sus estudiantes. El reconocimiento a la existencia del conjunto de transformaciones que sufre el conocimiento matemático por enseñar, al pasar de una institución a otra, nació en el seno de la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas con el nombre de transposición didáctica, término acuñado por Chevallard (1991).

La problemática tal y como se acaba de describir, es de carácter general, y con la intención de hacer viable la investigación que realizamos, seleccionamos en un primer momento a la transposición didáctica del álgebra, cuando es enseñada por profesores de matemáticas en carreras de ingeniería de una universidad pública mexicana. Posteriormente, también por cuestiones metodológicas y de viabilidad, redujimos nuestro estudio al tema de sistemas de ecuaciones lineales, por considerar que es representativo del álgebra que deben manejar los egresados de cualquier ingeniería.

En estos términos, el objetivo general que nos planteamos en la investigación que estamos reportando fue describir cómo, a partir de una propuesta curricular institucional, se lleva a cabo el proceso de concreción de las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones que hace un profesor cuando pone en escena un conocimiento algebraico, específicamente el de los sistemas de ecuaciones lineales.

Consideraciones teóricas y metodológicas

Empezaremos por describir brevemente las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS), que fueron usadas en esta investigación. Entenderemos por significado institucional de un objeto matemático al *sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una institución para resolver un campo de problemas*, (Godino y Batanero, 1994, p.340). Y como práctica matemática *consideramos a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas* (Godino, Batanero y Font, 2007, p.127).

Del desarrollo de esos sistemas de prácticas surgen otros elementos, a los cuales identificamos como los objetos matemáticos; así pues, designaremos como un *objeto matemático a todo lo que es indicado, señalado, o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas*, (Godino, 2002, p. 30). Si los objetos son compartidos en el seno de una institución o comunidad, serán objetos matemáticos institucionales.

Para realizar análisis didáctico, se introduce la siguiente clasificación de los significados institucionales: referencial, pretendido, implementado y evaluado; de tal clasificación nosotros retomamos el significado institucional implementado, consistente en el sistema de prácticas efectivas del docente durante un proceso de estudio determinado.

En cuanto a los tipos de objetos matemáticos primarios que se reconocen en el EOS están el lenguaje, las situaciones, los procedimientos, los conceptos, las propiedades o atributos de los objetos, o más recientemente llamadas proposiciones y finalmente los argumentos.

Retomando estas ideas desde el marco de nuestro problema de investigación, si queremos describir el proceso de transformación que han sufrido los sistemas de ecuaciones lineales cuando han sido llevados desde una propuesta institucional al aula, debemos identificar cuáles son los elementos constituyentes más importantes de dicho proceso. Desde el EOS, nuestra respuesta a la pregunta ¿qué es lo que se transpone?, es: algún, algunos o todos los objetos matemáticos primarios o componentes del significado que hemos mencionado.

Así pues, identificamos, para cada sujeto en estudio, las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales, esto es, cómo van apareciendo y relacionándose las seis entidades primarias que se mencionaron con anterioridad: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, argumentos y proposiciones. Dichas redes son las que denominaremos configuraciones epistémicas.

El conjunto de configuraciones epistémicas, secuenciadas en el tiempo didáctico, se denomina trayectoria epistémica y ella es la que describe integralmente la ruta que siguió la construcción de los significados institucionales que nos interesan. Se distinguen en una trayectoria epistémica seis estados posibles: situacional, actuativo, lingüístico, conceptual, proposicional y argumentativo.

Nos auxiliamos también de la noción de trayectoria docente, entendida ésta como la secuencia de actividades que va efectuando el profesor durante un proceso de estudio. Un segmento de la trayectoria docente, referida al accionar del docente alrededor de una situación-problema, la denominamos configuración docente. Las acciones identificadas del profesor están categorizadas de la siguiente manera: planificación, motivación, asignación de tareas, evaluación y regulación. Las ideas antes descritas, fueron retomadas del modelo planteado por Godino, Contreras y Font (2006).

Esta es una investigación hecha bajo el paradigma de investigación cualitativo. Las técnicas para la recolección de información fueron la observación no participante del investigador sobre el desempeño de los profesores en el aula, notas de campo realizadas en dichos eventos, video grabación de las sesiones, así como entrevistas a los maestros. Los sujetos de estudio fueron tres, seleccionados con base en su experiencia y formación profesional.

Contexto y sujetos

La investigación se llevó a cabo en una universidad pública del noroeste de México, en la cual se efectuó un cambio de modelo curricular; dicho cambio, como era natural, llevó a modificar los planes de estudio de todas las carreras ofrecidas por la institución, siendo las carreras de ingeniería las primeras que entraron en ese proceso de modificación.

Establecido el nuevo plan de estudios para los ingenieros, las instancias responsables convocan a los encargados de impartir los cursos de matemáticas para que conozcan la nueva propuesta curricular y hagan las adaptaciones pertinentes. Esta última instancia convoca a sus profesores, entre ellos que imparten los cursos de álgebra, solicitándoles que, de manera colegiada, discutan la iniciativa oficial y hagan las modificaciones de su práctica docente así como el diseño de materiales de apoyo y los instrumentos de evaluación en el curso que a ellos compete.

Después de un determinado periodo de trabajo colegiado, los profesores toman acuerdos y consensos, los cuales básicamente fueron: a) partir de situaciones problemáticas de la ingeniería para el estudio de los conceptos matemáticos; utilizar diferentes representaciones para los objetos matemáticos que surgieran de las situaciones problemáticas; c) incorporar de manera sistemática el uso de nuevas tecnologías.

Sobre la base de dichos acuerdos, los profesores diseñaron actividades que fueron montados en una página WEB, disponible para que cada uno organizara el tratamiento del tema en sus aulas. Del conjunto de maestros participantes en este colegiado, fueron seleccionados tres, como los sujetos de nuestra investigación. Las características de formación profesional y experiencia de cada uno de ellos se muestran a continuación:

a) Profesor A, licenciado en matemáticas, maestría en matemática educativa, 20 años de experiencia como profesor universitario de matemáticas, diez años como profesor de álgebra en ingeniería.

b) Profesor B, licenciado en matemáticas, estudiante del primer semestre de la maestría en matemática educativa, 11 años como profesor de matemáticas en el bachillerato y dos como profesor universitario de álgebra en ingeniería

c) Profesor C, licenciado en matemáticas, maestría en computación, dos diplomados en uso de recursos computacionales en educación matemática, 17 años como profesor de matemáticas en universidades y tres como profesor de álgebra en ingeniería.

A manera de ilustración

Con la intención de mostrar en qué consisten las configuraciones epistémicas, presentamos el desglose de las segunda de las diecisiete configuraciones empleadas por el profesor A en su trayectoria epistémica. Posteriormente concentramos esta información mediante la Tabla 1.

Configuración epistémica 2: El profesor solicita a sus alumnos que traten de resolver el siguiente problema:

1. Una compañía ensambla tres modelos de computadora personal a los que llamaremos: el modelo regular, el modelo de lujo y modelos de versión limitada. Cada unidad es procesada en tres departamentos, A, B y C.

El modelo regular requiere 3 unidades de tiempo de proceso en el departamento A, 7 unidades de tiempo en el departamento B y 5 en el departamento C. El modelo de lujo requiere 4 unidades de tiempo de proceso en el departamento A, 8 en el departamento B y 7 en el departamento C. El modelo de versión limitada requiere 4 unidades de tiempo en el departamento A, 9 en el departamento B y 6 en el departamento C.

El departamento A puede cubrir 129 unidades de tiempo, el departamento B abastece 28.5 unidades de tiempo y el departamento C, 120 unidades de tiempo por día.

¿Cuántas computadoras al día puede ensamblar esta compañía al día, agotando todas las unidades de tiempo disponibles de cada departamento?

Se identifican y denotan las incógnitas y se construyen las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 129 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 28.5 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 120 \end{aligned}$$

pero analizando cuidadosamente cuál es el significado de cada uno de los sumandos en cada una de las ecuaciones. Se promueve la solución del sistema aceptando las propuestas de los participantes; en momentos intermedios de la solución se trabaja de nueva cuenta sobre las significaciones; cuando se tiene la solución, que resulta ser única, se interpreta en el contexto del problema específico, además de comprobar que efectivamente lo es.

Los objetos matemáticos que aparecieron son: la situación problema ya enunciada, lenguajes verbal y algebraico, el algoritmo de suma y resta para resolver el sistema, el concepto de sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, el concepto de solución de dicho sistema; los argumentos para interpretar la solución encontrada en el contexto del problema y para darle significación a las ecuaciones intermedias que se van consiguiendo; no hay ninguna propiedad explícita.

Tabla 1

Sesión de clase	**Configura-ción epistémica**	**Unidad episté-mica**	**Descripción**	**Estado**
2	2	3	Se plantea una nueva situación-problema.	Situacional
2	2	4	Se organiza la información en una tabla.	Lingüístico
2	2	5	Se definen las incógnitas, se representan algebraicamente y se construye el sistema de 3x3.	Lingüístico
2	2	6	Se deja en libertad de que se escoja de qué manera se resolverá, escogiéndose el método de suma y resta, pero aplicándose con variantes, dependiendo del estudiante.	Procedi-mental
2	2	7	En los pasos intermedios se van dando argumentos de qué significan la ecuación equivalente obtenida, en términos de la situación que se está resolviendo.	Argumen-tativa
2	2	8	Se comprueba que la solución que se obtuvo es la correcta	Argumen-tativa

Ahora mostramos una sección de la trayectoria docente del mismo sujeto de estudio, la correspondiente a la configuración docente 2, describiéndola primero y después concentrándola en la Tabla 2.

Configuración docente 2: Después de plantearse la situación-problema, mediante preguntas se va promoviendo la participación de los estudiantes, los cuales aceptan el reto y empiezan a proponer;

las pocas indicaciones que da el profesor van en la dirección de organizar la información, pero esencialmente todo se trabaja mediante un esquema de elaboración conjunta.

Tabla 2

Sesión de clase	Configuración epistémica	Descripción de la actividad del profesor	Estado
2	2	Deja en libertad a los estudiantes para que resuelvan el problema con sus recursos, identificando así sus conocimientos previos.	Regulación
2	2	Asigna la siguiente situación-problema	Asignación
2	2	Motiva la participación	Motivación
2	2	Mediante preguntas va promoviendo la participación de los estudiantes, hasta que llegan a la solución del problema, la cual analizan a profundad	Regulación

Hicimos esto para cada uno de los profesores A, B y C. Esta información la complementamos con la que obtuvimos vía las entrevistas, integrándolas para tener nuestra interpretación del significado institucional implementado.

Resultados y conclusiones

Los tres maestros, casos prototípicos en la institución seleccionada, mostraron mediante el ejercicio de su labor docente, las variantes que pueden ser introducidas en el trabajo didáctico, en dependencia de las circunstancias en las cuales éste se desarrolla. Si bien los tres construyeron su discurso mediante diferentes situaciones-problemas, tomadas del campo de problemas que previamente había conformado el colegiado, las configuraciones epistémicas y didácticas que tejieron alrededor de ellas fueron cualitativamente diferentes. El profesor A, por ejemplo, manifiesta en su accionar con los estudiantes el valor formativo que concede a los problemas, puesto que los usa no como una situación a resolver, sino como un medio a partir del cual puede y debe construirse el conocimiento algebraico: concibe a éste como un entramado de lenguajes, conceptos, argumentos, procedimientos, y propiedades en acto.

Es notable cómo, teniendo en mente la concepción de un ingeniero como un profesional que se enfrentará a la solución de problemas, y el papel que el álgebra puede tener en ello, centra su preocupación en desarrollar esa competencia, desplegándola como un proceso que integra conocimiento, habilidad y actitud. Como ésa es su prioridad, no escatima esfuerzos para alcanzar su objetivo, aunque en el transcurso sacrifique aspectos como los tiempos contemplados en el programa de la materia o los tiempos asignados a las sesiones de clase.

En este caso, podemos considerar que más que trabajar en el álgebra, el profesor A trabaja en desarrollar un pensamiento algebraico, integrando habilidades para la resolución de problemas, de razonamiento, de comunicación, de uso de representaciones y relacionales.

El profesor B, por su parte, planea una serie de prácticas operativas y discursivas alrededor del conocimiento algebraico en juego, atendiendo al grado de complicación que pueden tener las situaciones problema que va usando; va de lo más elemental a lo más complicado. Su objetivo es aparentemente modesto, pues declara que aspira a que los alumnos aprendan a manejar un algoritmo y a reconocer aquellas situaciones en las que lo podrían usar. En esa dirección, podemos considerar que para el profesor B, enseñar álgebra significa entonces enseñar procedimientos, identificando las problemáticas susceptibles de resolverse con ellos.

La sensibilidad que el profesor B mostró al darse cuenta de las características emotivas de sus estudiantes, lo llevó a tomar decisiones que afectaban lo contemplado en el programa de la materia, y en ese sentido, podemos decir que no atendió su responsabilidad como representante institucional. Pero si analizamos desde otra perspectiva su actuar, vemos que centró su compromiso en los estudiantes, ubicándolos como seres humanos en conflicto, a los cuales debía de ayudar en el desarrollo de actitudes hacia el trabajo, motivándolos, impulsando su autocontrol y la confianza en sí mismos, aspectos que, en el caso concreto de esos estudiantes, les era mucho más necesario que cualquier contenido algebraico.

El profesor C, en cambio, asume su papel como representante institucional con plena conciencia. Para él hay una serie de contenidos que estudiar, hay una serie de acuerdos que se tomaron en el grupo de profesores que hay que respetar, y, asumiéndolos, planea su proceso de estudio. Es el único, de los tres casos que estudiamos, que atiende, en la medida de lo posible, todos los consensos; las situaciones problema que maneja en el salón de clases, son retomadas del banco de actividades seleccionadas por el colegiado, y además las implementa siguiendo las sugerencias que éste planteó.

Las situaciones problema que selecciona las usa más en el sentido de mostrar aplicaciones para los contenidos matemáticos estudiados; le concede gran importancia al funcionamiento del algoritmo y a la construcción del modelo, y aunque sus planteamientos son en algún sentido tradicionales, los enriquece la introducción que hace, siempre que es posible, de diferentes representaciones. Fue el único maestro que cotidianamente impulsó el uso de la calculadora.

Podemos decir que su concepción de lo que significa el álgebra está más ligada a la modelación, los procedimientos y a los conceptos, caracterización que se corresponde con sus antecedentes de formación y experiencia docente. Esto último sucede también en el caso de los profesores A y B.

Los tres casos que observamos, nos han mostrado las rutas diferentes que puede tomar un proceso de estudio planeado aparentemente bajo las mismas consideraciones. Hemos sido testigos de cómo cada uno de los profesores transpone en el aula, su propia versión del significado institucional pretendido. No hay aquí juicios de valor, pues en cada una de las posturas asumidas por los tres profesores, advertimos que hubo circunstancias que los hicieron tomar las decisiones que tomaron, además, por supuesto, de las concepciones y creencias de cada uno de ellos.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3)*, 325-355.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*. *22(2/3),* 237-284.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26(1),* 39-88.

Godino, J., Batanero, C, y Font, V. (2007) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Versión ampliada del artículo Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblat für Didaktik der Mathematik, 39(1-2*) 127-135. Extraído desde http://www.ugr.es/local/jgodino.

CAPACITACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES. EL DISCURSO MATEMÀTICO ESCOLAR EN EVOLUCIÓN

Santiago Ramiro Velázquez, Hermes Nolasco Hesiquio, Oliver Texta Mongoy
Universidad Autónoma de Guerrero México
sramiro@prodigy.net.mx, nolascohh@hotmail.com, matematico22@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Medio superior

Resumen. *En este artículo se aborda el problema referente a que el discurso matemático escolar –dme- por lo general no se mira como una práctica social generadora de saberes. Se constata este problema con argumentos teóricos que consideran a este discurso abierto, flexible, integral y vinculado con las prácticas sociales. El propósito es explorar la evolución del dme del profesor de nivel medio superior (nms) al participar en actividades de capacitación. Para lograrlo se realiza un taller con profesores y el diseño de situaciones de aprendizaje por parte de éstos, para ponerlas en escena con sus alumnos. Los resultados muestran explicaciones discursivas flexibles, pero desvinculadas de las prácticas sociales donde están inmersos los conocimientos matemáticos motivo de estudio. Por su parte en la realización de las situaciones de aprendizaje prevalece la actividad del profesor en detrimento de la interacción discursiva de los alumnos.*

Palabras clave: capacitación, actualización, práctica social, discurso matemático escolar

Introducción

En este trabajo se aborda el problema referente a que por lo general, en la escuela predomina un discurso matemático escolar –dme- formal, acabado y basado en definiciones. Marcolini y Perales (2005) proponen sustituir un discurso rígido, inamovible y acabado que prevalece en la escuela, por otro en constante cambio y evolución que considera las condiciones de surgimiento y difusión de los saberes, que están en dependencia de las prácticas sociales e intencionalidades de las personas que construyen conocimientos matemáticos. Velázquez, Cabañas, Marmolejo, Nolasco, García, Flores, Díaz y García (2005) documentan las condiciones académicas de profesores de matemáticas de nivel medio superior en el sentido de que no comparten un discurso matemático como medio para la construcción social de saberes, en su lugar se maneja una relación entre lenguaje matemático y común. De esta manera se manifiesta una posición autoritaria por parte de los profesores y un discurso acabado, formal y basado en definiciones. Así se muestra que los profesores prestan mayor atención a los contenidos que a los alumnos. De modo similar en su práctica laboral prevalece el abordaje de dichos contenidos desvinculados de las condiciones en que surgen y de las prácticas donde están inmersos.

Desde nuestra perspectiva consideramos al discurso matemático escolar como una práctica social generadora de saberes, que utilizan alumnos, profesores, investigadores y escritores al confrontar ideas y arribar a consensos, y puede ser oral, escrito o gestual. Cuando se le concibe de esta manera las personas van construyendo sus propias voces para argumentar y comunicar ideas matemáticas.

Es necesario considerar que tanto el conocimiento matemático como el discurso están en evolución continua y obedecen a las condiciones de su surgimiento, difusión y usos sociales. En Velázquez y Santos (2008) se sostiene que las ideas, nociones y significados sobre un conocimiento, conforman un discurso matemático, incluso antes de su definición e institucionalización y proponen que el reconocimiento auténtico de este saber por profesores y alumnos, se haga asociado a las prácticas donde está inmerso.

En este trabajo centramos la atención en las explicaciones discursivas del profesor de matemáticas del nivel medio superior -nms- con el propósito de explorar la evolución del dme cuando participa en actividades de capacitación. Para el logro de este propósito se realiza un taller con 15 profesores, dos de ellos diseñan una situación de aprendizaje referente a la parábola y la instrumentan con sus alumnos. Las producciones en estas actividades, muestran una breve evolución de su discurso matemático escolar. Al reconocer la necesidad de promover explicaciones discursivas entre sus alumnos y confrontar y negociar significados. También se mira un intento de compartir responsabilidades con los alumnos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998) y promover el enriquecimiento mutuo entre el discurso cotidiano y el escolar (Aparicio y Cantoral, 2006).

Con estas evidencias se desarrolla un grupo de discusión en la XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, en el que socializan saberes y experiencias sobre esta problemática, 35 profesores de América Latina.

Antecedentes

Bajtín (1986) en sus estudios postula que la construcción y negociación de significados se da cundo varias voces se ponen en contacto, de manera que en un discurso abierto se mira una pluralidad de voces que participan para el logro de propósitos. Considera fundamental la dialogicidad –

análisis de enunciados para comprenderlos y profundizar- ya que a través de la dialogicidad se puede comprender en toda su extensión su propio discurso y el de otras personas, al confrontar posiciones, argumentar y exponer diversas miradas sobre el asunto abordado en dicho discurso.

En el surgimiento y difusión del conocimiento matemático existen evidencias al respecto, por ejemplo la correspondencia sostenida en 1654 por Descartes y Fermat (Boyer, 1999) constituye el inicio de la teoría sobre probabilidad, ambos resolvieron problemas por procedimientos diferentes llegando a los mismos resultados. En el ámbito del cálculo integral, la comunicación en la que Jacques Bernoulli le propone a Leibniz utilizar el término *integral* en vez del de *sumas*, Leiniz le responde que prefiere llamarles *sumas*, Bernoulli, dice, lo pensaré, más tarde Leiniz manifiesta su acuerdo con la propuesta, "*calculus integralis* sería un nombre mejor para el inverso de *calculus differentialis* que el de *calculus summatorius*" (Boyer, 1999, p. 525).

Vigotsky (1997) destaca el papel del lenguaje en el desarrollo del pensamiento, en el sentido de que el proceso de desarrollo del lenguaje y el del pensamiento tienen una génesis diferente, pero ambos se entrelazan continuamente y llega un momento en que el pensamiento se hace verbal y el lenguaje intelectual. En este sentido el lenguaje además de reflejar el razonamiento de las personas en condiciones culturales, es un medio para el desarrollo del pensamiento, "…el desarrollo del pensamiento verbal se posibilita mediante el uso del significado de la palabra como unidad analítica" (Vigotsky, 1997, p. 143). Como se puede ver estas tesis muestran la unidad entre el pensamiento y el lenguaje, por lo que la construcción de saberes matemáticos que se da a través de la interacción discursiva y la negociación de significados promueve el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez se puede mirar que los saberes matemáticos no son inmutables, ya que están en constante evolución en dependencia de las prácticas de la sociedad y sus intencionalidades.

Cazden, C. (1986). Sostiene que cuando se promueve el dme como una práctica social, los participantes ejercen su derecho a expresar sus ideas tal como las piensan, en el momento que lo consideran pertinente y aprenden a pedir ayuda en el momento necesario. De esta manera se promueve el desarrollo del lenguaje socialmente compartido y por ende la participación colectiva de los alumnos, en la que manifiestan formas de pensamiento y acción.

Reséndiz (2003) en sus investigaciones centra la atención en el análisis del papel de las explicaciones en la clase de matemáticas, en el momento en que se usa la noción de variación de parte del profesor en el nivel superior. Identifica elementos discursivos a los que recurre el profesor al realizar su actividad docente. De manera que sostiene que en la interacción discursiva se da una riqueza de significados, donde éstos se negocian y articulan, se abren alternativas explicativas, se realizan debates y casi siempre se llega a una conclusión.

Castañeda (2006) afirma que por lo general se cree que el discurso matemático escolar proviene de fuentes matemáticas inmutables ante el desarrollo de la sociedad, por ende se considera que el conocimiento escolar está dado de una vez y para siempre. De manera que los ejecutores de un sistema didáctico no tienen por qué preocuparse en modificar el dme. Pasan por alto que el conocimiento matemático enseñable además de nutrirse del conocimiento matemático científico, considera las prácticas sociales en las que participan los diversos sujetos involucrados en un sistema didáctico. En la escuela mexicana, principalmente en el nivel básico y medio superior (Velázquez et al 2005), se observa una reproducción del discurso de los textos para los alumnos.

Marcolini y Perales (2005) proponen sustituir un discurso rígido, inamovible y acabado que prevalece en la escuela, por otro en constante cambio y evolución que considera las condiciones de surgimiento y difusión de los saberes, que están en dependencia de las prácticas sociales e intencionalidades de las personas que construyen conocimientos matemáticos.

Palacios (2008) sostiene que por lo general los estudiantes perciben a las matemáticas como una ciencia acabada, con un orden lógico indiscutible y que siempre se ha desarrollado en forma lineal. Consideramos que una de las razones de esta concepción consiste en la imposición de un dme formal y acabado. Esta imposición se da principalmente a través de los profesores, las instituciones y los textos, Gaël, par quien,

> "[…] *el conocimiento no tenía otro sentido que el de una actividad ritualizada en la que se repiten modelos. Ese comportamiento se manifestaba, entre otras cosas, mediante la evocación de la autoridad pedagógica de la maestra: "lo que ella me enseñó", "lo que la maestra dice que hay que hacer" … Todo sucedía como si Gaël esperara del profesor índices que le permitieran ajustar su comportamiento a las expectativas de éste*. (Sarrazy, 1997, p. 85).

Ogbu, (1982) afirma que por lo general los estudios del discurso en el aula centran la atención en la perspectiva del profesor, pasando por alto los intereses de los alumnos. De manera que impera y se impone el discurso matemático del profesor, al alumno le corresponde reproducir este discurso, muchas veces de manera mecánica. Al prevalecer este autoritarismo no se promueve la construcción social de saberes matemáticos, ni la formación de un pensamiento científico que considere la naturaleza de las matemáticas, en su lugar se desarrolla la verticalidad y la dependencia en los alumnos.

Candela, (2001) hace un estudio del discurso en el aula desde diversas perspectivas teóricas y enfoques, entre ellas citamos el análisis conversacional que reconoce al discurso como acción social, desde nuestro punto de vista cercano a una práctica social generadora de saberes. En el sentido de que se analiza la interacción discursiva de los alumnos para identificar sus explicaciones y argumentos.

En este marco, entendemos a la educación, como un proceso de comunicación consistente en el desarrollo de contextos mentales, términos de referencia y formas discursivas compartidas a través de las cuales el discurso educacional adquiere significado y sentido para los participantes, y llega a convertirse en una representación del mundo y en un discurso propio. En este sentido, los alumnos llegan a compartir una versión legitimada del conocimiento (Edwars y Mercer, 1989).

Un escenario de investigación

En el desarrollo del taller referido en líneas anteriores, los profesores diseñan situaciones de aprendizaje considerando la parábola como contenido que se aborda en el curso de geometría analítica, formulan como propósito la formación del concepto de parábola y su graficación. Proponen una variedad de actividades de apertura, desarrollo y cierre, en las que se mira su interés de incluir actividades prácticas. Una de las actividades representativas del bloque de desarrollo se plantea de la siguiente forma: Un carpintero dispone de 12 m de tela para construir un gallinero de forma rectangular, en uno de los lados va a aprovechar una pared ya existente. Obtén una expresión que relacione el área del gallinero con la medida de uno de sus lados. Sugerencia: representa con “x” a los lados y con “y” su área, elabora una tabla con valores para “x” de 0 a 6 y construye la gráfica.

Al instrumentar esta actividad el profesor solicita a los estudiantes su opinión de cómo construir la expresión pedida, ellos contestan que no entienden como resolverlo. Entonces les pide que recuerden la fórmula para calcular el área de un rectángulo, que analicen y relacionen los datos, finalmente con ayuda del profesor lograron la expresión requerida como se muestra en la siguiente producción.

$A = B \cdot h$

$y = (12-2x)(x)$

$y = 12x - 2x^2$

ordenado

$y = 2x^2 + 12x$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	10	16	18	16	10	0

$x = 1$

$y = -2(1)^2 + 12(1) = 10$

$x = 2$

$y = -2(2)^2 + 12(2) = 16$

$x = 3$

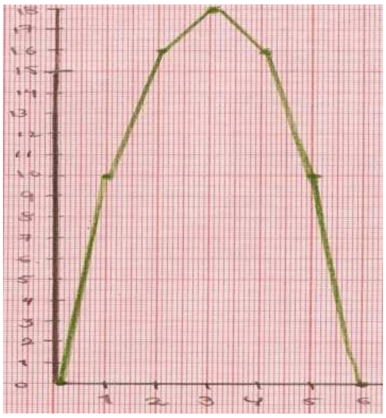
$y = -2(3)^2 + 12(3) = 18$

$x = 4$

$y = -2(4)^2 + 12(4) = 16$

$x = 5$

$y = -2(5)^2 + 12(5) = 10$



Esta manera de realizar las actividades con los alumnos muestra que el profesor en vez de dirigir, señala lo que se debe hacer, elimina la oportunidad de que los alumnos produzcan y realicen una interacción discursiva que les asegure la construcción de su propio discurso y saber matemático. Sería diferente si se deja a los alumnos en libertad para investigar y formular diversos acercamientos a la solución del problema, de modo que la confrontación de ideas y los argumentos moldeen los resultados finales. De acuerdo con estos resultados, podemos mostrar, por ejemplo, que aquellas versiones de los alumnos que no comparten significados muy básicos o comunes con las versiones expresadas en las clases, resultan difíciles de cambiar. Es aquí donde entran en juego una serie de medios discursivos que favorecen el diálogo y la negociación de significados de parte de los alumnos.

Al hacer una recapitulación de resultados sostenemos que hay una pequeña evolución del dme de los profesores participantes, en el sentido de confrontar sus posiciones y arribar a consensos durante el taller. De manera similar en las situaciones de aprendizaje diseñadas en las que incluyen lecturas, representación matemática de fenómenos físicos y el reconocimiento de las propiedades de la parábola en situaciones prácticas. No obstante en su realización con los alumnos prevalece la actividad del profesor, que implica una limitada interacción discursiva entre los alumnos. Conjeturamos que en la capacitación se requiere de una mayor reflexión permanente entre profesores, asesores e investigadores que aplique un contrato didáctico que considere al dme como práctica social generadora de saberes. De manera que en esta práctica los alumnos interactúen a través de correspondencias, notas informativas, textos y proyectos colaborativos.

Reflexiones finales

En este trabajo se reconoce una problemática en el ámbito de la capacitación y actualización de profesores, al mostrar la existencia de un discurso matemático escolar acabado y formal, que limita la interacción y las explicaciones discursivas de los alumnos. Afecta negativamente la negociación de significados de los conocimientos matemáticos y la construcción de saberes, inmersos en las prácticas donde tienen funcionalidad.

También se reconoce que cuando el profesor se implica en su desarrollo didáctico al participar en las referidas actividades, inicia un proceso de evolución de su discurso al flexibilizarlo, interactuar con sus compañeros e incluir en las situaciones de aprendizaje varias formas de comunicar un conocimiento matemático. En la puesta en escena de las situaciones de aprendizaje se observa el predominio del discurso matemático del profesor, consideramos que para superar esta situación es necesario ampliar el reparto de responsabilidades con los alumnos y promover la construcción de formas discursivas como el intercambio de mensajes, la conversación discursiva y el debate científico.

Sostenemos que con este tipo de investigaciones interesadas en estudiar el discurso matemático escolar, es posible aproximarnos a procesos tan complejos como la construcción del conocimiento en el aula. Algunos resultados empíricos y otros de corte más teórico que aquí presentamos, tienen también su importancia para el diseño de la intervención educativa, el rediseño del dme y la capacitación y actualización de profesores.

En el marco de Relme XXII los participantes consideran interesante el estudio de esta problemática y el enfoque que se propone para investigarla. Proponen un foro virtual que ya se venía gestando desde la Relme XXI, para que el intercambio de experiencias se realice continuamente, de manera que en el grupo de discusión presencial se recapitulen y se reorienten los trabajos. El foro está abierto, se denomina capacitación y actualización de profesores en el sitio http://www.cerv.biz/moodle1/.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (1)*, 7-30.

Bajtín, M. (1986). *Speech genres and other late essays* (McGee, V. trad.). Austin, USA: University of Texas Press.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Candela, A. (2001). Corrientes teóricas sobre el discurso en el aula. *Revista Mexicana de Educación 6(12),* 317-333.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(2)*, 253-265.

Cazden, C. (1986). El discurso del aula. En M. Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza III. Profesores y alumnos* (pp. 627-709). Madrid, España: Paidos Educador.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México, D. F.: SEP.

Edwards, D. y Mercer, N. (1989). Reconstructing context: The conventionalization of classroom Knowledge. *Discourse Processes 12*, 91-104.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(1)*, 26-58.

Ogbu, J. (1982). Cultural discontinuities and schooling. *Antropology and Education Quarterly 13*, 290-307.

Palacios, O. (2008, julio). Un estudio sobre el uso de las gráficas en las obras de Evangelista Torricelli y Daniel Bernoulli. *En History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite meeting of ICME 11.* Evento realizado en El Centro Cultural del México Contemporáneo, México, D. F, México.

Sarrazy, B. (1997). Sens et situation: une mise en question de l'enseignement des strategies meta-cognitivs en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques 17(2)*, 35-166.

Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores. Un estudio en situación escolar. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(2)*, 133-154.

Velázquez, S., Cabañas, G., Marmolejo, E., Nolasco, H., García, G., Flores, C., Díaz, M. y García, V. (2005). *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores*. México, D. F.: Santillana.

Velázquez, S. y Santos, R. (2008, julio). Un estudio socioepistemológico del discurso matemático escolar. *En History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite meeting of ICME 11.* Evento realizado en El Centro Cultural del México Contemporáneo, México, D.F, México.

Vigotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. México D. F.: Quinto Sol.

EL PAPEL DEL DOCENTE ANTE LAS DIFICULTADES DETECTADAS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN

Elena Fabiola Ruiz Ledesma, Karina Viveros Vela
Escuela Superior de Cómputo IPN México
efruiz@ipn.mx, kviveros@ipn.mx
Campo de investigación: Pensamiento Variacional Nivel: Superior

Resumen. *En el presente artículo se muestran los resultados preliminares de una investigación, cuya intención es detectar los obstáculos que dificultan el aprendizaje de estudiantes de ingeniería del Instituto Politécnico Nacional en el tema variación. Para ello se aplica un cuestionario abierto a profesores, cuyas respuestas se analizan mediante redes sistémicas. Durante la aplicación que se realiza para la validación del instrumento, se obtiene que los profesores utilizan solamente un tipo de estrategia de aprendizaje con sus estudiantes; y al analizar estrategias prediseñadas, identifican el mismo conjunto de aprendizajes que en su propuesta, aunque sea de naturaleza muy distinta. Hasta el momento, la conclusión obtenida es que el principal obstáculo es la dificultad de los profesores para utilizar estrategias que promuevan el desarrollo conceptual del tema de variación y para identificar las habilidades que los estudiantes han de poner en juego para resolver problemas relacionados con el mismo tema.*

Palabras clave: aprendizaje, variación, dificultades, cálculo

Introducción

El Modelo educativo del IPN (2004), finca la labor docente en tener al estudiante como centro del proceso enseñanza-aprendizaje, así el profesor debe interactuar entre el conocimiento (saber) y el alumno, a través de estrategias que le permitan a este último apropiarse del saber matemático, por lo que uno de los roles del profesor es el de planear las estrategias didácticas y ambientes de aprendizaje adecuados.

Es por lo anterior que requerimos enfrentar las problemáticas que en torno de la enseñanza y del aprendizaje se están dando. En particular, en el presente artículo mostramos la necesidad del uso de estrategias que permitieran al docente propiciar una formación de calidad en el ingeniero, para que al egresar, lleve consigo las herramientas necesarias y logre incorporarse al campo laboral.

Existen elementos cognitivos a desarrollar en el estudiante de ingeniería, los cuales son centrales para trabajar las competencias laborales y profesionales, entre éstos se encuentra el concepto de variación (2004b). De manera específica y como una forma de delimitar la investigación que se realizó, nos enfocamos a trabajar, a través de la resolución de un cuestionario, una estrategia en donde se involucra el concepto de variación.

Justificación

Tomando como base nuestro modelo educativo y los antecedentes de rendimiento y aprendizaje de las matemáticas, y en particular del cálculo de nuestros estudiantes en dicha área (Ruiz, 2006 y Mejía, Cruz y Pardo, 2007), son indicativos de que el trabajo en este campo es arduo y hay mucho por hacer, ya que las causas pueden ser muy diversas en cuanto a la mejor forma de promover el aprendizaje en el alumno con el nuevo rol como profesor mediador entre la disciplina y el alumno.

Planteamiento del problema

Identificar las estrategias que emplea el docente al trabajar una situación sobre el concepto de variación y revisar si éstas representan algún obstáculo que dificulten el aprendizaje de los estudiantes en dicho tema

Aspectos teóricos

En lo concerniente al trabajo que se desarrolló con los profesores para poder determinar estrategias que coadyuven a una mejor calidad en el ingeniero en formación, tomamos como referencia lo señalado por Kolhberg, Power y Higgins (1997). Para el establecimiento de redes sistémicas y la revisión de elementos con los que cuentan los docentes nos apoyamos en Machamer y Douglas (1999); Rescher (1999) y Echeverría (2002).

En lo que respecta al trabajo propiamente del concepto de variación nos basamos en los resultados obtenidos del proyecto de Ruiz (2008), con No. de registro en la SIP 200070393. Revisamos las investigaciones de Ávila (1996); debido a la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional.

Aspectos metodológicos

A. Diseño

Se utiliza una metodología de corte constructivista, inmersa en el paradigma cualitativo de la investigación educativa, puesto que lo que se pretende es la identificación de obstáculos que dificultan el aprendizaje de los estudiantes en el tema de variación; para lo cual se requiere un análisis detallado del proceso de elaboración y aplicación de estrategias didácticas, por parte de los profesores.

Para la toma de datos, se diseñó un cuestionario semiestructurado dirigido a profesores, construido en tres secciones principalmente: 1) Datos de identificación personales que incluye el nombre de la unidad en la cual labora el profesor, las asignaturas que imparte, su forma de concebir el concepto de variación y los temas del programa de sus cursos, con los cuales relaciona dicho concepto. 2) Identificación de estrategias, al solicitarle al profesor que comparta una estrategia y cuestionarle acerca de los aprendizajes que espera que los estudiantes desarrollen con la misma. 3) Identificación de oportunidades de desarrollo para los estudiantes, con miras hacia la formación integral. Se le presenta una estrategia para el tema de variación y se le pregunta acerca de los aprendizajes que esperaría que los estudiantes desarrollen al realizarla.

Para el análisis de datos se utilizaron dos redes sistémicas: 1) Para analizar los aprendizajes que los profesores intentan promover en el tema "variación". Esta red se contrasta con la estrategia propuesta por el profesor. 2) Para analizar los aprendizajes que los profesores opinan que puede promover el uso de la actividad propuesta, la cual se contrasta con las intenciones que los autores de este documento identifican que pueden promoverse con la misma.

Una vez diseñado y revisado el cuestionario, se aplicó a una muestra de cinco profesores, dos de nivel medio superior y tres de nivel superior y a partir de las respuestas dadas, se elaboraron las redes sistémicas, en las cuales se observó que hay coincidencia entre los profesores de ambos niveles, que imparten clase de cálculo diferencial/integral; pero difieren las de profesores que imparten otras asignaturas.

Resultados

Los resultados que se presentan, son parciales, debido a que no se tienen aún las respuestas de todos los profesores de la muestra, sino solamente los que se eligieron para la validación de los instrumentos.

A partir de estas respuestas, las dimensiones que se utilizan en la red sistémica número uno, corresponden con las dos concepciones expresadas por los profesores, acerca del concepto de variación:

1. Cambio en una propiedad.- Se interpreta a la variación como el incremento en el valor de una variable continua; o como un cambio cualitativo en una variable categórica.
2. Cambio de una variable con respecto a otra.- Se interpreta la variación como la rapidez de cambio de una variable, en función de otra. En este caso, el concepto de variación se identifica con el concepto de derivada.

Esta red se construyó a partir de las respuestas de los profesores a las dos primeras secciones del cuestionario, la primera, en cuanto al concepto de variación; y la segunda, en cuanto a la estrategia que cada uno propone.

Las estrategias propuestas por los profesores en general, se componen de una actividad solamente, aunque la idea de estrategia que se presentó en el mismo cuestionario sugiere un conjunto de actividades: Estrategia, entendida como el conjunto de actividades de enseñanza y de aprendizaje que se utilizan para el desarrollo del concepto. Por ejemplo: Plantear un problema, realizar un debate, explicar un contenido teórico, etc.

La mayoría de las estrategias que propusieron los profesores fueron muy generales, por ejemplo:

> *"Se les muestra una figura e indican que <<crecí>> y eso es un incremento y por lo tanto una variación en el tamaño de la figura."*

Sin embargo, con dicha estrategia se pretende que los estudiantes aprendan el concepto de derivada.

La única respuesta concreta, fue la presentación de un problema, en el que se presenta como contexto un problema típico de física, aplicada a un deporte:

"Función cuadrática

Sabemos lo importante que es para un lanzador de pelota, la velocidad y la altura que tiene en su lanzamiento, por ello analizaremos el siguiente problema:

Un lanzador de basebol lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v (se da la velocidad inicial). Sabemos que la altura que describe la pelota en función del tiempo es h(t) (se da la función)"

-Se representa gráficamente la función

-Se plantea una serie de preguntas sólo relacionadas con el problema.

En cuanto a la evaluación del desempeño de los estudiantes en la resolución de la estrategia que proponen, aún en el caso del profesor que propuso el problema concreto, las respuestas no especifican criterios de evaluación o indicadores para correlacionarlos con los aprendizajes que esperan favorecer en los estudiantes.

En las respuestas de los profesores, acerca de los aprendizajes que esperan que desarrollen los estudiantes con la estrategia, se identifican contenidos conceptuales y habilidades de diferente naturaleza, como se muestra en la red sistémica número 1. (Ver figura 1)

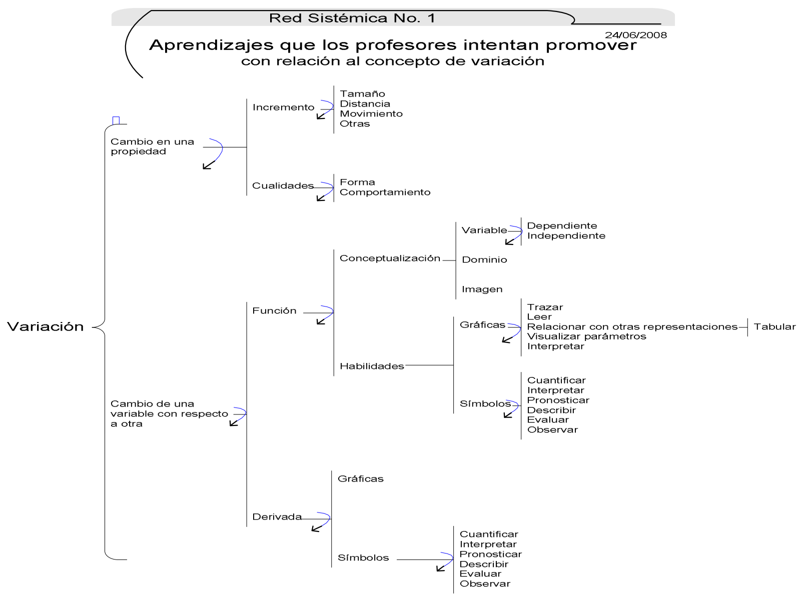
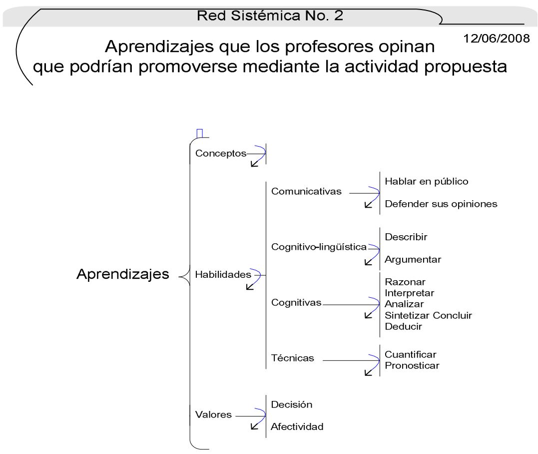


Figura 1. Red sistémica No. 1

Las dimensiones que se utilizan en la red sistémica número dos, corresponden a los tres tipos de aprendizaje que comúnmente se utilizan para facilitar la redacción de objetivos:

1. Conceptos.- No incluyeron contenidos para esta categoría.
2. Habilidades.- Incluyeron habilidades de diferente naturaleza:
    a. Comunicativas en general.- Relacionadas con el lenguaje oral, principalmente
    b. Cognitivo lingüísticas.- Las que se relacionan con cada una de las tipologías textuales que se utilizan para comunicar la ciencia.
    c. Cognitivas.- Las habilidades del pensamiento.
    d. Técnicas.- Las que se relacionan directamente con el manejo de los contenidos del tema en cuestión.
3. Valores.- Relacionados con la inteligencia emocional. Aunque el contexto de la actividad planteaba un dilema moral, ninguno de los profesores identificó contenidos relacionados con este aspecto.

La segunda red se construyó a partir de las respuestas de los profesores a la tercera sección del cuestionario, en cuanto a la estrategia que se les propone en el mismo.



Discusión

De acuerdo con los resultados obtenidos en la validación del cuestionario, se puede plantear que los profesores que respondieron al cuestionario muestran conocer algunos de los elementos que requieren para la realización de su tarea como docentes (Machamer y Douglas, 1999; Rescher, 1999 y Echeverría, 2002), pero no muestran conocer otros.

A continuación se enlistan los que muestran conocer:

A. *Cognitivos*

Razonar, interpretar, analizar, sintetizar, deducir, evaluar, observar.

B. *Cognitivo-lingüísticos:* Describir, argumentar.

C. *Comunicativos:* Hablar en público, defender sus opiniones.

D. *Técnicos:* Cuantificar, pronosticar.

E. *Valorales.* Decidir, mostrar afecto.

Los que no muestran conocer:

A. *Cognitivos*

Comprar, clasificar, identificar, inferir, transferir, demostrar, argumentar (simbólico).

B. *Cognitivo-lingüísticos*

Resumir, explicar, justificar.

C. *Comunicativos*

Comunicación escrita.

D. *Técnicos*

Construir y desarrollar la lógica matemática; argumentar con una identificación clara de hipótesis y conclusiones; abstraer incluido el desarrollo lógico de teorías formales y las relaciones entre ellas; modelar matemáticamente una situación del mundo real; transferir conocimientos matemáticos a contextos no matemáticos. Estar dispuestos a hacer frente a nuevos problemas derivados de las nuevas zonas; extraer información cualitativa de datos cuantitativos; comprender los problemas; resumir elementos esenciales de los problemas; formular matemáticamente y en forma simbólica los problemas; elaborar diseños experimentales y observacionales; analizar datos; formular problemas complejos de optimización y toma de decisiones y para interpretar las soluciones en los contextos de origen de los problemas. Utilizar herramientas computacionales como ayuda para procesos matemáticos y para adquirir más información; conocer lenguajes de programación específicos o software; presentar argumentos matemáticos y las conclusiones y en formas claras para el público que se está abordando, tanto oralmente como por escrito; conocer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

E. Valorales

Compromiso; curiosidad científica; creatividad; pensamiento divergente; imaginación; autocrítica; perseverancia; veracidad; cuidado del detalle; modestia intelectual; eficiencia; productividad; rigor; coherencia, predictiblilidad; funcionalidad; aplicabilidad; búsqueda de beneficio para el ser humano.

Estos resultados muestran la conveniencia de que los profesores enriquezcan sus cursos, incluyendo más oportunidades para el desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes, para brindarles más oportunidades de aprendizaje de alcanzar un nivel elevado de competencia. Cada elemento no utilizado por los profesores puede ser un obstáculo para el aprendizaje de los estudiantes, más insalvable, en cuanto el o los elementos faltantes se relacionen más con las competencias a desarrollar en el programa correspondiente.

Conclusiones

Los profesores que respondieron el cuestionario muestran el uso de un tipo único de estrategias de aprendizaje para el concepto de variación. Esto puede ser un obstáculo en el aprendizaje del estudiante, debido a que se atiende un número reducido de elementos que se requieren incluir en la educación matemática y no promueve la atención a la diversidad de formas de aprendizaje ni de nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Ávila, R. (1996). Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación. *Publicaciones Centroamercianas. 10*(1), 121-126.

Echeverria, J. (2002). *Ciencia y Valor*es. Barcelona: Ediciones Destino, S.A.

Kolhberg, L., Power, F. y Higgins, A. (1997). *La educación moral. Según Lawrence Kolhberg.* Barcelona, España: Gedisa.

Machamer, P. y Douglas, H. (1999). Cognitive and social values. *Science & Education*, *8*(1), 45-54.

Mejía, A., Cruz, A. y Pardo, R. (2007). Diseño de un instrumento de evaluación del grado de conocimientos de las ciencias básicas del alumno de nuevo ingreso a una carrera de ingeniería y su importancia en el diseño curricular. En: R. María de Lourdes (Ed.). *Segundo Congreso Internacional de la Didáctica de las Matemáticas en la Ingeniería*. (pp. 1- 8). México, D.F: Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Culhuacán

Rescher, N. (1999). *Razón y valores en la Era científica tecnológica.* Madrid: Ediciones Naos.

Ruiz, E.F. (2006). Cálculo Diferencial e Integral: Presentación de las matemáticas básicas, primer ciclo en diferentes escuelas del IPN. En: D. Christianne (Ed.). *Memorias de la Escuela de Verano. Matemáticas para Ingenieros*. (p.p. 1-12). Lyon: Francia INSA de Lyon.

Instituto Politécnico Nacional (2004). *Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN.* Materiales para la Reforma. México, D.F. IPN

Instituto Politécnico Nacional (2004b). *Plan y Programa de Estudios. Cálculo I*. México, D.F: Escuela Superior de Cómputo. IPN.

Ruiz, E. F. (2008). *La calidad de la ingeniería: el concepto de variación*, reporte técnico, proyecto de investigación registrado en la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP), del IPN con núm. de registro CGPI 20080368, México, 2008, IPN.

Apéndice 1

Analice la estrategia propuesta para el tema de variación y responda lo que se pide en la tabla al final de la misma:

Para dicha estrategia le solicitamos que llene la siguiente tabla (si se requiere, se recomienda incrementar el número de filas):

Habilidad(es) que se desarrolla(n) en los estudiantes	¿De qué manera se desarrolla la habilidad?	¿De qué manera se evalúa el desarrollo de la habilidad?

12. ¿Qué otros aprendizajes puede construir el estudiante mediante esta actividad?

13. ¿Recomienda el uso de alguna herramienta tecnológica como apoyo para trabajar esta estrategia?

Si No

14. Mencione alguna(s) de ellas

Estrategia para el tema variación**:** Lea el siguiente problema y resuelva las preguntas:

Sedelmayer, un crítico de arte, al comentar acerca de la arquitectura actual, menciona que al diseñar los edificios se cuida que el ambiente de las oficinas resulte adecuado para el buen funcionamiento y cuidado de las computadoras u otros equipos de alto costo; sin embargo, siempre estas condiciones son ideales para el ser humano. Por ello se han realizado investigaciones cuyo objetivo es identificar las condiciones ideales para poder realizar un trabajo sedentario de manera saludable y confortable.

POSGRADO A DISTANCIA EN LÍNEA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, UNA ALTERNATIVA DE FORMACIÓN DE PROFESORES. LA PROPUESTA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL PARA AMÉRICA LATINA

Javier Lezama Andalón
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Unidad Legaria — México
jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores — Nivel: Posgrado

Resumen. *En este escrito se presenta una reflexión sobre siete años de gestión del Posgrado en Matemática Educativa en el IPN de México, a la luz de lo que un grupo de expertos en prospectiva ven como el futuro de la Educación a distancia y en líneo o e-learning.*

Palabras clave: educación en línea o e-learning, posgrado, campo académico, profesor en servicio

Reportes internacionales muestran la necesidad de una cada vez mejor formación matemática de los individuos para constituirse en ciudadanos. Mayor competencia en el uso de esta disciplina exige de mejores procesos de adquisición de dicho saber en la escuela, en todos los niveles (Adler, et al, 2005), (Even. y Ball, 2009). Este planteamiento obliga a reflexionar en los profesores de matemáticas como protagonistas en esta tarea social. La actividad tradicional de enseñar matemáticas, se ha visto impactada por dificultades tales como la masificación escolar y los enormes desequilibrios sociales y culturales que impactan las pretensiones de uniformidad en los aprendizajes. El profesor de matemáticas enfrenta cada vez mayores dificultades para alcanzar los objetivos de aprendizaje con sus alumnos. El profesor requiere de profunda reflexión sobre el contenido objeto de su instrucción, así como de una ampliación de su campo de saberes que le permitan enfrentar, junto con la escuela, una realidad social compleja (Lezama y Mariscal, 2008).

Es en este escenario que académicos del Instituto Politécnico Nacional, con afán de contribuir desde su perspectiva a la problemática que se plantea, construimos una propuesta de formación de profesores de matemáticas en servicio a través de un posgrado a distancia en línea, en Matemática Educativa. El proyecto académico se centra en proponer al profesor de matemáticas un campo académico que le ayude a problematizar su quehacer y proporcione herramientas teóricas y metodológicas que le permitan reflexionar y actuar con una perspectiva científica. La razón de proponer un posgrado a distancia en línea responde a un proyecto social no centrado en la masificación (esperanza latente), sino en la diversidad, pues permite reunir por su naturaleza a una muestra diversa de profesores, tanto por los niveles educativos a los que pertenecen, como a las tradiciones culturales regionales o nacionales de sus países de origen. A siete años de operación, nuestro posgrado continúa saliendo del ámbito universitario tradicional para ir al encuentro de los estudiantes, mostrando con ello que los formatos de posgrado a distancia, haciendo cada vez un más amplio uso de la tecnologías de la información y la comunicación, son capaces de alcanzar estándares de calidad exigible a todo posgrado.

En este ensayo que busca reflexionar, no analizar ni evaluar sobre la tarea realizada en siete años por nuestro grupo académico al seno del posgrado en Matemática Educativa que se imparte en el CICATA del IPN, para ello nos apoyamos en los resultados de un estudio de prospectiva sobre el futuro de la educación a distancia y el e-learning en contexto del sistema educativo latinoamericano realizado por un grupo de expertos de varios países (Miklos y Arroyo, 2008). Si bien no es nuestro fin hacer prospectiva con relación a nuestro posgrado en Matemática Educativa, el estudio hace referencia de manera ordenada y sistemática a un cúmulo de situaciones que podemos calificar de realidades perfectamente reconosibles por nosotros en el ejercicio de nuestro proyecto educativo. Retomamos pues dichos aspectos y los comentamos en relación nuestra experiencia.

¿Qué se plantean los expertos en prospectiva en relación a la educación a distancia en línea?

El estudio citado plantea como hechos plenamente reconocidos por la comunidad de estudiosos en educación, dos hechos que a continuación se señalan:

> *El primero; la educación en Latinoamérica carga un pasado saturado de rezagos (acceso, movilidad social malograda) que acumula ahora, los retos del futuro (la calidad, la equidad, la inclusión de la diversidad cultural) Ibid. p.5.*

Efectivamente el reconocimiento de los resagos es lo que impulsa la creación de un posgrado para profesores de matemáticas en activo, intentando ampliar la cobertura de nuestro servicio educativo propiciando su incorporación a un proseso de estudio a un importante grupo de profesores del secundario, universitarios y formadores de profesores de matemáticas en un amplio sector de latinoamérica.

El segundo; los sistemas educativos formales, no formales han incorporado las TIC, provocando esperanzas y escepticismos sobre el papel renovador y transformador de estas tecnologías, tendrán para revertir los rezagos educativos y enfrentar los retos de la región Ibid. p.5.

El discurso de la incorporación de las TIC en los sistemas educativos formales es diverso, en voz de los directivos poco informados ha imperado un criterio de herramientas salvadoras para atender a más y más estudiantes y abaratamiento de la actividad educativa, sin reconocer las nuevas problemática que surgen de las prácticas educativas que exigen estos nuevos medios de gestión de la educación. La creación de nuestro posgrado en línea en principio generó más desconfianza que entusiasmo. Por ejemplo, se cuestionó, cómo se podría hacer matemáticas a distancia, cómo se evaluaría, y si la formación de los maestros y doctores serían de la misma calidad que aquellos que se forman en los sistemas presenciales. Si embargo uno de los problemas de fondo que sí reconocimos es que éramos un programa que entraba al escenario educativo con atrasos y que éstos son históricos y van tomados de la mano de los rezagos sociales y económicos característicos de la región.

El ejercicio de prospectiva que comentamos se formuló preguntas que en el contexto de nuestro proyecto educativo están llenas de sentido pues en éste, fueron surgiendo problemáticas específicas que exigían respuestas en nuestra práctica educativa.

- *¿podrán las innovaciones tecnológicas de la información y la comunicación contribuir a saldar las brechas educativas y sociales del pasado y del futuro?*
- *¿cuál es el futuro de la educación a distancia y del e-learning en la complejidad latinoamericana?*
- *¿estas modalidades educativas reconfigurarán las prácticas pedagógicas y las instituciones?*
- *¿cómo se reorganizará el conocimiento en las escuelas y los sistemas educativos latinoamericanos?*
- *¿podrán cristalizarse las visiones optimistas y convertirse en deseables y posibles (futuribles) al mismo tiempo? Ibid.,pp.5-6.*

En el contexto de las preguntas anteriores, nuestro programa experimentó de manera inmediata problemas tales como la inestabilidad de los servicios de conectividad, uso de plataformas de e-learning inadecuadas para la gestion educativa en línea. El cuerpo académico se había formado académicamente en espacios presenciales y obligó a una pronta adaptación al nuevo escenario educativo y por razones naturales incurriendo en errores importantes. Nuestra visión optimista fue fuertemente impactada por la dificultad de atención a grupos amplios de profesores en los formatos en línea.

El estudio comentado en su planteamiento formuló la siguiente visión que es indispensable reconocer para todo aquél que busque hacer uso de las TIC en sus proyectos educativos.

> *El sistema educativo mundial se ha visto impactado por la Globalización y la estructuración de lo que se denomina Sociedad del Conocimiento.*
>
> *En América Latina esto incrementa la complejidad de los sistemas educativos nacionales.*
>
> *La globalización modifica procesos educativos formales e informales debido a la posible interactividad que provee la Conectividad Tecnológica.*
>
> *Genera Sociedades abiertas, transfronteriza, capaces de producir , distribuir y consumir información valiosa Ibid.,p.8.*

Prevalecen dos visiones sobre el porvenir de la educación a distancia y en línea

Optimista

- *Produce energía creativa, que trasforma a la sociedad y la cultura*
- *e-learning se constituye en la expresión de la tecnología que innova en el orden educativo y enculturaliza.*
- *Produce un aprendizaje abierto, flexible, colaborativo, ayuda a cumplir objetivos de la educación y otorga capacitación y formación de calidad a todos.*
- *Promueve*
    - *Aprendizaje toda la vida*
    - *Ampliar la conectividad total que soporte la interactividad*

- *Construcción de redes*

Escéptica

- *Produce una contradicción con el sistema social actual.*
- *Fuerzas productivas instaladas en las innovaciones tecnológicas, se adelantan y entran en contradicción con la organización social que va a la zaga de las Innovaciones tecnológicas.*
- *e-learning ahondará la brecha social, unos aprenden más y mejor (los menos). (Los muchos) sin tecnologías y accesos atrasados u obsoletos. Ibid.,p.8.*

En América Latina el optimismo se transforma en una actitud escéptica y crítica.

- *La modalidad de educación en línea es poderosa y estratégica, pero por sí misma no modifica los obstáculos provenientes del contexto social.*
- *La tecnología genera dependencias y la virtualización sería otro instrumento para continuar ahondando la brecha social.*
- *Algunos creen que en AL, para alcanzar niveles de desarrollo y madurez educacional requeridos, las TIC tienen una función tranformadora de la educación pero no superará el abismo científico-tecnológico Ibid.,p.8.*

¿Lo nos dicen expertos en prospectiva en relación a la educación a distancia en línea?

El estudio comentado después de un interesante y complejo proceso metodológico, formularon hipótesis que permitieron redactar microescenarios que dieron pie a escenarios globales para el futuro de la educación a distancia y el e-learning en América Latina.

Escenario Lógico tendencial*: caracterizado por Globalización*

Totalmente generalizada y universalizada, así como Oferta de TIC tanto en calidad, diversidad y múltiples presentaciones.

El escenario Lógico tendencial presenta dicotomías y desigualdades, Ibid.,p.13.

Escenario Catastrófico*: caracterizado por una educación pública totalmente burocratizada que la lleva a una obsolescencia en ocasiones justificada, aparición de una creciente internacionalización bajo una visión mercantil, la cultura y los valores locales se desvanecen ante una homogénea visión global, innovaciones generan contradicciones paradojas sociales, impide superar desigualdades. Excluye, pues distribuye inequitativamente los conocimientos,* Ibid.,p.13.

Escenario Utópico***:** *caracterizado por: Globalización con dificultades logra con contradicciones administrar la paradoja de lo local/regional y global/universal, permite educación toda la vida, aprender sin la mediación de espacios físicos, sin distancia y tiempo,* la educación se convierte en e*ducación acto vital: para el bienestar común y pertenencia a un mundo compartido,* Ibid., p.14.

Escenario Futurible*: caracterizado por: Globalización y nuevas tecnologías se expanden a todo el planeta. Socialización democrática de las tecnologías permite acceso a la educación. La conectividad se masifica cubriendo amplios sectores sociales. Los rezagos sociales persisten, se generan brechas digitales.*

Se amplía la calidad y la cobertura de la educación en AL. Modelos Flexibles, pertinentes, apoyados en TIC. Las instituciones caminan lentamente. Los procesos de innovación de la práctica docente genera conflictos, sindicales, gremiales, epistemológicos. Estos aspectos hacen lento el cambio. *Se amplían los mecanismos de financiamiento, vinculación con la industria privada. Educación virtual mecanismo idóneo para: Ampliar cobertura. Contribuye a cerrar la brecha del conocimiento,* Ibid., p.14.

Escenarios clave para la prospectiva son los futurible y el tendencial. Sin embargo, el cruce con la realidad Político-social agrava el problema.

Algunos piensan que a las TIC como complementarias y marginales se instalarán en nichos educativos, Posgrado, Educación continua y Capacitación productiva, Ibid., p.15.

El Posgrado de Matemática Educativa, Prome

Justo en el contexto de los aspectos que se plantean en el estudio mencionado, en el año de 2001, surge a iniciativa de académicos del Instituto Politécnico Nacional la creación de un posgrado (maestría y doctorado) en Matemática Educativa. Tal iniciativa, busca acercar a comunidades de profesores de matemáticas de México y América Latina, a estudios especializados en el campo de la Matemática Educativa.

Tal acercamiento se plantea en dos niveles:

Uno, Maestría, para introducir a profesores a los elementos del campo académico que les es específico como profesores de matemáticas, mostrando y discutiendo el objeto de estudio del campo, las metodologías de trabajo, así como las fuentes de producción y difusión de dicho saber y cómo éste puede ser usado en el diseño de propuestas innovadoras para la escuela. Y el otro para la formación de investigadores en dicho campo a través de estudios de doctorado.

Por la amplitud de la comunidad a la que se quería prestar el servicio, se optó por un formato virtual, es decir, el programa de Matemática Educativa se plantea como un proyecto de estudios de posgrado a distancia y en línea, haciendo uso de las TIC.

El formato de educación a distancia permite: la realización de estudios de posgrado a profesores de matemáticas en servicio que no tienen acceso a ellos por que en su país o su estado no cuentan con instituciones que los ofrezcan y aún habiéndolos que por razones de tiempo no pueden incorporarse a esquemas de formación presencial.

El formato en línea ha permitido la conformación en una comunidad de profesores, proveyéndoles una estrategia de comunicación para construir una red social de profesores de matemáticas, así como para la discusión académica. Compartir información de forma rápida, segura y flexible, que como por ejemplo les brinda la posibilidad de interacción eligiendo el formato más adecuado a los propósitos y complejidad del tema a estudiar.

Las restricciones y retos

Las restricciones más fuertes para realizar nuestro proyecto académico en el formato virtual han consistido:

En ocasiones no contar con herramientas tecnológicas (conectividad, servidores eficientes que sean el soporte de la plataformas de trabajo colaborativo). Que los estudiantes que se incorporan a nuestro posgrado no puedan adaptarse con rapidez a las formas de interacción de los escenarios virtuales.

La reflexión en el contexto de del análisis prospectivo de la educación en línea en América Latina nos obliga a reconocer que la realización del proyecto de maestría y doctorado nos coloca en un escenario problemático y complejo.

Temas como, discernimiento y caracterización de la comunidad de profesores a los que se dirige el proyecto académico del Prome, el problema de lo que se denominaría la masificación del posgrado están latentes ya nos colocan en fuertes contradicciones con los criterios institucionales de estímulo y acreditación establecidos -hasta el momento en que se realiza este escrito- por Conacyt (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, en México) a través de sus programas de fortalecimiento de posgrado a nivel nacional. En relación a la conectividad, se ha hecho un gran esfuerzo por superar las restricciones institucionales y alcanzar independencia de gestión de nuestra infraestructura tecnológica aún al margen de la infraestructura institucional que se caracteriza por una gestión de servicio, burocrática y lenta. Entre los retos que se presentan se pueden mencionar:

- Construir, clarificar y estudiar nuestras modalidades de docencia en los formatos virtuales, así como una mejora en la gestión de los recursos de las TIC con fines de producción de conocimiento.

- Profundización en los modos y la naturaleza de producción del saber en los escenarios virtuales y específicamente en campo de la Matemática Educativa.

- Establecimiento de nuevas y mejores formas de interacción y trabajo colaborativo propias de los escenarios virtuales.

Conclusión

En siete años de operación el Prome se ha constituido en una alternativa consistente de formación de profesores en servicio, ha colaborado en la formación de algunas comunidades de profesores de matemáticas además de apoyar la constitución de cuerpos académicos en matemática educativa que se encuentran ya en plena producción académica.

Hemos definido líneas pertinentes de investigación, tales como la construcción social del conocimiento matemático y el caso específico en que ésta es mediada por la tecnología, los procesos de enseñanza y aprendizaje en la modalidad a distancia y en línea así como el de la puesta al día de los profesores de matemáticas en servicio (Castañeda el al, 2008).

La operación de un posgrado en la modalidad que se ha descrito nos inscribe en la paradoja de la exclusión. Nacemos con el propósito de incorporar al mayor número de profesores al posgrado; la institución con su normatividad, aunada a la dificultad intrínseca de atención a los estudiantes en los formatos en línea, así como en la etapa de desarrollo tecnológico en la que se encuentra la institución y el número de investigadores que componen el cuerpo académico, no nos lo permite. Esto exige una continua revisión de nuestros actos para fortalecer nuestros logros y convertirnos en auténtica alternativa de formación para más y mas profesores de matemática y colaborar con ello si bien de manera modesta, pero apasionada, en la superación de nuestros rezagos educativos en beneficio de nuestros pueblos.

Posgrado en Matemática Educativa, Prome. *CICATA-IPN* www.matedu.cicata.ipn.mx

Referencias bibliográficas

Adler, J.; Ball, D.; Krainer, K.; Lin, F, y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60 (3) 359-381.

Castañeda, A., Buendía G., Crespo, C. Lezama, J., Molina, J., Montiel, G., Martínez, G., Rosas, A., Sánchez, M. (2008). Las líneas de investigación en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN. Documento interno, Prome-Cicata-IPN. México.

R. Even, y D. L. Ball (Eds.) (2009). The professional Education and Development of teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study. Vol. 11. Springer.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemología. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 21 pp. 889-900. México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Miklos, T. y Arroyo, M. (2008). Una visión prospectiva de la educación a distancia en América Latina. *Innovación Educativa*, Vol. 8 No. 42 pp. 5-17. Instituto Politécnico Nacional. México.

Mariscal, E.; Rosas, A.; Sánchez, M. (2008). Programa de Matemática Educativa en línea del CICATA-IPN. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 21 pp. 517-526. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G., Castañeda, A. y Lezama, J. (2007). Investigación e innovación en educación a distancia en línea para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 581-602. Disponible en: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/(Montiel-Castaneda-Lezama2007).pdf

Categoría 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Apolo Castañeda Alonso

La introducción de los recursos tecnológicos al escenario educativo, inicialmente no había causado demasiada controversia hasta que su uso se volvió generalizado, y las tareas y actividades propuestas en clase podían ser resueltas gracias a los atributos de los dispositivos electrónicos. Fue entonces que las opiniones y posturas sobre lo que representan estos recursos en la clase motivaron el desarrollo de estudios científicos para explicar con mayor detalle su naturaleza.

Un primer aspecto de análisis, está relacionado con el estudio de la alteración en la relación *tradicional* del aula, debido a que la tecnología también tiene un rol en el sistema escolar, por lo que se ha tratado de caracterizar su modo de relación e interacción con el sistema didáctico: profesor, estudiante y conocimiento, caracterizando el tipo de acciones o manifestaciones que se generan en el aula a raíz de su uso.

Por otra parte, existe un interés por analizar los alcances que ofrecen los recursos tecnológicos; en cuanto a su capacidad de manipulación, información visual, numérica, algebraica, en otros. La información obtenida, si bien de carácter técnica, permite tener un panorama de la potencialidad de estos recursos para el desarrollo de actividades de aprendizaje.

Sin duda que, la línea referida al diseño de las actividades de aprendizaje ha sido la más amplia, no sólo por el enfoque pragmático, sino también por el interés de alcanzar una cierta eficacia en el aprendizaje de la matemática a través de recursos tecnológicos que, además de resultar atractivos para lo estudiantes y permiten generar entornos; como situaciones, problemas, planteamientos para el aprendizaje. En particular, se ha iniciado un debate sobre las características de las actividades en clase y la definición de nuevas tareas a partir de escenarios con tecnología.

UNA EXPERIENCIA DE DESARROLLO UTILIZANDO TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN: SITIO WEB PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL TEMA LÍMITES Y CONTINUIDAD

Enrique Vílchez Quesada, Eric Padilla Mora
Universidad Nacional **Costa Rica**
evilchez@una.ac.cr
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Medio

Resumen. *El presente artículo explica el diseño y desarrollo de una experiencia de TI, cuyo objetivo principal fue ofrecer una alternativa teórico-práctica a estudiantes matriculados en un curso de cálculo diferencial. Se describe el proceso de investigación llevado a cabo y la propuesta de solución. La investigación parte de un diagnóstico a partir del cual se detecta la necesidad en Costa Rica, de desarrollar un sitio Web para abordar el tema de Límites y Continuidad de una forma más interactiva. Los resultados de un análisis de las debilidades cognitivas presentadas por estudiantes universitarios a nivel de pre cálculo, ofrecieron los insumos básicos para el diseño y desarrollo de este sitio.*

Palabras clave: sitio, Web, diseño, deficiencias, funciones

Introducción

La actual diversidad de las tecnologías de la información y la comunicación así como sus usos en el ámbito educativo, ha abierto de forma masiva nuevas posibilidades de interacción en el aula, nuevos roles discente-docente, nuevos entornos de comunicación, nuevos entornos de enseñanza-aprendizaje, y por qué no, profundos cambios didácticos y metodológicos.

El presente artículo expone una experiencia de diseño y desarrollo de un Sitio Web para la enseñanza y el aprendizaje del tema límites y continuidad, como base de cualquier curso de cálculo diferencial. En particular el estudio se realizó con estudiantes de la Universidad del Valle en Costa Rica y profesores de matemática con experiencia en el área, en las distintas universidades estatales del país.

Tipo de estudio

El estudio realizado consiste en un análisis sobre las necesidades cognitivas que presentan los y las estudiantes de la Universidad del Valle en el curso de Cálculo I, integrando una estrategia de solución mediante el diseño y desarrollo de un Sitio Web.

Marco conceptual

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Costa Rica se han caracterizado, en todos los niveles, por ser algorítmicos, rígidos, lineales y metódicos; usan una metodología tradicional, donde el educador asume un rol protagónico de transmisor de información, mientras que el estudiante tiene el papel de receptor pasivo.

Algunas investigaciones, como la realizada por los profesores Meza y Hernández (2001) del Instituto Tecnológico de Costa Rica, acerca de las dimensiones culturales en aulas universitarias donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ratifican que los procesos continúan siendo iguales. Dicha investigación confirma el predominio de las clases magistrales en combinación con el método interrogativo.

En el artículo *"Enseñanza de la Matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula"*, Meza y Hernández (2001) señalan: *"Los procesos que ordinariamente se desarrollan en la enseñanza de la matemática, se caracterizan por clases magistrales, presentación secuencial de contenidos, prácticas adicionales, trabajo individualizado como norma general y comunicación entre las y los estudiantes escasa"* (p.32). Por otra parte, una revisión y análisis de los materiales didácticos elaborados para apoyar o desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, entre ellos los libros de texto, no escapan a esta estructura formal y rígida, ofrecen pocas posibilidades de formatos y elementos motivadores producidos con carácter informativo, pocos recursos de apoyo para los usuarios y centrados en la parte numérica y algebraica, esto hace considerar a la Matemática tediosa y aburrida.

Los avances tecnológicos apuestan a un cambio en dichos procesos de enseñanza y aprendizaje, con miras a utilizar nuevos métodos y estrategias didácticas; aprovechando todas las potencialidades ofrecidas por estos, donde elementos como imágenes, interactividad, dinamismo y recursos multimediales, sean utilizados al máximo. Al respecto el profesor Marín (1999) del Instituto Tecnológico de Costa Rica plantea: *"Es necesario que las opciones que la tecnología ofrece amplíen el horizonte de posibilidades que se tienen y permitan enseñar una mejor matemática y en una mejor manera"* (p.288). De esta forma, el profesor debe considerar la tecnología como un soporte en la enseñanza que aventaja a otros medios por su alto nivel de interacción, al verla no sólo como una herramienta de apoyo sino como aquella transformadora de los métodos tradicionales de enseñanza, porque permite generar procesos más dinámicos y agradables gracias a sus capacidades gráficas, rapidez en cálculos numéricos y facilidades de manipulación y dinamismo, entre otras.

Calderón (1999) en su artículo *"Una experiencia con el asistente matemático Derive"*, expresa: *"La tecnología nos proporciona una herramienta para incursionar en la Matemática, mucho de lo que antes no podíamos hacer: como gráficas inimaginables o muy difíciles de realizar. Cálculos interminables y tediosos, son ahora de fácil realización con su ayuda, y esto ha facilitado la comprensión y aprehensión de conceptos y resultados matemáticos"* (p.55). Harel y Papert (citados por Calderón, 1999) también afirman: *"La tecnología permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas, y puede ser utilizada como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas"* (p. 55).

Se evidencia, a partir de lo anterior, la relación o influencia entre la Tecnología y la Matemática, caracterizada por aportes con respecto a representaciones gráficas y simbólicas, dinamismo, interactividad y rapidez de cálculos que pueden contribuir a favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, sobre todo la construcción de significados que involucra el uso de representaciones. Para algunos teóricos, el empleo de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ofrece una serie de ventajas, por ejemplo, Meza, Garita y Villalobos (2001) destacan: *"La incorporación de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática permite aumentar la eficacia y eficiencia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes de incorporarla. El empleo de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios, dentro de estas están los laboratorios de descubrimiento y exploración dinámicos"* (p. 67).

Por su parte Área (2003) agrega: *"La diversidad de recursos multimediales permiten presentar la información en una amplia variedad de formatos de texto y gráficos, permitiéndole al estudiante poder acceder a la información de múltiples formas. Se puede generar información conectada hipertextualmente, lo cual le ofrece al estudiante el acceso a la información de una manera interactiva y dinámica, dando flexibilidad al proceso de enseñanza y aprendizaje y logrando que este no sea tan lineal. Ofrecen además, la posibilidad de desarrollar materiales flexibles e interactivos"* (p. 35).

Carranza (1999) sugiere: *"Posibilita la utilización de hipertextos, con los cuales si no entiende un término hace clic sobre este y obtiene una explicación adicional o se envía donde está la* *información que necesita (vínculos que no se logran cuando uno esta leyendo un libro y que ocasiona mucha pérdida de tiempo y aburrimiento y es la causa fundamental de muchos fracasos)"* (p. 53).

Otra ventaja, es la posibilidad de generar procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de actividades como laboratorios de exploración y descubrimiento, los cuales permiten a los estudiantes construir el conocimiento tomando como punto de partida la interacción, intuición y razonamiento.

A pesar de estas ventajas, algunos teóricos advierten la conveniencia de tomar en cuenta factores que pueden incidir en su empleo y, a la postre, generar procesos de enseñanza aprendizaje que no contribuyan con su mejoramiento. Galvis por ejemplo, (citado por Meza, 1997), indica: *"Si la informática ha de tener un papel importante en el enriquecimiento de la labor educativa, es indispensable tener claro qué tipo de educación deseamos impulsar y cómo se puede favorecer tal enfoque educativo"* (p. 208). De esta manera, es necesario considerar la incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, enmarcada dentro de un proceso planeado y estructurado, donde contribuya con la solución de problemas concretos. Meza (1997) por su parte, asegura: *"La tecnología debe incorporarse sólo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios"* (p. 211).

Lo anterior sugiere plantearse la siguiente pregunta ¿cuáles consideraciones deben tomarse en cuenta al apoyar, con tecnología, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática? Ante esta interrogante, Meza, Garita y Villalobos (2001) indican: *"El empleo de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe estar basado en los siguientes principios: el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe enmarcarse en un planeamiento educativo, con fines claros y bien definidos. Debe responder a la solución de problemas bien definidos y no ser empleada con un fin en sí misma. La tecnología debe incorporarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática solo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios"* (p. 67).

La tecnología se convierte en un agente de cambio para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, gracias a la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos en múltiples sistemas de representación, dentro de esquemas interactivos abre espacios para que los estudiantes puedan vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr con medios tradicionales como lápiz y papel), donde se puedan manipular directamente los objetos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias serán fructíferas si tienen en cuenta la complejidad del contenido matemático por enseñar, las dificultades y necesidades de los estudiantes, dentro de un proceso planeado, inmerso en un contexto educativo.

Recolección de la información

La información se obtuvo mediante datos primarios, recolectados por los investigadores a partir de un cuestionario aplicado a doce profesores universitarios de matemática, de los cuales tres tienen el grado académico de maestría y nueve de licenciatura, graduados de la Universidad Nacional (UNA), el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), la Universidad de Costa Rica (UCR) y la Universidad Estatal a Distancia (UNED); así como a dieciocho estudiantes de Ingeniería de la Universidad del Valle. Esto da una muestra total de treinta encuestados.

Los cuestionarios fueron revisados y avalados por la Licenciada Patricia Delvó Gutiérrez, Estadista y académica de la Universidad de Costa Rica. Contribución sumamente significativa para garantizar la efectiva recolección de la información a partir de los objetivos, del problema propuesto y facilitar el análisis estadístico posterior. Dicha revisión estuvo adscrita a los servicios ofrecidos por el Programa de la Unidad de Servicios Estadísticos de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica.

Estrategias para la solución del problema

Los medios digitales se seleccionaron como los recursos base ante la solución del problema identificado, a través del diseño de un sitio Web para la enseñanza y aprendizaje del tema límites y continuidad, bajo el enfoque de la resolución de problemas.

La investigación dio insumos que condujeron a elaborar un sitio Web que contempla los siguientes aspectos:

- El desarrollo teórico y práctico de materiales con contenidos fundamentales para el abordaje del tema límites y continuidad, donde los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas.

- El desarrollo teórico y práctico del contenido propio del tema límites y continuidad.
- Los materiales elaborados incluyen diversos tipos de registros de representación, para favorecer los distintos estilos de aprendizaje.
- Los materiales propuestos toman en cuenta los diversos recursos multimediales ofrecidos por la Web: textos, imágenes, gráficas, cuadros y tabulaciones. Así como la combinación acertada de estos.
- El sitio vincula a temas con conocimientos previos, para contribuir con las explicaciones en los momentos indicados.
- El sitio vincula con otros sitios en la Web que contribuyen a explicar, ampliar o profundizar la temática tratada.
- El sitio brinda ejemplos de problemas que permiten la aplicación de los contenidos, no solo del tema límites y continuidad, sino además de sus conocimientos previos.
- Define claramente los objetivos y contenidos planteados para cada tema.
- Considera aspectos de accesibilidad y usabilidad.
- Posee una navegación fluida y comprensible.
- Posee un diseño gráfico agradable.
- Fomenta el empleo de estrategias metodológicas y pedagógicas propicias al aprendizaje por descubrimiento, mediante la manipulación, el dinamismo y las actividades propuestas, en los temas que lo permitan. Esto se pudo lograr a través de la implementación de algunos JavaScripts con actividades de corte heurístico (es decir, actividades donde el papel del estudiante adquiere un rol protagónico). Se incluyeron vínculos a software libre para graficar funciones y generar actividades que faciliten la construcción del conocimiento.

Considerando lo anterior, el material va más allá de lo ofrecido en los libros y las lecciones magistrales; con actividades, estrategias pedagógicas y metodológicas para propiciar el aprendizaje por descubrimiento o verificación.

Como respuesta a las consideraciones anteriores y a los objetivos planteados en esta investigación, se elaboró y diseñó el sitio Web titulado *"Límites, Continuidad y sus Conocimientos Previos"*, el cuál puede ser visitado en la dirección electrónica: www.ermate.com.

Conclusiones

Los recursos tecnológicos computarizados se han venido diversificando y especializando sorprendentemente en la última década, gran parte de este proceso obedece a las posibilidades de comunicación masiva que ha ofrecido la red Internet a nivel mundial.

La tecnología y sus recursos multimediales permiten generar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática más allá de la simple transcripción de documentos, los cuales empleados a partir de estrategias metodológicas y pedagógicas adecuadas, pueden contribuir positivamente con la labor educativa.

Generar recursos que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje en cualquier área, requiere de un estudio profundo y detallado no solo de sus necesidades, sino además, de sus requerimientos, metodologías y enfoques.

La enseñanza de la matemática asistida por materiales educativos computarizados, está beneficiando notablemente a la población estudiantil mediante nuevas formas de representación simultánea de los contenidos y nuevas formas de apropiación de conceptos y propiedades matemáticas.

Referencias bibliográficas

Área, M. (2003). *De los Webs educativos al material didáctico Web*. Extraído el día 29 de enero del 2006 desde http://dewey.uab.es/pmarques/EVTE/webseducativos.pdf.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Artículo de Internet extraído de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1).*Consultada el 24/1/2006, http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/1998-1-1/3.pdf

Batista, E. (2003). Uso didáctico del Internet. Extraído el día 3 de febrero del 2006 desde http://nogal.cnice.mecd.es/~lbag0000/html/teoria_1.HTM.

Calderón, S. (1999). Una experiencia con el asistente matemático Derive. *Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora* (pp. 55-60).

Carranza, S. (1999). Enseñanza de la Matemática mediante computador: CD de Matemática Básica 1. *Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora* (pp.52-54).

Marín, M. (1999). La reforma del cálculo. ¿Qué debemos aprender? *Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora* (pp.285-289).

Meza, L. y Hernández, F. (2001). Enseñanza de la Matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula. *Del Documento Elementos para enseñar matemática*.

Meza, L. Garita, G. y Villalobos. (2001). Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática asistidos por computadora. *Del documento Elementos para enseñar matemática* (pp.66-75).

Meza, L. (1997). Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistido con software matemático. *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas* (pp.208-216).

Vílchez E. y Padilla, E. (2006). Sitio Web *Límites y Continuidad*. Extraído el día 5 de febrero del 2006 desde http://www.ermate.com.

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: ACTIVIDADES DE MODELACIÓN CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Ángel Homero Flores Samaniego
Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México — México
ahfs@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Modelación Matemática — Nivel: Medio

Resumen. *Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza que se ha venido desarrollando desde hace algunos años, principalmente en el nivel Medio Superior. La filosofía en la que se sustenta el modelo es la de una Educación Centrada en el Estudiante en la cual se fomenta un medio ambiente de enseñanza y aprendizaje de convivencia armónica entre los participantes en el proceso. En este contexto, las actividades de modelación matemática como un medio para aprender matemática han sido de gran utilidad en el desarrollo del conocimiento, no sólo matemático, de los estudiantes. Por su parte, el uso de programas de Matemática Dinámica como The Geometer's Sketchpad (2003) ha facilitado la construcción de modelos matemáticos, y ha servido para ampliar la gama de conocimientos del estudiante. En el presente artículo se presenta una actividad de modelación matemática para alumnos de bachillerato dentro del modelo de enseñanza.*

Palabras clave: modelación matemática, *sketchpad*, educación centrada en el estudiante.

Introducción

Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza centrado en el estudiante (Flores 2006; 2007 a, b; 2008) que tiene como objetivo fomentar en los estudiantes competencias matemáticas, como el desarrollo de un pensamiento matemático y la capacidad de resolver problemas; y el fomento de cualidades personales, como una actitud positiva hacia el quehacer matemático y el desarrollo de valores como la tolerancia, el respeto y la cooperación.

En la educación centrada en el estudiante se pone énfasis en la comprensión del profesor; la autoconciencia; actividades iniciadas y reguladas por el estudiante; y el fomento de un pensamiento crítico. Se fundamenta en cuatro dominios: metacognitivo y cognitivo; afectivo y emocional; factores de desarrollo y sociales; y factores de diferencias individuales (Cornelius-White, 2007).

El modelo de enseñanza tiene como objetivo principal fomentar en los estudiantes (Gómez y Flores 2009) los siguientes aspectos:

- Un pensamiento matemático que le permite reconocer patrones y generalizar; justificar resultados mediante argumentos matemáticos; y utilizar las representaciones de un mismo objeto matemático.
- Habilidades de resolución de problemas que le permiten usar su pensamiento matemático para plantear y resolver problemas dentro y fuera del ámbito matemático.
- Competencia en el uso de tecnología que le permite utilizar las tecnologías que tiene a su alcance para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de su conocimiento.
- Actitudes positivas hacia las tareas matemáticas que le permiten plantear problemas y argumentar su resolución como una responsabilidad propia que redundará en su beneficio y en beneficio de los demás.
- Valores humanos que le permitan una mejor convivencia con sus semejantes y el ambiente que le rodea.

Estos cinco elementos están divididos en Competencias y Cualidades Personales; en el modelo se propone un Medio Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje (que se define como todo aquello que interviene en el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, desde el aula y su mobiliario, hasta los materiales y la metodología de enseñanza) en el que se desarrolle una

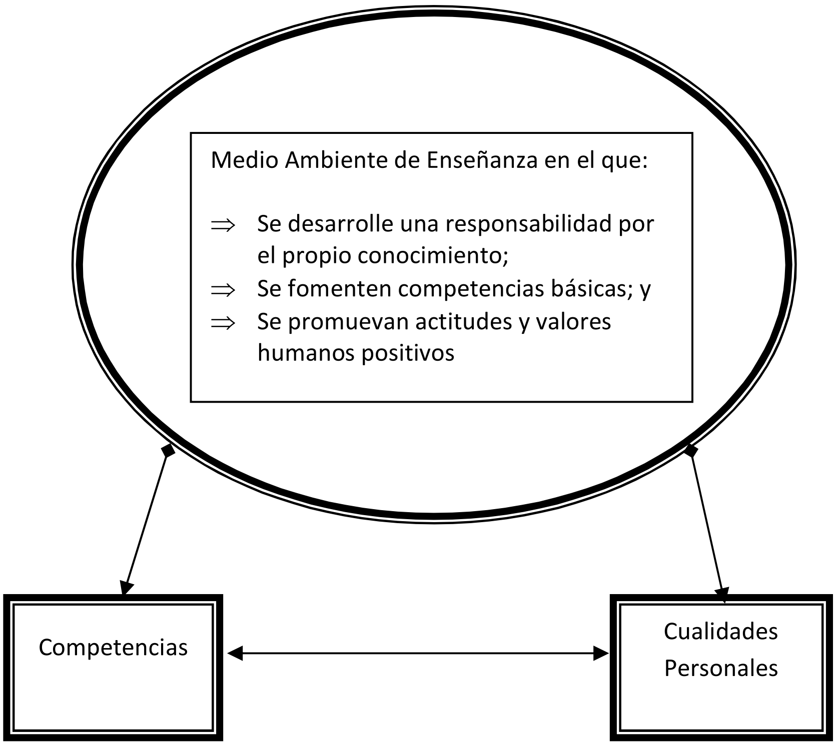


Fig. 1. Aprender Matemática, Haciendo matemática

responsabilidad por la adquisición del propio conocimiento y el de los demás; se fomenten competencias básicas; y se promuevan actitudes y valores humanos positivos que permitan una convivencia armónica dentro del aula (Figura 1, tomada de Gómez y Flores, 2009).

En la categoría de Competencias se incluyen los tres primeros aspectos del Modelo: pensamiento matemático, resolución de problemas y tecnología; mientras que en Cualidades incluimos los dos restantes: actitudes positivas hacia el trabajo matemático y valores humanos positivos.

Modelación matemática y uso de software dinámico

Uno de los aspectos metodológicos del modelo de enseñanza es el uso de la modelación matemática como vehículo para fomentar las competencias matemáticas antes mencionadas. Cabe destacar que no se trata de enseñar modelación matemática a los estudiantes, sino que se trata de utilizar el proceso de creación de modelos para que el estudiante aplique su conocimiento previo (matemático o no) y aprenda los conceptos matemáticos propuestos en el currículo.

En particular, el uso de ecuaciones paramétricas es de gran utilidad para el aprendizaje de funciones y la comprensión del concepto de variable; esto se ve potenciado con el uso del paquete de Geometría Dinámica, *The Geometer's Sketchpad*, que permite la utilización dinámica de los parámetros.

Como ejemplo de lo anterior tenemos el siguiente problema, presentado en Relme 22 como parte del curso corto que dio origen al presente artículo:

Las bases de un campo de beisbol forman un cuadrado de 28 metros de lado. Patricia está en primera base y decide robarse la segunda. Empieza a separarse de la primera base poco a poco. Cuando está a tres metros de la primera decide correr a la segunda. 1.5 segundos después de iniciada su carrera, el catcher lanza la bola desde home a la segunda base. Si Patricia corre a 8 m/s y el catcher lanza la bola a 38 m/s, ¿llegará Patricia primero que la bola a la segunda base? Construye un modelo con Sketchpad que reproduzca la situación.

Para resolver el problema se hace la suposición de que l trayectoria de la bola es lineal. Las ecuaciones de movimiento de Patricia y de la bola son las siguientes:

(1) $P = 8t$

y

(2) $b = 38(t - 1.5)$

Patricia tiene que recorrer 25 metros hasta la segunda base, mientras que la distancia que recorre la bola es de $28\sqrt{2}$ = 39.598 metros.

Figura 2

Con estas distancias, el tiempo que tarda Patricia en llegar a la base es de 3.125 s y el tiempo que tarda la bola es de 2.542 s. Por lo que la bola llega primero.

Ahora bien, con *Sketchpad* es posible construir parámetros cuyo valor no es fijo, a manera de una variable. En la Figura 2 se muestra la simulación que se hizo con *Sketchpad*. Para hacer la construcción, primero se definió un parámetro t cuyo dominio de variación es [0, 3.125] y con él se calculó las distancias recorridas utilizando las ecuaciones (1) y (2). El valor de t que da el programa, por omisión, es t = 1, por lo que se obtuvieron los valores P = 8 y b = -19. Al variar el parámetro de 0 a 3.125 las distancias varían de la siguiente manera:

P : [0, 28] y b : [-19, 61.75]

Se hace necesario, entonces, restringir el movimiento de la bola al intervalo [0, 2.542]

Para ello utilizamos la función signo, incorporada al programa y que se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos el valor de b por los factores:

$$\left(\frac{1-\operatorname{sgn}(t)}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-\operatorname{sgn}(t-2.542)}{2}\right)$$

los valores de *b* se limitan al intervalo [0, 2.542].

Ahora bien, si colocamos el campo de beisbol en un sistema de coordenadas con Home en el origen, las bases quedan en los puntos (28, 0), para la primera; (28, 28) para la segunda; y (0, 28) para la tercera.

Esto nos indica que Patricia correrá siguiendo un línea recta cuya ecuación es $x = 28$; mientras que la bola seguirá la recta cuya ecuación es $y = x$.

Para simular lo anterior, calculamos un valor fijo 28 con la calculadora del programa y reproducimos el valor de *b* (con la instrucción copiar y pegar).

Con estos valores definimos los puntos (28, *P*) y (*b, b*) para la posición de Patricia y la bola. Al cambiar el valor del parámetro *t*, se actualizan los valores de *P* y *b*, y los puntos en la gráfica cambian de posición. Para hacer que Patricia empezara a correr 3 metros más adelante de la primera base, simplemente se suma 3 al valor 8*t* que da su posición.

Si se activa el rastro de lo puntos *Patricia* y *Bola* y después se anima el parámetro, se tendrá la situación que se muestra en la Figura 2. En ésta las posiciones de Patricia y la Bola corresponden a un tiempo de 2.17 segundos y se aprecia claramente que la bola llegará antes que la corredora.

Consideraciones finales

Resolver el problema planteado mediante las ecuaciones de movimiento parece ser no muy complicado para estudiantes de un primer curso de álgebra de bachillerato. Pero la construcción del modelo y la simulación del campo de beisbol con *Sketchpad* implica poner en juego un conocimiento matemático mucho más amplio que el mero planteamiento de ecuaciones y su resolución para determinados valores.

Además del dominio del programa, se requiere cierto conocimiento de geometría analítica como la ubicación de puntos en un sistema de coordenadas y el concepto de recta. En particular la forma de la ecuación de una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

El uso de parámetros que se pueden animar y cuyo dominio se puede manipular ha resultado de bastante utilidad en la comprensión del concepto de variable por parte de los estudiantes y, por ende, del concepto de dominio y función.

Como comentario al margen, el uso de la función signo para restringir el movimiento de los puntos no siempre resulta claro para los alumnos de bachillerato y, curiosamente, tampoco para muchos de los profesores de secundaria y bachillerato con los cuales se ha trabajado esta actividad.

Finalmente, utilizar actividades como la presentada en un medio ambiente en donde el estudiante es quien hace la matemática y el profesor se limita a fungir como guía, a resultado positivo en la construcción de un Medio Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje en donde se puede aprender matemática, haciendo matemática.

Referencias bibliográficas

Cornelius-White, J. (2007). Learner-Centered Teacher-Student Relationship are effective: a Meta Analysis, *Review of Educational Research*, 77 (1), 113-114.

Flores, H. (2006). Učiti se matematiko-delati matematiko (Aprender matemática-haciendo matemática). Revista *Matematika v Šoli*, 12(3) y 12(4).

Flores, H. (2007a). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae,* 9 (1), 28-40. Revista de la Universidad Luterana de Brasil

Flores, H. (2007b). *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: Uso de la Geometría Dinámica*, Taller impartido a profesores de ingeniería., Centro Universitario de Occidente, División de Ciencias de la Ingeniería. Quetzaltenango, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala.

Flores, H. (2008) *Learning Mathematics, Doing Mathematics: creativity in classroom?* Grupo de Discusión, Promoting Creativity for all Students in Mathematics Education, 11th International Conference on Mathematical Education, Monterrey México.

Gomez, A. y Flores, H. (2009) *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula*. Artículo presentado en la Revista Educación Matemática, para publicación.

The Geometer's Sketchpad v. 4.0, paquete de Geometría Dinámica. (2003), Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

LAS RELACIONES PEDAGÒGICAS ENTRE PROFESORES Y ALUMNOS AL INCORPORAR EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES EN EL ÁMBITO ESCOLAR

Juana Acosta Ganém , Miguel Ángel Cruz Castillo, Jorge Hernández Márquez
Secretaría de Educación Pública en Hidalgo México)
ganem_pachuca@hotmail.com, macc_2302056@yahoo.com, jhmpren@yahoo.com
Campo de investigación: Formación de profesores, tecnología avanzada Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo muestra algunas de las experiencias obtenidas en la puesta en práctica del proceso didáctico que propone el programa EMAT –Hidalgo con un grupo de docentes que imparten la asignatura de matemáticas en el nivel de educación secundaria modalidad técnica. La investigación permitió identificar el tipo de relaciones entre profesores y estudiantes al incorporar el uso de las tecnologías computacionales en el ámbito escolar. Para ello, se hicieron entrevistas, encuestas y observaciones en los tres grados de educación secundaria.*

Palabras clave: nuevas tecnologías, contexto comunicativo, relaciones didácticas y pedagógicas, trabajo en el aula

Introducción

La aplicación de las tecnologías computacionales al campo educativo es una realidad. Analizar su utilidad pedagógica, las implicaciones en los roles de educadores y estudiantes así como las relaciones pedagógicas que establecen en el ámbito escolar, es indispensable.

En este sentido, usarlas como herramientas incrementa la actividad cognitiva y motivacional de los estudiantes hacia un aprendizaje significativo ya que les permitió visualizar y comprender los objetos matemáticos, al mismo tiempo nos encaminó a reflexionar sobre los modos de pensar, enseñar, aprender, sentir, actuar y comunicar. En congruencia, Trenchs (2004) asegura que su introducción implica una postura de apertura hacia las posibles aplicaciones en sus contextos porque trasforman las aulas en comunidades de aprendizaje donde los alumnos manifiestan diferente niveles de experiencias, conocimiento y habilidades.

El reporte de investigación se organiza en tres apartados, el primero lo estructura los aspectos del problema y algunas consideraciones teóricas en torno al él, en el segundo se explica el proceso metodológico y en el tercero los resultados de la investigación.

El problema y algunas consideraciones teóricas en torno a él

El Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), asociación de profesores de matemáticas de los Estados Unidos de Norteamérica, en el documento Principles and Standard for School Mathematics. (2000). Identifican el uso de la tecnología como un principio que debe dar soporte a las propuestas curriculares y señalan que las computadoras y las calculadoras son herramientas esenciales para el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Generan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y análisis de datos y de cálculo de manera eficiente y precisa.

Cuando las herramientas computacionales están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas. Bajo estos principios y la tendencia de concebirlas como agentes de cambio tanto de los modos de apropiación de conocimiento, como de las prácticas en el aula y de los contenidos curriculares mismos, se sustenta el programa EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología),modelo que contempla el uso de software de geometría dinámica: cabri geometre, hoja electrónica de cálculo, calculadora gráfica TI92 y logo cada una estrechamente relacionadas con las didácticas de la geometría, el álgebra, la aritmética y la resolución de problemas.

El valor como herramientas mediadoras del aprendizaje, en lo cognitivo y en lo epistemológico lo respaldan el sustento teórico y/o empírico de cada una.

Para Rojano (2006) la llegada de las herramientas tecnológicas a los procesos educativos implica, entre otras cosas, la transformación de la práctica docente, la reorganización escolar y el replanteamiento de las políticas educativas lo que provoca expectativas, miedos y retos al maestro, a la escuela y al sistema educativo.

El programa de estudios 2006 para la enseñanza de la educación secundaria plantea la necesidad de aprovechar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC´s) en la enseñanza, entre otras razones, porque ofrece al docente alternativas didácticas y pedagógicas, y a los alumnos acceder a nuevas formas de apropiación del conocimiento.

Para Rojano (2006), los principios del proceso a seguir en el uso de las tecnologías como herramientas son:

a) Principio didáctico, mediante el cual se diseñan actividades para el aula, siguiendo un tratamiento fenomenológico de los conceptos que se enseñan.

b) Principio de especialización, por el que se seleccionan herramientas y piezas de software de contenido.

c) Principio cognitivo, a través del cual se seleccionan herramientas que permiten la manipulación directa de objetos matemáticos y modelos de fenómenos, mediante representaciones ejecutables.

d) Principio pedagógico, por medio del cual se diseñan las actividades de uso de las TIC´s para que promuevan el aprendizaje colaborativo y la interacción entre los alumnos, así como entre profesores y alumnos.

e) Principio de equidad, con el que se seleccionan herramientas que permitan a los alumnos de secundaria el acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas. (p 16).

El problema de estudio

¿Cómo el uso de las TIC´s en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha impactado en las relaciones entre maestros y alumnos?

Objetivos

Identificar las diferentes formas de trabajo en el aula de los maestros que imparten la asignatura de matemáticas y de los estudiantes al incorporar el uso de las tecnologías computacionales a la cultura escolar.

Las interrogantes que guiaron el estudio fueron:

- ¿Cómo se usan las herramientas computacionales en la clase?
- ¿Cómo las utilizan los estudiantes?

- ¿Cómo se muestran las relaciones pedagógicas entre profesores y alumnos al incorporar el uso de las tecnologías computacionales del programa EMAT en el ámbito escolar?

Proceso metodológico

La investigación se incrusta en la tradición cualitativa, se desarrolló durante el ciclo escolar 2007 – 2008 y se dividió en dos fases.

En la primera fase se planearon, desarrollaron y evaluaron 5 cursos taller con los profesores de matemáticas de las 68 escuelas secundarias técnicas públicas del Estado de Hidalgo.

Los objetivos de los Cursos-Taller fueron:

- Mejorar el aprendizaje matemático de los estudiantes mediante un enfoque interactivo con el uso pertinente de las herramientas tecnológicas (cabri geometre, hoja electrónica de cálculo, calculadora TI-92 y Logo), en donde se conjugaron el desarrollo curricular, la actualización profesional de los docentes y la investigación.
- Aportar elementos para la reflexión y la discusión sobre el mejoramiento de la práctica educativa en matemáticas y la incorporación de las herramientas tecnológicas al currículo, desarrollando con ello procesos de actualización sistemática y gradual.

En la segunda fase se planteó la estrategia general para el seguimiento y evaluación del trabajo de los profesores en el aula. Este se realizo en 6 escuelas secundaria técnicas, seleccionadas bajo los criterios de: 2 de zona urbana, 2 semi-urbana y 2 rurales las cuales cuentan con 15 equipos de cómputo como mínimo.

Participaron 12 profesores de matemáticas (2 por escuela) y 12 grupos de alumnos de los 3 grados de educación secundaria.

Se levantaron 36 registros de observación, 12 entrevistas a docentes y 36 entrevistas a estudiantes.

En las observaciones se documentaron los desempeños de los estudiantes y profesores en cuanto al manejo de los sofware, las formas de desarrollo de las actividades sugeridas en las hojas de trabajo, la participación de los estudiantes, el papel de los profesores, así también los procesos de interacción que se dieron en el aula, entre otros.

Las entrevistas permitieron integrar información referente al cómo el uso de los sofware modificó las relaciones entre los estudiantes y profesores mediadas por los contenidos de aprendizaje.

El tratamiento de la información se hizo desde el enfoque etnográfico; se construyeron patrones emergentes, categorías sociales, analíticas y teóricas; se hicieron cruces y triangulaciones de fuentes de información, informantes y posturas teóricas.

Resultados

Fue necesario retroalimentar los 5 Cursos- Taller a través de reuniones de intercambio de experiencias entre los profesores, los temas surgieron a partir de las deficiencias que los propios profesores observaron y los resultados arrojados de la propia investigación.

Con respecto a la configuración de las relaciones en el aula, los estudiantes mostraron avances en la comprensión, expresión oral del lenguaje matemático, la capacidad de razonamiento y habilidad en el procesamiento de la información.

Se ampliaron los momentos de intercambios verbales entre profesores y alumnos a partir del análisis y discusión de temas específicos.

Existen diversas respuestas de los alumnos al interactuar con las herramientas del programa EMAT en la resolución de las actividades propuestas (hojas de trabajo).

Los alumnos participaron directa y activamente en la construcción de sus propios conocimientos con la ayuda del profesor, de sus compañeros y de la tecnología. La discusión entre pares fue un elemento fundamental para lograr el aprendizaje, ayudó a los estudiantes ha organizar sus propias ideas matemáticas, reflexionar sobre ellas efectuando tránsito entre distintas representaciones (numérica, algebraica y gráfica), manteniendo puentes entre sus saberes previos y lo desconocido, entre el lenguaje matemático y sus experiencias y prácticas generando nuevos conocimientos matemáticos. Por ello los profesores acordaron utilizarlo permanentemente en el desarrollo de las sesiones de trabajo.

En el trabajo de equipo fue necesario que los estudiantes no desempeñaran siempre las mismas funciones, se intercambiaron las tareas y precisaron las reglas del trabajo.

El profesor se convirtió en mediador y coordinador en el intercambio de ideas y en las discusiones de los alumnos, al mismo tiempo actuó como intermediario entre el estudiante, el contenido de aprendizaje y la herramienta tecnológica. En el uso de los sofware que propone el programa EMAT, cada profesor encontró paulatinamente su propia manera de desarrollar las actividades didácticas y pedagógicas.

Las herramientas tecnológicas como apoyo para el aprendizaje permitió a los estudiantes retroalimentar su conocimiento al descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos sin la intervención del profesor. Estas ayudaron a desarrollar la expresión creadora, la observación, y el plantear hipótesis.

El uso de las herramientas tecnológicas en el aula fue una estrategia sistemática en la que el profesor consideró en cada ejercicio: el propósito pedagógico, las articulaciones entre lo pasa en el aula y los efectos en el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, su uso facilitó a los estudiantes el acceso a información y comunicación, con lo que se pudo lograr que ellos aprendan y construyan conocimiento, desarrollen habilidades para el manejo de la información y el trabajo colaborativo. También se encontró que la responsabilidad por su propio aprendizaje fue más alta en la mayoría de los estudiantes.

Esto significa que las TIC´s se pueden usar como herramientas que facilitan a los estudiantes hacer cosas nuevas y enfrentar problemas reales de manera innovadora, en ambientes orientados en un enfoque constructivista.

Conclusiones

- Existe ruptura con la organización tradicional de la enseñanza y del aprendizaje en donde se perfila un imprescindible proceso de reconversión docente, una configuración del proceso didáctico y metodológico, así también un nuevo contexto comunicativo en las relaciones interpersonales entre el profesor y los estudiantes.
- Modificación de la cultura del salón de clases, originado por los docentes que participan

en el proceso de formación y actualización al adquieran un mayor protagonismo, intervención y control de los procesos, sobre todo al hacer uso de las herramientas que mejor se adapten a sus necesidades.

- En la práctica educativa, la interacción tecnológica hace necesario que se diseñen actividades adecuadas a los entornos educativos y se organice el espacio y el tiempo, hacia la integración de grupos de trabajo en función de los nuevos contextos y recursos de aprendizaje.
- Las herramientas tecnológicas pueden convertirse en un medio didáctico poderoso y coadyuvar en el proceso de aprendizaje de las matemáticas si se usan apropiadamente.
- Los alumnos comprenden más el concepto cuando lo experimentan, lo viven y lo perciben.
- Ninguna tecnología hace a un buen maestro, el maestro le da el sentido dentro del aula a las herramientas, porque tiene un fin, que es integrar más al estudiante.
- La pasión educativa por la enseñanza no termina, al contrario continua abriendo y despertando en los alumnos un nuevo interés, ver al objeto de estudio en otra percepción, bajo otra mirada donde el papel del profesor es fundamental es la guía en estos mundos de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

NTCM (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*.The National Coucil of Teachers of Mathematics.Inc.

Rojano,T. (2006). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología:Modelos de Transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. Dirección General de Materiales de la Subsecretaria de Educación Básica. México. Editorial: S.E.P.

SEP. (2006). Educación Básica .Secundaria Programas de Estudio Dirección General de Desarrollo Curricular. México.

Trenchs, M. (2004).Nuevas Tecnologías para el aprendizaje y la Didáctica de lenguas.Bobalá, España, Editorial: Milenio.

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO INTEGRAL MEDIANTE EL USO DE UN ENTORNO VIRTUAL. UNA EXPERIENCIA EN UNA UNIVERSIDAD VENEZOLANA

Angela Mora Zuluaga, Miguel Angel Vera
Universidad de Los Andes Venezuela
ammzuluaga@yahoo.com, veramig@gmail.com
Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación tuvo como objetivo, validar un Entorno Virtual para la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en una variable, dirigido a estudiantes de la Carrera de Administración de la Universidad de Los Andes-Táchira. Se enmarcó dentro del paradigma mixto y se apoyó en un estudio de campo. Se diseñó una estrategia didáctica y un Entorno Virtual, incorporando micromundos y los principios de la Metadidáctica. Además, se aplicó un cuasi-experimento, para el cual se conformaron un grupo control y uno experimental. Las pruebas de rendimiento aplicadas, detectaron diferencias estadísticamente significativas en las medias de los grupos. La validación de ambos recursos se realizó utilizando el criterio de expertos, mediante una variante del método Delphi, que arrojó una calificación bastante aceptable a los mismos.*

Palabras clave: cálculo integral, entorno virtual, metadidáctica, micromundos

El desarrollo de la informática educativa y las tecnologías de la información y comunicación (TIC), ha generado cambios a nivel mundial a escalas sociales, culturales, educativas y económicas. Estos cambios vienen influyendo en el proceso educativo, el cual debe adecuarse al tipo de personas que están formándose en esta era tecnológica. Por ello, la Educación debe propiciar el desarrollo integral de individuos capaces de enfrentar los retos, cubrir las necesidades y demandas que la "sociedad de la información" le impone al mundo actual. Venezuela no escapa a esta realidad, por esta razón se hace necesaria la adecuación y modernización del proceso de enseñanza y aprendizaje, para que promuevan la formación de personas críticas, creativas, reflexivas y capaces de integrarse a la nueva sociedad, de un modo efectivo.

Sin embargo, Poveda y Salas plantean que la metodología usada para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas ha empezado a cuestionarse. Esto, debido principalmente al bajo rendimiento académico que se presenta en esta asignatura. (Poveda & Salas, 2003, p. 2). Esta situación se viene evidenciando desde hace algunos años en los distintos niveles del Sistema Educativo venezolano y ha sido documentada por varios autores como Maita (2002) para quien a pesar de los estudios orientados a analizar la problemática del rendimiento académico en Matemáticas, el deterioro del proceso de enseñanza y aprendizaje en todos los niveles sigue vigente y Morales (2005) quien señala que en la enseñanza de las Matemáticas en Venezuela, se han presentado factores psicológicos y pedagógicos que han dificultado el aprendizaje de esta ciencia.

Para Poveda y Salas (2003) las innovaciones tecnológicas en las aulas de clase pueden constituir medios para motivar a los estudiantes, cambiar la actitud de desidia y desinterés hacia el estudio de las Matemáticas y eliminar la monotonía en las clases. Además, la integración de las TIC al proceso de enseñanza de esta ciencia, puede brindar al estudiante un ambiente educativo semejante al entorno social en el cual se desarrolla. Es así como las TIC y específicamente los Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA) pueden generar ambientes de trabajo para el aprendizaje colaborativo, activo, autoregulativo e interactivo, rompiendo con el aprendizaje pasivo y exclusivamente acumulativo. En este orden de ideas, el aprendizaje se presenta como un fenómeno social, pues los protagonistas del acto educativo interactúan para apropiarse de conocimientos, aplicándose de esta manera los principios establecidos por Vigotsky, mediante la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)

Los Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA), serán definidos como "dominios en línea que permiten la interacción sincrónica y asincrónica entre el profesorado y el alumnado" (Barajas, 2003, p. 4). En todo caso, un EVEA es un espacio mediado por las TIC, de comunicación sincrónica y asincrónica que permite el intercambio de información y donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje, facilitados por la interacción y cooperación entre estudiantes y docentes en forma dinámica. En los EVEA pueden incorporarse los recursos conocidos como micromundos, definidos por Tsang citado en Vera y Morales como "un ambiente especializado para el aprendizaje dotado de los materiales apropiados para un objeto dado" (Vera & Morales, 2005, p. 50). Los usuarios podrán utilizarlos para conseguir soluciones a los planteamientos que su propia capacidad e ingenio le generen, asumiendo un papel protagónico.

Se propuso entonces la elaboración de un EVEA dirigido a estudiantes de Matemática 31 de la Carrera de Administración de la Universidad de los Andes-Táchira, como herramienta motivadora y complementaria en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en una variable considerando además, los otros componentes del polígono didáctico como la cultura matemática asociada al cálculo integral, la tecnología, los profesores y estudiantes (Vera y Morales, 2005). Dicho EVEA se fundamentó en un modelo que consideró las características del estudiante e incorporó elementos motivacionales conducentes a promover en los usuarios la participación activa y la generación de un aprendizaje significativo y colaborativo y en los principios de la Metadidáctica, relacionados con el proceso de Enseñanza del Cálculo Integral en una variable, y que serán utilizados siguiendo los lineamientos de una estrategia didáctica diseñada para tal fin.

Aquí se tomará en cuenta la definición de Metadidáctica dada por González como "un sistema de conocimientos lógicos, cibernéticos y/o artísticos orientado al estudio y perfeccionamiento del proceso de preservación, desarrollo y difusión de la cultura asociada a una disciplina científica, técnica o artística por parte de un colectivo docente" (González, 2003, p. 1). Es importante destacar que la Metadidáctica establece nuevos roles docentes. Así, por ejemplo, el profesor de Matemáticas debe convertirse en un agente productor de material educativo de alta calidad en formato digital y en un agente difusor y preservador de la cultura Matemática. Por ello, en el contexto de este trabajo, se pretendió presentar al docente como agente productor, difusor y preservador de la cultura Matemática asociada con el Cálculo Integral en una variable.

Marco teórico

La investigación se desarrolló bajo una postura ecléctica, tomando en cuenta lineamientos y elementos de varios modelos. Desde la perspectiva de la enseñanza, se consideraron aquellos centrados en los alumnos y los dependientes de los medios como la computadora. Desde la perspectiva del aprendizaje, se consideraron elementos de Ausubel: el aprendizaje significativo y la motivación, Vigotsky: el aprendizaje natural-social y la zona de ZDP y Cabero: el binomio Tecnología-Educación.

El trabajo de Ausubel, fundamenta esta investigación en primer lugar porque los docentes de hoy trabajan con una generación audio-visual-cibernética dotada de una estructura mental que puede ser altamente motivada si los materiales educativos que se les presentan mediante recursos como la computadora y los EVEA, logran producir en ellos un interés tan fuerte que posibilite la interconexión dinámica y efectiva de los tres cerebros, lo cual constituye -sin lugar a dudas- el deber ser de la Motivación, generando las condiciones para que el estudiante se disponga a aprender con el denominado cerebro triuno. En segundo lugar, porque los conocimientos previos de los estudiantes conformaron el punto de partida para el desarrollo de las actividades en el aula.

Los EVEA ofrecen y promueven oportunidades para el aprendizaje social-colaborativo y la construcción de conocimientos mediante la interacción socio-cultural. Por esta razón, la Teoría del Aprendizaje natural-social de Vigotsky cobra singular relevancia en esta investigación, pues esta se basa en la postura de que el medio social donde se desarrolla un individuo es fundamental para el aprendizaje. Según este enfoque, el aprendizaje se presenta como una actividad o fenómeno social y se logra mediante la interacción con el medio donde se desarrolla cada persona. El conocimiento es producto de la interacción social y todos los procesos psicológicos superiores se adquieren en un primer momento en un contexto social y luego se internalizan. Los EVEA brindan al estudiante la posibilidad de interactuar colaborativamente en su proceso de aprendizaje pues los contenidos pueden ser presentados en forma lógica y organizada, de modo que los EVEA, representan un recurso útil para estimular la motivación del usuario y promover en él un aprendizaje significativo.

Metodología

Esta Investigación se enmarcó dentro del paradigma mixto y se apoyó en un diseño de campo. La estrategia adoptada para el desarrollo en las siguientes etapas:

Fase Diagnóstica

Estuvo destinada a diagnosticar en docentes y alumnos de Matemáticas 31 de la Carrera de Administración, el conocimiento, utilización y postura frente a los recursos informáticos existentes, relacionados con el Cálculo Integral de una variable. Asimismo, se caracterizó el proceso de enseñanza en la mencionada Cátedra y el grado de motivación hacia el estudio de la misma, por parte de los estudiantes. Para esto, se aplicaron cuestionarios iniciales. La muestra estuvo conformada por 94 estudiantes y tres (03) profesores (el total de la población profesoral)

Fase de Diseño

Se orientó hacia la selección y organización de los contenidos del Cálculo Integral de una variable, correspondientes al programa de la asignatura Matemáticas 31 de la Carrera de Administración, que estarían presentes en el EVEA. Adicionalmente, se seleccionó la Plataforma Tecnológica para desarrollar el EVEA.

Fase de materialización

Considerando los lineamientos teóricos establecidos, los resultados de los instrumentos aplicados y haciendo uso de la plataforma seleccionada, en este caso Moodle versión 1.7.1, se diseñó un Entorno Virtual para la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en una variable, dirigido a estudiantes de Matemática 31, de la Carrera de Administración de la Universidad de Los Andes-Táchira, el cual estuvo disponible en www.gapsipe.org/virtual bajo el nombre: Cálculo Integral en una variable. Así mismo, se construyó la estrategia didáctica a utilizar en la aplicación del mencionado recurso, la cual fue elaborada tomando en cuenta las dimensiones culturales establecidas por la Metadidáctica a la cultura asociada, en este caso, al Cálculo Integral en una variable. En el diseño del EVEA se incorporaron tres micromundos: The Wolfram Integrator, Derive 6 e Integral Numérica.

Fase de Aplicación

Estuvo destinada a la puesta en marcha de un cuasi-experimento, donde una vez diseñados, se aplicaron el EVEA y la estrategia didáctica, asumiendo un grupo control (48) y un grupo experimental (49). Al iniciar el cuasi-experimento se aplicó un Pre-Test, conformado por diez (10) ítems con el fin de indagar sobre las redes conceptuales vinculadas conocimientos previos necesarios para el desarrollo de algunos métodos de integración. Durante la aplicación del cuasi-experimento, el grupo experimental recibió clases utilizando el EVEA, bajo los lineamientos establecidos en la estrategia didáctica y el grupo control, recibió clases usando una estrategia docente tradicional. Las sesiones de clase de los dos grupos se desarrollaron en las aulas. El grupo experimental llevó a cabo las actividades complementarias, previstas en el EVEA diseñado.

Los contenidos relacionados con el Cálculo Integral en una variable, fueron estructurados en la plataforma Moodle, en once (11) bloques o Unidades, sin contar el bloque de bienvenida. Cada una de las Unidades comenzó con una explicación general del tema a tratar y continúa con la presentación de una serie de diez (10) ejercicios desarrollados con detalle, haciendo énfasis en explicaciones, que por experiencia de la autora, deben mostrarse al estudiante. También se presentan al usuario un conjunto de ejercicios propuestos con su respectiva respuesta, actividades relacionadas con el uso de los micromundos y materiales adicionales en los cuales puede encontrar más ejemplos y complementar el estudio de cada tema, tales como enlaces a páginas Web, textos electrónicos, entre otros. Además se incluyeron recursos como Chat, glosarios, consultas, foros, entre otros disponibles en Moodle versión 1.7.1.

La evaluación de los temas relacionados con el Cálculo Integral en una variable se realizó mediante la aplicación de dos (2) Pruebas a cada grupo. Las actividades previstas en el EVEA, para el grupo experimental, constituyeron el 30% de la calificación de cada Prueba Parcial y el 70% restante estuvo conformado por la calificación obtenida en la Prueba Escrita. El promedio de estas dos Pruebas Parciales para cada grupo fue utilizado como Prueba de Rendimiento para valorar el cuasi-experimento. La actividad culminó con la aplicación de los cuestionarios finales tanto a la docente como a los estudiantes que conformaron el grupo experimental, con la finalidad de indagar sobre sus apreciaciones del trabajo realizado, sus valoraciones con respecto al EVEA diseñado.

Fase de Validación

La validación de la estrategia didáctica y del EVEA se realizó bajo dos perspectivas. En primer lugar, validación por criterio de juicio de expertos mediante la aplicación de una variante del Método Delphi, el cual es definido por Linstone y Turoff (1975) como un método de estructuración de un proceso de comunicación grupal que es efectivo a la hora de permitir a un grupo de individuos, tratar un tema complejo. Luego del procedimiento establecido en la Metodología Delphi, reseñado en Martínez (1982), se seleccionaron diez (10) expertos en las áreas de Matemáticas, Didáctica, Pedagogía, Informática aplicada a la Educación, Evaluación e Informática. En segundo lugar, la realización de un cuasi-experimento donde los estudiantes trabajaron con el EVEA diseñado que finalizó con la aplicación de pruebas de rendimiento.

Análisis de los resultados

Los resultados del cuestionario inicial para estudiantes, permitieron establecer que un alto porcentaje de éstos, reflejó una disposición positiva hacia el trabajo grupal, el aprendizaje cooperativo (54.26%) y hacia el uso del computador en su proceso de aprendizaje (76.59%). Además, la mayor parte opinó que la incorporación del computador en la Enseñanza y Aprendizaje de este tema pudiera motivarle hacia su estudio (95.75%). Los resultados del cuestionario inicial para docentes permitieron establecer que en opinión de éstos, las TIC constituyen recursos complementarios para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral y manifestaron disposición para la aplicación del cuasi-experimento (100%). Este análisis sugiere que, en general, estaban dadas las condiciones para que se implemente -en la práctica- el uso de un EVEA que permita el desarrollo de los mencionados contenidos.

El instrumento final aplicado al grupo experimental mostró que la mayoría (59.18%) consideró como bueno su rendimiento en la asignatura y que su nivel de motivación aumentó notablemente (51.02%). El instrumento final aplicado a la docente que desarrolló el cuasi-experimento, mostró que desde su punto de vista, el nivel de motivación e interés para el estudio del Cálculo Integral, por parte de los estudiantes, mejoró con el uso del EVEA. En cuanto a las diferencias entre la enseñanza y aprendizaje tradicional del Cálculo Integral en una variable y la enseñanza y aprendizaje del mismo, mediados por el EVEA, opinó que con este método se obtuvo un mejor rendimiento.

El Pre-Test permitió establecer la normalidad de los datos, la homogeneidad de los grupos en cuanto a conocimientos y la igualdad estadística de medias de calificación. Con los resultados del Post-Test, se determinó una diferencia significativa entre las medias de calificación de los grupos después de la aplicación del cuasi-experimento.

Con respecto a la validación del EVEA y la estrategia didáctica, utilizando una variante del Método Delphi, se tiene que en promedio los diez (10) expertos concordaron con que la estrategia didáctica y el entorno virtual diseñados son bastante adecuados, por esta razón, le atribuyeron una calificación bastante aceptable.

Conclusiones

De acuerdo con los resultados, con el EVEA diseñado se logró mejorar la motivación, en la mayoría de los estudiantes y un mejor rendimiento por parte de los estudiantes. Adicionalmente, se dio cumplimiento a los nuevos roles docentes, establecidos en la Metadidáctica, como son los de producir, difundir y preservar la cultura Matemáticas asociada con el Cálculo Integral de una variable. Los resultados del proceso de validación, evidenciaron que la estrategia didáctica y el entorno virtual utilizados, poseen un conjunto de características que permitieron un uso eficiente de los mismos, por esta razón, se puede afirmar que se logró implementar en forma adecuada los recursos empleados, posibilitando la difusión de la Cultura Matemáticas, mediante las TIC, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en una variable.

Nota de los autores

La investigación realizada, se llevó a cabo gracias al apoyo y respaldo, del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes (CDCHT-ULA).

Referencias bibliográficas

Barajas, M. (2003). Entornos virtuales de aprendizaje en la enseñanza superior. Fuentes para una revisión del campo. En Barajas, M. & Álvarez, B. (Eds.), *La tecnología educativa en la enseñanza superior: entornos virtuales de aprendizaje* (pp. 3-29). Madrid: McGraw-Hill.

González, M. (2003). *Introducción a la Metadidáctic*a. Extraído el 26 de Mayo de 2005 desde http://www.monografias.com/trabajos16/metadidactica/metadidactica.shtml.

Linstone, H. & Turoff, M. (1975). *The delphi method, techniques and applications*. USA: Addison Wesley Publishing.

Maita, M. (2002). Una Experiencia de Formación Inicial: La Producción de Software Educativo por Alumnos de la Carrera de Educación. *Acción Pedagógica, 11(2)*, 66-75.

Martínez, C. (1982). *Descripción del Método Delphi*. Tesis de Ingeniero Comercial, Universidad de Chile.

Morales, F. (2005). *Diseño de un texto electrónico para le enseñanza del Cálculo Integral dirigido a estudiantes de Administración.* Trabajo de Ascenso. Universidad Nacional Experimental Sur del Lago "Jesús María Semprum", Venezuela

Poveda, R. & Salas, O. (2003). *Uso de la TI-92 en la Enseñanza del Tema: Funciones.* Extraído el 15 de Febrero de 2006 desde http://www.una.ac.cr/mate/publicac/ti92.htm.

Vera, M. & Morales, F. (2005). Propuesta de un modelo didáctico para la elaboración de un software educativo para la enseñanza del Cálculo Integral. *Acción Pedagógica, 14*, 50-57.

EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Arturo Arellano Rosario, Mayra Solana Sagarduy
Universidad Autónoma de Guerrero. México
arellano127@yahoo.com.mx, mayra_ss@yahoo.es
Campo de investigación: Enseñanza problémica, Tecnología en la Educación Superior Nivel: Superior

Resumen. *Es tradicional que en cualquier carrera universitaria, a los estudiantes de cálculo se les expongan una diversidad de definiciones y teoremas con un significado matemático preciso y que han sido elaborados durante años por muchos matemáticos, pero los estudiantes, encuentran las logran asimilar, ni comprender. Aquí es donde adquieren importancia las nuevas tecnologías de la computación, que junto con la enseñanza problémica permiten diseñar experiencias en las cuales está presente la noción del cálculo, logrando así desarrollar el pensamiento creador de los estudiantes. En este trabajo mostramos la experiencia obtenida en una investigación que desarrollamos con un grupo de estudiantes de Cálculo I en la Unidad Académica de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero y mostramos algunas de las prácticas realizadas.*

Palabras clave: enseñanza problémica, tecnología en la educación

Introducción

En este trabajo resumimos parte del proyecto de investigación que estamos desarrollando con un grupo de estudiantes de Cálculo I en la Unidad Académica de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero. En el mismo mostramos algunas de las prácticas realizadas y damos conclusiones parciales.

Como es por todos conocido, uno de los grandes problemas de la educación en todos los países es el concerniente a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El desarrollo de capacidades, como la de construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones, no se propicia en las aulas de las carreras de matemática a pesar de ser una de las principales competencias planteadas en el proyecto Tunning para Latino América.

Las definiciones y conceptos fueron el resultado de un proceso que se produjo a través del tiempo y conforman una rigurosa cadena ordenada de proposiciones lógicas y símbolos, que tienen un significado matemático preciso. Pero los estudiantes, en general, encuentran las definiciones matemáticas formales tan comprimidas y exactas que no las pueden manipular, ni asimilar, ni comprender fácilmente (De la Torre, 2002). Esto podría deberse a que la manera en que se explica la matemática tradicionalmente se ha visto privilegiaba la adquisición de un cuerpo de conocimientos ya construido, donde los estudiantes han tenido poco o ningún contacto con el aspecto experimental e investigativo de la actividad matemática. Pero el gran avance de la computación y el amplio desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC´s), a finales del siglo pasado, permitió el desarrollo de equipos de cómputo, herramientas de programación y aplicaciones con gran potencial, que por su rapidez y facilidad de uso, abrieron enormes posibilidades de aplicación en todos los campos de la actividad humana, donde los recursos informáticos y tecnológicos facilitan la simulación de situaciones problémicas reales y actualizadas, las cuales concretan la aplicación de la matemática en sus diferentes esferas, contribuyendo al fortalecimiento de valores y el desarrollo multilateral del estudiante (Lujan y Pochulu, 2006).

La investigación educativa en matemática está ligada al desarrollo del pensamiento crítico y creador de los estudiantes, que se manifiesta como proceso de búsqueda, elaboración de hipótesis, razonamientos, emisión de juicios, etc. Pero la mayoría de los alumnos no está preparada para hacer conexiones y entender el valor y el sentido de lo que se les enseña (CORD Communications, 2003).

A pesar de que nuestros alumnos necesitan entender conceptos matemáticos para poder desempeñarse bien en sus trabajos y en la sociedad en que viven y trabajan, la mayoría tiene dificultad para entender dichos conceptos y teoremas tal como se los enseña habitualmente. Entonces ¿Cuál es la mejor manera de transmitir la gran cantidad de conceptos que se enseñan en una clase, para que todos los alumnos puedan retener y utilizar esa información? ¿Cómo se pueden visualizar mejor los distintos temas a enseñar y que son como piezas interconectadas que se agregan a lo que ya sabe el alumno? ¿Cómo puede un profesor comunicarse con sus alumnos cuando éstos preguntan acerca del por qué, del significado y de la pertinencia de lo que están estudiando? ¿Cómo podemos abrir las mentes de nuestros alumnos para que aprendan técnicas de aprendizaje que les proporcionarán a muchas oportunidades a lo largo de sus vidas? De aquí surge esta pregunta: ¿Se podría, con ayuda de las TIC's, lograr que el estudiante sea capaz de hacer conjeturas que los acerque a los métodos de trabajo científico llevándolos a plantear y resolver teoremas en la asignatura de Cálculo I?. Estas son algunas de las cuestiones que podrían plantarse los docentes al enseñar el cálculo, aunque las respuestas son difíciles de encontrar.

El marco teórico en que se inserta esta investigación es, por una parte, la enseñanza problémica, buscando un acercamiento del estudiante a los métodos de trabajo de investigación científica y, por otra, las ideas aparecidas en la literatura sobre la utilización de la computadora en la enseñanza para, con apoyo en la visualización, contribuir al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Para esto se hace uso del software matemático The Geometer's Sketchpad como apoyo, para que por medio de la observación, manipulación de gráficas, y elaboración de conjeturas nos permita explorar, desde una óptica didáctica, conceptos avanzados relacionados con el cálculo.

Metodología

En este trabajo, exponemos algunas experiencias de investigación en matemáticas llevadas a cabo con el software matemático *The Geometer's Sketchpad*, el cual deja las puertas abiertas para la creación de nuevos conocimientos en la disciplina, fortaleciendo el potencial de los estudiantes y favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

El trabajo con los estudiantes se llevará a cabo en dos etapas para cada actividad: primero, mediante imágenes gráficas previamente diseñadas utilizando el software matemático, se les permitirá la manipulación libre de las mismas. Dichas imágenes gráficas están enfocadas en la búsqueda del desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes, y a un mejoramiento significativo, en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones que permitan a los estudiantes continuar aprendiendo dentro de un medio científico haciéndose cuestionamientos claves dentro de la materia a estudiar. En especial, se busca el fortalecimiento de los procesos mentales que se dan en los alumnos en el momento en que estos deben desarrollar en sus propias mentes las ideas y herramientas matemáticas, de modo que adquieran un nivel avanzado de razonamiento que permita superar con eficiencia los distintos obstáculos asociados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia.

Después, por medio de preguntas se les guiará hasta lograr que por sí mismos enuncien el teorema sobre el que estemos trabajando, permitiendo la discusión sobre si las condiciones son necesarias y/o suficientes, cambiando, quitando o agregando hipótesis. Estas preguntas se basan en la observación del movimiento de los distintos objetos gráficos que se les presentan a los estudiantes en las actividades.

Estas actividades formarán parte del curso de Cálculo I, utilizando como texto el libro de Cálculo de Spivak, M. (1999), y los teoremas en cuestión serán formalizados y demostrados posteriormente en clase.

Resultados

Nuestro objetivo principal es que en el marco de la enseñanza problémica y mediante la manipulación de gráficas en la computadora debidamente diseñadas para las actividades, los alumnos logren concluir las hipótesis de los distintos teoremas y conceptos que se encuentran al estudiar el cálculo. Una buena parte del trabajo consiste en elaborar las actividades, desde el diseño y creación de las gráficas hasta el planteamiento de preguntas debida y oportunamente formuladas por el guía (profesor).

Las gráficas se construyeron de manera que fueran interactivas, animadas y significativas buscando que facilitaran el estudio y comprensión de las propiedades matemáticas del cálculo. Al inicio, en lo que llamamos primera fase, se trabajó con actividades de introducción para que los estudiantes se familiarizaran con el software y con la metodología que íbamos a utilizar en clase. En esta fase se utilizaron conceptos "conocidos" por los estudiantes como el concepto de dominio, límite y continuidad.

Los resultados parciales obtenidos hasta ese momento, nos llevó a seguir pensando que trabajando de esa manera se podía lograr propiciar la realización, por parte del estudiante, de conjeturas y dar proposiciones, y generalizaciones despertando así su interés y participación en su trabajo escolar, provocando además el desarrollo del pensamiento creador y un mejoramiento significativo en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones permitiéndoles continuar aprendiendo dentro de un medio científico, haciéndose cuestionamientos claves dentro de la materia a estudiar, y en especial, fortaleciendo de los procesos mentales que se dan en el momento de desarrollar en sus propias mentes las ideas y herramientas matemáticas.

Centramos la segunda fase en que los estudiantes pudieran encontrar las condiciones necesarias y/o suficientes para enunciar teoremas. Por medio de preguntas problémicas se les guió en la búsqueda de estos resultados.

Uno de los teoremas estudiados fue el teorema de Rolle (Spivak, 1999)

Para trabajar este teorema se les planteó a los estudiantes la búsqueda de condiciones que permitieran determinar si la derivada de una función se anula en algún punto de un intervalo dado. Es decir, se intentaba la búsqueda de condiciones suficientes para garantizar que en un punto del intervalo la función tuviese una tangente horizontal.

Se le presentaron distintas situaciones creadas con el Geometra y que el estudiante pudo manipular dándole movimiento a los puntos.

1 La función era continua, tomaba los mismos valores en los extremos del intervalo, pero no era derivable en el punto de mínimo. El alumno dio moviendo pero no encontró ningún punto donde la derivada fuese cero. (Figura 1)

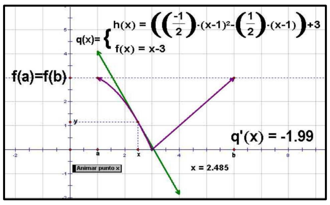


Figura 1

2. La función era continua en el cerrado y derivable en el abierto, pero los valores en los extremos no coincidían. Para esta situación se le presentaron dos casos, uno en que sí había un punto donde la derivada se anulaba (Figura 2) y otro donde no (Figura 3), buscando que el estudiante se diera cuanta de que si la función era continua en el cerrado, derivable en el abierto pero los valores en los extremos no coincidían, simplemente no podíamos garantizar que existiera un punto donde se anulara la derivada.

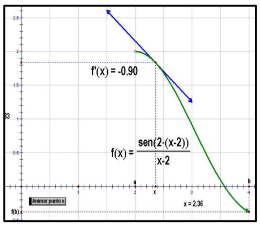


Figura2

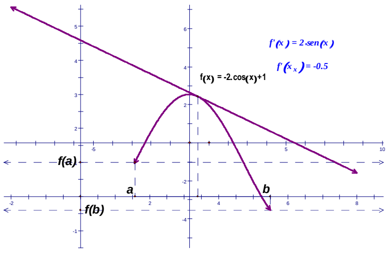


Figura 3

3 Un caso similar lo teníamos si la función no estaba definida en los extremos del intervalo.

Las mismas graficas sirvieron para ilustrar, solo que quitándole alguno de los valores de los extremos del intervalo. (Figuras 2 y 3).

4. Otro caso que se les planteó fue, dada una función que no fuera continua en el intervalo pero que sí tomara valores iguales en los extremos. Aquí también se pretendía que vieran que no se podía afirmar nada sobre si hay o no un punto donde se anulara la derivada. (Figuras 4 y 5).

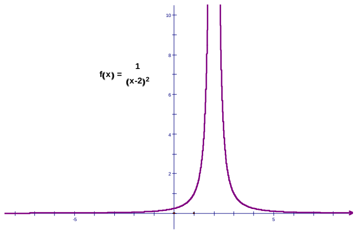


Figura 4

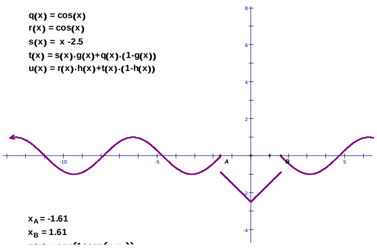


Figura 5

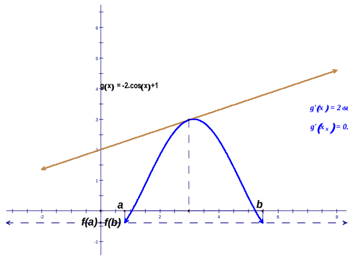
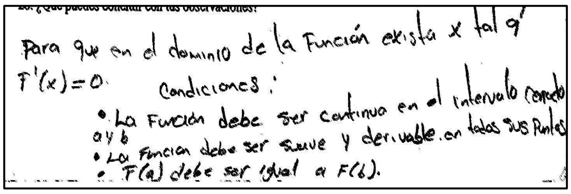
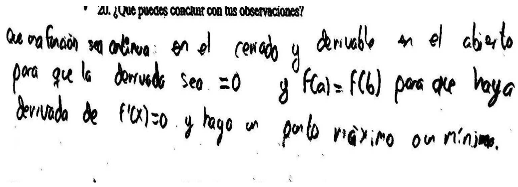


Figura 6

Finalmente se les planteó el caso de en que sí se cumplían las 3 condiciones. (Figura 6)

Posteriormente, se le pidió a los estudiantes que escribieran sus conclusiones





Como se pudo observar, al final de la actividad y llegado el momento de conjeturar con lo observado y analizado en las gráficas del software, los estudiantes dieron un buen acercamiento al teorema. Posteriormente, en la conferencia el profesor retomó las “conjeturas” hechas y con ayuda de una lluvia de ideas se formalizó el teorema pasando posteriormente a su demostración.

Con nuestra experiencia en clases pudimos notar que el pensamiento creador de los estudiantes aumenta significativamente cuando ellos “ven” el por qué están aprendiendo esos conceptos y cómo se pueden usar los mismos para resolver problemas que trascienden el ámbito del aula. La mayoría de los alumnos aprende mucho más eficientemente cuando se le permite trabajar en equipos compartiendo problemas y soluciones entre ellos.

Discusión

El trabajo de laboratorio es esencialmente cooperativo. En este tipo de actividades, los alumnos trabajan con otros compañeros y para la realización de las mismas necesitarán delegar, observar, sugerir y analizar.

El trabajo más difícil para el profesor es impedir que el alumno active las distintas herramientas del software y se ponga a crear dibujos que no conviene para nuestros propósitos. Afortunadamente el software utilizado en esta investigación permite ocultar algunas de las herramientas para que no estén a disposición del alumno en este archivo (en este caso ocultaríamos la caja de herramientas) y así trabajen encaminados únicamente a la actividad.

Como es tradicional en la enseñanza del cálculo en las distintas carreras universitarias, en el momento en que el maestro dicta a sus alumnos los conceptos y teoremas, el problema habrá acabado sin pena ni gloria para el estudiante sin darle la oportunidad de mostrar sus capacidades para desarrollar su razonamiento matemático. Si, por el contrario, el alumno se dedica a pensar en la figura que se obtiene al cambiar los parámetros de las gráficas de las funciones, analiza distintas posibilidades, observa, manipula las gráficas y explica por qué se da ese concepto como resultado, intenta convencer (demostrar) a sus compañeros de por qué va a ser con otras condiciones e hipótesis se puede lograr que los conocimientos adquiridos sean más sólidos.

La comprensión de estos conceptos y teoremas involucran distintos aspectos, entre los cuales se destaca la historia del concepto, los objetos geométricos y la visualización que permiten concebir dicho concepto, los obstáculos que los alumnos enfrentan al abordarlo y la relación entre el concepto-imagen y el concepto-definición, que debe lograrse para su plena comprensión. Los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, como los de derivada e integral, se valen de los conceptos del cálculo para formalizar otros, aún más abstractos, que con frecuencia desembocan en conocimientos más profundos y refinados (De la Torre, 2002).

Conclusiones

Hoy en día con los nuevos recursos tecnológicos, se pueden realizar actividades abiertas e innovadoras que despierten interés en los alumnos, y que concluyan en una verdadera investigación matemática, donde el estudiante descubra y construya conocimientos, pudiendo llegar a ser temas no explorados aún por sus propios docentes.

A partir de los resultados parciales obtenidos, pensamos que el uso de los nuevos recursos brinda un importante apoyo en la labor de investigación en matemática, principalmente porque permiten: a) Formulación de hipótesis de trabajo, b) Comprobación de estas hipótesis, c)Elaboración de conjeturas y formulación de contraejemplos, d) Elaboración de complicados y tediosos cálculos algebraicos. (Adell, 1997).

En este sentido, pensamos que es muy importante generar en clases situaciones significativas, que "intriguen" al alumno motivándolo a estudiar e impidan que el olvido llegue tan fácilmente.

Las investigaciones que aparecen redactadas en múltiples revistas científicas revelan, que en matemáticas el trabajo de los estudiantes en un ambiente con computadoras es cualitativamente superior al tradicional.

En este trabajo, se hemos podido verificar tales afirmaciones, es decir, que los alumnos van más allá de los computadores programáticos, formulando conjeturas, acuñando definiciones, haciendo demostraciones, proponiendo y resolviendo problemas. El ambiente computacional es particularmente propicio para la exploración de un tópico matemático, el cual les lleva a proponer conjeturas y a "descubrir" relaciones matemáticas.

También podemos concluir que las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático.

En consecuencia, estratégicamente utilizados, los nuevos recursos tecnológicos pueden provocar en los estudiantes sensaciones de capacidad, confianza en sí mismos e interés por adquirir los nuevos conocimientos que le permitan corroborar lo descubierto y explicar teóricamente su causa.

En el terreno de la matemática escolar básica, el uso de la calculadora y de software educativo, han proporcionado a los educadores ambientes de experimentación y nuevas metáforas para comunicar ideas matemáticas. Así, hoy en día es posible diseñar actividades de aprendizaje en los distintos escenarios del cálculo, los cuales llegan a ser apropiados para que el alumno confronte rápidamente problemas no triviales -pero tratables en su nivel- efectuando la exploración detallada de ejemplos paradigmáticos, busque contraejemplos y lleve a cabo una experimentación sistemática con el auxilio de modelos concretos.

Los software matemáticos son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas. El problema es que en muchos casos, basta con una acción de ratón para que se desvelen todas las propiedades de la figura y ya no haya que pensar más: la imagen es muy poderosa y nos convence.

Con frecuencia, la secuencia de trabajo en una clase de matemáticas es: *Haz, discute, descubre.* D. Fielker (citado en Mora, 2007) en su libro Rompiendo las cadenas de Euclides, propone hacer permutaciones de estos términos según la tarea que queramos proponer a los estudiantes.

Cuando el alumno piensa de antemano en la situación, planifica y analiza las distintas posibilidades, puede imaginar lo que va a ocurrir, entonces la secuencia correcta podría se *Discute, haz, descubre* si lo que necesita es realizar un trabajo práctico antes de emitir hipótesis. Aún más interesante sería: *Discute, descubre, haz* cuando lo que se quiere es que emita su hipótesis y después confirme o refute sus conjeturas (Mora, 2007).

Referencias bibliográficas

Adell, J. (1997). *Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información*. Extraído el 20 de diciembre de 2007 desde http://www.uib.es/depart/gte/revelec7.html

CORD Communications. (2003). *Enseñanza Contextual de Matemática, Piedra Angular del Cambio de Paradigmas.* Extraído el 25 de septiembre de 2007 desde http://www.cord.org/uploadedfiles/Ensenanza%20Contextual%20de%20Matematica.pdf

De la Torre, A. (2002). *Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Extraído el 8 de agosto de 2007 desde http://matematicas.udea.edu.co/~edumath/LINKS/presentacion.htm

Lujan, M. y Pochulu, M. (2006). *4° Jornada de Informática y Educación: El rol de los nuevos recursos en la investigación educativa en matemáticas.* Extraído el 15 de septiembre de 2007 desde http://jornadaie.unvm.edu.ar/pon15.pdf

Mora, J. A. (2007). *Geometría dinámica en secundaria.* Extraído el 20 de septiembre se 2007 desde http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf

Spivak, M. (1999). *Cálculus, cálculo infinitesimal.* México: REVERTÉ

UNA HERRAMIENTA INFORMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Nydia Dal Bianco, Silvia Martínez, Andrea Pía Salvadori, Fabio Prieto
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa — Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas — Nivel: Superior

Resumen. *La influencia de la informática, más concretamente de la computadora, en el campo de la educación matemática, trajo como consecuencia el replanteamiento en la enseñanza – aprendizaje de problemas y su tratamiento con Software específicos.*

El artículo relata la actividad realizada con un grupo de alumnos de carreras no matemáticas con la metodología de aula-taller. Teniendo en cuenta que los estudiantes en general, tienen dificultades en tratar situaciones específicas a sus carreras, implementamos un Taller de resolución de problemas con la aplicación de una herramienta informática.

En la experiencia los participantes analizaron diversas estrategias para la resolución de situaciones problemáticas y adquirieron conocimientos básicos de una herramienta que les permitió autogestionar su aprendizaje y consolidar su formación profesional.

Palabras clave: resolución de problemas, herramienta informática

Introducción

La educación matemática esta sujeta a muchas transformaciones, influenciadas o bien por el desarrollo de la misma matemática o por el adelanto vertiginoso de disciplinas tales como la pedagogía, didáctica, informática, entre otras.

A partir de los resultados de estudios recientes es necesario cambiar radicalmente la cultura de enseñar esta ciencia y familiarizarse con los diferentes Software de aplicación en el campo de la misma, relacionándolos con los procesos de creatividad y resolución de problemas, ya que se busca que los alumnos generen sus propias estrategias al enfrentarse a una situación problemática.

En el transcurso del año 2004, se realizó un Taller, con alumnos de las carreras de Ciencias Naturales y Químicas de la Universidad Nacional de La Pampa (U.N.L.Pam) sobre resolución de problemas. Otro Taller, dictado en el año 2006, y avalado por las autoridades de la Facultad de Agronomía, para alumnos con conocimientos básicos de computación y que tenían aprobada la cursada de la asignatura Matemática, es comentado en este trabajo.

En esta oportunidad se adaptaron para trabajar con la nueva versión del Derive, temas de la currícula principalmente los relacionados al Análisis Matemático.

Los objetivos propuestos en este Taller fueron:

- Brindar a los alumnos estrategias básicas para resolución de problemas.
- Facilitar la visualización de soluciones gráficas y/o alfanuméricas mediante la herramienta informática.
- Motivar un enfoque actualizado para el tratamiento computacional en algunos problemas específicos.

Marco teórico

La familiaridad en el uso y la aplicación de herramientas y Software informático y la multiplicidaddde aspectos vinculados a esta temática, constituyen un complemento imprescindible en toda preparación técnica-profesional.

Por otra parte, el desarrollo tecnológico con la incorporación de los ordenadores a todos los ámbitos, tiene su incidencia en la educación y principalmente en la enseñanza de las matemáticas.

En el caso específico de la resolución de problemas la finalidad de la secuencia integrada de procedimientos es la de encontrar respuesta a cierta situación para la que en un principio no se accedía fácilmente.

Algunos autores (Nisbet y Shucksmith,1991) establecen una distinción entre destrezas y estrategias. Una destreza es una habilidad que se tiene (por ejemplo, recordar palabras haciendo asociaciones mentales con imágenes, o con sonidos, o mediante procedimientos mnemotécnicos); una estrategia consiste en seleccionar las destrezas más apropiadas para cada situación y aplicarlas adecuadamente. Estos autores definen estrategia como: *"secuencias integradas de procedimientos o actividades integradas que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, el almacenamiento y/o utilización de información o conocimiento"*.

Sería impensable que alguien sea capaz de aplicar cualquier estrategia para resolver un problema si no posee “conocimientos temáticos específicos” referidos al área de la matemática en la cual pueda inscribirse el problema.

También se requieren unos “procesos básicos” que se hacen imprescindibles para el desarrollo ulterior de determinados conocimientos necesarios para la aplicación de una determinada estrategia, o el uso de técnicas o destrezas.

De acuerdo con esto, parece claro que no sólo es necesaria la adquisición de técnicas o destrezas en la resolución de problemas, sino un cierto conocimiento sobre los propios procesos de aprendizaje, que permita el uso de las técnicas de un modo estratégico.

Pólya plantea desde una perspectiva global una serie de procedimientos para la resolución de problemas requeridos, a menudo, como métodos generales aplicables en distintas tareas independientemente de su contenido.

Comprender el problema, concebir y ejecutar un plan y examinar la solución son los pasos que el autor considera necesarios para resolver un problema.

Según Schoenfeld (1985) el papel del docente es facilitarles a los educandos técnicas mentales que podrán usar en sus trabajos y actividades profesionales.

Desarrollo

Entre los diferentes asistentes informáticos que hay en el mercado elegimos para el dictado del Taller el Software Derive pues funciona en cualquier ordenador sin necesidad de otros programas, es de fácil manejo y mejora la habilidad procedimental del alumno para resolver problemas, disminuyendo errores al enfrentarse a cálculos tediosos.

El aula taller se constituyó en la sala de computación de la Facultad de Agronomía, donde cada participante disponía de una PC en la que estaba instalado el Derive 6, y de un cuadernillo preparado con el fin de proporcionar el conocimiento y manejo de una herramienta apta para operar en las matemática básicas. (Carrillo A. y Llamas, I., 1994)

Los responsables del Taller, orientaban a los estudiantes ayudándolos en dificultades y/o inconvenientes que se les presentaban al resolver las distintas situaciones.

Desarrollaron los participantes un trabajo práctico con diversas actividades en el que utilizaban herramientas matemáticas y estrategias de resolución de problemas, aplicando el Software para resolver ecuaciones, realizar cálculos y diagramar las gráficas solicitadas.

Algunos problemas partían de funciones específicas para los que aplicaban determinadas sentencias del Derive; mientras que en otros presentaban solo gráficos o tablas según las consignas.

A continuación se muestran resoluciones a situaciones problemáticas y se analizan las diversas estrategias utilizadas, donde se aplicaron en general los pasos de Pólya.

Problema 1:

Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar la evolución de esta población. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento.

Uno de los científicos plantea: "he llamado **x** a los días que han transcurrido y **n** a la cantidad de peces. Mis registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley: $\mathbf{n(x) = 240 + 10x - 0{,}1\, x^2}$

Debemos hacer algo rápidamente ya que, con esta proyección, pronto se extinguirán".

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago? b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando? c) ¿Cuál fue la cantidad máxima que llegó a haber? ¿en qué momento? d) ¿Cuándo se extinguirá esa población?

Una forma de resolverlo por un grupo de alumnos es la siguiente:

Estrategia 1

Primero definimos la función que determina la cantidad n de peces, la cual depende de x(días transcurridos)

#1: $n(x) := 240 + 10\cdot x - 0.1\cdot x^2$

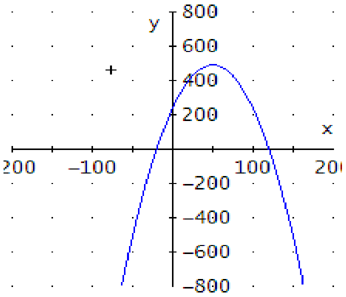
Para calcular la cantidad de peces introducidos calculamos n(0)

#2: n(0)

#3: 240

se interpreta que se introdujeron 240 peces inicialmente

Para analizar durante que tiempo la cantidad de peces va aumentando, hacemos el gráfico de la función:



Podemos observar que desde el momento en que se introducen los peces, el número va en aumento hasta aproximadamente el día número 50. Luego disminuye hasta el día 130 aproximadamente.
En el día número 50 se obtiene la cantidad máxima de peces. Para hallar el número máximo, calculamos n(50)

#4: n(50)

#5: 490

El número máximo de peces es 490. La población se extingue aproximadamente el día 130.

En este problema se incluye la fórmula que se debe utilizar. Los alumnos sólo tenían que contestar las preguntas, que realizaron de dos maneras distintas.

Estrategia 1

*Identifica las variables del problema * Especifica el valor de la función en un punto

* Interpreta gráficamente la función * Interactúa entre registros algebraico y gráfico

* Las respuestas se deducen del gráfico, por lo que se obtienen cálculos aproximados.

* Hay una limitada utilización de los comandos del Software

Conceptos no utilizados: • Dominio de la función • Resolución de la ecuación • Análisis de los intervalos de monotonía de la función • Cálculo de extremos.

Estrategia 2

La siguiente función representa la cantidad n de peces, la variable independiente es x(dias transcurridos) en tanto que n representa la cantidad de peces que hay en el lago.

#1: $n(x) := 240 + 10\cdot x - 0.1\cdot x^2$

El número inicial de peces es lo que vale la función en cero, esto es:

#2: 240

#3: n(0)

Para hallar en que tiempo el numero de peces aumenta o disminuye, buscamos los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función.
Primero hallamos la derivada y la igualamos a cero para hallar los puntos críticos.

#4: $\frac{d}{dx}(240 + 10\cdot x - 0.1\cdot x^2)$

#5: $10 - \frac{x}{5}$

#6: $10 - \frac{x}{5} = 0$

#7: $\mathrm{SOLVE}\left(10 - \frac{x}{5} = 0,\ x\right)$

#8: $x = 50$

Para ver si la función es creciente o decreciente analizamos el signo de la derivada primera. Entonces probamos con un valor antes o despues del punto critico (50) y lo reemplazamos en la derivada primera para ver el signo.
Probamos en 49 y 51

#9: $10 - \frac{49}{5}$

#10: 0.2

#11: $10 - \frac{51}{5}$

#12: $-\dfrac{1}{5}$

La derivada tiene signo positivo en el intervalo (-oo,50) y es negativa en el intervalo (50,00), por lo tanto la función crece en el primer intervalo y decrece en el otro.
Se puede concluir que el número de peces aumenta desde el momento inicial hasta el día número 50.
Por otro lado, como la derivada cambia de signo de positivo a negativo en el punto crítico 50 la función alcanza un máximo.
Para hallar las coordenadas del máximo calculamos el valor de la función en x=50.

#13: n(50)

#14: 490

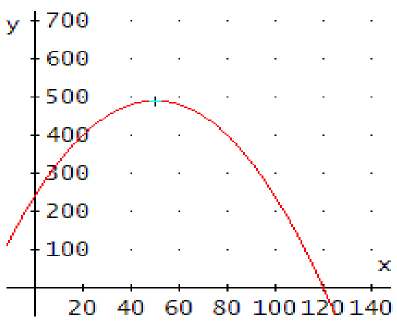
El número máximo de peces es 490.
Para calcular cuando se extingue la población calculamos en que valor la función se anula.

#15: $240 + 10\cdot x - 0.1\cdot x^2 = 0$

#16: SOLVE($240 + 10\cdot x - 0.1\cdot x^2 = 0$, x, Real)

#17: $x = 120 \vee x = -20$

El valor de x=-20 no tiene sentido para este problema, por lo que se concluye que la población se extinguirá a los 120 días.
En el gráfico siguiente se observa la evolución de el número de peces y podemos corroborar las conclusiones obtenidas anteriormente.



Más completa fue la solución presentada por el otro grupo. A partir del concepto de derivada hallaron intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y punto crítico. Para calcular cuando se extingue la población igualaron la ecuación a cero. Finalmente realizaron un gráfico en el que observaron las soluciones obtenidas.

Estrategia 2

* Identifica las variables del problema *Especifica el valor de la función en un punto

* Interactúa entre registros algebraico y gráfico *Resuelve la ecuación *Analiza intervalos de monotonía *Calcula extremos *Utiliza en forma correcta el Software.

Problema 2:

a) Calcular usando integrales definidas, el área de un círculo de radio 2. b) Representar gráficamente la situación planteada. c) Verificar los resultados obtenidos utilizando una fórmula de la geometría plana. d) Calcular el volumen engendrado al girar la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ alrededor del eje x. (Stewart, 1998).

Este problema aunque parece sencillo, presenta cierto grado de dificultad para alumnos que cursan carreras no matemáticas, dificultad que se suaviza durante la cursada, con el aprendizaje gradual de los conceptos necesarios para su abordaje. También contribuye a lograr resultados positivos la aplicación de un Software específico.

Para resolverlo aplicaron conceptos de cónicas, más precisamente la ecuación de la circunferencia, además de obtener el área mediante integrales definidas. También utilizando la fórmula de la geometría plana del área de un círculo, obtuvieron similares resultados.

Luego recurrieron a lo aprendido en Matemática en cuanto a volumen de revolución y comprobar que al girar la gráfica alrededor del eje x lo que se visualizaba era una esfera.

Aplicando el Software, plantearon la ecuación de la circunferencia, graficaron y utilizando una inecuación, delimitaron el área del círculo y la calcularon mediante integrales definidas, comprobando finalmente con la fórmula geométrica que era la solución correcta.

Conclusiones

El Taller como una propuesta didáctica se desarrolló a fin de iniciar a los estudiantes de carreras no matemáticas, en la aplicación de una herramienta informática que les facilite la visualización y obtención de determinadas soluciones gráficas y/o alfanuméricas.

El proceso de resolución de problemas permitió la verificación, formulación y validación de hipótesis, presentando el aprendizaje como una búsqueda de significados y mejorando la comprensión de conceptos, habilidades y estrategias para la resolución de problemas.

Al finalizar esta actividad y encuestados los participantes solicitaron continuidad en la implementación de estas acciones vinculadas a otras disciplinas, para la producción de trabajos específicos de su carrera y a fin de consolidar su formación profesional.

Referencias bibliográficas

Carrillo, A. y Llamas,I.(1994).*Derive.Aplicaciones matemáticas para PC.* España: RA MA.

Machin, D.(1976). *Introducción a la Biomatemática*. España: Acribia.

Nisbet y Shucksmith. (1991). Extraído el 15 de septiembre de 2007 desde http://www.cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/estrategias.htm

Polya ,G. (1990). *¿Cómo plantear y resolver problemas?*México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *La enseñanza de la matemática a debate*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Smith,R. y Minton, R. (2000) *Cálculo*. Colombia: McGraw-Hill Interamericana S.A.

Stewart, J. (1998). *Cálculo.Trascendentes Tempranas*.3ª Edición. México: I. T. Editores.

Swokowski, E. (1996). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México. Grupo Editorial Iberoamericana.

ESTUDO DO ACOMPANHAMENTO DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS EM MATEMÁTICA POR MEIO DE TECNOLOGIAS DE COMUNICAÇÃO

Lenice Mirandola da Rocha, Maurivan Güntzel Ramos
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul **Brasil**
lenice@portoweb.com.br, mgramos@pucrs.br
Campo de investigación: **Educação a distância** Nivel: **Medio**

Resumen. *A presente pesquisa visa a compreender de que modo tecnologias de suporte a comunicações síncronas (em tempo real) e assíncronas (em tempo não real) contribuem para o desempenho em Matemática, de alunos do Ensino Médio, quando são empregadas para o acompanhamento da aprendizagem sobre o tema "Cilindros". A pesquisa foi realizada com 60 alunos do Ensino Médio de uma escola federal de Porto Alegre, RS, Brasil, que interagiram com o professor por meio do Messenger e do correio eletrônico durante o desenvolvimento de uma Unidade de Aprendizagem de Matemática, que ocorreu de modo presencial. Os dados foram coletados por meio de um questionário inicial de caracterização do grupo, dois testes (pré e pós-testes) para avaliar o desempenho na Unidade de Aprendizagem e entrevistas com seis alunos que interagiram com o professor. A análise dos dados quantitativos e qualitativos permitiu concluir que houve um crescimento do desempenho em Matemática e do interesse em aprender dos alunos envolvidos.*

Palabras clave: Interação, Comunicação síncrona e assíncrona, Desempenho em Matemática. Aprendizagem, Ensino de Matemática

Introdução

O presente trabalho visa a compreender como a utilização de tecnologias de suporte à comunicação síncrona (em tempo real) e assíncrona (não em tempo real) para acompanhar a aprendizagem dos alunos durante o desenvolvimento de uma Unidade de Aprendizagem na disciplina de Matemática sobre o tema "Cilindros", contribui para a aprendizagem em Matemática no ensino médio. Parte da premissa de que melhores interações professor-aluno produzem melhores condições para que as aprendizagens ocorram. Também considera que os recursos de comunicação disponíveis por meio da Internet podem potencializar essas interações, mesmo de forma não-presencial. Além disso,"o computador é uma ferramenta de troca e de produção" (Lèvy, 2001, p. 29). Assim, o professor pode apresentar proposta de atividades e orientações para o aluno a fim de auxiliá-lo na construção de seus conhecimentos mesmo estando distante.

Desse modo, para compreender melhor essas interações e a sua relação com a aprendizagem dos alunos empreendeu-se uma busca de respostas ao seguinte problema: *Como ocorre o processo de aprender Matemática, em relação ao estudo de um tema do Ensino Médio, com um grupo de* *alunos com o qual são usadas tecnologias de suporte à comunicação para o acompanhamento da aprendizagem?*

Metodologia

A pesquisa, com abordagem naturalística e compreensiva, possui resultados quantitativos e qualitativos que se complementam e contribuem para entender a complexidade do objeto de estudo em seu estado "natural". Para Fiorentini (2006), é uma modalidade de investigação em que os dados são coletados no local onde o problema ou fenômeno acontece por amostragem, entrevista, aplicação de questionário, teste entre outros.

Foram sujeitos da pesquisa os 60 alunos de duas turmas da 2ª série do Ensino Médio de uma escola federal de Porto Alegre, RS, Brasil, os quais foram convidados a interagir com o professor por meio de mídias síncronas e assíncronas durante o desenvolvimento de uma Unidade de Aprendizagem de Matemática sobre o tema "Cilindros". A Unidade foi constituída de atividades de natureza teórico-prática, envolvendo a realização de problemas vinculados ao cotidiano dos alunos. Ao longo da realização da Unidade de Aprendizagem foram coletados junto aos alunos, sujeitos de pesquisa, dados para a investigação por meio de: a) questionário com perguntas mistas para conhecer as principais características do grupo em relação ao uso do computador e da Internet; b) teste inicial, visando à obtenção de informações sobre os conhecimentos iniciais dos alunos acerca do tema escohido para estudo (Cilindros); c) teste final realizado após o desenvolvimento da Unidade de Aprendizagem de Matemática, durante a qual houve interações via rede com os sujeitos de pesquisa; d) comunicações realizadas entre professor e alunos (Messenger e e-mail); e) entrevistas com uma amostra intencional de seis alunos que participaram de todas as atividades e que interagiram com o professor durante o período de realização da Unidade de Aprendizagem.

Análise dos resultados

A seguir, apresentam-se as análises do questionário, das transcrições das interações com os alunos (*Messenger e e-mail)*, dos resultados dos testes (inicial e final) e das entrevistas.

Análise do questionário: perfil dos sujeitos de pesquisa

A análise do questionário permite fazer uma caracterização dos alunos, sujeitos da pesquisa. Dos 60 alunos envolvidos na investigação, 97,0% possuem computador em suas residências. O acesso à rede se dá por meio do sistema discado, do sistema de banda larga ADSL e do sistema a cabo (Net/ Virtua), sendo que 89 % dos alunos utilizam os sistemas mais rápidos (banda larga e cabo). Em relação ao tempo de conexão à Internet, 59% dos alunos ficam conectados á rede durante até duas horas por dia. Os restantes 41% ficam conectados, em média, mais de duas horas diárias

Ao serem perguntados sobre como usufruem da rede para os itens *Messenger*, *Orkut*, pesquisa, ensino e jogos, responderam numerando de zero a seis. Zero indica que o item não é utilizado. O valor 1 indica o uso mais freqüente e 6 o menos freqüente. Na tabela 1 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 1 – Uso da internet pelos sujeitos de pesquisa

Item	0	1	2	3	4	5	6
Msn	7	23	13	3	4	5	5
E-mail	12	6	3	11	9	7	12
Orkut	8	17	15	9	2	8	1
Pesquisa	7	6	7	16	16	7	1
Jogos	17	5	4	4	4	7	19
Aprendizagem	10	3	5	6	13	14	9

Em síntese, os dados mostraram que os alunos jogam pouco, pesquisam pouco, usam pouco a Internet para aprender sobre os conteúdos escolares, mas comunicam-se muito, principalmente por meio do *Messenger* e do *Orkut* .

Análise das interações

Na análise das interações virtuais é possível inferir que, na medida em que o professor vai orientando os alunos, gradativamente, eles vão consolidando o entendimento do que está sendo estudado, pois as dúvidas são esclarecidas, pela mediação e pela apresentação de novos questionamentos, no ritmo em que vão surgindo. Na concepção de Rubinstein (2003, p. 39), "o mediador é aquele que ajuda o aprendente no processo de elaboração do conhecimento quando aceita suas respostas fragmentadas ou parciais, porém vai provocando-as através de questionamentos, para que ele amplie sua percepção e estabeleça relações".

O seguinte episódio, que consiste em um dos diálogos ocorridos por meio do *Messsenger,* contribui para exemplificar como se davam as interações.

> Aluno B: Não consigo resolver a questão da Ap (avaliação parcial) da turma B.
>
> Professor: O que aconteceu?
>
> Aluno B: Nem sei como começar.
>
> Professor: Observa o ângulo que foi dado.
>
> Aluno: É de 60 graus.
>
> Professor: O Sr Domingos vai pintar todo o reservatório?
>
> Aluno B: Não, somente uma parte.
>
> Professor: De quanto é essa parte?
>
> Aluno B: É a sexta parte da lateral.
>
> Professor: Calcula então
>
> Aluno B: 2Pi. 5.10= 100Pi
>
> Aluno B: Tá certo?
>
> Professor: Não. Qual é a altura da parte que foi pintada?
>
> Aluno: Pensei que fosse 10 m
>
> Professor: Não é não
>
> Aluno B: Então são 6 m?
>
> Professor: Isso mesmo
>
> Aluno B: A resposta é 2 Pi 5.6= 60 Pi + 25 Pi/6
>
> Professora: Não, pois a parte de cima também está pintada?
>
> Aluno B: Pensei que estava.
>
> Professora: O que deves fazer?
>
> Aluno: Descontar o 25Pi/6
>
> Professora: ok
>
> Aluno B: Brigadão "sôra" Valeu!

Nesse diálogo virtual, observa-se que o professor questiona o aluno, sem dar a resposta. Essa mediação é uma forma de colaboratividade. Para Vygotsky (2003) a colaboratividade se expressa na medida em que esta aprendizagem se dá inicialmente de maneira interpsíquica, nas relações entre indivíduos, e a seguir de maneira intrapsíquica, da pessoa com ela mesma. Segundo Moran (2000), "aprendemos quando interagimos com os outros e o mundo e depois, quando interiorizamos, quando nos voltamos para dentro, fazendo nossa própria síntese, nosso reencontro do mundo exterior com a nossa reelaboração pessoal.".

Não se pode deixar de considerar o fator afetividade, que se desenvolve nessa colaboratividade. De acordo com Almeida (apud Faria, 2006), apesar de acreditar-se, inicialmente, que a afetividade não teria lugar nas relações virtuais, o que se observa é o contrário, sendo, com freqüência, mais forte no ensino não-presencial do que no presencial.

Na análise também foi constatado o valor que os alunos dão ao tratamento individualizado feito por meio de interações não-presenciais. Os sujeitos envolvidos nas comunicações feitas pela Internet ao solucionarem suas dúvidas não só superam os entraves cognitivos como os de ordem emocional. Isso está de acordo com Chalita (2001, p. 155), que afirma que "o aluno, como todo ser humano precisa de afeto para se sentir valorizado".

Em síntese, assim como a transcrição apresentada, todas as demais permitem perceber forte envolvimento na relação entre professor e aluno na interação virtual.

Análise dos resultados dos testes

Os graus obtidos pelos sujeitos, nos testes (inicial e final), foram submetidos ao tratamento estatístico comparativo. Inicialmente foi aplicado o teste de homogeneidade das variâncias (estatística F) que se mostrou não significativo. Assim, as duas amostras da turma A foram confrontadas, pela utilização do *teste t,* presumindo-se variâncias equivalentes. A estatística *t* é um processo também aplicado quando as observações de duas amostras são feitas no mesmo indivíduo medindo uma característica do indivíduo antes e depois dele ser submetido a um método (Bussab, 1987). No grupo de pesquisa, o *valor t* foi considerado significativo ($p < 0{,}001\%$) e em conseqüência pode-se concluir que a avaliação final apresentou um melhor resultado em relação à avaliação inicial. Na tabela 2, constata-se um percentual de 88% de graus inferiores a 6, podendo-se inferir que os discentes apresentavam baixo nível de conhecimentos iniciais sobre o tema matemático "Cilindros", o que era previsto.

Tabela 2 - Comparação dos Graus nos testes Inicial e Final – Turma A

Graus	Inicial	Final	Inicial (%)	Final (%)
0 |---- 2	8	0	25,0	0,0
2 |---- 4	12	1	38,0	3,0
4 |---- 6	8	3	25,0	10,0
6 |---- 8	1	4	3,0	14,0
8 |---- 10	3	21	9,0	73,0
Total	32	29	100,0	100,0

Em relação ao segundo teste da turma A, constata-se que houve uma significativa evolução no desempenho dos alunos acusando um percentual de notas inferiores a 6 de 13%.

De modo similar também foram submetidos ao mesmo procedimento estatístico os dados coletados na turma B. Foi aplicado o *teste t,* presumindo-se variâncias equivalentes que se mostrou significativo (P < 0,001%). O resultado mostra que, comparando as notas iniciais e finais, houve um progresso no desempenho dos elementos desta turma. Na tabela 3, é possível observar o conjunto dos graus obtidos pelos sujeitos da Turma B nos testes inicial e final. Houve uma melhora quantitativa nos resultados da turma, pois o percentual dos graus inferiores a 6 na prova inicial foi um total de 92,8% e de 26,7% na prova final.

Tabela 3 - Comparação dos graus nos testes Inicial e Final da Turma B

Graus	Inicial	Final	Inicial (%)	Final (%)
0 |---- 2	8	1	28,6	6,7
2 |---- 4	16	1	57,1	6,7
4 |---- 6	2	2	7,1	13,3
6 |---- 8	1	2	3,6	13,3
8 |---- 10	1	9	3,6	60,0
Total	28	15	100,0	100,0

Mesmo considerando que outros podem ser os motivos do crescimento dos alunos em relação ao desempenho no teste final, a triangulação com as transcrições, com as entrevistas e com as observações realizadas cotidianamente nas aulas permitem concluir sobre a importância das interações virtuais para a melhor compreensão dos alunos em relação ao tema estudado.

Análise das entrevistas

As transcrições das entrevistas realizadas com seis sujeitos, que participaram de todas as atividades da Unidade de Aprendizagem sobre Prisma e interagiram com o professor via *Messenger* e *e-mail*, foram analisados por meio da Análise Textual Discursiva (Moraes e Galiazzi (2007), que consiste na unitarização dos textos, categorização das informações e interpretação. Para esses autores, esse processo tem a finalidade de produzir novas compreensões sobre fenômenos e discursos e "insere-se entre os extremos da análise de conteúdo tradicional e a análise de discurso, representando um movimento interpretativo de caráter hermenêutico". (Moraes, Galiazzi, 2007, p. 7).

Na análise das transcrições das entrevistas emergiram três categorias: *percepções dos alunos sobre a aprendizagem em Matemática; relevância das comunicações síncronas e assíncronas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática; e considerações dos alunos favoráveis e não favoráveis sobre a utilização do uso da Internet na aprendizagem de Matemática.*

Em relação à primeira categoria, evidencia-se nos depoimentos dos alunos que eles valorizam os seguintes aspectos em relação à aprendizagem: a participação efetiva do aluno, tanto assistindo às aulas e prestando a devida atenção às explicações quanto se envolvendo na resolução de problemas; a participação do professor em processos de mediação, buscando identificar o modo de pensar e os detalhes que faltam para estabelecer a ponte entre o conhecimento prévio e o novo conhecimento. Ainda pode-se dizer que não apenas os alunos aprendem com o professor, mas que este, por meio dessas interações, visualiza um modo de interagir com seu aluno a fim de atingir de o seu objetivo como educador, que é presenciar a reconstrução do conhecimento pelo aluno.

Em relação à categoria *relevância das comunicações síncronas e assíncronas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática*, fica evidente que a utilização do *Messenger* e do *e-mail* durante o estudo sobre "Cilindros" foi considerada pelos alunos entrevistados um modo diferente de interação, um meio produtivo, interessante, rápido, pioneiro nessa disciplina, facilitador e promotor da auto-estima do aluno.

Acerca da categoria *considerações dos alunos favoráveis e não favoráveis sobre a utilização do uso da Internet na aprendizagem de Matemática*, pode-se destacar como positivas o apoio dado pelo professor ao aluno e a mediação na resolução dos problemas. As ferramentas usadas foram apontadas como importantes na promoção da auto-estima dos alunos e no aperfeiçoamento da relação professor-aluno. Em relação a possíveis pontos negativos das ferramentas utilizadas, destacam-se a dificuldade de expressar símbolos matemáticos e a possível dispersão dos alunos, pois estes podem estar utilizando outros programas ao mesmo tempo em que estão interagindo com o professor.

Considerações finais

Os resultados quantitativos permitem concluir que houve um melhor desempenho no segundo teste em relação ao primeiro. Os resultados qualitativos potencializam os resultados quantitativos e contribuem para que se possa afirmar com mais segurança que o acompanhamento realizado aos alunos por meio das tecnologias de suporte à comunicação é capaz de auxiliar na aprendizagem de Matemática, em geral, e, especificamente em relação ao tema “Cilindros”. Segundo as opiniões dos alunos, essas ferramentas presentes na Internet são de acesso fácil e contribuíram para a sua aprendizagem e para aumentar o seu interesse pelo estudo de Matemática, pois aumentaram a sua auto-estima, fundamental para o processo de aprender. As possíveis dificuldades na aplicação desses recursos virtuais são facilmente contornáveis.

Referências bibliográficas

Bussab, W., Morettin, P. (1987). *Estatística Básica*. 4.ed. São Paulo. Atual.

Chalita, G. (2001). *Educação*: a solução está no afeto. São Paulo: Gente.

Demo, P. (2000). *Desafios Modernos da Educação.* Petrópolis: Vozes.

Faria, E. (2006). *Educação Presencial e Virtual: espaços complementares essenciais na escola e na empresa.* Porto Alegre: EDIPUCRS.

Fiorentini, D., Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodologia. Campinas: Autores Associados.

Lévy, P. (2001). *A conexão Planetária:* o mercado, o ciberespaço, a consciência. São Paulo: Ed. 34.

Moraes, R. y Galiazzi, M. C. (2007). *Análise Textual Discursiva.* Ijuí: Ed. UNIJUÍ.

Moran, J. (2000). Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias. *Informática na educação*: teoria e aprendizagem. Porto Alegre: PGIE-UFRGS. 3(1).

Rubinstein, E. (2003). *O estilo de aprendizagem e a queixa escolar:* entre o saber e o conhecer. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Vygotsky, L. (2003). *A formação social da Mente:* o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes.

RESIGNIFICACIÓN DE LO PERIÓDICO EN UN AMBIENTE TECNOLÓGICO

Iván López-Flores, Cristy Cantú, Eduardo Canul, Andrés Chí, Francisco Flores, Giovani Pastor
Universidad Autónoma de Guerrero México
ccantu@cimateuagro.org, ecanul@cimateuagro.org
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Superior

Resumen. *En este documento presentamos los resultados que obtuvimos al poner en práctica, en condiciones experimentales, una situación de enseñanza en un ambiente tecnológico basado en la epistemología sugerida por Buendía (2004). Mediante la componente tecnológica se pretende que los estudiantes establezcan un puente sólido entre un particular fenómeno repetitivo y su gráfica. El diseño siguió la metodología de Suárez, Carrillo y López-Flores (2005) aplicado a estudiantes de nivel superior. Obtuvimos evidencias de que los alumnos tendieron un puente entre una situación de movimiento y su gráfica generada por la simulación hecha con la calculadora, y que la situación planteada permitió que la predicción se constituyera como un argumento para resignificar lo periódico.*

Palabras clave: tecnología, resignificación, predicción, periodicidad

Introducción

Investigaciones realizadas en Matemática Educativa (ME), reportan que los estudiantes muestran dificultades cuando se les enseña el concepto de periodicidad, debido a que únicamente se presenta una simple definición algorítmica dejando a un lado aspectos relevantes del mismo (Buendía, 2004; Shama, 1998 citado en Cordero y Martínez, 2002). En específico, Buendía (2004) señala que en los libros destinados a los cursos de matemáticas, *una función es periódica si existe una t, tal que para toda x en el dominio de la función,* $f(x+t)=f(x)$ y aceptando si acaso la existencia, en algunos textos, de objetos matemáticos llamados “funciones/gráficas cuasiperiódicas”; es decir, funciones o fenómenos físicos que presentan algunas cualidades de la periodicidad.

Por su parte, Shama (1998) (citado en Cordero y Martínez, 2002), reporta que los estudiantes sólo tienen un entendimiento del concepto de periodicidad en un nivel de proceso, y no necesariamente alcanzan el nivel de objeto. Como consecuencia relacionan fenómenos no periódicos como periódicos, y tienden a identificar periodos de un fenómeno periódico en forma incorrecta. De acuerdo con Cordero y Martínez (2002), las razones por la que los estudiantes no alcanzan el concepto de periodicidad en un nivel de objeto son diversas: los estudiantes transfieren las propiedades del proceso, o sea, tienden a relacionar el producto de un procedimiento periódico como periódico, y relacionan un fenómeno periódico que resulta de la repetición de un algoritmo o patrón periódico.

Dados estos argumentos acerca del tratamiento y las concepciones del concepto de periodicidad, resulta de interés identificar qué argumentos sobre lo periódico logran construir los estudiantes, con la ayuda de herramientas o elementos diferentes a los que tradicionalmente se utilizan en el aula.

Antecedentes y objetivo

Los enfoques en la enseñanza de la matemática son muy diversos, podemos encontrar desde la clase basada en la forma axiomática, hasta las clases que introducen aspectos tecnológicos como una herramienta que contribuye y es puente para apropiarse de ciertos conceptos matemáticos. En el primero de los casos, algunas investigaciones muestran que el tipo de conocimiento que se enseña a los estudiantes son una mera algoritmización de los procesos y una memorización de las definiciones de los objetos matemáticos, tal es el caso de Amit y Vinner (1990); Oaks (1987, 1988, 1990); Schoenfeld (1985); Hiebert y Lefevre (1986) (citados en Moreno y Cuevas, 2004), quienes señalan que uno de los problemas más grandes que confronta la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos es que, usualmente se enseña con una fuerte carga operativa en deterioro de la parte conceptual. En el segundo caso, existen estudios que muestran evidencia de que los estudiantes logran construir diversos tipos de argumentos, que no se logran en una clase tradicional, basados en las gráficas que obtienen de la modelación de un fenómeno en un ambiente de tecnología, por ejemplo, Arrieta (2003).

Buendía (2006) reporta una epistemología de prácticas, que trata de dar cuenta de la relación predicción-periodicidad y cómo se pone en marcha en contextos interactivos para lograr una reconstrucción situacional del aspecto periódico de las funciones. De esta manera, se propone una epistemología (en realidad una socioepistemología) de lo periódico que asume a las prácticas sociales como medios para generar conocimiento. La práctica de predecir es piedra angular de esta investigación, es decir, la predicción ayuda a construir argumentos sobre la periodicidad.

Kynigos & Gavrilis (2006), reportan que los estudiantes pueden comprender el concepto de covariación periódica o el cambio periódico con base en las construcciones y las sucesivas abstracciones que puedan hacer al interaccionar con la tecnología. En este estudio se presenta un diseño con diversos registros de representación basados en la relación discreta $y = 200\sin\left({}^{x}/_{2}\right)$.

Sin embargo, no se toman en cuenta los aspectos ligados a la propiedad periódica, es decir, las prácticas a las que estuvo ligada históricamente, ni las dificultades y fenómenos, en especial los de corte didáctico que emanan de él.

Al igual que Buendía (2006), ponemos a prueba la relación predicción-periodicidad, pero creemos que la incorporación de la tecnología, como lo presentan Arrieta (2003); Kynigos & Gavrilis (2006), será un medio para que los alumnos construyan argumentos que no se logran en una clase sin tecnología. De manera, que nos interesó el uso de la tecnología y el hecho de que la predicción es un elemento fundamental para la construcción de lo periódico. Para lo cual, propusimos un diseño alternativo, utilizando tecnología, con la intención de resignificar lo periódico. El cual se aplicó a estudiantes universitarios.

Fundamento Teórico

Nuestro marco teórico está ligado a la tesis que sostiene que la predicción es un argumento para construir lo periódico (Buendía, 2004), y en la caracterización de la resignificación planteada en Rosado (2004). La epistemología planteada en Buendía (2004) se encuentra dentro de la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Esta aproximación pone al centro de la discusión la noción de práctica social, y ello representa una ampliación de la problemática de estudio de la ME, se dirige la atención ya no a la matemática misma (al objeto matemático), sino que pone en un primer plano la actividad de los seres humanos, así como la razón de ser de esa actividad (López, 2005). Por otra parte, considera dentro de sus estudios el análisis sistémico de lo que se ha llamado las cuatro dimensiones de las que se compone la construcción del conocimiento, las dimensiones: epistemológica, social, cognitiva y didáctica. Al resultado de la conjunción de estas cuatro dimensiones, se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2000; Cordero, 2001).

Es en este marco de una “epistemología de prácticas” en que se inserta el presente trabajo. Entre los aspectos retomados de Buendía (2004), se resaltan fundamentalmente a la predicción como un argumento en la construcción de lo periódico. Al predecir el comportamiento del móvil a través de su gráfica tiempo-distancia, existe una búsqueda de alguna *unidad fundamental* para comparar estados futuros con el estado presente. La unidad de análisis tendrá que ser tal que en sí misma contenga, de algún modo, información del todo y depende totalmente del tipo de repetición que presente la gráfica (ver figura 1). Es más, esta unidad de análisis adquiere también la característica de *una relación dialéctica entre análisis de tipo local y global* para que lo periódico del movimiento sea relevante.

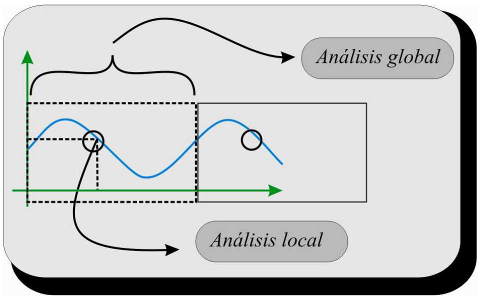


Figura 1. Dualidad Análisis local-global

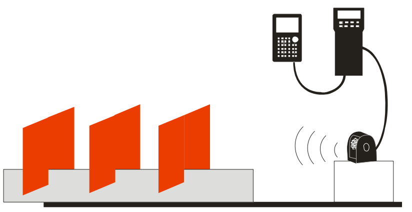
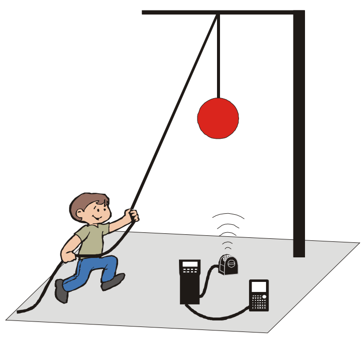
Así, para este trabajo, *lo periódico* significará algo más que la definición de la periodicidad, se asumirá como lo que el estudiante construye cuando ante situaciones específicas (situaciones de movimiento repetitivo, gráficas periódicas o cuasiperiódicas), pone en funcionamiento *argumentos fundamentales* (análisis específicos, como son la unidad de análisis y la relación dialéctica entre tipos de análisis global y local) construidas a la luz de una necesidad: la de predecir como una acción intencional, es decir, cuando usa a la predicción como un argumento para la construcción de significados.

El término resignificación, de acuerdo con Rosado (2004), es el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su función y su forma de acorde con lo que organiza el grupo humano.

Metodología

En el diseño, se incorporan elementos de tipo tecnológico empleados en Suárez, Carrillo y López-Flores (2005), tal es el caso de los sensores de movimiento, los transductores y las calculadoras con capacidad gráfica. Con la introducción de la componente tecnológica, *se busca que los estudiantes puedan tender un puente sólido entre un particular fenómeno y la gráfica que genera éste en una calculadora*. Sostenemos que este puente será una herramienta importante cuando aparezcan dentro de la situación, elementos que necesariamente involucren a *la predicción* como argumento para construir *lo periódico.*

El diseño consta de 3 actividades, las hemos llamado *"las fichas de Dominó"*, *"la piñata"* y *"el balancín"*, las cuales se presentan en la tabla 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 1. Las fichas de dominó. Las superficies rojas simulan fichas de dominó, cada una de ellas cae cada 3 segundos.</td></tr>
<tr><td>1. ¿Cómo sería la gráfica que se generaría en este caso? Proponga una gráfica y discuta ampliamente.
2. Use el sensor y la calculadora para generar una gráfica tomando los datos de la simulación de la situación. ¿Cuáles de sus suposiciones se cumplieron? ¿Se parece su gráfica a la que proporciona la calculadora? ¿Cómo podría ajustarla?
3. Si suponemos que la fila de fichas es muy grande y que el proceso en que son eliminadas continúa, ¿Qué distancia medirá el sensor a los 400 segundos?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 2. La piñata. Se tiene una piñata en la situación que se presenta y se pretende construir una gráfica que describa la altura de la piñata a medida que pasa el tiempo, la piñata será, en esta situación, llevada hasta la parte más alta con movimientos pausados y continuos.</td></tr>
<tr><td>1. ¿Cómo sería la gráfica que se generaría en este caso? Proponga una gráfica y discuta ampliamente.
2. Use el sensor y la calculadora para generar una gráfica tomando los datos de la simulación de la situación. ¿Cuáles de sus suposiciones se cumplieron? ¿Se parece su gráfica a la que proporciona la calculadora?
3. Supongamos ahora que el techo es muy alto, digamos unos 100 metros y que la piñata está en el suelo cuando empezamos a subirla. Diseñe un método para saber donde se va a encontrar la piñata después de 20 segundos, usando la gráfica</td><td></td></tr>
</table>

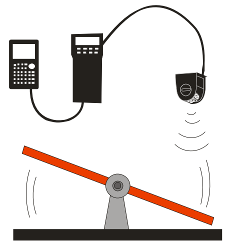
<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 3. El balancín. Se tiene un balancín, en la situación que se presenta, éste repite su movimiento de sube y baja usando el mismo tiempo cada vez.</td></tr>
<tr><td>1. ¿Cómo sería la gráfica que se generaría en este caso? Proponga una gráfica y discuta ampliamente.
2. Use el sensor y la calculadora para generar una gráfica tomando los datos de la reproducción de la situación. ¿Cuáles de sus suposiciones se cumplieron? ¿Se parece su gráfica a la que proporciona la calculadora?
3. ¿A qué altura se encontrará el balancín (superficie roja) dentro de 2 minutos?</td><td></td></tr>
</table>

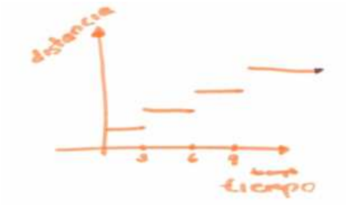
Tabla 1: Actividades del diseño

Las actividades anteriores fueron planteadas en dos sentidos. El primero enfatiza la idea primaria de la epistemología de lo periódico: la predicción como el argumento que permite construirlo. Una limitante del diseño es que sólo da cuenta de la cuasiperiodicidad "rígida", no retoma las "contracciones" de la unidad de análisis. De este modo, una de las componentes incorporadas que hace relevante el diseño, es el hecho que dota a la cuasiperiodidad del estatus de herramienta predictiva. El segundo, no menos importante, permiten romper con las concepciones que se identifican en los estudios de corte cognitivo y didáctico sobre la periodicidad: las gráficas que se generan tienen poca (salvo la tercera) relación con la gráfica de la función seno, así como permite hablar de la periodicidad de gráficas no continuas (aunque los sensores, en el caso de las fichas de dominó, unen los extremos de los segmentos).

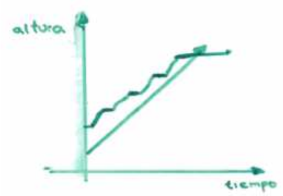
Para la puesta en escena se trabajó con cinco estudiantes (dos de maestría, dos de licenciatura, uno de ingeniería) de un laboratorio tecnológico, presentado en la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa en diciembre de 2007. Se usaron 4 calculadoras con capacidad gráfica (Casio Classpad 300), cuatro transductores (componente tecnológico que convierte una señal analógica en una digital, le provee a la calculadora las listas de tiempos y distancias medidas) y cuatro sensores de movimiento. Para las actividades se presentaron los respectivos mecanismos que simularon cada situación.

Resultados

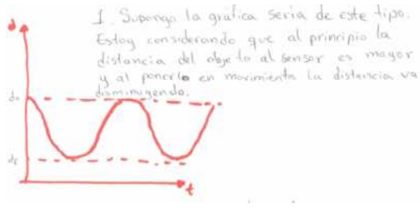
El análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, lo realizamos de acuerdo a las tres preguntas planteadas en las actividades. Así, en las respuestas a la pregunta 1, los estudiantes construyeron sus bosquejos gráficos en relación al movimiento que representa la situación. Los cuales presentamos a continuación.



Las fichas de dominó

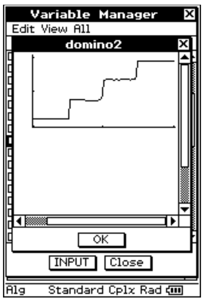


La piñata

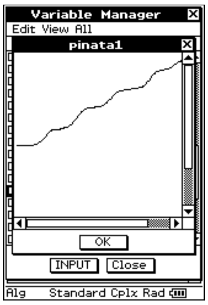


El balancín

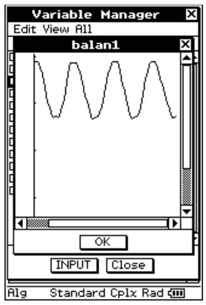
Respecto a la pregunta 2, donde se realizó la simulación de la situación, los estudiantes obtuvieron las siguientes gráficas proporcionadas por la calculadora graficadora.



Las fichas de dominó



La piñata



El balancín

Notamos que los bosquejos gráficos de los estudiantes fueron similares a las gráficas obtenidas en la calculadora, en las actividades 1 y 3. En el caso de la actividad 2, observamos que un alumno, en primera instancia presentó una gráfica lineal, la cual fue modificada al hacer el contraste con la proporcionada con la calculadora.

En la pregunta 3, identificamos que los estudiantes pudieron establecer un “puente” entre la situación y la gráfica generada por la calculadora graficadora, ya que recurrieron a dicha gráfica para encontrar datos específicos y poder responder. La intención principal de esta última pregunta fue con fines predictivos. Por ejemplo, en la actividad 2 observamos que algunos estudiantes realizaron un análisis tanto global como local, lo que suponemos conllevó a la búsqueda de una unidad de análisis como lo muestra la figura 2.

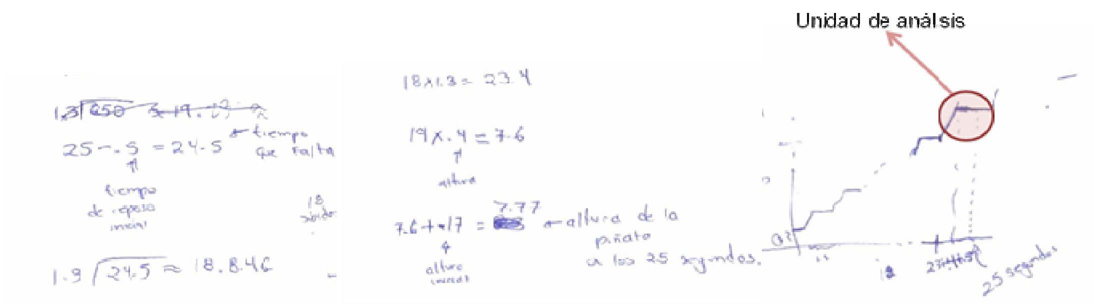


Figura 2. Búsqueda de la unidad de análisis en los estudiantes

Conclusiones

Con el trabajo realizado, podemos concluir que la incorporación de los elementos tecnológicos junto con la forma particular de trabajo, mostró que fue posible que los estudiantes tendieran un puente entre una situación de movimiento específica y su equivalente en la gráfica, generada por la simulación hecha con la calculadora y los sensores. Sobre la epistemología planteada en Buendía (2004), se encontró evidencia para afirmar que los participantes identificaron una unidad de análisis, que implicó una relación dialéctica entre su análisis global y local. Lo que les permitió construir, de manera adecuada, el procedimiento esperado para poder predecir. Es decir, el diseño planteado permitió que la predicción se constituyera como un argumento para resignificar lo periódico.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las practicas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de matemática educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis Doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología de lo periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(2), 227-251.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon 14*(3), 353 – 369.

Cantoral, R. (Coord. y Ed.) (2000). *The future of calculus-El futuro del cálculo infinitesimal*. *ICME 8*-Sevilla España. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Cordero, F. y Martínez, E. (2002). El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15*(pp. 55-60). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Kynigos, C. & Gavrilis, K. (2006). Constructing a sinusoidal periodic covariation. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*, 9-16.

López-Flores, J. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación Matemática 16*(2), 93-104.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Suárez, L., Carrillo, C. y López-Flores, J. (2005). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 405-410). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO COVARIACIONAL EN UN AMBIENTE GRáFICO DINÁMICO. HACIA UNA GéNESIS INSTRUMENTAL

Alejandro Del Castillo Escobedo, Gisela Montiel Espinosa
Tecnológico de Madero México
C.B.T.i.s. 164
CICATA-IPN
alejandro.delcastilloescobedo@gmail.com
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio

Resumen. *La tecnología puede resultar un recurso didáctico para que los estudiantes examinen situaciones y problemas desde diversos ángulos, específicamente, el uso de software dinámico ofrece un medio útil para que ellos visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas. Estos apoyos modifican tan fuertemente el medio ambiente de trabajo que no basta con adaptar situaciones matemáticas clásicas, hay que concebir nuevas situaciones que tomen en consideración las potencialidades y las restricciones de la tecnología. Esto ha llevado a la creación de una génesis instrumental que estudia la construcción hecha por el estudiante cuando interactúa con un artefacto, convirtiéndolo en instrumento, a través de un proceso, de manera tal que se lo apropia y lo hace parte de su actividad matemática, actividad que en esta investigación está relacionada con el desarrollo del pensamiento covariacional.*

Palabras clave: función, génesis instrumental, instrumentación, instrumentalización, pensamiento covariacional

Introducción

Tradicionalmente el aprendizaje del concepto de función se ha enfocado en un tratamiento en términos simbólicos y gráficos. (véase a Harel y Dubinsky (1992) para un repertorio de investigaciones sobre el tema). Debido a la complejidad de elementos y representaciones en la enseñanza de funciones (dominio, codominio, gráficas, tablas, etc.) de forma separada o sin vínculos, no se permite que el estudiante construya el concepto, dada la distorsión del objeto en relación con el saber sabio y la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos allí donde el matemático no ve más que uno (Ruiz y Rodríguez, 2000).

Las múltiples definiciones aceptadas por la comunidad matemática; relación de dependencia, conjunto de pares ordenados, etc., son definiciones equivalentes, pero difieren conceptualmente (Vinner y Dreyfus, 1989).

La noción de función se centra en gran medida en el registro algebraico motivada, epistemológicamente, por la influencia de dicho registro en el desarrollo histórico del concepto y didácticamente, por la fuerza que encuentra en el amparo algorítmico (Ruiz, 2000).

Podemos concluir que el concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia y en la investigación en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionada por su carácter estático, algebraico y algorítmico (fórmula->tabla->puntos en el plano->gráfica) (Del Castillo y Montiel, 2007).

El Pensamiento Covariacional

Investigaciones, como las de Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002), han considerado que un acercamiento al concepto de función desde su naturaleza covariacional permite pensar en las funciones de diferente tipo como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas y dicha covariación puede jugar un papel fundamental en el desarrollo y consolidación de estas funciones. Así como ser una importante habilidad para interpretar, describir y representar una función de un evento dinámico. También permite un mejor entendimiento de los principales conceptos de cálculo.

En México aparecen también réplicas a la crítica de la concepción de correspondencia de función: Ferrari (2004 y 2005), Chimal(2005) y Nieves(2005), han propuesto en sus trabajos una concepción covariacional de función.

La concepción covariacional de función destaca dos aspectos principales de la relación funcional:

- La función es una relación entre cantidades, las cuales pueden ser representadas por un par ordenado cuyas coordenadas representan valores de dos cantidades simultáneamente, y
- conlleva a la idea de que los dos valores de las cantidades pueden, en efecto variar (Saldanha y Thompson, 1998).

El pensamiento covariacional consiste en la coordinación de las dos variables, cada una de las cuales pueden ser concebidas variando independientemente. Finalmente, esta forma de pensar permite a los estudiantes:

- Concebir una gráfica como una colección de puntos,
- concebir la colección de puntos siendo generadas siguiendo simultáneamente, las dos cantidades cuyos valores varían y
- concebir que todo punto en la gráfica representa, a la vez, valores simultáneos de dos cantidades.

El Ambiente Gráfico Dinámico

Un Ambiente de Gráfico Dinámico (AGD) puede ser desarrollado a partir de un entorno de Geometría Dinámica. El AGD permite diseñar secuencias que permite a los estudiantes acceder al significado de función (no sólo geométrico sino también numérico) como objeto que incorpora una relación asimétrica de covariación entre dos trayectorias una dependiente de la otra y, por lo tanto, entre dos variables una dependiente de la otra. De esta forma, el AGD representa relaciones funcionales que no necesariamente están especificadas por símbolos, tablas o graficas.

> *Se considera que el ambiente geométrico dinámico puede proporcionar la representación básica de la variación y de la dependencia funcional, y a partir de esto introducir en el estudiante la idea de función. Considerando a la curva como la representación espacial de una función en el plano coordenado como la trayectoria de un punto en movimiento P con coordenadas (x,f(x)), donde el punto A representa la variable independiente y se mueve sobre el eje de las abscisas, la orden o instrucción Trace(Traza, Rastro) nos permite pasear por o explorar dicha trayectoria o curva. mientras que la orden Drag(Arrastre) permite experimentar la combinación de dos movimientos interrelacionados, así como la dependencia de movimiento entre los puntos básicos y los puntos construidos que le permiten experimentar con una simulación de movimiento real* (Del Castillo y Montiel, 2007).

Lo que caracteriza a los AGD es el movimiento, movimiento donde se preservan las relaciones construidas entre cada uno de sus elementos. Con lápiz y papel no se puede representar directamente la variación, en éste ambiente se puede experimentar bajo la forma de movimiento. La idea de variación está enraizada en el movimiento, los puntos pueden desplazarse por la pantalla y representar variables básicas. Por lo tanto, el AGD, incorpora y conecta de manera robusta las ideas de variación y dependencia funcional (Mariotti, Laborde y Falcalde, 2003).

¿Máquina, Herramienta, Artefacto o Instrumento?

Como máquina entenderemos un dispositivo complejo, relativamente alejado en su interacción con el hombre, pero más afín con manufactura industrial o procesos similares.

Una herramienta es un dispositivo que típicamente proporciona una ventaja (generalmente mecánica) al ejecutar una tarea. Entenderemos por herramienta al dispositivo que está disponible para dar sustento a la actividad humana. Un teléfono, un martillo, el lenguaje de los sordomudos, el lenguaje que usamos nosotros, son ejemplos de herramientas.

Al referirse de una herramienta sin considerar al usuario y sus usos, estaremos hablando de un artefacto.

Esto es lo que expresa Rabardel (1995) sobre los instrumentos:

> *Los instrumentos tienen un doble uso en el seno de las actividades educativas. En los alumnos, influyen profundamente en la construcción del conocimiento y los procesos de conceptualización. Para los profesores, pueden considerarse como variables sobre las cuales se actúa para la concepción y el control de las situaciones pedagógicas.*
>
> *Un artefacto es una "cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano". Finalmente utilizaremos el término de instrumento para designar el artefacto en situación, inscrito en un uso, en una conexión instrumental a la acción del sujeto, como medio de éste* (Rabardel, 1995, p.49).

La noción de instrumento es ligada a una tarea, que es asociada a su vez con un objeto. Así el instrumento autoriza al usuario a actuar sobre el objeto. La noción de instrumento también está asociada con otros dos elementos: un objeto y un sujeto.

> *La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es*

> *pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse* (Rabardel, 1995, p.72).

Para (Trouche, 2005) un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de una artefacto. La gente usa el artefacto para varios propósitos y por lo tanto crea sus instrumentos personales. Ver la siguiente figura, donde un sujeto, un albañil, crea diferentes instrumentos a partir de un artefacto, la cuchara o bellota.

Hacia una Génesis Instrumental

Un ambiente tecnológico como el AGD permite introducir a los estudiantes a diversas formas de representación de los conceptos matemáticos. Para hacer un uso óptimo de estos ambientes debemos entender cómo los estudiantes interactúan con dicho ambiente y cómo el pensamiento matemático de los estudiantes es influenciado por su uso.

Es decir, buscamos que la tecnología se convierta en un *instrumento* para el que aprende, por ello consideramos a la aproximación instrumental nuestro marco teórico, que abarca elementos de la ergonomía cognoscitiva (Verillon y Rabardel, 1995) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), buscando aportar a la teoría en el contexto de un AGD.

Trouche (2004) considera un *instrumento* como una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto y de una componente psicológica (la organización de la actividad con un fin dado). El instrumento es entonces el producto de una *historia*: el usuario a partir de un artefacto, construye un instrumento, en un entorno determinado, para realizar una tarea específica. Esta historia, *génesis instrumental*, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto con la actividad del sujeto, sus ideas previas y su antiguo método de trabajo

La génesis instrumental, es una evolución en curso, no trivial y que lleva mucho tiempo. Una relación bilateral entre el artefacto y el usuario es establecida: mientras el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (la instrumentalización), las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (la instrumentación).

La instrumentalización

En el curso del proceso de instrumentalización, el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto, derivadas de su primera uso. El sujeto se adapta al artefacto. El sujeto puede también construir nuevas funciones del artefacto, así es el artefacto el que se adapta a las necesidades del usuario.

Este proceso que dirige el sujeto, implica varias etapas:

- Descubrimiento y selección de las teclas relevantes (para este caso, en el AGD)
- Personalización (uno ajusta el AGD a sus necesidades personales)
- Transformación de la herramienta, inclusive con modificaciones no previstas por el diseñador: modificación de la barra de menú, creación de los atajos del teclado, creación de herramientas personales.

La instrumentalización es la expresión de la actividad específica de un sujeto: sobre lo que el usuario piensa en relación para que fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado: la elaboración de un instrumento ocurre en su uso.

La instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento (Trouche, 2005, p.148).

La instrumentación

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los esquemas de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores. De la misma forma que la

utilización de las señales psicológicas influye sobre los pensamientos del sujeto, la génesis instrumental permite hacer evolucionar las concepciones del sujeto relativo al objeto contemplado por el instrumento. Las concepciones evolucionan por la adaptación a las dificultades de las herramientas y también por la consideración de las potencialidades.

El progresivo descubrimiento del sujeto de las propiedades (intrínsecas) de los artefactos va acompañado de la adaptación de sus esquemas, así como los cambios en la significación del instrumento resultante de la asociación del artefacto con los nuevos esquemas.

El nacimiento de estos esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas (que dan así un nuevo significado a los artefactos), la adaptación de los esquemas (que contribuyen a sus cambios en el significado), constituye esta segunda dimensión de la génesis instrumental: el proceso de instrumentación.

Conclusiones

Sólo con los materiales concretos no se generaría aprendizaje de las nociones matemáticas, es necesario que el alumno interactué con ellos en un ambiente organizado. Esta interacción es objeto de estudio dentro de la Matemática Educativa y nuestro interés en este trabajo.

La génesis instrumental, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo.

Debemos de distinguir entre los diferentes esquemas de uso, las potencialidades y las restricciones del AGD. Trabajar con los esquemas que organizan la actividad con un artefacto asociado a fin de desarrollar un pensamiento covariacional entre los estudiantes.

Es esta génesis la que buscamos lograr y caracterizar en nuestro trabajo de investigación.

Referencias bibliográficas

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12 (1), 77-111.

Chimal R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*.Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 568-580. México.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 45-50). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.)(1992). *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America. Notes 25.

Mariotti M.A, Laborde C. y Falcade R. (2003) Function and Graph in a DGS environment, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA 3*.(pp. 237 – 244).

Nieves, A. (2005). *Una metodología de trabajo para estudiar las situaciones de cambio en problemas geométricos que se consideran como problemas de máximos y mínimos*. Tesis de Doctorado. no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Armand Colin.

Ruiz, L., Rodríguez, J. (2000). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función en enseñanza secundaria. En Cantoral, R. (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 265 - 290). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In Kilpatrick, J., Martin, G. W., and Schifter D. (Eds.) *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9(3), 281-307).

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments, in *The didactical Challenge of Symbolic Calculators, turning a computational device into a mathematical instrument*, Guin, Ruthven and Trouche. Springer, (pp. 137-162).

Verillon P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education* 10(1), 77-101.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 356-366.

EL ENTORNO DE APRENDIZAJE DINÁMICO MODULAR ORIENTADO A OBJETOS EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Juan Baltazar Cruz Ramírez, José Luis Ramírez Alcántara
Universidad Autónoma de Guerrero México
cruzramirez@yahoo.com
Campo de investigación: Educación a Distancia Nivel: Superior

Resumen. *Se desarrollo una modelación de una ingeniería didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante gráficas dinámicas, como una alternativa de solución a los problemas presentados a nivel precálculo de éste concepto. Posteriormente fue puesta en escena en MOODLE, acrónimo de Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (Entorno de Aprendizaje Dinámico Modular Orientado a Objetos) lo que favoreció la interacción entre profesores y alumnos, así como el desarrollo de las actividades y las retroalimentaciones generadas entre los profesores y los alumnos participantes: Para el desarrollo de la actividad, se utilizaron simultáneamente los registros semióticos Algebraico, Numérico, Gráfico y Escrito, como una estrategia que permita al alumno concentrarse en el desarrollo de la actividad propuesta, demostrando al final una clara similitud de resultados obtenidos entre los alumnos de un sistema tradicional y los del sistema elegido.*

Palabras clave: límites, educación a distancia

Introducción

El diseño, manejo y capacitación en los sistemas de educación a distancia deben formar parte de una estrategia global de enseñanza - aprendizaje, que incluya de manera categórica la tarea del profesor, cuya actividad sigue siendo básica, ya que es quien va marcando los ritmos del aprendizaje, quien resalta las ideas esenciales o estrategias interesantes y en definitiva, quien tiene la responsabilidad de organizar y dirigir la interacción del estudiante con la computadora.

Un desarrollo personalizado de estos programas permite un aprendizaje más activo que hace posible la experimentación y exploración de nuevas estrategias a la hora de resolver problemas. De este modo, muchos de los conceptos enseñados en el área de Cálculo Diferencial e Integral pierden un tanto su carácter abstracto, proporcionando una experiencia que clarifica dichas nociones.

Objetivos

El objetivo General de ésta investigación es el de analizar si es viable la reproducibilidad de la Ingeniería Didáctica originalmente aplicada en un sistema didáctico tradicional (Cruz, 2006) al ser implementada en MOODLE, sustentándonos en los resultados sobre reproducibilidad de situaciones didácticas (Lezama, 2003), con la intención de que los resultados obtenidos durante el proceso sirvieran como insumo de datos de investigación del proyecto planteado y a la vez, consiguieran validar las situaciones didácticas aplicadas.

Los objetivos particulares son:

1.- Modificar la concepción de asíntotas utilizadas en el proceso de análisis de una gráfica.

2.- Lograr la significación de las asíntotas como una noción a nivel precalculo del límite.

3.- Predecir a través de las asíntotas, los límites de la curva analizada.

La teoría de situaciones didácticas como marco teorico

Indica la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) que la situación debe ser fuente de aprendizaje y en ciertas ocasiones también criterio de validación de las estrategias puestas en juego. En éste caso, los profesores participantes, analizaron, diseñaron y propusieron a los alumnos situaciones con las que ellos se puedan comprometer y aceptar la responsabilidad de resolver el problema.

En nuestro modelo propuesto y desarrollado, partimos de conocimientos matemáticos que el alumno ya maneja con soltura, pero apartándose de ellos lo suficiente como para que no le permitan dar una respuesta inmediata a los problemas propuestos. A su vez, estos problemas deben ser lo suficientemente cercanos a los conceptos puestos en juego, como para que pueda realizar acciones sobre los objetos de conocimiento propuestos y donde llegue un momento en el que se evidencie la ineficacia de los mismos para resolver el problema planteado.

Las situaciones planteadas tiene por objeto que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le sean útiles (Lezama, 1999).

La ingeniería didáctica como metodología

Con el objetivo de que la Ingeniería Didáctica diseñada (Artigue, 1995; Farfán, 1997) considere la reproducibilidad y sea aplicable en un sistema didáctico diferente para el que originalmente fue planteada, nos sustentamos en los resultados que sobre reproducibilidad de situaciones didácticas plantea Lezama (2003), y para su desarrollo consideramos e integramos en su diseño estos tres campos de acción.

1.- Estructura de la ingenieria didáctica.

2.- Comunicación del escenario.

3.- Adaptación al nuevo sistema didáctico.

Esta modelación fue inicialmente analizada, diseñada y aplicada por cinco profesores de Cálculo Diferencial e Integral del Nivel Medio Superior. Esto, con la intención de que los resultados obtenidos durante el proceso, fueran aplicados en diferentes sistemas didácticos, cada uno con su propia metodología y programas de estudio, a manera de validación de las situaciones didácticas aplicadas y como insumo de datos de investigación del proyecto planteado.

Tanto la propuesta como el diseño de los problemas fue desarrollada por los profesores en el Sistema E+ (Cruz, 2005), haciendo mención que los pizarrones virtuales utilizan el *applet* Descartes (2008), programados desde el Sistema E+ para su funcionamiento y aplicándose en su fase inicial a 6 alumnos en un salón de clase tradicional (Cruz, 2006). Posteriormente, se desarrollo una planeación de actividades dentro del sistema MOODLE, instalado en el *site* de Internet *http://www.mateuag.sistemae.net* en donde se aplicó una página de trabajo diseñada ex profeso y se monitorizo y asesoró en línea durante dos sesiones a 30 estudiantes del tercer grado de preparatoria, 15 del primer año de las carrera de Ingeniería en Redes, 15 de Ingeniería de Computación y 20 de la Licenciatura en Informática, residiendo los estudiantes en cualquiera de las siguientes poblaciones: Chilpancingo, Acapulco y Teloloapan, Guerrero, México, quienes accesaron al citado *site* desde su lugar de origen.

La entrega de resultados por parte de los alumnos fue mediante el envío de la página de trabajo contestada en Word o en el editor de texto de MOODLE. El posterior análisis se confrontó mediante las visiones de conjunto con los resultados obtenidos en la clase tradicional y los obtenidos en las sesiones de MOODLE

La secuencia original antes de la adaptación al nuevo sistema didáctico en donde finalmente se aplicó, es resultado del análisis de cerca de 70 ejercicios propuestos por los mismos profesores, los cuales se fueron depurando para llegar a seis ejercicios. Éstos fueron resueltos por los profesores antes de aplicarlos a los estudiantes, dejando finalmente tres más para terminar, que son los que se presentan a continuación:

Problema no. 1

Analizar la curva $y = \dfrac{x}{x^2 - 5^x + 4}$ (véase la Figura 1)

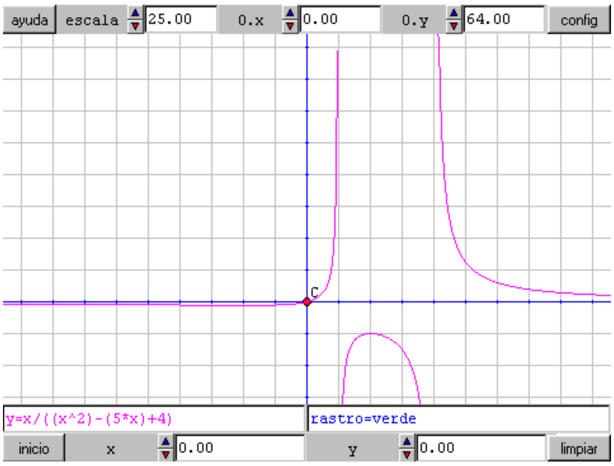


Figura 1.- Gráfica con asíntotas.

Observaremos si los estudiantes son capaces de indicar si los valores encontrados mediante ésta situación son los límites unilaterales existentes en las asíntotas.

Los límites analizados en el dominio de la curva, son:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 5^x + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2 - 5^x + 4} = 0$$

Además de analizar los límites unilaterales cuando $x \to 1$ y $x \to 4$ ya que no tienden hacia el mismo valor, por lo que se observará cual es la idea que los estudiantes tienen al analizar éstos valores. 1684

Problema no. 2

Analizar la curva $y = \dfrac{5x^3+2}{3x^2}$

Esta curva tiene dos asíntotas, la recta $y = \dfrac{5}{3}x$ y la asíntota vertical x=0. Se propone el análisis de ésta curva porque cuando x→ 0, el límite de y tanto por el lado izquierdo como por el derecho tiende al infinito, lo que nos permitirá observar como caracterizan los estudiantes el comportamiento de la curva y ver si pueden predecir éstos límites. Así mismo se les pide encontrar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2}{3x^2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+2}{3x^2}$ (véase la Figura 2)

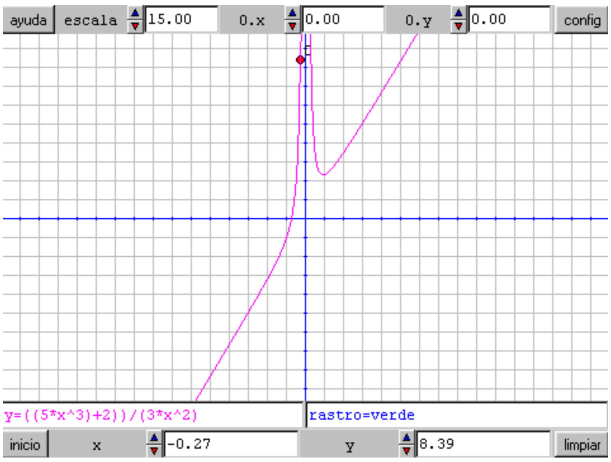


Figura 2.- Gráfica con asíntotas izquierda y derecha positivas.

Se pretende observar si al factorizar la ecuación, los factores resultantes pueden proveer de información sobre los límites de la curva y observar cual es la idea que sobre éste comportamiento de la curva tienen.

Problema no. 3

Analizar la curva $y = \dfrac{1-x^3}{x}$ (véase la Figura 3). Esta curva tiene dos asíntotas, la recta vertical x=0 y la parábola $y = -x^2$; se les pide analizar el valor del límite cuando x→ 0 por la derecha y cuando tiende a ∞, así como el valor del límite cuando x→ 0 por la izquierda y tiende a -∞, como podemos observar en la figura, cuando $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3}{x}$ la curva sigue asintóticamente a la parábola

$y = -x^2$

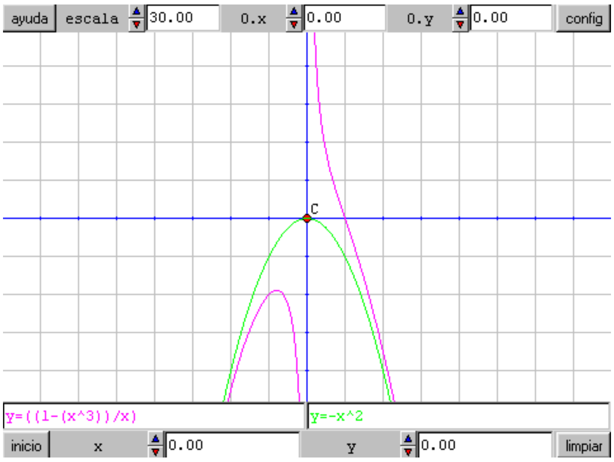


Figura 5.- Gráfica con asíntota curva

El trabajo dinámico sincronizado en los registros tabular, gráfico y algebraico en moodle

Duval (1995) subraya la existencia de diversos sistemas de registros semióticos de representación ligados a un mismo objeto matemático. Clasifica éstas relaciones como internas y externas, entendiendo por externas aquellas que son visibles y observables públicamente y por internas, las privadas que no la son. Duval considera que las representaciones externas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema.

Tradicionalmente, los estudiantes han encontrado en la graficación punto a punto una manera de llegar a la respuesta correcta, eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica. El registro tabular utilizado como registro de partida puede resultar incompleto ya que no alcanza a cubrir todos los puntos necesarios para analizar una gráfica. Esto puede ser un indicador de por que los registros gráficos y tabulares separados, son mas un problema que una solución.

Las conversiones entre los registros gráfico y tabular no existen con el uso de un pizarrón virtual, ya que los registros se trabajan sincronizados al mismo tiempo; la manipulación por parte del alumno del punto que se quiere analizar, puede resolver el problema de las actividades de conversión por parte del estudiante, ya que dejan de ser mecánicos y tediosos y le permite concentrarse en el análisis de lo que está observando.

Obviamente, sin una herramienta afinada y diseñada expresamente para cumplir un objetivo especifico, enfocada en las diversas áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como para su uso como instrumentos útiles para el análisis, la integración de los registros no tendría razón de ser.

En Cruz (2006), se consigna que al interior del aula tradicional, los usos y costumbres para la enseñanza de la idea de límite, restringen la profundización en el desarrollo de éste concepto. Del análisis de la forma en como es enseñado el concepto de límite en el entorno escolar tradicional, existe la posibilidad que los profesores presenten limitaciones en la interpretación del concepto de límite o bien no profundicen en el desarrollo de éste tema. Es posible que reproduzcan en los alumnos los mismos problemas que ellos tienen en sus concepciones, lo que puede perjudicar la actuación de los estudiantes en los temas subsecuentes al desarrollo de la concepción de límite.

Específicamente para el caso de los límites propuestos en éste trabajo, todos tiene como resultado una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, indeterminaciones que al interior del aula, son resueltas por la Regla de L'Hospital, regla que involucra el uso de derivadas para obtener el resultado buscado. El problema es que las derivadas son un tema que se estudia en el currículum escolar después de el de límites, por lo que los estudiantes se ven obligados a utilizar elementos que aún no conocen, lo que tiene como resultado confusiones y análisis erróneos por parte de ellos.

Con la presente propuesta y basándose en elementos de precalculo y en conceptos que el estudiante ya tiene aprendidos por los cursos anteriores, se obtienen los mismos resultados que con un análisis de tipo puramente algebraico. Esto incide directamente en el desarrollo del estudiante, ya que le permite el perfeccionamiento de nuevas ideas para el análisis de límite y mucho mas aún, de encontrar la forma de comprobar su existencia y desarrollar la intuición para resolverlo.

El uso de MOODLE y su entorno basado en un ambiente con conexión a Internet, permitió la planeación, aplicación, seguimiento y análisis de los resultados obtenidos en este trabajo. La argumentación resultante de la interacción entre alumnos y profesores, comparada con el resultado obtenido en la aplicación en un aula tradicional, favoreció y permitió desarrollar otras alternativas de enseñanza-aprendizaje además de la puramente algebraica. Esto permitió, tanto a los profesores participantes como a los alumnos, una búsqueda de opciones que en un aula tradicional no hubiera sido posible conseguir. La posterior socialización de los elementos encontrados, favoreció la discusión y análisis de las opciones presentadas por los alumnos en un tema en el que aún no se han agotado las estrategias de enseñanza-aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33 – 61). México D. F. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7 (2), 33- 115.

Cruz J. (2005). Sistema para la gestión, evaluación y administración de e-learning para la enseñanza de las matemáticas (Sistema E+). En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 259-264). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cruz J. (2006). *Diversas concepciones de asíntotas como elementos didácticos en la conceptualización del límite a nivel precálculo.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

Descartes (2008). *Applet Descartes*. Extraído el 10 de Enero de 2008 desde http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Descartes/index.html

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna. Suiza: Peter Lang S.A.

Farfán R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México, D. F. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

LAS TIC´S COMO HERRAMIENTAS COGNITIVAS EN EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD DE RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

Elizabeth Guajardo García, Lilia López Vera
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL. México
eguajardo@fcfm.uanl.mx , lilia_lopez@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Algebraico y Tecnología Avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Se expone una propuesta didáctica que propicie en los alumnos universitarios la adquisición de un aprendizaje significativo de desigualdades cuadráticas. La estrategia didáctica está centrada en el aprendizaje, e implementa el uso del Graphmatica y el Sketchpad como herramientas cognitivas en el aula, involucrando al alumno en actividades de construcción de un lenguaje gráfico estrechamente relacionado con el lenguaje analítico, que los conduzca al contexto algebraico. El objetivo es contribuir al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas.*

Palabras clave: desigualdades cuadráticas, herramientas cognitivas, transferencia

Planteamiento del problema

En base a la experiencia de las autoras y la revisión bibliográfica (Borello, 2007), se observa que con frecuencia algunos de los alumnos resuelven desigualdades cuadráticas como si fueran ecuaciones cuadráticas, es decir, ven una expresión cuadrática en una desigualdad y lo que hacen es reemplazar el símbolo de desigualdad por el de igualdad, para resolverla de forma análoga a las ecuaciones. Se identificó que con las dos soluciones de una ecuación cuadrática, los alumnos arman un intervalo entre dichas soluciones que puede coincidir con el intervalo solución correcto, sin haber aplicado propiedades de relación de orden o asignado valores entre dichas soluciones.

De resultados en laboratorios y exámenes, se evidenció que los alumnos no se ubican en el contexto de lo que es resolver una desigualdad cuadrática, coincidiendo con resultados de otras investigaciones educativas (Garrote, Hidalgo y Blanco, 2004).

De lo anterior, las autoras identifican como *problema* un conflicto cognitivo al transferir el proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas en la resolución de desigualdades cuadráticas, que se manifiesta en el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

En correspondencia con el problema se formula como *objetivo general del trabajo* el diseñar estrategias didácticas para implementar el uso de la tecnología en el aprendizaje de desigualdades cuadráticas.

En este contexto, las autoras plantean que el alcance del trabajo es posible a partir de la siguiente *hipótesis*: si se diseñan estrategias didácticas centradas en el aprendizaje, implementando el uso de la tecnología, se contribuirá al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas.

Elementos teóricos básicos

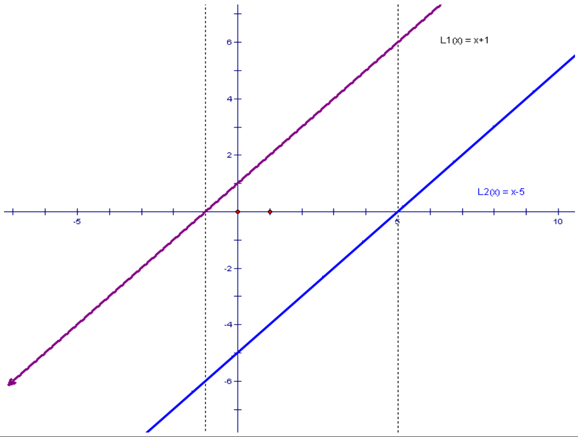
Las autoras consideran relevantes para el presente trabajo, los resultados y concepciones obtenidas en investigaciones educativas sobre: la enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE (Barbosa, 2003), el acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades (Farfán y Albert, 2001), la integración de las TIC´s en la clase de matemáticas (Eduteka, 2003), la habilidad de transferencia en la visualización matemática (López Vera, 2006), niveles de desarrollo del pensamiento geométrico (Van Hiele, 1957), la transferencia entre representaciones a través de nuevas tecnologías (Hitt, 1998) y la concepción de las TIC´s como herramientas cognitivas que pueden asistir a los alumnos a realizar tareas cognitivas, cumpliendo ciertas funciones, como por ejemplo: apoyar procesos cognitivos y metacognitivos, generar hipótesis en el contexto de resolución de problemas, etc. (Lajoie, 1993).

Ejemplos de Actividades Propuestas

Actividad 1. Resolución de la desigualdad cuadrática $x^2 - 4x - 5 > 0$ soportado con el asistente Sketchpad, comparando posiciones de rectas. En este caso se grafica en clase los factores de la expresión cuadrática.

Solución: Al factorizar la expresión cuadrática $x^2 - 4x - 5$ tenemos $(x + 1)(x - 5)$.

Luego si consideramos las graficas de L_1: $y = x + 1$, L_2: $y = x - 5$, observamos que:



- L_1 y L_2 están sobre el eje X si $x > 5$.

  Entonces $x + 1 > 0$ y $x - 5 > 0$ si $x > 5$
- L_1 y L_2 están bajo el eje X si $x < -1$.

  Entonces $x + 1 < 0$ y $x - 5 < 0$ si $x < -1$

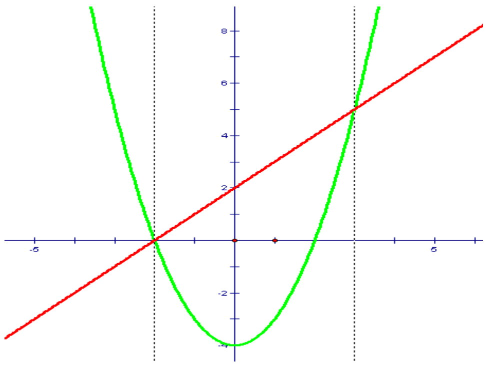
es decir, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (5 ; \infty)$

pero también, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (-\infty ; -1)$

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $(-\infty ; -1) \cup (5 ; \infty)$

Actividad 2. Ejemplo de resolución de una desigualdad cuadrática haciendo uso del asistente Sketchpad, comparando posiciones de gráficas de cuadráticas y rectas.

Para esto se resuelve en clase la siguiente desigualdad: $x^2 - 4 > x + 2$



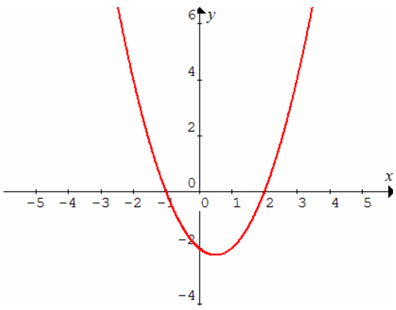
Solución: Para resolver esta desigualdad basta con observar en que intervalos la parábola y = $x^2 - 4$ esta arriba de la recta y = x + 2.

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $(-\infty\ ; -2) \cup (3\ ;\ \infty)$

Actividad 3. Método Gráfico apoyado en el Graphmatica graficando las funciones cuadráticas.

Por ejemplo: Resolver la siguiente desigualdad: $x^2 - x - 2 > 0$

Solución: Para la resolución de este tipo de desigualdad hay que graficar la parábola que representa a la cuadrática y encontrar los intervalos donde la curva esta encima del Eje X. Por lo tanto, la solución es: $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$



Valoración de la Propuesta

Se valoró la propuesta didáctica aplicando elementos de métodos empíricos de investigación educativa y se consideraron los siguientes indicadores, basados en el *modelo de desarrollo del pensamiento geométrico* (Van Hiele, 1957), para validar el desarrollo de la habilidad de transferencia entre el registro geométrico y el registro algebraico:

1° Nivel - Visualización: Identificación de una desigualdad.

2° Nivel - Análisis: Identificación de propiedades gráficas de funciones. (Lineales y Cuadráticas).

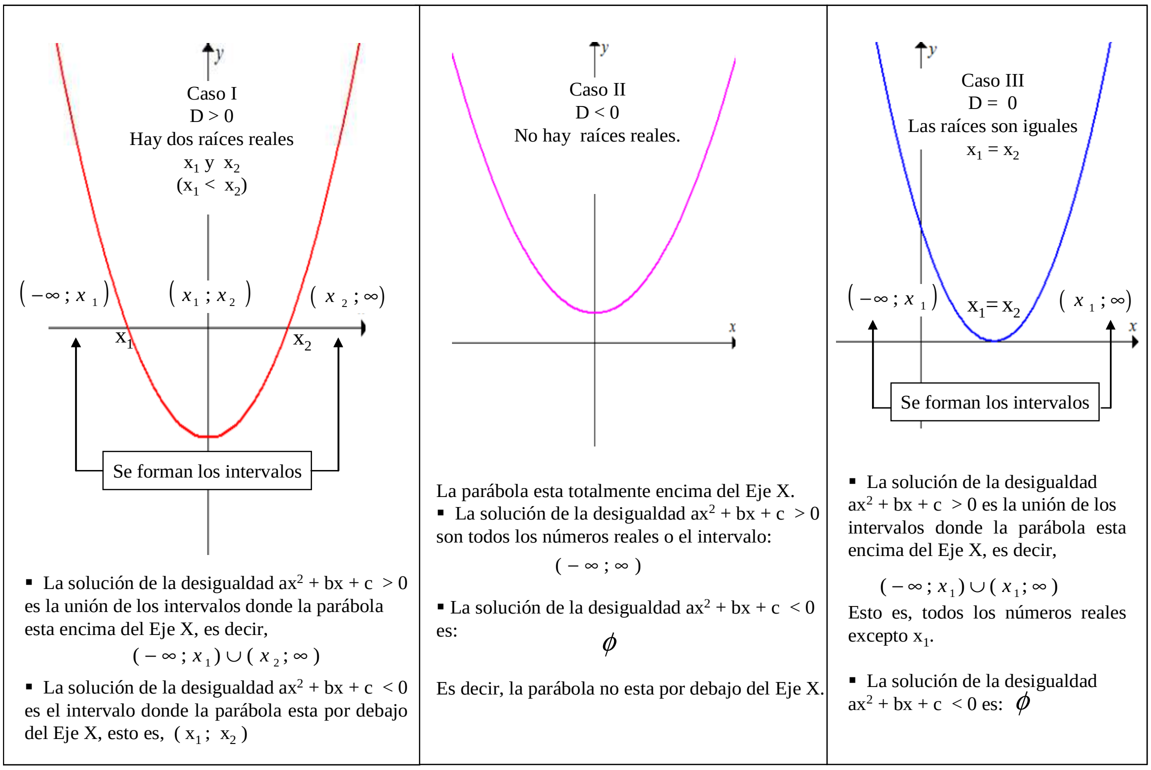
3° Nivel - Deducción Informal: Identificación de relaciones esenciales entre gráficas y desigualdades lineales y cuadráticas.

4° Nivel - Deducción Formal: Identificación de propiedades analíticas de funciones y de la relación de orden (debe encontrar soluciones para casos particulares).

5° Nivel - Rigor: Aplicación de propiedades de relación de orden y representación de la solución en términos de uniones e intersecciones de intervalos para casos generales.

El docente, como facilitador, propició la construcción de conceptos para casos generales (5° Nivel), aplicando propiedades de relación de orden y la representación de la solución de una desigualdad cuadrática, implementando las TIC´s como herramientas cognitivas en el desarrollo de la habilidad de resolución de desigualdades cuadráticas.

Para esto se graficó a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, en donde se define al discriminante D como $D = b^2 - 4ac$, considerando tres casos, de forma análoga a lo propuesto en el tema de inecuaciones de la revista Fundación Polar, Fascículo No. 13.



Conclusiones

Se constató que el 5° Nivel (Rigor) de *desarrollo del pensamiento geométrico* (Van Hiele, 1957), es un nivel que difícilmente alcanzan los alumnos de nivel preuniversitario, pero que si puede ser desarrollado en el nivel de licenciatura, para propiciar la construcción de conceptos para casos generales, aplicando propiedades de relación de orden y la representación de la solución de una desigualdad cuadrática en términos de uniones e intersecciones de intervalos.

Aplicando el método de investigación acción, se observó que efectivamente los medios juegan un rol de potenciadores de habilidades intelectuales en los alumnos, ya que el análisis cualitativo y cuantitativo se realizó implementando procesos dinámicos a través de las TIC´s como herramientas cognitivas, las cuales contribuyeron al desarrollo de la habilidad de *transferencia*, para cambiar la cualidad de los objetos matemáticos en el tema de desigualdades cuadráticas.

Como resultado del trabajo investigativo desarrollado, las Estrategias Didácticas propuestas que implementan el uso de los asistentes matemáticos Graphmatica y el Sketchpad en el aula, para el desarrollo de la habilidad de transferencia entre el registro geométrico y el registro algebraico, en la resolución de una desigualdad cuadrática, son un *aporte práctico,* y como herramientas cognitivas en la disciplina que nos ocupa, aumentaron el número de alumnos que pudieron *aprender significativamente* que la solución de una desigualdad es un intervalo o la unión de estos, combinando al método analítico con el método gráfico, ya que el método analítico no resultó suficiente para entender dicho significado.

Referencia Bibliográfica

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime*, *6*(3), 199 – 219.

Borello, M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Eduteka (2003). *Los manipulables en la enseñanza de las matemáticas. La integración de las TIC´s en Matemáticas. Computadores en el currículo Matemático. Sobre tecnología en la Clase de Matemáticas. Reseña de Software de Matemáticas.* Extraído el 5 de enero de 2008 desde: http://www.eduteka.org/

Farfán, R. y Albert, A. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fundación Polar. Últimas Noticias. El mundo de la matemática. *Inecuaciones.* Fascículo No. 13, 102 – 104. Extraído el 4 de febrero de 2008 desde http://www.fpolar.org.ve/matematica2/fasciculo13/097.html

Garrote, M.; Hidalgo, M. y Blanco, L. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. España: Facultad de Educación, Universidad de Extremadura.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, *10*(2), 23 – 45.

Lajoie, (1993). *Sobre herramientas cognitivas y aprendizaje colaborativo*. Extraído el 11 de marzo de 2008 desde http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt20037291335Sobre%20herramientas%20cognitivas.pdf

López Vera, L. (2006). *Metodología para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Vectorial fundamentada en el desarrollo de la Visualización Matemática Tridimensional*. Tesis Doctoral no publicada. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación, Universidad de Camagüey.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Utrecht. Traducción de Gutiérrez y otros en 1991.

USO DEL SOFTWARE MATEMÁTICO APLICADO A LA INGENIERÍA, EL CASO DE LA CRIPTOGRAFÍA

María del Carmen López Chávez, Carlos Oropeza Legorreta
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán México
i.a.maria.lopez.chavez@gmail.com, carlos_oropezamx@yahoo.com.es
Campo de investigación: Uso de las Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas Nivel: Superior

Resumen. *En el presente trabajo se reporta la aplicación del concepto de transformación vectorial y matricial, que forma parte de la currícula en el curso de Algebra Lineal que se imparte en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Ésta experiencia centra su atención fundamentalmente en dos aspectos, por una parte, en el concepto mismo y por otra, la articulación de éste con el uso de la tecnología a través del software matemático, como una estrategia metodológica complementaria. En dicha asignatura, la mayor parte de los conceptos se construyen formalmente, esto hace que los estudiantes la perciban demasiado abstracta y declaran que "estudiar conceptos como los que se muestran, carecen de aplicación en la realidad"; con éste trabajo se pretende entre otros objetivos romper con ésta idea tradicional provocando la reflexión y el desarrollo en la adquisición del concepto, a su vez confrontando el aprovechamiento de los estudiantes.*

Palabras clave: criptografía, software, matrices, tecnología

Introducción

Una de las muchas aplicaciones del Álgebra Lineal es el uso de matrices para desarrollar códigos, proceso que involucra la transformación vectorial y matricial, en conjunto con un software para representar graficas, evaluación de datos, y/o simplificación de procesos. A dicho estudio se le denomina Criptografía. La criptografía es la ciencia de crear y descifrar códigos. Durante siglos, los códigos se han utilizado en la diplomacia, los servicios de inteligencia, y las comunicaciones militares. Hoy en día, con tantos datos secretos almacenados en las computadoras, ocultar la información computarizada con códigos se ha convertido en algo muy importante para la industria. A menudo, se utilizan matrices para desarrollar sistemas de códigos. Dentro de éste trabajo pretendemos exponer uno de los diversos usos de la Criptografía, que se basa en la transformación de una gráfica en R^3 a un código matricial, transformándolos a valores específicos haciendo uso de un codificador y su inverso decodificador. Basándonos en los principios básicos de la Criptografía, transformaremos una gráfica de bloques simulando edificios, ubicándolos en el plano tridimensional como vectores, y posteriormente como matrices. Dicho proceso involucra un codificador que nos dará como resultado un código numérico de nuestra gráfica. A su vez utilizaremos un decodificador para revertir el proceso y obtener una réplica exacta de la gráfica original.

Snyder (1988), explica que la educación matemática desarrolla un aspecto del pensamiento que la lengua verbal no aborda: la *experiencia de la solución*. El niño hace un cálculo y encuentra la solución que puede verificar objetivamente si es la correcta o no. Como Lima (1994), entendemos que la evolución del concepto coincide con la síntesis de la evolución histórica significativa de su creación. Por lo tanto, el concepto matemático es un movimiento de diferenciación y combinación acumulativa de ideas y de superación de transformaciones permanentes del lenguaje verbal en lenguaje operacional y del lenguaje operacional en leguaje verbal, cada salto es significativo para el aprendizaje y acontece a partir de las síntesis anteriores más simples. En este sentido, la *experiencia de la solución* pierde significado si no está comprometida con un contexto determinado, con una problematización que puede ser realizada a través de la asociación de ideas e imágenes, del lenguaje verbal.

Observamos en Kopnin (1978), que el lenguaje es un movimiento evolutivo que parte de las reflexiones y correspondencias más simples, creando redes y nexos crecientemente más amplios, abarcativos y profundos. El aprendizaje de una operación matemática a que se reduce el concepto, necesita apenas de entrenamiento y se realiza como simple sumatoria fragmentada de habilidades y *competencias*.

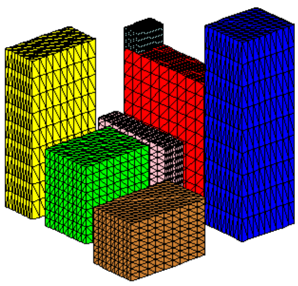
En una educación conceptual, la educación para el lenguaje matemático es intencional y organizada, no es aleatoria ni espontánea.

Análisis

En esta primera etapa se proporciona parte de la información y se da evidencia del uso y manejo del software matemático. Consideramos pertinente mostrar algunas instrucciones que se utilizaron para el desarrollo de la propuesta.

Encodificación

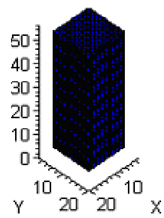
En el desarrollo de la propuesta se plantea mandar un mensaje vía un código en particular, en este caso se trata de un conjunto habitacional el cual se encuentra caracterizado en el espacio de tres dimensiones. El mensaje es el siguiente:



En esta parte se explica la manera de representarlo gráficamente. El desarrollo del primer bloque (azul) se lleva a cabo de la siguiente manera:

```
[> a1:=implicitplot3d({X=1,X=15},X=1..20,Y=1..15,Z=1..50,color=blue):
[> a2:=implicitplot3d({Y=1,Y=15},X=1..15,Y=1..20,Z=1..50,color=blue):
[> a3:=implicitplot3d({Z=1,Z=50},X=1..15,Y=1..15,Z=1..55,color=blue):
```

Con los demás bloques, se sigue la misma metodología, cambiando las coordenadas y los colores.

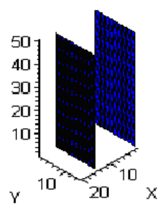


Ya que el objetivo es codificarlo, se necesita saber cómo se va a representar el mensaje en código, se puede tomar como un conjunto de planos con ciertos parámetros; tomando el primer bloque (azul):

```
[> display(a1,a2,a3,scaling=CONSTRAINED,axes=framed);
```

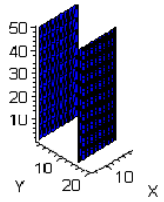
Es un conjunto de 6 planos, divididos en tres los que son perpendiculares al eje *x*:

```
[> display(a1,scaling=CONSTRAINED,axes=framed);
```



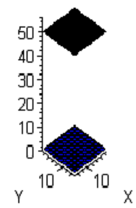
Los que son perpendiculares al eje *y*:

[> display(a2,scaling=CONSTRAINED,axes=framed);



Y los que son perpendiculares al eje *z*:

[> display(a3,scaling=CONSTRAINED,axes=framed);



Podemos observar que en cada parte los planos son iguales, solo varía el valor con respecto al cual son perpendiculares .Ejemplo:

Se observa que los dos valores que se dan con respecto al eje *x* son 1 y 15, además de que se le dan parámetros con respecto a cada eje, con respecto al eje *x* de 1 a 20, con respecto al eje *y* de 1 a 15 y con respecto al eje *z* de 1 a 50, y se tiene éste conjunto de números 1,15 1,20 1,15 1,50 ; los cuales podemos introducir a una matriz de la siguiente manera:

Primero se colocan en una matriz de 3 x 2 los parámetros con respecto a cada eje

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 15 \\ 1 & 50 \end{bmatrix}$$

Después se convierte a la matriz en una de 3 x 4; colocando el valor que sea con respecto al eje *x* a un lado de los valores de los parámetros con respecto a *x* y se completa la matriz con ceros

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 & 1 & 15 \\ 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con respecto al eje *y* al eje *z*, se sigue una metodología similar. Lo que permitirá tener tres matrices por un solo un bloque

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 & 1 & 15 \\ 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 1 & 15 \\ 1 & 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 55 & 1 & 55 \end{bmatrix}$$

Que transcritas al software se muestran de la siguiente manera:

[> M1:=matrix([[1, 20, 1, 15], [1, 15, 0, 0], [1, 50, 0, 0]]):
[> M2:=matrix([[1, 15, 0, 0], [1, 20, 1, 15], [1, 50, 0, 0]]):
[> M3:=matrix([[1, 15, 0, 0], [1, 15, 0, 0], [1, 55, 1, 55]]):

Se repite el proceso con cada uno de los bloques. Se asigna una matriz codificadora:

[> matriz_de_codificacion:=matrix([[1, 2, 1], [2, 4, 3], [1, 1, 2]]);

$$matriz\_de\_codificacion := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la matriz de codificación para cada una de las matrices anteriores se obtiene una nueva serie de matrices que proporcionan el siguiente código tomando en un inicio la primera fila y así sucesivamente:

4,100,1,15 9, 250,2,30 4,135,1,15 4,105,2,30 9,260,4,60 4,135,1,15 4,100,1,50 9,255,3,150
4,140,2,100 28,101,25,55 57,232,50,110 28,123,25,55 28,105,2,16 57,240,4,32 28,125,1,8
28,106,1,30 57,247,3,90 28,133,2,60 82,106,50,55 194,247,100,110 111,133,50,55
82,110,2,16 194,255,4,32 111,135,1,8 82,111,30,35 194,262,90,105 111,143,60,70
72,150,25,40 145,320,50,80 50,130,25,40 72,150,46,80 145,320,92,160 50,125,23,40
72,145,1,20 145,315,3,60 50,130,2,40 92,180,45,55 185,400,90,110 70,180,45,55
92,195,46,80 185,430,92,160 70,185,23,40 92,180,1,40 185,405,3,120 70,185,2,80
51,105,30,55 103,225,60,110 42,105,30,55 51,110,20,30 103,235,40,60 42,105,10,15
51,105,1,15 103,230,3,45 42,110,2,30 52,125,1,15 105,265,2,30 28,95,1,15 52,130,50,90
105,275,100,180 28,95,25,45 52,125,1,15 105,270,3,45 28,100,2,30

Hasta éste punto, ya se tiene el código para mandarlo y decodificarlo.

Decodificación

El código se transforma a matrices obteniendo el siguiente conjunto:

$$\begin{bmatrix} 4 & 100 & 1 & 15 \\ 9 & 250 & 2 & 30 \\ 4 & 135 & 1 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 105 & 2 & 30 \\ 9 & 260 & 4 & 60 \\ 4 & 135 & 1 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 100 & 1 & 50 \\ 9 & 255 & 3 & 150 \\ 4 & 140 & 2 & 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 & 101 & 25 & 55 \\ 57 & 232 & 50 & 110 \\ 28 & 123 & 25 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 28 & 105 & 2 & 16 \\ 57 & 240 & 4 & 32 \\ 28 & 125 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 & 106 & 1 & 30 \\ 57 & 247 & 3 & 90 \\ 28 & 133 & 2 & 60 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 82 & 106 & 50 & 55 \\ 194 & 247 & 100 & 110 \\ 111 & 133 & 50 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 82 & 110 & 2 & 16 \\ 194 & 255 & 4 & 32 \\ 111 & 135 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 82 & 111 & 30 & 35 \\ 194 & 262 & 90 & 105 \\ 111 & 143 & 60 & 70 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 72 & 150 & 25 & 40 \\ 145 & 320 & 50 & 80 \\ 50 & 130 & 25 & 40 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 72 & 150 & 46 & 80 \\ 145 & 320 & 92 & 160 \\ 50 & 125 & 23 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 72 & 145 & 1 & 20 \\ 145 & 315 & 3 & 60 \\ 50 & 130 & 2 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 92 & 180 & 45 & 55 \\ 185 & 400 & 90 & 110 \\ 70 & 180 & 45 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 92 & 195 & 46 & 80 \\ 185 & 430 & 92 & 160 \\ 70 & 185 & 23 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 92 & 180 & 1 & 40 \\ 185 & 405 & 3 & 120 \\ 70 & 185 & 2 & 80 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 51 & 105 & 30 & 55 \\ 103 & 225 & 60 & 110 \\ 42 & 105 & 30 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 51 & 110 & 20 & 30 \\ 103 & 235 & 40 & 60 \\ 42 & 105 & 10 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 51 & 105 & 1 & 15 \\ 103 & 230 & 3 & 45 \\ 42 & 110 & 2 & 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 & 125 & 1 & 15 \\ 105 & 265 & 2 & 30 \\ 28 & 95 & 1 & 15 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 130 & 50 & 90 \\ 105 & 275 & 100 & 180 \\ 28 & 95 & 25 & 45 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 & 125 & 1 & 15 \\ 105 & 270 & 3 & 45 \\ 28 & 100 & 2 & 30 \end{bmatrix}$$

La matriz decodificadora es la inversa de la codificadora:

[> matriz_decodificadora:=inverse(matriz_de_codificacion);

$$matriz\_decodificadora := \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la matriz decodificadora por cada una de las matrices, y separándolas se obtienen los resultados, dependiendo del eje a manejar; continuando con el ejemplo del bloque azul:

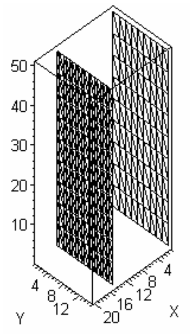
X	Y	Z
1, 20, 1, 15	1, 15, 0, 0	1, 50, 0, 0
25, 55, 25, 55	1, 8, 0, 0	1, 30, 0, 0
50, 55, 50, 55	1, 8, 0, 0	30, 35, 0, 0
25, 50, 25, 40	23, 40, 0, 0	1, 20, 0, 0
45, 60, 45, 55	23, 40, 0, 0	1, 40, 0, 0
30, 60, 30, 55	10, 15, 0, 0	1, 15, 0, 0
1, 20, 1, 15	25, 45, 0, 0	1, 15, 0, 0

Así se obtienen los vectores de la gráfica en R^3, comenzar con el primer renglón:

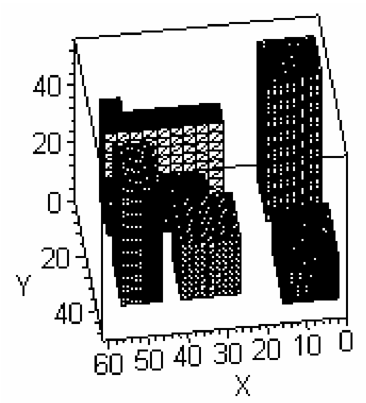
1, 20, 1, 15 1, 15 1, 50

se toman las primeras coordenadas de cada parte en *x* (1, 20), en *y* (1, 15) y en *z* (1, 50), si se grafican solo son puntos en R^2; pero también lo tomamos como parámetros en *x* del 1 al 20, en *y* del 1 al 15 y en *z* del 1 al 50, aunque se tiene otro par de coordenadas en *x* (1,15) y éstos serán los puntos en el eje *x* donde se tomarán los parámetros que se tienen, al graficar se obtiene:

```
[>implicitplot3d({X=1,X=15},X=1..20,Y=1..15,Z=1..50,scaling=CONSTRAINED,axes=boxed,color=white);
```



Se repite el mismo proceso con cada renglón y se obtiene como resultado:



Que como se aprecia, es una réplica de la gráfica original.

Conclusiones

Al hacer uso de la criptografía en el ejemplo mostrado, los estudiantes hacen un reconocimiento de su importancia en el manejo de la codificación y decodificación de señales.

El desarrollo de éste trabajo, generó en la mayoría de los estudiantes participantes la inquietud de continuar con su estudio, para la posible aplicación de la criptografía en el área industrial y en el área mecánica.

Despertó en ellos el interés por el uso del software y comprobaron que con Maple se pueden realizar programas que les proporcionen ventajas en el estudio de conceptos no solamente para la asignatura de Álgebra Lineal, sino en cualquier otra de las que ellos atienden.

Finalmente, reconocieron también que hacer uso del software matemático como una herramienta verificadora, proporciona alternativas en la comprensión de algunos conceptos, que complementa por un lado su formación y por otro acelera la velocidad de respuesta a cuestionamientos que a ellos se les plantea.

Referencias bibliográficas

Antón, H. (2006). *Introducción al álgebra lineal* (3ª edición). México, D. F., México.: Limusa Wiley.

De Burgos, J. (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana* (3ª edición). Aravaca, Madrid, España.: McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U.

Grossman, S. I. *Álgebra Lineal* (6ª edición). México, D. F., México.: McGraw-Hill.

Kopnin, P. V. (1978). *A Dialética como Lógica e Teoria del Conhecimento*. Rio de Janeiro: Editora Civilización Brasileira.

Lima, L. (1994). *Momento de criar matemática, contando com coisas.* São Paulo: Cevec, Ciarte.

Poole, D. (2007). *Álgebra lineal una introducción moderna* (2ª edición). México, D. F., México.: Thomson.

Snyder, G. (1998). *Para onde vao as Pedagogias nao-diretivas*. Lisboa: Moraes editores.

HOJA DE CÁLCULO Y GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO. UNA EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

José Manuel Rendón Ramírez, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero México
rendon_jmr@yahoo.com.mx, sramiro@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan avances de una investigación en curso, que se realiza en educación secundaria en México. Se indaga acerca de las variaciones que el Programa de estudios 2006 de secundaria introduce en las prácticas pedagógicas del maestro y en los aprendizajes de los alumnos, que consiste en desarrollar las actividades matemáticas denominadas complementarias, donde se le propone al profesor trabajar con hoja de Cálculo y Geometría dinámica. Se considera que no deben mirarse como actividades complementarias sino como actividades fundamentales, ya que son esenciales para el desarrollo de habilidades y construcción de saberes. Y por ello se ha planteado como objetivo explorar cómo el profesor realiza las actividades complementarias con sus alumnos de segundo grado de secundaria.*

En el terreno didáctico y metodológico la propuesta se fundamenta en la Metodología de la Ingeniería Didáctica. En especial se orienta bajo la Socioepistemología como aproximación teórica.

Palabras clave: práctica docente, contenidos escolares de matemáticas, recursos tecnológicos

Introducción

En la actualidad es común escuchar acerca de la importancia de la incorporación de las tecnologías en la enseñanza-aprendizaje y particularmente en el de las matemáticas. Este movimiento ha sido generado a nivel internacional por dos aspectos: el primero de ellos, es la incorporación de las tecnologías en los procesos productivos y de educación, y el segundo, a los medios de comunicación, particularmente Internet, que ha permitido rebasar fronteras de una manera ágil. En México se han realizado diversas experiencias de aprendizaje utilizando medios tecnológicos. Entre los apoyos tecnológicos utilizados encontramos el uso de hojas electrónicas, software de contenido matemático como Maple, Derive, Cendirella, Geogebra, Cabri, etc. De igual manera, se han incorporado el uso de calculadoras graficadoras, sensores y herramientas o servicios de Internet.

En la educación secundaria, al final de algunos apartados del programa de estudio de matemáticas 2006, se proponen actividades complementarias con el manejo de herramientas tecnológicas (Excel y Cabri Geometre II). En las referidas actividades sólo se expresa el nombre de cada actividad, y la referencia que proporcionan es mínima, por ejemplo: En el segundo año, bloque 3, eje: Forma, espacio y medida, tema: Formas geométricas, subtema: Justificación de formulas, esta la actividad "Suma de los ángulos interiores de un triángulo": Geometría dinámica. (SEP, 2006). Para que el profesor pueda instrumentarlas, hace falta una explicación en la que se señalen los sitios a los cuales recurrir para mirar dichas actividades. Tales actividades se apoyan en los libros de Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología -EMAT.

Además, se considera que no deben verse como actividades complementarias sino como esenciales, puesto que son actividades diseñadas para el desarrollo de habilidades y la construcción de saberes en entornos tecnológicos.

Mediante el estudio de las matemáticas con tecnología, se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales. Es de interés en este trabajo, ver la forma de cómo el alumno construye conocimiento mediante la exploración de las actividades con la ayuda de la tecnología. La principal ventaja que presenta frente a otros recursos (libro, pizarra, lápiz y papel) es que las figuras dejan de ser estáticas, del cuaderno saltan a la pantalla del ordenador para presentarse en forma de animaciones, le permite al estudiante observarlas desde distintos puntos de vista; lo que contribuye a encontrar mejores ideas de solución a las situaciones que se plantean en clase. Pero, ¿cómo el profesor puede solventar esto? conviene evitar las tendencias a pensar que la tecnología puede sustituir al docente, que es un fin en sí misma, o suponer que su sola presencia mejorará la calidad de la educación.

Una exploración inicial al desarrollar un laboratorio tecnológico en la XI Escuela de invierno de Matemática Educativa, refleja que por lo general, el profesor por diferentes razones no realiza las actividades complementarias; la principal razón es por el hecho de mirar a la tecnología de manera compleja. Algunos profesores señalan que las actividades complementarias que se proponen son necesarias en la clase, la limitación que ellos encuentran es que no cuentan con un laboratorio de matemáticas y que un módulo de 50 minutos de clase, no es suficiente para abordar un tema utilizando tecnología. Otro de los inconvenientes que se les presenta es el hecho de no tener acceso directo para adquirir los materiales de EMAT, por lo que algunos profesores no las abordan. Las evidencias que se han presentado acerca de cómo el profesor no realiza las actividades complementarias, hace necesario un rediseño de las mismas con la finalidad de acercarlas al profesor y le sean útiles al momento de su implementación en el aula.

Todas las consideraciones anteriores nos han inducido a adoptar como objeto de investigación en este trabajo, al proceso de enseñanza de la matemática con tecnología en educación secundaria y como materia de investigación, la elaboración de las actividades complementarias como esenciales que posibiliten la comprensión y el logro de los objetivos planteados en los diferentes apartados del programa 2006. La problemática que se aborda en este trabajo, se acota a explorar por qué no las realizan y las maneras de cómo pueden realizarlas. Por lo anterior el problema científico consiste en mirar las limitaciones que tienen los profesores para realizar las actividades complementarias propuestas en el programa de estudio. Que afecta negativamente la construcción de saberes por los alumnos y reduce oportunidades de aprendizaje con recursos tecnológicos.

Del problema planteado se deriva el objetivo de esta investigación que consiste en: explorar las maneras de cómo los profesores pueden abordar las actividades complementarias con sus alumnos.

Para el logro de este propósito se rediseñan las actividades denominadas complementarias para su implementación interactiva con profesores de matemáticas de educación secundaria, interesados en compartir saberes en constante interacción (Velázquez, 2006) desde la ingeniería didáctica como metodología.

Antecedentes

El uso de estas tecnologías pasó de ser inicialmente un recurso agregado a los contenidos escolares, a convertirse en un aspecto incorporado al currículo. En México, la incorporación de las computadoras como apoyo a los procesos de enseñanza y de aprendizaje, inicia institucionalmente en 1983 con el proyecto MicroSep. Proyecto educativo de gran escala emprendido por el CINVESTAV, con el propósito de producir 100 mil microcomputadoras, para acercar a los estudiantes de escuelas secundarias al uso de computadoras. En una primera etapa se logra la instalación de 30 000 computadoras. (Tapia, 2007, p.12-16)

Geometría dinámica

En los últimos años han aparecido diversos programas informáticos bajo la denominación genérica de "Geometría dinámica" como por ejemplo Cabri Geometre II, Geometer Sketchpad, Geogebra o Cinderella. La principal ventaja frente a otros recursos (libro, pizarra, lápiz y papel) es que las figuras dejan de ser estáticas y del plano saltan a la pantalla del ordenador para presentarse en forma de animaciones que permiten observarlas desde distintos puntos de vista. Pero no es sólo el movimiento de las figuras lo que proporciona interés para el aprendizaje de las matemáticas, lo realmente innovador es que los diseños pueden ser concebidos para modificar ciertos parámetros en la misma construcción, así como comprobar los efectos que producen sus cambios. Otras características interesantes que presentan los programas de Geometría Dinámica son:

- Admiten el trabajo con ejes coordenados, lo que le hace ser una herramienta poderosa para el estudio de la geometría analítica en el plano y el estudio del comportamiento de las funciones.
- Por la forma de trabajar, se establece claramente la diferencia entre construir y dibujar. Podemos dibujar un cuadrado trazando cuatro vértices en el lugar correcto o podemos construir un cuadrado mediante perpendiculares y con la ayuda de un compás como lo haríamos sobre el papel.

Hoja de cálculo

Eduteka.org, Tecnologías de la información y comunicación para le enseñanza básica y media, disponible en: (http://www.eduteka.org/HojaCalculo2.php). La primera Hoja de Cálculo (VisiCalc) fue inventada por Dan Bricklin en 1979 y funcionaba en un computador Apple II. El éxito rotundo experimentado por las Hojas de cálculo desde sus inicios se debe al empoderamiento que representa esta tecnología en manos de profesionales que conocen los problemas comunes y reales que afrontan las empresas y la forma de representar esos problemas con números y fórmulas.

Hoja de cálculo provee un magnífico ambiente para el estudio de la representación (modelación) de problemas, para el uso de fórmulas en cálculos matemáticos y para la solución de diversos problemas.

Se considera que la hoja de cálculo es una herramienta de aprendizaje poderosa y que si los estudiantes tienen acceso a computadoras, deben utilizarlas. Los estudiantes desarrollan habilidades para:

- Organizar datos (ordenar, categorizar, generalizar, comparar y resaltar los elementos claves).
- Realizar diferentes tipos de graficas que agreguen significado a la información ayudando en la interpretación y análisis.
- Identificar e interpretar para un conjunto de datos, el máximo y mínimo, media, mediana y moda.
- Utilizar elementos visuales concretos con el fin de explorar conceptos matemáticos abstractos (inteligencia visual y espacial.
- Descubrir patrones.

Existen muchos autores que trabajan con ambientes tecnológicos, por mencionar unos:

Hitt, (2003). Reflexiona sobre la tecnología como una interesante herramienta para la construcción de conceptos matemáticos en los estudiantes, que se refleja en los procesos para resolver problemas abogando por el uso reflexivo sobre este medio. Falcade, Laborde y Mariotti (2004) se interesan en analizar el rol que juegan como instrumentos de mediación semiótica, las herramientas de Cabrí en la construcción de los conceptos. En el miso sentido Artigue, (2000) afirma que el uso de herramientas computacionales en la práctica matemática ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan.

Y (Vigotsky, 1979, citado por Larios, 2006) considera que es necesario preparar al docente en la utilización adecuada de esta herramienta como mediador semiótico entre el conocimiento y el alumno.

Marco teórico

La socioepistemología como aproximación teórica, en el área de las matemáticas busca explicar los diferentes fenómenos didácticos presentados en el área de las matemáticas. Contempla de varios aspectos como ser la comunicación, la construcción de lenguajes o el diseño de herramientas didácticas, con el fin de estudiar y explicar dichos fenómenos. Por otro lado, las investigaciones realizadas en matemática educativa aportan ideas, las cuáles son utilizadas para la construcción de herramientas didácticas, que tienen el fin de apoyar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Además, otras investigaciones centran su atención en el proceso de enseñanza por medio de calculadoras, ordenadores, medios audiovisuales, etc. Los cuales se pueden incorporar en el aula, por lo tanto esto nos conduce a la utilización de diversas tecnologías en la escuela.

La socioepistemología con la integración de sus componentes (social, epistemológica, didáctica y cognitiva) permite mirar sobre la dificultad de abordar las actividades complementarias con tecnología que presentan los profesores para abordar las actividades complementarias con tecnología, también preguntarnos por qué se omiten dichas actividades y reconocer las prácticas docentes para resinificarlas.

Metodología

La ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, si no por las características de su funcionamiento metodológico. Se estructura un diseño de tipo interactivo para profesores de matemáticas de educación secundaria, interesados en compartir saberes en constante interacción (Velázquez, 2006), dicho diseño es guiado por las fases de la ingeniería didáctica. El cual aún no es puesto en marcha.

Se inicia con una entrevista a los profesores, en la cual se presenta el programa de estudio donde están citadas las actividades complementarias, posteriormente se muestran las actividades impresas desde EMAT para el análisis de dichas actividades y dejar que el profesor explore y manifieste todo acerca de las actividades, al mismos tiempo de estar realizando la entrevista, para mirar cuales ventajas y desventajas considera, para tener una idea de cómo miran las actividades complementarias, si las abordan con sus alumnos, cómo lo hacen, por qué no las abordan en su caso, qué materiales utilizan. Además, la entrevista nos permitirá explorar al maestro no sólo desde su faceta de facilitador y trasmisor del conocimiento, sino también su faceta humana como un actor social quien tiene conductas, opiniones, deseos, actitudes, expectativas. Cuestiones que por su misma naturaleza es casi imposible observar a través de otra técnica de investigación.

En la siguiente fase se interactúa con una actividad desarrollándola en la computadora de manera individual y apoyándose entre todos para analizar su desarrollo, con el interés de saber las inquietudes de los profesores, con el propósito de que se familiaricen con estas actividades y construyan una base de orientación para trabajarlas con los alumnos. Siguiendo en esta misma actividad se trata de que los participantes de manera colectiva simulen una clase o una actividad complementaria desarrollándola con el uso de la tecnología. En cada sesión se ha considerado un anexo para el profesor que incluya dichas actividades complementarias, que les permita ser flexibles en el análisis y desarrollo de dichas actividades. Los anexos se toman de EMAT, del programa de estudio 2006 de secundaria. Y posteriormente se hace nuevamente otra entrevista en la se contrastan las incógnitas de la primer entrevista con esta, y también se hace énfasis en los saberes y producciones que se ven inmersas en las actividades.

Fases de la ingeniería didáctica.

Análisis preliminar: En esta apartado se muestran los estudios preliminares, que son estudios que solo mantienen su calidad de "preliminares" en un primer nivel de elaboración. En este caso, en el proceso de preparación de las actividades (complementarias) se estructura un laboratorio tecnológico que se pone en práctica en la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, en el que los participantes construyen saberes, que orientan la planeación, gestión y evaluación de este diseño con los profesores. Hasta el momento, se está analizando las propuestas y considerando para un rediseño de las actividades.

Análisis a priori: Esta etapa constará de una planificación del rediseño. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. Como es el caso de la elaboración de una entrevista que se presentará como momento de partida en la investigación con profesores. Las actividades de manera individual y colectiva respectivamente, interesa la interacción entre ellos para tener una idea de cómo miran las actividades complementarias, saber si las abordan o no con sus alumnos, cómo lo hacen, por qué y qué materiales utilizan.

Experimentación: En esta etapa se llevará a cabo la exploración con profesores de segundo grado de secundaria con las actividades rediseñadas.

*Análisis a posteriori: E*n esta etapa se confrontarán los resultados de la entrevista inicial y la observación, además, se aplica una entrevista de cierre en la que se busca contrastar los resultados, se hace énfasis en los saberes y producciones obtenidos a lo largo del proceso.

Reflexiones finales

Lo que hemos presentado en este trabajo es la estructura de la investigación, la cual pretende lograr que se implementen el uso de la tecnología en la educación secundaria, Se pretende que los profesores posteriormente mediante la exploración de las actividades con el uso de tecnología (considerándolas como fundamentales), logren un conocimiento con mayor sentido, de modo que cuenten con más elementos para abordar un problema.

De la experiencia en el laboratorio tecnológico, se reconoce una problemática en el estudio de los contenidos del programa de estudios 2006 de secundaria, específicamente en las actividades complementarias que se proponen, al mostrar el profesor limitaciones para su implementación.

Se pretende que los profesores, posteriormente mediante la exploración de las actividades rediseñadas haciendo uso de la tecnología, logren manipular y comprender los conceptos matemáticos en juego, de modo que cuenten con más elementos para abordar un problema con ayuda de los recursos tecnológicos, y así motivar al estudiante a trabajar en ambientes tecnológicos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *En: El futuro del cálculo infinitesimal, R. Cantoral (Ed.,* 93-115*. México Grupo Editorial Iberoamérica.*

Falcade, R., Laborde, C. Y Mariotti, M. (2004). Towards a definition of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2*,* 367–374, Bergen, University of Norway.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* X(2), 213-223.

Larios, V. (2006*).* La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de Geometría Dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 9(3), 363- 386.

La Hoja de cálculo una poderosa herramienta de aprendizaje (2003). Extraído el 20 de marzo de 2007 desde http://www.eduteka.org/HojaCalculo2.php.

SEP. (2006). *Programas de estudios 2006*, Matemáticas. Educación básica. Secundaria. México: SEP.

Tapia, J. M. (2007). *Las potencialidades del aula de medios para el aprendizaje de las matemáticas. Una experiencia con alumnos.* Trabajo de grado, Maestría en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero.

Velázquez, S. (2006). La construcción social de saberes matemáticos. El caso del tratamiento de la información. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 531-535). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

LA MODELACIÓN Y LA TECNOLOGÍA EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Francisco Cordero Osorio , Liliana Suárez Téllez , Jaime Mena Lorca , Jaime Arrieta Vera , Ruth Rodríguez Gallegos , Avenilde Romo Vázquez , Alin Cârsteanu , Miguel Solís Esquinca
Centro de Formación e Innovación Educativa. Instituto Politécnico Nacional — México
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso — Chile
Universidad Autónoma de Guadalajara — México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey — México
Université Paris 7 — Francia
Universidad Autónoma de Chiapas — México
fcordero@cinvestav.mx , lsuarez@ipn.mx, jmena@ucv.cl, jaime_arrietav@hotmail.com, ruthrdz@itesm.mx , romo@math.jussieu.fr, alin@math.cinvestav.mx , solise@unach.mx
Campo de investigación: Modelación matemática — Nivel: Superior

Resumen. *La modelación se encuentra en auge en las actividades de aprendizaje de la matemática, sobre todo cuando se les incorpora tecnología. Por ello, las concepciones de modelación están jugando un papel importante en la Matemática Educativa. Tales concepciones tensan aspectos sobre lo que se entiende como conocimiento matemático. Una de las creencias frecuentes en las prácticas de enseñanza de la matemática consiste en que la modelación es una aplicación de la matemática. Ello conlleva enseñar matemáticas y después buscar la aplicación de tal conocimiento. Contrariamente a tal idea, el grupo de investigación en conformación al seno de las RELME, llamado Grupo de Modelación y Tecnología (MyT) discute con base en sus programas de investigación que la modelación es, en sí misma, una construcción social del conocimiento matemático.*

Palabras clave: modelación, tecnología, enseñanza de las matemáticas

Introducción

El Grupo de Discusión de Modelación y Tecnología (MyT) tiene como tarea principal establecer un estado del arte a la luz de las aproximaciones teóricas de las investigaciones en cuestión realizadas por los miembros del Grupo. La síntesis del desarrollo del Grupo MyT es difícil por las múltiples direcciones en que se avanza. Sin embargo, tomando en cuenta la naturaleza de los trabajos del Grupo, se percibe la importancia que ha tenido la identificación y conformación de epistemologías, el interés en discutir y presentar categorías y ampliaciones teóricas de la disciplina y la mirada constante a las necesidades del sistema educativo. En ese sentido proponemos tres aspectos para el trabajo de dicho estado del arte: lo epistemológico, lo científico y lo social. El primero reflejará la matemática que se trastoca y se reorganiza, el segundo el conocimiento que se está construyendo en el tópico del Grupo MyT y el tercero las respuestas que se han logrado a las demandas sociales.

Con estas consideraciones cuestionaremos la pertinencia de construir escenarios educativos donde se haga explícita la modelación matemática, a través de tres grandes preguntas: ¿Qué quiere decir modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?; ¿Cuál es su relación con la tecnología? y ¿Cuáles deberán ser los cambios curriculares?

Los objetivos del Grupo MyT consisten en conformar un grupo permanente de investigadores, en red, de especialistas de modelación escolar desde diferentes perspectivas teóricas en el campo de la Matemática Educativa y en formular el Programa de Investigación que le dará la identidad latinoamericana al Grupo.

El estatus epistemológico. La construcción del conocimiento matemático

A la luz de las investigaciones el objetivo es explicar la matemática que se ha generado o reorganizado. Por ejemplo, las explicaciones de contenidos matemáticos en sus dimensiones funcional y razonada, así como en la alternancia de saberes que la modelación y tecnología propician.

Empecemos con una visión general para después irnos a la especificidad de la matemática educativa. El problema fundamental que conlleva la enseñanza de la modelación matemática es el hecho de que ésta se traslapa en gran medida con todo el contenido de las matemáticas, en particular, y de las demás ciencias exactas, en general, ya que todas las leyes de la naturaleza que conocemos se expresan por medio de modelos matemáticos (y muchas de ellas ni se pueden expresar de otro modo, por su complejidad intrínseca). Lo anterior no se refleja en los currículos, ya que, por ejemplo, el modelo lineal de la elasticidad de los materiales no se presenta como tal, sino como "la Ley de Hooke", como si su descubridor la habría decretado y consecuentemente cualquier material elástico que la desobedeciera sería intransigentemente castigado, en lugar de ser presentada como parte del esfuerzo más general de modelar el comportamiento de los materiales bajo la acción de diferentes tipos de fuerzas, dentro del cual Hooke contribuyó con un modelo lineal para la deformación de los materiales elásticos – y de la misma manera sigue la enseñanza de la mayoría de las leyes conocidas en el marco de las ciencias exactas. Otro problema importante se presenta en la dimensión epistemológica de la modelación matemática: la dicotomía entre el papel de la modelación en la construcción del conocimiento y el papel de la misma en realizar aproximaciones del funcionamiento de los procesos naturales. Conocer y aproximar, siendo dos papeles igual de válidos de la modelación matemática, constituyen el carácter dialéctico de la misma, lo que se ven poco reflejado en la enseñanza, donde frecuentemente se encuentran enfoques que tratan de fomentar la idea que alguno de los dos papeles sería la “verdadera misión” de la modelación matemática.

La dimensión social de la epistemología en sus aspectos matemáticos en general y de modelación matemática en particular es también un asunto muy delicado, ya que el procesamiento del conocimiento matemático a nivel social –procesamiento que valida y potencia aquellos conocimientos que llegan a beneficiar a la sociedad humana– se ve seriamente afectado por la falta de antecedentes matemáticos en la mayoría de los sujetos involucrados. Por lo tanto, el conocimiento matemático ha sido históricamente más individualizado que otras áreas del conocimiento humano, lo que ha privado la modelación matemática de la potenciación mencionada por parte de la sociedad. Por ende, el desarrollo de la epistemática (ciencia del procesamiento automático del conocimiento) se encuentra también en una fase muy incipiente, contrastante con sus posibilidades y las necesidades históricas que la generaron. Sin embargo, más allá de la problemática teórica que conlleva la enseñanza de la modelación matemática, existe una carencia general de enseñar la metodología de la modelación (las etapas de la construcción de un modelo, sus criterios de elección, sus métodos de parametrización, su validación, entre otros), ya que ésta no aparece implícitamente en los demás cursos de ciencias exactas impartidos.

Por otra parte vale la pena comentar que el proyecto Tuning que surge en Europa (http://ec.europa.eu/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html) ha logrado proyectarse en otras latitudes y así tenemos la versión en Latinoamérica que ha propiciado que las instituciones de educación superior de esta región estén enfrentadas a plantear currículos basados en competencias. Las carreras de ingeniería han sido las primeras en ser tocadas y por ende la formación en matemática está siendo requerida en esos términos. Afortunadamente este re-pensar la formación en ingeniería (y otras carreras) está presionando a los matemáticos docentes a replantear su discurso ya que han surgido, por lo menos en Chile, modelación y uso de tics y manejo de la información, como competencias que los matemáticos y los de ciencias básicas deberían ayudar a desarrollar. La interpretación de estas palabras y cómo lograr el deseado desarrollo de competencias están presentes y es un problema al que hay que dar respuestas.

Si bien estas visiones generales son importantes, conviene entrar en materia. No hay una sola forma de concebir la modelación. Hoy día, a la modelación la ejercen comunidades en una gran variedad de escenarios. Así por ejemplo, la modelación es abordada tanto por grupos de investigadores en diversas disciplinas como por grupos en escenarios de la vida cotidiana. Los contextos de la modelación son cruciales ya que imprimen las particularidades de la práctica. Así, la modelación en el aula de matemáticas se plantea con diferentes intenciones. Se presenta bien para motivar algún tema de matemáticas, o bien como ejemplos de la aplicación de las matemáticas. Pero en ese sentido la modelación empieza a surgir con la intención de que los estudiantes construyan sus conocimientos, es decir se ejerce la modelación para la emergencia de conocimientos, los conocimientos matemáticos en particular. Un aspecto que queremos destacar es que la modelación transforma las entidades sociales que la ejercen, por ejemplo el individuo que desarrolla la modelación lo transforma en otro individuo.

El estatus científico. Los constructos teóricos en la Matemática Educativa

En este apartado el objetivo es discutir el conocimiento que necesariamente se ha tenido que construir en la disciplina de la Matemática Educativa, con relación a la MyT. Por ejemplo, perspectivas teóricas, nuevos conceptos y ampliaciones en las situaciones didácticas, en la ingeniería didáctica, en el funcionamiento cognitivo, en las funciones normativas de las prácticas sociales, los proceso institucionales, entre otros.

En ese tenor cabe destacar que el binomio Modelación-Graficación, se ha perfilado como una categoría para la matemática escolar. En esa línea de investigación, estamos interesados en favorecer el desarrollo de una matemática funcional en el sistema educativo. En consecuencia, la importancia de la investigación está en los aspectos teóricos y metodológicos que se formulan. Las prácticas de modelación y de graficación, por separado, han contribuido a proporcionar acercamientos innovadores al concepto de función (véase Arrieta, 2003 y Leinhardt et al, 1990). En los niveles superior y medio superior se han introducido como actividades que desarrollan habilidades de aplicación y visualización de los conceptos matemáticos. En la investigación hay una tendencia actual a destacar la importancia epistemológica de la modelación (Bosch et al, 2007) y de la graficación (Cordero 2006b).

Desde la Socioepistemología, se hace un planteamiento para la modelación escolar caracterizada a través de un uso de las gráficas (Suárez, 2008). El estudio, desde la perspectiva del *Tractatus de Oresme sobre la Figuración de las Cualidades* (Clagett, 1968) proporciona una explicación de la transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación. Esta transformación, caracterizada en este trabajo a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las figuras geométricas, aporta los principales elementos de la hipótesis epistemológica sobre el uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento para resignificar el cambio y la variación. La socioepistemología de la modelación-graficación se traduce en el diseño de una situación para trabajar con los estudiantes y conforma las secuencias llamadas Situaciones de Modelación del Movimiento (SMM) (Suárez, et al, 2005). Tenemos evidencia de que los elementos de funcionamiento de la Figuración de las Cualidades surgen en una SMM al identificar las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad que los participantes logran establecer como argumentos para explicar la variación en una situación de cambio. Y tenemos evidencias de las formas de uso de las gráficas a partir de la caracterización de los significados y los procedimientos que los participantes ponen en juego al establecer las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad en una situación de cambio en los momentos del diseño de situación: donde establecen la forma, construyen los argumentos y los ponen en funcionamiento.

En esta misma perspectiva se cuestiona sobre la simbiosis entre las nociones de predicción y simulación. La investigación tiene el objetivo de reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma $ay' + by = F(x)$ a través de situaciones gráficas de trasformación, éstas consisten en identificar patrones de comportamiento de la función *F* al variar los coeficientes *a* y *b* de la ecuación diferencial e interactuar con los contextos gráficos y algebraicos. Una noción que permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología, es el comportamiento tendencial de las funciones, noción *sui generis* del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está relacionada con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que *a priori* no se encuentran dentro de la estructura matemática (Cordero, 2006a). A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar a la solución $y(x)$ con un comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$ (noción de predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes a y b (noción de simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados. Este estudio socioepistemológico de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes establece un método de diseño de situación y de lectura de datos con el propósito de lograr un alcance de reproducción en el sistema educativo e ir propiciando el rediseño del discurso matemático escolar.

Las preocupaciones didácticas se manifiestan de manera distinta cuando se considera una formación profesional, como es el caso de ingenieros generalistas. En este contexto, el rol de la modelización matemática debe ser considerado en relación a la futura práctica profesional. Pero, ¿cuáles son las necesidades de dicha modelización en la práctica? Para dar cuenta de ello, es necesario el estudio de prácticas profesionales. En el marco de la investigación que aborda el tema del lugar que debe darse a las matemáticas en la formación de ingenieros, se estudia una actividad que simula una práctica profesional, los proyectos de ingeniería. Dichos proyectos, son una actividad diseñada por la institución formadora IUP (Instituto Universitario Profesional de Evry) para conectar dos instituciones, los laboratorios de investigación y el mundo profesional. Hemos realizado dos observaciones de proyectos durante dos años, la primera a título de pre-experimentación y la segunda constituye el trabajo experimental de nuestra investigación. El análisis de estos proyectos es realizado en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Particularmente, en uno de los proyectos hemos encontrado el uso de las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace en tareas de modelización. Dichas tareas consisten en el uso de modelos “tipo”, modelos existentes que pertenecen a las disciplinas intermediarias, como es el caso de la automática. El objetivo que dirige el análisis es de determinar cuáles son los niveles de referencia que estos modelos y los objetos matemáticos inmersos establecen con tres instituciones, a saber: las matemáticas, las disciplinas intermediarias y la práctica misma. La modelización, como lo señalan Bissell y Dillon (2000) en la actividad práctica del ingeniero y más que basarse en la creación de nuevos modelos, consiste en la utilización y la adaptación de modelos existentes. De esta manera sabemos que las disciplinas intermediarias juegan un rol fundamental en la disposición de estos modelos, mediando entre la teoría y la práctica, para otorgar herramientas funcionales. Por otra parte, hemos investigado que una formación matemática que no integre la modelización como una componente fundamental, está en riesgo de quedar a cargo de las disciplinas intermediarias.

El estatus social. La incidencia al sistema educativo

Es de nuestro interés proporcionar respuestas a las demandas sociales en acciones como la formación de profesores e investigadores, los posgrados y la creación de redes, entre otras. Por ejemplo, para producir propuestas concretas es necesario considerar los resultados que miden los efectos y las dificultades de las propuestas que se han puesto en marcha.

Diversas dificultades han sido reportadas por investigaciones cuando se llevan al aula problemas donde el estudiante pueda “modelar” de manera más cercana a la modelación realizada por un experto o investigador. En particular, Rodríguez (2007) reporta la transposición didáctica (Chevallard, 1991) existente entre la modelación que practican los expertos y aquella llevada al ámbito escolar en el caso de una clase de Física y de Matemáticas en una preparatoria francesa. Otras dificultades reportadas tienen relación con el conocimiento previo del estudiante del contexto donde se modela así como de su conocimiento y su habilidad en el manejo de utilería matemática para modelar el mismo. Las intuiciones y concepciones del estudiante parecen jugar un rol importante en este proceso. En ese sentido, hemos realizado investigaciones sobre el tipo de tareas de modelación con la finalidad de entender las relaciones entre las praxeologías observadas en los libros de texto de matemáticas y física y las dificultades de los estudiantes al trabajar una actividad de modelación (Rodríguez, 2007). Sin embargo, creemos que un punto importante a desarrollar en futuras investigaciones es el abordar el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la modelación en el ámbito escolar desde una perspectiva cognitiva. Eventualmente, en base a los resultados de estos estudios, se podrán establecer lineamientos de diseño e implementación de situaciones de enseñanza y aprendizaje de determinadas nociones matemáticas que sean más favorables para aprender a modelar de manera más cercana a como los expertos lo realizan o como suceden las prácticas de modelación.

El Programa de Investigación

El estado del arte de las investigaciones de los miembros del grupo MyT revela que no es el estudio en sí mismo de la modelación su interés sino más bien lo son las prácticas y funcionamientos de ésta. Este enfoque ayuda a establecer la dirección de las investigaciones: a) sobre la justificación funcional y alternancia de saberes cuando se resignifica un conocimiento matemático (Cordero y Flores, 2007); b) sobre la categoría de predicción para resignificar diferentes dominios del Cálculo; c) sobre los argumentos como los organizadores del contenido que entra en juego en la situación presentado en diferentes versiones para convencer (Cordero, 2006a); d) sobre caracterizar la modelación desde una perspectiva donde las prácticas son centrales en las explicaciones de los fenómenos didácticos. En esta dirección se plantean cinco tesis: la experimentación, la toma de datos y la interacción con el fenómeno son necesarias para la práctica de modelación, más no son suficientes para caracterizarla. La suficiencia se logra (el primer acto de la modelación) cuando la situación obliga a salir del fenómeno para poder resolverla con herramientas fuera de él, o sea con los modelos. La modelación es un acto de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La modelación no es representación, es construir nuevas entidades a partir de la articulación, y con eso crea nuevas realidades. Y la construcción de un modelo está referida a su distinción de otra.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Artaud, M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classrooms. Modeling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study* (371-378). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.

Bissell y Dillon (2000). Telling Tales: Models, Stories and Meanings. *For the Learning of Mathematics* 20, 3–11.

Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38 (2), 86-95.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz, L. (2007). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 18 (2), 37-74.

Buendia, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 3, 299-333.

Clagett, M. (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison*: University of Wisconsin Press.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián., O y Romo, A. (Ed.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(1), 7-38.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques d'enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche *en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Doctoral dissertation, University Joseph Fourier, Grenoble, France.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación. Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis no publicada del Departamento de

Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Use of graphs in change and varitation modeling. Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 1, 311.

Suárez, L.; Carrillo, C.; López, J. (2005). Diseño de Gráficas a partir de Actividades de Modelación. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 405-410). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

UNA VINCULACIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR Y LA INVESTIGACIÓN A TRAVÉS DE DISEÑOS DIDÁCTICOS CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Alma Rosa Pérez Trujillo, Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas (Facultad de Humanidades) México
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
CICATA–IPN
almarpt@hotmail.com, gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Este trabajo de investigación ha centrado la atención en generar diseños didácticos que aborden temas del Cálculo y Precálculo del currículo actual, cuyos fundamentos teóricos están basados en investigaciones de corte socioepistemológico favoreciendo el uso inteligente de la tecnología en el aula de matemáticas. En éstos se retomarán aspectos que ayuden a la reconstrucción de significados de tópico matemáticos como el teorema de Thales, el uso de la subtangente para caracterizar una curva (máximos, mínimos y puntos de inflexión) y la noción de acumulación para abordar el área bajo la curva.*

Palabras clave: socioepistemología, cálculo, precálculo, diseños didácticos

La problemática

Al seno de la investigación sociopistemológica en la Matemática Educativa se han realizado diversas investigaciones sobre Cálculo y Precálculo en las que se han propuesto resignificaciones de diversos tópicos a partir de un análisis epistemológico e histórico, con la finalidad de enriquecer y rediseñar el discurso matemático escolar (Buendía, 2004; Castañeda, 2004; Cordero, 2003).

No obstante, aunque el objetivo de muchas de estas investigaciones quiera ser el impacto en el quehacer cotidiano del profesor en el aula, el sentir generalizado de los profesores es la falta de vinculación entre sus necesidades y las investigaciones que se llevan a cabo. Entendemos que el maestro no realiza estas adecuaciones ya que dentro de su desempeño laboral cuenta con distintas restricciones de tipo curricular, de tiempo, de cantidad de alumnos, etc. Esto hace que aunque el investigador proponga que los resultados de su investigación sean aplicables dentro del aula no siempre se diseñan situaciones escolares para ser llevadas al aula. La experiencia nos dice que existen profesores, con cierto perfil, que sí han hecho estas adecuaciones a los resultados de las investigaciones o han aplicado en su aula cotidiana las situaciones sugeridas por el investigador; estas experiencias indican que los resultados de investigación pueden ser llevados al aula.

Por otra parte, si hablamos de investigaciones que involucren aspectos tecnológicos, la situación parece complicarse ya que, de acuerdo a Ursini (2006), el uso de la tecnología implicaría que los profesores se vean a sí mismos como agentes de cambio y que acepten enfrentar situaciones no predecibles de antemano y en un ambiente tecnológico en el cual ellos mismos no fueron educados.

Con base en lo anterior, retomaremos la propuesta socioepistemológica con relación a la construcción del conocimiento matemático. En ella, no son los objetos matemáticos y su adquisición la metáfora para explicar cómo se construye la matemática; la propuesta es crear un modelo del conocimiento matemático que dé cuenta de lo que constituye su contenido y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento (Cordero, 2008). La Socioepistemología pretende entonces, desarrollar estrategias de investigación de naturaleza epistemológica donde ésta sea entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento. Creemos que una epistemología fundamentada en prácticas sociales, en contraposición de una de objetos matemáticos, favorecerá el establecimiento de relaciones funcionales, alejadas del utilitarismo, entre los diversos tópicos del saber matemático (Cordero, 2003).

Nuestro trabajo busca así establecer un vínculo entre la matemática escolar y las investigaciones realizadas bajo la perspectiva socioepistemológica, vía diseños didácticos que hagan uso de la tecnología. Este último punto nos sitúa en la realidad del aula del siglo XXI.

Marco teórico y metodológico

Las dimensiones *didáctica*, *epistemológica* y *cognitiva* han sido abordados por diferentes esquemas explicativos para dar cuenta de la construcción del conocimiento matemático de tal manera que el paradigma dominante ha sido el *objeto matemático* como la metáfora para explicar cómo se construye el conocimiento. Si vemos a las Matemáticas como una construcción hecha por seres humanos, que surge como consecuencia de darle respuesta a problemáticas en particular, consideramos que la perspectiva epistemológica debe cambiar, ya que se debe considerar al ser humano haciendo matemáticas y diseñar situaciones. El análisis de dichas prácticas debe conformar el aspecto social en el estudio de la construcción del saber matemático estableciéndose así un marco en el que lo social interactúe de manera sistémica con las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva del saber para brindar una explicación más robusta acerca de su construcción. Al resultado de la conjunción de estas cuatro dimensiones, se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2000). Uno de sus objetivos es la formulación de epistemologías de prácticas o socioepistemologías que den cuenta de aquello que constituye al saber matemático.

Sin embargo, esas prácticas tienen que reformularse, reinterpretarse para lograr llegar al aula. Si bien, son el fundamento epistémico en la construcción del saber en cuestión, se les tiene que imprimir intencionalidad y hacerlas explícitas a fin de favor la resignificación de dicho saber; esto es, la reconstrucción del saber en una situación particular.

Es por eso que nuestro objetivo es proponer una vinculación entre las investigaciones socioepistemológicas sobre Cálculo y Precálculo a través de diseños didácticos, favoreciendo el uso inteligente de la tecnología.

Fundamento teórico de los Diseños Didácticos

A continuación presentamos tres diseños didácticos los cuales retoman aspectos de investigaciones socioepistemológicas y que hemos agrupado de la siguiente manera: 1) Comportamiento de las curvas a través de las subtangentes, 2) Área bajo la curva y, 3) La visualización en los criterios de semejanza.

El primero de ellos se construyó con base en la caracterización geométrica-analítica analizada por L'Hospital y Agnesi y que fue descrita por Castañeda (2004). Identificamos al *uso de la curva* como aquello que resignifica a los puntos críticos como el máximo o el mínimo. Con el diseño que aborda el área bajo la curva en un contexto de variación, se pretende favorecer intencionalmente prácticas de *acumulación* a fin de resignificar la función área. En el tercer diseño se plantea la visualización en los criterios de semejanza; en él se analiza el comportamiento de una figura no estática, para *visualizar argumentos* que permitan resignificar los criterios de semejanza de triángulos; en particular el Teorema de Thales.

Comportamiento de las curvas a través de las subtangentes

En su investigación, Castañeda (2004) presentó un estudio sobre el complejo proceso en la construcción del discurso escolar del cálculo en las obras de difusión: el Analyse des infiniment petits, del marqués L´Hospital y el Analitiche Institutioni, de Maria Gaetana Agnesi. De forma particular se aborda el estudio de la evolución del tratamiento del punto de inflexión y se destaca de forma amplia el tratamiento que estos autores le dan a ciertas ideas, como la de máximo de una función usando la subtangente. Para este diseño se decidió utilizar el pizarrón electrónico como herramienta tecnológica, ya que su utilización tiene como características, la sensibilidad al tacto. Esta cualidad permite controlar la exposición directamente desde la pantalla del pizarrón electrónico como si se estuviera utilizando el ratón o el teclado; se puede desplegar información y ejecutar programas de aplicación contenidos en la computadora, como se muestra en las siguiente imagen (ver figura 1):

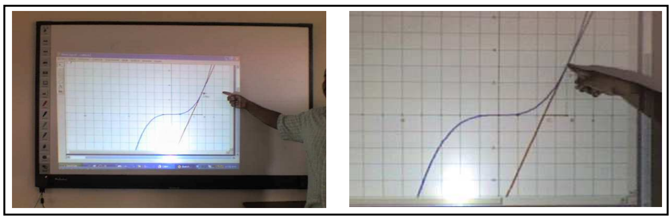


Figura 1. Uso del pizarrón electrónico

El uso del pizarrón electrónico está apoyado en el empleo del software apropiado, como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*, además de que las construcciones del diseño se proporcionan al estudiante. Una de las ventajas que observamos al hacer las construcciones por computadora apoyados en los software mencionados y no de manera tradicional utilizando lápiz y papel, es la libre manipulación y verificación de la construcción, además, de las ventajas que proporcionan las múltiples realizaciones y hacer ajustes en las construcciones para producir un resultado deseado. El diseño propone el establecimiento de un vínculo entre la magnitud de la subtangente y el comportamiento de las curvas dadas. Es decir, pretende incorporar la caracterización del máximo, mínimo o punto de inflexión de una función a través del comportamiento y variación de las subtangentes (ver figura 2).

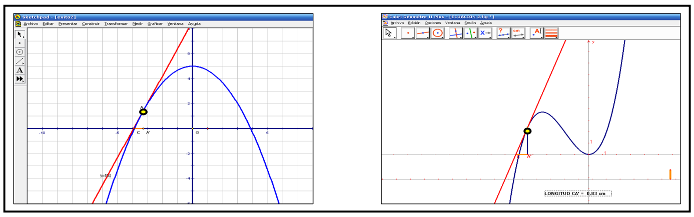


Figura 2. Construcciones con Cabri Geometre y Geometer's Sketchpad

Con el diseño se favorece la manipulación de los elementos geométricos, ya que al variar la magnitud de la abscisa, el sistema geométrico que se ha definido en la curva se modifica y sus cambios son susceptibles a ser cuantificados, más aún cuando la manipulación puede hacerse de forma automática al hacer uso de las herramientas que ofrecen paquetes computacionales como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*, además de las bondades del pizarrón electrónico mencionadas anteriormente.

Área bajo la curva

Nuestra propuesta basándonos en la investigación de Cordero (1998, 2003 y 2005), es la elaboración de un diseño didáctico que nos permita retomar la noción de acumulación para abordar el área bajo la curva. En el diseño didáctico se propone el manejo del área de un cuadrilátero (figuras 3a, 3b, 3c y 3d) de forma dinámica a fin de que dicha área pueda ser vista como una función, una función de la variable *lado*. Se generan regiones en el plano por medio de desigualdades para después visualizar primero cómo se modifica el área al cambiar una de las desigualdades que le dio origen y se analiza numéricamente cómo varía el área por medio de tablas que se generan con los datos correspondientes a la base y altura de la región (ver figura 4a y 4b).

El objetivo del diseño es que mediante aspectos visuales y numéricos de las funciones y en un escenario de variación facilitado por la calculadora se pueda concebir que el área es una función.

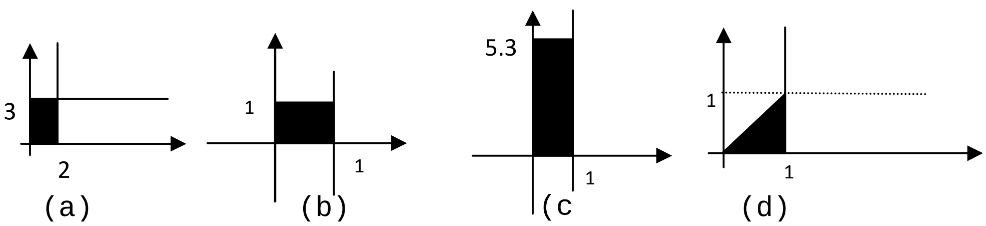
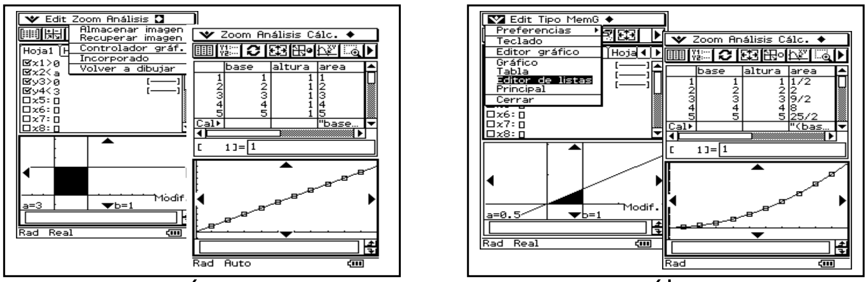


Figura 3. Regiones en el plano



(a (b

Figura 4. Regiones en el plano y uso de la calculadora

La visualización en los criterios de semejanza

Para este diseño, usamos como fundamento teórico investigaciones que abordan el uso de semejanza de triángulos y proporcionalidad (Cantoral, 2004; Patricio, García y Arrieta, 2005). En su investigación Cantoral narra una experiencia en el aula, donde un profesor supone: 1) que la proporcionalidad, derivada de la semejanza, es una propiedad bajo el control del estudiante y 2) que la noción de pendiente, como una propiedad invariante de la recta está estabilizada en la mente de sus estudiantes. Además reporta que estudios recientes, muestran lo inexacto de este punto de vista.

Patricio, García y Arrieta (2005) reportan que aún cuando se introduce como razón trigonométrica el seno, dicha razón queda desligada de la práctica de hacer semejanza con triángulos. Confirman con su estudio que la semejanza no es un argumento para determinar el seno de un ángulo. El discurso indica que el "conocimiento" que han adquirido en el contexto escolar no es utilizado.

Con base en estas investigaciones, nosotros proponemos analizar las proporciones en las construcciones geométricas elaboradas con la calculadora graficadora a fin de resignificar criterios de semejanza entre triángulos. En este diseño se propone como primer paso la construcción de una figura compuesta por las recta AB y AC que comparten el mismo punto A. La recta DE cruza a las dos anteriores de cualquier manera. Enseguida, se dibuja una recta paralela a DE de tal manera que también cruce por las rectas AB y AC. De tal forma que han construido dos triángulos: AGH y AFI (Ver figura 5a y 5b). Realizamos el análisis de algunas propiedades que se presentan en esta construcción. Para ello, se generan varios triángulos más con el vértice común A, creando otras rectas paralelas a través del menú dinámico de la calculadora (figura 5c), y como último paso, se realiza la comparación y análisis de de las proporciones $\frac{AG}{AH}$ y $\frac{AF}{AI}$ tomando en cuenta que AF y AI son de todos los triángulos formados (figura 5d). En la construcción presentada podemos ver que: $\frac{AF_1}{AI_1} = \frac{AF_2}{AI_2} = \frac{AF_3}{AI_3} = \ldots$ Esta igualdad surge por la semejanza de los triángulos implicados (ver figura 5d).

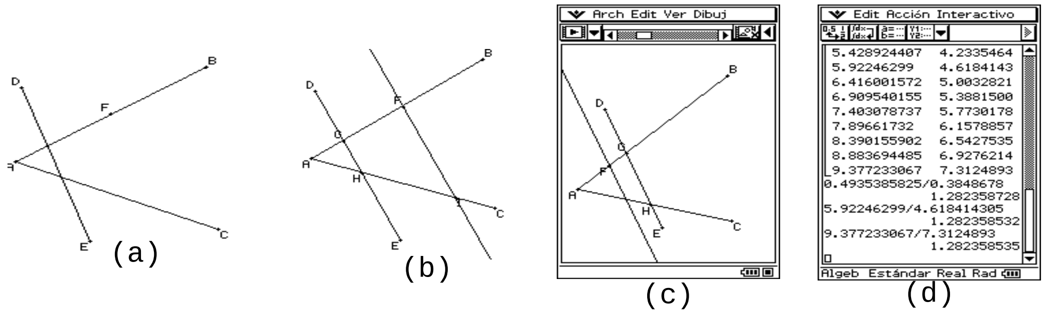


Figura 5. Construcción de la figura y el trabajo con la calculadora

La calculadora se percibe como una herramienta que favorece habilidades de visualización. Para el caso de este diseño, se utilizó el menú dinámico de la calculadora: además de facilitar la medición de gran número de segmentos, permite percibir una figura geométrica no estática. El comportamiento que puede visualizarse en la gráfica fundamenta argumentos para darle signficado a los criterios de semejanza de triángulos; en particular el Teorema de Thales.

Conclusiones

La intención de este trabajo ha sido establecer un vínculo entre la matemática escolar y los resultados de investigaciones de corte Socioepistemológico a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología, ya que consideramos que éstos nos permiten mostrar aspectos que favorecen la generación de significados para diferentes saberes matemáticos.

Con esto lo que se pretende es hacer evidente que desde el marco teórico que sustenta este estudio, es posible mirar que el avance de la tecnología no es un obstáculo para la matemática escolar, si no por el contrario es una herramienta de utilidad que brinda muchas y diversas posibilidades en cuanto a su aplicación y uso en el aula de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.1-9). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13*.(pp. 54-62). México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Instituto Politécnico Nacional.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(1), 56-74.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8 (3), 265-286.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. In R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). D. F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Patricio, H., García, C. y Arrieta, J. (2005). Las Prácticas de Hacer Semejanzas en los Triángulos y la Emergencia de las Razones Trigonométricas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.). *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa 18.(pp. 619-624). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Ursini, S. (2006) ECAMM y EMAT en Telesecundaria. pp. 159-166. En Rojano, T. (ed.) *Enseñanza de las Física y las Matemática con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el a*ula. Organización de Estados Iberoamericanos y Secretaría de Educación Pública. México. ISBN 970-790-885-8. Extraído el 25 de Enero de 2007 desde http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/downloads/libros/ematefit/capitulo%206.pdf

ENSEÑANDO MATEMÁTICAS CON NUEVAS TECNOLOGÍAS

Edgar Altamirano, José E. Marmolejo, Raúl A. Mojica
Universidad Autónoma de Guerrero México
edgar@altamirano.biz
Campo de investigación: Educación a distancia Nivel: Superior

Resumen. *En este artículo se describe el uso de las nuevas tecnologías Web en la enseñanza de las Matemáticas. Específicamente se hace referencia a las plataformas Moodle y Second Life como apoyo al curso de Lógica Matemática que se imparte en el tercer semestre de la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero. Moodle es una plataforma crecientemente utilizada para crear y administrar aulas virtuales. El uso de Moodle facilita una orientación constructivista de la educación ya que permite aplicar diversos recursos y actividades educativas agregando casi cualquier contenido Web en nuestros cursos. Second Life es una plataforma de mundos virtuales en línea utilizada por las Universidades para la creación y experimentación de campus virtuales para la educación a distancia*

Palabras clave: educación a distancia, enseñanza de las matemáticas, nuevas tecnologías

Introducción

Se puede entender a las nuevas tecnologías de la información y comunicación (NTIC) como un conjunto de aparatos, redes y servicios que se integran en un sistema de información interconectado y complementario. La innovación tecnológica consiste en que se eliminan las fronteras entre los elementos para conformar un sistema integrado. Las NTIC (Altamirano, 2008; Seppala, Caprotti y Xambo, 2006) se han convertido en herramientas importantes para la Educación en todos los niveles, pero sobre todo, inducen un cambio en los modelos Pedagógicos, de un enfoque centrado en el docente a otro basado en la participación activa de los estudiantes. Estas tecnologías aportan canales síncronos y asíncronos de alcance mundial. Con su integración a los Centros Educativos los estudiantes están en posibilidades de participar activamente en los procesos de enseñanza aprendizaje, haciéndose corresponsables de su formación profesional. Sin embargo, y como es lógico, las tecnologías resultarán sin sentido si no están incorporadas a los procesos educativos mediante una clara planeación pedagógica que las incorpore apropiadamente para hacer más eficiente la educación en el siglo XXI.

En este artículo se describe el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas. Específicamente se hace referencia a las plataformas Moodle y Second Life como apoyo al curso de Lógica Matemática que se imparte en el tercer semestre de la licenciatura en Matemáticas. Se utiliza Moodle para crear una Aula virtual; esta Aula virtual permite integrar recursos y actividades de Internet en una sola plataforma. El artículo está organizado de la forma siguiente: en la sección dos se resume el uso de las tecnologías Web 2.0 comprendidas en la Aula virtual. En la sección tres se presenta brevemente el mundo virtual denominado Second Life y en la sección cuatro se describe el curso de Lógica Matemática que se imparte simultáneamente a tres grupos de estudiantes universitarios, dos grupos situados en Colombia y uno en México. Finalmente se presentan las conclusiones que hemos derivado hasta el momento.

Tecnologías Web 2.0

La virtualización es el proceso de representar electrónicamente y en formato digital, objetos y procesos del mundo real. La virtualización en la educación superior consiste en la representación de los procesos y objetos asociados a la investigación, extensión, gestión, difusión, comunicación, enseñanza y aprendizaje. Un campus virtual es una metáfora para un ambiente electrónico de enseñanza, aprendizaje e investigación creado por la convergencia de tecnologías de la información y la comunicación. Los cambios de paradigma inherentes a este nuevo ambiente tienen implicaciones en la enseñanza, investigación, administración, financiamiento y en la creación de una nueva cultura de la calidad académica universitaria.

Moodle (http://moodle.org) es una plataforma de libre acceso usada para gestionar el aprendizaje a distancia. Se diseñó para ayudar a los educadores a crear y administrar cursos en línea enfatizando la interacción docente-estudiante y estudiante-estudiante. Su entorno de aprendizaje está basado en los principios pedagógicos constructivistas con un diseño modular que facilita la agregación de contenidos. En diciembre de 2007 existían más de 36,000 plataformas Moodle instaladas en todo el mundo (http://moodle.org/stats/). En México se contabilizaron más de 600 aplicaciones en diversas instituciones. En la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero se cuenta con un sitio Web basado en Moodle. Véase la figura 1 (http://www.cerv.biz/moodle1/).

Figura 1. Sitio Web basado en Moodle

Wikis. Un Wiki es un pizarrón electrónico en Internet que puede ser compartido por muchos usuarios. Además tiene otras propiedades. Los Wikis se utilizan para crear sitios Web cooperativos. Algunos educadores han señalado que pueden llegar a ser utilizados como libros de texto en línea. En el curso de Lógica Matemática los estudiantes crean y discuten temas importantes como la demostración en la lógica de proposiciones y construyen colectivamente definiciones de conceptos importantes.

Podcast. El Podcasting permite que los estudiantes cuenten con grabaciones de audio de sus clases de Matemáticas en sus iPods, mp3, teléfonos celulares y computadoras portátiles. Hacer Podcasting consiste en generar archivos de audio, generalmente en formato mp3 que se distribuyen mediante un programa reproductor de audio como iTunes para que éstos sean descargados automáticamente y reproducidos en el momento que se desea.

Tecnología Texto a Voz. Permite a los educadores generar audio libros y también puede utilizarse en el aula directamente para hacer más amena la clase y ayudar al docente en su trabajo diario;

por ejemplo, si se guarda en un archivo de texto lo que se planea explicar en cada diapositiva, el programa convertidor de Texto a Voz leé el texto escrito en ese momento o puede generar el audio en alguno de los formatos usuales, de tal manera que el docente está en posibilidades de mejorar siempre sus explicaciones y perfeccionarlas. En las clases de Lógica Matemática se ha experimentado con los programas TextAloud, ReadPlease y Next-Up Talker junto con voces masculinas y femeninas en español para generar los audios correspondientes.

Videos. En la actualidad es posibe crear videos educativos de varias maneras. Si se cuenta con una computadora personal y algún programa generador de video como CamStudio o Camtasia es posible generar videos digitales capturando todo lo que se presenta en la pantalla de la computadora, incluyendo el audio. Estos videos pueden editarse con el objeto de desarrollar cursos completos y explicaciones de temas importantes. También es útil apoyarse en una pequeña cámara digital para grabar clases y presentaciones de los estudiantes y alojarlas en sitios como Youtube (http://youtube.com) con el propósito de revisarlas y que éstas pudieran ser mejorarse.

Tecnologías Web 3.0

Los mundos virtuales representan un medio nuevo y poderoso para el desarrollo de la educación a distancia y como tal ha sido abordado por numerosas instituciones educativas en todo el mundo. Actualmente, se puede hablar de ventajas y desventajas inherentes a su uso como un medio formal en los procesos de enseñanza-aprendizaje, pero es innegable su apuesta de futuro en la educación formal e informal que transita ahora en tres estadías para la educación igualmente importantes: presencial, semi presencial y no presencial.

Algunas características importantes de los mundos virtuales son:

- Espacio compartido: participan muchos usuarios simultáneamente
- Interfaz gráfica: ambientes 3D inmersivos
- Inmediatez: la interacción tiene lugar en tiempo real
- Interactividad: los usuarios pueden crear, modificar y poseer contenidos virtuales
- Persistencia: el mundo existe estén o no presentes los usuarios que lo han creado.

- Comunidades: permite y alienta la formación de comunidades sociales.

CERV: un Centro de Estudios sobre Realidad Virtual

El Centro de estudios sobre realidad virtual se construyó sobre de una superficie virtual de aproximadamente 12,000 metros cuadrados. En él se edificaron las siguientes instalaciones: un helipuerto de entrada accesible desde una página de internet, un auditorio principal, una sala de juntas, una residencia para estudiantes, un espacio para la enseñanza de las lenguas originarias (salón náhuatl), un museo universitario, áreas de ocio y una sala audiovisual (Altamirano, Cuevas y Martínez, 2007). Para acceder al campus es necesario instalar el programa que puede obtenerse de manera gratuita en el sitio Web de Second Life (http://secondlife.com). En la figura 2 se muestran dos momentos de uso de los mundos virtuales en las clases de Lógica Matemática: virtual y real.

Fig. 2. Conferencia y clases en y desde el mundo virtual de Second Life

Se iniciaron actividades en el campus virtual desde el mes de septiembre de 2007 para impartir asesorías a estudiantes que habiendo egresado de la licenciatura, por motivos de trabajo o lugar de residencia no podían asistir a las reuniones presenciales. Además de lo anterior, las actividades que se desarrollan actualmente pueden clasificarse en las siguientes: formación académica, investigación y desarrollo, clases, talleres y asesorías presenciales a distancia, seminarios y conferencias, difusión académica y cultural, publicaciones diversas, una estación de radio por Internet y otras.

El curso de Lógica Matemática

La asignatura de Lógica Matemática se imparte en el tercer semestre de la licenciatura en Matemáticas. Su contenido se puede sintetizar en los tres siguientes apartados: lógica de proposiciones, lógica de predicados y programación lógica. Los materiales (recursos y actividades) del curso se encuentran disponibles en el sitio web de la institución (http://cerv.biz/moodle1/) dispuesto para el mismo. En la figura 3 se muestra el portal de entrada al curso de Lógica.

Figura 3. Portada del curso de Lógica Matemática

La asignatura se imparte actualmente en una modalidad extraterritorial: se han matriculado en el sitio web tres grupos de estudiantes: dos de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia y uno de la Universidad Autónoma de Guerrero haciendo un total de 96 estudiantes, 26 de México y 70 de Colombia. Los profesores titulares de ambas asignaturas se reunieron previamente en la ciudad de Bogotá para discutir la viabilidad de impartir un mismo curso en ambos países, así como homogeneizar si fuera posible, el material de estudio. Se diseñó el espacio web desde donde se administra la asignatura, Se planearon las actividades principales a desarrollar durante el semestre como son: tareas, talleres, ejercicios, material complementario, enlaces a recursos de Internet y el uso de tecnologías Web como son los Wikis, podcasts, lecciones y otros.

Al momento de escribir el artículo se había concluído la parte de Lógica Proposicional habiendo realizado ya el exámen correspondiente. Se realizaron también dos reuniones de evaluación en ambos países, para conocer la opinión de los estudiantes. Los resultados de esta reunión son alentadoras en el sentido de que los alumnos consideran especialmente motivante compartir un aula virtual con compañeros de otros países y trabajar con ellos en la resolución de las tareas. En la figura 4 se muestra el grupo de México y uno de los grupos de Colombia matriculados en el curso de Lógica Matemática para el semestre agosto-enero 2008-2009.

Figura 4. Estudiantes de México y Colombia

En lo que corresponde al campus virtual en Second Life, se impartió una conferencia sobre Lógica de Proposiciones. El propósito fue experimentar el uso de videoconferencias mediante mundos virtuales, aunque ésta opción sigue siendo atractiva y de muy bajo costo, requiere sin embargo de conexiones a Internet con banda ancha y equipos de computación y accesorios (micrófono y auriculares) de buena calidad, por lo que no ha resultado efectivo, sin embargo la experiencia ha mostrado que las plataformas de mundos virtuales representan un recurso educativo que no puede dejarse de lado en la educación virtual. Es de hacer notar que el campus se utiliza con éxito para impartir asesorías extra-clase y se utiliza también como apoyo de la asignatura de tecnologías para la educación.

Conclusiones

La enseñanza en un mundo globalizado requiere de un nuevo modelo docente con experiencia en Educación y tecnologías. Las plataformas gestoras de cursos como Moodle y Second Life por sí mismas incorporan nuevas posibilidades de enseñanza que no se pueden experimentar en las clases presenciales acostumbradas. Para la habilitación de docentes y estudiantes se requiere de un proceso basado en tres etapas: establecimiento de una infraestructura adecuada, aprendizaje de las herramientas y desarrollo de habilidades particulares en el uso de las mismas. Este proceso puede ser un problema difícil si no se cuenta con una motivación y decisión suficiente para realizar el trabajo. La educación en el siglo XXI requiere de los docentes la transferencia del control del aprendizaje a los estudiantes y esto no es un proceso fácil ni rápido de asimilar, por lo que se requiere de una decisión y motivación permanentes.

Referencias bibliográficas

Altamirano, E. (2008). NTIC en el aula: una experiencia personal. *Memorias del VI Congreso Internacional de Educación Superior*, La Habana, Cuba.

Altamirano, E., Cuevas, R. E. y Martínez, J. M. (2007). Mundos virtuales en-línea en los procesos de enseñanza-aprendizaje. *Memorias del XXIII Simposio Internacional de Computación en la Educación*, Michoacán. México.

Seppala, M., Caprotti, O., y Xambo, S. (2006). Using Web Technologies to Teach Mathematics. En Crawford, C. y otros. (eds.) *Proceedings of Society for Information Technology and Teacher Education International Conference*, pp. 2679-2684. Chesapeake, VA: AACE.

UN ESTUDIO ONTOSEMIÓTICO DE LA INTERACCIÓN DEL SISTEMA DIDÁCTICO CON LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Juan de Dios Viramontes Miranda, Natividad Nieto Saldaña
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez México
I
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta un estudio de la interacción del sistema didáctico con las nuevas tecnologías, el cual se aborda de manera holística a través del enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática, (Godino, 2003). Aquí se da cuenta de los resultados que se obtuvieron en una investigación que se llevó a cabo en aproximadamente un año (agosto 2007 a mayo 2008) con aspirantes de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ). La investigación se dividió en dos partes. En la primera se diseñaron actividades de aprendizaje en papel acompañadas de sus respectivos archivos elaborados con el software Cabri II Plus® que se aplicaron a aspirantes de la Universidad, se analizaron los resultados y se detectaron conflictos semióticos. En la segunda parte se rediseñaron las actividades y se confrontó el significado personal. Se llegó a la conclusión de la necesidad de implementar una génesis instrumental para que la tecnología pueda ser eficiente como herramienta de trabajo didáctico.*

Palabras clave: ontosemiótica, nuevas tecnologías, génesis instrumental, sistema didáctico

1. Introducción

La necesidad de entender nuestro entorno educativo nos motiva a la investigación de los fenómenos que impactan nuestro quehacer diario como docentes del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la UACJ. En este informe se reportan los resultados de la investigación realizada durante el periodo de agosto de 2007 a mayo de 2008, en la cual se observó la interacción del software Cabri II Plus® con estudiantes de dicho Instituto, utilizando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Este marco nos permite hacer referencia a la realidad didáctica en términos de una red de funciones semióticas que buscan explicar los conflictos semióticos a través de la negociación de significados, dando así una herramienta útil para la caractrización de los fenómenos educativos propios de la clase de matemáticas.

2. Marco conceptual

Este trabajo está fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (llamado EOS en delante), creado por Juan D. Godino y Carmen Batanero, el cual ha sido desarrollado por colaboradores entre los cuales destaca Vicenç Font. Este modelo teórico de la Didáctica de la Matemática nace de la necesidad de construir un paradigma que sirva para fundamentar los estudios didácticos y que a su vez incluya a los modelos más acabados como la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de Chevallard (1992) y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990).

Se iniciará con una explicación de este enfoque de la Didáctica de las Matemáticas, para así aclarar su uso como fundamento teórico y mostrar la pertinencia del mismo como fuente de los modelos metodológicos de análisis de los procesos de enseñanza.

Esta posición teórica se divide en tres partes:

a) *Teoría de los significados sistémicos.*

Este enfoque toma como punto de partida la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que toma en cuenta a la matemática como actividad de resolución de problemas, que es socialmente compartida, su uso como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. (Godino, et al., 2006, p. 5)

El concepto de situación – problema, se toma como noción primitiva y con ella define el concepto de práctica en Godino, 2003. Con esta noción de práctica se pretende explicitar donde hay que observar los fenómenos didácticos, que de alguna manera se presentan intangibles.

Los objetos matemáticos se consideran desde dos facetas complementarias dando lugar a reconocer al objeto institucional y al objeto personal, los cuales se ven como emergentes del sistema de prácticas (institucionales o personales) asociadas a un campo de problemas, dicha emergencia es entendida como progresiva o gradual a lo largo del tiempo. (Godino, 2003)

El EOS introduce la noción de significado partiendo de una relatividad socioepistémica y cognitiva, entendido como el sistema de prácticas personales o institucionales asociadas a un campo de problemas, permitiendo introducir el estudio de los sistemas de prácticas sociales y personales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución a través del tiempo. (Godino, 2003)

Se propone una tipología básica de los significados, en el caso de los significados institucionales se tienen los tipos, (Godino, 2006): referencial, pretendido, implementado y evaluado.

Ahora bien, en el caso de los significados personales se tiene los tipos, (Godino, et al., 2006): global, declarado y logrado.

También los objetos matemáticos que emergen de los sistemas de prácticas se clasifican con una tipología, en la cual se distinguen los siguientes tipos (Godino, et al., 2006): lenguaje, situaciones – problemas, conceptos – definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

b) Teoría de las funciones semióticas.

En esta parte del EOS se presenta una herramienta de análisis de las relaciones entre los objetos matemáticos y los juegos de lenguaje en los que participan. Esta herramienta es la función semiótica que es la dependencia entre un texto y sus componentes entre sí, se puede concebir como una correspondencia entre el plano de expresión (objeto inicial, signo), el plano de contenido (objeto final, significado del signo) y un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y de contendido (Godino, 2003).

Como comenta Godino (2003), la noción de función semiótica permite entender el conocimiento y la comprensión en términos de las funciones semióticas que un sujeto pueda establecer, sea éste una persona o una institución, dando así una interpretación del entendimiento de un objeto matemático como una serie de funciones semióticas que establecen la correspondencia entre un plano de expresión y uno de contenido.

Una ampliación importante de los diferentes triángulos semióticos o epistemológicos es que la función semiótica puede tener como objeto inicial y como objeto final a los tipos de objetos matemáticos enlistados anteriormente, lo cual permite clasificarlas, según su plano de contenido (significado) en (Godino, 2003, p. 152 – 154):

- *Significado lingüístico*
- *Significado situacional*
- *Significado conceptual*

- *Significado proposicional*
- *Significado actuativo*
- *Significado argumentativo*

c) *Teoría de las configuraciones didácticas.*

En esta parte del EOS se presenta una manera de modelar los procesos de instrucción mediante distintas dimensiones interconectadas, y como procesos estocásticos, con sus correspondientes trayectorias muestrales, las cuales se enlistan a continuación (Godino, 2003, p. 180, 181):

- *Trayectoria epistémica*
- *Trayectoria docente*
- *Trayectoria discente*
- *Trayectoria mediacional*
- *Trayectoria cognitiva*
- *Trayectoria emocional*

Otra noción importante es la de configuración didáctica que es "*la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación – problema*" (Godino, 2003, p. 202), estas configuraciones didácticas pueden ser teóricas o empíricas, las primeras son aquellas que de antemano se diseñan para su implementación y las segundas las que efectivamente y de manera natural se pueden observar en un salón de clases. Cabe mencionar que aquí se amplia la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, ya que se proponen cuatro configuraciones didácticas teóricas: a – didácticas, magistrales, personales y dialógicas, la primera corresponde a la homónima en la teoría mencionada, la segunda a la clase tradicional, la tercera a aquella en la cual la actividad del estudiante es preponderante y la cuarta a la que se desarrolla por medio de un intercambio de opiniones entre alumno y maestro.

3. Metodología

La metodología emerge de la necesidad de observar la interacción del sistema didáctico con el software que se utiliza en esta ocasión.

En el estudio participaron 347 aspirantes al Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, inscritos al Curso de Nivelación Académica (en delante, CUNA), el cual es previo a las materias de sus respectivas carreras.

Primero se diseñaron a priori actividades de aprendizaje en torno a los conceptos de función, límite, derivada y al proceso de optimización. Cada actividad contenía una fuerte dosis de interacción del estudiante con el software, ya que las preguntas hacían referencia a éste. En segundo lugar se pusieron en práctica las actividades dirigidas por un profesor por grupo.

Finalmente se observaron y caracterizaron los conflíctos semióticos en la interacción, para así después rediseñar las actividades con base en los conflictos detectados. En el registro de las observaciones se utilizaron cámaras de video, el registro de notas de campo de tres estudiantes de la licenciatura en matemáticas del Instituto y los comentarios extra clase de los profesores involucrados en la experimentación.

Para el análisis de datos se utilizó el diseño de las trayectorias epistémicas, docentes y discentes de cada grupo participante.

4. Resultados

Se hicieron las trayectorias epistémicas, docentes y discentes de los grupos y se evidenciaron ciertos conflictos semióticos.

Para el análisis de los datos obtenidos se utilizó la codificación que propone Godino (2003), donde E3 denota un estado en la trayectoria epistémica de tipo lingüístico, E4 uno tipo conceptual y E6 un tipo argumentativo, así mismo para la trayectoria docente se tiene que P2 denota un estado de tipo motivacional, P3 de tipo asignación de tareas y finalmente P4 de regulación.

En la Figura 1 se muestra un ejemplo de una trayectoria epistémica, la cual nos ayudó (como todas las demás) a caracterizar los objetos matemáticos involucrados en la instrucción. Aquí se pueden observar las unidades epistémicas que dan pie al análisis de los resultados, mostrando por ejemplo algunos conflictos semióticos presentes en el desarrollo de las actividades por parte de los profesores.

U. Natural	C. Epistémica	U. Epistémica	Descripción	Estado
14	C.E. 1	1	Evocación del concepto de intervalo	E4
16	C.E. 2	2	Transcripción del comportamiento como fórmula	E3
18	C.E.2	3	Se argumenta los términos de área y el uso de variables	E6
20	C.E. 2	4	Uso de la notación X=AD, Y=AB	E3
22	C.E. 2	5	Uso de la variable Y en terminos de X	E3

Fig. 1

En la Figura 2 se presenta una trayectoria docente donde se observa la participación del profesor en la negociación de significados y en la motivación del estudiante. Estas trayectorias fueron determinantes para el estudio ya que arrojaron evidencia de la necesidad de la distinción entre los procesos de familiarización del software y los de la puesta en práctica de las actividades de aprendizaje. Además que resultó muy útil el uso de las técnicas de análisis de las trayectorias ya que se logró observar en un nivel microdidáctico las respectivas clases.

Es importante aclarar que en el análisis de la información se integraron las notas de campo de los investigadores.

Se concluyó la falta de coherencia entre lo propuesto por el software y la dirección de la actividad por parte del profesor, por ejemplo, se observó básicamente tres tipos de formas de trabajo, el profesor dejó la actividad al alumno, otros resolvieron las actividades y los estudiantes los seguían, y finalmente otros que condujeron la actividad de manera más acorde a la intencionalidad original de la práctica.También se observó que influyó la falta de capacitación de los estudiantes en el manejo del software, y esto aunque parece trivial es una experiencia de resultados empíricos de investigación local que da vitalidad y dirección a las intervenciones didácticas que se generan en el posgrado de matemática educativa.

U. Natural	C. Epistémica	U. Docente	Descripción	Estado
1 a 4	C.E. 1	1	Asignación de tarea, apoyados en Cabri	P3
5	C.E. 2	2	Determinar el reparto del tiempo en clase	P3
7	C.E.3	3	Estimula la individualidad	P2
14	C.E.4	4	Recuerdo de conocimiento previo (intervalo)	P4
16	C.E. 5	5	Planteamento de descripción alg. Y en término de X	P3
22	C.E. 6	6	Motivar con "tu te puedes ayudar...".	P2

Fig. 2

Con base en estos resultados de investigación se replantearon los siguientes cursos CUNA del Instituto, y se generó un curso de capacitación para los docentes en términos de diseño y conducción de actividades de aprendizaje, las cuales se investigarán como parte de un proyecto a largo plazo del programa de posgrado de matemática educativa de la universidad.

Referencias bibliográficas

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fundamentaux de la didactique: perspectives apportées par approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12(1)*, 73-112.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico - semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Extraído desde http://www.ugr.es//local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Extraído desde: http://www.ugr.es//local/jgodino.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactiques des mathématiques 10 (2,3)*, 133-170.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN UN CONTEXTO COMPUTACIONAL

María del Carmen Bonilla Tumialán
Pontificia Universidad Católica del Perú Perú
mc_bonilla@hotmail.com, mbonilla@pucp.edu.pe
Campo de investigación: Epistemología, Visualización Nivel: Medio

Resumen. *El problema de investigación se plantea en cómo utilizar el Cabri II Plus para lograr la transposición didáctica de la noción de límite a contextos computacionales, transposición informática (Balacheff, 1994). Construyendo límites de sucesiones y límites de funciones, visualizamos el concepto permitiendo la comprensión de la definición formal, la validación de propiedades y enunciados matemáticos y la activación de un proceso cognitivo marcado por la relación dialéctica entre percepción y conceptualización durante la interacción con la interfase del sistema (Moreno, 2002), promoviendo una transformación a nivel epistemológico de la experiencia matemática del estudiante. Las actividades propuestas articulan las representaciones algebraicas, gráficas y numéricas de la noción de límite, a través del movimiento, visualizando el cambio gracias a la geometría dinámica.*

Palabras clave: transposición informática, experimentación, noción de límite

Introducción

Numerosas investigaciones constatan el fracaso de las aproximaciones teóricas y formales que se desarrollaron en el contexto de las matemáticas modernas, y de las estrategias de enseñanza usuales, que reducen el Análisis a un cálculo algebraico algoritmizado (Artigue, 1998). La dificultad de los alumnos para entrar al campo conceptual del cálculo ha generado numerosos trabajos que analizan las causas de esta problemática (Artigue, 1995), como el no partir de problemas al introducir las nociones, el empleo temprano de un lenguaje formalizado y una enseñanza centrada en el discurso del profesor.

El desarrollo de la práctica de la matemática en las tres últimas décadas ha establecido nuevos tipos de prueba y argumentación, cambiándose las normas establecidas en el área (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006). Los cambios se han producido por el uso de las computadoras (como recurso heurístico o como medio de verificación), por un nuevo tipo de relación de las matemáticas con la tecnología, y por un fuerte inconsciente en la naturaleza social de los procesos que guían la aceptación de una prueba. Estos cambios se han reflejado en la filosofía de la matemática.

Durante años los filósofos han tratado de definir la naturaleza de las matemáticas tomando en cuenta sus fundamentos lógicos y su estructura formal. En los últimos 40 años la búsqueda ha cambiado de dirección. El enfoque de la comprensión matemática ha cambiado profundamente. El primero en destacar estos cambios fue Imre Lakatos (1978), al considerar a las matemáticas como una ciencia cuasi-empírica. Se genera un cambio en la concepción de la matemática, considerándosela ahora como una actividad humana, histórica, que no se descubre sino se construye, que tiene como fin la resolución de problemas intra o extramatemáticos, y que debe equilibrar la exigencia del saber matemático con la exigencia del funcionamiento cognitivo del estudiante.

Marco Teórico

Con el fin de lograr la transposición informática de la noción de límite a contextos computacionales se ha articulado un conjunto de constructos teóricos correspondientes a distintos enfoques de la Educación Matemática y sus ciencias auxiliares, constructos que abordan diferentes aspectos de la práctica educativa, y que, por lo tanto, no son antagónicos sino, por el contrario, se complementan. La confluencia de los temas, su interrelación, proporcionan cimientos a la propuesta didáctica, como se puede apreciar en el esquema siguiente. (Figura 1).

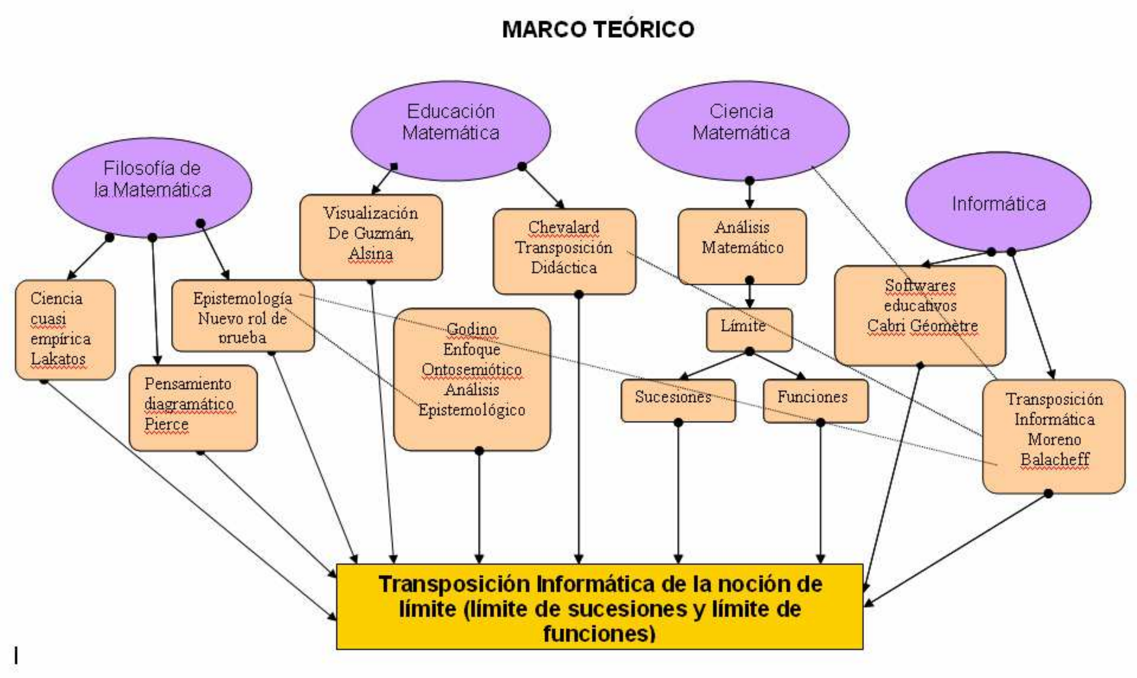


Figura 1

Propuesta Didáctica

Las actividades diseñadas en Cabri II plus corresponden a diferentes sistemas de prácticas (Godino, 2006) de la noción de límite (límite de sucesiones y límite de funciones). En un primer momento, en base a la resolución de un grupo de problemas de carácter geométrico diseñados por Hitt y Páez (2003) se procura un acercamiento intuitivo a la noción de límite de sucesiones (Figuras 2 y 3). En la segunda parte se trabaja en la construcción geométrica de la noción de límite de funciones, por intuición (figuras 4 y 5) y por entornos (figuras 6 y 7). En cada sistema de prácticas las actividades se inician básicamente con la interpretación geométrica y, en el proceso de construcción y manipulación, se articulan las representaciones aritmética y algebraica, procurando que sea el alumno quien elabore la explicación y deduzca la definición formal

Límite de sucesiones

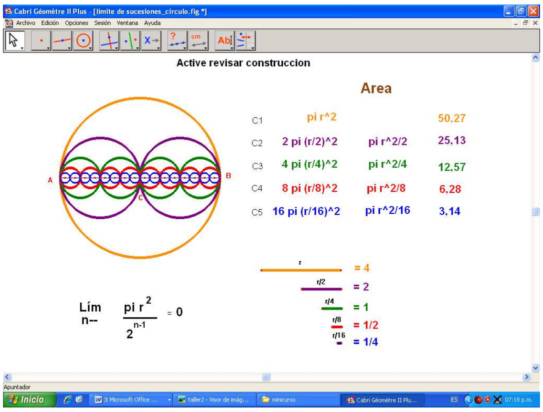


Figura 2

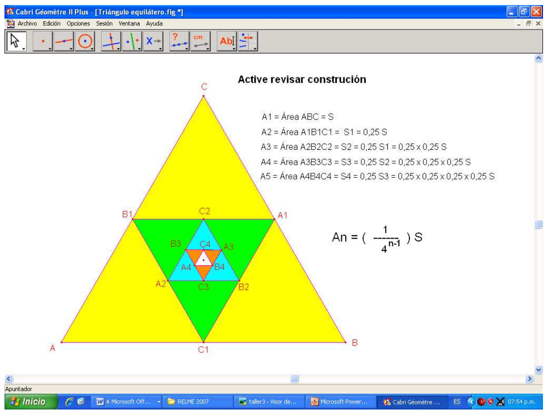


Figura 3

Límite de funciones

Por intuición

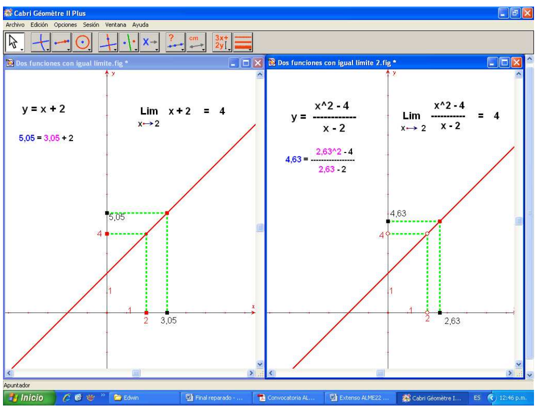


Figura 4

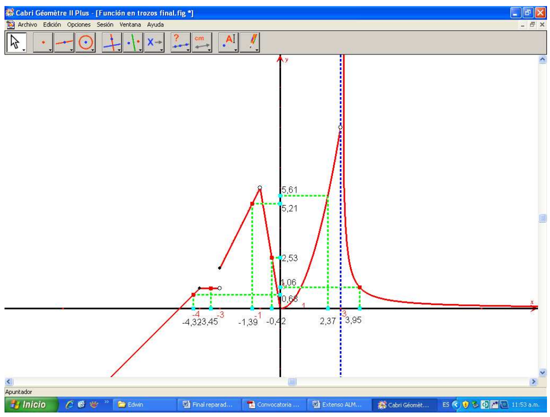


Figura 5

1755

Por entornos

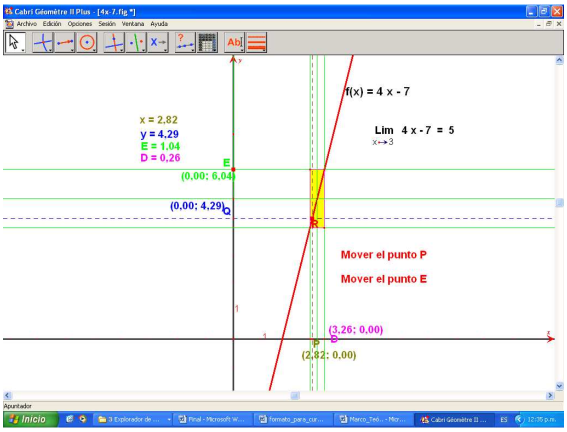


Figura 6

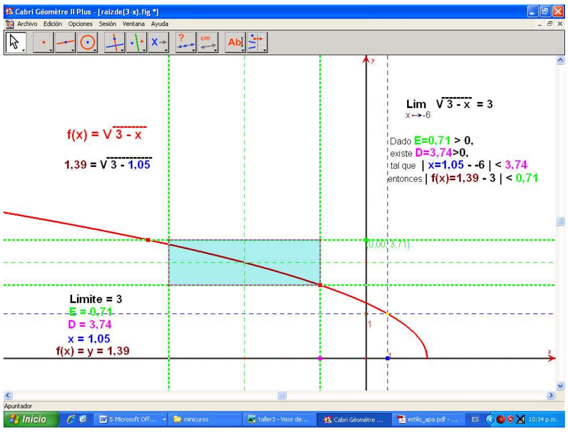


Figura 7

Objetivos de la investigación

- Elaborar el análisis epistemológico de la práctica matemática desarrollada en las actividades elaboradas en Cabri II plus sobre límites de sucesiones y límites de funciones utilizando como unidad básica de análisis a la configuración epistémica.
- Identificar dentro de las actividades propuestas a la visualización y experimentación computarizada como una forma de argumentación matemática, dentro de los recursos heurísticos.
- Analizar la repercusión de las actividades propuestas en el franqueamiento de algunas dificultades, u obstáculos epistemológicos, que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite.

Análisis epistemológico

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2006) considera en el nivel microdidáctico a las configuraciones., en este caso configuraciones epistémicas, conformadas por el lenguaje, las situaciones problema, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos, los cuales constituyen los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. A continuación se muestra la configuración epistémica de las actividades sobre límite de funciones.

Lenguaje
Verbal: Función, dominio, rango, abcisa, ordenada, entorno, lugar geométrico. Gráfico: Gráfica de una función. Simbólico: P = punto sobre el eje x, Q = punto sobre el eje y, R = punto de la función, f(x) = función, L = límite de la función, a = valor al que tiende x.
Situaciones Problema
¿Qué tan cerca de a debe estar P para garantizar que el punto Q de la función f(x) esté a una distancia de L menor que E?
Conceptos
Previos: Sistema de ejes cartesianos, función, lugar geométrico, semirrecta, recta perpendicular, distancia, coordenadas, intervalo abierto. Emergentes: Interpretación geométrica del límite de funciones. Entorno o vecindad, cambios infinitamente próximos, noción de límite de funciones. Noción analítica de igualdad.
Propiedades
Completitud de los números reales. Propiedades de la distancia. Propiedades de las desigualdades. Asociación de la recta real con los números reales.
Argumentos Heurísticos
Visualización. Manipulación virtual. Verificación. Experimentación computarizada.
Procedimientos
Construcción de la gráfica de la función. Construcción gráfica de las vecindades alrededor de a y L. Visualización intuitiva del límite por el desplazamiento del punto en la función.

Argumentación matemática

Hanna (1996) señala que con el uso de la computadora en la práctica de la matemática hay un número creciente de matemáticos que trabajan fuera de los confines de la demostración deductiva, confirmando experimentalmente propiedades matemáticas, de ahí que los métodos experimentales han adquirido una nueva respetabilidad. Se aprecia cada vez más la potencia de la computadora para *comunicar* conceptos matemáticos. Las matemáticas experimentales también juegan un papel en el descubrimiento de demostraciones formales, no las eliminan. Tal vez la pregunta importante que debemos hacernos hoy no es '¿Cómo demuestran los matemáticos los teoremas?', sino, ¿Cómo ellos hacen progresar la comprensión de la matemática en el hombre? El docente es quien juzga si vale la pena darle más atención a la demostración para promover el objetivo didáctico de la comprensión.

En ese contexto las actividades propuestas no persiguen reemplazar la demostración formal de las nociones, sino procurar una mayor comprensión de su definición y demostración formal, proporcionando inicialmente una argumentación matemática heurística. Las actividades tienen un carácter experimental que transita por el camino del descubrimiento. Se procura la visualización del concepto, la verificación de las propiedades y la manipulación de los objetos matemáticos representados con ayuda del software. La experimentación computarizada ha producido un impacto epistemológico (Moreno, 2002), pues favorece la comprensión y explicación de los conceptos y procesos matemáticos, debido principalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos, dándoseles un alma propia. El Cabri II plus constituye un manipulable virtual que facilita el aprendizaje, y que tiene la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver e imposible de imaginar, pues ayuda a pasar del nivel concreto al abstracto de una forma más sencilla (Eduteka, 2003).

Efectos en las dificultades en el aprendizaje de la noción de límite

Una dificultad presente en la comprensión de toda noción matemática es la de articular los diferentes registros semióticos (escrito, verbal, gráfico, gestual, material). Bosch (2000) nos señala la no diferenciación entre registros desde el punto de vista de su función en el trabajo matemático. Todos tienen igual valor. Es más, según Blázquez (2001), dominar un concepto consiste en conocer sus principales representaciones y traducir unas en otras. Las actividades propuestas consiguen articular en forma simultánea representaciones algebraicas, gráficas y numéricas de la noción de límite a través del movimiento.

Otro aspecto que también corresponde al aprendizaje de toda noción matemática es la flexibilidad proceso-concepto (Artigue, 1995). Existen dificultades para desarrollar la distinción entre las nociones vistas como proceso y las nociones vistas como objeto. Los objetos matemáticos presentan dos status: el operacional, dinámico, y el estructural, estático. En las actividades propuestas se aprecian los procesos de construcción de las nociones de límite, visualizando el cambio gracias al carácter dinámico del Cabri, superando así las limitaciones de la representación geométrica tradicional.

En el enfoque tradicional la formalización estándar de la noción de límite expresa una dificultad asociada a su carácter poco natural, al construirse una vecindad alrededor del límite, utilizando cuantificadores ε y δ que complejizan la definición. Desde una perspectiva histórica existe un salto cualitativo entre el manejo intuitivo de la noción de límite y la noción formalizada estándar. Esta última rompe con las concepciones previas de la noción. En las actividades sobre límite de funciones se procura establecer a través del arrastre (drag) una articulación entre las representaciones geométrica, algebraica, y aritmética de los cuantificadores ε y δ, y por ende, una mejor comprensión del enunciado formal. La geometría dinámica vence a una geometría estática que no permite ver los objetos involucrados en la noción de límite y su topología subyacente. Con la presente propuesta didáctica se busca sentar las bases para el desarrollo de una aproximación experimental e intuitiva del pensamiento analítico.

Referencia Bibliográfica

Artigue, M. (1995). La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (1)* 41 – 56.

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques 14(1-2)*, 9-42.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática 4 (*3), 219 – 236.

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* Extraído el 20 de agosto del 2006 desde http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm.

Eduteka (2003). *Los manipulables en la enseñanza de las Matemáticas.* Extraído el 06 de marzo del 2007 desde http://www.eduteka.org/ediciones/recomendado18-4a.htm

Godino, J. (2006) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Extraído el 10 de mayo del 2006 desde http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_1mayo06.pdf

Hanna, G. (1996). *El valor permanente de la demostración*. Extraído el 14 de febrero del 2008 desde http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0102.pdf

Hanna, G., Jahnke, H. y Pulte, H. (2006). *Conference Program (preliminary) of The International Conference Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Extraído el 20 de agosto del 2007 desde http://www.bew.de/bew/bew_essen/

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno 32,* 97- 108.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones, La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial, S.A..

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Naconal de Colombia.

Stewart, J. (2002). *Cálculo, conceptos y contextos*. México, D.F.: Thomson Learning.



Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2009