2010 Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

COLEGIO MEXICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.
VOL. 23 » AÑO 2010

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 23

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 23

Editora:
Patricia Lestón
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:

Eduardo Carrasco (Chile)
Rebeca Flores (México)
Elizabeth Mariscal (México)
Carlos Oropeza (México)
Hugo Parra (Venezuela)
Luis Arturo Serna (México)
Juan de Dios Viramontes (México)

Diseño de portada y CD:
Gabriela Sánchez Téllez

Diseño de interiores:
José Francisco Canché Gómez
Elizabeth Mariscal Vallarta
CICATA IPN, Legaria

Digitalización:
Juan Gabriel Molina Zavaleta
CICATA IPN, Legaria

Edición:
©2010. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-1-7

Derechos reservados.
© Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
www.clame.org.mx

Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Lestón, P. (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 23. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2008-2012

Cecilia Crespo Crespo
Presidente
presidencia@clame.org.mx

Gisela Montiel Espinosa
Tesorera
tesoreria@clame.org.mx

Olga L. Pérez González
Secretaria
secretaria@clame.org.mx

Ángela M. Martín
Vocal Caribe
vocal_caribe@clame.org.mx

Claudia M. Lara Galo
Vocal Centroamérica
vocal_centroamerica@clame.org.mx

Apolo Castañeda Alonso
Vocal Norteamérica
vocal_norteamerica@clame.org.mx

Hugo Parra Sandoval
Vocal Sudamérica
vocal_sudamerica@clame.org.mx

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de Admisión

Liliana Homilka
Leonora Díaz Moreno
Eugenio Carlos

Comisión de Promoción Académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité Internacional de Relme

Cecilia Crespo Crespo
Ángela Martín
Javier Lezama Andalón
Hugo Parra Sandoval
Olga L. Pérez González

Comité
Científico de Evaluación

Acuña Soto Claudia (*México*)
Alberto, Malva (*Argentina*)
Aparicio, Eddie (*México*)
Arcos, Ismael (*México*)
Arrieche Alvarado Mario (*Venezuela*)
Ávila Contreras Jorge (*Chile*)
Ávila Godoy, Ramiro (*México*)
Beitía, Germán (*Panamá*)
Bermúdez, Gustavo (*Uruguay*)
Beyer, Walter (*Venezuela*)
Blanco, Haydeé (*Argentina*)
Blanco, Ramón (*Cuba*)
Borello, Mariangela (*Italia*)
Buendía Abalos, Gabriela (*México*)
Cabañas Sánchez, Guadalupe (*México*)
Cadoche, Lilian (*Argentina*)
Cajas, Fernando (*Guatemala*)
Camacho, Alberto (*México*)
Campistrous, Luis (*Cuba*)
Cantoral, Ricardo (*México*)
Carlos Rodríguez, Eugenio (*Cuba*)
Carrasco, Eduardo (*Chile*)
Carrillo, Hugo (*México*)
Carrillo, José (*España*)
Castañeda, Apolo (*México*)
Castañeda Porras, Pedro (*Cuba*)
Castillo, Sandra (*Venezuela*)
Castro, Anabelle (*México*)
Ciancio, María Inés (*Argentina*)
Colin Uribe, María Patricia (*México*)
Cordero Osorio, Francisco (*México*)
Cortés Zabala, Carlos (*México*)
Covián Chávez, Olda Nadinne (*México*)
Crespo Crespo, Cecilia (*Argentina*)
Criberio Díaz, Josefina (*México*)
Cruz, Cipriano (*Venezuela*)
Dalcín, Mario (*Uruguay*)
De Faria, Edison (*Costa* Rica)
Delgado, César (*Colombia*)
Delgado Rubí, Raúl (*Cuba*)
Díaz Moreno, Leonora (*Chile*)
Dolores, Crisólogo (*México*)
Elguero, Cecilia *(Argentina*)
Engler, Adriana (*Argentina*)
Espinoza Ocotlán, Pedro (*México*)
Espinoza Ramírez, Lianggi *(Chile*)
Farfán, Rosa María (*México*)
Ferrari Escolá, Marcela (*México*)
Flores Estrada, Claudia (*México*)
Gaita Ipaguirre, Rosa Cecilia (*Perú*)
García Zatti, Mónica (*Argentina*)
Grijalva, Agustín (*México*)
Hernández Sánchez, Judith (*México*)
Homilka, Liliana (*Argentina*)
Ibarra Olmos, Silvia (*México*)
Jarero Kumul, Martha (*México*)
Lanza, Pierina (*Argentina*)
Lara Galo, Claudia (*Guatemala*)
Larios Osorio, Víctor (*México*)
Lestón, Patricia (*Argentina*)
Lezama Andalón, Javier (*México*)
Lois, Alejandro (*Argentina*)
López Flores, José Iván (*México*)
Maffey García, Silvia (*México*)
Mántica, Ana María (*Argentina*)
Marcolini Bernardi, Josefina (*España*)
Micelli, Mónica (*Argentina*)
Milevicich, Liliana (*Argentina*)
Mingüer Allec, Luz María (*México*)
Miranda Montoya, Eduardo (*México*)
Molfino, Verónica (*Uruguay*)
Molina, Juan Gabriel (*México*)
Montiel Espinosa, Gisela (*México*)
Morales, Astrid (*Chile*)
Müller, Daniela *(Argentina*)
Muñoz-Ortega, Germán (*México*)
Navarro Sandoval, Catalina (*México*)
Nesterova, Elena *(México*)

Comité
Científico de Evaluación

Ochoviet, Teresa Cristina (*Uruguay*)
Ojeda Salazar, Ana María (*México*)
Olave, Mónica (*Uruguay*)
Oliva, Elisa (*Argentina*)
Oliveira Groenwald, Claudia (*Brasil*)
Oropeza Legorreta, Carlos (*México*)
Osorio Abrego, Héctor (*Panamá*)
Parra, Hugo (*Venezuela*)
Parraguez, Marcela (*Chile*)
Pérez, Alma Rosa (*México*)
Pérez González, Olga (*Cuba*)
Pochulu, Marcel (*Argentina*)
Ponteville, Christiane (*Argentina*)
Ramos Carranza, Rogelio (*México*)
Reséndiz, Evelia (*México*)
Rey, José Luis (*Argentina*)
Rizo Cabrera, Celia (*Cuba*)
Rodríguez, Flor (*México*)
Rodríguez, Ruth (*México*)
Rodríguez, Mabel (*Argentina*)
Rodríguez de Estofán, Rosa (*Argentina*)
Rodríguez, María del Carmen (*Cuba*)
Rosado, Pilar (*México*)
Rosas Mendoza, Alejandro (*México*)
Rotaeche, Araceli (*México*)
Ruiz, Blanca (*México*)
Salat, Ramón (*México*)
Salazar, Pedro (*México*)
Salgado, Hilda (*Colombia*)
Salinas, Jesús (*México*)
Sánchez Aguilar, Mario (*México*)
Sánchez Barrera, Julio Moisés (*México*)
Sánchez Luján, Bertha Ivonne (*México*)
Sardella, Oscar (*Argentina*)
Scaglia, Sara (*Argentina*)
Serna, Luis Arturo (*México*)
Serres, Yolanda (*Venezuela*)
Sierra, Modesto (*España*)
Solís Esquinca, Miguel (*México*)
Sosa, Moguel, Landy (*México*)
Testa Rodríguez, Yacir (*Uruguay*)
Tuyub Sánchez, Isabel (*México*)
Valdivé, Carmen (*Venezuela*)
Vázquez Camacho, Rosa (*México*)
Velázquez, Santiago (*México*)
Véliz, Margarita (*Argentina*)
Ventura, Marger (*Brasil*)
Viramonte, Juan de Dios (*México*)
Vrancken, Silvia (*Argentina*)
Zúñiga, Leopoldo (*México*)

Tabla de contenidos

CAPITULO 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo: Análisis del discurso matemático escolar 3
Alberto Camacho

Estado del arte del tratamiento gubernamental y educativo de las capacidades sobresalientes en México 7
Erika Marlene Canché Góngora, Ma. Guadalupe Simón Ramos, Rosa María Farfán Márquez

Las producciones de los estudiantes sobre el concepto función en situaciones variacionales 15
Víctor Javier Pech Pech, María Guadalupe Ordaz Arjona

La demostración, un análisis desde la teoría de las representaciones sociales 23
Juan de Dios Viramontes Miranda, Gustavo Martínez Sierra

Habilidades matemáticas para el buen desempeño del ingeniero 29
Juan Pérez Rojas

Una experiencia en el desarrollo de competencias matemáticas, en cursos de estadística del área de económico administrativo de la Universidad de Sonora, México 35
Gerardo Gutiérrez Flores, Irma Nancy Larios Rodríguez, Manuel Alfredo Urrea Bernal

Construcción esquema del concepto espacio vectorial 45
Marcela Parraguez, Asuman Oktaç

Necesidad y alcance de la matemática en las ciencias sociales 55
María Rosa Rodríguez, Jesús A. Zeballos, Sandra N. Franco

La resignificación de la noción de linealidad 65
Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko

¿La actitud hacia la matemática influye en el rendimiento académico? 75
G. Abraham, A. Mena, M. R. Rodríguez, M Golbach, M. Rodríguez Anido, G. Galindo

Nociones matemáticas adquiridas y audición diferenciada: edades 18-24 años 85
Héctor Chávez Rivera, Ignacio Garnica Dovala, Ana María Ojeda Salazar

Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de álgebra: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso 95
Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora

Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e superior: a noção de sistemas de equações lineares 105
Sérgio Destácio Faro, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos

Despliegue de índices matemáticos para la evaluación del rendimiento académico 113
Adriana Correa Zeballos, Berta Chahar, María Esther Nieva, Gregorio Figueroa, Ricardo Raúl Gallo

Memoria y razonamiento 125
Ramón Blanco Sánchez, Yosbel Morales Olivera

El aprendizaje general y matemático en un estudio cualitativo en la universidad 133
Elsa Josefina Antoni

Una caracterización del tratamiento y asimilación de contenidos en los cursos de álgebra superior 143
Luisa Nataly Mukul Doblado, Martha Imelda Jarero Kumul

Elementos de historia del cálculo diferencial e integral 153
Edison De Faria Campos

Perfeccionamiento del programa de probabilidades y estadísticas vinculado a la formación de ingenieros informáticos en la universidad de las ciencias informáticas 161
Julián Sarría González, Lázaro René Izquierdo Fábregas, José L. Permuy García

Creencias de los profesores en la enseñanza de la noción de variación a través del discurso en el aula 169
Evelia Reséndiz Balderas, Analí Acevedo Hernández

A transição ensino médio e superior: a noção de retas e planos em IR^2 e IR^3 179
Marlene Alves Dias,Tânia Maria Mendonça Campos, Christianne Coletti

Análisis didáctico-matemático de un error algebraico en estudiantes y profesores 189
Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann

Reconocimiento de la identidad de la variable algebraica en estudiantes brasileños y mexicanos 197
Andrea López, Beatriz Moreno, Márcia Souza

Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso 205
Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora, Cruz Barahona

Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso 217
Marta Elena Valdemoros Álvarez

Análisis cognitivo de los alumnos al resolver problemas contextualizados 227
Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo

Comprensión del número natural: equivalencia, composición y representación 237
Juan José Giraldo Huertas

Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales 247
Mariela Lilibeth Herrera Ruiz

Las pruebas estandarizadas de matemáticas: lo bueno y lo malo, opinión de docentes 257
Edwin Chaves Esquivel

La matemática de último año de educación media en grupos diferenciados según intereses y habilidades. Una experiencia de atención a la diversidad 267
Santa Daysi Sánchez González

Variables, funciones y cambios: ¿qué conocen nuestros alumnos? 277
Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini, Daniela Müller , Natalia Henzenn

Los contenidos matemáticos en el desempeño profesional de los ingenieros en Cd. del Carmen, Campeche, México 287
Myrna Delfina López Noriega, Cristina Antonia Lagunes Huerta, Mario Sucedo Fernández

Indicadores de motivación en profesores que conocen una nueva estrategia didáctica 297
Rosario del Pilar Gibert Delgado, Patricia Camarena Gallardo, José Guadalupe Torres Morales

Enseñanza de la estadística en educación primaria 311
Javier Eduardo Maldonado Dennis, Ana María Ojeda Salazar

Significados asociados a la noción de fracción al resolver un problema de mezclas 321
Rebeca Flores García

La articulación conceptual entre contar-medir y discreto-continuo 329
América Fuentes, Carlos Rondero, Anna Tarasenko

El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual 337
Miguel Díaz Cárdenas, Luis Gilberto Dircio Ramírez

CAPITULO 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas 347
Olga Lidia Pérez González

Estrategias didácticas para la construcción de conocimientos estadísticos 351
Pericles Ramírez Jiménez, Miguel Herrera Miranda, Juan Villagómez, Jaime Arrieta Vera

Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia en la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería 361
Ernesto Bosquez, Javier Lezama, César Mora

Experiencias de aprendizaje usando mediadores, con la finalidad de ampliar la zona de desarrollo potencial en la enseñanza de la descomposición LU 369
Rogelio Ramos Carranza

Una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada. Resultados de su implementación 379
Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller

Una caracterización de las prácticas evaluativas en cursos de álgebra superior 389
Claudia Yahaira Balam Güemez, Martha Imelda Jarero Kumul

Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros 399
Liliana Milevicich, Ulises Arraya

Modelacion matematica en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales 409
Ángel Balderas Puga

Ejemplos para una práctica educativa innovadora: el caso de la integración de contenidos y actividades 419
Malva Alberto, Marta Castellaro, María Julia Blas

La dimensión afectiva y el rendimiento en estadística en estudiantes universitarios 429
José Gabriel Sánchez Ruiz, Julieta Becerra Castellanos, Julieta García Pérez, María del Socorro Contreras Ramírez

Propuesta metodológica para la resolución de problemas de corrientes a través de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden utilizando valores y vectores propios 437
Pedro Castañeda Porras, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas

La construcción de la unidad de análisis como herramienta en contextos periódicos en el bachillerato 445
Rosa Isela Vázquez Camacho

Influencia de la actitud en el rendimiento académico en matemática con estudiantes universitarios 455
Luisa Mabel Morales Maure, José Gabriel Sánchez Ruiz, Homero Roldán Rojas

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado 465
Sonia Bibiana Benítez, Lidia María Benítez, Lidia Esper de Arias

Aplicación de un instrumento y análisis de resultados para medir la actividad cognitiva en estudiantes de ingeniería alrededor del fenómeno sistema masa-resorte 475
Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega y Álvaro Encinas Bringas

El análisis de las redes sociales: una herramienta matemática aplicada a una situación educativa 485
Lucía Rodríguez Montelongo, Carmen Mercedes Torrente

Comprensión del concepto de función a través de situaciones problema relacionadas con el contexto 495
Lía Carolina Mercado Vanegas, Nimer José Aguas Castillo, Wilder José Arrieta Ortega

Propuestas para transitar nuevos caminos después de un curso de álgebra lineal 505
Ana Lucía Hurman, Félix Orlando Sentinelli, Gabriela Beatriz Tomazzeli

Las propuestas de los docentes como constructores de sus propios materiales didácticos 515
Teresita Terán, Mercedes Anido de López

De lo lúdico del origami al trabajo con funciones 525
Tulio Amaya De Armas, Josefina Gulfo de Puente

Articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas 535
Marlene A. Dias, Mariza C. da Costa, Ruy C. Pietropaolo, Tânia M. M. Campos

Estudio de la derivada en fenómenos de cambio en un escenario periódico 545
Ángeles Alejandra Ordóñez Morales, Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez

Uso de unidades de autoinstrucción para la enseñanza de la factorización, en un curso de matemática I para administradores 555
Dalys Alvarado

Conceptualización de ideas matemáticas en ingeniería 561
Arnaldo Mendible, José Ortiz

Las matemáticas y los mapas conceptuales 569
Sandra Milena Zapata, Carlos Mario Jaramillo López, Edison Sucerquia Veja

Apropiación del conocimiento, usando tecnología diseñada mediante la metodología de la zona de desarrollo próximo, en la enseñanza del pensamiento numérico 577
Rogelio Ramos C., Armando Aguilar M., Omar García L.

Estrategia didáctica para favorecer el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en los estudiantes de la carrera ingeniería informática de la Universidad de Camaguey 587
Reinaldo Sampedro Ruiz, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio, María Lourdes Rodríguez

A articulação matrizes e transformações lineares em algebra linear 599
Tânia Maria Mendonça Campos, Fabio Simião, Marlene Alves Dias

La resolución de problemas algebraicos como medio para vincular el conocimiento matemático escolar con la vida cotidiana 611
Areli Hernández Juárez, Víctor Larios Osorio

Introducción al cálculo mediante resolución de problemas 621
Johan Espinoza González, Marianela Zumbado Castro

Estrategia didáctica sustentada en un modelo comunicativo para favorecer la argumentación de ideas en el lenguaje matemático 631
Mirtha González Fernández, Nancy Montes de Oca Recio

Cubriendo baches 641
Ana Lasserre, Josefina Royo, Celia Torres Bugeau, Edna Agostini

Una aproximación cognitiva del concepto de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 651
Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo

Favoreciendo la regulación continua del aprendizaje en aulas masivas de matemática 661
Lisa Holgado, Marta Marcilla, Patricia Villalonga, Susana González, Susana Mercau

Aprendizaje de funciones reales en ciencias económicas y sociales en un ambiente de innovación 671
Jhonattan Medina Orellan, José Ortiz Buitrag y Arnaldo Mendible Sánchez

Os pontos de vista privilegiados no ensino da noção de derivada de uma função no ensino superior do brasil 681
Lúcia Helena Nobre Barros, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos

La probabilidad y la música a través del diseño de una unidad didáctica 691
Elena Fabiola Ruiz Ledesma Ángel Salvador Montiel Sánchez

Flexibilidade cognitiva e niveis de conhecimento: a noção de função afim 701
Marlene Alves Dias, Sirlene Neves de Andrade, Tânia Maria Mendonça Campos

Explorando mi universo geométrico de sexto grado 711
Genny Rocío Uicab Ballote, María del Pilar Rosado Ocaña

Diseño instruccional con apoyo de objetos para aprendizaje de los contenidos de la unidad 2 del programa de Matemáticas I de la DGEST 721
Rafael Pantoja, Edgar Añorve, Leopoldo Castillo, Enrique Gómez, Karla Puga

Comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad en primer grado de secundaria: condiciones finales 731
Saúl Elizarrarás Baena; Ana María Ojeda Salazar

El juego como estrategia de enseñanza aprendizaje de operaciones con conjuntos numéricos 743
Zaira Garrido, Ana Velásquez

Aplicación de la teoría de Galperín en el área de matemática en educación 753
Carmen Evarista Matías Pérez

Formemos cuadrados 759
Gloria Argelia Ek Tuz, Norma Esther Haas Ek, Genny Rocío Uicab Ballote

La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto 767
Darly Kú, Solange Roa

Aprendizaje de estocásticos en primer semestre de ingeniería 775
Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar

Sobre as estruturas multiplicativas 785
Tânia M. Mendonça Campos, Sandra R. Firmino da Silva, Marlene Alves Dias

El uso de la subtangente para caracterizar una curva 795
Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez

El uso de patrones geométricos para la construcción del lenguaje simbólico en estudiantes de nivel medio superior. 805
Karla Elizabeth Velasco Martínez, Claudia Margarita Acuña Soto

La práctica de evaluación en cursos de algebra superior 813
Martha Imelda Jarero Kumul, María Guadalupe Ordaz Arjona

CAPITULO 3: ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLSIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar 825
Ricardo Cantoral, Magali Méndez

Los diálogos de estudiantes: su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar 829
Cecilia Crespo Crespo

¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática? 839
Daniela Soto S.; Ricardo Cantoral Uriza

Lo titiritesco en matemáticas: ¿dos esencias en la misma práctica? 849
Marcela Ferrari Escolá

El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS 859
Luis Cabrera Chim, Ricardo Cantoral Uriza

El uso de las gráficas en el bachillerato. Una segmentación del conocimiento matemático 869
Claudia Cen Che, Francisco Cordero Osorio

El infinito matemático: la escuela, cantor y bolzano 879
Patricia Lestón, Cecilia Crespo Crespo

Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange 889
Lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza

Pensamiento proporcional. Una mirada socioepistemológica 899
Ivan Castro De Almeida, Leonora Díaz Moreno

La deconstrucción como estrategia de la modelación 909
José Trinidad Ulloa Ibarra. Jaime Arrieta Vera

Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico 919
Karla Margarita Gómez Osalde, Francisco Cordero Osorio

Los usos de las gráficas en la resignificación de lo estable en un escenario de difusión de la ciencia 929
José David Zaldívar Rojas, Francisco Cordero Osorio

Análisis de la actividad matemática en el salón de clases. Un estudio socioepistemológico 939
Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral-Uriza

Los procesos de institucionalización del límite: un análisis socioepistemológico 949
Verónica Molfino, Gabriela Buendía

Optimización-estandarización un mecanismo para la construcción social del conocimiento. El caso de una práctica toxicológica 959
Isabel Tuyub, Ricardo Cantoral, Francisco Cordero

La identidad y la adherencia en la formación del matemático educativo en Latinoamérica 969
Héctor Silva Crocci, Francisco Cordero Osorio

Situaciones didácticas en el contexto de ingeniería civil: caso infiltración de agua en un suelo específico 977
Hipólito Hernández Pérez, Ruth Rodríguez, Adriana Atenea de la Cruz

La justificación funcional en un marco de difusión de la ciencia 987
Irma Daniela Viramontes Acuña, Francisco Cordero Osorio

Una caracterización del talento infantil en física, química y biología: participantes del programa niñ@s talento - D.F. 995
Erika Marlene Canché Góngora; Rosa María Farfán Márquez

Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento 1003
Eduardo Briceño, Francisco Cordero

Prediciendo con la regla de los signos de descartes 1013
Ricardo A. Cantoral Uriza, Marcela Ferrari Escolá, Diana R. Lluck Soberanis

En busca de una caracterización del profesor de matemática 1023
Liliana Homilka, Cecilia Crespo Crespo

Una vinculación entre la probabilidad y las primeras nociones de topología: los trabajos de Gauss y Weierstrass 1033
Lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza

Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas 1043
Ricardo Cantoral Uriza

CAPITULO 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Introducción al Capítulo: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional 1055
Yolanda Serres Voisin

El eclecticismo epistemológico de los docentes de matemáticas 1059
Evangelina Lopez, Ysabel Camacho, Martha Chairez, María de Jesús Gallegos

Configuraciones cognitivas de profesores en formación sobre la media aritmética 1067
Juan Jesús Ortiz, Vicenç Font, Silvia Mayén

Formadores de formadores: ¿cómo enseñan a enseñar geometría del espacio? 1077
Natalia Sgreccia, Tulio Amaya de Armas, Marta Massa

Sentido de realidad en la modelación matemática 1087
Jhony Alexander Villa–Ochoa, Carlos A. Bustamante, Mario Berrio Arboleda

La formación docente en la lebem: un currículo hacia la formación ideal 1097
Tulio Amaya de Armas, Natalia Sgreccia, Marta Massa, Iván Núñez, Jairo Escorcia

La enseñanza de la probabilidad en el aula: ideas fundamentales como base de un pensamiento probabilístico en docentes de educación primaria 1107
María Teresa Carballo Riva Palacio; Ana María Ojeda Salazar

Significados institucionales de referencia, planeados e implementados de optimización en un curso de cálculo para estudiantes de ingeniería 1117
Ramiro Ávila Godoy, J. Alvaro Encinas Bringas, Ruth E. Rivera Castellón, Víctor Amaro Hernández

La resolución de situaciones problemáticas en la formación de profesores 1127
Liliana Milevicich, Alejandro Lois

La demostración en la formación docente 1137
Malva Alberto, Gabriela Roldán

CAPITULO 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas 1149
Mauricio Herrera

Empleo de la tecnología en la enseñanza del álgebra 1153
José Guadalupe Torres Morales, Rosario Del Pilar Gibert Delgado

Las tecnologías de la información y de la comunicación en los programas de formación de profesores de matemática para la enseñanza secundaria en universidades públicas costarricenses 1161
Edison De Faria Campos

Aspectos cognitivos y actitudinales mostrados por estudiantes de ingeniería al resolver una situación sobre variación: un análisis cuantitativo 1169
Elena Fabiola Ruiz Ledesma Ángel Salvador Montiel Sánchez

El uso de la tecnología como instrumento facilitador en el desarrollo de los procesos matemáticos 1177
Javier Barrera Ángeles; Tulio Rafael Amaya De Armas; Petra Téllez Reyes

Desarrollo de aplicaciones informáticas con modelación matemática orientadas al aprendizaje del cálculo integral a nivel licenciatura 1185
Víctor Guevara Basaldúa, Víctor Larios Osorio

Secuencia didáctica para la enseñanza de triángulos usando herramientas informáticas 1195
María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Liliana Tapia, Héctor Tarifa

Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos 1207
Ileana Miyar Fernández, María De Los Ángeles Legañoa Ferrá, Ramón Blanco Sánchez

El trabajo independiente de la matemática numérica con el uso de calculadoras graficadoras 1217
Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Olga Lidia Pérez

Argumentos de una ecuación diferencial de un circuito eléctrico a través de su campo de pendientes 1227
Edgar Javier Morales Velasco, Hipólito Hernández Pérez

E-multimedia como recurso de evaluación diagnóstica 1237
Alejandro Lois, Liliana Milevicich

Un estudio de la covariación con profesores universitarios usando tecnología 1247
María Del Socorro Valero Cázarez, Ma. Guadalupe Barba Sandoval, María Paulina Ventura Regalado, Alejandro Del Castillo Escobedo, María José Torres Jaramillo

Aprehensión de propiedades y uso de justificaciones geométricas en ambientes de geometría dinámica 1257
Noraísa González González, Víctor Larios Osorio

Tutores inteligentes en la enseñanza de la matemática en secundaria 1267
Ismael Morales Garay, Maynor Jiménez Castro

Validação de uma escala de autorregulação da aprendizagem de estatística: um estudo com universitários de cursos tecnológicos de São Paulo 1277
Maria Helena Palma De Oliveira, Cláudia Borim Da Silva,Verônica Yumi Kataoka, Claudette Maria Medeiros Vendramini

Multimedia para el aprendizaje del tema espacios vectoriales con alta componente geométrica 1287
Walter Carballosa Torres, Yadira Torres Nuñez, Yunier Martínez Ramírez, Carlos Mario Aquino Ponce

El currículo de matemática con tecnología en carreras de ingeniería 1293
Eugenio Carlos Rodríguez, Esther Ansola Hazday

El cálculo y las NTIC en la educación superior. Caso: Universidad Autónoma del Carmen 1303
Santa Herrera Sánchez, Cristina Lagunes Huerta, Juan José Díaz Perera

Explorando a função polinomial quadrática com Winplot 1313
Victor Marcelo R. Santander, Sérgio Destácio Faro, Marcelo Rodrigues De Souza

Desarrollo de una aplicación java para la representación y manipulación de poliedros en el espacio 1323
Salvador Lacaba Domínguez, Víctor Larios Osorio

Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en América Latina 1331
Liliana Milevicich, Alejandro Lois

Resignificación de la Serie de Taylor a través de tecnología 1341
Cynthia Almazán Colorado, Landy Sosa Moguel

Propuesta para la enseñanza del concepto de integral, un acercamiento visual con Geogebra 1351
Armando López Zamudio

El papel de los profesores de matemáticas ante el uso de las herramientas tecnológicas en el aula 1359
Alma Rosa Pérez Trujillo, Gabriela Buendía Abalos

PRESENTACIÓN

Han transcurrido más de veinte años desde que el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), se constituyera nucleando a profesores de matemática e investigadores del área de la matemática educativa de Latinoamérica. Entre sus objetivos, se propuso favorecer el intercambio entre colegas y crear espacios académicos en los que se compartieran periódicamente experiencias y propuestas.

En estos intercambios, las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (Relme), ocupan un lugar preponderante. Todos los años se realizan en distintos países de América Latina, y son éstas reuniones las que dieron continuidad a las Reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa y que originaron a la creación de Clame. Nuestra comunidad participa de ellas activamente promoviendo el fortalecimiento de la matemática educativa en nuestra región bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros, pero orientada a lograr un mayor profesionalismo de las tareas docentes e investigativas.

La publicación de los resultados es imprescindible en el proceso de investigación y en el de difusión de las ideas, por ello es fundamental para los investigadores y profesores. Los investigadores mediante la presentación en congresos y la publicación, someten su trabajo a la consideración de sus pares, y los docentes acceden a los resultados de investigaciones recientes, pudiendo analizar su aplicación al aula y compartir experiencias enriquecedoras con los investigadores. Es en este contexto de ideas y en cumplimiento además de uno de los propósitos específicos del Clame, *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*, se publica año con año el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme).

El Alme tiene carácter de publicación periódica y si bien los artículos que la integran provienen de trabajos que fueron previamente expuestos en Relme, son presentados en forma de artículos y sometidos posteriormente a dicha reunión, a la evaluación rigurosa y doblemente ciega de por lo menos dos pares especialistas de reconocida experiencia en dicho campo y provenientes de distintos países. Los artículos publicados son los que han resultado previamente aceptados a través de esta evaluación de manera directa o después de que sus autores realicen las modificaciones propuestas por los árbitros. La edición de esta publicación está a cargo de un Comité Editor formado por varios colegas de nuestra comunidad, que da continuidad a la línea de publicación definida de acuerdo con el respeto los lineamientos propuestos.

En esta oportunidad, las exposiciones tuvieron lugar durante *Relme 23*, llevada a cabo en la ciudad de Santo Domingo (República Dominicana) durante 2009. Alme 23 se compone de trabajos en los que docentes e investigadores latinoamericanos de matemática educativa exponen sus experiencias, propuestas e investigaciones, mostrando los productos de una comunidad activa de creciente profesionalización y fortalecimiento de esta disciplina. De esta manera, se trata de una tarea que se plantea año a año el objetivo de lograr difundir mediante una publicación de nivel académico, el estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica. En la página web de Clame, los distintos volúmenes de nuestra publicación son puestos a disposición de colegas, constituyendo una fuente de consulta y referencia en la comunidad de matemática educativa.

Los trabajos han sido organizados según cinco categorías:

- Categoría 1: Análisis del Discurso Matemático Escolar
- Categoría 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas
- Categoría 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

- Categoría 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
- Categoría 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Cada una de estas categorías, va precedida de una breve introducción donde se reflexiona sobre el tema y se comentan de manera sucinta el contenido de los artículos que la componen. Estas introducciones fueron solicitadas a reconocidos especialistas de nuestra comunidad a quienes agradecemos especialmente su colaboración.

En mi carácter de Presidenta de Clame, agradezco a los miembros del Comité Editor y Comisión Académica del Alme 23 que colaboraron activamente y con entusiasmo y profesionalismo, así como a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos y a los árbitros por su contribución solidaria y profesional, como asimismo y de manera especial a todos los colegas que de manera generosa y entusiasta contribuyeron con su tiempo, experiencia y creatividad para la realización de este proyecto.

Quienes de una u otra manera hemos colaborado en la constitución de este documento, nos sentimos orgullosos de haber podido participar una vez más en él prestando este servicio académico y de ver la manera en la que nuestra comunidad crece, comparte y se fortalece académicamente cada año.

Cecilia Crespo Crespo
Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Junio 2010

CAPITULO 1

Análisis del Discurso Matemático Escolar

Introducción al Capítulo 1: Análisis del Discurso Matemático Escolar

Alberto Camacho Ríos

La difusión de conocimientos matemáticos al salón de clase se caracteriza por la formación de discursos que hacen posible formas elementales de representaciones del propio conocimiento. En sí mismas, las representaciones son producto de procesos de transposición de saberes u objetos matemáticos; actividades, los procesos de transposición, que se hacen necesarias para trasladar y difundir dichos objetos en una forma más comprensible a los estudiantes. En la socioepistemología, a esas representaciones se les ha dado a conocer como Discurso Matemático Escolar (DME) (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 86).

En el caso más elemental, el DME es organizado por los argumentos que entran en juego para la enseñanza de los conocimientos matemáticos. Sin embargo, la estructuración del DME tiene por fundamento y objetivo, sobre todo para los profesores «el establecimiento de bases de comunicación que permitan crear consensos y construir significados asociados al conocimiento» (op, cit., 86).

En esa dirección, en la investigación en Matemática Educativa (ME), se habla desde diferentes perspectivas del DME, tanto de su análisis (ADME) como de su propio rediseño (RDME). Ambos aspectos de la investigación se complementan y se hacen necesarios ante un discurso escolar de los conceptos que ya no responde a las expectativas de su enseñanza. Así, el ADME ha tomado dos vertientes que tienen por objeto dotar a los profesores de matemáticas de argumentaciones que les lleven a reflexionar y actuar sobre las asignaturas que enseñan. Una, la primera, se coloca en la propia formación de profesores y, la otra, en la investigación educativa del DME. De ambas vertientes intentaré comentar en lo que sigue.

Al menos en dos instituciones que ofrecen la Maestría en Matemática Educativa, en México, los planes de estudio establecen el ADME como asignatura. En el Cicata-IPN (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional), se cuenta con dos cursos relacionados, el ADME1 y el ADME2, los cuales fueron concebidos a partir de considerar la posibilidad de que los estudiantes establezcan «un diálogo entre los discursos del saber sabio y del

saber a enseñar y su vínculo desde la didáctica» (Cicata IPN, 2008, p.1). El punto de vista fue adoptado al suponer que los contenidos en los cursos tradicionales de matemáticas son tratados como objetos de aprendizaje y no como objetos de enseñanza. Ante ello, se sugiere que los futuros profesores manejen los conocimientos que aprendieron en su carrera, para que, a su vez, puedan «aplicarlos en situaciones didácticas (en) la búsqueda de estrategias de resolución (de problemas)». En si mismo, el diseño de situaciones sugiere la intención de lograr construir conocimiento. No obstante, la pretensión final es redimensionar los conceptos; aun cuando en el plan de estudios no se menciona, se percibe el interés por que la redimensión de los conceptos ocurra a través encontrar nuevos significados de los mismos. Más, para encontrar esos nuevos significados no es suficiente con los conocimientos adquiridos por el profesor durante su formación, estos últimos deben «tomar contacto con la investigación didáctica» y, sobre todo: «se plantearan problemas históricos (dentro de la asignatura) que encierren la génesis de las teorías desarrolladas posteriormente, analizando el devenir de su solución» (op, cit, p. 2). Ese tipo de problemas servirían como un disparador que lleve a los estudiantes a la reedición de los temas. Aquí la reedición debe tomarse literalmente como el rediseño de los temas, con la finalidad de enriquecer la información que se tiene del conocimiento en juego y así estar en condición de ir al análisis didáctico.

Para el diseño de actividades y secuencias de aprendizaje, en el programa se plantea la utilidad del contenido de las dimensiones cognitiva y didáctica, así como el punto de vista histórico, socioepistemológico, mencionado. El resultado del diseño de las actividades y secuencias de aprendizaje deviene en RDME.

En cuanto a las actividades de investigación que conducen al ADME y al RDME, planteo enseguida dos resultados importantes.

En Montiel (2008) se hizo una revisión socioepistemológica de las funciones trigonométricas desde su definición a través de la matematización de la astronomía expuesta en el Almagesto de Ptolomeo. El punto de partida para las implicaciones didácticas se sugiere en tres etapas, o desarrollos del pensamiento de los estudiantes del nivel superior, es decir: a) el pensamiento proporcional (ligado a la razón entre cuerdas), b) el pensamiento covaracional (funcional) y c) el pensamiento formal, relacionado con los desarrollos en serie. Para la simulación de la construcción de la razón trigonométrica, la autora sugiere la anticipación como práctica social

vinculada con la matematización de la astronomía, de modo que el modelo matemático que con ello se puede construir es de naturaleza geométrica elemental.

En tanto, en Camacho y Sánchez (2010), se colocó como resultado de investigación a la noción de variabilidad. Esta última surgió de sistemas de prácticas de referencia vinculadas con actividades de ingeniería que se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas. Los autores muestran esa noción como una resignificación del concepto de función que sirvió para el diseño de una situación, RDME, de aprendizaje, en el que se usaron simulaciones geométricas en el intento de que estudiantes del nivel superior construyeran ese concepto.

En ambas investigaciones los autores incorporan resignificaciones del conocimiento en juego, logradas a partir de análisis socioepistemológicos derivados, en los dos casos, de la matematización de la realidad; en el primer caso la matematización ocurre a la astronomía de posición ptolemaica y, en el segundo, se da en los levantamientos topográficos desarrollados por grupos de ingenieros de la tradición alemana de mediados del siglo XIX. El caso de Montiel (2008) aporta elementos suficientes para el diseño de situaciones que lleven a mejorar la enseñanza del concepto de función trigonométrica; mientras en Camacho y Sánchez (2010) el diseño y aplicación de la situación ha optimizado la enseñanza del concepto de función y repara la omisión de la variabilidad en la correspondiente enseñanza del concepto de derivada.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (Número especial), 83-102.

Camacho, A y Sánchez, B. I. (2010), Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, México, Relime (aceptado para su publicación).

Cicata IPN (2008). Análisis del Discurso Matemático Escolar. Asignatura correspondiente al plan de estudios de la Maestría en Matemática Educativa, planeada para el 2º año de formación.

Montiel, G. (2008). Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico. En Hernández, H. y Buendía, G. (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 105–119. Universidad Autónoma de Chiapas.

ESTADO DEL ARTE DEL TRATAMIENTO GUBERNAMENTAL Y EDUCATIVO DE LAS CAPACIDADES SOBRESALIENTES EN MÉXICO

Erika Marlene Canché Góngora, Ma. Guadalupe Simón Ramos, Rosa María Farfán Márquez
CINVESTAV-IPN México
emcanche@cinvestav.mx, gsimon@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx
Campo de investigación: Estado del arte Nivel: Básico

Resumen. *Con el objetivo de integrar la diversidad en el aula, a nivel mundial se reconoce ampliamente la importancia de dar respuesta a las necesidades de un grupo muy especial de la población, aquellos estudiantes que destacan de alguna forma dentro del contexto escolar. En México estos estudiantes están considerados dentro de la población con necesidades educativas especiales y requieren de una atención educativa especial de tal forma que puedan desarrollar al máximo sus capacidades.*
Palabras clave: Identificación y tratamiento del talento

Introducción

Anteriores investigaciones han evidenciado el escaso tratamiento de los estocásticos en el sistema educativo básico regular (Limón, 1995; Gurrola, 1998; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004). Esta insuficiencia también ocurre en el caso particular de la educación de comunidades con audición diferenciada (Garnica y González, 2005; Garnica, 2006; López y Ojeda, 2007), por lo que la conjeturamos extensiva al sistema de Educación Especial.

En las últimas décadas se ha despertado el interés por atender a los estudiantes con capacidades sobresalientes. En diferentes partes del mundo se han desarrollado teorías e investigaciones que buscan desarrollar métodos que permitan identificar a esta población de tal forma que se puedan diseñar y aplicar programas que les ayuden potenciar sus capacidades.

Y nuestro país no es la excepción. Desde 1983 los estudiantes con capacidades sobresalientes han estado bajo la mirada de las políticas educativas. La atención a esta población ha estado sometida, como muchas otras decisiones importantes, a las disposiciones políticas, los cambios de gobierno, etc. Pero uno de los factores que más ha frenado el crecimiento en este tema es la falta de desarrollo teórico e investigaciones propias de nuestro país.

Considerando lo anterior, la investigación que desarrollamos tuvo como objetivo estudiar a una población denominada “Niñ@s Talento”, de niños mexicanos de la región del Distrito Federal, de tal forma que al finalizar esta investigación pudiéramos caracterizar a un niño talento mexicano en

ciencias, y fundamentar las capacidades que le permitirán desarrollar su talento en matemáticas, biología, física y química.

Presentamos en este reporte una mirada general al proceso de investigación que nos llevó a desarrollar el trabajo. Desde el tratamiento a nivel gubernamental de los niños con capacidades sobresalientes en México hasta una revisión de las diferentes perspectivas teóricas que tratan de explicar el talento.

La medición de la inteligencia y la identificación del talento.

Desde que a inicios del siglo XIX Alfred Binet introdujo el Cociente Intelectual, se han originado numerosas propuestas que buscan medir la inteligencia. Si bien estos instrumentos no lograron su propósito de medir toda la inteligencia, sino sólo una parte de ella, fueron utilizados inicialmente para etiquetar a los niños y reducir las posibilidades educativas de los menos capaces, aún se emplean y se ha comprobado que tienen cierto poder predictivo sobre el rendimiento académico.

A partir del estudio de las capacidades intelectuales surgen ciertas *concepciones explicativas del proceso psicológico* (Bedia, sf, p.2), las cuales son: la concepción monolítica, la factorial y la jerárquica. Cada una de ellas enmarca corrientes relativas al surgimiento de los diferentes modelos de inteligencia. Se parte desde una postura en la cual el rendimiento académico es una expresión directa de la inteligencia, después se cambia el paradigma hacia una visión propia de las actividades, es decir, que la inteligencia estaba en relación directa con la actividad que se llevara a cabo, que es donde se enmarca la diferencia entre talento y superdotación. Posteriormente esta corriente se vuelve aún más nítida, cuando se empieza a entender a la inteligencia dentro de un contexto más dinámico, es decir, desarrollable a lo largo de la vida y ya no innato a la persona por nacimiento. En la actualidad, el término talento se refiere a una actitud destacada en una materia determinada.

Con el tiempo los modelos que se desarrollaron comenzaron a superar a los primeros ya que consideraban factores tanto genéticos como culturales, personales y motivacionales. Todos estos estudios han llevado a la diferenciación del talento y la superdotación, lo cual posibilita un tratamiento educativo diferenciado que responda a los intereses o necesidades educativas de unos y otros atendiendo sus características.

En los últimos años han surgido posturas teóricas que tratan de considerar esta diferenciación. Algunos de estos modelos se han utilizado ampliamente en México, pero ninguno de manera prolongada en el programa CAS:

Modelo Teórico	**Concepto presentado**
Teoría de las Inteligencias Múltiples. Gardner (1993)	Ve a la inteligencia como una conjunto de inteligencias múltiples, distintas e independientes, ha identificado 8 tipos: • *Inteligencia lingüística.* • *Inteligencia lógica-matemática.* • *Inteligencia espacial.* • *Inteligencia musical.* • *Inteligencia corporal-kinestésica.* • *Inteligencia intrapersonal* • *Inteligencia interpersonal* • *Inteligencia naturalista.*
Concepción de los Tres Aros. Renzulli (1978-1994)	Distingue 3 características o rasgos esenciales que definen a la persona sobresaliente: • *Capacidad por encima de la media,* • *Altos niveles de creatividad* • *Compromiso con la tarea.*
El SMPY de Stanley	El SMPY (Study of Mathematical Precocius Youth) es un vasto proyecto iniciado en 1971 en la Universidad John Hopkins de Baltimore por J. Stanley, cuyo objetivo inicial era el de la identificación y provisión de recursos adecuados a los jóvenes talentos matemáticos. Este objetivo se ha ampliado posteriormente e incluye también el diagnóstico de aspectos verbales y relacionados con el mundo *académico* en general.

El talento, por ejemplo en matemáticas, requiere del desarrollo de varios elementos que se encuentran incluidos en otras de las inteligencias. Por lo tanto no basta con identificar la inteligencia dominante de cada estudiante, es necesario identificar y potenciar el desarrollo de todas las habilidades que le permitan desenvolverse en el futuro en cierta área productiva.

Aunque *Renzulli* ha integrado en su teoría dos aspectos muy importantes que son la creatividad y el compromiso con la tarea, ha considerado la importancia del entorno social para el desarrollo del talento (familia, escuela, contexto). Cabe mencionar que las pruebas que se utilizan para medir la

habilidad por encima del promedio siguen siendo las ya estandarizadas (test de inteligencia, pruebas de aptitudes), aunque han demostrado que carecen de confiabilidad (Ball, et al., 2004).Existen también varios *instrumentos para la identificación del talento* y se pueden dividir en dos grupos: las pruebas subjetivas y las pruebas objetivas. Ente los primeros se encuentran; los informes de los profesores, de los padres, las nominaciones de los compañeros y las autonominaciones. Entre las pruebas objetivas se encuentran los test de inteligencia general y de aptitudes específicas; las pruebas de rendimiento y las de creatividad, y los test de personalidad.

Respecto a lo anterior, percibimos elementos para conjeturar la especial importancia de la sociedad y el entorno en la valoración de la inteligencia e incluso en su definición, ya que es una sociedad determinada en un espacio y tiempo específico la que moldea el talento y la que valora el hecho de que un individuo sea considerado como talentoso o no, así como sus implicaciones. Es por esta razón que algunos de los test de identificación se consideran poco confiables, debido a que las respuestas van a estar sujetas a la revisión de una persona con una carga verbal y cultural tal vez diferente. Y es por eso, también, que aunque niños de las mismas edades respondan el mismo test, la diversidad de sus respuestas será variable.

Cronología del tratamiento de los niños con talento en México

En México no hay un consenso conceptual respecto a la población con capacidades y aptitudes sobresalientes (dentro de la ley se utiliza el término para referirse a esta población). En general, se les considera como talento o superdotado.

(1982) La escala de inteligencia Wechlser, identificó niños con capacidad intelectual muy superior en el DF. Se inicia la inquietud por tender a niños con aptitudes sobresalientes.

(1985) Se pone en marcha el programa CAS (Capacidades y Aptitudes Sobresalientes) en 13 estados de la República Mexicana. Tuvo como base el modelo de Enriquecimiento Escolar (Renzulli, 1977). Fue en América Latina en implementar un programa de este tipo en escuelas federales.

(1989–1994) Se estableció el Programa para la Modernización Educativa que tenía como objetivo consolidar el Programa de Atención a Alumnos con Capacidades y Aptitudes Sobresalientes.

(1993) La Ley General de Educación, estableció que: “La educación especial está destinada a individuos con discapacidades transitorias o definitivas, así como a aquellos con aptitudes sobresalientes (…)”.

(2002) Se puso en marcha un proyecto llamado "Un modelo de intervención educativa para alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes". Este último tuvo tres etapas: Diagnóstico, diseño de una propuesta de intervención educativa, implementación-evaluación.

Algunas conclusiones del diagnóstico fueron:

1. Sólo las dos terceras partes de las entidades del país atienden a los alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales asociadas con aptitudes sobresalientes.
2. El número de servicios de educación especial que ofrece atención a esta población es insuficiente, sólo alrededor de 1.5%.
3. No hay personal con formación o experiencia en el tema de las aptitudes sobresalientes.
4. Predomina la aplicación del Modelo Triádico de Enriquecimiento de Renzulli, seguido del Modelo de Talentos Múltiples de Taylor y, luego, el Modelo de Inteligencias Múltiples de Gardner. Algunos de los estados que han llevado a cabo el proyecto CAS consideran que los instrumentos para la identificación y diagnóstico fueron cualitativos, con un gran margen de subjetividad por parte del que los rellena y califica (Betancourt y Valadez, 2004, p. 135).
5. A nivel nacional no existe un marco regulatorio en el que se defina la organización y funcionamiento de los servicios de educación especial que se encargan de la atención de los alumnos con necesidades educativas especiales asociadas con aptitudes sobresalientes.

(2006-2007) Talleres y cursos nacionales y estatales.

(2007) Reforma a la Ley General de Educación.

Dentro del Plan Nacional de Desarrollo (2007-2012) se contempla garantizar que la población con necesidades educativas especiales vinculadas a la discapacidad y las aptitudes sobresalientes accedan a servicios de calidad que propicien su inclusión social y su desarrollo pleno.

Otras propuestas mexicanas no gubernamentales.

Fundación Telegenio

Busca apoyar a niños y jóvenes con capacidades intelectuales que se encuentran por encima del promedio (98%).

Atmosferas Creativas (Universidad de Guadalajara)

Tuvo por objetivo lograr la inclusión social y el desarrollo pleno de los estudiantes con capacidades sobresalientes.

Pauta (UNAM)

Detectar y fomentar el desarrollo de talentos por medio de la búsqueda de apoyos.

Niños Talento

Lograr que tod@s l@s niñ@s sobresalientes tengan acceso a una formación integral, a través del desarrollo o perfeccionamiento de sus habilidades artísticas, culturales, intelectuales y deportivas.

Algunas investigaciones

Guadalajara

- De 519 niños el 3% fue diagnosticado como talento.
- Este estudio concluyó con la premisa de que no contamos con instrumentos estandarizados que nos permitan identificar a niños con talento y que es necesario diversificar las evaluaciones para obtener resultados más objetivos en cuanto a la identificación del talento.

Yucatán

- Fue un estudio realizado con niños de zonas de desventaja socioeconómica y tuvo por objetivo evaluar los instrumentos de identificación que se utilizan actualmente.
- El estudio identificó a 21 estudiantes como sobresalientes.

Conclusiones

Existen varios modelos de identificación del talento pero aunque son ampliamente utilizados en México, ninguno de ellos fue desarrollado tomando en cuenta las características de la población mexicana. En varias investigaciones se ha concluido que los instrumentos de identificación utilizados por estos modelos carecen de confiabilidad. El diagnóstico realizado durante el sexenio (2000-2006), permitió ver que la atención a los estudiantes con capacidades sobresalientes, como se les considera gubernamentalmente, es muy deficiente. Se encontró que algunos de los factores que propician esta situación son: la falta de personal capacitado, la falta de un marco que regule la atención a esta población, la carencia de investigaciones propias así como la importación de modelos de identificación y atención a la población con capacidades superiores.

En México aun falta un largo camino por recorrer en términos del tratamiento de los alumnos con capacidades sobresalientes. Para comenzar, hace falta hacer *explícito* de manera gubernamental el reconocimiento de esta población y su educación. Falta, de igual manera, más investigaciones que hagan referencia a temas relacionados y que den respuesta a las necesidades que México tiene al respecto.

Con esta revisión bibliográfica dejamos entrever ciertos elementos relevantes para nuestra investigación, uno de ellos es la necesidad de diferenciar entre los diferentes términos empleados para llamar a las capacidades superiores en las niñas y niños. Estos términos corresponden a desarrollos conceptuales diferentes y por tanto requieren considerar esta diferenciación. Otro aspecto es la considerar la identificación del talento como un proceso y no con la medición (mediante test) de un estado, por tanto creemos que el talento es desarrollable a lo largo de la vida. La revisión teórica, nos permitió determinar la creciente necesidad por considerar el aspecto social tanto en su identificación como en su tratamiento, y desde luego falta investigación teórica y metodológica al respecto y ante todo falta investigación dentro del contexto mexicano.

Referencias bibliográficas

Asociación mexicana de apoyo al sobresaliente. Amexpas. Recuperado en febrero de 2009. http://www.geocities.com/amexpas/index.html

Bedia, L. (sf). La superdotación y el talento: una aproximación a su desarrollo conceptual. Recuperado en enero de 2009, de http://www.monografias.com/trabajo13/articom/articom.shtml

Ball, M., Benavides, M., Betancourt, J., Blanco, R., Castro, E., de Souza, D., Gutiérrez, L., Gutiérrez, M., Marshall, M., Martínez, P., Maz, A., Ríos, C., Rodríguez, L., Segovia, I., Soriano, E., Torralbo, M., Valadez, M., Vergara, M., Villarraga, M., Villegas, J.(2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. Recuperado el 31 de marzo de 2008, de http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/educacion_ninos_talento_iberoamerica.pdf

Betancourt, J., Valadez, M. (2004). La educación de niños con talento en México. En Benavides, M., Blanco, R., Castro, E., Maz, A. UNESCO. *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 129-142) Santiago, Chile: Trineo, S.A.

Covarrubias P. (s.f.) Definición del sobresaliente. La concepción de los tres aros de Renzulli. Recuperado el 1 de octubre de 2001, de http://www.redsobresalientes.com/documentosPDF/DEFINICI%D3N_DEL_SOBRESALIENTE_RENZULLI.pdf

Fundación telegenio http://www.telegenio.org/

Gardner, H. (1993). *Inteligencias Múltiples.* Barcelona: Paidós.

Programa Adopte un Talento, PAUTA. http://www.pauta.org.mx

Programa Niñ@s Talento. http://www.dif.df.gob.mx/programas/niñostalento.html

Una Propuesta de Intervención Educativa para Alumnos y Alumnas con Aptitudes Sobresalientes (2003). México. Disponible en http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/sitio/start.php?act=sobresalientes&sec=ava

LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES SOBRE EL CONCEPTO FUNCIÓN EN SITUACIONES VARIACIONALES

Víctor Javier Pech Pech, María Guadalupe Ordaz Arjona
Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas México
azul021281@hotmail.com, oarjona@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *El tratamiento otorgado al concepto función en bachillerato hoy en día, lejos de favorecer la comprensión del concepto, propicia la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y enfrentar a los estudiantes a una situación no típicamente escolar. Es por ello, que nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional. Como metodología de investigación consideramos la ingeniería didáctica. Entre los resultados obtenidos después de experimentar las actividades, encontramos que los estudiantes sí logran dar argumentos de tipo variacional, sin embargo, dichos argumentos se ven limitados por el discurso escolar bajo el cual se han enfrentado a dicho concepto con anterioridad.*
Palabras clave: función, variación, producciones

Introducción

El tratamiento dado al concepto función predominante en las clases de matemáticas hoy día es el que hace referencia a una regla de correspondencia, al respecto Tall (1992, citado en Escobedo y Montiel, 2007) menciona que, pese a ser buen fundamento matemático, puede no ser una buena raíz cognoscitiva y Freudenthal (1983, citado en Escobedo y Montiel, 2007) señala que aunque está constituida de una manera lógicamente formalizada, ésta ha oscurecido su significado como acción de asignación de variables y perdido su carácter dinámico para convertirse en algo puramente estático.

Como parte de un estudio sobre el Discurso Matemático Escolar en los colegios de bachilleres del estado de Yucatán (COBAY) Jarero y Ordaz (2009) reportan que en los libros utilizados por los profesores de precálculo del COBAY el concepto función se presenta como una correspondencia entre dos conjuntos, planteando representaciones numéricas, gráficas y algebraicas y por otra parte, que estudiantes y profesores, muestran dificultad conceptual al trabajar con el concepto función, particularmente, no distinguen apropiadamente función de ecuación.

Nicholas (1996, Citado en Hitt, 1996) sugiere como definición más apropiada para efectos de enseñanza preuniversitaria aquella en términos de relación entre variables, con lo cual coincidimos, ya que el actual tratamiento otorgado al concepto función no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes, sino que favorece la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y experimentarlas en un grupo de estudiantes.

En este trabajo nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional.

Marco teórico

Enmarcamos este trabajo en la Socioepistemología, entendiéndola una aproximación teórica que permite reconocer al conocimiento matemático como de naturaleza social, en particular, al tratar con la matemática dentro de los sistemas didácticos, la relación entre la actividad que desarrolla el alumno y la generación de conocimiento (Cordero, 2001).

La socioepistemología, en tanto aproximación teórica que aborda desde una perspectiva sociocultural el problema de estudio de las matemáticas así como los fenómenos didácticos asociados a la misma, permite explicar la naturaleza de un discurso y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento. Pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en las prácticas sociales, entre ellas podemos señalar la práctica social de la predicción la cual está íntimamente relacionada con la variación y el cambio, ya que para predecir es necesario cuantificar y analizar los cambios, es decir la variación es una herramienta de análisis necesaria para la predicción Zatti y Montiel (2007, citado en López, 2009).

Para el diseño de las actividades que conformaron la situación exploratoria consideramos elementos del pensamiento y lenguaje variacional, tomamos como referencia a Cantoral (2000): *"El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos*

cognitivos y culturales con las que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales".

De esta forma, decimos que un estudiante utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo de cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral 2000, citado en López 2009).

Los elementos del pensamiento y lenguaje variacional pretenden de alguna manera modificar lo establecido, es decir, requiere que los alumnos modifiquen, validen y construyan argumentos y esto sólo se puede hacer con situaciones que permiten que el alumno construya la respuesta y no simplemente recurra a la memoria.

Metodología

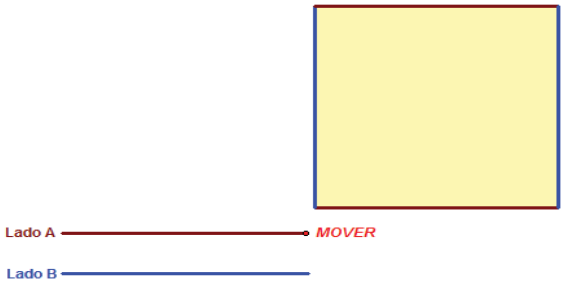
Nuestra investigación fue de carácter cualitativa y como metodología consideramos a la ingeniería didáctica, la cual se caracteriza como un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, las cuales implican realizar la planeación, el desarrollo, la observación y el análisis de las mismas (Artigue, 1995). Considera cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

El análisis preliminar, constó de un análisis epistemológico del concepto función, análisis de la enseñanza tradicional de dicho concepto y sus efectos, y un análisis de las concepciones, obstáculos y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del concepto. En la concepción y análisis a priori diseñamos la secuencia exploratoria y realizamos el análisis de las posibles respuestas de los estudiantes. Posteriormente, seleccionamos la muestra de estudiantes y se procedió a trabajar con ellos durante dos sesiones de dos horas cada una, los seis estudiantes eran de cuarto semestre del COBAY que ya habían visto el tema de funciones en un curso de precálculo que cursaban en ese momento. Trabajaron dos equipos cada uno conformado por tres personas, dos hombres y una mujer en cada equipo.

En la fase de análisis a posteriori y evaluación, se realiza el análisis de los resultados obtenidos después de experimentar la secuencia exploratoria, éstos, se contrastaron con los obtenidos en el análisis a priori y se obtienen las conclusiones del trabajo.

La secuencia exploratoria constó de cuatro actividades diseñadas en el software Sketchpad en donde los estudiantes podían realizar lo que se les indicaba, por la extensión del trabajo, sólo daremos muestra de la primera actividad.

Actividad 1. Mueve el punto rojo y describe el efecto que produce en la figura



Esta actividad se dividió en dos partes:

1) Se les pidió a los alumnos que describieran todo lo que observaran que ocurría al mover el punto rojo, esto con la finalidad de que los estudiantes empezaran a hablar de cambios, qué pudieran observar qué cambia, cómo cambia, etc.

2) Se les pedía que encontraran "la gráfica" que describe la manera en la que cambia el área de la figura al cambiar el tamaño del lado A.

Resultados

A continuación presentamos algunos de los resultados obtenidos en la Actividad 1.

El lado A tiene cierta proporción con el lado B: Si el lado A aumenta, si lado B disminuye, Si el lado B aumenta, el lado A disminuye. Si A llega a su punto límite, B=0, Si B llega a su punto límite, A=0. En cualquier punto donde A y B se muevan, forman un cuadrilátero, excepto en sus puntos límites

Si A esta en el punto limite izquierdo la figura desaparece (o no hay)

Si B esta en el punto limite derecho la figura desaparece (o no hay)

Si A esta en el punto limite derecho, se convierte en una línea

Si B esta en el punto limite izquierdo, se convierte en una línea.

Independiente en donde movamos un punto, si esta se mueve cierta distancia a la izquierda, esa misma distancia la hace a la derecha.

Las areas respectivas formadas en los puntos donde se mueve a la misma distacia es la misma Si a =1 b=1 Si a=2 b=1 Si a=3 b=0 donde a=base, b=altura

en el punto medio en un punto en un punto maximo

Cuadro 1. Transcripción de la respuesta del estudiante A del equipo 1 a la Actividad 1

El lado A y el lado B tienen cierta *proporción*, van a la par los dos.

- Pusimos que si el lado *A aumenta* el lado *B disminuye* y si el lado *B aumenta* es lo contrario, el lado *A disminuye*;

- También pusimos que si A llega a su punto límite entonces B es igual a cero y si B llega a su punto limite A es igual a cero, luego pusimos que *en cualquier punto donde A y B se muevan forman un cuadrilátero excepto en* sus puntos limites que es cuando pasa que A esta en su punto límite izquierdo entonces la figura desaparece y es lo que va a pasar lo contrario con el B que si está en su punto límite derecho, entonces la figura también desaparece.

Cuadro 2. Transcripción de la respuesta del equipo 1 a la Actividad 1

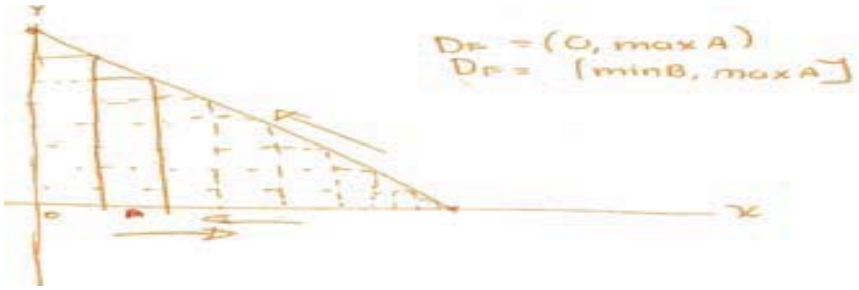
En la respuesta de equipo podemos observar que logran identificar qué varía y cómo varía, pero por otra, en la parte dos de la actividad, se les pedía obtener la gráfica que describía la función, es decir, no se le pidió una expresión algebraica o fórmula, pese a ello, los estudiantes se centraron en hallar una fórmula para posteriormente poder graficar.

Su altura se va haciendo más grande es decir se va alargando *y de acuerdo con su base* se va siendo más estrecho, hasta que desaparece.

Cuando el punto tienda a la izquierda su base es la que tiende a desaparecer y su altura (B) va ir disminuyendo (viceversa a la anterior)

* Su área siempre va ser la misma pero tendiendo a cero su área ya no es igual sino va a ser cero,

** Es una función porque su imagen va ser relacionada es decir que cada lado A hay un lado B*



Cuadro 3. Transcripción de la respuesta del estudiante A del equipo 2 a la Actividad 1

En esta actividad, este estudiante afirma que es función ya que cumple con ser una relación entre los elementos de dos conjuntos, a cada elemento de un conjunto A, le asocia, un elemento del conjunto B. Y esto utiliza para plasmarlo en una gráfica.

Otro estudiante también muestra ver la función como relación entre dos conjuntos, ya que afirma que a cada elemento del conjunto A le asocia la de un conjunto B, y para dar la gráfica que

describe la función, halla primero una regla de correspondencia para posteriormente poder graficar, esto lo vemos en el siguiente cuadro.

Podemos observar que asigna a cada elemento de A uno de B. * En la proporción en que se hace más grande la línea (al mover el punto), la otra disminuye. * Cada línea (A y B) representan dos lados que son paralelos entre si y juntos forman un cuadrilátero (excepto en sus puntos límites. * Cuando A y B tienen el mismo tamaño, se forma un cuadrado. * Si el punto B llega al extremo derecho, entonces la figura que forma el punto A desaparece. * Si el punto A llega al extremo derecho, entonces el punto B desaparece y la figura que forma A es una línea horizontal. - Al mover el punto A, *el área* que forma la figura es igual en todos, excepto en los extremos y cuando la figura formada es un cuadrado. - *El área mayor es cuando la figura forma un cuadrado* - *El lado A tiene cierta proporción con el lado B* *Si a aumenta B disminuye y Si a disminuye B aumenta* En la segunda parte, *Si x=y Cuadrado (Área mayor)* *x+1=y-1 Rectángulo* *x-y=0*

Cuadro 4. Transcripción de la respuesta del estudiante B del equipo 2 a la Actividad 1

Pusimos que la línea roja representa su longitud y la azul su altura, y cuando la línea roja disminuye de tamaño la azul aumenta y viceversa, la longitud de A se recompensa en B, así la longitud máxima en A es la mínima en B y la mínima en A es la máxima en B, el área siempre es la misma excepto cuando A o B son nulos, es decir, cero.

Cuadro 5. Transcripción de la respuesta del equipo 1 a la Actividad 1

Los resultados de la actividad 1 dan evidencia de que los estudiantes logran observar cambio y argumentar utilizando ideas variacionales, por ejemplo, en términos de proporcionalidad, sin embargo, en la segunda parte, al pedirles una gráfica de la función se centran en la expresión algebraica y hacen a un lado las ideas de variación y cambio que habían observado, esto ya ha sido reportado como un obstáculo en el aprendizaje, ya que los estudiantes consideran que una función tiene que tener una expresión algebraica y que de ésta se obtiene la gráfica.

Las tres restantes actividades nos dieron muestran que los alumnos para justificar sus respuestas recurren a la memoria, a lo algebraico, es decir, a pesar de que logran dar respuesta correcta, primero intentan buscar una expresión o relación algebraica que ya conozcan, posteriormente la comparan con la situación plateada.

Conclusiones

El analizar las producciones de los estudiantes en la situación exploratoria nos ha permitido observar que los estudiantes si construyen conocimiento matemático en torno al concepto función, al enfrentarse al concepto función en situación variacional logran construir argumentos utilizando ideas variacionales, sin embargo, la práctica docente condiciona dichas argumentaciones, ya que, en algunos casos los hace recurrir a la memoria o centrarse en encontrar expresiones algebraicas, esto es, por el discurso escolar al cual han sido enfrentados los limita y por ellos algunas de sus argumentaciones giran en torno a aspectos algebraicos.

La noción que parecen tener los estudiantes del concepto función aún después de la experimentación queda limitada a una expresión algebraica o fórmula ya que insistentemente trataban de buscar en cada actividad planteada una expresión algebraica aún cuando lo que se les pidiera fuera por ejemplo, la gráfica de la función.

Consideramos que la experimentación de la secuencia exploratoria pudiera tener resultados diferentes y más favorables en estudiantes donde no hubieran tenido conocimiento previo sobre el concepto función, es decir, donde no hayan sido enfrentado un discurso escolar del concepto función basado en la idea de ésta como una fórmula, que tiene una representación la cual es una gráfica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo.* Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En Cantoral R. (Ed). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 69 – 91). México. Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4 (2)*, 103-128.

Escobedo, A.; Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. G. Buendía (Presidente), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* (pp. 568 – 580). Tlaxcala, México.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

López, S. (2009). Un estudio sobre la noción de función constante. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad de Yucatán. México.

Jarero, M.; Ordaz, M. (2009) Un estudio sobre el discurso matemático escolar en el nivel medio superior del estado de Yucatán. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 247-256. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

LA DEMOSTRACIÓN, UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES SOCIALES

Juan de Dios Viramontes Miranda, Gustavo Martínez Sierra
UACJ México
CICATA - IPN
jddviramontes@gmail.com, gmartínezsierra@gmail.com
Campo de investigación: Estudios socioculturales Nivel: Superior

Resumen. *El conocimiento de sentido común ha sido estudiado desde diferentes perspectivas y se ha considerado útil para describir fenómenos relacionados con los hechos de la vida cotidiana y del pensamiento social. En matemática educativa nos hemos acercado a esta forma de conocimiento desde la teoría de las representaciones sociales (RS). Aquí reportamos el planteamiento de una problemática en torno a los procesos de argumentación, como parte esencial para entender desde el punto de vista didáctico la demostración. Se presentan los primeros resultados y los análisis preliminares que constituyen la primera comunicación acerca de lo que se cristalizará en mi tesis doctoral.*
Palabras clave: argumentación, representaciones sociales, demostración

Antecedentes

Uno de los aspectos que se han analizado en la investigación en torno a la demostración ha sido la necesidad de entender mejor la relación que existe entre esta y la argumentación (Balacheff, 1999, 2008), y se han tomado por lo menos tres posiciones, una que establece que la argumentación constituye un obstáculo epistemológico, en el sentido que Brousseau da al concepto (Brousseau, 1998), para entender la demostración (tesis de la ruptura), otra que postula la posibilidad de construir un puente que las comunique (tesis de la continuidad) y la última que propone que se reconozcan ambas entidades como diferentes y que se estudie la naturaleza de ambas. (Boero, 1999, Larios, 2006).

Esta discusión permite aproximarse a los procesos de argumentación como fuente de problemas que necesitan ser investigados para dar cuenta de las relaciones que existen y que necesitan ser tomadas en cuenta para el diseño de actividades para el aula. La motivación de la investigación es entender dichos procesos desde las aportaciones que nos pueda brindar el conocimiento de sentido común a través de la teoría de las representaciones sociales.

Planteamiento del problema

La Universidad Autónoma de Ciudad Juárez tiene un programa de licenciatura en matemáticas el cual se encuentra adscrito al Instituto de Ingeniería y Tecnología. El plan de estudios de dicha licenciatura consta de una carga académica de 40 materias en donde a partir del cuarto semestre la gran parte de estas requieren que el estudiante aprenda a hacer demostraciones. Entonces queremos contribuir a introducir en el sistema didáctico algunas recomendaciones para que la transición entre las matemáticas sin demostraciones y aquellas que las requieren sea más ligera y que cuente con mayor significación para el estudiante. De aquí que el objetivo general de esta investigación es aproximarse a los procesos de argumentación que viven en la cultura del salón de clases de los estudiantes y profesores del programa de la licenciatura en matemáticas de la UACJ para conocerlos, describirlos y caracterizarlos en términos de RS, con el fin de sentar bases sólidas de investigación en el área partiendo de una descripción de la realidad cotidiana. En este documento solo se mostrarán resultados correspondientes a la primera etapa de la investigación.

Marco conceptual

En esta investigación tomaremos a la teoría de las representaciones sociales (TRS) como la base de nuestro marco conceptual, partiremos de caracterizar al sentido común como una forma de percibir, razonar y actuar en la realidad cotidiana, el cual incluye contenidos cognitivos, afectivos y simbólicos con fines de orientación de conductas, organización y comunicación en grupos sociales. (Araya, 2002). Entonces según Araya (2002), “las RS constituyen sistemas cognitivos en los que es posible reconocer la presencia de estereotipos, opiniones, creencias, valores y normas que suelen tener una orientación actitudinal positiva o negativa”. Esta manera de acercarse al conocimiento de sentido común nos posibilita entender la dinámica de las interacciones sociales y caracterizar aquellos elementos que determinan las prácticas sociales. (Abric, 2004).

Las RS se construyen a partir de componentes que proceden del fondo cultural acumulado en la sociedad a lo largo de su historia, a partir de los mecanismos de anclaje y objetivación y finalmente del conjunto de prácticas sociales que se encuentran relacionadas con las diversas modalidades de la comunicación social. Las RS tienen diversas funciones dentro de las cuales podemos incluir: la comprensión que permite pensar el mundo y sus relaciones, la valoración que

permite calificar los hechos, la comunicación que permite interactuar con otras personas y la actuación que está condicionada por la misma RS (Araya, 2002).

Metodología

La naturaleza de las RS dicta el acercamiento multimetodológico para la recolección de datos y para el análisis de los mismos. En este caso que constituye solo la primera parte de la investigación se utilizará la técnica de asociación libre para obtener los primeros elementos del contenido de las RS, a través del análisis del contenido semántico de la misma.

El método de asociaciones libres permite reducir los límites de la expresión discursiva controlada, en cierta medida, ya que descansa sobre la expresión oral espontánea (Abric, 2004), pero también tiene sus obvias limitaciones, de aquí que sólo se reporte este resultado como parcial y de índole preliminar. Se levantaron los datos a través de tres preguntas a 38 alumnos del programa de matemáticas de todos los semestres y a 11 profesores del programa, las preguntas fueron las siguientes:

> Escribe cinco palabras o frases que te vengan a la mente cuando escuchas la palabra "demostración".
>
> Escribe cinco palabras o frases que te vengan a la cabeza cuando escuchas la palabra "matemáticas".
>
> Escribe cinco palabras o frases que te vengan a la cabeza cuando escuchas la frase "verdadero en matemáticas"

Después de la recolección de la información se procedió a su análisis a través de la frecuencia de los ítems y de su orden de importancia, esta metodología está inspirada en la que lleva el nombre de redes asociativas (De Rosa, 2002) y finalmente comparando lo que contestaron los alumnos y los profesores.

Análisis de resultados

En la Tabla 1 podemos observar las respuestas más relevantes en términos numéricos que contestaron en torno a la primera pregunta. Lo que se pudo observar es que lo que contestaron

los profesores está íntimamente ligado con la estructura de una demostración: Teorema – Hipótesis – Prueba, esto denota una percepción más sólida y fuerte que no va de acuerdo con la forma procedural de los estudiantes los cuales dicen verbos como comprobar, probar y pensar. Esto nos da elementos para ir entendiendo el contenido de la RS de la demostración, la cual hasta lo que hemos investigado se perciben diferentes.

El hecho de que sean diferentes no es lo más interesante sino la forma estática vs forma dinámica en la que es caracterizada por los dos actores del sistema didáctico.

Profesores (11)	Alumnos (38)
Prueba (5)	Comprobar (8)
Teoremas (5)	Teoremas (13)
Hipótesis (3)	Difícil (7)
	Pensar (11)
	Probar (13)

Tabla 1: Demostración

En la Tabla 2 se muestran los resultados en torno a lo que caracteriza la matemática en los profesores y alumnos. Se comparten los conceptos Números – Algebra – Demostraciones y por parte de los profesores se agrega Ciencia y Lógica. Esto nos da una idea de homogenización de ésta RS entre los actores pero con un elemento que la sigue distinguiendo ya que los profesores la conciben también cono una actividad ligada a una comunidad científica y a una estructura interna que la caracteriza.

Profesores (11)	Alumnos (38)
Números (4)	Números (27)
Algebra (3)	Algebra (8)
Demostraciones (3)	Demostraciones (3)
Ciencia (3)	
Lenguaje (3)	

Tabla 2: Matemáticas

La Tabla 3 nos muestra los descriptores de lo que consideran que es lo verdadero en matemáticas. De esta tabla podemos decir que los elementos son los más homogéneos de los tres, esto nos permite ver que lo verdadero se comparte siendo esto una de las bases que podríamos utilizar para el diseño de actividades, aunque hay que comentar que lo verdadero no está ligado a la autoridad del profesor por parte de los estudiantes sino a la estructura de la matemática misma ya que se fundamentan en conceptos como Axiomas – Teoremas – Demostración. Se percibe que hay confianza en la matemática como ciencia, como lo verdadero.

Profesores (11)	Alumnos (38)
Axioma (4)	Axiomas (6)
Teoremas (6)	Teoremas (9)
Demostrable (4)	Demostrado (10)
	Demostración (9)
	Lógica (6)

Tabla 3: Verdadero

Se reitera que estos son los primeros análisis de la información, los cuales nos van a permitir construir otros instrumentos como guiones de entrevista para poder seguir observando los procesos de argumentación a través de lo que las RS nos dicen de ellos.

Conclusiones

Como conclusiones preliminares podemos comentar las siguientes:

- La noción de demostración suele tener un estatus más o menos estático en los profesores, se describe como algo acabado, en cambio en los estudiantes se describe a través de procesos.
- La noción de matemática tiene en los profesores una serie de características bien diferenciadas y plurales, en cambio en los estudiantes se carga hacia las nociones de números, demostraciones y álgebra, con una marcada frecuencia en los números.

- La noción de verdadero tiene connotaciones que giran alrededor de las estructuras formales de validación: verdadero = axiomas – teoremas – demostración.

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (2004). Prácticas sociales y representaciones. México: Ediciones Coyoacán.

Araya, S. (2002). Las representaciones sociales: ejes teóricos para su discusión. Cuaderno de Ciencias Sociales 127. Costa Rica: FLASCO.

Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. Preuve, International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Recuperado el 06 de Mayo de 1999, de http://www.cabri.net/Preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. ZDM Mathematics Education 40, 501 – 512.

Boero, P. (1999). Argumentación y demostración: una relación compleja, productiva, e inevitable en las matemáticas y en la educación matemática. Preuve, International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Recuperado el 08 de Julio de 1999, de http://www.cabri.net/Preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

De Rosa, A. (2002). The “associative network”: a technique for detecting structure, contents, polarity and stereotyping indexes of the semantic fields. European Review of Applied Psychology, 52(3-4), 181 – 200.

Larios, V. (2006). Demostrar es un problema o el problema es demostrar. México: Universidad Autónoma de Querétaro.

HABILIDADES MATEMATICAS PARA EL BUEN DESEMPEÑO DEL INGENIERO

Juan Pérez Rojas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" Cuba
jperez@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: Interdisciplinaridad Nivel: Superior

Resumen. *Como se conoce el estudio de las habilidades es un fenómeno que puede centrarse desde distintos ángulos, pero: en este sentido siempre serán insuficientes. La verdadera dimensión de las habilidades es integral, sistemática y compleja.*
Varios autores como (Fariñas, 1995, Labarrere, 1997) han comprendido la real dimensión de las habilidades y las estudian en los tres planos de análisis que revelan la multiplicidad de la persona que aprende. Por su parte Alberto Labarrere (Labarrere, 1997) establece tres planos de funcionamiento de las habilidades interconectadas dialécticamente: Plano instrumental operativo, plano personal, y el plano relacional.
De acuerdo con estos principios y considerando una serie de argumentos, el trabajo se basa en exponer y explicar los criterios o requisitos que a nuestro juicio caracterizan lo que denominamos Habilidad Matemática necesaria para un buen desempeño del ingeniero.
Palabras clave: habilidades matemáticas, desempeño del ingeniero

Introducción

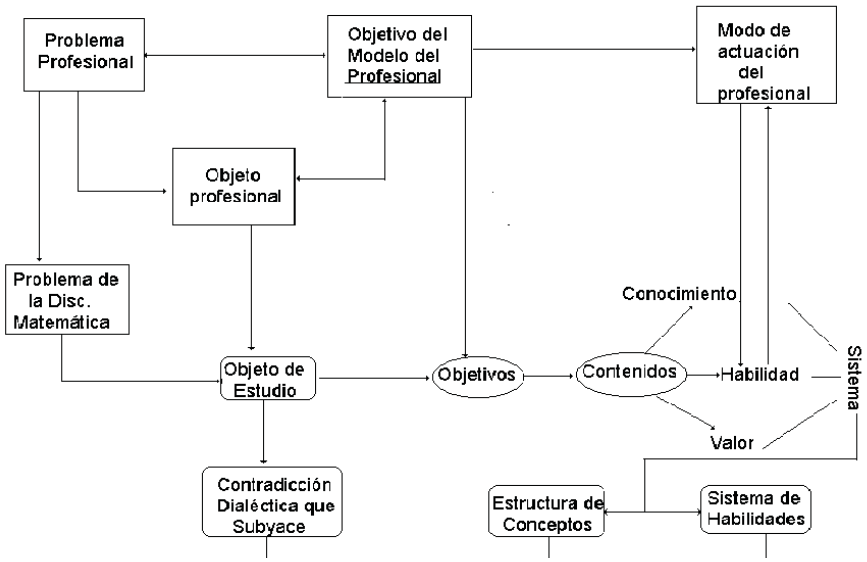
En la lógica dialéctica, consideramos lo relativo a la determinación de las contradicciones dialécticas como el objeto de estudio, lo cual nos permitió, determinar en nuestra disciplina matemática, en las asignaturas y temas, tales contradicciones, así como definir y conformar el esquema matemático conceptual que debe formar al futuro ingeniero. Asimismo en la forma de delimitar los conocimientos referenciales y núcleos conceptuales, para la determinación de habilidades fundamentales en el ingeniero, Novel y Ausubel ofrecieron un conjunto de postulados constructivistas (Pérez, 1999).

Para la Determinación de las habilidades generales y específicas, la relación concepto - acción, los niveles de la formación y el desarrollo de las habilidades, así como la definición de la estructura externa de las habilidades matemáticas necesarias para estas carreras. Nos apoyamos en la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de (Galperin & Talizina, 1982), y retomada por Carlos Álvarez de Zayas, (Álvarez, 1996).

Estos fundamentos nos han permitido construir un modelo fundamental para la formación y desarrollo de las habilidades de interpretación y resolución de problemas matemáticos tomando

como telón de fondo, el esquema conceptual, adecuados a la visión, ya que las tareas profesionales del ingeniero lo requieren.

Modelo para la determinación de las habilidades matemáticas necesarias para el ingeniero



En el Plano didáctico, es de vital importancia tener en cuenta los principios propuestos para la selección y secuenciación de contenidos por varios autores los cuales se integran las leyes de la didáctica formuladas por Álvarez de Zayas (Álvarez, 1996)

Finalmente, el concepto Vigotskiano (Vigotsky, 1981) de "Zona de desarrollo próximo ", lo retomamos aquí, para diseñar en la concepción de la disciplina y en la dinámica de la formación y desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas, los niveles de ayuda (de orientación y ejecución) que facilitan que las mismas se apropien con más precisión, rapidez y solidez por parte del alumno.

La contribución de la Matemática a la ingeniería se materializa en la concepción científica del ingeniero y en los modos de actuación profesional del mismo, no sólo por el conocimiento matemático y las habilidades matemáticas que aporta, sino en lo que a través de estos elementos la Matemática contribuye a la formación interdisciplinaria, integral y sistemática dentro del proceso de formación y desarrollo de ese ingeniero. Toda habilidad matemática necesaria (H. M. N.) se integra al modo de actuación personal y a los mecanismos de autodesarrollo de la personalidad, presentes y expresados en los tres planos de desarrollo de la persona.

El proceso de formación y desarrollo del profesional de perfil amplio es no sólo un acto instructivo, donde prime lo cognitivo-formativo sino que es al mismo tiempo, un acto formativo, educativo, donde a través del contenido y las tareas, se van moldeando sentimientos, valores, actitudes y formas de intercambiar con los demás y asumir la vida. Instruyendo se educa y educando se aprende, lo instructivo y lo educativo es una unidad y deviene en el plano didáctico pedagógico por ley (Álvarez de Zayas, 1996).

La formación científico-matemática del estudiante de ingeniería define conocimientos y habilidades que aplica no sólo a problemas matemáticos o ingenieriles, sino a otros contextos de su actividad y sus relaciones, en la misma medida que lo hacen reflexionar y valorar acerca de cómo actúa y de qué resultados le proporcionarán mayor competencia y desarrollo.

La personalidad del estudiante es integral, y lo profesional, representa una faceta de su personalidad, cualquier progreso en esta esfera, repercutirá consciente e inconscientemente en toda la personalidad (Beatón, 1988)

Para Gloria Fariñas (Fariñas, 1995), la habilidad de comprensión y búsqueda de información es una habilidad conformadora del desarrollo personal (H. C. D. P.) ,y está dirigida tanto a un fenómeno natural como a los valores morales o estéticos, a las personas que nos rodean como a nosotros mismos, y puede realizarse a partir de la observación, de acciones lógicas como la deducción de la lectura, el trato con los demás y a través de diferentes códigos como la palabra, símbolos matemáticos u otros.

La comprensión es básica tanto en la niñez como en la adultez, y tiene lugar... en la solución de un problema matemático. La comprensión subyace en la concepción de sí mismo, de cada individuo y en el trato al otro, muchos autores la consideran como un momento de aprendizaje.

Nosotros consideramos que dos de las H.M.N. que proponemos, la interpretación y la representación, forman parte estructural y funcional de esta habilidad de comprensión, catalogada como H.C.D.P. por (Fariñas, 1995).

Asimismo, la otra H.M.N. que defendemos, la solución de problemas, coincide explícitamente con otra de las H.C.D.P. que esta autora define y que otros autores como (Labarrere, 1997) reconocen. La resolución de problemas matemáticos como habilidad, al ser sistematizada, automatizada y personalizada, se integra a la resolución de problemas como H.C.D.P.

En cuanto a los planos de desarrollo personal (Labarrere, 1997), las H.M.N. se manifiestan interrelacionadamente en los tres planos. Así, en el instrumental – operativo, caracterizado porque el objeto de las acciones y las reflexiones del alumno lo constituyen el problema y los medios de solución a que él tenga acceso, con independencia que conduzcan o no a la solución del problema. "La actividad de análisis del alumno está dirigida fundamentalmente a poner de manifiesto la estructura del problema". (Labarrere, 1997, p. 14).

Aquí, a base para la transferencia lejana de los procedimientos, la constituye el cómo, por qué y para qué de su aplicación

En este plano instrumental-operativo, coexisten las tres H.M.N. que proponemos, aunque la interpretación y la representación, llevan a nuestro juicio el peso de la ejecución.

Esto se reitera en el segundo plano (personal), donde prevalece la metacognición, en el (plano personal).en el que se despliega el conocimiento que el alumno tiene de sí mismo como solucionador de problemas, las creencias en que actúan de cierta manera y con determinados procedimientos, le resulta favorable o desfavorable.

Los procedimientos y conocimientos con los que el alumno enfrenta los problemas y situaciones, alcanzan otro escalón del desarrollo cuando devienen personalizados, cuando acceden al plano personal y penetran la esfera de las creencias y las convicciones... ligadas a su afecto y emocionalidad. (Labarrere, 1997).

En el plano relacional, tales H.M.N, implican al alumno en la apropiación no sólo de conocimientos, habilidades y soluciones al problema, sino en la asimilación de modelos de acción de compañeros y maestros ante el problema y del modelo de interacción que entre ellos se produce con respecto al problema que se resuelve y a la comunicación que sobre él se establece. La acción del otro ofrece modelos para los procesos mentales de la persona (Vigotsky, 1981).

Por último, el conocimiento de la interacción y la habilidad para llevarla a cabo pueden lograrse únicamente si durante la solución de problemas... los procesos interactivos devienen objeto específico de la atención y el análisis por parte del alumno y en particular los modelos de interacción

Finalmente, queremos resaltar la idea de que promover en el estudiante el desarrollo de las H.M.N., significa no una ruptura entre lo cognitivo-profesional, ni entre la persona y el futuro

profesional, sino todo lo contrario, las H.M.N. como sistema, constituyen mecanismos que desde la matemática, pretenden tributar al pleno e integral desarrollo del estudiante como persona, del cual emergerá el profesional.

El sistema de habilidades matemáticas necesarias para el ingeniero

Considerando los criterios antes expuestos y que sirven de base para fundamentar el sistema de habilidades matemáticas necesarias para el ingeniero, procedemos a la definición de cada una de las H.M.N. en el ingeniero, partiendo de los modos de actuación profesional, los objetivos profesionales, así como los objetivos a nivel de la disciplina, y el sistema de conocimientos y habilidades presentes en el contenido de la misma. (Procesamiento de la información).

Este sistema de H.M.N., está compuesto por la habilidad resolución de problemas matemáticos, la habilidad de interpretación y habilidad de representación. Ellas conforman una unidad, aunque tienen independencia relativa. En las interrelaciones, la interpretación y la representación se complementan y se subordinan a la resolución de problemas en los diferentes contextos temáticos dentro de la disciplina (y fuera de ella).

En otro prisma, estas tres habilidades se hallan implicadas en el complejo sistema de todas las habilidades matemáticas de la disciplina, y para que ellas (H.M.N.) se formen y desarrollen, tienen que hacerlo simultáneamente los demás.

Conclusiones

Definido el marco teórico referencial de nuestra investigación resulta importante destacar las conclusiones de ella derivadas.

- Selección y reordenamiento de los contenidos matemáticos de la disciplina, con la consecuente construcción del esquema conceptual matemático que el estudiante debe formar y consolidar.
- La elaboración del modelo funcional de las habilidades; interpretación y resolución del problema, con sistemas de acción y los niveles de ayuda que se exigen en la formación sistematización y despliegue de las mismas.

- La concepción de la dinámica ejecutiva de los contenidos matemáticos, delimitando las relaciones entre: Tareas – base orientadora de la actividad, conceptos y habilidades de partida que se desean formar, para evaluar el estado y el avance de estos aprendizaje en el alumno.
- Esta es nuestra proyección, para contribuir al desarrollo de las habilidades matemáticas necesarias que necesita el estudiante de ingeniería, cuya novedad consiste quizás, en la integración sistemática.

Referencias bibliográficas

Álvarez, C. (1996) El Diseño Curricular en la Educación Superior Cubana. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Delgado, R (1999). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas. Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Politécnico "José A. Echevarria". La Habana.

Fariñas, G. (1995). Maestro, una estrategia para la enseñanza. La Habana: Editorial Academia.

Fernández B. (1998) Una estrategia de articulación interdisciplinaria para el perfeccionamiento curricular en la Educación Superior. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de la Habana.

Labarrere, A. (1997). Estudio del funcionamiento cognitivo y el Desarrollo, en zona desarrollo próximo. La Habana: ICCP, MINED.

Pérez, J. (1999). Modelo teórico para la formación y desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas fundamentales en los estudiantes de la carrera de Geología. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Pinar del Río Hermanos Saíz Montes de Oca¨. Cuba.

Torres, P (1998).La enseñanza de la matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI. Logros y Retos. La Habana: Editorial. Pueblo y Educación.

Vigostky, I (1981) Pensamiento y Lenguaje. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

UNA EXPERIENCIA EN EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS, EN CURSOS DE ESTADÍSTICA DEL ÁREA DE ECONÓMICO ADMINISTRATIVO DE LA UNIVERSIDAD DE SONORA, MÉXICO

Gerardo Gutierrez Flores, Irma Nancy Larios Rodríguez, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora México
nancy@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con estadística Nivel: Superior

Resumen. *En el trabajo se propone, a manera de ejemplo una secuencia didáctica para el curso de Estadística I del Área de Económico Administrativo de la Universidad de Sonora, en México. Las secuencias didácticas fueron diseñadas en el proyecto de investigación institucional, titulado "Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística, bajo el esquema del nuevo modelo curricular, del área de Económico Administrativo de la Universidad de Sonora", proyecto que surge ante la necesidad de dar respuesta por parte del Departamento de Matemática a los cambios de un nuevo plan curricular implementado en la Universidad de Sonora.*
Palabras clave: secuencia didáctica, nuevo modelo curricular

Introducción

El trabajo se desarrolla tomando como referente Los Lineamientos Generales para el Nuevo Modelo Curricular de la Universidad de Sonora (2003). Muy particularmente, se enfoca en los cursos de estadística que se imparten en el Área de Económico Administrativo en dicha institución. El nuevo modelo curricular, pretende entre sus objetivos principales:

1. Fomentar en los estudiantes el descubrimiento y construcción de conocimiento, en oposición a la tendencia predomínate de trasferencia del conocimiento.
2. Centrar el proceso de enseñanza - aprendizaje en los estudiantes y no en los profesores.
3. Fomentar la colaboración interdisciplinaria e interdepartamental, en lugar de la fragmentación disciplinaria y departamental.
4. Introducir el trabajo en equipo entre la planta docente y los estudiantes.
5. Promover la flexibilidad, movilidad y vinculación en el desarrollo del currículo.
6. Incorporar el uso nuevas tecnologías en la enseñanza.

Lo antes señalado es una forma totalmente distinta a la manera tradicional en que se han presentado los contenidos de los cursos. Particularmente, en el caso de los cursos de estadística,

se ha visto que la enseñanza tradicional no impacta significativamente en el entendimiento y retención de los conceptos, ya que habitualmente: se enseñan técnicas aisladas que tratan de unirse al final con algún tipo de aplicación; se enseñan primeramente teorías, y fórmulas y después algunos ejercicios; se enfatiza en calcular una respuesta correcta, sin atender para qué se está realizando ese cálculo.

Sin lugar a duda el lograr concretar los objetivos declarados en nuevo modelo curricular es uno de los grandes retos actuales de la institución, es por eso que el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora impulso varios proyectos de investigación docente con la intensión de dar respuesta a los requerimientos que demanda el modelo curricular. El trabajo que aquí se presenta forma parte de las acciones que se encuentran desarrollando en uno de esos proyectos, titulado: "Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística, bajo el esquema del nuevo modelo curricular, del área de Económico Administrativo de la Universidad de Sonora",

A continuación describiremos el planteamiento del problema y las consideraciones teóricas en que se fundamento el trabajo.

Planteamiento del problema

Lo expuesto anteriormente, sobre las características y recomendaciones para el desarrollo de cursos de estadística fueron retomadas en los nuevos currículos; sin embargo para que los cambios realmente se efectúen y no sólo queden escritos en papel, es necesario realizar una serie de acciones, en donde los profesores adscritos al Departamento de Matemáticas, que imparten los cursos de estadística, juegan un papel de vital importancia. Dentro de estas acciones, consideramos las siguientes:

a) Capacitar y/o actualizar a los profesores en la implementación de nuevas formas metodológicas de enseñanzas, alternativas a la enseñanza generalmente sólo discursiva, así como capacitar a los profesores en el uso de nuevas tecnologías.

b) Diseñar materiales didácticos, así como notas pertinentes.

El diseño de secuencias didácticas fue el eje central de la capacitación para los profesores.

Marco teórico

Uno de los referentes teóricos considerado en el desarrollo del proyecto, fue la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (citado en Gálvez, 1994, p.10), donde se define la situación didáctica de la siguiente manera:

"Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor como un fin de permitir a los alumnos a reconstruir algún conocimiento."

También consideraremos el concepto de *competencia* planteado por Perrenoud (2004), como una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones. Muy particularmente consideramos para el diseño de las actividades didácticas y su aplicación con los estudiantes el concepto de situación problema, caracterizada por Astolfi (1997, pp. 144-145) de la siguiente manera:

1. El estudio se organiza en torno a una situación de carácter concreto, que permita de un modo efectivo al alumno formular hipótesis y conjeturas. No se trata pues de un estudio depurado, ni un ejemplo ad hoc, con carácter ilustrativo, como se encuentran en las situaciones clásicas de enseñanza (incluso en trabajos prácticos).
2. Los alumnos perciben la situación que se les propone como un *verdadero enigma que resolver*, en el cual están en condiciones de emplearse a fondo. Es la condición para que funcione la *trasmisión*: el problema, aunque inicialmente propuesto por el maestro, se convierte entonces en "su asunto".
3. Los alumnos *no disponen al principio, de los medios de la solución buscada*, debido a la existencia del obstáculo que deben superar para lograrlo. Es la necesidad de resolverlo lo que conduce al alumno a elaborar apropiarse colectivamente de los instrumentos intelectuales que serán necesarios para la construcción de una solución.
4. La situación debe ofrecer una resistencia suficiente, que lleve al alumno a emplear a fondo sus conocimientos anteriores disponibles, así como sus representaciones, de modo que está conduzca a cuestionarlas de nuevo y a elaborar ideas nuevas.

5. Por eso, la solución no debe percibirse sin embargo como fuera del alcance para los alumnos, al no ser la situación problema una situación con carácter problemático. La actividad debe trabajar en una *zona próxima*, propicia a la aceptación del desafío intelectual y la *interiorización* de las «reglas del juego».
6. La *anticipación* de los resultados y su expresión colectiva preceden a la búsqueda efectiva de la solución, el «juego».
7. El trabajo de la situación del problema funciona también sobre el modo del *debate científico en el interior de la clase,* y estimula los conflictos sociocognitivos potenciales.
8. La *validación* de la solución y su *sanción* no la aporta el profesor de una forma externa, sino que resulta del *modo de estructuración de la situación* por sí misma.
9. Reexaminar de forma colectiva la progresión llevada a cabo es la ocasión para un *repaso reflexivo*, con carácter metacognitivo; esto ayuda a los alumnos a concientizarse de las *estrategias* que han puesto en práctica de manera heurística, y a estabilizarlos en *procedimientos* disponibles para nuevas situaciones problemas.

Metodología

El diseño de las situaciones didácticas se realizo durante los semestres 2008-1 y 208-2, estas se fueron retroalimentado al irse probando en los cursos de Estadística I (Estadística Descriptiva) y Estadística II (Estadística inferencial).

La forma de trabajo con los estudiantes constaba de varios momentos, primeramente realizaban trabajo en forma individual o en equipo, posteriormente realizaban una discusión y reflexión grupal sobre los resultados obtenidos y finalmente el profesor institucionalizaba, los conceptos involucrados en las situaciones didácticas planteadas a los estudiantes. En relación a las actividades didácticas, algunas de ellas se diseñaron utilizando applets, algún tipo de software, calculadora o realizando simulaciones en el aula, o simplemente se utilizando actividades en papel.

A continuación se presentan a manera de ejemplo, dos situaciones de una secuencia didáctica para el curso de Estadística I, para el tema de regresión lineal, estas fueron aplicadas en cuatro cursos para su retroalimentación. En todas las situaciones se pretendía el desarrollo de ideas o

intuiciones correctas de los conceptos relacionados con el tema seleccionado, así como la desarrollar algunas de las competencias matemáticas deseables en los estudiantes, como la de pensar y razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas, obtener, interpretar y generar información con contenido matemático, utilizar técnicas matemáticas básicas e instrumentos para hacer matemáticas, interpretar y representar expresiones, comunicar a otras personas ideas matemáticas.

En cada situación se especifica el objetivo pretendido, las instrucciones de los estudiantes, y así como comentarios adicionales en relación al desarrollo de la actividad.

Situación 1

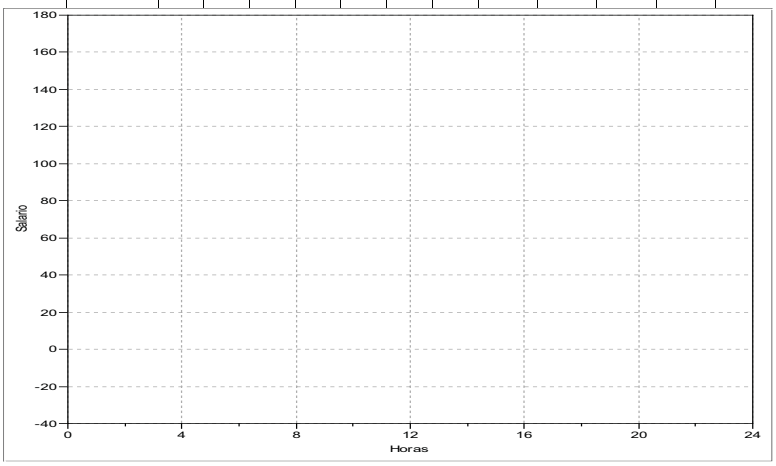
Esta situación pretende que el estudiante interprete correctamente la recta de regresión lineal. Esto significa que comprenda que la recta obtenida por el método de mínimos cuadrados es la que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias de estos puntos a la recta. Esta actividad se trabaja en equipo de tres estudiantes para el intercambio de opiniones, pero cada estudiante cuenta con una hoja de trabajo.

*Instrucciones para los estudiantes***:** La tabla 1 muestra las horas trabajadas y el sueldo devengado por once empleados de una empresa.

a. Grafica estos puntos en el plano que se le proporciona.

Tabla 1. Relación horas trabajadas y salario

Horas	6	8	9	10	12	13	14	16	17	18	20
Salario	30	50	40	60	80	70	90	110	140	170	150



b. Traza la recta que considera mejor se ajusta a estos puntos.

c. Dibuja las distancias de estos puntos a la recta y forme cuadrados.

d. Estima la suma de las áreas de los cuadrados dibujados.

e. Compara tu resultado con tus compañeros de equipo.

Comentarios en relación al procedimiento. Se espera que los estudiantes, con ciertas dificultades logren dibujar las distancias de los puntos a la recta, formar los cuadrados y estimar la suma de las áreas de los cuadrados dibujados, la cual seguramente será diferente para cada uno de los estudiantes del curso, generándose una discusión grupal sobre la interrogante ¿cuál es la recta que mejor ajusta al conjunto de datos del diagrama de dispersión?

Al finalizar el punto anterior, el profesor proporciona a los equipos acetatos con la Figura 2, para que la compare con la que dibujaron, comenta que es la recta que mejor ajusta al conjunto de puntos (diagrama de dispersión). Se empiezan a introducir los conceptos de residual, suma de cuadrado de residuales y en qué consiste el método de mínimos cuadrados, se proporciona la ecuación de regresión pero aún no se plantea la técnica del método de mínimos cuadrados y del cálculo del coeficiente de correlación lineal.

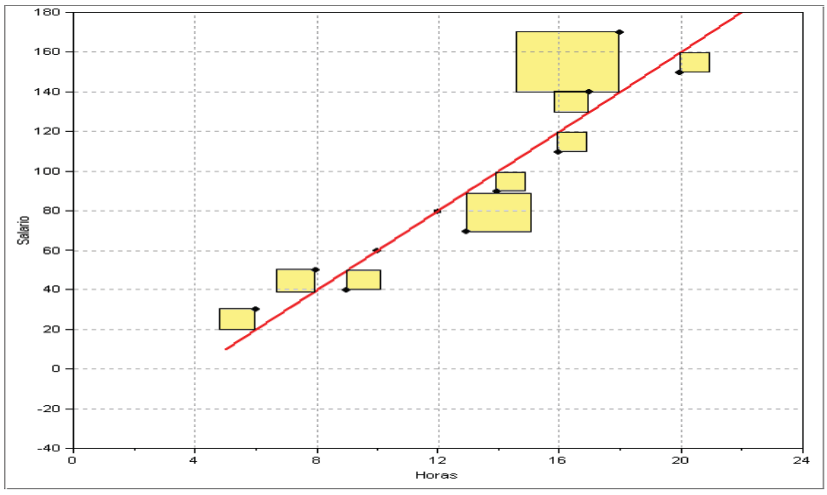


Figura 2. Recta de la ecuación de la recta de regresión lineal

Ecuación de regresión: $y = -40 + 10x$

Posterior al desarrollo de esta actividad se procede a trabajar con la situación dos.

Situación 2

La situación es complementaria a la anterior y en ese sentido tiene como propósito propiciar que los estudiantes interpreten correctamente la recta de regresión lineal. El trabajo se realiza en pares en un centro de cómputo.

Instrucciones para los estudiantes:

Los datos que se presentan en la Tabla 2 proporcionan tanto el peso como la estatura de un grupo de ocho estudiantes.

Tabla 2. Peso y estatura de un grupo de estudiantes.

Estudiante	Estatura en pulgadas	Peso en libras
1	65	105
2	65	125
3	62	110
4	67	120
5	69	140
6	65	135
7	61	95
8	67	130

a. Realiza el diagrama de dispersión.

b. ¿Consideras que existe una relación lineal? Explica tu respuesta

c. Utiliza el applet que se encuentra en la siguiente dirección web: http://www.duxbury.com/authors/mcclellandg/tiein/johnson/reg.htm, en el cual aparece la información proporcionada en esta Tabla 2, sugiera la recta que consideras se obtendría con el método de mínimos cuadrados. Para ello observa la ecuación de regresión y la suma de cuadrados del error (suma de las áreas de los cuadrados), que brinda el applet. Anota la ecuación en su cuaderno.

Posterior a esta actividad se solicita a los estudiantes que investiguen el método de mínimos cuadrados para encontrar la recta de regresión lineal y el método para encontrar coeficiente de

correlación lineal y que utilizando la calculadora con los datos proporcionados en la Tabla 2, proceda a encontrar la recta de regresión y compare con la propuesta del inciso c.

Se finaliza el trabajo en el salón de clases, comentando los procedimientos, resultados e interpretaciones de las diferentes actividades realizadas en la situación didáctica.

Funcionamiento del applet. La Figura 3, muestra una de las imágenes generada con el applet. El applet permite modificar la recta en torno al diagrama de dispersión de los datos de la Tabla 2, proporcionando para cada propuesta de recta su ecuación (en el ejemplo ilustrado en la figura es peso=-177.6 + 4.6 altura), el coeficiente de determinación (r^2, en el ejemplo es de $r^2 = 0.64$), así como la suma del cuadrados del error (en el ejemplo es 618.6), de tal forma que los estudiantes pueden ir modificando la recta e ir apreciando los diferentes valores del coeficiente de determinación y la suma de cuadrados del error.

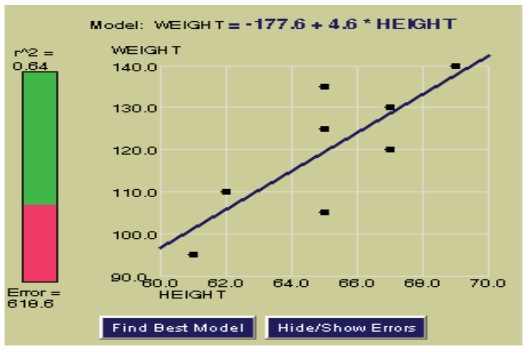


Figura 3. Ejemplo de recta de regresión lineal proporcionada por el applet

Al hacer clic en Hide/Show Errors, el applet muestra los cuadrados de cada uno de los puntos del diagrama de dispersión a la recta propuesta al mover el applet, tal como se muestra en la Figura 4.

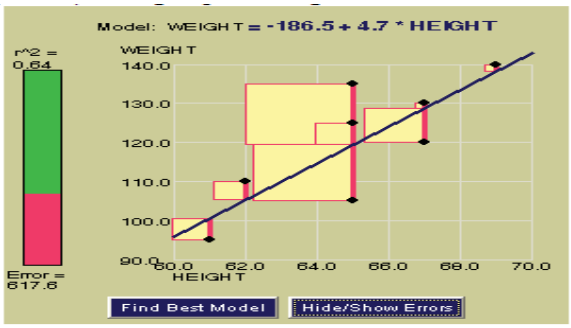


Figura 4. Ejemplo de los cuadrados de los puntos a la recta generados por el applet

Conclusiones

Aunque la secuencia didáctica presentada en este trabajo ha sido probada con los estudiantes, no se ha realizado aún una experimentación metodológicamente estructurada, puesto que nos encontramos en la etapa de retroalimentación de las situaciones didácticas, en ese sentido creemos que debemos ser muy cautos en establecer conclusiones rigurosas, sin embargo, nos atrevemos a asegurar que en nuestra experiencia, el incorporar a los estudiantes en un trabajo como el descrito anteriormente, permite el desarrollo algunos de los requerimientos que el modelo curricular demanda, como por ejemplo, realizar un trabajo diferente al netamente expositivo por parte de los profesores, logrando que los estudiantes jueguen un rol activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje; también se logró incorporar a la mayoría de los estudiantes en dinámicas de trabajo colaborativas que les permitió expresar y comunicar sus opiniones al resto de sus compañeros.

Uno de los problemas fuertes fue la de no contar, en algunas ocasiones con un centro de computo, cuando se necesitaba trabajar con los applets; lo que se resolvió parcialmente, solicitándole a los estudiantes que tenían computadoras personales, sin embargo no siempre contábamos con el número de computadoras necesaria para realizar el trabajo en pares.

También se detectaron fuertes obstáculos entre un número no despreciable de estudiantes, en la correcta interpretación de algunos conceptos que son necesarios en el desarrollo del tema de regresión lineal, entre los que podemos señalar los siguientes: diferenciar la variable dependiente e independiente, interpretación gráfica del concepto de pendiente de una recta, ordenada en el origen y además se detectó un pobre o nulo manejo del recurso tecnológico que proporciona la calculadora científica, que es tan necesario para el desarrollo de los cálculos, tanto de la pendiente como de la ordenada en el origen de la recta de mínimos cuadrados, así como del cálculo del coeficiente de correlación lineal, ya que éstos son procedimientos realmente largos y fastidiosos que frecuentemente distraen a los estudiantes sobre la interpretación correcta de los conceptos que se pretenden promover en la actividad.

Referencias bibliográficas

Astolfi, J.P. (2001). *Conceptos clave en la didáctica de las disciplinas: referencias, definiciones y bibliografía de didáctica de las ciencias.* Sevilla: Diada.

Colegio Académico de la Universidad de Sonora. (2003). Lineamientos Generales para un Modelo Curricular en la Universidad de Sonora. *Gaceta Unison* (Edición Especial).

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C, Parra, I. Sainz (comp.) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.

CONSTRUCCIÓN ESQUEMA DEL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL

Marcela Parraguez, Asuman Oktaç
PUCV — Chile
CICATA-IPN — México
CINVESTAV-IPN — México
marcela.parraguez@ucv.cl, oktac@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado — Nivel: Superior

Resumen. *Nuestra investigación se sitúa en el estudio del concepto de espacio vectorial, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general de nuestro estudio. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 10 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes.*
Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto Conacyt 60763-H.
Palabras clave: teoría APOE y espacio vectorial

Introducción

En investigaciones anteriores el álgebra lineal ha recibido la atención de investigadores en diferentes países. Investigadores franceses (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997) hablan acerca del obstáculo del formalismo. Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el Álgebra Lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que nunca pueden ellos imaginarse", y sugieren una aproximación alternativa llamada "meta-lever" para introducir y desarrollar conceptos abstractos de Álgebra Lineal. Otra investigación apunta a las dificultades que los estudiantes tienen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial (Maracci, 2008).

En nuestra investigación tomamos un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE. El proceso de investigación en esta teoría conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto matemático en cuestión (en este caso el de espacio vectorial), llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991). La realización de este modelo forma la primera componente de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). En la descomposición genética que preparamos para el concepto espacio vectorial, describimos: las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y

mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y asimilación) que determinan un camino mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto y los niveles de la triada de la construcción de un esquema: *intra*, *inter* y *trans*. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de enseñanza y colección, análisis y verificación de datos, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de nuestra descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 10 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Algunos hallazgos de nuestra investigación dan información respecto a: el cero vector, operaciones binarias y coordinación entre las operaciones de un espacio vectorial.

Marco Teórico: Teoría APOE

En nuestra investigación tomamos el enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE, como marco teórico. El uso de la Teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos de Álgebra Lineal es reciente (Trigueros y Oktaç, 2005; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006), aunque este acercamiento teórico ha sido usado con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta y Lógica. La Teoría APOE está interesada en las construcciones mentales que los estudiantes hacen cuando ellos están aprendiendo un concepto matemático.

Nuestra principal pregunta de investigación fue:

¿Cómo construyen los estudiantes el concepto de espacio vectorial?

Particularmente una pregunta que sirvió de guía en este trabajo de investigación fue: ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de espacio vectorial? En la pregunta inmediatamente anterior, cuando decimos *"comprensión profunda", e*stamos pensando que las siguientes construcciones estarían involucradas: interiorizar acciones para llegar a una concepción proceso; coordinar dos o más procesos y encapsular varios procesos para construir nuevos objetos.

Con esta investigación buscamos aportar desde nuestra perspectiva, un análisis cognitivo de la evolución de uno de los conceptos básicos del álgebra lineal: el concepto de espacio vectorial. Nuestra posición en esta investigación fue abordar el concepto de espacio vectorial desde su definición matemática formal como una estructura formada por un conjunto con una operación binaria, que satisface axiomas, junto a otro conjunto llamado cuerpo que tiene otras dos operaciones binarias (Nosotros estamos usando la expresión "operación binaria" en un sentido general; estamos conscientes que en una multiplicación por un escalar los elementos operados no provienen del mismo conjunto), que agregado con el conjunto anterior definen otra operación entre ellos y satisfacen otros axiomas. Cabe aclarar que las descripciones que hacemos de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos. Para dar respuesta a esta pregunta de investigación nos propusimos los siguientes objetivos particulares: identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes de álgebra lineal al construir el concepto de espacio vectorial, mediante la metodología de investigación planteada por la teoría APOE.

La teoría APOE está basada en la epistemología de Piaget. Toma de ella la abstracción reflexiva como mecanismo de construcción de conocimiento que se activa a través de la acción del sujeto sobre objetos matemáticos (Dubinsky, 1991). A su vez, considera su acción a través de mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión que son fundamentales en la construcción de conceptos matemáticos.

Los objetos procesos y acciones relacionados al concepto espacio vectorial forman una estructura coherente llamada un *esquema* que puede ser evocada para resolver situaciones problema. Un nuevo objeto puede ser *asimilado* por un esquema existente; de esta manera se tiene un esquema ampliado para incluir nuevos objetos. De acuerdo a Piaget y García (1989) el desarrollo de un esquema pasa a través de tres niveles: *Intra, Inter y Trans*. En el nivel *Intra* el nuevo objeto construido está presente, junto a otros objetos y procesos, pero en esta etapa el individuo no está consciente de las relaciones que pueden existir entre ellos. En el nivel *Inter* estas relaciones empiezan a estar presente y el nivel *Trans* está caracterizado por estar consciente de la estructura completa y el individuo puede decidir si es que una situación dada puede ser resuelta por ese esquema en particular.

Descomposición genética del concepto espacio vectorial

Siendo el espacio vectorial nuestro tema de interés en este estudio, propusimos en Parraguez & Oktaç (2010), una descomposición genética (ver *Figura 1*) basada en nuestra experiencia como profesores y aprendices de este tema, y resultados de investigaciones previas que están disponibles.

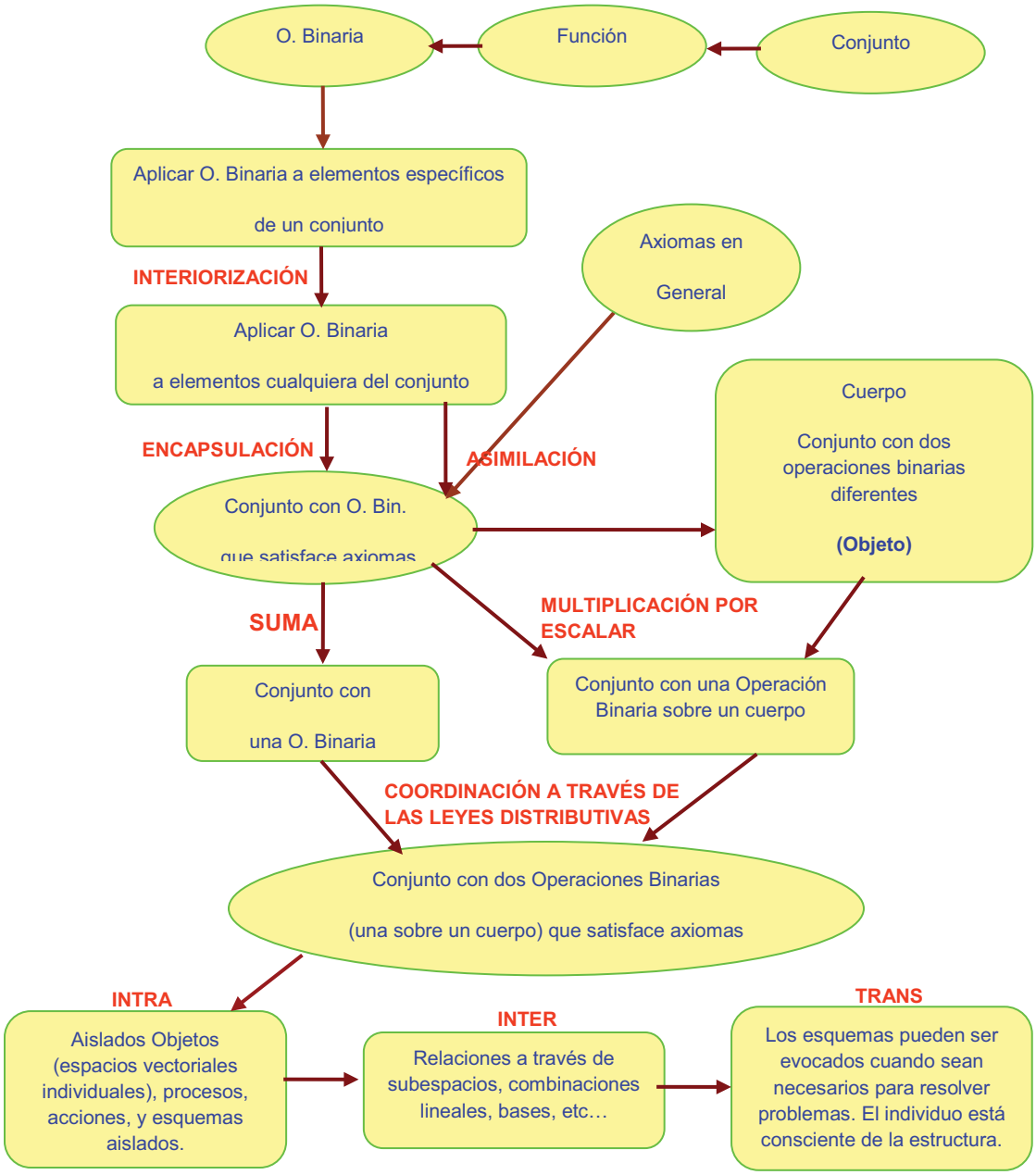


Figura 1. *Descomposición genética del concepto espacio vectorial* (Parraguez & Oktaç, 2010)

De acuerdo a la descomposición genética presentada en Parraguez & Oktaç (2010), el concepto espacio vectorial es un esquema que es construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: *conjunto, operación binaria y axioma*. La coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar juega un papel importante para que emerja un nuevo objeto que puede ser llamado un espacio vectorial, y que evoluciona en tres niveles: Intra, Inter y Trans.

A continuación mostramos algunos de los criterios que caracterizaron en nuestro estudio, cada uno de los niveles de esquema de espacio vectorial.

Consideramos que un estudiante se encuentra en un *nivel de esquema INTRA* del concepto espacio vectorial, cuando por ejemplo en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Para chequear que una estructura $(K, V, +, \square)$ no es un espacio vectorial recurren a averiguar uno por uno los axiomas que definen un espacio vectorial, sin mostrar una visión global.
- La averiguación de vectores linealmente independiente/dependiente se realiza mediante una combinación lineal igual al cero vector de Rn.
- La operación suma y multiplicación por escalar son consideradas como las usuales en la estructura CuerpoConjunto: $+$ y $\square$. No hay consciencia que una misma estructura CuerpoConjunto puede tener asociada un sin número de operaciones Suma y Ponderación.

En un *nivel de esquema INTER* del concepto espacio vectorial, el estudiante en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Hay aceptación que una estructura CuerpoConjunto pueda tener definidas operaciones Suma y Ponderación diferentes a las usuales: $\oplus, \square$.
- Reconoce que todos los espacios vectoriales tienen un cero vector, tienen bases, tienen dimensión, entre otros.
- Reconoce que el cero vector no siempre es un objeto con ceros y acepta la posibilidad que el cero vector de algún espacio vectorial sea un elemento del espacio que no tenga ceros.

Finalmente un estudiante se encuentra en un *nivel de esquema TRANS* del concepto espacio vectorial, cuando por ejemplo en sus argumentaciones se muestran algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Reconoce adecuadamente todas las relaciones entre el espacio vectorial y las nociones del álgebra lineal.
- Trabaja con ejemplos nuevos para él y más complicados de espacios vectoriales.

Ejemplo de la entrevista:

Con el fin de mostrar un ejemplo del nivel de esquema Intra del concepto espacio vectorial, a continuación presentamos una parte del trabajo realizado por un estudiante durante la entrevista.

El estudiante 7 (ES7) trabaja los problemas como si las operaciones suma y multiplicación por escalar fueran las usuales y/o el vector nulo fuera la n-upla (0,0,…,0). Miremos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 8, inciso 4:

Pregunta 8 de la entrevista

Sea V = {(x,y,z) $\in$ *R3* $/$ *x,y,z > 0} un espacio vectorial con las operaciones:*

SUMA: $u \oplus v = (xa, yb, zc)$ *donde* $u = (x,y,z)$, $v = (a,b,c)$ $\in V$

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR:

$\lambda \otimes u = (x^{\lambda}, y^{\lambda}, z^{\lambda})$ *donde u = (x,y,z)* $\in V$ *y* $\lambda \in R$.

Sea W el subespacio de todos los puntos de V situados sobre el plano $z = 1$.

8.1 Escriba dos vectores de W.

8.2 ¿Cuál es el vector nulo de W?

8.3 Si $v = (3,2,1) \in W$ *, ¿Quién es* $-v$ *?*

8.4 ¿Los vectores $(2,2,1)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ *de W son linealmente independientes?*

8.5 ¿El conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ *es una base para W?*

La argumentación del ES7 en la pregunta 8.4 (ver *Figura 2*) nos da evidencias que el esquema

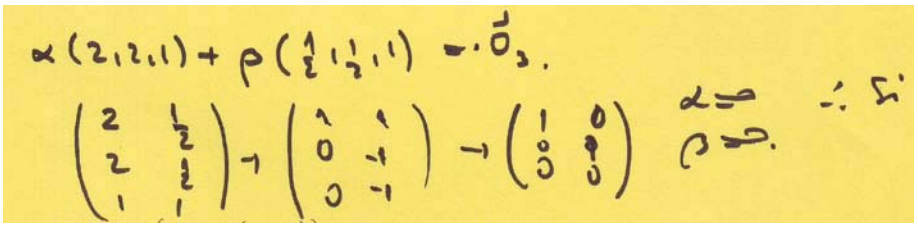


Figura 2. *Escrito del ES7 frente a la pregunta 8.4 de la entrevista.*

de espacio vectorial no se ha desarrollado en su mente más que a un nivel Intra, entonces es difícil para ES7 hacer las conexiones necesarias, entre el objeto del concepto espacio vectorial, las operaciones binarias no usuales y los elementos de la estructura algebraica propiamente tal definida en un espacio vectorial (elemento neutro) y el concepto de dependencia lineal.

Una interpretación de estos resultados, es que la evolución cognitiva del esquema espacio vectorial no es algo que esté necesariamente vinculado a conocer muchos elementos adicionales del concepto, sino que la coherencia del esquema, distingue claramente lo que es un espacio vectorial con todas sus propiedades de aquello que no lo es.

A manera de conclusión

En esta investigación documentamos cómo los estudiantes conciben el cero vector y las operaciones suma (+) y producto por escalar (*) involucradas en estructura de espacio vectorial: (K,V,+,*), donde K es un cuerpo y (V,+) es un grupo abeliano.

Además un resultado importante que arrojó esta investigación es que el espacio vectorial evoluciona en la medida que los estudiantes acepten vectores nulos distintos del usual, así como también, operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar no usuales que lo definen.

El paso de un nivel a otro lo hemos caracterizado a través de las relaciones entre diferentes tipos de construcciones que los estudiantes establecen y de los elementos matemáticos del álgebra lineal que ellos utilizan. Entre estos elementos destacamos los siguientes: Elemento neutro, Combinaciones lineales, Conjuntos linealmente independiente/dependiente, Base, Conjunto generador, Dimensión; que son algunas nociones del álgebra lineal, relacionados con el concepto espacio vectorial, que los estudiantes han utilizado en esta investigación, para manifestar la

fortaleza de su esquema espacio vectorial, es decir, para justificar, una comprensión profunda de este último.

Hemos descubierto, como resultado de nuestra investigación que un criterio a tomar en cuenta para ampliar la caracterización de los niveles sería lo relacionado con el cero vector. Por ello hemos realizado una modificación a nuestros niveles de esquemas considerando que un estudiante que se encuentra en un nivel de esquema INTRA del concepto espacio vectorial, piensa que el cero vector de un espacio vectorial es la n-upla (0,0,…,0), elemento constituido sólo por el número cero de *R*; y que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTER del concepto espacio vectorial, cuando reconoce que el cero vector de un espacio vectorial no siempre es (0,0,…,0), aceptando que el cero vector es un elemento no necesariamente constituido por ceros.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) Research in collegiate mathematics education, Vol. 2 (pp. 1-32), Providence: American Mathematical Society.

Dorier J.-L., Robert, A., Robinet , R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Revista Educación Matemática, 20(2), 65-89.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40(2), 265-276.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 157-176.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces: a viewpoint from APOS theory. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis y H. Arikan (Eds) CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics, Estambul, Turquía: John Wiley & Sons Inc.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112- 2124.

Piaget, J. y García, R. (1989). Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.

NECESIDAD Y ALCANCE DE LA MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS SOCIALES

María Rosa Rodríguez, Jesús A. Zeballos y Sandra N. Franco
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar, jesuszeballos@tucbbs.com.ar
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Superior

Resumen. *Los científicos sociales destacan la creciente necesidad de matematización en la construcción de modelos y teorías. Consideramos que la Matemática elemental, la Estadística descriptiva y la Lógica clásica, utilizadas en las investigaciones, se muestran insuficientes y requieren el aporte de nuevos conocimientos.*

Estas reflexiones se enmarcan teóricamente en los límites de la Socio epistemología contemporánea, que incluye la Teoría de las Representaciones Sociales. Su utilización es de rigurosa actualidad en investigaciones relacionadas con la educación, ya que una Representación Social es un potente instrumento teórico para conocer la manera en que se construyen las ideas compartidas en las comunidades y la incorporación del conocimiento del sentido común al ámbito científico.

Nuestro objetivo es mostrar la utilidad de los conocimientos lógico-matemáticos en la construcción de teorías Económicas, consideradas en la actualidad la más matematizada de las Ciencias Sociales

Palabras clave: epistemología, modelos lógico-matemáticos, ciencias sociales

Introducción

La investigación en Educación Matemática ha alcanzado en los últimos 20 años, una atención reconocida en la mayoría de los países; no así la aplicación de la Matemática y la Lógica a las Ciencias Sociales. Aún persisten dificultades en la comprensión de la interrelación entre ellas y de la aplicación efectiva de las primeras en las segundas.

Actualmente, los científicos sociales incorporan cada vez más métodos lógicos y cuantitativos en la construcción de teorías que explican la cambiante realidad de nuestra sociedad. Al mismo tiempo, advierten que la Matemática elemental, la Estadística descriptiva y la Lógica clásica, habitualmente presupuestas en las investigaciones sociales, son insuficientes.

Con este propósito se formuló un proyecto que contempla esta aplicación modelistica y, precisamente, apunta a analizar las interrelaciones epistemológicas entre las Ciencias Formales (Lógica y Matemática) y las Ciencias Sociales. El proyecto se integra, además, con la Informática no sólo para el procesamiento de la información y retroalimentación, sino también como el medio más idóneo para la comunicación a distancia.

Las presentes reflexiones intentan discernir la mutua influencia entre Ciencias Formales y Ciencias Sociales y precisar sus necesidades, alcances y límites, a fin de determinar los conceptos lógicos y matemáticos imprescindibles para la producción de modelos y teorías sociales. Es de rigurosa actualidad la utilización de la Teoría de las Representaciones Sociales (TRS) en investigaciones relacionadas con la educación, ya que una Representación Social (RS) es un potente instrumento teórico para conocer la manera en que se construyen las ideas compartidas en las comunidades.

El objetivo del presente trabajo es mostrar la utilidad de los conocimientos lógico-matemáticos en la construcción de modelos teóricos, específicos en Economía, considerada en la actualidad la más matematizada de las Ciencias Sociales.

Marco Teórico

Con las nuevas tecnologías las investigaciones en el campo social han dado un giro no sólo en sus modos de construir nuevos conocimientos, sino también en su comunicación y transferencia. Como consecuencia de ello ha variado su marco teórico.

El marco teórico en el que se desarrolla este artículo es la TRS, incluida en la Socio epistemología, que permite comprender la manera en la que se construye el conocimiento a partir de prácticas compartidas en el seno de un grupo de una determinada comunidad cultural. Esta teoría es una forma de entender la construcción del conocimiento científico y de ver la evolución de distintas culturas, de los grupos que las sustentan y de toda la humanidad.

La TRS se utiliza en investigaciones relacionadas con la educación, poniendo de relieve la potencialidad de la RS para conocer la manera en la que se construyen las ideas compartidas en las comunidades. Todos aprendemos de otros, construyendo los conceptos y senso-percepciones con que representamos el mundo real, que surgen en el intercambio social. Así, se va construyendo nuestra cultura, nuestro conocimiento y nuestra ciencia.

El marco epistemológico que nos provee la TRS aporta soluciones a cuestiones tan importantes como: constitución social del grupo, preconceptos y prejuicios, la resistencia epistémica al conocimiento, saberes previos, necesidades, deseos y objetivos a alcanzar. Ya que el grupo con sus necesidades y sus características produce los avances del conocimiento, consideramos que la TRS es un marco teórico adecuado para la Matemática Educativa.

Al mismo tiempo la TRS propugna que toda ciencia, formal, empírica, social…., debe atender también al conocimiento de sentido común, que tiene como propósito comunicar e informar acerca de los hechos, las motivaciones y los objetivos de la vida cotidiana, que se origina en el intercambio en un grupo social.

Serge Moscovici (1961) construye su modelo de RS, que define como una modalidad particular del conocimiento, cuya función es la elaboración de los comportamientos y la comunicación entre los individuos. En otras palabras, es el conocimiento de sentido común que tiene como objetivos comunicar, estar al día y sentirse dentro del ambiente social y se origina en el intercambio de comunicaciones del grupo social. Las RS tienen una doble función: hacer que lo extraño resulte familiar y lo invisible perceptible. Además, no es sólo un modelo científico sino también un sistema de valores, ideas y prácticas que cumple dos funciones dobles: primero, establecen un orden que capacita a los individuos para orientarse en su mundo material y social y dominarlo; segundo, hacen posible la comunicación para tomar parte entre los miembros de una comunidad proveyéndoles de un código para el intercambio social, otro para nombrar y clasificar de manera no ambigua los diversos aspectos de su mundo y de su historia individual y de grupo. Las RS pueden ser analizadas en tres dimensiones: la información, el campo de representación y la actitud. Una RS puede transformar el conocimiento científico al común y del mismo modo, el vago y difuso al formal y preciso. Estas razones nos llevan a considerar a la RS como herramienta central en la enseñanza de la Matemática

Los saberes matemáticos son un producto cultural, propio de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural como social. Si el conocimiento matemático es producto de una construcción social entonces el alumno es central en el proceso de su construcción. Porque es él quien tiene que construir su propio conocimiento. El docente debiera estar atento para proponer actividades y propiciar las condiciones necesarias para que el grupo de alumnos logre construir un conocimiento determinado.

En nuestro tema, necesidad y alcance de la Matemática en las Ciencias Económicas, se presenta la dificultad de comprender cómo se dan los procesos de construcción de las ideas económicas, cómo una persona organiza y las hace interactuar, para traducirlas a una formulación matemática, más precisa y más operable. Esa búsqueda implica la selección de los conceptos matemáticos para transcribir con exactitud los conceptos económicos.

Aquí, precisamente, se muestra la eficacia de las Ciencias Formales, Lógica y Matemática, en el trasvasamiento de un tipo de conocimiento a otro.

Metodología

La TRS tiene una serie de instrumentos de indagación para poder caracterizar a una RS. En una RS se consideran dos sistemas de elementos, uno central y otro periférico. El primero contiene notas generales compartidas universalmente por un grupo social; son esenciales en la estabilidad y consistencia de la RS. El segundo se refiere a las connotaciones personales de cada integrante del grupo social, que permiten la incorporación del núcleo central, adaptándolo a los conocimientos previos que cada estudiante construyó en su experiencia personal, adquiriendo así un conocimiento significativo.

En nuestro caso el objeto social es un conocimiento que surge de la aplicación de conceptos lógico-matemáticos a conceptos económicos. Para lograr y fundamentar la interrelación de estos diferentes ámbitos de saberes, se recurrió a la bibliografía pertinente, a entrevistas y cuestionarios a docentes de las diversas áreas de la Economía y a estudiantes avanzados.

Los métodos que aplicamos en esta investigación están contenidos dentro de un paradigma en el que convergen una Lógica cualitativa y una cuantitativa. La Lógica clásica, presupuesta en las investigaciones científicas, no siempre es la adecuada y en algunas ocasiones concluye en paradojas y contradicciones. Del mismo modo, la Matemática elemental resulta insuficiente para conferir rigor a un conocimiento pretendidamente científico. Esto implica la necesidad de adquirir conocimientos sólidos del Cálculo diferencial e integral. Lo mismo puede decirse de la Estadística, que por lo general se ve reducida a una Estadística descriptiva, pero los problemas surgen cuando se quiere inferir sobre los parámetros de una población.

Resultados

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, hemos advertido que los conocimientos económicos aquí tratados están contenidos en esquemas lógico-matemáticos. La construcción de esta nueva

RS, ahora lógico-matemática, se realiza a partir del conocimiento que el alumno trae incorporado, desde su vida cotidiana y de los aprendizajes adquiridos en sus estudios previos.

El hombre común tiene una percepción espontánea de lo que son sus necesidades económicas y sabe que puede subvenir a ellas por medio de intercambios. Así, construye una RS de lo que es la Economía en el ámbito de su propia cultura. Cualquier persona conoce lo que es la oferta y la demanda, aunque no utilice estos términos ni tampoco sean precisos los conceptos con que los representa.

En este trabajo mostramos, a modo de ejemplo, los conceptos formales a los que recurre la Economía para precisar sus hipótesis y leyes, que los estudiantes ya conocen y que aquí tratamos para mostrar su correspondiente esquema lógico-matemático.

Desde el punto de vista matemático

En el ámbito científico se utilizan conceptos matemáticos más precisos, que van más allá de la Matemática elemental para definir la *oferta* y la *demanda.* Para ello, los economistas, como científicos sociales, utilizan los conceptos de: función de una variable, función lineal, función inversa, gráficos de funciones y funciones de varias variables. El *precio de equilibrio* y la *cantidad demandada* se obtienen al resolver un sistema formado por las ecuaciones que las definen.

Cuando se define la *función de preferencia* o mapas de indiferencias del consumidor, se aplican los conceptos de funciones de dos variables y de curvas de nivel. En el análisis del comportamiento de las *curvas de indiferencia* se recurre a los conceptos de derivadas de primer y segundo orden y sus relaciones al variar sus signos.

Para maximizar la *satisfacción del consumidor* que expresa la relación entre dos bienes, bajo las limitaciones de su presupuesto, se vale del método de los multiplicadores de Lagrange. Además, se lo usa para minimizar la *función de preferencia* del consumidor a través de la curva de demanda para un bien cualquiera, con ingreso real constante y, para maximizar la *utilidad* sujeta a restricciones presupuestarias y obtener relaciones entre la utilidad marginal y el precio de un bien.

Las distintas combinaciones de recursos que se requieren para que una empresa alcance cierto nivel de producción se expresan a través de sus curvas de nivel, llamadas *isocuanta,* donde

cualquier combinación de insumos se mide mediante la pendiente de la isocuanta. Su análisis se realiza a través de las derivadas de primer y de segundo orden.

Para explicar los conceptos de *costo y oferta* se recurre a principios de la producción, donde la producción es función de una o de varias variables. Mediante el análisis de funciones: crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y puntos de inflexión de la curva *producto total* por mano de obra, se describen las curvas *producto promedio* y *producto físico marginal* de ese factor. Con idéntico procedimiento se tratan las curvas de producto para el capital y sus correspondientes etapas.

Para formular la ley *de los rendimientos decrecientes* que se enuncia como "si uno de los insumos aumenta en incrementos iguales por unidad de tiempo mientras que las cantidades de los otros insumos se mantienen constantes, la producción aumentará, pero los aumentos se volverán cada vez más pequeños y, a partir de un determinado punto, disminuirá el producto físico marginal del insumo variable"; se requieren los conceptos de promedio, incremento, derivada, crecimiento y decrecimiento de una función, extremos, concavidad y puntos de inflexión.

Una *función de producción* que aumenta en una proporción determinada en todos los insumos y que incrementa la producción en la misma proporción, matemáticamente se define como una función homogénea de grado "n". Además, explica los rendimientos a escalas constantes, crecientes o decrecientes, dependiendo del grado de homogeneidad. En suma, los conceptos de función homogénea y sus propiedades explican el comportamiento de la función de producción para los diferentes tipos de rendimientos.

Para determinar el *excedente del consumidor*, importe que una persona podría pagar por una cantidad de un artículo menos el importe que el mercado le exige pagar, se recurre a la interpretación geométrica de la integral definida, que es el concepto fundamental del cálculo integral.

Desde el punto de vista lógico

Consideramos que las relaciones entre antecedente (hipótesis) y consecuente (predicciones y consecuencias observacionales) ($A \supset B$) en las Ciencias Económicas son mejor expresadas y sin

riesgos de paradojas en una Lógica relevante ($A \rightarrow B$), como el sistema R de Anderson y Belnap (1962).

La necesidad de esta nueva Lógica se observa en las explicaciones causales y nomológicas que utilizan la Lógica clásica (Rodríguez M. y Zeballos J. (2006)). Se muestra la inadecuación de la RS de esta lógica cuando se descubre que incurre en paradojas. Lo que hace necesario una nueva RS como la que presenta la Lógica relevante.

Por ejemplo, Milton Friedman (1967) en su famoso *Ensayo Sobre Metodología de la Economía Positiva* expresa: "para tener importancia… una hipótesis debe ser descriptivamente falsa en sus supuestos" (pág. 14), que es una paráfrasis de la implicación paradójica "$\sim A \supset (A \supset B)$" que significa "si una proposición es falsa, entonces implica cualquier proposición". Esta paradoja surge porque el contenido semántico de A y de B es eventualmente disjunto, es decir A y B no tienen en común al menos una variable proposicional.

Por ello, se afirma: "**L** es una Lógica relevante si y sólo si en todo teorema de **L** de la forma $A \rightarrow B$, A y B tienen al menos *una variable proposicional en común*".

La Lógica relevante considera que no basta la validez formal de las inferencias, sino que tiene que haber términos interrelacionados en premisas y conclusión, semánticamente relevantes.

Conclusiones

Este trabajo, que es parte de una investigación más amplia que procura integrar epistémicamente las Ciencias Formales con las Ciencias Sociales, se limita a una breve aplicación en las Ciencias Económicas. Al poner el énfasis en la relevancia del rol que juegan las Ciencias Formales en la estructuración del conocimiento económico, se destacan factores no suficientemente considerados en la Economía. De este modo se intenta subsanar la inexplicable vacancia de la Lógica y la Matemática en la conformación de los estudios en el campo socio-económico, poniendo de relieve la importancia de la RS en la metodología de la investigación y la construcción de las teorías económicas.

La Lógica relevante se agrega a las inferencias de la Lógica clásica para explicar la causalidad y la incertidumbre en las Ciencias Económicas, que son las primeras entre las Ciencias Sociales que incorporaron los modelos lógico-matemáticos a sus propias teorías.

Otra conclusión importante es que los planes de estudio de las Ciencias Económicos deben incorporar conocimientos específicos de Lógica, de Matemática y de la TRS, que clarifiquen las bases socioepistemológicas del proceso enseñanza-aprendizaje y de investigación.

Asumimos que los procesos de construcción del conocimiento son siempre una síntesis de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico, corroborando la hipótesis del origen social de todo constructo humano. Interpretamos que la TRS comprende las circunstancias, centrales y periféricas, que describen, explican y predicen adecuadamente los procesos de construcción del conocimiento.

En investigaciones relacionadas con la educación, la TRS juega un rol fundamental porque pone de manifiesto la potencialidad, de las RS a fin de conocer los modos o maneras en la que se forman ideas que se comparten socialmente en las comunidades.

Referencias bibliográficas

Anderson, A. y Belnap, N. (1962). Entailment. The Logic of Relevence and Necessity. Princeton: Princeton University Press.

Araya Umaña, S. (2002). Las Representaciones Sociales: Ejes Teóricos para su Discusión. San José de Costa Rica: Flacso.

Budnick, F. (1995). Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. México: McGraw - Hill.

Friedman, M. (1967). Ensayos sobre Economía Positiva. Madrid. Editorial Gredos.

Lakatos, I. (1981). Matemática, Ciencia y Epistemología. Madrid: Alianza.

Mora, M. (2002). La Teoría de la Representaciones Sociales de Serge Moscovici. Recuperado el 05 de Marzo de 2009 de http://blues.uab.es/athenea/num2/Mora.pdf

Moscovici, S. (1961). *La psychanalyse, son image et son public*, Paris: PUF.

Rodríguez M. R. y Zeballos J. A. (2006). El Tiempo, la Lógica y la Matemática del Mundo de las Finanzas. En J. Zeballos (Compilador) Ensayos Económico-Filosóficos (pp. 239–251). Tucumán: UNT.

Zeballos, J. A. y Rodríguez de Estofán, M. R. (2002). Fundamentos Epistemológicos en Disciplinas Económicas. Estudios de Epistemología IV, 131-144.

LA RESIGNIFICACIÓN DE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, rondero@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Medio, Superior

Resumen. *La noción de linealidad toma distintos significados, en los dominios matemáticos por los que transita en el currículo escolar. Además está vinculada desde una perspectiva epistemológica a la noción de proporcionalidad y ambas cumplen una función de articulación en toda la matemática escolar. Las filiaciones y rupturas epistemológicas conllevan a la identificación de diferentes significados de la linealidad en la didáctica misma, como es el caso de la recta representada usualmente como y= mx+b, con* $x \in R$ *, que se estudia desde el nivel básico en álgebra elemental y que no cumple cuando* $b \neq 0$*, con la definición de transformación lineal que se analiza en los cursos de Álgebra lineal, por lo que la noción adquiere significados diferentes, de acuerdo al dominio matemático en que se está desarrollando. También, se dan evidencias epistemológicas y cognitivas de algunos de los significados de la noción de linealidad, de modo tal que se muestra cómo es que la misma juega un papel preponderante en la didáctica de las matemáticas.*
Palabras clave: linealidad, significación, articulación

Introducción

En esta investigación se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. El propósito es mostrar y caracterizar algunos de sus diferentes significados, junto con los de la proporcionalidad, desde una perspectiva epistemológica. Se considera que dichas nociones cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para el aprendizaje de la matemática lo que proporciona su función de nociones metamatemáticas. Pero en la didáctica, la linealidad y la proporcionalidad presentan diferentes significados que les da un estadio distinto en el medio escolar, ya sea como cuerpo teórico ordenador y organizador; o como herramienta útil para estudiar un objeto; o como elemento, que ni es objeto de estudio, ni es herramienta, pero que está presente en el proceso del aprendizaje en la matemática escolar.

Por otra parte, se tienen evidencias históricas y epistemológicas de que los significados de linealidad en distintas épocas, fundamentan su función articuladora como se muestra a través del desarrollo de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios

vectoriales. Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada.

Aspectos teórico referenciales

En la didáctica de la matemática, la noción de linealidad toma diferentes formas como objetos matemáticos, como herramientas explícitas, o como organizadores, en la definición del su concepto, no se hacen manifiestas las filiaciones epistemológicas con otros conceptos previos articulados por la misma noción.

Chevallard (1997) hace una clasificación de las nociones, la cual se puede ocupar para caracterizar los significados que presentan la linealidad y la proporcionalidad, en el sentido de que forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos: las explícitas que están conformadas por las matemáticas; y las implícitas conformadas por las paramatemáticas y las protomatemáticas. La interpretación que da Martínez (2002) a la conceptualización de las nociones en la didáctica que propone Chevallard (1997) es:

Nociones protomatemáticas, son aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos…

Nociones paramatemáticas son las que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas; y por lo tanto no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes…

Nociones matemáticas, son objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son por tanto objeto de estudio en si mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos…

Noción metamatemática, son aquellas que desde una perspectiva amplia, brindan elementos de información y conocimiento acerca del funcionamiento en general del aprendizaje de las

matemáticas, esto es, dichas nociones funcionan como organizadoras de nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas (Martínez, 2002, p. 51)

Por otra parte, partiendo de la identificación de cuatro escenarios históricos en cuanto a la evolución de la noción de linealidad y sus significados (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008), se toman en consideración las filiaciones y rupturas epistemológicas alrededor de la noción de linealidad, se da cuenta de los significados que tienen fuertes implicaciones en la matemática escolar. En lo que se refiere al primer escenario se identifican las culturas ancestrales egipcia, china y babilonia, donde la proporción directa y la progresión aritmética son el sustento de una actividad sociocultural relevante como lo es el cobro de impuestos. El segundo se ubica en la Grecia clásica, con referencia a Euclides y Arquímedes quienes emplearon la proporción directa para sustentar muchos de sus resultados geométricos. Es en este momento histórico donde aparecen las primeras definiciones de recta. Ubicamos al tercer escenario en la época en que aparecieron los trabajos de Fermat y Descartes quienes a partir de lo realizado por Apolonio siglos antes, definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, donde la proporcionalidad toma la forma analítica $b\,x = a$, y se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad. Finalmente la última de estas referencias históricas se da a partir de mediados del siglo XIX, donde inicia la estructuración del Álgebra Lineal, a través de la incorporación de diferentes saberes matemáticos cuyo elemento de articulación conceptual es precisamente la linealidad.

En este trabajo se ha tomado en consideración el enfoque de las nociones didácticas por parte de Chevallard (1997), en cuanto a la estratificación de la operación del conocimiento matemático en la escuela, y algunas referencias histórico-epistemológica de culturas antiguas donde surge la noción de proporcionalidad para la solución de problemas cotidianos de esas épocas (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008)

Aspectos metodológicos

Como una forma de organizar la presente investigación, en este caso de dar cuenta de los significados de la noción de linealidad y de su antecedente conceptual, la proporcionalidad directa, se consideraron algunos elementos metodológicos de Arellano (2005), como factor de control de

este trabajo. Este esquema de organización parte de lo simple a lo complejo y se compone de: el problema de investigación, estado del arte, definición de conceptos, procesos cualitativos, estrategias de análisis y bibliografía.

Después de definir el problema de investigación, se caracteriza la significación de la noción de linealidad en los escenarios históricos establecidos en su carácter: *protomatemático*, *paramatemático*, *matemático* y *metamatemático.* Además se resalta la importancia de dicha tipificación en lo didáctico, al transitar de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo cognitivo, sociocultural y epistemológico.

Resignificación de la noción de linealidad

La resignificación de la noción de linealidad se plantea desde la perspectiva de un análisis histórico epistemológico (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008), del papel que dicha noción juega en la didáctica mediante el enfoque de Chevallard (1997) y algunos aspectos de la proporción cualitativa y cuantitativa estudiada por Ruiz y Valdemoros (2006).

Un significado temprano de la noción de proporcionalidad está en la proporción cualitativa (más grande que, menor que), mediante recursos didácticos (figuras, dibujos y expresiones) para facilitar el desarrollo de patrones de percepción, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación; lo cual antecede la enseñanza temprana de la razón y la proporción (Ruiz y Valdemoros, 2006).

Desde una perspectiva histórica epistemológica, una primera significación, como herramienta, es que en la aritmética babilónica la proporción cuantitativa (igualdad de dos razones), posibilitó hacer cálculos astronómicos y mercantiles, además de áreas y volúmenes. Struik (1986) refiere a un libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* ubicado en la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) donde aparecen porcentajes, proporciones y problemas de aplicación de impuestos; así como usos de *la regla de tres* y de progresiones aritméticas y geométricas, aborda el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población y se ocupa de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos. En este periodo la noción de linealidad adopta el sentido *paramatemático* por ser un instrumento que describe otros objetos matemáticos, pero no se le considera como objeto de estudio en si mismo.

En la civilización egipcia, se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a, b* y *c* son constantes y *x* variable desconocida. En Boyer (1991) se lee que el método de solución, que aparece en el *Papiro de Rhind,* se conoce en la actualidad como el *método de la falsa posición*.

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos para la estimación de áreas y volúmenes. La noción de linealidad surge incipientemente, desde que aparecen las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, empleadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

En un cierto paralelismo, en la didáctica actual la noción de proporcionalidad presenta diversos papeles en la matemática escolar, de acuerdo a los significados didácticos que están en juego. La proporcionalidad cuantitativa como igualdad de dos razones, es una noción matemática en educación elemental ya que es un objeto matemático de estudio en ese momento. Sin embargo toma el rol de *paramatemática* cuando se abordan temas de cálculo de impuestos o al abordar el tema de la recta en el currículum escolar, no siendo objetos de evaluación directa.

Volviendo a lo histórico epistemológico, en la Grecia clásica Euclides afirma que por dos puntos pasa una recta y que ésta es única, además la proporcionalidad directa se emplea en el cálculo aproximado del área de un círculo a través del cuadrado de su diámetro. Por otra parte, tomando ideas de Anaxágoras en referencia a las razones y proporciones, Eudoxio (408? – 355?), define indirectamente la igualdad de dos razones *a:b* y *c:d* (Hofmann, (2002) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008). En el primer postulado del primer libro *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, (1999) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008). En esta segunda época se entrevé que la noción de proporcionalidad adopta el carácter de objeto matemático de estudio, en virtud del estilo propio de formalidad de la escuela griega.

Desde el análisis de la evolución de las nociones referidas, en este segundo escenario la noción de linealidad, empieza a tener una ruptura epistemológica con la noción de proporcionalidad, ya que

la connotación abstracta se expresa a través de los postulados y demostraciones de teoremas geométricos. Ellos ponen en juego distintos significados de la misma, como *noción matemática* al definir Eudoxio a la igualdad de dos razones y paramatemática al servirle a Arquímedes al decir que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de sus diámetros.

Descartes (1596 – 1650) construye el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, incorporando a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás. Fermat y Descartes, dieron plena significación a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos, en particular a la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x, proponiendo a la recta que pasa por el origen, de la forma $b\,x = a\,y$, y plantearon $a\,x + b\,y = c$ como la ecuación de la recta en su forma general (Hofmann, (2002) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales (x, y) a un lugar geométrico (en términos modernos, $f(x,y)=0$) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

En la didáctica actual la proporcionalidad debiera ser considerada de manera explícita como una noción paramatemática al estudiar los primeros temas de precálculo o geometría analítica, dándole significación a la articulación entre la igualdad de dos razones $a: b$ y $c: d$ y la ecuación de la recta $a\,x + b\,y = c$, de acuerdo a los significados didácticos que estén en juego. Además de que dicha resignificación tendría mayores alcances en temáticas fuera de la matemática, como por ejemplo en la química en los cálculos estequiométricos (cálculo de magnitudes mediante proporciones).

Una cuarta época, ubicada a partir del siglo XVIII, es donde inicia de manera incipiente el Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y

transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad. Uno de los primeros significados, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX (Dorier (2000) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

Por otro lado, cuando en la matemática escolar se estudia el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad cuantitativa. En la escuela se dice: "Dos vectores v_1 y v_2 definidos en R^n, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\vec{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\vec{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\vec{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\vec{v_1}$, si $c_2 \neq 0$ (Rondero, et. al., 2009). Está significación permite una mejor articulación de dichos saberes en un primer curso de Álgebra lineal.

Se tienen evidencias históricas-epistemológicas y didácticas de que el vínculo entre los diferentes significados de la noción de linealidad, cumplen una función articuladora como se muestra a través de la evolución de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios vectoriales, entre otros. Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. En particular en este trabajo se han reportado ciertos significados de la noción de linealidad, desde una perspectiva epistemológica y didáctica.

Conclusiones

Se infiere que los significados que presenta la noción de linealidad y su antecedente conceptual, la noción de proporcionalidad se dejan de lado en la didáctica propiciando incongruencias conceptuales.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes estadios que tienen su expresión en los conceptos que genera y que a su vez aportan nuevos significados a la misma.

Una de las rupturas epistemológicas importantes que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones *a:b* y *c:d* con la recta que pasa por el origen, $b\,x = a\,y$, y con la función lineal $f(x)= ax +b$. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presenta diferentes significados que no se explicitan en el medio escolar, ya sea como, concepto ordenador y organizador, *-metamatemático-*, o herramienta útil para estudiar un objeto, *-paramatemático-*, u objeto de estudio, *-matemático-*, pero que está presente en el proceso del aprendizaje en la escuela.

En este trabajo se dan evidencias, sobre todo histórico-epistemológicas y didácticas, de los significados en relación a la noción de linealidad y que se ven reflejadas en el aprendizaje de ciertas áreas de la matemática como son el Precálculo, Geometría Analítica y Álgebra lineal.

Es posible identificar el fenómeno didáctico de las incongruencias conceptuales en relación a otras nociones matemáticas, lo cual puede incidir en su aprendizaje por no resaltar sus significados, ni la función que cumplen en el proceso.

Se continúa la búsqueda de precisar algunos indicios para un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate de los significados de la noción de linealidad, posibilita aportar elementos para la Didáctica de la Matemática que pueden contribuir al Currículum Escolar. Incluso el poder repercutir en el nivel medio superior en cursos como el de Geometría Analítica, e incluso hasta en una primera aproximación al Álgebra Lineal en el nivel superior.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. Memoria HPM (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Arellano, J. (2005). Los esquemas metodológicos para la investigación social. México: S y G editores.

Boyer, C. (1991). A History of Mathematics. United States: Wiley.

Chevallard, Y. (1997) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Editorial Aique.

Martínez, G. (2002) Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 5 (1), 45-78.

Rondero, C., Tarasenko, A., Acosta, J., (2009) Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. ALME 22 (pp. 535-543). México: CLAME.

Ruiz, E. y Valdemoros, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 9 (2), 299-324.

Struik, D (1986) Historia concisa de las matemáticas. Serie Maestros del Pensamiento Científico. México: Instituto Politécnico Nacional.

¿LA ACTITUD HACIA LA MATEMÁTICA INFLUYE EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO?

G. Abraham, A. Mena, M. R. Rodríguez, M Golbach, M. Rodríguez Anido, G. Galindo
Facultad Regional Tucumán. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
graju6@yahoo.com.ar, m-pappalardo@cgcet.org.ar, marosarodriguez@arnet.com.ar
Campo de investigación: Educación Continua Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo tiene por objetivo mostrar los resultados obtenidos en una investigación realizada durante el ciclo lectivo 2008, respecto de la Actitud Hacia la Matemática (AHM) y su influencia en el Rendimiento Académico de los alumnos en el examen de Ingreso a la Facultad Regional Tucumán de la UTN y en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica perteneciente al primer año de la Carrera de Ingeniería en Sistemas de Información. La metodología utilizada es la propia de un diseño exploratorio descriptivo y la investigación realizada es no experimental de corte transversal. Se utilizó la escala tipo Thurstone, adaptada al contexto, para medir el grado de AHM de los estudiantes. Estos resultados permitieron concluir que la AHM es relevante para el rendimiento académico de los alumnos. Por lo tanto, es necesario que los docentes evaluemos las percepciones de los estudiantes sobre su desempeño académico para descubrir intereses y realizar innovaciones metodológicas que optimicen el proceso educativo.*
Palabras clave: actitud, matemática, rendimiento académico

Introducción

Se considera que las actitudes advertidas en los cursos previos al ingreso a la Educación Superior son determinantes para el futuro desempeño del sujeto. Por ello, surgió la necesidad de conocer las características que influyen en el rendimiento académico de los alumnos, entre ellas, la actitud hacia la Matemática considerada a partir de sus manifestaciones explícitas. Diversas investigaciones dan cuenta del impacto sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Este trabajo tiene por objetivo mostrar los resultados obtenidos en una investigación llevada a cabo durante el ciclo lectivo 2008, acerca de la Actitud Hacia la Matemática (AHM) y su influencia en el Rendimiento Académico de los alumnos en el Ingreso y en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica que pertenece al primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional.

Fundamentación teórica

Del análisis bibliográfico realizado acerca de las actitudes de los alumnos y su relación con el rendimiento académico, se destacan los trabajos realizados por Thurnstone (1928), quién desarrolló diversas escalas con la finalidad de situar a los individuos en un continuo psicológico de afecto.

Si bien existen diversas definiciones de este concepto, aquí, se consideró la propuesta de Eagly y Chaikén (1998) que definen la actitud como "la tendencia psicológica que se expresa a través de la evaluación favorable o desfavorable de una entidad en particular". En este caso, el objeto de actitud es la Matemática. Los investigadores consideran que las actitudes se adquieren, ya que provienen de experiencias positivas o negativas con el objeto de actitud y/o modelos que pudieron surgir de compañeros de clase, docentes, materiales de estudio, etc.

Existen tres componentes esenciales y relacionadas, que constituyen una actitud: a) la componente cognoscitiva, ideas y percepciones sobre el objeto de la actitud, b) la componente afectiva, sentimientos que el sujeto tiene y la intensidad de los mismos (aceptación-rechazo) y c) la componente conductual, dada por la respuesta que el sujeto tiene, en reacción al objeto de la actitud. En cuanto a la medición de las actitudes si bien existen diversos instrumentos, como la escala de Thurstone, el diferencial semántico y la escala de Likert., se utilizó el propuesto por Valdez Coiro, E. (2000) en su investigación sobre AHM., que consiste en una escala tipo Thurstone. La misma contiene una lista de reactivos para medir el grado de favorabilidad o desfavorabilidad de los estudiantes hacia la Matemática.

Para medir la Actitud Hacia la Matemática (AHM) se contemplaron las siguientes dimensiones: sentimientos hacia la Matemática, razones de agrado y de desagrado hacia la Matemática y la opinión de los alumnos, como el indicador para operacionalizar las dimensiones de la variable.

Con respecto al Rendimiento Académico, se consideró, como indicador, la nota obtenida por los alumnos en el examen final de Matemática en el Curso de Ingreso a la Facultad y las notas obtenidas en los exámenes parciales e integral de la asignatura Algebra y Geometría Analítica, durante el ciclo lectivo 2008. Para la acreditación de Matemática en el Ingreso, se utilizó una escala numérica de 11 grados (0 al 10), siendo 4 puntos la calificación mínima de aprobación. Mientras que, en el caso de la asignatura, para regularizarla se rindieron 2 exámenes parciales, donde uno de los requisitos es la aprobación de los dos parciales con 4 puntos como mínimo.

Pueden recuperar cada parcial por separado y por último tienen la posibilidad de un examen integral.

La investigación

La población bajo estudio estuvo conformada por los alumnos que rindieron el examen de Matemática del Curso de Ingreso y los dos exámenes parciales de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. La metodología utilizada es la propia de un diseño exploratorio descriptivo y la investigación realizada es no experimental de corte transversal. Para recolectar la información se aplicó una encuesta a una muestra de 398 alumnos, de un total de 900, seleccionados mediante un muestreo aleatorio simple de comisiones de los tres turnos de dictado: mañana, tarde y noche.

La información se recolectó a través de una encuesta, que se aplicó en la muestra, al comienzo del ciclo lectivo 2008. Luego se realizó un seguimiento de estos alumnos durante el cursado de la asignatura Algebra y Geometría Analítica.

La encuesta, constó de cinco secciones: 1.- la Sección A, que requería los datos personales del alumno; 2.- la Sección B, con información referida al curso de ingreso y 3.- la Sección C, formada por los reactivos de la escala de Thurstone. Cada reactivo asignado un valor escalar y los porcentajes registrados en ellos se ordenaron por valor escalar en orden creciente. Se construyeron cinco clases según las respuestas obtenidas: [1,5; 3,28], (3,28; 5,06], (5,06; 6,84], (6,84; 8,62] y (8,62; 10,4], las que se identificaron con las cinco categorías: muy desfavorable, desfavorable, neutra, favorable y muy favorable respectivamente. La escala fue administrada como parte de la encuesta, pidiendo a cada alumno que seleccione las afirmaciones que reflejen mejor sus sentimientos hacia la Matemática. El puntaje de la actitud de cada alumno es el promedio de los resultados de la escala de las afirmaciones elegidas.

La Sección D contiene una lista de nueve razones por las que le agrada la Matemática, mientras que la Sección E consta de ocho razones por las que le desagrada.

Se pidió al alumno que elija las razones de agrado y las de desagrado que considera más importantes. Para estas secciones se hizo el registro de los porcentajes ordenados por grupo, de cada opción.

Resultados

1.- Los resultados más importantes de las secciones A y B se detallan a continuación.

Se estudiaron a 398 alumnos de primer año con edades que varían entre los 16 y 43 años y, una edad mediana de 20 años, siendo el 78% (309) varones y el 22% (89) mujeres.

Además, el 80% (318) manifestó que no trabaja en la actualidad y el 38% (150) es recursante. Aproximadamente la mitad realizó sus estudios en escuela pública y el 40,2 % (160) seleccionó la Modalidad 'Economía y Gestión de las Organizaciones' del Polimodal y las restantes modalidades rondaron en el 10%.

Respecto al Curso de Ingreso que se imparte en la Facultad, si bien es evaluado no es obligatoria su aprobación para ingresar.

En cuanto al comportamiento en el estudio durante el Curso de Ingreso, el 51,3% (204) manifestó que estudiaba Matemática todos los días y el resto (48,7%) sólo lo hacía "unos días antes del examen". En cuanto al Rendimiento Académico, tanto en la asignatura Matemática del Curso de Ingreso como en los exámenes parciales e integral de la asignatura Algebra y Geometría Analítica, se definieron intervalos para distribuir los puntajes por categorías de notas, de [0,4) desaprobados y aprobados de [4,6), [6,8) y de [8,10]. En Matemática sólo el 24% aprobó con nota igual o superior a 6 (seis), mientras que la mayoría lo hizo con nota entre 4 y 6 y sólo hubo un 15% de alumnos desaprobados. Lo que indica que el rendimiento académico fue bastante pobre.

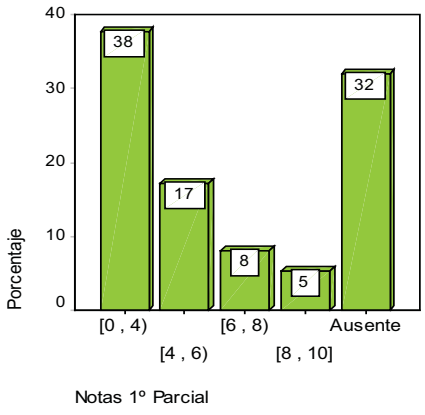


Figura N 1: Distribución porcentual de frecuencias por intervalos de las notas del 1ª Parcial de Álgebra y Geometría Analítica

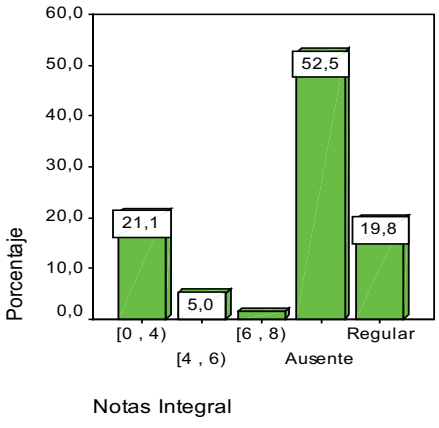


Figura N° 2: Distribución porcentual de frecuencias por intervalos de las notas del examen integral

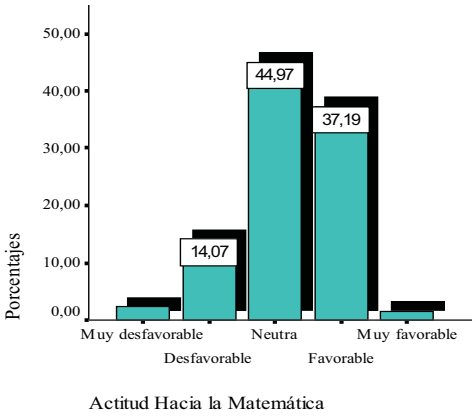
En la figura Nº 1 se observa el Rendimiento Académico de los alumnos en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica durante el ciclo lectivo 2008. Del total de la muestra, un alto porcentaje de alumnos (38 %) desaprobó el primer parcial y fue muy bajo el porcentaje de alumnos (13%) que lo aprobó con nota mayor o igual a seis. Fue notable también la cantidad de alumnos que no se presentó a este examen (32%). En el segundo parcial, si bien se redujo el porcentaje de alumnos desaprobados a un 25%, aumentó el de inasistencia a un (49%). Siendo similar el comportamiento en ambos parciales. Al finalizar el dictado de la asignatura se realizó una recuperación integral (febrero 2009) dirigida a aquellos alumnos que desaprobaron ambos parciales y sus respectivas recuperaciones, como una posibilidad más para regularizar la materia.

La figura Nº 2 muestra que sólo la quinta parte regularizó, el 19,8% (79) regularizó aprobando los parciales o sus respectivas recuperaciones y el 80% (319) restante debía presentarse a la recuperación integral; sólo un 6,5% (26) aprobó esta instancia y se observo un alto porcentaje de inasistencia 52, 5% (209). Es decir que el 73,7% (295) de los alumnos no logró regularizar Álgebra y Geometría Analítica.

2.- Los resultados más importantes de la Sección C

Para medir la variable AHM, se aplicó una escala tipo Thurstone que fue administrada como parte de la encuesta, pidiendo a cada alumno que seleccione las afirmaciones que reflejen mejor sus sentimientos hacia el objeto de la actitud.

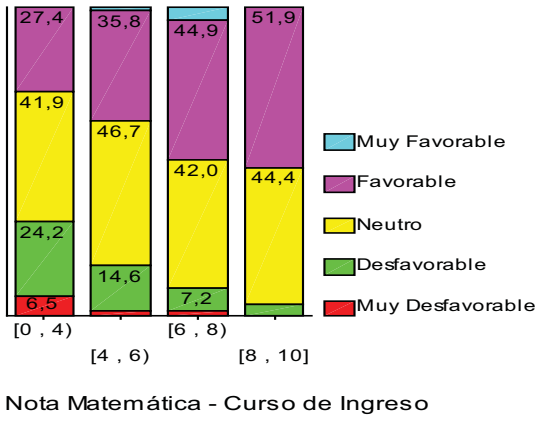
Figura Nº3: Distribución porcentual de la variable Actitud hacia la Matemática



La figura Nº 3 muestra la distribución porcentual de la variable, donde se observa que la mayor frecuencia se dio en la categoría neutra de actitud, que sumado al de las categorías desfavorable y muy desfavorable representa más del 60% de los alumnos. El 37,19% de los alumnos tiene una actitud favorable hacia la Matemática, resultando casi despreciable el porcentaje de alumnos con actitud muy favorable.

Luego, se investigó el comportamiento de los alumnos ubicados en los distintos perfiles de actitud respecto del Rendimiento Académico en la asignatura Matemática del Curso de Ingreso y en cada uno de los parciales de Álgebra y Geometría Analítica.

Figura Nº 4: Distribución porcentual de alumnos según los perfiles actitudinales y el rendimiento académico en Matemática del curso de ingreso 2008



En la figura Nº 4 se observa que del total de alumnos que desaprobaron el examen, un 41,9 % se concentra en el perfil de actitud Neutra. El comportamiento de los alumnos que aprobaron el examen es similar en todos los intervalos de notas considerados, puesto que en todos los casos se agrupan en la categoría neutra de actitud, siendo muy bajo el porcentaje de alumnos con perfiles de actitud desfavorable y muy desfavorable. Sin embargo, aumenta el porcentaje de alumnos en la categoría favorable a medida que crece la nota.

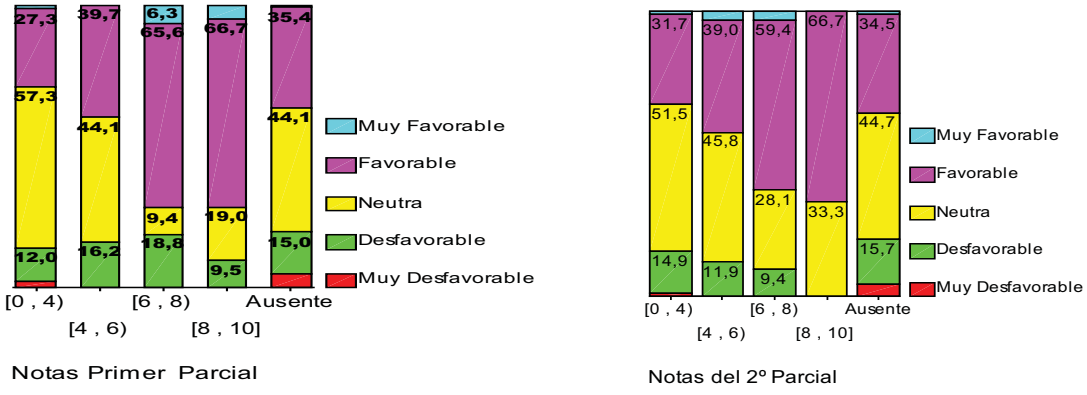


Figura Nº 5: Distribución porcentual de alumnos según los perfiles actitudinales y el rendimiento académico en los Parciales de Álgebra y Geometría Analítica

En cuanto al comportamiento de los alumnos que rindieron los parciales de Álgebra y Geometría Analítica respecto de la variable AHM, se observa en la figura Nº 5, que los alumnos desaprobados y el de los ausentes es similar en ambos parciales. Además, alrededor de un 50% se agrupa en la categoría neutra, mientras que en los intervalos de notas 6(seis) a 10(diez) crece considerablemente el porcentaje de alumnos agrupados en la categoría de actitud favorable hacia la Matemática

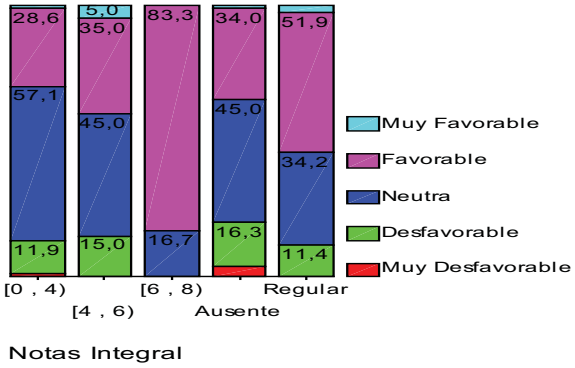


Figura Nº 6: Distribución porcentual de alumnos según los perfiles actitudinales y el rendimiento académico en Álgebra y Geometría Analítica.

Respecto al comportamiento de los alumnos en el examen integral se observa en la figura Nº 6 que del total de alumnos que desaprobaron el examen, es muy bajo el porcentaje que se encuentra en la categoría de actitud desfavorable (11,9%), mientras que, es elevado el porcentaje de alumnos (57,1%) que se agrupa en la categoría neutra. Siendo más del doble los alumnos que tienen actitud favorable.

Del total de alumnos que aprobaron con una nota igual o superior a 6(seis), el 83,3% se encuentran en la categoría favorable. En cuanto al comportamiento de los 79 alumnos que regularizaron la asignatura en el mes de diciembre, se observa que la mayor cantidad se agrupa en las categorías de actitud favorable (51,9%) y muy favorable (2,5%), siendo muy pequeña la cantidad de alumnos (11,4%) en la categoría desfavorable y ninguno en la categoría muy desfavorable.

Estos resultados nos indican que la AHM es relevante en el Rendimiento Académico.

3.- Los resultados más importantes de la Sección D

En cuanto al análisis acerca de las razones de agrado hacia la Matemática, se observa en la figura Nº 7 que se destacan las razones: “La necesitamos en la vida actual por sus aplicaciones prácticas” y “Mejora el pensamiento, da exactitud y ayuda a resolver problemas”.

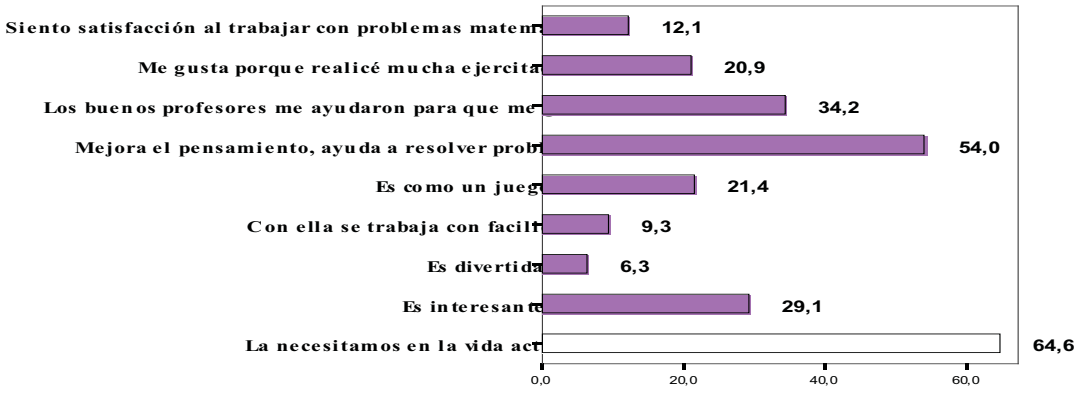


Figura nº 7: Distribución porcentual de 398 alumnos según las razones de agrado hacia la Matemática.

4.- Los resultados más importantes de la Sección E

En esta sección se pidió a los alumnos que elijan las razones de desagrado hacia la Matemática que consideraran más importantes. Del análisis de los resultados, se obtuvo, que la distribución porcentual es uniforme, siendo mayor la que corresponde a la razón: "La Matemática me desagrada por los malos profesores que no explican bien", con un 26,9%, siguiéndole la razón que: "No soy bueno en Matemática, no aprendo fácilmente" con un 25,6%.

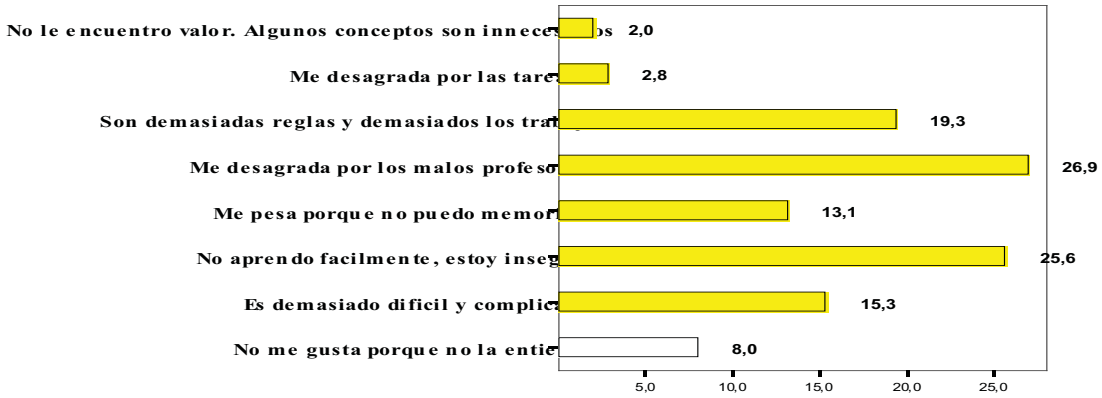


Figura nº 8: Distribución porcentual de 398 alumnos según las razones por las que les desagrada la Matemática.

Conclusiones

Actualmente el estudio de las actitudes hacia las ciencias en general, se ha convertido en uno de los aspectos más relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles educativos, dado que diversas investigaciones confirmaron su impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Además en la Ley Federal de Educación, se considera a las actitudes, como causa y efecto del aprendizaje.

La mayoría de los alumnos desaprobados pertenece a la categoría neutra, mientras que los alumnos aprobados se encuentran en la categoría favorable.

Los resultados obtenidos permitieron concluir que la AHM es relevante para el rendimiento académico de los alumnos, por cuanto las respuestas que expresan una actitud favorable se relaciona con el nivel de logro obtenido en el cursado de la asignatura.

Por lo tanto, es necesario que los docentes evaluemos las percepciones de los estudiantes para descubrir intereses y realizar innovaciones metodológicas que optimicen el proceso educativo, propiciando la retención y el desarrollo normal de la carrera.

Referencias bibliográficas

Eagly, A., Chaiken S. (1998). Attitude Structure and Function. En D.T. Gilbert, S.T. Fiske y G. Lindzey. The handbook of Social Psichology (pp. 269 – 322). New York: Mc. Graw Hill.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (1998). Metodología de la Investigación. México: McGraw Hill Interamericana.

Summers, G. F. (1976). Medición de Actitudes. México: Trillas.

Thurstone.L.L. (1928).The Measurement of Attitude. Chicago: The University of Chicago Press.

Valdez Coiro, E. (2000). Rendimiento y Actitudes. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

NOCIONES MATEMÁTICAS ADQUIRIDAS Y AUDICIÓN DIFERENCIADA: EDADES 18-24 AÑOS

Héctor Chávez Rivera, Ignacio Garnica Dovala, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav del IPN México
chavez_santiago@yahoo.com.mx, igdovala@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento numérico Nivel: medio superior
Educación especial

Resumen. *En este estudio, de orden cualitativo, se aplicó un cuestionario a 17 estudiantes con déficit auditivo, 18 a 24 años de edad, para obtener información sobre su comprensión de los números naturales, sus operaciones y sus relaciones básicas. Registrados en papel, los reactivos se presentaron en lengua escrita, con términos sencillos. Se prescindió de intérprete en la lengua de señas mexicana para identificar directamente posibles dificultades de comprensión de los conceptos matemáticos implicados; además, la aspiración de los participantes en el estudio al acceso a un bachillerato en línea impone su dominio de la lengua escrita. Los resultados indican el predominio de un razonamiento aditivo sobre el multiplicativo y, a lo más, una abstracción pseudoempírica en edades que en los normoyentes corresponden a las etapas del pensamiento formal. La escasa y deficiente producción en lengua escrita referida a los reactivos sugiere investigar el empleo del método de logogenia para su adquisición en conjunción con la del conocimiento matemático.*
Palabras clave: audición diferenciada, educación matemática especial

Contexto general de la investigación

La educación matemática ante déficit auditivo enfrenta diversas dificultades: carencia de docentes de educación especial para sordos, carencia de intérpretes educativos (Antia, Sabers & Stinson, 2007) de la lengua oral y/o escrita a la lengua de señas y viceversa, y la carencia de libros de texto y materiales para la enseñanza de sordos. Estas dificultades en la educación contribuyen a la vulnerabilidad de la comunidad con audición diferenciada, la cual se ve acrecentada por la falta de investigación en la compensación del déficit de audición, en particular para la adquisición de conocimiento matemático (Vygotski, 1997; Piaget, 1961). En la búsqueda de alternativas para lograr una educación inclusiva de nivel bachillerato a esta comunidad, se diseñó un programa emergente de matemáticas para la adquisición del conocimiento matemático requerido con miras a la incorporación de estudiantes con este tipo de déficit a un curso propedéutico de un programa de bachillerato propuesto en línea. El programa se constituyó en tres unidades: conceptos básicos de aritmética y elementos de pre-álgebra, geometría y medición, e información cuantitativa. En el escenario de la enseñanza de las matemáticas con este programa a un grupo de jóvenes sordos e hipoacúsicos se desarrolló esta investigación, con carácter exploratorio.

Elementos cognitivos y epistemológicos

Las dos grandes funciones del lenguaje, como partes principales de la actividad lingüística, son la producción y la comprensión de enunciados. La producción de un mensaje lingüístico consiste en ir de la idea a la expresión de una secuencia canónica de lexemas, es decir, de partes invariables de las palabras en las que reside su significado fundamental. La *comprensión* es la serie de operaciones que, a partir de un enunciado, permite volver a la idea de partida. Las dos funciones son asimétricas (Puyuelo y Rondal, 2003).

El lenguaje y otros factores cognitivos juegan un importante rol en el desarrollo de habilidades generales y específicas de razonamiento matemático. El primero es necesario, aunque no suficiente para el desarrollo de las operaciones formales (Piaget, 1961), las cuales se enraizan en las coordinaciones de las acciones provenientes desde las operaciones sensoriomotoras a las concretas. El reto de la mediación del significado y del aprendizaje por un intérprete es agudo para los niños sordos (Antia *et al*, 2007) debido a las dificultades para establecer el habla privada necesaria para el pensamiento, sin importar el lenguaje externo y/o la modalidad que se use para desarrollar el habla privada. Vygotski (1997) señala que es esta habla privada la que sirve de base para que el lenguaje devenga racional y el pensamiento verbal. Power y Leigh plantean que una dificultad particular para los estudiantes sordos la constituyen "el lenguaje especial de las matemáticas y la secuencia lingüística, y la manipulación de los eventos en reactivos escritos de matemáticas" (2003, p. 46). Los autores sugieren que los maestros proporcionen oportunidades a lo largo del curriculum para extender y elaborar conceptos matemáticos, y de ahí extender la comprensión lingüística y conceptual de los estudiantes sordos. Quizás debido a las dificultades que para ellos plantea el lenguaje, la enseñanza de las matemáticas históricamente se ha enfocado en las cuatro operaciones aritméticas y menos en la aplicación de principios matemáticos en escenarios del mundo real. Desde el punto de vista epistemológico, para que el sujeto utilice la aritmética elemental se requiere su progreso del razonamiento aditivo al multiplicativo, primero, por abstracciones de acciones sobre los objetos, por ejemplo con agregaciones, que conducirán a las diferenciaciones de los resultados respectivos, es decir, a abstracciones a la segunda potencia; y, luego, a integraciones que equilibren las abstracciones parciales, de donde resultan las generalizaciones. En los normoyentes, este logro tiene lugar a los 12 o 13 años de edad (Piaget, 1979).

Pregunta de investigación

Con un objetivo general de comprender los fundamentos cognitivos de que disponen los estudiantes sordos e hipoacúsicos y las intervenciones educativas que se les proporcionan, realizamos un estudio exploratorio orientado hacia la pregunta: ¿qué relación hay entre las nociones matemáticas de sujetos de 18-24 años de edad con déficit auditivo y su lengua escrita adquirida? En particular nos referiremos aquí al conocimiento aritmético básico adquirido por estos estudiantes en su formación primaria y secundaria.

Método y fuente de datos

La investigación fue de orden cualitativo. Participaron candidatos a un curso propedéutico de un bachillerato en línea, de los cuales nueve eran sordos profundos y ocho hipoacúsicos oralizados (que en adelante denotaremos *sp* y *ho*, respectivamente) de edades de 18 a 24 años, todos con certificado de secundaria terminada y usuarios de la lengua de señas mexicana. Se les aplicó un cuestionario con cinco reactivos con preguntas abiertas, de los cuales cuatro pidieron además la complementación de oraciones referidas a la respuesta. La técnica de registro de datos fue la escritura con lápiz en el papel que contenía las preguntas e indicaciones impresas en lengua natural. El instrumento se aplicó en las condiciones ordinarias de las sesiones de enseñanza de preparación para el propedéutico, personalizadas y con duración de 1:30 hrs. Se observó el desempeño del estudiante con intervención individual del investigador, sin el uso de lengua de señas sino con comunicación escrita. La intervención fue sentando, en lo posible, lo que se requería en cada caso para arribar a la solución del reactivo a partir del enunciado escrito dado.

El cuestionario. Se pretendió obtener datos sobre el desempeño de los estudiantes al aplicar la división y la multiplicación de números naturales para contestar a los reactivos, al interpretar el resultado respecto a la situación a la que se refirió la pregunta y al identificar múltiplos de cantidades numéricas dadas. Se procuró presentar las situaciones con un número pequeño de palabras sencillas, cuyo significado no revistiera una dificultad adicional a las de la comprensión de los conceptos matemáticos implicados.

Los reactivos. Tres reactivos requirieron una división exacta, y otro una multiplicación. Cada reactivo incluyó dos enunciados ligeramente diferentes a completar para interpretar el resultado

obtenido respecto a la situación presentada. El referente general fue el reparto de un conjunto de unidades (naranjas, chicles, hojas, libros) en contenedores (bolsas, cajas, carpetas). Los reactivos a) y d) preguntan por el número total de contenedores, el reactivo b) por el total de unidades y el c) por unidades por contenedor. La quinta pregunta requirió identificar características comunes a los cuatro reactivos. Las magnitudes numéricas implicadas son múltiplos de 250 y de 3. El planteamiento fue el siguiente:

a) 1 500 naranjas se empacaron en bolsas de 6 naranjas cada una. ¿Cuántas bolsas se usaron?

Se usaron _____ bolsas con _____ naranjas cada una.

Se utilizaron _____ bolsas con _____ naranjas cada una.

¿Quedaron naranjas sin empacar? _____

¿Por qué? _____

b) Cada una de 250 cajas tiene 12 chicles. ¿Cuántos chicles hay en todas las cajas?

En todas las cajas hay _____ chicles.

En total hay _____ chicles.

¿Por qué? _____

c) 6 000 hojas de papel se pusieron en igual cantidad en 500 carpetas. ¿Cuántas hojas tiene cada carpeta?

En cada carpeta hay _____ hojas de papel.

Cada carpeta tiene _____ hojas de papel.

d) En una caja caben 3 libros. Si se tienen 750 libros, ¿cuántas cajas se necesitan para guardar todos los libros?

Se necesitan _____ para _____ todos _____.

Todos _____ se guardan en _____ cajas, con _____ libros en cada _____.

e) ¿Qué tienen en común los cuatro reactivos?

_____

Desempeños y resultados

En general, el cuestionario fue más difícil para los estudiantes sp que para los estudiantes ho. Dadas las condiciones de la aplicación en sesiones de enseñanza y con la intervención del

investigador, sólo cuatro de las 68 operaciones realizadas (cuatro por cada estudiante) fueron incorrectas. La Tabla 1 resume los tipos de desempeño de los estudiantes.

Tabla 1. Tipos de desempeños identificados en la contestación del cuestionario.

Observación	**Sordera profunda (sp)**	**Hipoacusia y oralización (ho)**
1. Algoritmo de división sin coordinar producto y resta	6 de 9	2 de 8
2. Selección errónea de la operación	6 de 9	3 de 8
3. La comisión de errores sólo en aplicación paso por paso	4 de 6	2 de 3
4. Comprobación con conteo manual y aditividad	5 de 9	4 de 8
5. Abstracción, diferenciación e integración	4 de 9	5 de 8

Predominaron la operatividad aditiva sobre la multiplicativa —aún a la edad en cuestión señalada como formal (Piaget, 1979) en sujetos normoyentes—, la incomprensión en el desarrollo del algoritmo de la división e, incluso con la respuesta correcta, la interpretación incorrecta en lengua escrita de sus términos constitutivos. El reactivo c) fue el más difícil; un factor pudo ser la magnitud mayor de sus datos respecto a los de los otros reactivos, lo que dificultó el procedimiento aditivo puesto en juego por los estudiantes más que en los otros; un segundo factor pudo ser el orden de los reactivos, ya que el c) se planteó a continuación del más fácil y único, b), que requería una multiplicación y no una división.

*Coordinación de operaciones***.** Seis estudiantes ho y sólo tres sp aplicaron de manera fluida el algoritmo de la división. Los estudiantes restantes mostraron su falta de dominio de las tablas de multiplicar en sus divisiones desplegando las primeras a un lado. Esta falta de dominio provocó que el tiempo para resolver el reactivo por lo menos se triplicara. En el desarrollo de la división, la falta del procesamiento automático de la multiplicación causó la descoordinación de los productos de las cifras sucesivas del cociente por el divisor y de sus restas de las cifras respectivas del dividendo (véanse Figura 1 y Figura 6 izquierda).

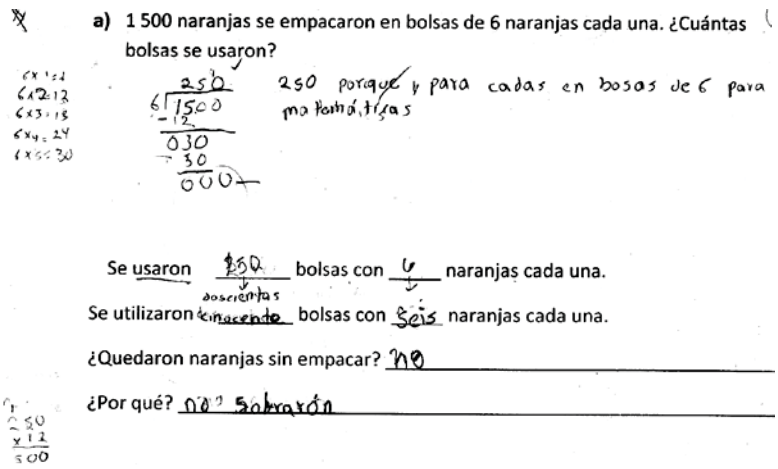


Figura 1. Desarrollo del algoritmo de la división sin coordinación de las operaciones de multiplicación y de resta. Caso 1-sp.

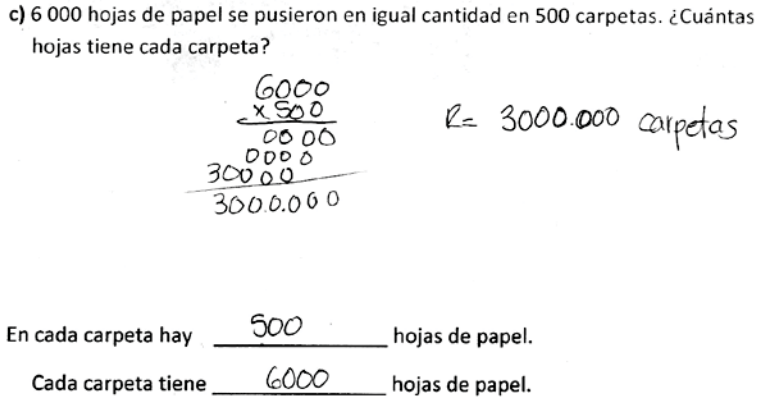


Figura 2. Selección errónea de la operación.
Caso 4-sp.

Selección errónea de la operación. La evitación de los verbos repartir y distribuir en el reactivo c), para no inducir la selección de la operación a realizar, condujo a interpretarlo como una situación multiplicativa (véase Figura 2). Este sentido fue corroborado por la complementación del primer enunciado debajo del reactivo; pero la insensibilidad a la contradicción es manifiesta en el segundo enunciado. Si bien ello se pudo deber al descontrol del estudiante al enfrentar dos veces en sucesión la misma petición, sí revela la incomprensión de las expresiones “en cada … hay” y “cada … tiene” en los dos enunciados. La Figura 3 muestra otro ejemplo de la selección errónea de la operación y el desconocimiento de expresiones con los cuantificadores “en cada” y “en total”.

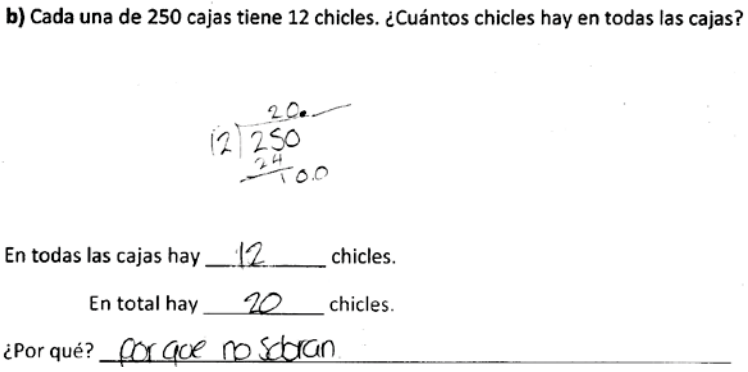


Figura 3. Desconocimiento de cuantificadores en expresiones escritas.

Caso 16-ho.

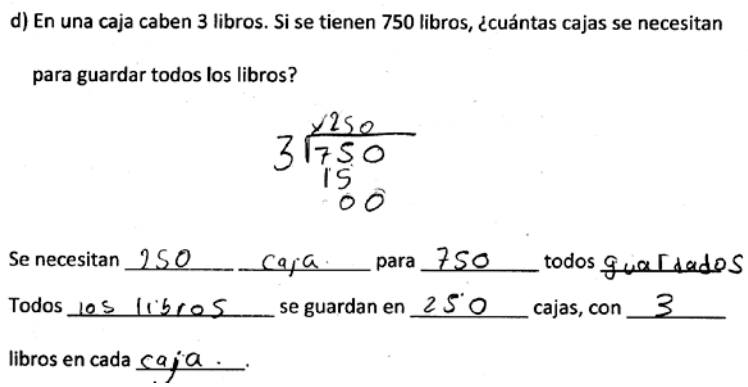


Figura 4. Desarrollo coordinado del algoritmo de la división.

Caso 2-sp.

Comisión de errores sólo en aplicación paso por paso. Los estudiantes que realizaron el algoritmo de la división fluidamente no cometieron errores en la operación, cuando ésta era apropiada. La Figura 4 muestra que, a pesar de las dificultades sintácticas en la primera expresión escrita para completar, el estudiante comprendió el enunciado del reactivo. Al contrario, en la Figura 3 en que la selección de la operación es errónea, desarrollada paso por paso incorrectamente, la justificación y los dos enunciados completados muestran el desconocimiento de los integrantes de la división y la dificultad con los cuantificadores.

Comprobación con conteo manual y aditividad. Los estudiantes, aún los oralizados, comprobaban sus operaciones con conteo manual. El razonamiento aditivo predominó en los desempeños, incluso sin la observancia de la conservación de la igualdad, como en el ejemplo de la Figura 5, izquierda. Por otro lado, la falta de automatización de la multiplicación condujo al cálculo de productos sucesivos como alternativa al algoritmo de la división, como en el ejemplo de la derecha, Figura 5.

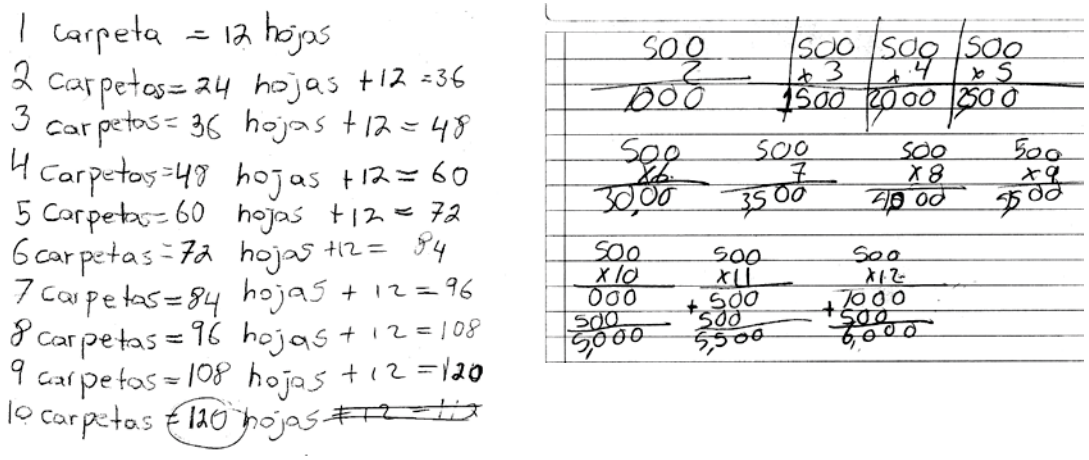


Figura 5. Comprobación del resultado de la operación para el reactivo c).
Casos 3-sp (izquierda) y 10-ho (derecha).

Abstracción, diferenciación e integración. Cuatro de los nueve estudiantes sp y cinco de los estudiantes ho contestaron al reactivo e). De estos últimos, tres se refirieron a las operaciones efectuadas, uno a que los reactivos "son parecidos", y el restante, aunque con la intervención del investigador, identificó los múltiplos en las cantidades implicadas. De los cuatro sp primeros, uno de ellos consideró sólo el reactivo precedente para contestar la pregunta, lo que revela la insuficiencia de la lectura (caso 9-sp, véase Figura 6). De todos los estudiantes participantes, sólo el caso 2-sp señaló "todos enteros", con lo que, más allá de las operaciones efectuadas, pareció arribar a una primera integración de las características de los cuatro reactivos, pero sin lograr la abstracción necesaria para la identificación de la relación entre todas las cantidades implicadas.

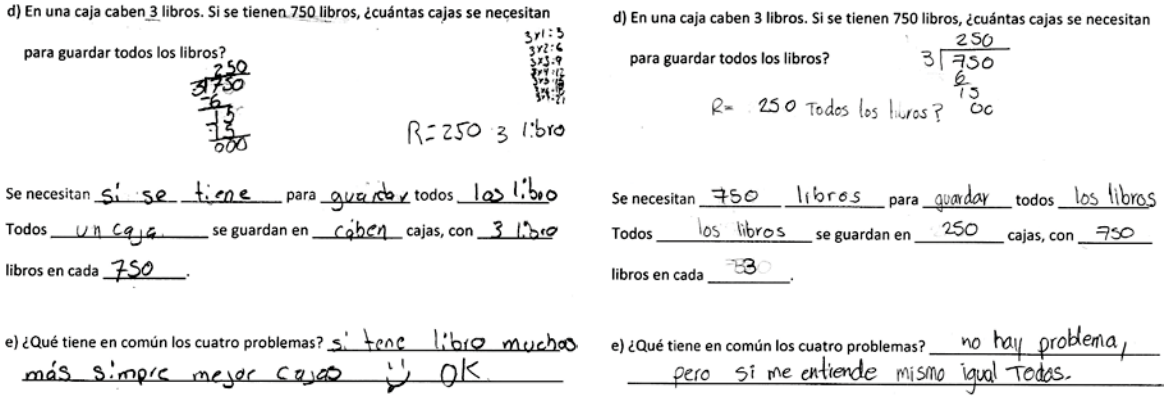


Figura 6. Lengua escrita insuficiente para expresar características numéricas comunes.
Casos 8-sp (izquierda) y 4-sp, (derecha).

Efectos de la enseñanza. Cuatro de los diecisiete estudiantes antecedieron el resultado de la operación que realizaron con el signo "R =", el cual proviene de prácticas comunes en la enseñanza básica de las matemáticas introducidas con el afán de organizar el procedimiento a seguir en la contestación a un problema. Los desempeños de los estudiantes reproducen esas prácticas sin advertir las relaciones y propiedades numéricas.

Las intervenciones

Dos de cada tres intervenciones se realizaron con estudiantes sp. La comunicación se estableció mediante figuras esbozadas en papel con lápiz, lectura de labios y señalamientos a las palabras o frases claves en el enunciado del reactivo y en las operaciones realizadas. Esta estrategia evitó el recurso a la lengua de señas para centrarse en la lengua escrita y en los conceptos matemáticos.

Comentarios

Según Piaget (1979), en niveles preoperatorios y de operaciones concretas, el sujeto no puede efectuar construcciones ni luego deducciones, a no ser que constantemente recurra a los resultados de esa construcción, lo que él denomina abstracción pseudoempírica. Afirma, además, que el lenguaje verbal es necesario, pero no suficiente, para la evolución de las operaciones intelectuales (Piaget, 1961). Como vimos aquí, el uso de la lengua escrita informa sobre estas últimas. Por otra parte, es imperante que los aspirantes con déficit auditivo adquieran la lengua escrita, a la cual se privilegia para la presentación del conocimiento en general, y es intermedia hacia la del conocimiento matemático formal. Garnica (2006) ya ha señalado que se requiere la incorporación de un método como el de la logogenia para la adquisición de la lengua escrita y la investigación respecto a su implementación para la adquisición y/o desarrollo del conocimiento matemático. Los resultados de aquí concuerdan con esta recomendación.

Referencias bibliográficas

Antia, S., Sabers, D., & Stinson, M. (2007). Validity and Reliability of the Classroom Participation Questionnaire With Deaf and Hard of Hearing Students in Public Schools. The Journal of Deaf

Studies and Deaf Education 12(2):158-171. Oxford University P. Recuperado el 3 de marzo de 2009 de http://intl-jdsde.oxfordjournals.org/cgi/reprint/12/2/158

Garnica, I. (2006). Percepción auditiva diferenciada y producción escrita de expresiones: elementos para un modelo de comunicación de la unidad ["t/m:mtl-sms"] para la investigación en Matemática Educativa. En E. Filloy (Ed.), Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada actual (pp. 257-282). México: Cinvestav-Santillana.

Piaget, J. (1961). La formación del símbolo en el niño. México: FCE.

Piaget, J. (1979). Investigaciones sobre la abstracción reflexionante. 1. Buenos Aires: Huemul, S. A.

Power, D. & Leigh, G. (2003). Curriculum: Cultural and communicative contexts. En M. Marshark & P. E. Spencer (Eds.), Oxford handbook of deaf studies, language and education (pp. 38-51). New York: Oxford University Press.

Puyuelo, M. & Rondal, J. A. (2005). Manual de desarrollo y alteraciones del lenguaje. Barcelona, España: Masson, S. A.

Vygotski, L. S. (1997). Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V. España: Visor Dis.

ANÁLISIS DE LAS CONCEPTUALIZACIONES ERRÓNEAS EN CONCEPTOS DE ÁLGEBRA: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE PRIMER INGRESO

Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora
Instituto Tecnológico de Costa Rica — Costa Rica
Liceo Occidental de Cártago
gramirez@itcr.ac.cr, jchavarria@itcr.ac.cr, mmcnela@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico — Nivel: Medio

Resumen. *En el presente artículo se reportan los resultados de una investigación que clasifica las conceptualizaciones que poseen estudiantes de primer ingreso universitarios de Costa Rica en temas de algebra elemental, tales como simplificación de expresiones algebraicas y factorización. El estudio está apoyado en el modelo SOLO Taxonómico propuesto por Biggs & Collis, 1982.*
Palabras clave: formas de razonamiento, errores, algebra

Introducción

En este artículo se exponen los resultados de una investigación, realizada en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, en la que se analizan y clasifican las formas de razonamientos mostradas por algunos estudiantes de primer ingreso universitarios en ejercicios de álgebra. A pesar de que los estudiantes recibieron en secundaria formación en dichos temas y durante un semestre recibieron instrucción básica en un curso universitario, siguen presentando obstáculos epistemológicos que han perdurando durante todo el proceso de instrucción. El concepto de obstáculo epistemológico fue desarrollado por Bachelard quien indica que *"*un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden a la larga trabar…*"* (Bachelard, 1982, p. 16).

En esta investigación nos interesa dar respuesta a la pregunta ¿Cómo evolucionan las formas de razonamientos que muestran los estudiantes de primer ingreso universitario al realizar ejercicios de álgebra, tales como la simplificación de expresiones y la factorización?

Marco conceptual

En las últimas tendencias en la investigación acerca del razonamiento, pensamiento y cultura algebraica, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo de los sujetos de estudio, ha llegado a ser un objetivo importante de investigación.

Adoptamos el interés de Socas por clasificar las formas de razonamiento de los estudiantes para explicar los errores que estos comenten:

El análisis de los errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores organizar estrategias generales específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos. (Socas, 1997, p. 30)

Concordamos con el punto de vista de Godino, Batanero y Font quienes indican que "Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 74).

Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad.

El modelo consta de cuatro categorías o niveles, las cuales se describen a continuación:

1. *Preestructural:* La tarea no es abordada adecuadamente, ya que los estudiantes poseen información aislada que no tiene organización ni sentido.
2. *Uniestructura:* Los estudiantes se enfocan en un aspecto relevante, realizan conexiones simples y obvias pero no tienen una comprensión de lo que hacen.
3. *Multiestructural:* Los estudiantes se enfocan en más de un aspecto de la tarea, pero son tratados en forma independiente, ya que no los relacionan entre sí.
4. *Relacional:* Los estudiantes integran diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

Metodología

La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio de caso aplicado a estudiantes universitarios de distintas carreras y de nuevo ingreso que matricularon un curso introductorio de matemática durante el primer semestre de 2008.

Los principales instrumentos, de recolección de información fueron: un examen de diagnóstico, que consta de 9 ítems abiertos, diseñado para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre conceptos algebraicos y geométricos. Además de entrevistas grabadas en formato de video.

El examen fue aplicado a 1102 estudiantes. Se analizaron dos ítems a un 10% de la población (seleccionados aleatoriamente) con el fin de evaluar los errores cometidos. De estos, se analizaron a algunos estudiantes por ítem (seleccionados por conveniencia) una vez que finalizaron el curso introductorio para comparar las conceptualizaciones mostradas después de la instrucción.

Resultados

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por las formas de razonamiento que exhibieron después de un semestre de instrucción. Se presenta el análisis completo de dos ítems correspondientes a los temas de simplificación de expresiones algebraicas.

Análisis del ítem 1

1. Simplifique al máximo la expresión $(a^{-2} - 2b^{-1}) \cdot (b - 2a^2)^{-1}$

Esta pregunta tiene como objetivo indagar si los estudiantes son capaces de interpretar las notaciones matemáticas empleadas para la representación de expresiones algebraicas para luego poder utilizar las propiedades de los números reales para simplificar la expresión.

A continuación se presentan los errores cometidos por los estudiantes por orden de incidencia.

a) Interpreta $2b^{-1}$ como $(2b)^{-1}$, el estudiante interpreta $2b^{-1} = \frac{1}{2b}$ como correcto.

b) Realiza la distribución de un exponente respecto a la sustracción. Realiza $(b-2a^2)^{-1} = b^{-1} - 2a^{-2}$ como correcto.

c) Asume como válida la igualdad $(a^{-2} - 2b^{-1}) = \frac{1}{a^2 - 2b}$.

d) Simplifica los sumandos del numerador de una fracción racional con los del denominador como si estos fueran factores.

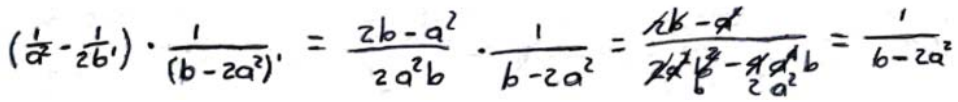
Tabla 1: Clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas en el ítem 1 del cuestionario de diagnóstico

Nivel	Curso Introductorio	%
Preestructural	28	33.33%
Uniestructural	24	28.57%
Multiestructural	19	22.61%
Relacional	13	15.47%
Total	84	100%

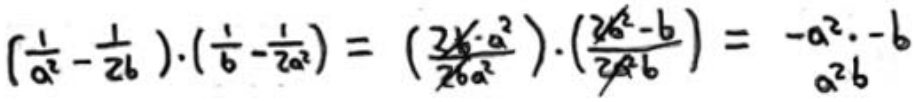
En cuanto a la clasificación de los niveles de razonamiento utilizando el modelo SOLO, se obtuvieron los resultados que se exponen en la tabla 1.

Al estudiante 50 (en adelante Daniel) y el 822 (en adelante Carlos) por sus errores cometidos durante el examen de diagnóstico fueron ubicados en el nivel Uniestructural, por lo que se les realizó una entrevista la cual tuvo como objetivo comparar sus conceptualizaciones después de haber llevado un curso remedial.

En el examen de diagnóstico Daniel nos brinda como respuesta al ítem 1 lo siguiente:



Mientras la respuesta brindada por Carlos, en el mismo ítem, fue:



Ambos estudiantes comenten el error a y el error d de la lista de los más frecuentes mostrados anteriormente. Carlos, además, comete el error *b*.

Se planeó una entrevista semiestructurada con los siguientes reactivos:

1. *Simplifique al máximo la siguiente expresión:* $2x^{-2} \cdot x$.

2. *Exprese como cocientes las expresiones siguientes:* $3t^{-1}$, $(2c)^{-2}$

3. *Desarrolle y simplifique, de ser posible, las siguientes expresiones:* $(2b-1)^2$, $(2-5b)^{-1}$, $(3x)(3x-1)^{-1}$, $\frac{x+2(x+1)}{x+1}$, $\frac{x+2(x+1)}{x+2}$.

Los objetivos de la entrevista fueron:

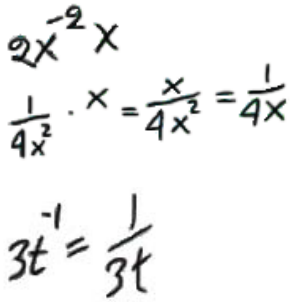
1. Indagar si los estudiantes han superado el error *a* cometido durante el examen de diagnóstico.
2. Observar la forma en que los estudiantes trabajan con expresiones simples.
3. Indagar si el estudiante fue capaz de superar el error *b* cometido durante el examen de diagnóstico un semestre atrás.

A continuación se analizará y clasificará lo realizado por los estudiantes durante las entrevistas.

Entrevista de Daniel

En los ejercicios 1 y 2 Daniel nos muestra los siguientes procedimientos:

Es claro que Daniel no ha superado el error *a* cometido durante el examen de diagnóstico hace un semestre.

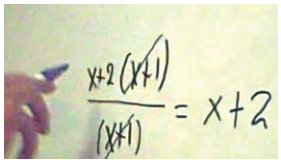


Uniestructural:

Comete el error *a.*

En ambos ejercicios

En el ejercicio 3 Daniel reaccionó de la siguiente manera:

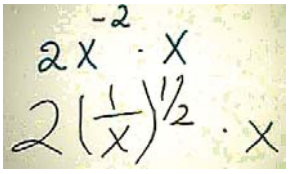


Preestructural: simplifica un sumando como si fueran factores. Comete el error *d*.

Al cuestionarle y señalarle a Daniel el hecho de que en el numerador hay una suma en lugar de una multiplicación, Daniel duda del procedimiento que realizó e intenta realizarlo de otra manera. Finalmente, Daniel no logra superar el nivel Uniestructural ya que continúa cometiendo los mismos errores que realizó durante el examen de diagnóstico, a pesar de eso Daniel logra aprobar el curso con una nota de 70.

Entrevista de Carlos

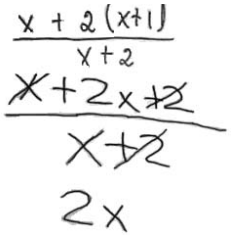
En el ejercicio 1 Carlos realizó el siguiente procedimiento.



Carlos expresa su intención diciendo "Ahí lo que quiero es convertir este negativo, entonces, para poder convertirlo hay que darle vuelta a la expresión. Luego recapacita y cambia el ½ por 2.

Preestructural: Lo que realiza no tiene ningún sentido matemático.

En el ejercicio 2 Carlos reacciona correctamente por lo que se ubica en este en el nivel relacional.



Preestructural: Cancela sumandos comos si fueran factores. Comete el error *d.*

Por último en el ejercicio 3 Carlos comete el mismo error que cometió durante el examen de diagnóstico un semestre atrás.

Luego Carlos analiza el procedimiento y se dispone a realizar correcciones en el mismo, diciendo que al cancelar los 2 debe quedar un uno por lo que cambia la respuesta por $2x+1$.

Carlos al igual que Daniel, no logra superar el nivel Uniestructural en el que se ubicó inicialmente. Los errores cometidos durante la prueba de diagnóstico persisten a pesas de recibir un curso remedial durante un semestre. Carlos aprueba el curso con una nota de 70.

Análisis del ítem 2

2. Factorice completamente la siguiente expresión $6am - 2n + 4an - 3m$

Esta pregunta tiene por objetivo indagar si los sujetos conocen el concepto de factorización de una expresión; así como identificar y aplicar de manera correcta el método de factorización, en este caso el método de factor común y agrupación.

A continuación se presentan los errores cometidos por los estudiantes por orden de incidencia.

a) Cuando realiza la agrupación cambia de suma a producto, considerando la igualdad $6am-2n+4an-3m=(6am-3m)(4an-2n)$ como válida.

b) Agrupa términos que no generan un factor común, considerando como válido las igualdades
$6am-2n+4an-3m=(6am-2n)+(4an-3m)$
$=2(3am-n)+(4an-3m)$

c) Realiza la suma de los coeficientes numéricos de monomios no semejantes

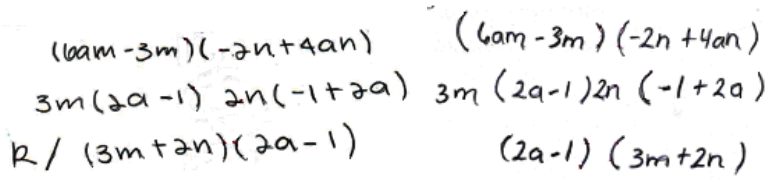
Utilizando la clasificación de los niveles de razonamiento bajo el modelo del SOLO Tenemos la clasificación que se muestra en la tabla 2.

En el examen de diagnóstico los estudiantes 614 (en adelante José) y 10 (en adelante Rocío) cometiendo los principales errores, lo que los ubicó en el nivel Uniestructural, por lo que se les entrevistó con el objetivo comparar sus conceptualizaciones actuales con las con las tenidas durante la prueba, luego de haber recibido instrucción durante un semestre.

Tabla 2: Clasificación de los sujetos por categorías utilizando el modelo SOLO según las respuestas dadas a la pregunta 2 del diagnóstico.

Nivel	**Curso Introductoria**	**%**
Preestructural	23	27.38%
Uniestructural	16	19.04%
Multiestructural	7	8.33%
Relacional	38	45.23%
Total	84	

En el examen de diagnóstico, las respuestas brindadas por Rocío y José fueron respectivamente:



Ambos estudiantes comente el error *a*, convirtiendo la adición en una multiplicación cuando hacen la agrupación de los términos.

Para la entrevista, se planearon, estratégicamente, los siguientes ejercicios.

1. Factorice completamente las expresiones: a) $ax-ay$ b) x^2+xy

2. Factorice completamente la expresión. a) $(x-1)^2 y+(x-1)z$ b) $a(x-y)+(x-y)$

3. Factorice completamente las expresiones: a) $ab+a+b+1$ b) $2xy+3y+4x+6$

La entrevista tiene los siguientes objetivos:

1. Indagar el nivel de madurez que posee el estudiante para reconocer el factor común en expresiones simples y expresiones generalizadas.

2. Analizar la madurez adquirida por los estudiantes después de haber llevado durante un semestre un curso remedial.

3. Evaluar si el estudiante tiene la capacidad de realizar una agrupación conveniente para factorizar completamente una expresión dada.

Entrevista de Rocío y José

Tanto en el ejercicio 1 y 2 los estudiantes responden correctamente, por lo ambos se ubican en el nivel Relacional. En el caso de Rocío, expresa tener duda lo que la hace cometer un pequeño error que luego corrige. En el caso de José, realiza el procedimiento con mucha seguridad y sin cometer error alguno. Por lo que se concluye que Rocío se encuentra en el nivel Multiestructural mientras que José en el nivel Relacional ambos superan el nivel Uniestructural. Ambos aprueban el curso, José con nota de 80 y Rocío con nota de 75.

Conclusiones

Los estudiantes Daniel y Carlos mostraron los mismos errores, al simplificar expresiones algebraicas, que poseían al realizar el examen de diagnóstico, por lo que la instrucción durante un semestre en un curso remedial, no hizo que superaran el nivel uniestructural que tenían inicialmente. Estos estudiantes siguen cometiendo errores graves.

En el tema de factorización fue en el que los estudiantes tuvieron un mayor crecimiento, reconociendo el factor común en expresiones más elaboradas, sin embargo, cometían algunos errores como el no colocar la adición cuando realizaban la agrupación. Es importante que los estudiantes sean sometidos a procesos metacognitivos en los que autorregulen su propio

aprendizaje, de tal manera que busquen las conexiones que se requieren para alcanzar el nivel relacional.

Del Puerto, Minnaard y Seminara recomiendan, citando a Sócrates, que "es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir los errores, para de esta forma lograr el conocimiento genuino" (Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004, p.11).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy*. New York: Academic Press.

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación 43*, 3-25.

Godino, J. Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad*. Revista Iberoamericana de Educación 35*, 1-14.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad La Laguna.

Ruiz, A. (2006). *Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica.* Costa Rica: San José. CIMM/UCR.

OS CONHECIMENTOS SUPOSTOS DISPONÍVEIS NA TRANSIÇÃO ENTRE O ENSINO MÉDIO E SUPERIOR: A NOÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Sérgio Destácio Faro, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos
UNIBAN Brasil
srfaro@ig.com.br, alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Medio

Resumen. *Nossa pesquisa sobre as diferentes possibilidades de tratamento da noção de sistemas de equações lineares na transição entre o Ensino Médio e Superior. O referencial teórico escolhido é a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997) apoiado das abordagens teóricas em termos de quadro de Douady (1984), de pontos de vista de Rogalski (1995) e complementado pela teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999), que permite analisar as diferentes relações institucionais esperadas existentes assim como as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em função das anteriores. Observamos que apesar da coerência entre as relações institucionais esperadas e existentes, os resultados obtidos pelos estudantes nas macro-avaliações, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, não correspondem às expectativas.*
Palabras clave: sistemas lineares, níveis de conhecimento, quadro

Introdução

Na passagem de uma etapa da escolaridade a outra, os professores, em geral, reclamam que os estudantes não dispõem dos conhecimentos necessários para desenvolver os conteúdos matemáticos indicados para aquela determinada etapa.

No Ensino Superior essa questão acaba sendo mais grave, pois os professores precisam desenvolver os conteúdos que constam dos planos de ensino, ou seja, é preciso trabalhar todos os conteúdos do programa, mesmo que muitas vezes os estudantes não disponham dos conhecimentos prévios que serão utilizados como ferramentas para a solução das tarefas que podem ser propostas em relação a esses conteúdos.

Além disso, as macro-avaliações reduzem as possibilidades de revisitar determinados conteúdos conforme se avança na escolaridade.

Para isso, nosso objetivo é estudar a questão da transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior quando se considera a noção de sistemas de equações lineares e seu tratamento no Ensino Médio e a influência desse trabalho no Ensino Superior.

Sendo assim, escolhemos o referencial teórico abaixo descrito para efetuar as nossas análises.

Referencial teórico da pesquisa

Escolhe-se como referencial teórico central dessa pesquisa a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997), que permite compreender melhor as possíveis articulações de quadros conforme definição de Douady (1984); os ostensivos de representação necessários em função dos não ostensivos em jogo e as relações institucionais e pessoais que sobrevivem nas etapas escolares escolhidas, conforme definições de Bosch e Chevallard (1999), consideramos ainda a noção de pontos de vista segundo definição de Rogalski (1995).

Robert (1997) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O nível *técnico* que corresponde à aplicação de uma definição ou teorema. Exemplo: Determinar o conjunto solução de um sistema não homogêneo.

O nível *mobilizável* que corresponde à utilização de uma noção quando ela é pedida explicitamente em uma tarefa, por exemplo: Dado um sistema não homogêneo pedir para o estudante discutir as possibilidades de solução.

O nível *disponível* que corresponde à utilização de uma noção sem que esta seja pedida explicitamente, o estudante pode encontrar exemplos e contra exemplos, o estudante possui situações de referência. Por exemplo:

(Planejamento de Produção) Um fabricante produz três tipos diferentes de produtos químicos: A, B e C. Cada produto deve passar por duas máquinas de processamento X e Y. Nesse processo, cada uma das máquinas é utilizada durante os seguintes intervalos de tempo: 1. Uma tonelada de A necessita 2 horas na máquina X e 2 horas na máquina Y. 2. Uma tonelada de B necessita 3 horas na máquina X e 2 horas na máquina Y. 3. Uma tonelada de C necessita 4 horas na máquina X e 3 horas na máquina Y. A máquina X está disponível 80 horas por semana e a máquina Y 60horas por semana. Como a administração não quer manter as dispendiosas máquinas X e Y paradas, ela gostaria de saber quantas toneladas de cada produto devem ser produzidas para que as máquinas sejam utilizadas de maneira ótima. Admite-se que o fabricante possa vender tantos produtos quanto produz. (Kolman e Hill, 2006, p. 6)

Robert (1997) observa que é preciso considerar os conhecimentos prévios dos estudantes e que estes têm certa experiência sobre o trabalho que lhes é destinado quando se trata de desenvolver

as matemáticas escolares, o que nos conduz a considerar que a noção de sistemas de equações lineares, que é introduzida na sétima série do Ensino Fundamental II (alunos de 13-14 anos) é revisitada no Ensino Médio e Superior, o que nos permite supor que os estudantes já tenham certa familiaridade com essa noção e com suas representações podendo aplicar pelo menos as técnicas que lhe são associadas e articular o quadro dos sistemas lineares com os quadros da geometria analítica e da álgebra linear.

Isso nos leva a considerar a noção de quadro definida por Douady (1992), que considera que um quadro:

[...] é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (Douady, 1992, p.135).

Quando estudamos a noção de sistemas lineares é importante considerar a noção de ponto de vista de Rogalski (1995) que considera *que dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, fazê-los funcionar, eventualmente de definí-los*. (Rogalski, 1995 apud Andrade, 2006, p.25).

Para melhor compreender o papel da noção de sistemas de equações lineares na transição entre o Ensino Médio e superior utilizamos a teoria antropológica do didático de Chevallard e Bosch (1999) que considera que a atividade matemática é composta por certo número de tarefas, assim como toda atividade humana, e para cumprir essas tarefas, são desenvolvidas as técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando assim lugar ao desenvolvimento das "tecnologias" ou discurso tecnológico, essas tecnologias sendo, por sua vez, objetos de novas tecnologias que Chevallard identifica como teorias.

Além disso, consideramos as noções de ostensivos, ou seja, as escritas, símbolos, palavras e gestos mobilizados na atividade matemática. Como por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou ainda um esquema gestual que pode estar realmente presente e que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade, e não ostensivos que por sua vez são as noções, conceitos, idéias que aparecem como a matéria prima das técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser

evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, ou seja, a manipulação dos ostensivos é regrada pelos não ostensivos e esses só podem ser evocados com a ajuda dos ostensivos, existindo assim uma dialética necessária entre eles.

Para efetuar as análises definimos a seguinte metodologia.

Metodologia da pesquisa

Iniciamos com o estudo da noção de sistemas de equações lineares no Ensino Médio para compreender melhor quais os conhecimentos que podem ser considerados como mobilizáveis ou disponíveis pelos estudantes quando ingressam no Ensino Superior.

Identificamos em que sistema de tarefas e práticas se insere esses conhecimentos.

Analisamos as exigências institucionais para o ensino e aprendizagem da noção de sistemas de equações lineares, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, via análise de livros didáticos para esses níveis e as macroavaliações institucionais.

Construímos uma grade de análise para melhor identificar o conjunto de tarefas desenvolvidas no Ensino Médio e Superior e observar se existe uma coerência entre as propostas para esses dois níveis.

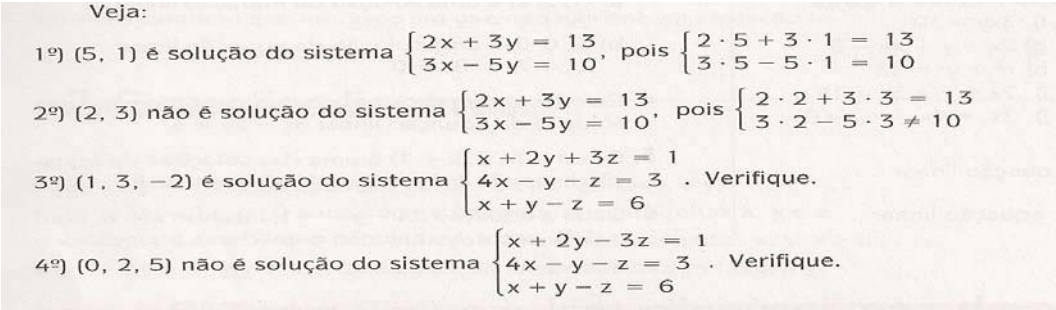
A grade de análise

Escolhemos construir um inventário das possíveis tarefas associadas à noção de sistemas de equações lineares que são, em geral, trabalhadas no Ensino Médio e Superior. Busca-se desta forma analisar as relações institucionais existentes para o ensino e aprendizagem das noções de sistemas de equações lineares nestes segmentos e sobre quais conhecimentos podemos apoiar a introdução de novas noções no Ensino Superior.

Exemplo de aplicação da grade de análise:

Tarefa: Verificar se um elemento dado é solução de um sistema de equações lineares.

Na figura 1 apresenta-se o exemplo de uma tarefa retirada de um dos livros didáticos de Ensino Médio analisados.



Veja:

1º) (5, 1) é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 10 \end{cases}$

2º) (2, 3) não é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \neq 10 \end{cases}$

3º) (1, 3, −2) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$. Verifique.

4º) (0, 2, 5) não é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$. Verifique.

Figura 1: Dante 2008, p.252

- Nível de conhecimento exigido na solução tarefa: mobilizável em relação à representação de pontos em IR2 e IR3 (EM) e IRn (ES);
- Ostensivos utilizados no enunciado: ostensivo de representação explicita de sistemas de equações lineares;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico;
- Pontos de Vista: cartesiano, isto é, o sistema é reduzido a um sistema de equações independentes e paramétrico, a representação do conjunto solução é dado pela combinação linear de vetores independentes que geram o subespaço vetorial associado mais uma solução particular;
- Não Ostensivos utilizados na solução da tarefa: pares ordenados, valor numérico, método de solução de um sistema linear;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: Disponível em relação à determinação do valor numérico, isto é, identificar x, y e z na representação de ponto dada e substituir em todas as equações para o exemplo acima.

Resultados encontrados

Observamos que no Ensino Médio a ênfase é dada aos métodos de resolução de sistemas de equação lineares, sem preocupação em trabalhar as possibilidades de solução do sistema. Em

geral, a noção de sistema linear utilizada para modelar problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano.

Não existe um trabalho mais especifico no quadro dos sistemas lineares que é deixado para ser trabalhado no superior, onde as macro avaliações pedem explicitamente o estudo das interseções de retas e planos em IR^2 e IR^3 e hiperplanos em IR^n que podem ser discutidas por meio do estudo das possibilidades de solução de um sistema linear.

Considerações finais

A noção de sistemas de equações lineares possibilita ainda a análise das relações institucionais existentes tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior para esse objeto matemático assim como a análise das relações que se espera tenham sido desenvolvidas em função das relações institucionais existentes, isto é as possíveis relações pessoais associadas às relações institucionais existentes.

Verificou-se que para o Ensino Médio as tarefas associadas à noção de sistemas de equações lineares estão mais relacionadas aos diferentes métodos de solução de sistemas para aplicações em física e em exemplos cotidianos, em geral, não ultrapassando os sistemas 3x3 e dando pouca ênfase ao estudo das possibilidades de solução dos sistemas e dos sistemas com parâmetros. Esse trabalho fica quase que exclusivamente a cargo do Ensino Superior.

As tarefas típicas encontradas para o Ensino Médio nos livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM (Brasil, 2005) estão de acordo com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 2000) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio + – PNC+ (Brasil, 2006), onde existe ainda a sugestão de se trabalhar a noção de sistemas lineares articulada com as noções de retas e planos da Geometria Analítica e com a noção de função afim, isto é, mesmo deixando o estudo das possibilidades de solução de um sistema linear para o Ensino Superior verifica-se que existe uma preocupação com o desenvolvimento de um trabalho articulado entre quadro algébrico e geométrico.

Finalmente, observou-se na avaliação do Ensino Médio do Estado de São Paulo que existe uma coerência entre as relações institucionais existentes e o que é cobrado dos estudantes, mesmo se os resultados por eles apresentados ainda não corresponde às expectativas.

Dessa forma, acredita-se que uma reflexão associada ao ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo matemático, que leve em conta as possibilidades de articulação de diferentes quadros da própria matemática ou de outras ciências, dos pontos de vista que lhe são associados assim como dos ostensivos que podem ser utilizados como ferramentas do trabalho a ser efetuado, podem auxiliar pesquisadores, professores e estudantes a compreender melhor o valor cultural da matemática no mundo atual assim como sua importância para a inserção do estudante no mercado de trabalho.

Referências bibliográficas

Andrade, S. N. (2006). Possibilidade de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: A noção de função afim. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-123.

Brasil. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. (2006) Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010. Disponível em:

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Brasil. (2005) Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005. Matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: SEMTEC

Dante, L. R. (2008). Matemática. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). .Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Kolman, B. & Hill, D.R. (2006) Álgebra Linear com aplicações. Brasil: LTC.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). Notas manuscritas do seminário em São Paulo. Brasil.

DESPLIEGUE DE ÍNDICES MATEMÁTICOS PARA LA EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Adriana Correa Zeballos, Berta Chahar, María Esther Nieva, Gregorio Figueroa, Ricardo Raúl Gallo
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán Argentina
Facultad Regional Tucumán – Universidad Tecnológica Nacional
czeballos@fbqf.unt.edu.ar, bchahar@fbqf.unt.edu.ar, rgallo@arnet.com.ar
Campo de investigación: Estudios Socioculturales Nivel: Superior

Resumen. *Este trabajo es una continuación del estudio del desempeño académico de los estudiantes, a lo largo de la carrera de Bioquímica de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT), en él se amplía el estudio a la cohorte 1998.*
Se empleó un estudio de cohorte retrospectivo con distintos índices y tasas. Los resultados son similares a los de la cohorte 1997: eficiencia en los exámenes, pero contradictoriamente, fuerte rezago y baja tasa de egreso. Posteriormente se analizará la cohorte 1999 y se realizará un estudio conjunto que permitirá focalizar el ciclo donde se produce la mayor deserción a fin de implementar, acciones tendientes a mejorar esta problemática desde la Matemática, por ser una de las asignaturas del primer año y su importancia en la formación de los futuros profesionales.
Palabras clave: rendimiento académico, evaluación, deserción, rezago

Introducción

Como ya se expresó en nuestro trabajo anterior, las instituciones de educación superior, entre otros problemas, enfrentan en la actualidad los de la deserción (entendida como el abandono definitivo de la carrera) y el rezago (entendido como atraso en la aprobación de las materias, respecto de lo que fija la currícula respectiva), de los estudiantes a lo largo de las carreras de grado. Se sabe que la deserción y el rezago están relacionados con el contexto social, cultural y económico de la región y también con el sistema educativo, agravado para este caso por el hecho que la única universidad con carrera en bioquímica en el noroeste de nuestro país es de la UNT, lo que obliga al desarraigo de muchos estudiantes para cursar estas carreras, pero no sabemos en qué medida todo esto incide en la eficiencia del mismo (Nieva, Chahar, González, Villalonga, Holgado, Correa Zeballos y Marcilla, 2003).

El bajo rendimiento académico de los estudiantes tiene una doble incidencia en la institución, en primer lugar representa un costo elevado para las universidades porque obliga a una sobre dimensión de sus estructuras académicas y administrativas y en segundo lugar revela bajos

indicadores de eficiencia institucional, que tienen un enorme peso a la hora de la acreditación de las mencionadas carreras ante la CONEAU.

Los resultados obtenidos en nuestro trabajo anterior, referido a la cohorte 1997, daban eficiencia en los exámenes pero contradictoriamente fuerte rezago y baja tasa de egreso. En este trabajo se ratifica la mencionada conclusión y fundamentalmente permitió consolidar los índices matemáticos que se elaboraron para la evaluación del mencionado rendimiento. Por esta razón aspiramos a continuar nuestro trabajo con la cohorte 1999 y posteriormente realizar un estudio conjunto de las tres cohortes con el objeto de desarrollar una metodología de seguimiento del desempeño académico de los estudiantes, y de esta manera determinar si los factores asociados a la deserción estudiantil, identificados en el ciclo básico (Correa Zeballos, Chahar, Holgado, Figueroa, Sued y Nieva, 2006) son los mismos o difieren total o parcialmente a lo largo de la carrera. El estudio conjunto de las tres cohortes nos permitirá además focalizar el ciclo donde se produce la mayor deserción, y de coincidir, o no, con las autoras (Jewsbury y Haefeli, 2001), que expresan que la mayor deserción en universidades públicas argentinas se produce en el primer año, se implementarán acciones tendientes a mejorar esta problemática, particularmente desde la Matemática, por ser una de las asignaturas del primer año y por su importancia en la formación de los futuros profesionales.

Objetivo

Evaluar el rendimiento académico de la cohorte 1998 a lo largo de carrera de Bioquímica de la UNT.

Marco teórico

Es conocida la preocupación del Estado por el alto índice de deserción universitaria y dado su interés volcamos las opiniones de Tatti y Navarra sobre el tema.

Según (Tatti, 2007) las autoridades deben buscar estrategias que acerquen la escuela media a la universidad para que no se conviertan en dos universos aislados, a efectos de brindar al alumno

herramientas de estudio que le permitan orientar sus opciones vocacionales, mejorar las condiciones de ingreso y su rendimiento académico.

Para (Navarra, 2003) hace algunas décadas los estudiantes dudaban entre una carrera u otra, mientras que, en la actualidad, esta disyuntiva está siendo reemplazada por una compleja sintomatología vocacional, representada por la fragilidad y la falta de consistencia en los intereses, la apatía y la desmotivación, las conductas fóbicas ante el aprendizaje, las dificultades para aprender (independientemente del nivel intelectual), el abandono de los estudios, la sobre exigencia interna, el temor ante el mundo exterior, la desvalorización de los propios intereses, la desconexión emocional y la desubicación frente a la realidad.

Como "medida del rendimiento académico" en la Universidad se debieran abordar tres dimensiones: éxito, retraso y abandono. Estudios realizados señalan que la selección tiene que ver más con las aptitudes intelectuales que con los aspectos motivacionales en el examen de ingreso, pero dentro del Sistema Educativo, la motivación y el compromiso con el estudio son las variables que tienen peso al determinar el rendimiento en la enseñanza superior. En general se muestra un escaso interés político y científico por la problemática de los estudiantes en los primeros años de las carreras, pero existen numerosos estudios sobre el rendimiento académico y las tasas de abandono. (Germani y Sautú, 1965), (Latiesa, 1992).

En estudios anteriores realizados en el ciclo básico en la Facultad de Bioquímica de la UNT sobre la deserción estudiantil (Nieva et al, 2003), (Correa Zeballos et al, 2006) se detectó que esta problemática se relaciona con las condiciones individuales del alumno: conocimientos previos, hábitos de estudio, nivel económico y educativo de los padres, adaptación a la vida universitaria y disponibilidad de tiempo, entre otras, y con el contexto institucional, que incluye aspectos tan variados como: las propuestas de enseñanza, la relevancia de los planes de estudio, la orientación académica y el acceso al material de estudio. Estas conclusiones coinciden, en gran parte, con investigaciones realizadas por otras universidades y con la bibliografía consultada. La Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) corrobora las expresiones anteriores al publicar los resultados de la evaluación externa de la Universidad Nacional de San Juan, señalando la magnitud del problema y descartando las explicaciones simplistas, como las derivadas únicamente de la situación económica.

Por otra parte, como "medida de la eficacia del Sistema Educativo", el análisis cuantitativo de la deserción sólo da cuenta del efecto, que no aporta ninguna luz acerca de las acciones que lo produjeron. En algunos estudios se registra una mayor tendencia al abandono en las instituciones que no tienen examen de ingreso (Parjanen, 1979), (Levy y Garboua, 1986), pero no se explicitan análisis posteriores al ingreso de los procesos vinculados con el logro de los objetivos educacionales.

Metodología

Estudio de tipo retrospectivo, descriptivo que se aplicó a la cohorte 1998 de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Se confeccionaron tablas y gráficos.

Tratamiento y análisis de los datos

La matriz de datos diseñada para esta investigación se ajusta a las siguientes premisas:

- Para la carrera de Bioquímica se hace el seguimiento de la cohorte 1998 a lo largo de la carrera.
- Cada fila de la matriz está reservada para un estudiante que haya ingresado en la cohorte estudiada, que representa la unidad de análisis.
- Las columnas de la matriz se reservan para las variables, que se desprenden del marco teórico. Estas variables se dividen en dos grandes grupos:

  Las que se obtienen directamente de la base de datos existente en la facultad

  Las que se calculan a partir de éstas.
- El año i “académico” que se considera aquí es el que abarca desde el 1 de abril del año i, hasta el 31 de marzo del año (i + 1). Por ejemplo: las materias aprobadas por el alumno en el año 2000, son las aprobadas desde el 1 de abril de 2000 hasta el 31 de marzo de 2001. De igual modo se procederá con las restantes variables.

Variables que se obtienen de la base de datos reorganizada

R = Número de exámenes rendidos por el alumno en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión, con i = 1998, 1999,…, 2006

A = Número de exámenes aprobados por el alumno en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión.

Z = Número de aplazos en el año i, independientemente del año de cursado de la materia en cuestión.

M = promedio de las notas de exámenes rendidos en el año i.

C = Número de materias exigidas por la currícula hasta el año i.

Indicadores construidos a partir de la base de datos reorganizada

P = Proporción de materias aprobadas hasta el año i, que se calcula mediante la siguiente fórmula

$$P = \frac{\sum_{j=1998}^{i} A_j}{C_i}$$ con i = 1998, 1999, …, 2006

E = Eficiencia en el año i de cada alumno, que se calcula mediante la siguiente fórmula

$$E = \frac{A}{R}$$ Para esta variable se considera al grupo de alumnos que rindió por lo menos una materia.

La tabla siguiente presenta una muestra de la matriz de datos de la investigación, informando a modo de ejemplo, el seguimiento de diez alumnos de la cohorte a lo largo de dos años.

Matriz de datos de alumnos de la cohorte 1998

Alumno	Año 1998							Año 1999							...
	R	A	Z	M	C	P	E	R	A	Z	M	C	P	E	...
1	9	2		1,44	6	0,33	0,22	3				12	0,17	0,00	...
2					6	0,00		6	2	4	3,33	12	0,17	0,33	...
3	1	1		4	6	0,17	1,00	2	2		7,5	12	0,25	1,00	...
4	1	1		8	6	0,17	1,00	3	2	1	4	12	0,25	0,67	...
5	4	3		4,75	6	0,50	0,75	5	2	1	3,4	12	0,42	0,40	...
6	2	1	1	4	6	0,17	0,50	3	1		1,67	12	0,17	0,33	...
7	5	3	1	4,6	6	0,50	0,60	5	1	2	2,4	12	0,33	0,20	...
8	4	4		5	6	0,67	1,00	5	2	2	3,8	12	0,50	0,40	...
9	3		3	2,33	6	0,00	0,00	8	2	1	1,88	12	0,17	0,25	...
10	4	4		7,75	6	0,67	1,00	6	3	1	3,17	12	0,58	0,50	...

Fuente: Datos reorganizados a partir de la información de sección alumnos

Resultados

En las siguientes tablas y gráficos se presenta el análisis de la variable proporción de materias aprobadas.

A partir del segundo año alrededor de un 80% de alumnos tienen entre un 20 y un 80% de las materias aprobadas. También es notable la disminución del porcentaje de alumnos que cumplen con el plan de estudios al finalizar el correspondiente período lectivo.

Tabla 1: Proporción de materias aprobadas año 1998

Proporción 98		
Proporción 98	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	26	33%
[0.2 , 0.4)	14	18%
[0.4 , 0.6)	17	22%
[0.6 , 0.8)	13	17%
[0.8 , 1)	8	10%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 1: Proporción de materias aprobadas año 1998

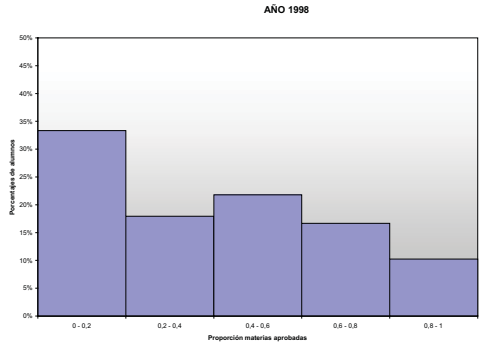


Tabla 2: Proporción de materias aprobadas año 1999

Proporción 99		
Proporción 99	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	14	18%
[0.2 , 0.4)	20	26%
[0.4 , 0.6)	28	36%
[0.6 , 0.8)	13	17%
[0.8 , 1)	3	4%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 2: Proporción de materias aprobadas año 1999

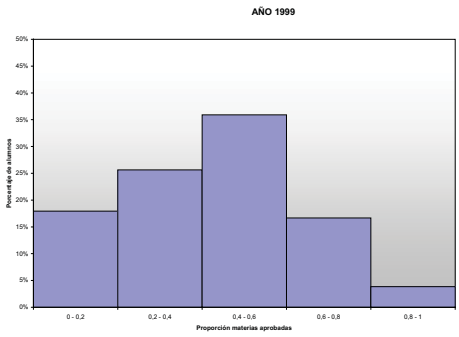


Tabla 3: Proporción de materias aprobadas año 2000

Proporción 00		
Proporción 00	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	11	14%
[0.2 , 0.4)	32	41%
[0.4 , 0.6)	23	29%
[0.6 , 0.8)	10	13%
[0.8 , 1)	2	3%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 3: Proporción de materias aprobadas año 2000

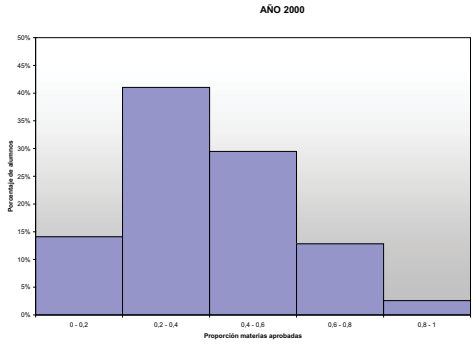


Tabla 4: Proporción de materias aprobadas año 2001

Proporción 01		
Proporción 01	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	10	13%
[0.2 , 0.4)	34	44%
[0.4 , 0.6)	23	29%
[0.6 , 0.8)	9	12%
[0.8 , 1)	2	3%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 4: Proporción de materias aprobadas año 2001

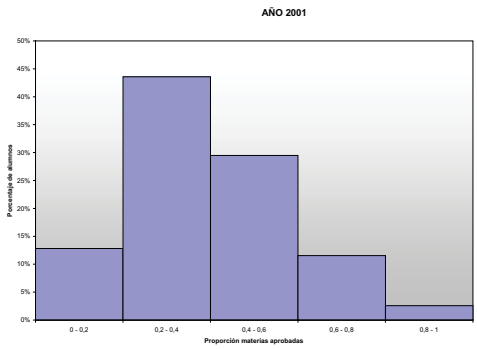


Tabla 5: Proporción de materias aprobadas año 2002

Proporción 02		
Proporción 02	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	14	18%
[0.2 , 0.4)	35	45%
[0.4 , 0.6)	16	21%
[0.6 , 0.8)	11	14%
[0.8 , 1)	2	3%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 5: Proporción de materias aprobadas año 2002

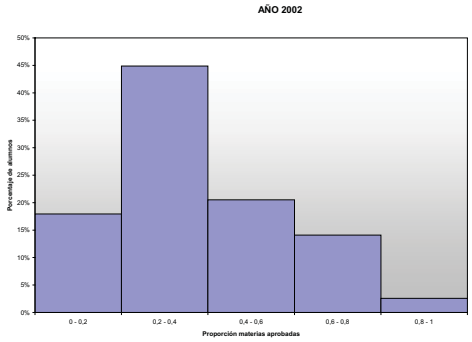
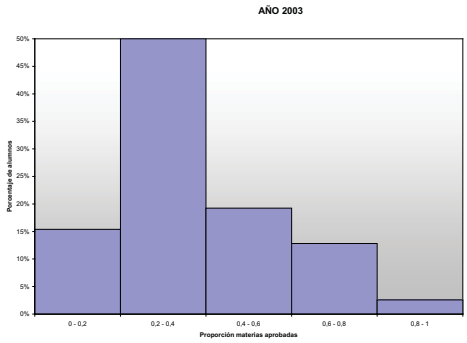


Tabla 6: Proporción de materias aprobadas año 2003

Proporción 03		
Proporción 03	Nº de alumnos	Porcentaje de alumnos
[0 , 0.2)	12	15%
[0.2 , 0.4)	39	50%
[0.4 , 0.6)	15	19%
[0.6 , 0.8)	10	13%
[0.8 , 1)	2	3%
Total	78	100%
Fuente: Base de datos de Sección Alumnos		

Gráfico 6: Proporción de materias aprobadas año 2003



Conclusiones

Del análisis de una de las variables presentada en la Matriz de Datos, Proporción de Materias Aprobadas, se desprende que este grupo de estudiantes presenta un fuerte rezago y consecuentemente una baja tasa de egreso. Cabe aclarar que el estudiante no puede inscribirse en un curso sin tener aprobado el anteprecedente completo, para evitar la acumulación de materias regularizadas sin la aprobación del correspondiente examen final.

En estudios posteriores se completará este análisis con las otras variables definidas para poder caracterizar a la cohorte y tener una medida del rendimiento académico.

La facultad está implementando medidas tendientes a subsanar el rezago tales como sistema de tutorías en los distintos ciclos, comités de seguimiento de las distintas carreras, sistema de admisión y nivelación y cursos de capacitación de docentes.

Referencias bibliográficas

Correa Zeballos, M., Chahar, B., Holgado, L., Figueroa, G., Sued, C. y Nieva, M. (2006). Estudio preliminar de la deserción y el rezago en una facultad de ciencias. Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.fio.unam.edu.ar/emci.

Delors, J. (1996). La educación encierra un tesoro. Madrid, UNESCO: Santillana.

Germani, G. y Sautu, R. (1965) Regularidad y origen social en los estudiantes universitarios. Recuperado el 21 de diciembre de 2007, de http://www.iigg.fsoc.uba.ar/germanit.htm - 27k

Latiesa, M. (1992). El factor educacional como causa potencial de la deserción en primer año de la universidad. Recuperado el 21 de diciembre de 2007, de http://www.monografias.com/trabajos31/factor-educacional-causa.../factor-educacional-causa-desercion-universid.-46k-

Levy y Garboua, L. (1986). Selección e ineficacia en la Enseñanza Superior. En M. Latiesa (Comp.) Demanda de educación superior y rendimiento académico. Madrid: CIDE.

Navarra, G. (2003). Los nuevos problemas vocacionales. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.lanacion.com.ar/03/09/13/sl_527073.asp

Nieva, M. E., Chahar, B., González, S., Villalonga, P., Holgado, L., Correa Zeballos, A. y Marcilla, M., 2003). Factores asociados a la deserción. Un estudio explicativo. Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.fi.uba.ar/inmat/tef/Nieva.pdf

Parjanen, M. (1979). Learning, Earning and Withdrawing. On Social Factors Afecting Higher Educational and Professional Career. Tampereen: Tampereen Yliopisto.

Tatti, V. (2007). El Gobierno busca una estrategia contra la deserción universitaria. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.clarin.com/diario/2003/09/07/s-04401.htm

Universidad Nacional de Tucumán. Comisión ad hoc. (2005). La UNT en crisis. Recuperado el 14 de diciembre de 2007, de http://www.contexto.com.ar/nota.asp

MEMORIA Y RAZONAMIENTO

Ramón Blanco Sánchez, Yosbel Morales Olivera
Dpto. Matemática. Fac. Informática. Universidad de Camagüey Cuba
ramon.blanco@reduc.edu.cu, yosbel.morales@reduc.edu.cu
Campo de investigación: Modelos mentales Nivel: Superior

Resumen. *Sin lugar a dudas, la época en que el aprendizaje se limitaba a la memorización rígida del contenido que se estudiaba, ha quedado muy atrás en la historia. Y desde J. A. Comenio hasta la fecha se procura que el razonamiento sea el soporte que permita a los estudiantes apropiarse de conocimientos y habilidades.*
El vertiginoso desarrollo científico técnico de los últimos años, hace los conocimientos perecederos en poco tiempo, por lo que resulta fundamental que los estudiantes aprendan a aprender, de modo que los nuevos graduados sean capaces de mantenerse a la par del desarrollo científico técnico de su época.
El presente trabajo muestra los resultados de una investigación acción cuyos resultados ponen de manifiesto posibles causas por las cuales los estudiantes pierden con demasiada rapidez los conocimientos que una vez adquirieron.
Palabras clave: memoria, razonamiento, prerrequisitos, aprendizaje significativo

Desarrollo

La característica propia y distintiva de la Matemática, de ser *medio y objeto en sí misma* al conferirle una autonomía única, una independencia absoluta del resto de las ciencias, también produce implicaciones trascendentes en su proceso enseñanza aprendizaje, pues determina una paradoja que caracteriza dicho proceso, que se puede expresar en los siguientes términos: "Para aprender Matemática necesito saber Matemática, no sé Matemática no puedo aprender Matemática". Para lograr resolver la citada paradoja se hace evidente la necesidad de que los conocimientos iniciales de los alumnos permanezcan en sus mentes, de modo que sean las herramientas que estos necesitan para construir el andamiaje en el que se apoya el aprendizaje de la Matemática, o dicho de otro modo, los conocimientos matemáticos no son desechables, pero desafortunadamente estas ideas no prevalecen no solo entre los estudiantes, sino que muchas veces los sistemas evaluativos que se implementan propician un mínimo de uso de la Matemática en su propio aprendizaje, por lo que no hay que asombrarse entonces de que suceda lo que plantea Karsenty, quien expresa que "mucha de la información adquirida en el aula se pierde después de pasado el examen final". (Karsenty, 2003, p. 119) Por supuesto que no es lógico aspirar a que los estudiantes recuerden cada una las propiedades matemáticas aprendidas en sus grados precedentes, pero los autores del presente trabajo sí entendemos que es razonable que los

estudiantes puedan usar conocimientos precedentes como herramientas para la adquisición de los nuevos, en particular aquellos que tiene un uso frecuente, como es evidentemente el tecnicismo algebraico y en general todos aquellos elementos que garantizan que el estudiante sea capaz de escribir Matemática correctamente, de acuerdo a su sintaxis y semántica. La necesidad de que el estudiante sea capaz de usar la sintaxis del lenguaje matemático correctamente es muy importante, dado que es una sintaxis que exige cierto rigor.

La teoría del aprendizaje significativo de D. Aussubel descansa precisamente en lo que el estudiante ya sabe para que el nuevo aprendizaje le resulte significativo, pero si el estudiante sabe poco o casi nada, no es mucho lo que se puede esperar de esta vinculación con conocimientos precedentes apenas existentes. Al respecto se argumenta sobre la necesidad de los diversos prerrequisitos que deben recordarse en caso de cada uno de los diferentes resultados del aprendizaje, ya que estos resultan fundamentales en el aprendizaje de nuevas habilidades intelectuales. (Mata, 1993). Esta misma idea se expresa en diferentes términos, pues se plantea que aprender profundamente implica comprender de manera profunda. Lo cual conlleva, por una parte, el establecimiento de relaciones significativas entre los conocimientos previos y la información que debe llegar a constituirse en conocimiento. (Valenzuela, 2008)

Podemos encontrar esta idea de manera recurrente en la literatura especializada, incluso referida a contenidos particulares, ya que se hace referencia a que el significado de la función exponencial descansa en los significados de los exponentes, lo que los identifica como prerrequisitos para el estudio de esta función. (Martínez, 2007). Lo cual se manifiesta también de manera secuencial entre los diferentes niveles educacionales, ya que de un modo u otros se expresa que la causa principal, del fracaso de los estudiantes es su desconocimiento de los contenidos disciplinares que se supone debieron adquirir en secundaria, la misma queja que plantean los profesores en el nivel universitario respecto a los conocimientos que los estudiantes deben traer del nivel preuniversitario. (Álvarez, 2006)

En general podemos asumir que existe consenso entre los miembros de la comunidad científica que estudia el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática en lo que respecta a la necesidad de los conocimientos previos para el aprendizaje de los nuevos contenidos, pero por otra parte también es aceptado a nivel internacional que cada día los estudiantes son memos capaces de usar las herramientas matemáticas en el estudio de la Matemática y dado el carácter de la

Matemática de ser medio y objeto en sí misma, es claro que esta es una de las causas de que los problemas en el aprendizaje de la Matemática que presentan los estudiantes en lugar de disminuir aumentan.

Las consideraciones anteriores conducen a plantear la siguiente interrogante: ¿Cuáles son las causas de que los estudiantes sean cada vez menos capaces de usar los conocimientos previos? Evidentemente, como en todos los problemas del proceso enseñanza aprendizaje, las causas que lo provocan son muy variadas, y resulta demasiado complejo tratar de considerarlas todas simultáneamente, por lo que el presente trabajo está encaminado a analizar y mostrar el efecto de una de estas posibles causas.

En los que respecta a las ciencias sociales, siempre que se absolutiza un aspecto de un fenómeno los resultados que se obtienen no son buenos, un ejemplo evidente se manifestó en la enseñanza del siglo XVIII, la que se caracterizó por dar una prioridad casi absoluta a la memoria sobre el razonamiento, tendencia a la cual se opuso la corriente filosófica ilustrada, la cual propició que paulatinamente el razonamiento fuera ocupando su justo lugar en el proceso enseñanza aprendizaje y consideramos que llegó a existir un balance adecuado entre estos dos aspectos del proceso.

Pero en opinión de los autores del presente trabajo, este balance se está perdiendo de nuevo, ya que existe una tendencia en los últimos años a que las evaluaciones requieran cada vez menos de la memorización de los aspectos que se evalúan, de una forma indiscriminada, sin un análisis riguroso de que se necesita recordar y que no.

Es indudable que para el desarrollo científico técnico actual, resulta imprescindible lograr desarrollar las capacidades de razonamiento de los estudiantes, dado que la constante renovación tecnológica de la actualidad requiere que los graduados de cualquier nivel hayan aprendido a aprender, de modo que sean capaces de mantenerse a la par de los nuevos avances tecnológicos, mas que haber aprendido determinados conocimientos que terminan por hacerse obsoletos.

A su vez, no es menos cierto que el desarrollo no se produce a brincos, los conocimientos actuales darán lugar a los nuevos, del mismo modo que los precedentes dieron lugar a los actuales. En otras palabras, los conocimientos a partir de los cuales se arriba a nuevos resultados constituyen las premisas que permiten generar estos últimos; esto es, cuando hablamos de razonamiento, está

implícito que existen determinadas premisas de las cuales se derivan mediante el razonamiento nuevas conclusiones.

Premisas

(conocimientos previos)

Razonamientos

Conclusiones

(nuevos conocimientos)

También es cierto que el que razona puede no tener, en un momento dado, todas las premisas en la mente; pero sí debe ser capaz de acceder a ellas de una forma u otra, pero para poder hacer esto último tiene que tener conciencia de su existencia, lo cual sólo es posible si en algún momento las tuvo en la mente. Por lo cual se aprecia que el razonamiento requiere de la memoria, en mayor o menor grado para poder funcionar.

En el caso específico de la Matemática, hay un conjunto de herramientas que resultan imprescindibles para el trabajo matemático, las cuales en el peor de los casos, el estudiante necesita por lo menos, tener conciencia de su existencia, lo que a su vez no resulta factible si en algún momento no las tuvo en su mente. Esto implica que cuando el estudiante cursa un determinado contenido necesita interiorizarlo, llevarlo hasta el plano mental, para cuando posteriormente lo requiera, si lo ha olvidado producto del proceso normal de olvido, al menos sepa que hay una herramienta que alguna vez usó y aunque ahora no la recuerde, la puede recuperar y usar de nuevo.

Debemos enfatizar que en modo alguno abogamos por un proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática donde prime la memoria, muy al contrario, nuestras investigaciones están orientadas la búsqueda de procedimientos didácticos que propicien el desarrollo de los procesos del pensamiento lógico, pero más de una vez hemos corroborado el viejo adagio que dice: “una cabeza vacía no piensa” lo cual no significa de ninguna manera, que la cabeza de los estudiantes esté atiborrada de fórmulas y algoritmos, aquí es preciso tener en cuenta la frase de José Martí que expresa: “existe un cúmulo de conocimientos esenciales que caben en el ala de un colibrí” y es

este cúmulo de conocimientos esenciales el que sí debe estar en la cabeza de nuestros estudiantes.

La teoría de la asimilación por etapas de P Ya. Galperin, (Galperin, 1979) La cual fundamenta teóricamente que la asimilación se produce en el tránsito de las acciones externas materializadas a las acciones mentales, justifica plenamente la necesidad de que los estudiantes trabajen a nivel mental.

A continuación se muestra un estudio realizado a posteriori de las influencias negativas, respecto al aprovechamiento docente, que resultan cuando los estudiantes pueden prescindir de la interiorización de resultados que necesitan aplicar para dar respuestas a las tareas que se le asignan.

El estudio fue realizado con un grupo de 36 estudiantes de 2do. año de la especialidad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Camagüey, en la asignatura Matemática IV, compuesta por los temas: Variable Compleja, 70 % del contenido total, y Transformada de Laplace que ocupa el restante 30 %. Asignatura que se imparte en el primer semestre del citado año.

La evaluación de la signatura se realiza mediante tres pruebas parciales durante el semestre, un examen final y dos exámenes extraordinarios, aunque en el presente estudio no se consideraron los resultados del segundo extraordinario, dado que el pequeño número de estudiantes que recurrieron a esta segunda oportunidad no aportaba datos significativos al estudio realizado.

Al inicio del semestre no existió la intención de realizar ningún tipo de experimento pedagógico, por lo cual se planteó que es un estudio realizado a posteriori. Se decidió referenciar la experiencia pedagógica ya que existe en la didáctica de la Matemática teoría que fundamenta los resultados encontrados y además situaciones por el estilo ya habían sido observadas con anterioridad.

De las pruebas parciales realizadas, dos correspondieron al tema de Variable Compleja y una al de Transformada de Laplace. Al inicio del semestre se les dio a elegir a los estudiantes la forma en que preferían hacer las evaluaciones, a libro abierto o libro cerrado, aclarándoles que si elegían esta última opción toda la información que requirieran para responder las preguntas planteadas tendría que estar almacenada en su memoria.

Los estudiantes eligieron la segunda opción, y de esa forma se realizaron las dos primeras evaluaciones, esto es las que correspondieron al tema de Variable Compleja, pero al acercarse a la tercera prueba parcial, la correspondiente a Trasformada de Laplace, dado que en este tema se trabaja con un número considerable de fórmulas, transformadas directas, inversas, tanto de funciones como de combinaciones de algunas funciones, Los estudiantes pidieron que se les permitiera llevar a la prueba dichas fórmulas, a lo cual se accedió, en parte porque es un número considerable de fórmulas y parte porque existe el prejuicio de que los estudiantes tengan que usar la memoria para responder un examen.

Se puede asegurar, dado la experiencia del docente y posterior análisis de las evaluaciones realizadas, que el nivel de dificultades en las tres evaluaciones fue el clásico para este tipo de cursos en la Universidad de Camagüey, además existe consenso entre los docentes de la citada institución que imparten estos temas, en que los temas de Variable Compleja resultan más dificultosos para los estudiantes que los que corresponden a Trasformada de Laplace.

Los resultados de las tres evaluaciones parciales en lo que respecta a aprobados y desaprobados se muestran en la siguiente tabla:

1º Prueba parcial				2ª Prueba parcial				3ª Prueba parcial			
Pre	Ap	Susp	%	Pres	Apro	Susp	%	Pres	Apro	Susp	%
34	25	9	76.4	32	23	9	71.8	35	19	16	54.2

Tabla No. 1

Como se aprecia, la aparente simplificación de la evaluación al no tener que recordar las fórmulas necesarias para resolver los problemas planteados en la evaluación, tuvo un resultado inverso en lo que a pasar la evaluación respecta.

La misma situación se manifestó en la prueba final, compuesta de 7 preguntas, del 1 al 5 sobre variable compleja y las 6 y 7 sobre transformada de Laplace, como se ilustra en la siguiente tabla, donde la pregunta se considera aprobada cuando el alumno logra hacer más del 70 % de la misma, a esta prueba se presentaron 34 estudiantes:

Pgta 1		Pgta 2		Pgta 3		Pgta 4		Pgta 5		Pgta 6		Pgta 7	
Ap	%	Ap.	%	Ap.	%	Ap.	%	Ap	%	Ap.	%	Ap	%
21	61,7	22	64.7	18	52.9	14	41.1	16	47	10	29	9	26

Tabla No. 2

En el primer extraordinario se volvió a repetir la misma situación, el cuestionario para esta evaluación se confeccionó de forma análoga al de la evaluación final, en ambas evaluaciones el nivel de dificultad entre las diferentes preguntas fue semejante y en ambos casos se permitió a los estudiantes llevar a la prueba el listado de las fórmulas de transformadas directas e inversas. A esta evaluación se presentaron 16 estudiantes, y el criterio para considerar la pregunta aprobada fue el mismo de la prueba final, los resultados se muestran a continuación:

Pgta 1		Pgta 2		Pgta 3		Pgta 4		Pgta 5		Pgta 6		Pgta 7	
Ap	%	Ap.	%	Ap.	%	Ap.	%	Ap	%	Ap	%	Ap	%
7	43.7	9	56.2	8	50	10	62.5	10	62.5	4	25	5	31

Tabla No. 3

Conclusiones

El estudio realizado indica la necesidad, o al menos la conveniencia, de que los estudiantes se apropien del contenido que cursan en un momento dado de su formación, para que efectivamente lo puedan usar en la resolución de diferentes tareas.

Los resultados presentados aquí se corresponden con la demanda del aprendizaje significativo, ya que si el estudiante no tiene los contenidos precedentes en la mente es imposible que puedan servir de base a los nuevos.

Insistimos en que promovemos una enseñanza de la Matemática basada en el razonamiento, dado el carácter deductivo de esta ciencia. Pero qué razonamiento, qué inferencia puede hacer un alumno si no dispone de las premisas necesarias para que el pensamiento pueda funcionar.

Por nuestra parte creemos en la máxima de que: “Una cabeza vacía no piensa”

Referencias bibliográficas

Galperin, P. (1979). Introducción a la psicología. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Karsenty R. (2003). What do adults remember from their high school mathematics? the case of linear functions. Educational Studies in Mathematics 51, 117–144.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university Textbook exercises. Educational Studies in Mathematics. 52, 29–55.

Martínez, G. (2007). Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro, (Eds), Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. (pp. 117-167), México: Universidad Autónoma de Nuevo Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Mata Guevara, L. (1993). Aprendizaje significativo como línea de investigación. Maracaibo. Venezuela: Universo.

De Sánchez, A. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa 4, 1.

Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long-Term Learning Schemas. Intelligence, Learning and Understanding. A Tribute to Richard Skemp. University of Warwick CV4 7AL (pp. 151-177). United Kingdom.

Valenzuela, J. (2008). Habilidades de pensamiento y aprendizaje profundo. Revista Iberoamericana de Educación. 46 (7).

Walter, A., Lacués, E. y Pagano, M. (2006). Diseño de un Curso Nivelación al Ingreso a la Universidad, a Partir de da Caracterización del Perfil de los Ingresantes. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 514-520. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

EL APRENDIZAJE GENERAL Y MATEMÁTICO EN UN ESTUDIO CUALITATIVO EN LA UNIVERSIDAD

Elsa Josefina Antoni
Universidad Nacional de Rosario Argentina
edmutazzi@hotmail.com
Campo de investigación: Modelos mentales Nivel: Superior

Resumen. *La mayor dificultad del alumno es la carencia de metodología de estudio; no maneja el carácter relacional de conceptos y sólo memoriza. Esta investigación intenta revertir el problema con los mapas conceptuales para estructurar secuencias organizadas a través de múltiples enlaces, potenciando la base sensorial esquemática y visual del conocimiento para la construcción de la red conceptual.*
La metodología utilizada es cualitativa. El rendimiento académico, que es la variable dependiente, se expresa por la cantidad y promedio de asignaturas aprobadas, durante dos cursos lectivos.
El resultado muestra una clara diferencia favorable para el grupo al que se enseñan los mapas conceptuales, y desfavorable para el grupo de control, al que no se provee de ese material curricular.
Palabras clave: mapa conceptual, aprendizaje, modelos mentales

Situación problemática

El presente trabajo comprende los resultados del rendimiento académico de un grupo de alumnos universitarios, durante dos cursos lectivos. Se abarca el desempeño académico de la totalidad de las asignaturas que se permiten cursar y en particular, los resultados del aprendizaje matemático.

La principal dificultad del alumno consiste en que carece casi totalmente de metodología de estudio. Este hecho llevó a intentar la inclusión del material curricular denominado mapa conceptual y diagrama causal para facilitar un aprendizaje relacional y complejo capaz de impedir la sola memorización de conceptos aislados.

Se consideraron los elementos del contexto previo, a través de los datos obtenidos con entrevista individual.

Marco teórico

Concepción piagetiana de la inteligencia: Los elementos fundamentales del pensamiento de ninguna manera son estáticos, son dinámicos, activos, relacionales. La concepción piagetiana de la

inteligencia precisa que ésta es fundamentalmente una forma de acción que se diferencia, se organiza, se afina. El lenguaje matemático se limita a designar abstractamente estas acciones. En sus niveles superiores el pensamiento es ante todo un sistema de operaciones lógicas, físicas y matemáticas, que naturalmente tienden a conformar sistemas de nociones que han sido asimiladas primeramente, incorporadas al sistema preexistente, luego y finalmente proyectado hipotéticamente a nuevos conglomerados de conocimientos, tentativamente ubicado en otros contextos, transferido y generalizado Es el pensamiento creativo, base fundamental de la búsqueda científica (Flavell, 1986).

Mapa conceptual:

El material curricular utilizado fueron los mapas conceptuales. Los materiales curriculares constituyen ayudas de diverso tipo que contribuyen a que el alumno pueda realizar su proceso de aprendizaje, a modo de mediadores del mismo. Su propósito puede ser incentivador para captar la atención del alumno y puede ser también estructurador de las secuencias organizadas de los conocimientos nuevos y de los conocimientos previos que el alumno maneja (Parcerisa Arán, 1996).

Cuando la totalidad de estas nociones se organizan intentando configurar un mapa, se utiliza el material curricular que se denomina mapa conceptual, (Maya Betancourt, 1999) en el que es claro el propósito de que el alumno construya en su mente la máxima posibilidad de enlaces de orden, relación y causalidad entre los conocimientos que se presentan y pueda agregar otros que ha ido encontrando con su grupo de pares en la red electrónica o en otras fuentes de información. Esto es lo que se pretendió lograr en la investigación con 4 alumnos, los que se denominan grupo entrenado. Por otra parte se conformó otro grupo de 4 alumnos a los no se enseñaron a realizar mapas conceptuales y se les llamó grupo de control. Ambos grupos se trabajaron con igual tiempo, una hora semanal, donde al de control sólo se les contenía afectivamente y se les dejaba que expresaran las dificultades que manifestaban tener durante el aprendizaje.

El mapa conceptual es un recurso esquemático y visual que representa diferentes conjuntos de significados debidamente jerarquizados. Cada idea nueva que se aprehende es acomodada dentro del sistema de conceptos preexistentes, con lo cual se consigue una mayor significatividad y ajuste

lógico; es posible explorar nuevas relaciones entre conceptos previos y los que se van adquiriendo posteriormente. (Carretero, 1997)

El mapa conceptual enlaza conceptos generales y particulares acercando problemas o aspectos subyacentes, a una concepción originaria.

Cuando el alumno logra armar su propio mapa conceptual, se hace evidente su compromiso intelectual con el tema, al par que permite al docente disponer de un efectivo instrumento de evaluación de la comprensión del alumno sobre un tema en particular. (Ausubel, Novack y Hannesian, 1989)

Base sensorial del aprendizaje

Por otra parte el mapa conceptual constituye una presentación visual cuyo valor es importante en la formación de conceptos, ya que la mente humana tiene base sensorial para la recolección de información y la representación mental de la misma, facilitando la diferenciación y la construcción de redes conceptuales. Asimismo, se facilita la significatividad con el apoyo inicial imaginativo que colabora con la relación término-significado, se reflejan mejor las relaciones complejas cuando hay un despliegue de las mismas en el espacio porque las diferentes formas de esquematizar simultáneamente facilitan la significación de lo más complejo. Las imágenes visuales permiten a la imaginación experimentar, ensayar imaginativa y rápidamente las relaciones conceptuales. De esta forma se deja abierta la puerta para el ejercicio de la creatividad del alumno. (Eisner, 1998)

El sujeto interactivo:

El aprendizaje se apoya en el lenguaje, base material del pensamiento, que se alcanza como sujeto interactivo el cual se halla dentro y conformando la red social. Son los pares, los que están a nuestro lado empeñados en la misma búsqueda, los que por acierto y error nos van ayudando a conformar el significado de los conceptos y sus relaciones. En este intercambio es importante la crítica y la argumentación que sostiene otra forma de entender lo que inicialmente habíamos entendido. En síntesis el aprendizaje es una resultante de la socialidad. (Vygostky, 1995)

El análisis cualitativo:

El presente estudio se ha centrado en un análisis cualitativo por cuanto se han estudiado solamente 8 alumnos, de los cuales se han recogido cualidades que rodearon su aprendizaje. En consecuencia, las conclusiones son sólo orientativas y carecen del grado de validez que se puede obtener en un estudio cuantitativo. El estudio cualitativo, está conformado por:

a) Las cualidades que hacen al contexto que circunda a cada alumno-caso, a saber, los datos obtenidos en entrevista individual particularmente los problemas de tipo familiar o de convivencia que aparecen. Estos se comentan en la conclusión de este trabajo.

b) La influencia investigativa que se ejerce sobre él a través de las variables independientes, a saber, los mapas conceptuales, el obligado trabajo en grupos pequeños de pares y la contención afectiva del docente que está siempre presente y preocupado por el logro de un aprendizaje. De estas tres variables, los mapas conceptuales no se aplican al grupo de control.

c) Este aprendizaje será, en mayor o menor medida, un resultado, efecto del contexto y de las modificaciones de éste por la influencia de las variables independientes que en cada caso obrarán con mayor o menor fuerza.

En síntesis, cada uno de los casos estudiados llevará a encontrar un nivel de verdad consistente en que dado A (el alumno estudiado) y mediando B (contexto personal y variables independientes), ocurre un R (resultado). Este resultado podrá ser un logro del aprendizaje significativo para el alumno que se medirá por el resultado de las calificaciones obtenidas en los exámenes.

Cada caso conformará una verdad particular, pero la suma de verdades no llevará a concluir una regla, una generalización. Los resultados pueden llegar a ser totalmente diferentes y ésta es la riqueza y la limitación de la investigación social, en cuyo horizonte no hay dos sujetos iguales y también nuestro llamado “contexto” es evidentemente limitado, ¿cuántos datos se nos escapan de cada caso? Esto determina el carácter cualitativo de la investigación.

Sin embargo, al concluir el estudio, la natural capacidad de síntesis de la mente llevará al investigador a establecer algunas verdades provisorias como: si dos sujetos estudiados que tenían un contexto personal y variables independientes introducidas similares, es muy posible que tengan también un resultado de aprendizaje similar. (Antoni, 2003)

Por otra parte, en esta búsqueda azarosa de la verdad, cabría preguntarse por la validez de la presunción inicial de que el mapa conceptual trabajado grupalmente es una herramienta válida

para ayudar a producir como efecto un aprendizaje significativo. Hay algunas experiencias pedagógicas ya realizadas, en las que la concepción piagetiana de la inteligencia como fuente creativa de relaciones complejas, esquemáticas, de inclusión y sistematizadas, todavía sigue vigente y los mapas conceptuales parecen corresponder a ese tipo de complejización. Por esto creo que el material curricular utilizado como variable independiente del aprendizaje significativo, conserva un cierto grado de fiabilidad (Antoni y Navarro, 2007)

Metodología investigativa

Se buscan hallar similitudes, si aparecieran, teniendo en cuenta la totalidad de datos que se manejan. Se analizan las cualidades personales de los alumnos que accedieron a participar y datos de una entrevista con guía, realizada en dos oportunidades en el transcurso de la investigación. Se añadió el estilo de aprendizaje de cada uno, controlado por el cuestionario Honey Alonso (Craveri, 2006) y el crecimiento académico de cada alumno estudiado producido en el lapso de tiempo de dos años.

El alumno universitario con el que se trabajó, no maneja el carácter relacional de los conocimientos y sólo realiza memorizaciones de parcialidades que difícilmente relaciona. Por esta razón se utilizó al comenzar la experiencia, un listado de los principales conceptos a utilizar, incentivando a los alumnos para que establecieran diferencias y semejanzas; luego se presentó un mapa conceptual organizador de contenidos realizado por el docente. Con posterioridad, todas las secuencias relacionales fueron elaboradas por los alumnos sobre nuevos contenidos, algunos inclusores y algunos incluídos según su grado respectivo de generalidad o especificidad, derivando así distintas jerarquías conceptuales significativas. Lo más importante fue que el alumno comprendiera que el aprendizaje no son las palabras que se utilizan, que son sólo signos, sino el significado de la idea que cada uno va captando. Con este material curricular el alumno va construyendo su conocimiento, el cual queda siempre abierto a nuevas inclusiones aportadas tanto por su propia búsqueda como por la de sus compañeros de grupo de estudio, lo que constituyó una condición obligatoria.(Sánchez Iniesta, 1995)

Los mapas conceptuales se intentaron dinamizar poniendo el acento en la búsqueda de causas y consecuencias que pudieran modificarse con el tiempo, a modo de diagramas causales, cuando los temas lo permitieron.

Si bien se trabajó sobre los contenidos de dos asignaturas, el criterio sustentado es que la mente del alumno que es una sola, aplicará la nueva manera de aprender, a todas las restantes asignaturas.

El discurso docente intentó ser otro elemento más en el contexto de aprendizaje de los alumnos objeto del experimento, particularmente porque se trabajó fuera del tiempo de clase, con un contacto claramente continente de las dificultades y los logros por pequeños que fueran. Se intentó dar seguridad, así como respetar los tiempos y la diversidad de ocupaciones de los participantes. Se intentó romper el paradigma de profesor hegemónico y se asumió el rol de acompañante en el proceso de aprendizaje, se aceptaron críticas, se dieron explicaciones y se movilizaron discusiones. Se construyó un espacio social tanto con la participación del docente, como de los otros alumnos del grupo de estudio, escuchando posturas y disensos. La gama de las relaciones interpersonales, fueron personales, de ningún modo impersonales. La sede del poder se concentró sobre el saber que permanentemente se estaba buscando y perfeccionando.

Se trabajó con cuatro casos sobre los cuales se aportaron las variables independientes, constituyendo un pequeño grupo entrenado que trabajó en forma conjunta, fuera de horario de clases, como ya se dijo. Un segundo grupo pequeño se constituyó como grupo de control, con otros cuatro alumnos a los cuales se realizó entrevista individual y se aplicó el cuestionario que indaga estilo de aprendizaje; el docente se constituyó como colaborador de lo que intentaran estudiar a modo de clase de consulta, pero no se les enseñó el manejo de los mapas conceptuales y diagramas causales.

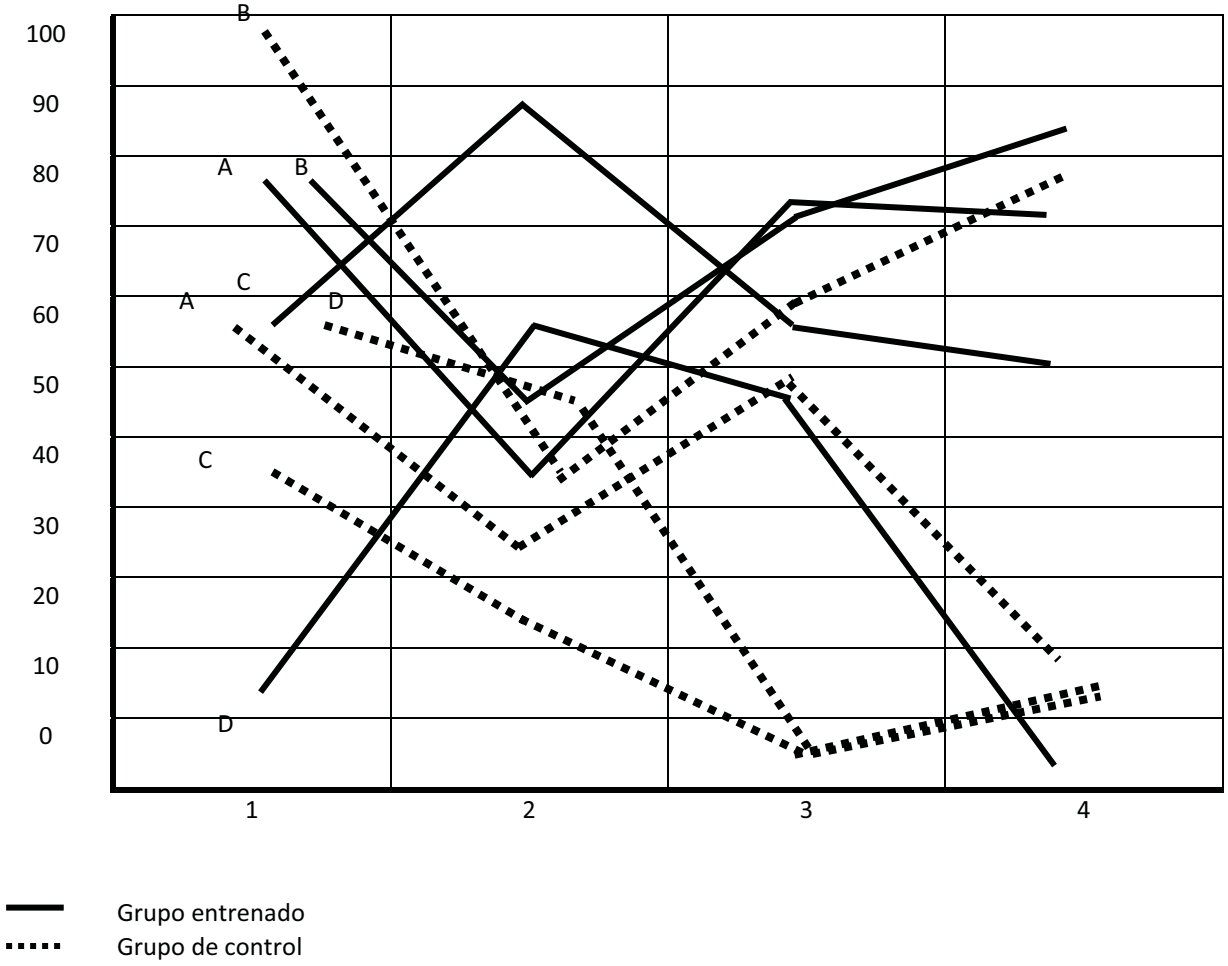
Resultados

Referencias del gráfico que se presenta, con datos ponderados:

1. Nivel de consecuencias previsto según datos de entrevista, donde el 100% indica ninguna dificultad encontrada.

2. Nivel detectado en los estilos de aprendizaje (reflexivo y teórico), donde 100% indica el nivel óptimo. Se analizaron estos dos estilos únicamente por cuanto estudios previos realizados en alumnos del área de carreras universitarias socio económicas demostraron que estos son los estilos predominantes.
3. Calidad del rendimiento académico general, según cantidad de asignaturas aprobadas y promedio de calificaciones obtenidas, en los dos años del seguimiento.
4. Nivel de rendimiento académico en matemática, según cantidad de materias del área aprobada y promedio de calificaciones obtenidas, durante el seguimiento.

Visualización gráfica de los resultados



Como puede observarse, de los cuatro casos del grupo entrenado, a los que se logró que aprendieran a realizar los mapas conceptuales, los alumnos A y B viven separados de su familia pero no acusan otros problemas; los resultados generales y matemático son bastante buenos aunque sus estilos de aprendizaje son sólo medios. El alumno C trabaja más de seis horas diarias y tiene dudas sobre su capacidad intelectual; no obstante, como puede verse, obtiene el 90% de nivel para el aprendizaje, el más alto de todos en el cuestionario de estilo de aprendizaje. De todos modos, alcanza un resultado aceptable tanto en lo general como en el área matemática, aunque la primera matemática que rinde sólo logra aprobarla en el tercer intento, luego de repetidos encuentros con el docente investigador quien intenta demostrarle que realmente es una persona suficientemente inteligente como para triunfar en la universidad. El alumno D presenta la situación menos apropiada para el aprendizaje desde su contexto personal. Efectivamente, se trata de una persona con graves y largos problemas familiares, que lo acompañaron desde su nacimiento. Aunque su estilo de aprendizaje muestra un nivel mayor al medio, la influencia de la situación familiar pareciera ser la causante de su fracaso escolar.

De acuerdo a lo antedicho parece derivar la conclusión que, la influencia didáctica es relativa y queda supeditada a los efectos del contexto personal y a la seguridad en el propio talento, que el mismo brinde al sujeto.

Cuando analizamos los casos del grupo de control, que no recibieron el apoyo didáctico de mapas conceptuales, éste adquiere relevancia por cuanto tres de los cuatro casos en estudio, no alcanzan los objetivos de aprendizaje, a pesar de sus contextos personales bastante normales. La excepción la constituye el alumno B que cuenta con un contexto personal óptimo y logra con sólo su esfuerzo alcanzar un nivel alto de rendimiento académico, con un estilo de aprendizaje superior al término medio y con fuerte uso de la memorización.

Referencias bibliográficas

Antoni, E. J. (2003) *Alumnos universitarios*. Madrid: Miño y Dávila Editores.

Antoni, E. J. y Navarro, D. (2007) Diagramas causales y mapas conceptuales como herramientas del pensamiento sistémico. *Revista Informes de Investigación 7 (9)*.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1989). Psicología. Educativa. México: Trillas.

Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*. México: Editorial Progreso.

Craveri, A. M. (2006). *Evaluación del aprendizaje matemático con herramienta computacional* Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional de Rosario.

Eisner, E. W. (1998). *Cognición y currículo*. Buenos Aires: Editorial Amorrortu.

Flavell, J. (1986). *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Maya Betancourt A. (1999). *Mapas conceptuales*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Parcerisa Aran, A. (1996). *Materiales curriculares*. Barcelona: Editorial Grao.

Sanchez Iniesta, T. (1995). *La construcción del aprendizaje en el aula*. Buenos Aires: Magisterio del Río de La Plata.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Paidós.

UNA CARACTERIZACIÓN DEL TRATAMIENTO Y ASIMILACIÓN DE CONTENIDOS EN LOS CURSOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR

Luisa Nataly Mukul Doblado, Martha Imelda Jarero Kumul
Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas México
luisa_mukul@hotmail.com, jarerok@uady.mx
Campo de investigación: : Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen.*Las Instituciones de Educación Superior, reportan bajos índices de Eficiencia Terminal, hecho relacionado con la reprobación, tal es el caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México; donde se presentan altos porcentajes de reprobación en los primeros cursos, por ejemplo en la asignatura de álgebra. Por eso, desarrollamos un estudio descriptivo apoyado en la etnografía como método de investigación, cuyo objetivo fue caracterizar el tratamiento de los contenidos otorgado por el profesor de la asignatura de estudio y el nivel de asimilación de los mismos, por parte de los estudiantes. Entre los resultados obtenidos se identifican las principales representaciones semióticas empleadas por el profesor, con lo cual podemos decir que el tratamiento otorgado a los contenidos es preferentemente algebraico y conjuntista. Además, aunque los estudiantes son capaces de alcanzar el tercer nivel de asimilación del conocimiento, correspondiente al de producción, la práctica de evaluación los limita a nivel de reproducción.*
Palabras clave: tratamiento y asimilación de contenidos

Reportes sobre la reprobación en la educación superior

Uno de los problemas que enfrentan las Instituciones de Educación Superior del país, es el bajo índice de Eficiencia Terminal; situación que se asocia a la deserción, el rezago y la reprobación estudiantil. Muchos son los factores que pueden influir en este último, sin embargo, la reprobación es un fenómeno escolar que se produce como resultado de las interacciones de profesor-alumno-saber, esto es en el Sistema Didáctico.

La Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México; ha enfrentado problemas de reprobación y rezago escolar, cerca de los últimos 20 años, principalmente en los primeros semestres de estudio, en cursos de Cálculo y Álgebra (Aparicio, 2006). Las estadísticas del año 2007, realizadas por el departamento de Control Escolar de la misma dependencia, reportan el 63% de reprobación en el curso de Álgebra Superior I (ASI) resultando ser el curso con mayor índice de reprobación. Ante este hecho, nos cuestionamos sobre sus posibles causas y nos planteamos la siguiente pregunta *¿cómo se promueve el desarrollo de las habilidades cognitivas requeridas por el curso de ASI?* Nos interesó *caracterizar el tratamiento otorgado a los contenidos*

que se estudian en el curso de ASI y el nivel de asimilación alcanzado por los estudiantes en el mismo.

Investigaciones como las de Melchor y Melchor (2002), Aparicio, Jarero y Ávila (2007), entre otras, reportan que la mayoría de los profesores universitarios, utilizan la prueba escrita como único instrumento de evaluación y calificación. Dochy, Segers y Dierick, (2002) mencionan que estas pruebas no reflejan adecuadamente la capacidad de resolución de problemas, el pensamiento crítico y el razonamiento. Y la Educación Matemática no puede ser planteada en una formación basada en la de memorización de hechos, el desarrollo de cálculos y la repetición, lo cual debilita las habilidades en el razonamiento matemático, y resulta ser un obstáculo para que los estudiantes puedan comprender el valor y la utilidad de las matemáticas en su vida (Ruiz, Alfaro y Gamboa, 2007).

Este trabajo es parte del proyecto de investigación "La práctica de evaluación en cursos de Matemáticas. Explorando su relación con los índices de reprobación escolar" que se desarrolla al interior de la Facultad de Matemáticas con el objetivo de analizar la relación entre las prácticas de evaluación y la reprobación en la asignatura de estudio.

Marco conceptual

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características "fuertes" (Duval (1993) citado en D'Amore (2004)): el uso de más registros de representación semiótica es típica del pensamiento humano y, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento. Por tanto, la construcción de los conceptos matemáticos inevitablemente depende de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos.

Los contenidos que incluye la unidad 2 del curso de ASI pueden ser tratados bajo diferentes registros de representación, en particular, el concepto "Función" puede representarse mediante la notación conjuntista, de manera coloquial, numérica (donde se encuentra la forma matricial, por pares ordenados o en forma de tabla), algebraica, gráfica o el diagrama sagital.

Por otro lado, la enseñanza y el aprendizaje no se relacionan directamente, sin embargo, se pretende determinar el nivel de asimilación de los contenidos logrados por los estudiantes como

producto de la enseñanza ofrecida en los cursos de ASI y consideramos los cuatro niveles de asimilación del conocimiento (Ramos, Valle y Ross, 2007): familiarización, reproducción, producción y creación. En el primer nivel, el estudiante es capaz de reconocer los objetos, procesos y propiedades estudiados anteriormente, según el modelo a él presentado. En el segundo puede reproducir la información, la operación, resolver problemas tipo estudiados. El tercero sugiere que el aprendiz es capaz de realizar las operaciones según el orden acostumbrado, en las condiciones nuevas y con el contenido nuevo, por ejemplo, la solución de problemas no típicos. Y en el último el estudiante es capaz de orientarse independientemente en situaciones objetivas o subjetivamente nuevas para él. Su actividad puede tener carácter de búsqueda, de investigación.

Método de investigación

Utilizamos la etnografía como método de investigación debido al carácter de nuestro trabajo. La comunidad estudiada estaba conformada por un grupo de 33 estudiantes de la Facultad de Matemáticas que cursaron la asignatura de ASI y el profesor titular de la asignatura, cuya formación inicial es licenciado en matemáticas de la misma facultad de ciencias y cuenta con más de 18 años impartiendo el mismo curso. Hemos restringido nuestro estudio a la unidad 2: "Relaciones y Funciones", ya que los profesores a cargo del curso de ASI reportan altos índices de reprobación en esta unidad.

Para la recolección de datos, utilizamos *la observación no participante*, buscando puntualizar las características del tratamiento dado a los contenidos y el nivel de asimilación por parte de los estudiantes en los cursos de ASI. Se observaron 17 sesiones de clase y se registraron los hechos en notas de campo. Se revisaron *las notas del estudiante* para obtener evidencia sobre el tratamiento otorgado a los contenidos del curso. Y aplicamos *una prueba experimental*, diseñada por el grupo de investigadores a cargo del proyecto del cual forma parte este trabajo, para caracterizar los niveles de asimilación de los estudiantes, al mirar sus producciones en reactivos que involucran diferentes registros de representación.

Resultados

Entre los contenidos de la unidad 2 se estudian los conceptos "Función", "Composición de funciones" e "Inversa de una función" y su enseñanza se basaba en la exposición de la teoría, demostración de teoremas, ejemplos y ejercicios. Presentamos una síntesis del recorrido temático de la unidad, para dar evidencia de los registros de representación que se emplearon e iniciamos con la definición del concepto "Función", la cual se apoyó en el registro algebraico, como se muestra en el siguiente recuadro.

Definición de función

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una relación R entre A y B que satisface:

i. $D_R = A$

ii. $\forall\, y_1, y_2 \in B, \forall\, x \in A, (x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2$

Observación $\forall x \in A, \exists!\, y \in B, (x, y) \in R$

En la Figura 1, se presenta algunos ejercicios propuestos a los estudiantes sobre el concepto "Función", donde se emplea la notación conjuntista. Además, se observa que los estudiantes recurrieron a la representación algebraica para la resolución de los mismos.

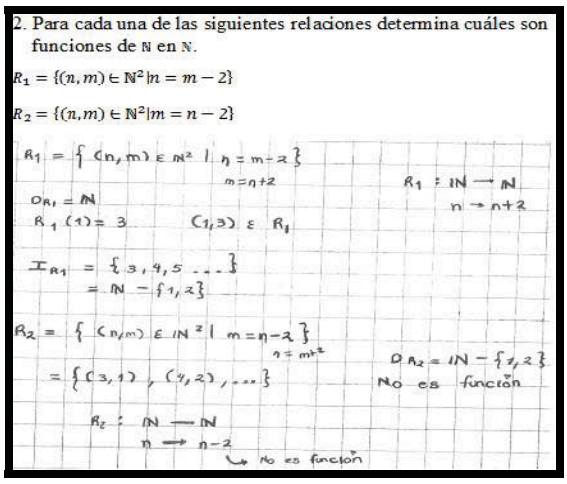


Figura 1. Ejercicios

Al presentar la definición de "Composición de funciones", así como en algunas demostraciones relacionadas con el mismo concepto, se recurrió a la representación sagital (Figuras 2 y 3).

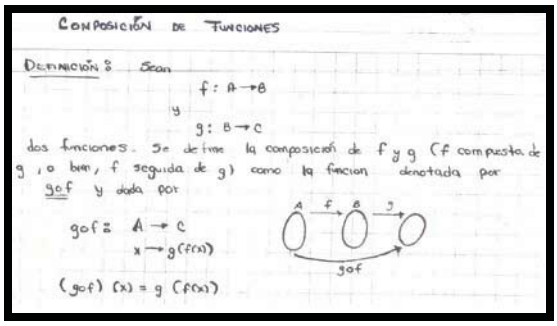


Figura 2. Definición

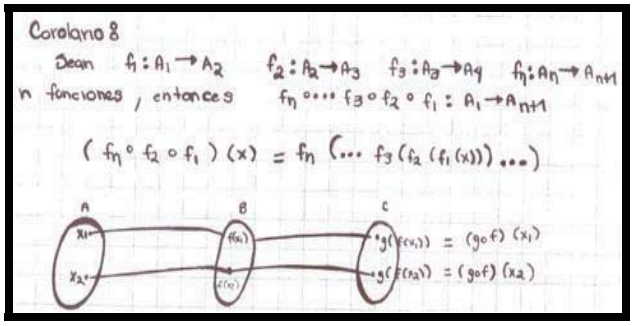


Figura 3. Corolario

En algunos ejercicios relacionados con la "Composición de funciones" se utilizó el registro numérico-matricial (Figura 4) y en otros el registro algebraico (Figura 5).

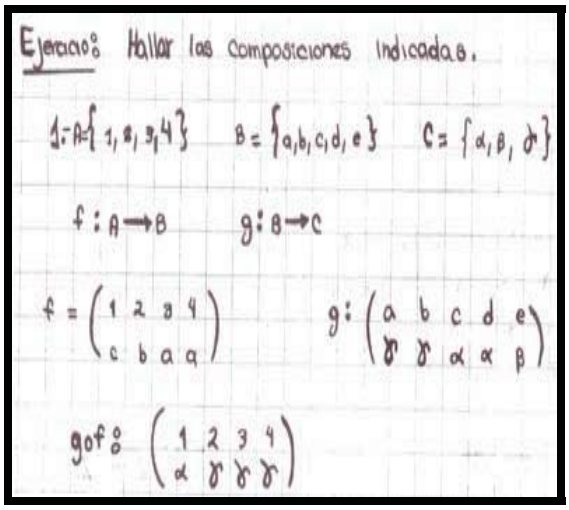


Figura 4. Ejercicios

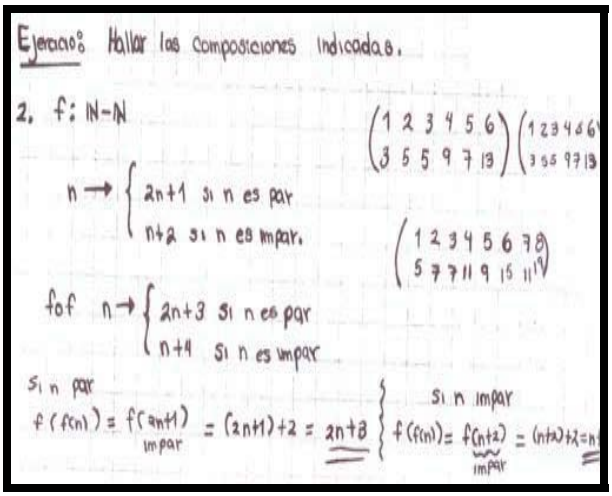


Figura 5. Ejercicios

En los ejercicios relacionados con la "Inversa de una función", en una ocasión se empleó una tabla para escribir algunas parejas ordenadas (Figura 6), para obtener luego la regla de correspondencia de la función, donde nuevamente se recurrió a la representación algebraica y, en otros ejercicios fue empleada esta última representación (Figura 7).

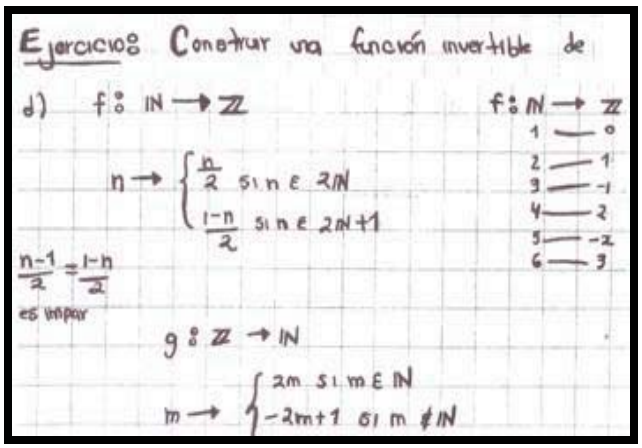


Figura 6. Ejercicio

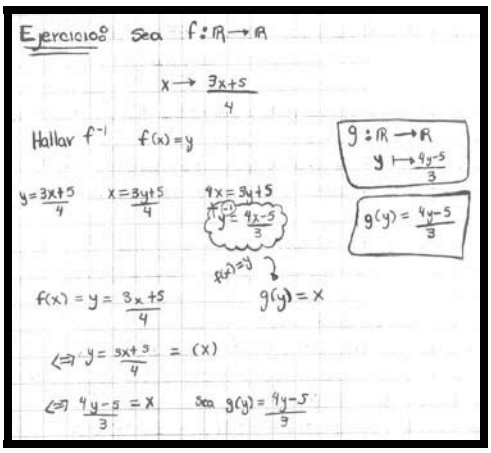


Figura 7. Ejercicio

Por otro lado, para identificar el nivel de asimilación que alcanzan los estudiantes, se clasificaron los reactivos de la prueba experimental en reactivos de reproducción y producción. Esperábamos un mejor nivel de respuestas en los primeros reactivos, ya que en éstos se emplearon representaciones semióticas que el profesor utilizó durante la enseñanza, pero se obtuvieron mejores resultados en los reactivos de producción, los cuales incluían representaciones no utilizadas por el profesor. Los porcentajes de respuestas correctas de los reactivos de reproducción fluctúan entre 26.3 y 94.7, y para los de producción oscilan entre 57.8 y 100.

Los estudiantes, para responder los reactivos de producción, emplearon estrategias propias. Se identificó que utilizaron otras representaciones semióticas, dando evidencia de la necesidad de transitar de un registro a otro (Figura 8).

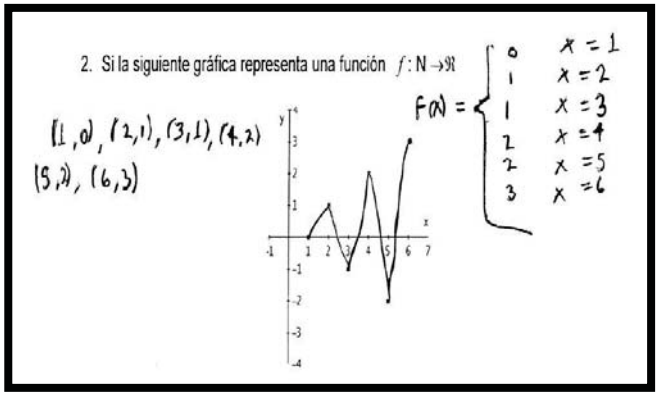


Figura 8. Uso de otras representaciones semióticas

Además, tal como se puede observar en la Figura 8 así como en la 9 y 10, donde los reactivos incluyen la gráfica de una función con dominio discreto; los estudiantes unen los puntos de la gráfica ignorando el dominio de la misma

Figura 9. Producciones del reactivo 2

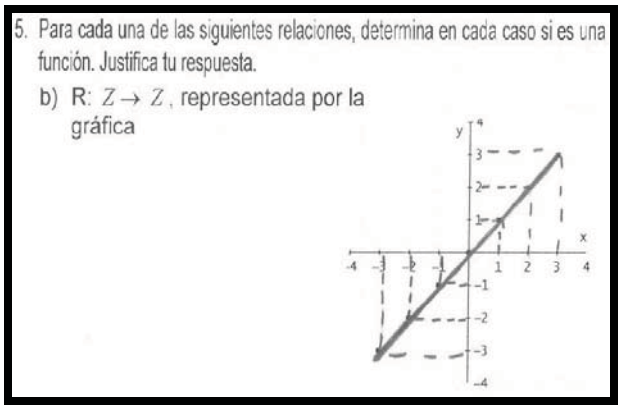


Figura 10. Producciones del reactivo 5

El tratamiento otorgado a los contenidos del curso de ASI, es preferentemente algebraico y conjuntista y no se promueve la conversión entre registros, lo cual contribuye de forma escasa en la comprensión de los conceptos tratados por parte de los estudiantes. El empleo de diferentes registros de representación podría contribuir a que el estudiante acepte gráficos "agujereados" como gráfica de una función y con ello atender a la necesidad de ruptura al trabajar con el conjunto de los números reales.

Tratando de caracterizar el nivel de asimilación que alcanzan los estudiantes, concluimos que son capaces de alcanzar el nivel de producción, ya que obtuvieron mejores resultados en reactivos donde se emplearon registros de representación distintos a los recurridos por el profesor, empleando estrategias propias para resolverlos. Sin embargo, las prácticas de evaluación limitan a los estudiantes al nivel de reproducción, para lo cual recurren a la memoria y tratan de reproducir el trabajo del profesor, sin embargo, no implica una comprensión de los conceptos.

Para que el estudiante pueda llegar al último nivel de asimilación, se deben producir en él, aprendizajes significativos, para ello el profesor debe comprometerse en formular una metodología adecuada y además saber cómo tratar los errores que cometen los estudiantes. El estudiante, debe establecer una relación entre el nuevo contenido y los conocimientos previos, para ello debe tener en su estructura cognitiva conceptos, ideas y proposiciones estables y

definidas, con las cuales pueda interactuar la nueva información; y mientras existan más relaciones, el aprendizaje es mucho más significativo.

Este trabajo pretende aportar estrategias a las nuevas tendencias de enseñanza, particularmente en el curso de ASI, y así aminorar los bajos índices de reprobación y por consiguiente incrementar la Eficiencia Terminal. Por tanto, se hace necesario desarrollar en los profesores de ASI la necesidad de considerar las diferentes representaciones semióticas de los conceptos tratados, para incluirlos en actividades de aprendizaje que contribuyan en la compresión de los contenidos de ASI, por parte de los estudiantes. Además, es preciso inculcar en los profesores, la necesidad de considerar aspectos didácticos para una mejor práctica, ya que no es suficiente con la formación en la disciplina matemática, sino saben cómo transmitir y evaluar los conocimientos matemáticos. Estos aspectos son sólo unos de los elementos que el profesor puede incorporar a sus prácticas de enseñanza que lo ayudarían a orientarse a una práctica centrada en el aprendizaje.

Referencias bibliografías

Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y Eficiencia Terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la facultad de matemáticas de la universidad autónoma de Yucatán. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 450-455. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aparicio, E., Jarero, M. y Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática*. Edición 35, 3 – 12.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90 – 106.

Dochy, F., Segers, M. y Sabine Dierick (2002). Nuevas Vías de Aprendizaje y Enseñanza y sus Consecuencias: una Nueva Era de Evaluación. *Revista de Docencia Universitaria*. Universidad de Maastricht. Recuperado septiembre 24, 2008 de http://www.um.es/ojs/index.php/red_u/article/view/20051/19411

Melchor, J.; Melchor, V. (2002). El conocimiento de las matemáticas. En Xixim, *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*. Universidad Autónoma de Querétaro. Recuperado agosto 30, 2008, de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0904.pdf

Ramos, C., Valle, M. y Ross, S. (2007). El grado de reflexión de los alumnos de cálculo diferencial. Una experiencia. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 2(2), 54–70. Recuperado diciembre 17, 2008, de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio2/num2/REIEC_anio2_num2_art6.pdf

Ruiz, A., Alfaro, C. y Gamboa, R. (2007). *Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas*. Recuperado el 27 de septiembre de 2008 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte12/articulo22.html

ELEMENTOS DE HISTORIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edefaria@emate.ucr.ac.cr, edefaria@gmail.com
Campo de investigación: Historia de la Matemática Nivel: Superior

Resumen. *En este curso corto se compartió algunos elementos de historia del cálculo, empezando con los trabajos de los babilónicos hasta llegar al nacimiento del cálculo diferencial e integral con Newton y Leibniz, así como algunas estrategias metodológicas que podrían ser pertinentes para un curso de esta naturaleza, como son el uso de portafolios, la participación de conferencistas que son especialistas en campos específicos de las matemáticas, y las exposiciones presentadas por los propios estudiantes del curso.*
Palabras clave: historia de la matemática, estrategias metodológicas, portafolios

Introducción

La historia de las matemáticas es uno de los recursos más importantes que pueden utilizarse en la enseñanza de la matemática, para tratar de construir en los estudiantes una visión humana, interesante y motivadora de esta disciplina que por muchos es considerada deshumana, rígida y desligada de la realidad.

La Asociación Matemática de América (MAA por sus siglas en Inglés) recomienda a los futuros profesores de matemática de enseñanza secundaria que "aprendan a apreciar las contribuciones realizadas por las diversas culturas a favor del crecimiento y el desarrollo de las ideas matemáticas, así como a investigar las aportaciones dadas por individuos de ambos sexos al desarrollo histórico de los principales conceptos matemáticos". Para la MAA, un conocimiento de la historia de las matemáticas permite que el futuro profesor de matemática enseñe la disciplina de una forma más eficiente.

En sintonía con esta recomendación es que compartí algunas experiencias de aula correspondientes a un curso de historia de la matemática impartido a futuros docentes de matemática de la carrera de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. En el curso se procuró ofrecer al estudiante un panorama general acerca del desarrollo histórico del conocimiento matemático y crear conciencia en el estudiante acerca del potencial didáctico de la historia de la matemática como recurso metodológico, además de la importancia de su incorporación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

Otro aspecto importante del curso tuvo que ver con la evaluación. Cada estudiante desarrolló, y expuso para todo el grupo, un proyecto que consistió en seleccionar dos objetivos del plan de estudios de matemática del Ministerio de Educación para la enseñanza secundaria y elaborar un planeamiento didáctico que incorporara elementos de la Historia de la Matemática como recurso metodológico. Un elemento evaluativo, considerado innovador para los estudiantes, consistió en la elaboración de un portafolio por parte de cada estudiante. El portafolio educativo es un método de enseñanza, aprendizaje y evaluación que consiste en la aportación de producciones de diferente índole por parte del estudiante a través de las cuáles se pueden juzgar sus capacidades en el marco de una disciplina o materia de estudio. Estas producciones informan del proceso personal seguido por el estudiante, permitiéndole a él y los demás ver sus esfuerzos y logros, en relación a los objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación establecidos previamente. La diversidad de material presentado en un portafolio permite identificar diferentes aprendizajes: conceptos, procedimientos, actitudes, proporcionando una visión más amplia y profunda de lo que el estudiante sabe y puede hacer. A través de los distintos trabajos mostrados se puede identificar cómo piensa el estudiante, cómo cuestiona, analiza, sintetiza, crea o interactúa con otros (intelectual, emocional y socialmente).

Al finalizar el curso referido, se aplicó un cuestionario anónimo a todos los estudiantes, para conocer sus opiniones acerca de las fortalezas y las debilidades del curso. Por lo general, consideraron que las principales fortalezas fueron las investigaciones y exposiciones, el planeamiento didáctico de contenidos de la enseñanza secundaria incorporando la historia de la matemática y la construcción del portafolio. También mencionaron que las conferencias dadas por profesores invitados, especialistas en filosofía de las matemáticas, lógica, topología y en matemáticas aplicadas despertaron sus intereses.

En la siguiente sección desarrollo parte de la temática presentada en el curso dado en la RELME 23: Elementos de historia del cálculo diferencial e integral.

Origen del cálculo

Considero que podríamos ubicar los orígenes del cálculo en las antiguas civilizaciones babilónica y egipcia. Conocemos los trabajos babilónicos por medio de unas 500000 tabletas de arcillas que

fueron encontradas, de las cuales unas 500 son de interés para las matemáticas. Las tabletas más antiguas son de aproximadamente 2500 A.c. (Ruiz, 2003, p. 13).

Las principales referencias que tenemos en relación con las matemáticas egipcias son documentos escritos sobre papiros que lograron sobrevivir con el tiempo. El papiro de Moscú que se encuentra en el museo de Bellas Artes de Moscú y el papiro Rhind que se encuentra en el museo Británico. En los papiros mencionados y en algunas tabletas babilónicas encontramos métodos y fórmulas (sin demostraciones) para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de pirámides Katz, 2009, pp. 2-10).

Los griegos dieron un impulso al desarrollo del cálculo al utilizar ideas que fueron retomadas por los creadores del cálculo diferencial e integral. Demócrito (siglo V a.C.) calculó el volumen de pirámides y conos, considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitamente pequeñas (indivisibles).

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) creó el método de exhausión, antecedente del cálculo integral para calcular áreas y volúmenes, al postular que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la resta de una cantidad determinada". Con este método él logró demostrar que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura. Además demostró que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura (Katz, 2009, p. 84).

El problema con el método de Eudoxo es que involucra el concepto de infinito, y las paradojas de Zenón de Elea reforzaron los argumentos de la filosofía de Parménides que negaban la existencia del movimiento y afirmaba que el espacio no está formado por elementos discontinuos.

Aristóteles en un intento por regular el concepto de infinito prohibió el infinito en acto: "no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio", añadió "es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles" de manera que el infinito "existe potencialmente [...] es por adición o división" (Katz, 2009, p. 45).

Arquímedes (287-212 A.c.), considerado el precursor del cálculo integral, utilizó el método de Eudoxo (de exhausión) para el cálculo de áreas y volúmenes, sin tomar en cuenta la prohibición aristotélica de usar el infinito en acto.

Su tratado denominado "El método" fue descubierto en 1899 en una biblioteca en Constantinopla. El manuscrito es del siglo X, pero la escritura fue parcialmente lavada en el siglo XIII y el material reutilizado para un trabajo religioso. Afortunadamente la escritura anterior todavía se puede leer en una parte considerable y en 1906, J L Heiberg, profesor de filología clásica en la Universidad de Copenhague, logró descifrar mucho del material. Esta obra proporciona un destacable acercamiento a cómo Arquímedes descubrió muchos de sus resultados.

En la obra "Medidas de un círculo", encontramos resultados numéricos relacionados con la aproximación de π y con la cuadratura del círculo. Él utilizó el método de exhausión de Eudoxo, y para ello se utiliza dos principios (Ruiz, 2003, pp. 94-95):

1. Si α y β son dos magnitudes y $\alpha \neq 0$ entonces existe un número natural n tal que $n\alpha > \beta.$ (axioma de continuidad o de Arquímedes, Libro I "Sobre la esfera y el cilindro", citado en Ruiz, 2003, p. 95)
2. Si de cualquier magnitud mayor entre dos magnitudes distintas dadas restamos una parte mayor que su mitad, y si del resto restamos de nuevo una cantidad mayor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de resta, entonces en alguna etapa del proceso obtendremos como resto una magnitud menor que la menor que las dos magnitudes dadas al inicio.

Lo anterior se puede expresar así: Dadas dos magnitudes distintas α y β con $\alpha<\beta$ existe un número n tal que $(1-p)^n \beta < \alpha \text{ con } p > \frac{1}{2}.$ (Elementos de Euclides, Libro X, definición 1, citado en Ruiz, 2003, p. 95).

En su tratado "Sobre la medida del círculo" Arquímedes demostró que "El área A de cualquier círculo es igual al área de un triángulo rectángulo en el cuál uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia.", y que "la razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ pero es mayor que $3\frac{10}{71}$", proporcionando una buena aproximación para π. (Katz, 2009, pp. 101- 102). En el trabajo "Cuadratura de la Parábola", Arquimedes utilizó el método de exhausión de Eudoxo y reducción al absurdo para calcular el área de un segmento de parábola (Katz, 2009, p 108).

Los problemas con números irracionales y con el infinito impidieron el desarrollo del cálculo y pasaron casi 2000 años para que se lograra superar estos obstáculos. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), un discípulo de Galileo, fue el primero en desarrollar una teoría completa de los indivisibles, iniciada por Galileo. En ella se retomaba el método utilizado por Arquímedes al considerar los objetos geométricos hechos de objetos geométricos de una dimensión menor. Estas ideas fueron beneficiadas por el nacimiento de la geometría analítica, obra de Fermat y Descartes en la primera mitad del siglo XVII. La importancia de este descubrimiento consiste en que la geometría analítica permite el tratamiento algebraico de problemas geométricos.

Otro impulsor del cálculo fue Pierre de Fermat (1602-1665). Fermat retomó la ecuación $bx - x^2 = c$ obtenida al dividir un segmento de longitud b en dos partes con producto c y estudiada por Viéte, y el método de "adigualdad" utilizado por Diofanto de Alejandría, para determinar el valor de x que proporcionaba el valor máximo del parámetro c. Posteriormente él generalizó su método para maximizar un polinomio $p(x)$ y para encontrar la tangente a una curva (Katz, 2009, pp. 473-477).

El 22 de setiembre de 1636 Fermat escribió a Gilles Persone de Roberval (1602-1675): logré cuadrar varias figuras compuestas de líneas curvas. Puedo cuadrar el área de una región bajo cualquier parábola de la forma $y = px^k, k \in \mathbb{Q}$ mediante un método distinto del desarrollado por Arquimedes (quién utilizó triángulos). En su "Tratado sobre Cuadratura" publicado en 1658 Fermat extendió su método, para determinar el área bajo la curva $y = px^{-k}, k \in \mathbb{Q}$ (Katz, 2009, pp. 519-523).

Otro precursor del cálculo diferencial e integral fue John Wallis (1616-1703), miembro fundador de la Royal Society de Londres y editor de obras de Arquímedes. Wallis convirtió el cálculo de áreas bajo curvas (hasta el momento algo meramente geométrico) en cálculos aritméticos. Él obtuvo fórmulas de integración como las obtenidas por Fermat para k racional y propuso la siguiente genealogía del cálculo: El método de Exhausión (Eudoxo, Arquímedes); el método de los indivisibles (Cavalieri); la aritmética de los infinitos (Wallis) y los métodos de las series infinitas (Newton).

En 1668 Nicolaus Mercator (1620-1687) calculó el área bajo la curva $y=\frac{1}{1+x}$ de 0 a x, dividiendo el intervalo en n subintervalos de igual longitud y obtuvo el desarrollo de $\log(1+x)$ en serie de potencias.

Isaac Barrow (1630-1677) fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo diferencial e integral. En la lección X de su obra "lecturas geométricas" demostró su versión geométrica del Teorema fundamental del cálculo (Katz, 2009, pp. 536-537).

Los trabajos de Wallis, Fermat, Barrow y otros influyeron grandemente en Isaac Newton. Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de manera independiente, sintetizaron de la maraña de métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos fundamentales: la derivada y la integral. Ellos desarrollaron reglas de derivación y lograron mostrar que ambos conceptos eran inversos (teorema fundamental del cálculo).

En su segunda obra sobre el cálculo "De methodis serierum et fluxionum" (1671) publicada en1737 (66 después de escrita), Newton describe sus conceptos de fluente -es una variable en función del tiempo- y fluxión de la fluente -la derivada respecto al tiempo de la fluente- como entidades propias, con unas reglas algorítmicas de fácil uso. En ella consideró la curva descrita por la ecuación $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, en dónde x, y son variables que dependen del tiempo t (fluentes), $\dot{x},\dot{y}$ son las fluxiones y "o" una cantidad infinitesimal. Reemplazó y por $y+\dot{y}o$, x por $\mathrm{x}+\dot{x}o$ en la ecuación dada, simplificó, dividió el resultado por o y después eliminó los términos que multiplicaban o (infinitesimal, cantidad infinitamente pequeña) obteniendo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-3ax+ay}{3y^2-ax}$ para la velocidad del móvil descrito por la ecuación dada. Esto corresponde a la derivada de y respecto a x como conocemos hoy, pero el método utilizado por Newton fue bastante extraño: división por o (distinto de cero) y eliminación de todo lo que multiplica o.

Este extraño método llevó al obispo y filósofo George Berkeley (1684-1753) a publicar en 1734 el folleto "el analista o discurso dirigido a un matemático infiel" en que decía: "¿Y que son estas fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos incrementos

evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, sin ser tampoco un simple nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de las cantidades desaparecidas? (Berkeley, 1734)

Lo cierto es que todo esto llevó a profundos debates acerca de los fundamentos del naciente cálculo diferencial e integral y que condujo al rigor en las matemáticas en el siglo XIX, gracias al trabajo de grandes matemáticos como Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Polémica Newton-Leibniz

Newton tenía cierta fobia a publicar, posiblemente por temor a la controversia, y guardó casi en secreto su descubrimiento acerca del cálculo de fluxiones. Mientras tanto Leibniz, para facilitar la difusión de sus resultados los publicó en una de las recién creadas revistas "Acta Eroditorum" que el mismo había ayudado a fundar.

En sus publicaciones "Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas" (1680) y "Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos" (1686), en las Actas Eroditorum, Leibniz utilizó la notación dx para diferencial e $\int$ para integral. Lo cierto es que los discípulos de Leibniz publicaron el primer libro sobre el cálculo denominado "Analyse des infiniment petits" que redactó el Marquéz de L'Hospital a partir de las lecciones particulares que le dio Juan Bernoulli. En la obra mencionada no se hace referencia a Newton (Katz, 2009, p. 575).

En el libro "De quadratura curvarum", Newton alega lo siguiente: "En una carta escrita a Sr. Leibniz en 1676 y publicada por Wallis, mencionaba un método por el cual había encontrado algunos teoremas generales acerca de la cuadratura de figuras curvilíneas [...] Hace años yo presté un manuscrito conteniendo tales teoremas; y habiéndome encontrado desde entonces con varias cosas copiadas de él, lo hago público en esta ocasión".

Leibniz contraataca diciendo que "Para entender mejor este libro los siguientes hechos deben ser conocidos. Cuando una cantidad varía continuamente como, por ejemplo, una línea varía por el fluir de un punto que la describe, aquellos incrementos momentáneos son llamados diferencias

[...] Y por tanto ha aparecido el cálculo diferencial y su converso, el cálculo sumatorio. Los elementos de este cálculo han sido publicados por su inventor el Dr. Gottfried Wilhelm Leibniz en estas Actas, y sus varios usos han sido mostrados por él y por los Drs. y hermanos Bernoulli y por el Dr. Marquéz de L'Hospital. En vez de las diferencias leibnizianas, el Dr. Newton empleó, y ha empleado siempre, fluxiones".

La controversia Newton-Leibniz fue tan grande que la Royal Society nombró una comisión -que resultó estar plagada de amigos de Newton- que luego de varias deliberaciones dictaminó que Newton fue el primero en crear el cálculo diferencial. Esta absurda guerra duró hasta principios del siglo XIX cuando finalmente los matemáticos ingleses deciden adoptar la notación leibniziana -que hasta el momento habían ignorado.

Conclusión

En el curso desarrollado en la RELME 23 se logró motivar a los participantes con las estrategias metodológicas utilizadas por el expositor en el curso de historia de la matemática (investigación, uso de portafolios, planeamiento didáctico incorporando la historia de la matemática como recurso metodológico) y también se dedicó parte del tiempo para desarrollar las ideas matemáticas presentadas en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Berkeley, G. (1974). El Analista: Discurso a un matemático infiel. En James Nwman (Ed.) Sigma. El mundo de las matemáticas. Selección de textos matemáticos de todos los tiempos I (pp. 218-219). Barcelona: Ediciones Grijalbo.

Katz, V. (2009). A history of mathematics: An introduction. New York: Addison Wesley

Ruiz, A. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. San José: Editorial EUNED.

PERFECCIONAMIENTO DEL PROGRAMA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICAS VINCULADO A LA FORMACIÓN DE INGENIEROS INFORMÁTICOS EN LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

Julián Sarría González, Lázaro René Izquierdo Fábregas, José L. Permuy García
Universidad de las Ciencias Informáticas. Ciudad de la Habana Cuba
jsarria@uci.cu, lrene@uci.cu
Campo de investigación: Capacitación para el trabajo
Formación de profesores
Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se pretende presentar las conclusiones a las que se arribó mediante el análisis realizado en las diferentes componentes del Programa analítico de Probabilidades y Estadísticas para el plan de formación del Ingeniero Informático de la Universidad de las Ciencias Informáticas de Cuba. Mediante un experimento pedagógico realizado en tres brigadas, donde ilustraremos los resultados alcanzados realizado sobre en la orientación de tareas docentes y en la formulación adecuada de los objetivos, como categoría rectora del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje, dirigidos a elevar los conocimientos y habilidades del Ingeniero Informático en el cumplimiento de su objeto social, así como en su preparación integral interdisciplinaria.*
Palabras clave: programa analítico, probabilidades, tareas docentes, proceso de enseñanza y aprendizaje, interdisciplinaria

Introducción

Los objetivos generales de la formación profesional, que la institución de educación superior es la principal encargada de garantizar, no pueden concebirse al margen de los imperativos del desarrollo científico de la época, de la profesión y del sistema social donde este proceso de formación se desarrolla. Considerando algunos aspectos señalados por Talízina en su obra sobre psicología de la enseñanza (1988), actualizándolos y ampliándolos se diría que entre las exigencias derivadas del desarrollo científico-técnico de la época puede mencionarse, la necesidad que tiene el hombre contemporáneo de:

- Dominar un volumen esencial, básico de información que le permita adoptar y adaptarse a lo nuevo que vaya surgiendo.
- Dominar las Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones (TIC) aplicables a su campo profesional
- Haber desarrollado, al menos, habilidades de lectura e interpretación de información sobre campo profesional en una lengua extranjera de relevancia internacional

- Trabajar en equipos inter y multidisciplinarios donde pueda desempeñarse no solo en el role de líder sino también en el de subordinado y donde demuestre sus posibilidades de comunicación oral o escrita

Estas exigencias se recogen en los objetivos de formación y deben constituir valores agregados que responden a todo momento del proceso de formación y son responsabilidad de cada asignatura o disciplina en particular. En correspondencia a los objetivos del perfil profesional se infiere que la formación está dirigida al desarrollo de determinados métodos de trabajo, técnicas, procedimientos, modelos y cultura que responden a áreas específicas del saber de los cuales el estudiante puede apropiarse en el lapso de un curso, y dentro de este los contenidos se estructuran como asignaturas. La conformación del plan de estudio según asignaturas, tiende a atomizar la realidad en tantas parcelas como asignaturas haya que cursar. En la cual cada docente puede pensar que su asignatura es la rectora sino se comunica con el resto de los docentes que intervienen en la formación del mismo grupo de estudiantes. El sentido secuencial y estricto de contenidos de asignaturas, no siempre propicia que se analicen y den soluciones a los problemas profesionales desde distintas perspectivas. Si se quiere lograr el desarrollo de habilidades profesionales a largo plazo, no basta una estructuración de los contenidos en términos de asignaturas o de disciplinas que encierren sólo sus métodos sin que se establezca la relación inter o multidisciplinaria que requiere el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas profesionales.

Por lo tanto, se impone prever espacios de integración de los contenidos a estos fines. Espacios interdisciplinarios que pueden organizarse en torno a problemas profesionales. A la Universidad como institución, la interdisciplinariedad le retorna la cohesión interna que pudo haber perdido, o le permite corregir los posibles errores que acarrean los procesos de formación profesional excesivamente compartimentados y sin conexión entre las asignaturas o disciplinas. Lo interdisciplinario tiende a equilibrar la diferenciación del conocimiento en una multiplicidad de disciplinas que se vino produciendo desde comienzos del siglo XIX como resultado de la especialización que el proceso de industrialización requería (Anzola, 2005). La interdisciplinariedad ha estado presente siempre, solo que actualmente por el imperativo de la época, hay una mayor conciencia de su importancia y se ha teorizado al respecto para ponerla en acción en el plano curricular. Tradicionalmente los contenidos seleccionados por la lógica de la profesión, o sea la

formación profesional, se han reservado solo para los últimos períodos de formación y esto debe transformarse, dado que desde los primeros momentos debe comenzar el entrenamiento profesional. Primero, a modo de familiarización y anticipación al escenario donde habrá de actuar profesionalmente. Luego, a modo de reafirmar la vocación y progresivamente, a modo de irse apropiando de los modos de actuación propios de ese perfil y de irse entrenando en la resolución de tareas docentes que se aproximen a problemas profesionales.

El programa de la asignatura, es el documento que refleja la caracterización más importante de ella y constituye la descripción sistemática y jerárquica de los objetivos generales que se deben lograr, de los contenidos esenciales que procede aprender, de los métodos y medios de enseñanza y de los aspectos organizativos de dicha disciplina. Dada su esencia social, toda la actividad docente se realiza con el fin de lograr un egresado que cumpla determinadas funciones requeridas por la sociedad, lo que constituye el encargo social(Corral y Núñez, 1992). Este futuro profesionista debe ser capaz de enfrentarse a los problemas generales y básicos, existentes en la producción y los servicios, y resolverlos exitosamente, demostrando con ello su independencia y creatividad.

Los objetivos del programa determinan el modelo pedagógico del encargo social, los procesos y aspiraciones que durante el proceso docente se van conformando en el modo de pensar, sentir y actuar del estudiante y futuro graduado. Esos objetivos precisan futuro resultado de la actividad del estudiante, con su aprendizaje. El objetivo educativo del proceso docente, expresado en términos del aprendizaje del resultado que se espera que el alcance del estudiante se puede plantear por las acciones que se pretende que él realice(Colectivo de autores 1999). Se conoce que la actividad es inseparable de la actividad que le hombre posee del objeto de su trabajo y que es reflejado en su conciencia. Desde el punto de vista didáctico, la habilidad como elemento del contenido de la enseñanza, está estrechamente ligada al conocimiento, el otro elemento del contenido de la enseñanza. De ahí que, al formular los objetivos y expresar los modos de actuación del estudiante, se deban reconocer, no sólo las habilidades, sino también los conocimientos que, interrelacionados, nos permiten lograr los objetivos. La experiencia de seis cursos en que se ha impartido el Programa de Probabilidades y Estadística, y el análisis sistemático del colectivo de la asignatura de nuestra facultad, nos llevó al convencimiento de que resultaba necesario esclarecer, aún más, la habilidad y las acciones que de ella se derivan en la redacción de

los objetivos específicos de cada tema de manera que tanto el verbo como la descripción de las condiciones que se expresaran en el objetivo fueran suficientemente claras para una adecuada orientación de los estudiantes hacia el objetivo. En consecuencia en cada tema establecimos la modificación con uno o dos objetivos generales, y de ellos derivamos los objetivos específicos que entendimos convenientes a desarrollar en los diferentes tipos de clase. Por otro lado, advertimos que no habíamos logrado, a pesar de los esfuerzos en cada curso, un avance significativo en la vinculación de los contenidos de la asignatura con otras asignaturas de los años superiores que tributan, directamente, al perfil del graduado.

El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados alcanzados en la orientación de las tareas docentes y en la formulación adecuada de los objetivos, como categoría rectora del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje, dirigidos a elevar los conocimientos y habilidades del Ingeniero Informático en el cumplimiento de su objeto social, así como en su preparación integral interdisciplinaria, a través del perfeccionamiento de las indicaciones metodológicas del Programa de Probabilidades y Estadísticas orientado por el Ministerio de Educación Superior de Cuba, vinculado a la formación de Ingenieros Informáticos en la Universidad de las Ciencias Informáticas.

Características generales del programa de probabilidades y estadísticas para la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas

La estadística constituye una herramienta fundamental que ayuda a pensar y abordar los problemas que se nos plantean, en una forma consistente y exacta, formulando criterios de decisión en aquellos casos en que predominan situaciones de incertidumbre o indeterminación. (Batanero *et al*, 2005). Esta asignatura tiene por objeto la adquisición de un marco teórico que posibilite la comprensión y análisis de información numérica a fin de que se puedan realizar aplicaciones en su campo profesional.

Indicaciones Metodológicas Generales

Se debe lograr en los estudiantes el desarrollo del pensamiento abstracto de fenómenos de índole probabilístico, haciéndose énfasis en la interpretación práctica de los resultados. La iniciación en el estudio de los fenómenos y experimentos aleatorios constituye la principal dificultad a que se

enfrentarán los estudiantes en esta parte inicial, por lo que se hace necesario un enfoque claro y preciso de los conceptos básicos de espacio muestral, sucesos aleatorios y de las definiciones de probabilidad. Se realiza especial énfasis en lo relacionado con la probabilidad condicional, y se vinculará el cálculo de todas estas probabilidades en la mayoría de los casos con problemas prácticos y de la especialidad (Batanero, 2001).

Debe además, establecerse la conexión entre los conocimientos y habilidades de que suponen los contenidos de la Estadística y la Teoría de Probabilidades, incluyendo Variables Aleatorias y las Características Numéricas asociadas a estas variables. Debe quedar claro, al estudiarse las variables aleatorias y las funciones que las caracterizan, que estos nuevos conceptos representan una imagen generalizadora y que dan sistematicidad a los conceptos de espacio muestral, suceso y probabilidad, es decir, representarán el Modelo Matemático que servirá para expresar el comportamiento de los fenómenos aleatorios. (Batanero, 2001). Uno de los aspectos fundamentales será desarrollar habilidades en el cálculo de probabilidades a partir de estas funciones, tanto para el caso de variables aleatorias discretas como continuas. Se resaltarán de manera generalizadora los elementos relacionados con la independencia de variables. El estudio de las principales distribuciones o leyes probabilísticas constituye la base teórica de los métodos de inferencia estadística que serán estudiados en la asignatura y prácticamente de la disciplina. Se definirán las variables aleatorias que generan dichas leyes y se darán las propiedades que caracterizan a cada una de las leyes contenidas en el programa. Se hará hincapié en la identificación de cada una de las distribuciones probabilísticas y en el cálculo de probabilidades utilizando las tablas existentes.

Un ejemplo de la vinculación de los contenidos del programa con las tareas profesionales del ingeniero en ciencias informática.

Sistema integral de Baseball(SIB), producto informático realizado en nuestra facultad que fue utilizado en algunos equipos en la 47 Serie Nacional.

En este proyecto se aplican técnicas basadas en la toma de decisiones, dados los datos estadísticos de un jugador, tales como el promedio de bateo, errores cometidos bases robadas entre otros datos, se realizará un Scouting del jugador y poder llagar a conclusiones de cuáles son las

debilidades y ventajas del jugador para trazarle una estrategia de juego para ganar. Aplicándose técnicas estadísticas descriptivas como inferenciales.

Presentamos a continuación algunos ejercicios que se vinculan a la bioinformática y que son propios de la Bioestadística. Estas tareas docentes pueden ser programadas con el fin de construir un software estadístico.

1. Una reciente hipótesis es que el ejercicio lleno de énfasis es una medida preventiva efectiva para la subsiguiente muerte cardiovascular. Para probar esta hipótesis se tomó una muestra de 750 hombres con una edad de 50-75 años, los cuales corrieron durante 3 años al menos 10 millas a la semana dando como resultado final que sólo 64 hayan muerto de enfermedad cardiovascular.

a) Calcule un intervalo de confianza de 95 % para la incidencia de muerte cardiovascular en este grupo.

b) Si la tasa de muerte esperada por falla cardiovascular sobre los 3 años en hombres de 50-75 años después de varios estudios es del 10%, podemos concluir afirmativamente a esta hipótesis que derivan de esos datos

2. Realizamos una prueba clínica para evaluar el efecto de un tratamiento nuevo para el cáncer del esófago. Encontramos que de los 100 pacientes a los cuales se les aplicó un tratamiento estándar 6 sobrevivieron por un período de 3 años y 5 vivieron por un período de 5 años. Correspondientemente, de 47 pacientes que recibieron el nuevo tratamiento. Diez sobrevivieron por un período de 3 años mientras que 2 sobrevivieron por un período de 5 años.

a) ¿Existe alguna prueba de que el tratamiento nuevo es útil para la prognosis de 3 años del paciente?

b) ¿Existe alguna prueba de que el tratamiento nuevo es útil para la prognosis de 5 años del paciente?

c) Supongamos que una persona sobrevive por un período de 3 años. ¿Existe alguna evidencia para un efecto de tratamiento en la prognosis para los siguientes 2 años?

Conclusiones

1. En el perfeccionamiento que se viene realizando del programa de la asignatura Probabilidades y Estadística con la reformulación de sus objetivos, permite que el estudiante se sienta orientado hacia el desarrollo de las habilidades que corresponde a cada conocimiento, de manera que a través de su actividad dirigida y controlada por el profesor pueda alcanzar un aprendizaje de calidad. Esto fue resultado del experimento pedagógico aplicado a tres brigadas de cinco que recibieron la asignatura en el curso 2008-2009
2. La inclusión de ejemplos de aplicación de las probabilidades y de la estadística a problemas reales, que enfrenta el ingeniero en ciencias informáticas, en el desarrollo de las clases teóricas y teóricas-prácticas, y la utilización de las tareas docentes que aproximan profesionales en las clases prácticas y de laboratorio, y en la orientación del trabajo independiente, permite un alto grado de motivación en los estudiantes que se revierte en la adquisición de capacidades que rebasan el marco de los objetivos de la asignatura y que podrán manifestar creadoramente en su vida profesional, como aspiración de nuestro trabajo.
3. Las indicaciones metodológicas formuladas con alto grado de generalidad donde sólo se establecen los conceptos fundamentales, sus relaciones, y sus potencialidades de aplicación en cualquier campo científico, estimula la búsqueda de las relaciones interdisciplinarias y el desarrollo de la creatividad de los profesores, encargados de despertar con su labor pedagógica una alta motivación de los estudiantes, para que sean involucrados en un aprendizaje consciente y de independencia creciente.

Recomendaciones

1. Este trabajo deberá continuarse en su aplicación de manera que todas las clases se caractericen por tener una componente de referencia a los problemas prácticos de la profesión o de relación con las asignaturas del perfil informático.
2. Recomendamos que en el nivel de dirección metodológica de la universidad se promuevan las distintas vías del trabajo interdisciplinario con vistas a que el conjunto de asignaturas del plan de estudio puedan accionar en el propósito del desarrollo de altas capacidades profesionales.

Referencias bibliográficas.

Anzola, M. (2005) La interdisciplinariedad del conocimiento. La Matemática como eje articulador. Equisángulo, 1(1).

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal. Guimarães, Portugal.

Batanero, C. y Díaz .C (2007) Investigación en didáctica de la probabilidad. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, XII (44), 7-16.

Colectivo de autores (1999). Los objetivos como proyecto a lograr en la educación en Didáctica Universitaria. Centro de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES). La Habana. Cuba

Corral, R y M, Núñez (1992). Teoría y Diseño Curricular: una propuesta desde el Enfoque Histórico Cultural en Planeamiento Curricular en la educación superior. CEPES. La Habana. Cuba

García del Portal, J. (1990). Sobre La Enseñanza de la Ingeniería. El Informe Technion. Revista Cubana de Educación Superior. Vol. X, No.1

González, O. (1994). Currículo: diseño, práctica y evaluación Centro de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES) Universidad de La Habana. Cuba

Talízina, N.F. (1988). Psicología de la enseñanza. Moscú: Progreso.

CREENCIAS DE LOS PROFESORES EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN A TRAVÉS DEL DISCURSO EN EL AULA

Evelia Reséndiz Balderas, Analí Acevedo Hernández
Universidad Autónoma de Tamaulipas México
erbalderas@uat.edu.mx, analiacevedo@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Básico

Resumen. *Esta investigación se encuentra en proceso y aborda las creencias de los profesores en la enseñanza de la noción de variación a través del discurso en el aula en el sexto grado de educación primaria de una escuela en México. Es una investigación etnográfica efectuada en dos grupos de una escuela pública, urbana, en donde se realizaron observaciones de clases de matemáticas, específicamente sobre temas de variación, los cuales se encuentran dentro del Eje Temático Procesos de Cambio, nombre con el cual la Secretaría de Educación Pública denomina a estos temas, los cuales incluyen: razón, proporción directa, proporción inversa, porcentaje y elaboración y análisis de gráficas.*
Las clases fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas y agrupadas en categorías de análisis.
Palabras clave: creencias, variación, discurso

Introducción

El reporte de investigación Creencias de los profesores en la enseñanza de la noción de variación a través del discurso en el aula presenta el trabajo realizado en dos grupos de sexto grado de educación primaria de una escuela pública, urbana, en México.

El programa de estudios de Matemáticas del Plan y Programas de Estudios 1993 organiza los temas en torno a seis Ejes Temáticos: Los números, sus relaciones y sus operaciones; Medición; Geometría; Procesos de cambio; Tratamiento de la información; Predicción y el azar. El Libro de Texto agrupa las lecciones en cinco bloques. Los contenidos abordados sobre variación se encuentran dentro del Eje Temático Procesos de cambio, y giran en torno a la variación proporcional y no proporcional, porcentaje, lectura, elaboración y análisis de gráficas, así como nociones de razón y proporción.

Si asumimos que la interacción verbal se hace posible por la comunicación, el lenguaje aparece como un aspecto fundamental en el proceso de construcción y asignación de significados. Es necesario asignarle un lugar privilegiado al papel del lenguaje verbal y no verbal en la construcción del conocimiento y en las maneras como los maestros crean contextos comunicativos en el aula,

para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar (Aparicio y Cantoral, 2006; Forero, 2008).

El problema de investigación

Sabemos que en la actuación del docente frente al grupo y la toma de decisiones que hace en cada momento subyacen sus creencias, valoraciones y posturas, hacia el conocimiento, en este caso el variacional, y su enseñanza. Es por ello que intentamos contestar la siguiente interrogante ¿Cómo se manifiestan las creencias del profesor en la enseñanza de la noción de variación a través del discurso en el aula? Se tiene como Objetivo General de la investigación analizar las creencias de las profesoras en la enseñanza de la noción de variación a través del discurso en el aula en dos grupos de sexto grado de Educación Primaria en México.

Sustento Teórico

Los profesores aplican sus saberes en la cotidianidad de la clase, tienen una amplia gama de saberes acerca de la docencia, los cuales aplican como estrategias de sobrevivencia, construidos socialmente, con elementos pasados y presentes de cada uno y del contexto en que se desenvuelven (Mercado, 2002). Es importante analizar la didáctica empleada por los profesores desde la perspectiva de sus creencias ya que éstas tienen un impacto significativo en el desempeño del docente en el aula y en la educación, y, en consecuencia, también impactan el desempeño de los alumnos (Solar y Díaz, 2007), también se consideran autorreflexiones del profesor sobre la enseñanza, los estudiantes, el contenido y las estrategias que ellos aplican (Yanes, 2001). Las creencias pedagógicas tienen gran importancia, son la disposición interna que el profesor obtiene de modo no conciente, pudiendo permanecer o cambiar en ciertas situaciones particulares, institucionales o contextuales, y que son aplicadas como principios o supuestos personales, provenientes de la práctica (Salazar, 2006).

Por otra parte, podemos decir que el discurso en el aula es entendido como compartir, confrontar, comparar y por tanto construir conocimiento en interacción mediante el lenguaje usado socialmente, oral o escrito (Candela, 2001). En la presente investigación se analiza el discurso oral. El término análisis del discurso tiene muchas acepciones, en este trabajo se considera la planteada

como el estudio del uso real del lenguaje por locutores reales en situaciones reales (Van Dijk, 2007). Por otra parte, las matemáticas generalmente se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y como lenguaje especializado, sin embargo para obtener un mejor aprendizaje se requiere de la interacción, utilizando un lenguaje social concebido como discurso (Reséndiz, 2006).

Las ideologías son sistemas de creencias socialmente compartidas por los miembros de la colectividad, adquiridas gradualmente, pudiendo cambiar a lo largo de la vida, aunque conservando cierta estabilidad (Van Dijk, 2005). La investigación se apoya en la corriente sociocultural de Vygotsky, la cual sostiene que el desarrollo cognoscitivo es influido por el entorno sociocultural, por la mediación del maestro, compañeros y otros adultos con los que interactúa, siendo impulsores para alcanzar la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Por otra parte, la noción de variación partirá de la premisa básica de que en la naturaleza, lo único constante es el cambio, señalando que éste es independiente de la conciencia, pero que a través de ella se construye el conocimiento, pasando de lo sensorial a lo perceptual llegando a constituirse en un objeto abstracto (Reséndiz, 2004). También, de acuerdo a la autora entendemos la variación como la medida de los cambios y la descripción de sus cualidades residiendo en esa abstracción gran parte de las dificultades del docente para lograr que los alumnos la alcancen.

Antecedentes de la investigación

El *sistema de creencias* del docente afecta las percepciones de los alumnos sobre la matemática y el comportamiento de ambos, concluyendo que las creencias y percepciones docentes no son estáticas, cambian desde su etapa de estudiantes, prácticas pedagógicas y durante la experiencia docente (Vilanova, 2005).

Las creencias de los profesores observados muestran su apego y credibilidad en los libros de texto gratuitos, se guían por ellos, los usan y valoran, coincidiendo con investigaciones realizadas (Flores, 2005) en donde se señala que para trabajar el tema de la graficación en educación primaria los profesores se apoyan en los libros de texto.

Las investigaciones sobre *razón y proporción* en el nivel de educación primaria muestran explicaciones sobre la forma en que los alumnos construyen el conocimiento, a la luz de autores

como Piaget, estableciendo que los profesores manifiestan la necesidad de trabajar en el pensamiento proporcional cualitativo antes de abordar el algoritmo (Ruiz, 2008).

Se ha demostrado el importante papel del maestro en la mediación con los alumnos para trabajar la proporcionalidad, aunque los datos de algunas investigaciones sugieren que los conocimientos que los profesores de primaria poseen son precarios (Block, 2005), en tanto que otros autores dicen que es necesario que los maestros vinculen la enseñanza de conocimientos de razones y proporciones a sucesos de la vida cotidiana de los alumnos (Castro, 2005). En relación a ello encontramos:

M. A ver, vamos a imaginar que ustedes compran varios jugos, pero esos jugos tienen un precio, si ustedes compran varios jugos, ¿cuál sería el precio completo?, vamos a ver, ¿aumenta o disminuye?

Aos. Aumenta.

M. Vamos a ver, si compramos un frutsi (un jugo) a ver Alberto, ¿cuánto cuesta?

Ao. Cuatro pesos.

M. A ver, ¿cuánto pagarías por cinco jugos, uno para cada día de la semana?

Aos. Veinte pesos.

M. Bien, cuando aumenta la cantidad de cosas que compramos aumenta el precio, es la proporción. Ustedes en quinto grado vieron algo.

El uso de la noción de *variación* comprende varios temas, uno de ellos involucra la lectura de gráficas. Al respecto se realizó una investigación para detectar las interpretaciones que hacen los alumnos de primaria y secundaria sobre éstas encontrando que la mayoría identifica lo que cambia, hacen lectura de dato por dato y realizan descripciones cualitativas, pero no establecen relaciones covariacionales ni calculan los cambios entre variables, y, menos aún, usan las razones de cambio (Dolores, 2007).

Es importante considerar las interacciones sociales dadas en el aula entre alumno-maestro y alumno-alumno, en donde éstos tienen un papel activo, reflexivo participativo mediante la argumentación, el debate y la búsqueda de consenso (Candela, 2005). También se debe valorar la interacción de los estudiantes analizándola desde la perspectiva de Vygotsky con la importancia

que tiene la mediación para ayudar al cambio cognitivo desarrollando la Zona de Desarrollo Próximo (López, 2007)

Metodología

Se considera un modelo de investigación cualitativa basada en el método etnográfico, adecuado para conocer a los grupos en particular que fueron seleccionados y ver lo que la gente hace realmente, así como por permitir conocer sus actitudes, opiniones y creencias de la gente (Woods, 1987). Se utilizó mayoritariamente la observación no participante y en menor medida la observación participante, las clases que se videograbaron fueron posteriormente transcritas, categorizadas y analizadas a la luz de las preguntas de investigación y de los supuestos de investigación. Los datos se triangularon para tratar de eliminar errores. La muestra considerada fue la teórica, (Stubbs,1987). En esta investigación los grupos fueron de 34 y 35 alumnos.

Los segmentos analizados fueron los intercambios, es decir, la unidad interactiva mínima en la que el inicio **(I)** de A va seguido obligatoriamente de una respuesta **(R)** de B, y facultativamente, de otras emisiones, resultando la unidad mínima de **I,R** (Stubbs, 1987), similar al concepto **IRE**, en donde el maestro inicia la interacción **(I)**, el alumno responde **(R)** y el profesor evalúa la respuesta **(E)** (Cazden, 1991). El acceso al contexto se realizó dando un primer acercamiento a la escuela, dialogando con la Directora y estableciendo una visión general de lo que se pretendía hacer en la institución, señalando el propósito de la investigación, los grupos requeridos para efectuarla y el tiempo aproximado para llevarla a cabo, haciendo énfasis en la confidencialidad del uso de la información. Posteriormente se estableció contacto con las dos maestras que atendían a los grupos de sexto grado, llevando a cabo una plática similar y recibiendo la aceptación de éstas para ser observadas y grabadas sus clases en donde trabajara la enseñanza de la noción de variación.

Análisis de datos

Al inicio de las observaciones y grabaciones en los grupos se partió de la pregunta de investigación y de los supuestos teóricos, sin establecer categorías determinantes, sino centrando la observación de acuerdo a lo que se iba encontrando. Se trató de disminuir la paradoja del observador, es decir, la afectación producida en los sujetos participantes al ser grabados. Esto

mediante un acercamiento paulatino, favorecido por que la investigadora se presenta ocasionalmente a visitar los grupos, a platicar con ellos o a aplicar alguna estrategia didáctica. También se contó con otro elemento a favor: alumnos y maestras tienen cierta familiaridad con el hecho de ser grabados, debido a que participan en algunos programas educativos en donde esto es requerido. Aún así, el día de la primera grabación, al término de la clase la maestra expresó a la investigadora:

M. Fíjate que ahorita no participaron tanto los alumnos, yo creo que un poco es por la grabación, y por tu visita, pero yo creo que poco a poco se irán acostumbrando y participarán más.

Desde la primera sesión se trató de identificar a los alumnos que podrían convertirse en informantes clave, sabiendo que esto sería de mucha utilidad en la investigación. Al término de la primera grabación, la maestra mostró interés en saber si la investigadora había obtenido lo que necesitaba, como dice Woods (1987), esto sucede cuando se ha establecido una relación vigorosa durante la investigación, aunque en este caso la relación se había establecido previamente. Un ejemplo es éste:

M. ¿Si hubo lo que necesitabas?, ¿te sirvió?, ¿está bien?

Inv. Sí, la clase estuvo muy interesante, veo además que trabajan muy bien con Enciclomedia.

M. Sí, les gusta mucho. Yo les encargo que preparen clase, que hagan una presentación en power point y expongan ante el grupo.

Al término de la observación y registro de clases, durante diálogo informal con una de las maestras de los grupos investigados, se pudo apreciar lo que Salazar (2006) señala en torno a las creencias pedagógicas en cuanto a que se usan como principios o supuestos personales, provenientes de la práctica.

Las profesoras otorgan mucho crédito al libro de texto, ya que se observa que por él se guían y dirigen la clase. También demuestran sentir apoyo en el uso de Enciclomedia, observándose gran interés en los alumnos, como ocurrió con los resultados encontrados por López (2007) quien

señala que es un recurso más atractivo que el libro de texto. En general, el papel de recursos y materiales es de gran apoyo para los docentes (Paredes: 1998).

Se interpretaron las conversaciones tratando de no caer en seudo-análisis como basarse en: resúmenes, toma de posiciones, exceso o aislamiento de citas, posición circular de discursos y constructos mentales, falsa generalización, y localización de elementos (Antaki, 2003)

Conclusiones preliminares

Las formas discursivas usadas por las maestras en las clases con sus alumnos fueron la exposición, descripción, narración, y, en menor medida la argumentación. La interacción discursiva dada en clase coincide con la explicación de Cazden (1991) en cuanto a que se cumple en gran parte con la secuencia IRE.

La actuación de las maestras muestra sus creencias pedagógicas en cuanto a la secuencia didáctica que consideran adecuada: abrir el libro, leer título y propósito de la lección, indagar conocimientos previos, resolver problemas y/o ejercicios en forma individual, pasar a un alumno al pizarrón tradicional o al interactivo, pedir el consentimiento del grupo en cuanto a la corrección o falta de la misma, corroborar en Enciclomedia con el recurso de revisión que tiene, cierre de la maestra enfatizando algunos conceptos, reglas o principios. Utilizan una planeación general semanal, y otra para Enciclomedia.

Los alumnos mostraron mayor facilidad y éxito para: comprender y resolver ejercicios con variación proporcional directa, que la inversa, partiendo del valor unitario; lectura y análisis de gráficas, más que para su elaboración; y, presentaron algunas dificultades en la aplicación de la noción de razón.

A pesar de que la investigación no pretendía explícitamente esclarecer las creencias de los alumnos, no pudo soslayarse su presencia en el proceso educativo, reflejándose en su desempeño durante las sesiones observadas, mostrando, en coincidencia con el maestro, un gran reconocimiento al crédito de los libros de texto.

A las maestras se les facilita explicar la clase apoyándose en el recurso de Enciclomedia, en tanto que también a los alumnos les atrae y apoya en su proceso conceptual. Muestran familiaridad con

el manejo del equipo y recursos que aporta, resultado de la frecuencia con que es usado y la exploración que del mismo se ha hecho.

Referencias bibliográficas

Antaki, Ch., Billing, M. y Potter, J. (2003). El análisis del discurso implica analizar: Crítica de seis atajos analíticos. Athenea Digital (3), 14-35.

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. Revista de Investigación en Matemática Educativa. 9 (1), 7-29.

Block, D. (2005). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 675-680. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Candela, A. (1999). Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso. México: Paidós.

Candela, A. (2004). Importancia del Análisis del discurso en el Aula para la investigación Educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 807-812). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castro. A. (2005). Razones y proporciones en la vida cotidiana. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 289-294). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cazden, C. (1991). El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje. España: Paidós.

Dolores, C. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), 69-96.

El desarrollo cognoscitivo según Lev Vygotsky. (sf). Recuperado el 23 de marzo de 2009 de http://www.monografias.com/trabajos15/lev-vigotsky/lev-vigotsky.shtml

Flores, R. (2005). El uso de las gráficas en los libros de texto. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 495-501). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Forero, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. Universitas Psychologica. 7(3), 787-805.

López, I. (2007). El uso de computadora y cañón para el desarrollo matemático de fracciones en 4|° de Primaria. En C. Crespo (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20, 73-78. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mercado, R. (2002). Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños. México: Fondo de Cultura Económica.

Paredes J. (1998). Análisis etnográfico de los usos de recursos y materiales didácticos en educación primaria. Estudio de casos de dos centros. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Complutense de Madrid.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Comp.), Lecturas en Psicología del Niño, I (70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Reséndiz, E. (2004). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(3), 435-458.

Ruiz, E. (2008). Modelos de enseñanza sobre razón y proporción. En P. Lestón (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21, 289-298. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Salazar, V. (2006). Comprender los procesos escolares. Creencias, valores y emociones. Barcelona-México: Pomares.

Secretaría de Educación Pública. (1993). Matemáticas Sexto Grado. Educación Primaria. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (1993). Plan y Programas de Estudio 1993. Educación Básica. Primaria. México: Autor.

Solar, M.I. y Díaz C. (2007). El sistema de cogniciones y creencias del docente universitario y su influencia en su actuación pedagógica. Horizontes Educacionales 12 (1), 35-42.

Stubbs, M. (1983). Análisis del discurso. Análisis sociolingüístico del lenguaje natural. España: Alizanza Editorial.

Van Dijk, T. (2007). Estructuras y funciones del discurso. México: Siglo Veintiuno.

Van Dijk, T. (2005). Utopía y Praxis Iberoamericana y Teoría Social. Revista Internacional de Filosofía Iberoamericana y Teoría Social 29, 9-36.

Vilanova, S. et al. (2005). Concepciones de los docentes sobre la Matemática. Su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 425-430. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Woods, P. (1987). La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa. España: Paidós.

Yanes, M. (2001).Creencias de los profesores sobre la enseñanza de la lectura y la aritmética y la relación con el rendimiento. Tesis doctoral no publicada. Universidad de La Laguna, España.

A TRANSIÇÃO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR: A NOÇÃO DE RETAS E PLANOS EM IR^2 E IR^3

Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos, Christianne Coletti
UNIBAN Brasil
alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com, christianne.coletti@uiban.br
Campo de investigación: Pensamento geométrico Nivel: Médio e Superior

Resumen. *Os resultados apresentados referem-se à pesquisa sobre a transição Ensino Médio e Superior para as noções de Geometria Analítica. O referencial teórico da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Bosch e Chevallard (1999), a noção de quadro de Douady (1984), a noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001) e a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento de Robert (1997). As análises das relações institucionais foram efetuadas por meio de documentos oficiais e livros didáticos e as relações pessoais por meio de macro avaliações. Os resultados encontrados mostram uma crescente preocupação institucional com a articulação dos ostensivos e não ostensivos associados às noções de Geometria Analítica e uma tendência em deixar o tratamento do espaço IR3 para Ensino Superior.*
Palabras clave: geometria analítica, retas e planos, pontos de vista

Introdução

Vários problemas são encontrados por estudantes e professores na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior no Brasil, no que se refere ao ensino da matemática, o que pode ser constatado em diferentes macro-avaliações, como o SARESP (Sistema de Avaliação do Estado de São Paulo).

Para melhor identificar esses problemas, propomos uma pesquisa cujo objetivo é estudar a transição entre o Ensino Médio e Superior, em particular, quando se trata do estudo das noções de retas e planos nos espaços IR2 e IR3, no ensino das disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Observamos que no Ensino Médio se trabalha apenas com os conceitos de Geometria Analítica.

Para o Ensino Médio, novas propostas têm sido implementadas, que, em geral, demandam a aplicação de novas estratégias de trabalho. Essas mudanças tem tido influências de resultados de pesquisas recentes na área de Educação Matemática e por vezes os professores têm encontrado dificuldades em desenvolvê-las em suas aulas.

Para o Ensino Superior, quando consideramos a disciplina de Geometria Analítica, poucas mudanças são observadas, mas os novos livros didáticos de Álgebra Linear tendem a revisitar as

noções de retas e planos em IR2 e IR3, articulando essas noções para esses dois espaços com as noções de cálculo vetorial, antes de introduzir os espaços "mais abstratos".

Sendo assim, é importante observar que o papel mediador do professor é fundamental, uma vez que ele é o responsável pela elaboração de tarefas por meio de atividades, que permitam a articulação entre os diferentes conhecimentos.

Para isso, é necessário identificar o que podemos considerar como conhecimentos prévios para os egressos do Ensino Médio.

Escolhemos, assim, como referencial teórico da pesquisa a teoria antropológica do Didático de Chevallard (1996) e Bosch e Chevallard (1999) e as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 1992), de pontos de vista de Rogalski (1995, 2001) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert(1997). Apresentamos abaixo uma breve descrição do referencial teórico escolhido.

Referencial teórico da pesquisa

O referencial teórico central da pesquisa é a teoria antropológica do didático de Chevallard (1996) e Bosch e Chevallard (1999) que consideram que a atividade matemática se decompõe, como toda atividade humana, em certo número de tarefas. Para o cumprimento destas tarefas são desenvolvidas técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando desta forma lugar ao desenvolvimento das tecnologias ou discurso sobre as técnicas. Estas tecnologias são objetos de outras tecnologias que são identificadas como as teorias sobre as técnicas.

Além disso, do ponto de vista das representações, Chevallard (1996) enfatiza que a dimensão semiótica da atividade matemática não é um simples subproduto da conceituação. Ele insiste no fato que a utilização de palavras só pode ser compreendida a partir da idéia de instrumento semiótico. Para tanto, todo sistema de trabalho supõe a combinação de vários registros semióticos: oral, escrito e gestual.

Isso deixa evidente a necessidade de considerar as relações institucionais esperadas e existentes para o Ensino Médio, que, aqui, são analisadas em termos de tarefas, técnicas, tecnologias e

teorias em função dos ostensivos e não ostensivos possíveis para a sua solução. Os objetos ostensivos são as escritas, os símbolos, as palavras e os gestos mobilizados na atividade matemática. Por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou um esquema gestual que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade. E os objetos não ostensivos são noções, conceitos, idéias que aparecem associadas às técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, conforme Bosch e Chevallard (1999).

Para melhor identificar as possibilidades de trabalho com as noções de retas e planos no Ensino Médio e Superior apoiamo-nos na noção de quadro de Douady (1984, 1992), de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997) e de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001), pois as relações institucionais associadas a essas noções podem ser diferenciadas por meio de mudanças de quadros e de pontos de vista. Permitem ainda a escolha de diferentes níveis de conhecimento esperados dos estudantes para o desenvolvimento da própria noção e das outras noções em jogo nas tarefas.

A noção de quadro definida por Douady (1984) evidencia a dualidade dos conceitos matemáticos que, em geral, funcionam inicialmente como ferramentas implícitas e, depois, ferramentas explícitas da atividade matemática antes de ter status de objeto e ser trabalhado como objeto do saber. Destaca o papel das mudanças de quadro na atividade e na construção do conhecimento matemático e transpõe estas características do funcionamento do matemático ao domínio da didática, por meio das noções de dialética, ferramenta, objeto e jogo de quadros. Douady (1984 e 1992).

Para auxiliar a escolha do uso de diferentes quadros consideramos a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes de Robert (1997), pois ela permite verificar o nível de desenvolvimento do conhecimento prévio dos estudantes em relação a uma determinada noção matemática. Os níveis de conhecimento de Robert são: técnico, mobilizável e disponível.

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas numa dada tarefa. Exemplo: Resolver um sistema de equações lineares pelo método do escalonamento. O nível mobilizável corresponde a um início de justaposição de saberes de um domínio, podendo até atingir uma organização dos mesmos. Neste nível o caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente solicitado. Exemplo: Identificar o subespaço solução de um dado

sistema de equações lineares. O nível disponível corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações. De poder apresentar contra-exemplos, mudar de quadro e fazer relações. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, de questionamentos e de ser capaz de organizar diferentes noções. Exemplo: Identificar as equações de um sistema de equações lineares com retas, planos ou hiperplanos de IRn.

Para distinguir as diferentes representações de retas e planos em IRn consideramos a noção de ponto de vista introduzida por Rogalski (1995) que observa que: Dois pontos de vista diferentes sobre um mesmo objeto matemático são duas maneiras diferentes de enxergá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Neste sentido, enxergar um objeto em diferentes domínios é ter diferentes pontos de vista. Mas podemos ter vários pontos de vista em um mesmo domínio. (Rogalski, 1995, tradução nossa).

Metodologia da pesquisa

Para alcançar o objetivo proposto na pesquisa consideramos a seguinte metodologia:

Num primeiro momento, estudamos as relações institucionais esperadas via documentos oficiais: PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000); PCN+ Ensino Médio (2006); Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008); as relações institucionais existentes via livro didático de Barreto Filho e Xavier da Silva (2005) indicado no PNLEM/ 2005 e o caderno do professor (2008) distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo na sua rede de escolas.

Para verificar quais os traços sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio analisamos o resultado do SARESP (2005) para as questões associadas às noções matemáticas escolhidas para a pesquisa.

Análise e comentários das propostas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM e PCN+)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio é dada ênfase ao papel da linguagem da matemática enquanto instrumento de expressão e comunicação, ou seja, a Matemática é considerada como uma ferramenta que permite explicar o funcionamento do mundo por meio dos ostensivos escritos, orais, gestuais, visuais e táteis.

Quando se considera, mais especificamente, as noções de retas e planos no contexto da Geometria Analítica, constatam-se a proposta de passagem do quadro geométrico para o algébrico por meio da articulação entre figura geométrica e equação e vice-versa. Privilegia-se, assim, o ponto de vista cartesiano. Mas, também é prevista a introdução da noção de vetor por meio do ostensivo de representação gráfica, isto é, segmento orientado. Supõem-se a utilização do ostensivo de representação coordenada que possibilita a articulação de ostensivos orais, visuais e táteis para o espaço IR^3 , em que é possível dispor de um discurso que considere esses ostensivos e o uso de materiais concretos para melhor visualizar as condições de solução dos sistemas 2x2, 2x3 e 3x3. O discurso oral permite discutir e justificar as possibilidades de solução dos sistemas lineares articulando quadro algébrico e geométrico e pontos de vista cartesianos e paramétricos.

A proposta curricular do Estado de São Paulo

Assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo considera a Matemática uma linguagem que permite representar a realidade e, mais especificamente, permite expressar os fenômenos das Ciências Naturais.

Quando se considera especificamente o quadro da Geometria Analítica observamos que a nova proposta sugere o estudo das coordenadas por meio da localização em mapas e o estudo das simetrias e homotetias como extensão do que foi visto no ensino fundamental.

A grade curricular permite concluir que o desenvolvimento dos conteúdos deve privilegiar o estudo de retas e curvas no plano e o ponto de vista cartesiano uma vez que não existe nenhuma referência ao estudo matemático da noção de vetor.

Análise de um livro didático do Ensino Médio e do Ensino Superior e do caderno do professor

O livro didático é atualmente uma das ferramentas mais adaptadas para analisar as relações institucionais existentes para o ensino de uma determinada noção, pois são avaliados pelo

Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) sob a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que segundo nosso referencial teórico corresponde à relação institucional esperada. Além disso, escolhemos analisar também o caderno do professor, pois ele permite identificar a relação institucional existente para uma determinada noção quando se considera a nova proposta do Estado de São Paulo.

A análise do livro didático apresentado e do caderno do professor foi estruturada em torno das seguintes questões: - A abordagem das noções de pontos, retas e planos se restringe aos espaços IR^2 e IR^3? - Quais os pontos de vista trabalhados no Ensino Médio e Superior? - Que ostensivos são relacionados aos pontos de vista considerados? - Quais as articulações levadas em conta e se elas possibilitam uma mudança de quadros? - Quais os conhecimentos prévios esperados dos estudantes e qual o nível esperado para esses conhecimentos segundo definição de Robert (1997)? - Há um discurso tecnológico, isto é, um discurso que acompanha as técnicas desenvolvidas nas tarefas apresentadas como exemplos para os estudantes?

Análise da obra: Matemática aula por aula – Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva – volume único – 2005

A obra de Barreto e Silva (2005) apesar de indicada pelo PNLEM, não contempla todas as propostas dos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, principalmente no que se refere à articulação de conhecimentos, ou seja, cabe ao professor identificar os conhecimentos prévios e propor atividades que podem ser trabalhadas em conjunto com a noção de retas. Nesse caso, a obra pode auxiliar tanto estudantes como professores a questionarem sobre tecnologias e teorias que justificam as técnicas nela apresentadas.

Mesmo iniciando com uma revisão da geometria plana desenvolvida no Ensino Fundamental, os autores pouco aproveitam para justificar o trabalho algébrico apoiando-se no quadro geométrico como propõe Douady (1984). A articulação de pontos de vista cartesianos e paramétricos não é trabalhada na obra, pois não se introduz a noção de vetores. O ponto de vista cartesiano é desenvolvido utilizando diferentes ostensivos de representação, mas falta um discurso que justifique sua necessidade. A obra se centraliza principalmente nas representações das noções de retas em IR^2, permitindo um trabalho mais associado aos procedimentos de determinação dessas representações o que tende a proposição de tarefas que privilegiam o nível técnico.

Análise da obra: Matemática –Luiz Roberto Dante – volume único – 2005

A obra de Dante (2005) é considerada como inovadora pelo PNLEM, pois o autor segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio preocupando-se em integrar de forma lógica e harmônica os conteúdos, retomando-os quando possível nos diferentes capítulos. A articulação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos é acompanhada de um discurso tecnológico que justifica a necessidade de novas técnicas e representações. Além disso, as tarefas resolvidas e propostas aos estudantes, apesar de exigirem nível técnico, são classificadas como mobilizável e disponível em relação às noções de retas e outras noções em jogo.

Ao desenvolver técnicas e tarefas utilizando os conhecimentos prévios supostos disponíveis, o autor apresenta um discurso tecnológico para justificar essas técnicas que permite estender o campo conceitual dos estudantes, mesmo para aqueles que tenham alguma lacuna, que poderá ser preenchida no desenvolvimento do curso pelo professor.

Análise do caderno do professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2008)

No caderno do professor verificamos que a abordagem proposta considera apenas o plano IR^2 e consequentemente limita o estudo de retas ao plano. Dessa forma, o ponto de vista privilegiado é o cartesiano. Ressaltamos a articulação com a noção de função afim que é uma recomendação dos PCNEM.

Análise da obra: Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial – Paulo Boulos e Ivan de Camargo – Ensino Superior – 2005

O estudo da Geometria Analítica é considerado apenas para o espaço V^3, para a obra considerada, apenas as noções de geometria euclidiana e determinante de uma matriz são consideradas como conhecimentos prévios disponíveis pelos autores. Nenhuma articulação com os conhecimentos de Geometria Analítica estudados no Ensino Médio é considerada nessa obra.

Uma breve análise das relações pessoais esperadas dos estudantes via SARESP 2005.

A Análise das relações pessoais esperadas dos estudantes foi feita nessa pesquisa via SARESP 2005. Observamos que em 2005 dava-se uma grande ênfase às questões de Geometria Analítica,

pois encontramos oito questões que demandavam: a distância entre dois pontos, as coordenadas do ponto médio, a área de um triângulo, a equação geral de uma reta, verificar se um ponto pertence a uma reta, a passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana, a posição relativa de uma reta e determinar o centro e o raio de uma circunferência dada sua equação. É importante observar que, nestas questões, o nível de conhecimento esperado dos estudantes variava entre o mobilizável e o disponível.

Considerações Finais

As análises das relações institucionais feitas neste estudo sugerem que na transição entre o Ensino Médio e Superior, no que se refere às noções de retas e planos, existe uma lacuna na articulação entre plano e espaço. É preciso observar que IR^2 e IR^3 são espaços de naturezas distintas. Um elemento pertencente ao IR^2 é um par enquanto um elemento pertence ao IR^3 é uma terna, o que supõe um discurso que justifique as regularidades e diferenças entre estes dois espaços. Ressaltamos a relevância do desenvolvimento das noções e técnicas associadas ao estudo da geometria por meio de suas equações a partir de IR^2 e IR^3 o que pode favorecer a visualização e compreensão das noções em jogo e a negociação de significado entre professor e aluno.

A lacuna aqui observada está associada à proposta de análise de documentos. Essa lacuna pode ser trabalhada pelo professor por meio de comparações entre os diferentes materiais propostos para o Ensino Médio e Superior.

Referências bibliográficas

Barreto Filho, B. & Xavier da Silva, C. (2005) Matemática: aula por aula. São Paulo: FTD.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs, Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-123.

Boulos, P. & Camargo, I. (2005) Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial. São Paulo: McGraw-Hill.

Brasil. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. (2005) Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005 / Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Brasil. (2006). Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique Petitx, 42, 33-57.

Dante, L.R. (2005) Matemática: livro do professor. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). .Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). Notas manuscritas do seminário em São Paulo. Brasil.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady En Actes de la journée en hommage à Régine Douady (pp. 13-30). França : Paris.

São Paulo (2008) Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2005) Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP. São Paulo: SEE. Acesso em: 21/03/2010, Disponível em: http://saresp.edunet.sp.gov.br/2008/

São Paulo. (2008) Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio – 3ª série, 1º bimestre. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

ANÁLISIS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE UN ERROR ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES Y PROFESORES

Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann
Universidad Panamericana Campus Guadalajara México
ceccius@up.edu.mx
Campo de investigación: Pensamiento algebraico
Formación de profesores
Nivel: Medio

Resumen. - *La investigación tiene dos fases:*

1) *Se plantea a los estudiantes de primer ingreso a la Universidad Panamericana, Guadalajara, México la simplificación de la expresión algebraica* $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$ *; analizándose las respuestas equivocadas con su posible origen.*
2) *Se hace un estudio con 7 profesores de educación media básica y media superior, en el cual, se les presenta la simplificación errónea (a la izq.)* $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = z^3$ *con la consigna de mencionar el origen del error y cómo le ayudarían al alumno.*

Alumnos cometen errores de muy diverso origen, y los profesores encuestados no siempre analizan a profundidad el origen del error cometido por este alumno.

Palabras clave: errores algebraicos, formación de profesores

Introducción

En el contexto de un examen de ubicación de matemáticas de 276 alumnos de primer ingreso a las carreras Empresariales de la Universidad Panamericana (campus Guadalajara), se plantea la simplificación de la expresión algebraica: $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$.

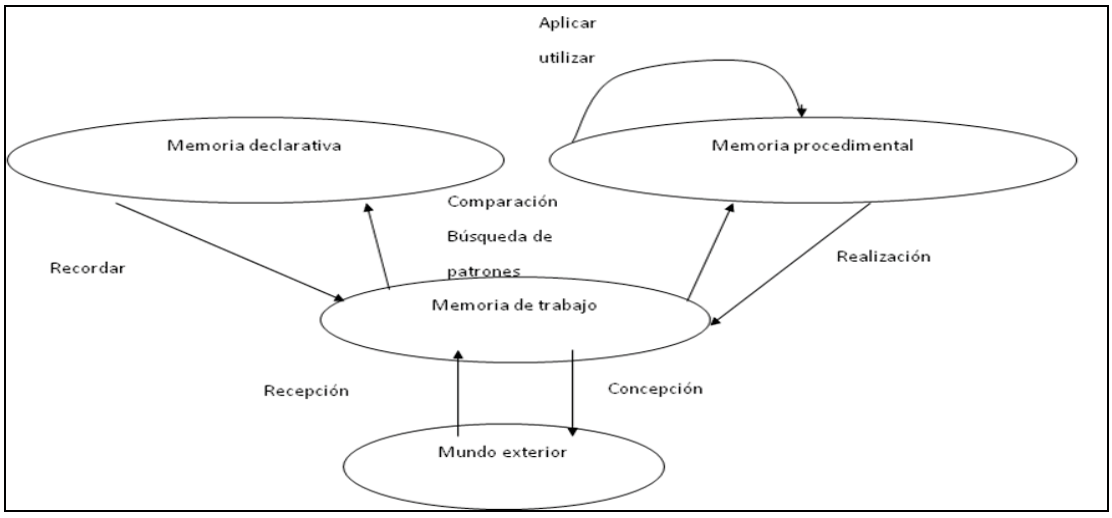
De los alumnos se esperan dos tipos de simplificación, que en ambos casos implican la aplicación de leyes de exponentes.

; $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} = z^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = z^{\frac{3}{3}} = z$ $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{\frac{z^4}{z}} = \sqrt[3]{z^3} = z$

Al reconocer, que sólo un 9% de los alumnos simplificó correctamente la expresión algebraica, se vio la necesidad de profundizar en varios aspectos, con la intención de acercarse a una forma adecuada de ayuda a los alumnos con error: Entender el fenómeno desde adentro, desde la posición del estudiante: por lo cual se analizan procedimientos realizados por los alumnos en

busca de las diferentes simplificaciones con error. ¿En qué lugar de la memoria se generan los errores? ¿Cuáles son los errores más comunes y cuál es el origen de ellos?

A modo de dar una pequeña explicación simplificada, se interpreta el modelo respecto al ejercicio a simplificar: En primera instancia, un alumno debe percibir del mundo exterior el ejercicio que se le presenta. En la percepción se pueden originar errores, cuando el alumno no percibe el ejercicio con todo detalle. En el ejercicio en cuestión, un error posible sería la percepción del índice del radical (por su posición elevada) como exponente, lo cual llevaría a la aplicación de leyes de exponentes y radicales equivocadas. La memoria de trabajo se encarga de buscar en la memoria declarativa y la memoria procedimental patrones conocidos, ejercicios similares antes resueltos, un algoritmo o recordar alguna regla (en este caso probablemente de exponentes o eventualmente de manejo de fracciones) en la que tiene que establecer comparaciones de lo conocido con el ejercicio nuevo planteado. Al sacar información de la memoria declarativa, podría generarse, por ejemplo, el error de confusión con respecto a un exponente fraccionario, o sea, confundir el numerador con el denominador de dicho exponente fraccionario. Al aplicar las reglas de los exponentes, se puede incurrir en un error de la memoria declarativa. Las leyes de exponentes debieron haberse guardado con características generales y específicas, es decir con todo detalle. Un error posible sería entonces la aplicación de una regla equivocada. Otro error posible se genera en la memoria procedimental cuando un procedimiento se aplica "automáticamente", por ejemplo los esquemas de "tachado", a los que se hará alusión posteriormente.



Modelo de la memoria de Anderson (1984 en Nolte, 1991)

En la literatura se han clasificado errores como errores en la percepción de la información y en el manejo de la información (Radatz, 1985), lo cual para la investigación no es suficiente y con más detalle se comentan por Nolte (1991), Malle (1993) y Tietze (2000), quienes los analizan en virtud de encontrar el posible origen del mismo. Malle (1993) hace alusión a esquemas de "tachado" como aplicación de esquemas inadecuados que pueden ser útiles en ciertos casos, pero que no lo son en otros. Los errores por esquemas de "tachado" pueden estar relacionados con ejemplos muestra como: $\frac{a \cdot b}{a} = b$ en el cual se "tacha" literalmente la "a" del numerador con la "a" del denominador. Cabe mencionar que el esquema de "tachado" que utilizan los alumnos en el ejercicio de simplificación no se ha encontrado mencionado en la literatura, ya que los alumnos "tachan" signos de operación, o sea, los signos radicales con sus índices. Otros errores están relacionados con la aplicación de leyes de exponentes y radicales, en la confusión de leyes (intercambiar numerador y denominador en exponentes fraccionarios), y muchas veces, por no tener la metacognición suficiente, o por "guardar" leyes sin sus correspondientes características específicas (por ejemplo: $A^n \cdot A^m \neq A^{m \cdot n}$) ((Nolte, 1991); (Malle, 1993); y (Tietze, 2000)).

Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: ¿Muestran los profesores de matemáticas encuestados las competencias requeridas para un buen entendimiento/análisis del error cometido por el alumno? ¿Cuál es la estrategia de los profesores encuestados para ayudar al alumno?

Dentro de las competencias de un profesor se menciona la capacidad de analizar las respuestas erróneas de los alumnos en el sentido de encontrar las posibles causas u orígenes de los errores, para poder dar una "terapia" adecuada al alumno (Helmke, 2005). La calidad del proceso enseñanza-aprendizaje depende de la forma en que el profesor aborda e interpreta los errores cometidos por sus alumnos.

Metodología

Se planteó a 276 alumnos de primer ingreso el ejercicio de simplificación: $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}$, en el contexto del examen de ubicación de matemáticas (carreras Empresariales) en la Universidad Panamericana (campus Guadalajara), en julio de 2009. Este ejercicio fue uno de 42 ejercicios que se plantearon.

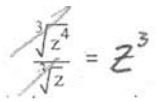
Los alumnos tenían tiempo ilimitado para responder a los ejercicios sin el uso de calculadora. En este examen de ubicación se miden destrezas, ya que para el desarrollo de competencias posteriores en las carreras Empresariales correspondientes, se requiere de un mínimo de conocimiento matemático (nivel secundaria: resolución de ecuaciones, manejo de expresiones algebraicas, operaciones fundamentales con fracciones y decimales).

Se llevó a cabo una estadística de la incidencia de error, en la cual no se distinguió entre ejercicio no resuelto o equivocado. Al encontrar un porcentaje del 9% de acierto, se ve la necesidad de hacer una investigación cualitativa, en cuanto al análisis de las respuestas equivocadas de los alumnos.

Se reportan los diferentes casos de error (en forma escaneada), para la reconstrucción e interpretación de las posibles causas de error, basados en un análisis detallado de los procedimientos de los alumnos.

Ante la incidencia tan grande de error en este ejercicio, fue importante cuestionarse si los profesores tienen las competencias suficientes para encontrar y analizar la causa de los errores. Se les presenta a 7 profesores (de secundaria y preparatoria) una simplificación equivocada, para que comenten por escrito (comentarios escaneados):

a) ¿Cuál es el error del alumno?
b) ¿Cuál es el origen del error?
c) ¿Cómo le ayudarías al alumno?



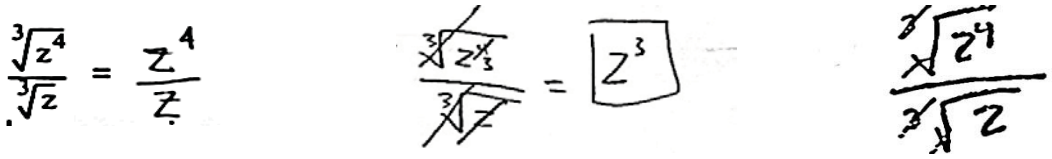
Resultados y Discusión

Debido a las características de la investigación se pensó que era conveniente mostrar los resultados obtenidos junto con la discusión.

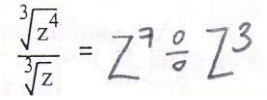
I. En las respuestas de los alumnos se encontró que muchos alumnos no contestaron al ejercicio. En las respuestas equivocadas se encontraron procedimientos con origen y causa diferentes, así como procedimientos diferentes con causas semejantes.

1. En las tres respuestas posteriores se intuye, que los alumnos visualizaron en primera instancia la fracción y que cometieron un error de sobregeneralización. “Se puede simplificar todo lo

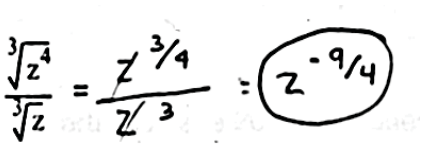
que es igual en el numerador y denominador". Falta el conocimiento que el principio fundamental de las fracciones establece que tienen que ser factores y que los signos de operación como los radicales y sus índices no son factores (Memoria declarativa). Los alumnos aplican un esquema de "tachado" (Memoria procedimental, un procedimiento hecho sin reflexión), que puede provenir de los ejemplos muestra antes mencionados. Cabe mencionar, que en este caso no se puede analizar, si el alumno sabe o no, las leyes de exponentes y radicales, ya que no las utiliza (excepto en la simplificación final). Este tipo de error tiene la mayor incidencia.



2. En el procedimiento a continuación, es posible que el alumno haya percibido el índice del radical como exponente (Percepción de la información), ya que suma los "exponentes" 3 + 4 = 7. No es consistente, ya que no "suma" el índice del radical con el exponente 1 de la z en el denominador (Memoria declarativa, desconocimiento del exponente implícito). Aunque interpreta la fracción como una división no acaba el ejercicio.

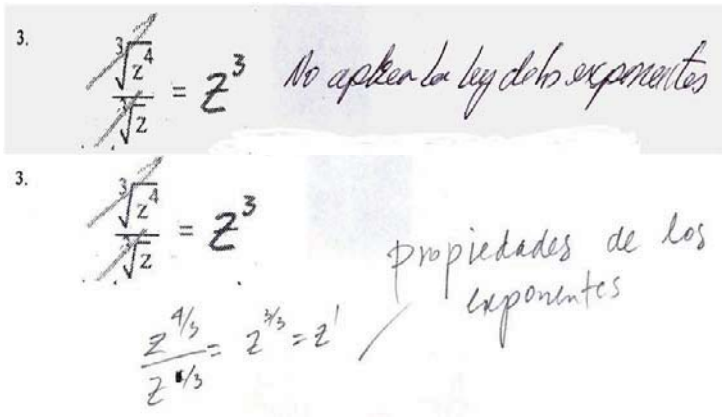


3. El alumno confunde cuál es el numerador y cuál el denominador, al cambiar la notación del radical por exponentes fraccionarios, para poder aplicar leyes de exponentes. Su procedimiento posterior no lo especifica, o sea, cabe la posibilidad de haber aplicado correctamente la ley de exponentes en la división, ya que $\frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{9}{4}$; o la posibilidad de haber equivocado la ley cambiando el signo del exponente del denominador $\frac{3}{4}(-3) = -\frac{9}{4}$. En el planteamiento del ejercicio no se estuvo consciente de esta posibilidad.

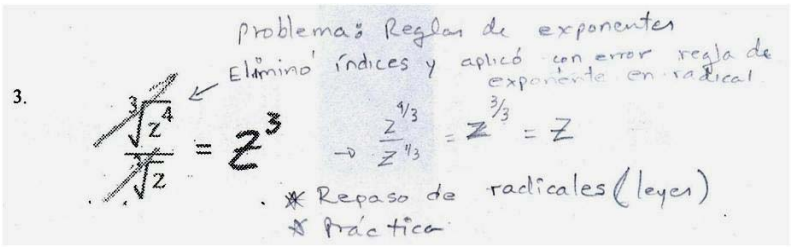


II. Las respuestas (escaneadas) de los profesores (que hablan por sí solas) se agruparon, para dar un seguimiento más eficiente, aunque en algunos casos se ven características específicas de un profesor.

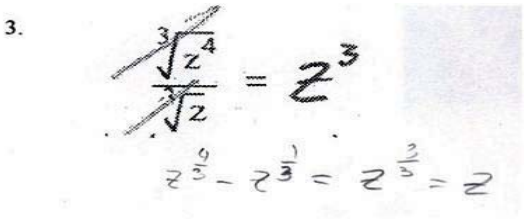
1. Varios profesores manifestaron que la problemática de debía a una aplicación equivocada de las leyes de exponentes. Así mismo consideran, por un lado, que resolver correctamente el ejercicio y hacer un repaso de las leyes de exponentes o radicales sería la forma adecuada de ayudar a los alumnos.



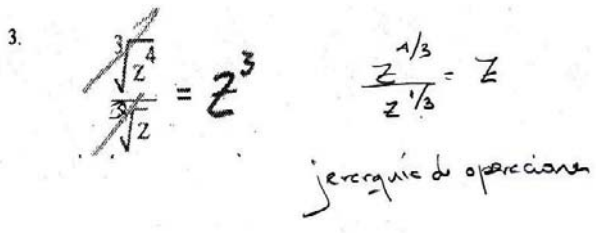
2. Un profesor manifiesta que hubo una "eliminación" de los índices (no hace referencia a los radicales) y que aplicó con error regla de exponentes con radical.



3. Otro profesor dio como única respuesta la resolución del ejercicio con un error en la forma de notación. Se restan los exponentes, pero no las bases con sus respectivos exponentes.

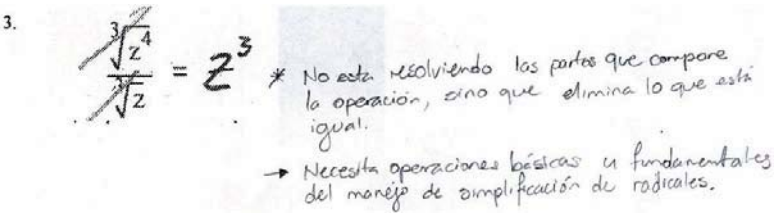


4. El quinto profesor interpretó la problemática en la concepción de jerarquía matemática, analizando a fondo, podría ser una de las causas, ya que si el alumno interpretara que es primero la radicación y posteriormente la división, llegaría eventualmente a la conclusión de que requiere de las leyes de los exponentes o radicales. Esta problemática tendría que ver con la estructura de los términos algebraicos.

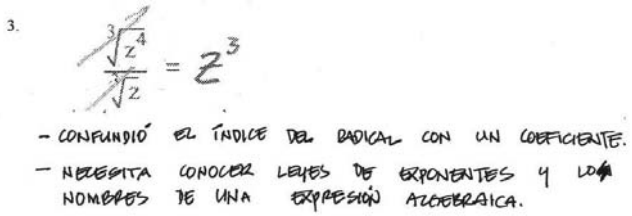


5. Es posible que este profesor se acercara a una de las causas, ya que comenta, que el alumno elimina lo que es igual (en el numerador y denominador). Aunque posteriormente considera

que se tienen que revisar las operaciones fundamentales en radicales. No especifica en qué sentido.



6. El profesor indica que el error del alumno es una confusión del índice del radical con un coeficiente (puede ser que se refiera a un factor), aunque no hace alusión al radical mismo. Para él también se requiere de un repaso de las leyes de exponentes, y conocimiento de las partes de una expresión algebraica.



Conclusiones generales

En primer lugar parece importante aclarar, que los errores de los alumnos corresponden a un pensamiento específico, no a desconocimiento total de las matemáticas. Cada alumno (con respuesta equivocada diferente) requiere de una terapia distinta, según la causa del error. Profesores que no pueden distinguir entre las diferentes causas de error, no pueden brindar una ayuda eficiente a los alumnos. En el caso de este ejercicio la problemática del alumno no se debe (al menos no se puede determinar) a una deficiencia en las leyes de exponentes, así que probablemente la resolución correcta y el repaso de leyes de exponentes no hará que el alumno comprenda su error y pueda cambiar concepciones equivocadas. Pocos profesores descubrieron la problemática que subyace a la simplificación equivocada, “elimina los índices”, “elimina lo que es igual” y “confunde el índice del radical con un coeficiente”. De los dos tipos de resolución, ninguno de los profesores encuestados resolvió el ejercicio de la segunda forma. Esto podría indicar cierta limitación en la diversidad de procedimientos posibles. Ante estos resultados hay mucho por realizar: investigar a fondo las concepciones de los alumnos con respecto a sus resoluciones e investigar en profesores con profundidad el conocimiento de las concepciones de errores de alumnos que tienen.

Referencias bibliográficas

Eccius, C. (2008). Mathematikdidaktische Fehleranalysen zur Schulalgebra. Saarbrücken:VDM Verlag.

Flick, U. (2005). Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung. Reinbek: Rowohlt.

Helmke, A. (2005). Unterrichtsqualität; Erfassen, Bewerten, Verbessern. Berlin: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Malle, G. (1993). Didaktische Problema der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Mayring, P. (2002). Einführung in die Qualitative Forschung. Weinheim: Beltz Verlag.

Nolte, M. (1991). Strukturmomente des Unterrichts und ihre Bedeutung für das Lernen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Nolte, M. (2000); Rechenschwächen und gestörte Sprachrezeption. Beeinträchtigte Lernprozesse im Mathematikunterricht und in der Einzelförderung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Padberg, F. (2005). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. München: Spektrum, Elsevier GmbH.

Radatz, H. (1985). Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht, Mathematikunterricht 6, 18-24.

Tietze, U., Klika, M. y Wolpers, H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekudarstufe II, Band 1. Braunschweig: Vieweg.

RECONOCIMIENTO DE LA IDENTIDAD DE LA VARIABLE ALGEBRAICA EN ESTUDIANTES BRASILEÑOS Y MEXICANOS

Andrea López, Beatriz Moreno, Márcia Souza
UAQ México
COBAQ México
UFP Brasil
allopine@uaq.mx, betthy_moreno@hotmail.com,mszfonseca@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo se indaga si existe alguna diferencia entre estudiantes brasileños y mexicanos en el reconocimiento de: a) la identidad de la variable en diversas expresiones algebraicas y b) los tres usos de la variable (Ursini y Trigueros, 2004). Para lograr este objetivo, se elaboró un cuestionario que examina las posibles interpretaciones de la literal bajo diferentes condiciones (grado de la expresión, signos y coeficientes de la literal, entre otros). Se aplicó a 60 estudiantes de bachillerato, 30 de cada país. Los resultados muestran que no existe una diferencia significativa (prueba t de Student) entre estudiantes mexicanos y brasileños. Los jóvenes omiten el principio de identidad de la variable y tienen dificultad para reconocer el papel de la literal en una expresión, representando un obstáculo en la comprensión del contenido matemático.*
Palabras clave: modelo 3UV, variable, principio de identidad, bachillerato

Antecedentes

Uno de los problemas que se observan con mayor frecuencia en los estudiantes de bachillerato es la dificultad en el manejo de expresiones algebraicas, este manejo lleva implícito la interpretación, simbolización y operación de los términos implicados en la expresión, así como la coordinación entre estas operaciones.

Las dificultades para tratar la variable algebraica, pueden tener origen en los usos de la variable (3uv: tres usos de la variable) como ya lo han señalado Ursini y Trigueros (2004, Trigueros, Ursini y Lozano, 2000). Otro elemento que muestra el uso inadecuado de la variable puede tener su referente en la omisión del principio lógico de identidad como lo muestran investigaciones anteriores (López y Moreno 2006).

Marco teórico

El modelo 3UV, es un modelo propuesto por Ursini y Trigueros (2001), fundamentalmente como un elemento a considerar en la enseñanza del álgebra, también ha manifestado su utilidad en el diseño tanto de materiales como de estrategias de enseñanza. En este modelo se asume que la variable aparece generalmente en los contenidos de algebra como incógnita, como número generalizado o como variable en relación funcional. Como señalan estas autoras, cada uno de estos usos implica un nivel diferente de abstracción para su manejo y su conceptualización requiere de ciertas capacidades básicas.

Estas capacidades de manera general incluyen reconocer, interpretar, sustituir, determinar, identificar a la variable cuando ésta se presenta en forma de incógnita, reconocer patrones, interpretar la variable simbólica, desarrollar la idea de método y manipular el símbolo cuando la variable se presenta en forma generalizada y finalmente reconocer correspondencias, determinar valores y rango tanto para la variable dependiente como independiente, reconocer variaciones y finalmente expresar la relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica.

Cuando el estudiante se ve frente a una expresión algebraica debe tomar en cuenta, cuando menos dos aspectos elementales que le permitan manipular la expresión: 1) bajo qué categoría se presenta la variable, y 2) asumir que A=A, principio que debe contextualizar la expresión.

El principio de identidad (A=A) parece ser fundamental en la comprensión del contenido matemático, "….la ley de la identidad, es el axioma más básico. Un axioma es una verdad evidente por si misma" (Dunkley, 2005), y que además es absoluto, desde diversas perspectivas filosóficas se afirma su veracidad e incuestionabilidad. En congruencia con esta posición la perspectiva psicogenética asume que los jóvenes acceden a dicho principio como producto del desarrollo cognitivo (Piaget, 1985). Esta misma perspectiva, desde donde se constituyen los planes y programas de estudio, tiene como sustento al principio de identidad.

A lo largo de la historia se muestra cómo desde los griegos se configura un principio, el principio de identidad, cual si fuera único e incuestionable, con Aristóteles (384-322 a.C.) se establece el antecedente de dicho principio lógico, Euclides (300 a. C.), discípulo de Aristóteles, sienta las bases a partir de los "Elementos", de la matemática de los siguientes dos milenios, con Descartes (1596-

1650), Leibniz (1646-1716) y Kant se ratifica y revalida un estatus de la razón y la lógica que parecen no dar pie a una reconfiguración de dicho principio.

Sin embargo, atendiendo a posturas filosóficas como la falibilista y dialógica (Ernest (2004), este principio puede y debe ser revisado.

Se argumenta (Heidegger, 1964, Horkheimer y Adorno, (2004), Diéguez, 1997) que dicho principio de identidad, configura una forma de pensar el mundo cual si fuera única. Esta forma de pensar el mundo y la realidad, traza y dispone, en la disciplina matemática, la manera en la que deben abordarse los contenidos que se enseñan en la escuela. Sin embargo otras posturas filosóficas se direccionan hacia otras interpretaciones de este principio, señalando sus convencionalidad y su construcción social. Particularmente Heidegger (1964) considera que las matemáticas configuran una forma de ver y conceptuar el mundo, no son la única forma de pensarlo, ello implicaría necesariamente abrir espacios en el ámbito educativo donde la multiplicidad de interpretaciones podría observarse y tomarse como parte de la cotidianeidad en la vida de los estudiantes.

Diéguez por sus parte, hace referencia a como el principio de identidad es la piedra angular de todo sistema de pensamiento, que es capaz de hacer hablar lo inerte y que tienen como guardián estático a la Lógica" (Diéguez, 1991:p.18) haciendo referencia a la inmovilidad y estaticidad de una forma de estructurar a dicho principio. Heidegger en tanto pregunta *"¿cómo pretendemos saber algo acerca de la verdad propia de la cosa, si no conocemos la cosa misma para poder decidir que verdad puede y debe corresponderle?"* (Heidegger, 1964: p33). Estos fragmentos muestran la imposibilidad de asignar propiedades absolutas a un principio que puede tener diferentes interpretaciones, aún en el campo de la matemática y que permitirían así a los estudiantes, una heterogeneidad de explicaciones a la hora de trabajar los diferentes contenidos de la disciplina.

En trabajos anteriores, realizados en instituciones de educación media superior en México, hemos encontrado que una gran parte de los estudiantes omiten el principio de identidad de la literal, principalmente, cuando ésta se presenta en varias ocasiones en una expresión algebraica como por ejemplo: 3 + a + a = 5 + a (López y Moreno, 2006). A partir de ello surge como interrogante, si esta dificultad se presenta sólo en la población de México o si dicha problemática se observa en otras sociedades. Dadas las facilidades de intercambio académico, entre México y Brasil, decidimos emprender una indagación que permitiera responder a esta interrogante.

Objetivo

Por tal motivo en este trabajo se planteó como objetivo determinar si existe alguna diferencia entre los estudiantes brasileños y mexicanos en el reconocimiento de la identidad de la variable en diversas expresiones algebraicas, así como de los tres usos de la variable (3UV).

Metodología

Para lograr el objetivo, se elaboró un cuestionario que interroga sobre posibles interpretaciones de la literal bajo diferentes condiciones.

El cuestionario fue elaborado a fin de determinar si los estudiantes podrían reconocer los 3UV, es decir si podrían identificar el papel de la variable ya sea como incógnita, como número generalizado o en relación funcional. Así mismo se indagó si podrían reconocer que la literal, no obstante su aparición en más de una ocasión en la expresión, tendría el mismo valor. Se presentaron expresiones de diferente grado y con la presencia de la literal en más de una ocasión dentro de la misma, precedida por diferente signo y con o sin coeficiente. Este cuestionario estuvo conformado por 18 reactivos de respuesta breve en un caso y de SI/NO en otro. Se aplicó a 30 alumnos de nivel medio superior tanto de Querétaro, México, como de Río Grande do Sul, Brasil, en una sola aplicación, en ambos casos en instituciones públicas, 10 cuestionarios por cada grado en cada país. El análisis estadístico se llevó a cabo con la Prueba t de Student, con un nivel de significancia de 0.05, para determinar diferencias entre respuestas de estudiantes de ambos países.

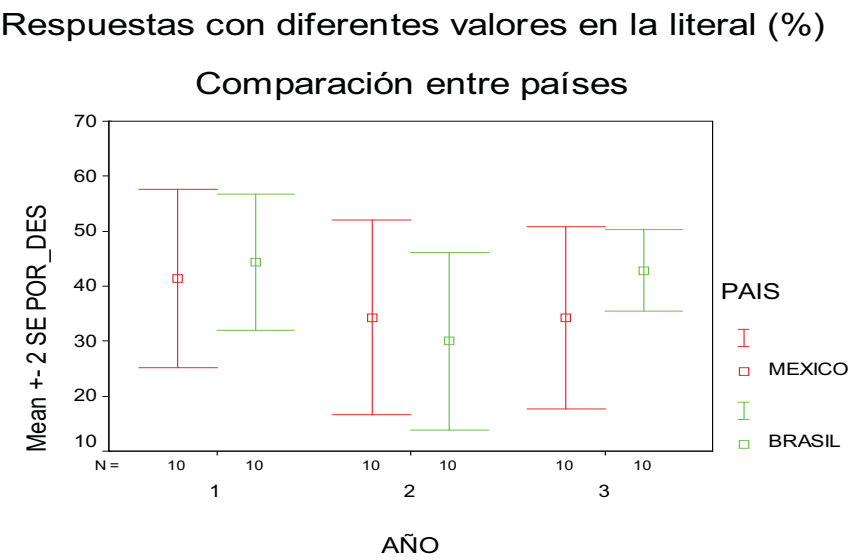
Resultados

Con respecto al reconocimiento del principio de identidad, se puede afirmar que la mayor parte de los estudiantes asumen, -cuando menos en una ocasión- que la literal puede tener distintos valores dentro de una expresión algebraica, discrepando con ello de la interpretación canónica de la literal, lo cual representa un obstáculo tanto en la comprensión de la expresión como en su manipulación. El número de estudiantes y porcentaje se muestra en el siguiente cuadro (No. 1):

Cuadro No. 1 Porcentaje de respuestas con diferentes valores para la literal

	Porcentaje promedio de respuestas con valor diferente para la literal		Prueba de t de Student		
Año	Mexico	Brasil	Valor de t	Grados de libertad	Nivel de significancia
1	41.43	44.28	- 0.280	18	0.782
2	34.28	30.00	0.358	18	0.725
3	34.28	42.85	-0.943	18	0.358

Lo más destacado de los resultados es que la mayoría de los estudiantes en ambos países parece asumir que cuando una literal se presenta en dos o más términos dentro de una expresión algebraica, podría tener más de un valor, omitiendo por ello el principio de identidad, lo cual pone de manifiesto una problemática para la comprensión, tanto de los principios fundamentales establecidos en el trabajo en matemáticas, como en las reglas esenciales de operación con dichas expresiones. A continuación se muestra la gráfica de estos resultados:



Lo anterior puede constituir un elemento en la explicación de las dificultades con las que se encuentran los estudiantes al abordar el trabajo algebraico en los diferentes semestres, lo que resulta por lo menos sorprendente, es la persistencia de dicha interpretación a lo largo de los semestres.

En lo que se refiere a la identificación de los usos de la variable en las expresiones algebraicas, encontramos una mejoría notable, aunque ésta debe tomarse con cautela, ya que las preguntas formuladas para identificar su uso eran de respuesta cerrada entre dos opciones (SI/NO). (Cuadro No. 2)

Cuadro No. 2 Porcentaje de aciertos en la identificación de los tres usos de la variable

	Promedio del porcentaje de aciertos		Prueba de t de Student		
Año	Mexico	Brasil	Valor de t	Grados de libertad	Nivel de significancia
1	70.00	75.00	-0.635	18	0.534
2	67.50	80.83	-1.646	18	0.117
3	38.33	70.83	3.720	18	0.002*

*Diferencia significativa

En estos resultados encontramos igualmente que no existe diferencia significativa entre ambos países en cuando a la identificación de los usos de la variable en los primeros dos años, en tanto que en el tercero si se encontró una diferencia favorable para Brasil.(P= 0.002), ello también podría explicarse en función de una posible falta de control en la aplicación de los cuestionarios en el tercer año en el caso de México.

Cabe mencionar que los reactivos en los que se registraron mayores diferencias en el valor de la literal en la expresión fueron aquellos en los cuales la variable se presentaba en más de dos ocasiones, como se observa en la siguiente tabla:

Reactivo	Porcentaje de respuestas que señalan un valor diferente para la literal
3 + a + a = a + 10	67 %
S – s + s – 4 = 2	55%
3y + 5y = y + 15	53 %
2r + 5r – 4r	38%
x = y	38%

Estos porcentajes muestran la omisión del principio de identidad en diversas expresiones algebraicas, especialmente en aquellas donde la literal aparece más de dos veces.

Conclusiones

El principio de identidad es fundamental para pensar y trabajar con las matemáticas escolares. Por tanto, a partir de los resultados expuestos, se abre la interrogante sobre si efectivamente es el principio lo que resulta contrario al pensamiento de los estudiantes o es una manifestación de un problema educativo.

Los resultados referentes al modelo 3UV muestran que los estudiantes tienen dificultades para caracterizar a la variable algebraica. En los contenidos matemáticos que se abordan a lo largo del nivel medio superior no existe ningún tema que muestre dicha caracterización de la variable, lo que lleva a mostrar la necesidad de discutir con los estudiantes estos elementos como parte importante del proceso educativo.

Finalmente, la diversidad de interpretaciones no quiere decir concepciones erróneas, sino una amplia gama de formas de interpretar y decir, agregando que en estos espacios educativos cuando se ignora o sanciona las interpretaciones que dan los estudiantes, se corre el riesgo de obligarlos a acallar o desechar sus propias argumentaciones, en pos de clarificaciones, definición y respeto de las posturas canónicas. Estos resultados abren la posibilidad a considerar que la omisión del principio de identidad, puede representar un obstáculo en la comprensión del contenido matemático, lo que consideramos, abre nuevas interrogantes.

Referencias bibliográficas

Diéguez, M. (1997). El mito racional de Occidente. Valencia:Pre-textos.

Dunkley, W. A. (2005) The Philosophy of Identism: The Primacy of Identity. Recuperado el 5 de mayo de 2006 en http://identism.blogspot.com/

López A. y Moreno, B. (2007). Visión absolutista del principio de identidad en el currículo escolar de matemáticas. En C. Crespo Crespo (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20, 49-54. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ernest, P. (2004). What is the Philosophy of Mathematics Education? Philosophy of Mathematics Education Journal 18. Recuperado el 4 de junio de 2006 en: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome18/contents.htm

Heidegger, M. (1964). La pregunta por la cosa. Buenos Aires: Sur

Horkheimer, M. y Adorno, T. W. (2004) Dialéctica de la Ilustración. Fragmentos Filosóficos. Madrid:Trotta.

Piaget, J. (1985) Epistemología y Psicología de la Identidad. México: Paidos,

Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática. 12(2), 27-48

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model of the uses of variable in elementary algebra. Proceedings PME 25, Vol. 4, 327-334.

Ursini, S. Trigueros, M. (2004) How do high school students interpret parameters in algebra? En M. Johnsen & A. Berit (Eds.) Proceedings PME 28. (Vol 4) Bergen: University of Norway. 361-369

ANÁLISIS DE LAS CONCEPTUALIZACIONES ERRÓNEAS EN CONCEPTOS DE GEOMETRÍA Y SISTEMAS DE ECUACIONES: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE PRIMER INGRESO

Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora, Cruz Barahona
Instituto Tecnológico de Costa Rica Costa Rica
Liceo Occidental de Cártago
Colegio Científico Costarricense
gramirez@itcr.ac.cr, jchavarria@itcr.ac.cr, mmcnela@gmail.com, cbarahona@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y geométrico Nivel: Medio

Resumen. *En el presente artículo se reportan los resultados de una investigación que clasifica las conceptualizaciones que tienen estudiantes de primer ingreso universitarios de Costa Rica en temas de geometría y sistemas de ecuaciones mediante el modelo SOLO Taxonómico. Este modelo categoriza la actividad mental que realizan los sujetos cuando se enfrentan a una tarea escolar, considerando aspectos cuantitativos y cualitativos. Inicialmente los estudiantes se ubican en los primeros niveles de razonamiento en los temas de geometría y en niveles intermedios en sistemas de ecuaciones, al final los estudiantes mostraron mejoría después de un curso introductorio de matemáticas.*
Palabras clave: errores matemáticos, sistemas de ecuaciones

Introducción

En este artículo se exponen los resultados de una investigación, realizada en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, donde se analizan y clasifican las formas de razonamiento mostradas por algunos estudiantes universitarios de primer ingreso en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones. A pesar de que los estudiantes recibieron durante la secundaria formación en dichos temas y después de un semestre en un curso introductorio universitario se muestra que, ante situaciones similares, algunos estudiantes presentan obstáculos que han perdurado después del proceso. Así "un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar" (Bachelard, 1976, p. 20).

Es importante recalcar que los obstáculos no son, los errores que ocurren al azar, sino más bien, conocimientos que fueron válidos en una situación pero en otro contexto producen error.

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un conocimiento posterior. Se revela

por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones. (Godino, citado en Ruiz, 2006, p. 15)

Interesa responder la pregunta ¿cuáles son las formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer ingreso universitarios en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones? Se muestra situaciones en las que los sujetos generalizan algunos resultados, sin percatarse de que se tratan de conceptos aplicables a escenarios específicos.

Marco conceptual

Las últimas tendencias en la investigación acerca del pensamiento y cultura algebraica y geométrica, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo y los errores de los sujetos ha llegado a ser un objeto importante de estudio. Por ejemplo, la jerarquía de errores de Newman (en Clements, 1980, p. 4). Otro ejemplo, es la categorización de errores que hace Pochulu con alumnos que ingresan a la universidad, donde encontró que los principales errores se debieron a:

Concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de la Matemática; resultados de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado y totalmente identificable; utilización de procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas que no pudimos reconocer; y empleo de métodos y estrategias inventadas, no formales pero originales, para la realización de algunas de las situaciones propuestas. (Pochulu, 2005, p. 8)

Específicamente en Geometría, Smith (en Cury, 1994) desarrolló una investigación con alumnos de high school en Estados Unidos sobre errores de demostraciones que cometen los estudiantes.

Se concuerda que “hay error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 7).

Son dos las principales causas de los errores en el aprendizaje de las matemáticas:

Errores que tiene su origen en un obstáculo y errores que tiene su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tienen dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades

asociadas a la complejidad de los objetivos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. (Socas, 1997, p.4)

Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo, se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo que permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad.

Aplicando el modelo al caso de sistemas de ecuaciones se tiene que los estudiantes:

1. *Preestructural*: poseen información aislada de los conceptos que intervienen en la solución de un problema a través de un sistema de ecuaciones (por ejemplo, la definición de las variables, la interpretación del lenguaje, formulación de las ecuaciones, entre otros) pero no comprenden la forma en que están relacionados. Sus respuestas no las justifican o lo hacen incorrectamente.

2. *Uniestructural*: relacionan en forma correcta algunos de los conceptos de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, en ítemes similares donde se modifica alguna variable de la tarea, muestran falta de una compresión adecuada. Utilizan un lenguaje impreciso. Tratan de resolver el problema con una sola ecuación. Por ejemplo, en el ítem 4 del cuestionario de diagnóstico los estudiantes toman únicamente a *y* como $y = x + 4$ o bien $y = 4x$ ó $x = 4y$.

4. Considere el siguiente problema:
La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
Si "x" representa la edad de María, y "y" la edad de Carlos, **plantee** un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior. (2 PUNTOS)

3. *Multiestructural:* relacionan en forma correcta conceptos envueltos en la solución del problema a través de un sistema de ecuaciones justificando adecuadamente sus respuestas. Se observan algunas inconsistencias en sus razonamientos y no autoevalúan su respuesta según el contexto del problema.

4. *Relacional:* son capaces de identificar las variables e interpretar el problema, construir las ecuaciones, relacionar los conceptos que intervienen, resolver el sistema de manera adecuada y autoevaluar su respuesta en el contexto del problema.

Metodología

La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio de caso aplicado a estudiantes universitarios de distintas carreras y de nuevo ingreso que matricularon un curso introductorio de matemática durante el primer semestre de 2008.

Los principales instrumentos, de recolección de información fueron: un examen de diagnóstico, que consta de 9 ítemes abiertos, diseñado para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre conceptos algebraicos y geométricos. Además de entrevistas grabadas en formato de video. El examen fue aplicado a 1102 estudiantes. Se analizaron dos ítemes a un 10% de la población (seleccionados aleatoriamente) con el fin de evaluar los errores cometidos. De estos, se realizaron entrevistas a tres estudiantes por ítem una vez que finalizaron el curso introductorio, para comparar las conceptualizaciones mostradas después de la instrucción. Esta última selección fue por conveniencia, de tal manera que se tomaron los estudiantes ubicadon en los niveles más bajos de razonamiento en el examen.

El análisis de desarrolla tomando en cuenta el avance secuencial del estudiante en el modelo SOLO. Con la respuesta brindada en el examen, al estudiante se le ubica en un nivel, para más tarde con la entrevista volverlo a ubicar en un nivel, y evaluar el crecimiento del mismo.

Resultados

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo, que se obtiene de los sujetos de estudio en el examen de diagnóstico, este proporciona una idea de la comprensión de los conceptos investigados; y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por las formas de razonamiento que exhibieron después de un semestre de instrucción. Se presenta el análisis completo de dos ítemes correspondientes a los temas de sistemas de ecuaciones (ítem 4) y geometría (ítem 6), pues fue donde los estudiantes presentaron mayores dificultades.

El examen de diagnóstico

El promedio de la nota obtenida fue de 55.28 con una desviación estándar de 18.55. El Análisis de confiabilidad de la prueba de diagnóstico fue realizado por medio de la técnica "Alfa de Cronbach", obteniendo un valor de 0.80.

Análisis de niveles de comprensión de los sujetos en sistemas de ecuaciones

Ítem 4

4. Considere el siguiente problema:
La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
Si "x" representa la edad de María, y "y" la edad de Carlos, **plantee** un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior. (2 PUNTOS)

Esta pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos perciben correctamente el significado de que la edad de una persona exceda en 4 años la edad de otra. Además de simbolizar matemáticamente, a través de dos ecuaciones, los enunciados que permiten resolver el problema. Las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Toma $y = x + 4$

b) Interpreta incorrectamente que la suma de sus edades es 32 años

c) Trata de resolver el problema con una sola ecuación

d) Toma la expresión excede en 4 como $y = 4x$ ó x=4y

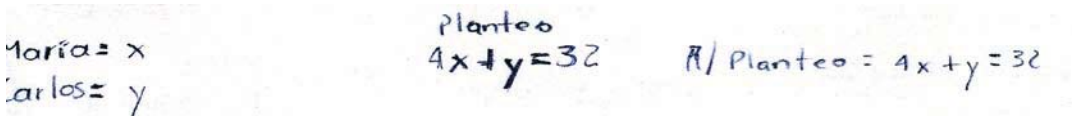
e) Plantea una ecuación de una variable de manera incorrecta.

En cuanto a la clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas al ítem se obtuvo:

Nivel	Curso Introductorio
Preestructural	1
Uniestructural	15
Multiestructural	22
Relacional	46
Total	84

Se observa que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel relacional; sin embargo, casi el 27% (22 de 82) de los estudiantes diagnosticados se ubican en el nivel multiestructural, entre tanto, el 18% se encuentran en el nivel uniestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante 50 (en adelante D) presentó dos de los principales errores en el ítem (nivel uniestructural) se le entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en un curso introductorio para comparar sus conceptualizaciones con respecto al examen de diagnóstico. En el examen de diagnóstico D interpreta incorrectamente que María excede en 4 años a la edad de Carlos y plantea una sola ecuación con dos variables para resolver el problema.



En la entrevista se le plantearon los siguientes problemas

Problema 1)

Yo tengo 5 años más que la edad de ella (Cruz), y juntos sumamos 47 años. Si mi edad es z, que significa que yo tenga 5 años más que ella, en términos de z, ¿qué edad tiene ella?

Cuyo objetivo es determinar si el estudiante interpreta algebraicamente lo que significa que la edad del entrevistador 1 (Greivin) exceda en 5 a la edad del entrevistador 2 (Cruz).

Ahora, ¿cómo planteo la o las ecuaciones que me permitan resolver el problema?

Cuyo objetivo es representar matemáticamente la ecuación o las ecuaciones que le permitirían resolver el problema.

Problema 2)

Tres adultos y tres niños visitan un zoológico. El costo de la entrada para niño es la mitad que el valor de la entrada para adultos, si entre los seis pagan ¢20700 por las entradas, ¿cuánto cuesta cada entrada para niño?

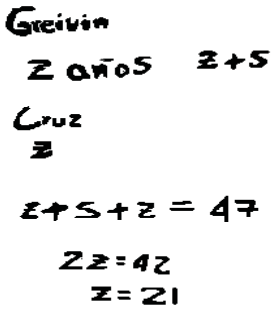
Cuyo objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado después de un semestre de instrucción, con el fin de comparar esos niveles.

D reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

Problema 1

D: Digamos que ella tendría *x*. Entonces sería, ¿qué dice, la suma es 47? Sería *z*+5 [Señalando la edad de Greivin] Bueno ella es *z* [Señalando la edad de Cruz].

Resuelve en la pizarra



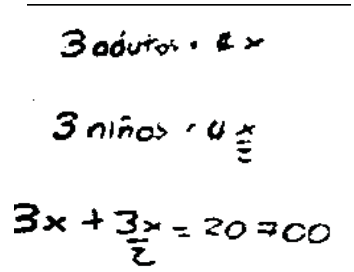
Nivel Relacional: obtiene de manera correcta la ecuación que resuelve el problema. Toma a *x* en vez de z.

Él sería 26 años y ella 21.

Problema 2

D: [Resuelve el problema sin hablar].

Resuelve en la pizarra



Nivel Relacional: plantea bien el problema.

D**:** Bueno los datos, tres niños y tres adultos [señalando la pizarra]. Digamos que la entrada para adulto cuesta *x* colones, y la de los niños es la mitad de los adultos $x/2$. Entonces sumamos, digamos, *x* es de cada adulto, entonces sería *x* por los tres adultos para sacar, después igual para los niños; y sumo, digamos las, digamos que serían las seis, las seis…

E**:** Ok

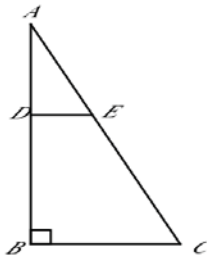
D: Despejar a ver cuánto me quedaría *x*.

D supera su nivel de razonamiento uniestructural del examen de diagnóstico. Ahora se ubica en un nivel de razonamiento relacional. D aprueba el curso con la nota mínima 70.

Principales errores cometidos en Geometría

La siguente pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos pueden utilizar el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos para encontrar las medidas de dos segmentos.

6. Considere el $\triangle ABC$ con ángulo recto en B. Sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AC = 15$ cm, $DE = 3$ cm y $AB = 12$ cm; determine las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{DB}$. (3 PUNTOS)



Las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Omite el criterio por el cual los triángulos son semejantes

b) Indica las medidas de los ángulos en A y/o C, asumiendo que los triángulos son isósceles.

c) Escribe las razones de manera incorrecta.

d) Calcula incorrectamente las sumas de Pitágoras

e) Indica la medida de los segmentos sin ningún cálculo anterior

f) Asume que la medida de los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{BC}$ son iguales

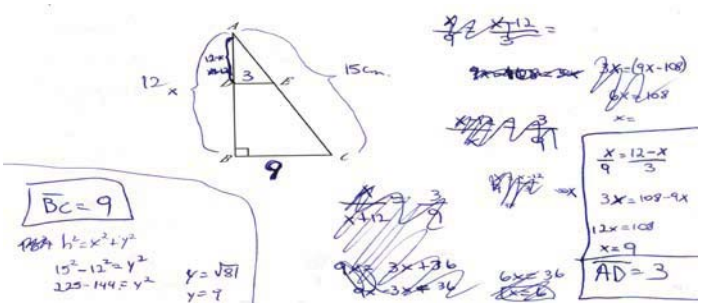
En cuanto a la clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas al ítem se obtuvo:

Nivel	Curso Introductoria
Preestructural	26
Uniestructural	30
Multiestructural	26
Relacional	2
Total	84

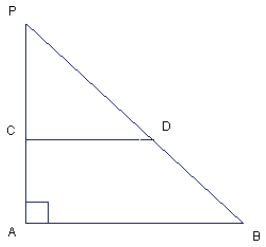
Se determina que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel Multiestructural, sin embargo, casi el 36% (30 de 84) de los estudiantes diagnosticados se ubican en el nivel Uniestructural, entre tanto, el 31% se encuentran en el nivel Preestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante 200 (en adelante F) presentó dos de los principales errores en el ítem (nivel uniestructural) se le entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en un curso introductorio.

En el examen de diagnóstico F realiza incorrectamente las razones y no indican por cual criterio los triángulos son semejantes. Su respuesta fue:



En la entrevista se le plantea el siguiente problema:



1. Si el ΔABP es semejante al ΔCDP y $m\overline{PA} = 18cm$, $m\overline{AB} = 24cm$, $m\overline{CD} = 8cm$ y $m\overline{PB} = 30cm$ ¿Calcule la medida del segmento $\overline{PD}$?

El objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado en un problema similar a los del examen. Además, estos tipos de problemas son abordados en los cursos universitarios introductorios. A pesar de que se garantiza que los triángulos son semejantes, se les pide que justifique por qué lo son.

F reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

(1) F: ¡No es una relación impar!

[Escribe en el pizarrón]

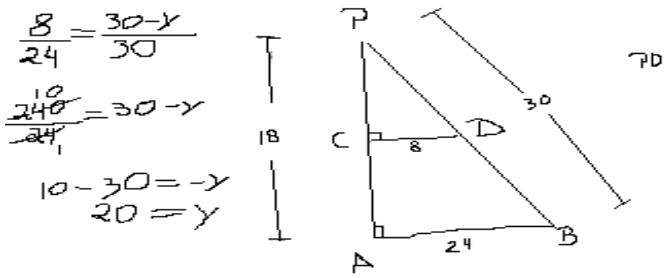
$$\frac{8}{24} = \frac{18-x}{18}$$

(2) F: [Borra $\frac{18-x}{18}$ y escribe $\frac{30-x}{30}$]

$$\frac{8}{24} = \frac{30-x}{30}$$

(3) F: [Al segmento $\overline{DB}$ le asigna y]

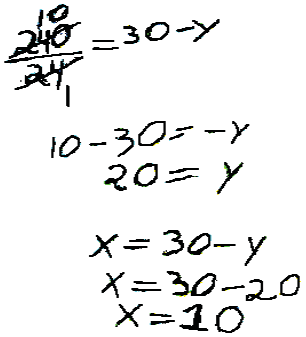
(4) F: [Borra $\frac{30-x}{30}$ y escribe en su lugar $\frac{30-y}{30}$]



(5) E: ¿Entonces cuál es la respuesta?

(6) F: BD igual

(7) F: [Escribe en la pizarra $x = 30 - y$]



Nivel multiestructural: logra realizar la correspondencia entre los lados de forma correcta pero no logra decir por qué los triángulos son semejantes, no lo justifica.

(8) E: Ok, y una preguntita más,… ¿Qué significa que dos triángulos sean semejantes?

(9) F: Sería propiedad, lo que importa es que tengan los lados.

F reprueba el curso con una calificación de 35 (con base en 100)

Conclusiones

Los estudiantes entrevistados lograron un crecimiento en sus niveles de razonamiento en ambos temas después del proceso de instrucción, sin embargo, no alcanzan el nivel relacional que se requiere para que integren diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

En el tema de sistemas de ecuaciones algunos estudiantes siguen teniendo errores al interpretar el lenguaje matemático y escribirlo en simbología matemática en expresiones como “el doble”, “el triple”, “cinco años más”, entre otros; esto podría explicarse por la presencia de obstáculos epistemológicos.

En el tema de Geometría los estudiantes tienen errores al omitir los criterios de semejanza de los triángulos, utilizan proporción entre sus lados sin probar dicha semejanza. Los estudiantes deben ser sometidos a procesos metacognitivos en los que autorregulen su propio aprendizaje, de tal manera que busquen las conexiones que se requieren para alcanzar el nivel relacional. Así se recomienda que “es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir los errores, para de esta forma lograr el conocimiento genuino” (Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004, p.11).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy. New York: Academic Press.

Clements, M. (1980). El análisis de errores para niños escrito en tareas matemáticas.

Estudios en Educación Matemática. 11 (1), 1-21.

Cury, H. (1994). As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. Tesis de Doctorado no publicada en Educación. Faculdad de Educação, Universida de Federal do Rio Grande do Sul.

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación 43, 3-25.

Godino, J. Batanero C. y Font V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación 35, 1-14.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Universidad La Laguna.

Ruiz, A. (2006). Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. Costa Rica: San José. CIMM/UCR.

DIFICULTADES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE RAZÓN Y PROPORCIÓN: ESTUDIO DE CASO

Marta Elena Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
mvaldemo@cinvestav.mx
Campo de investigación: Educación de adultos Nivel: Superior

Resumen. *El caso que estamos comunicando es el de Roberto, un profesor de Matemáticas, responsable del primer grado de secundaria de una escuela pública. Nuestro seguimiento sistemático de dicho maestro, durante tres años, está inserto en el estudio de tres casos desarrollado en una maestría orientada a la educación matemática, donde él decidió dedicarse en profundidad a la planeación y enseñanza de razón y proporción en su grupo escolar, privilegiando el uso de las fracciones. Nuestro estudio de este caso está organizado en tres fases: 1) La exploración de la enseñanza impartida por este maestro antes de incorporarse al posgrado. 2) La planeación didáctica de varias clases de razón y proporción por parte de Roberto. 3) La intervención didáctica del mencionado maestro en el aula, aplicando lo ya programado. En todo ello, nuestras preguntas de investigación estuvieron referidas a cómo enseñaba razón y proporción dicho profesor y cuáles eran las dificultades que enfrentaba en la planeación de clases y en su aplicación en el aula.*
Palabras clave: razón y proporción, planeación, enseñanza, dificultades

Introducción

Durante tres años llevamos a cabo un seminario referido a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, en una maestría centrada en la educación matemática, donde se brindó formación a profesores pertenecientes al sistema de educación básica, quienes se encontraban en pleno ejercicio de sus labores docentes. En este ámbito, realizamos una investigación longitudinal de tres años, a través de un *estudio de casos con tres estudiantes* incorporados a dicho seminario, los cuales *reconocían múltiples dificultades en la enseñanza de fracciones*, tanto con referencia a distintos contenidos curriculares relativos a dichos números como a diferentes grados de primaria y secundaria (razón por la cual, estos casos son escasamente comparables entre sí).

Aquí, tan sólo presentamos el caso de Roberto, maestro de primer grado de secundaria, quien escogió profundizar la *enseñanza de razón y proporción mediante el uso de fracciones* e identificar las *dificultades asociadas a la misma*, problema que aquí es *reconstruido a la luz de cómo lo desarrolla el profesor* de educación básica (desde su *planeación* hasta su *abordaje concreto en el aula* y su posterior *evaluación*). En la presente investigación, el *problema de estudio* es la identificación de las *dificultades didácticas* que en tal recorrido enfrenta este profesor. De acuerdo

con Bishop (2000), el caso de Roberto se integra en el sector de la *educación de adultos* constituido por aquellas personas que retoman y continúan su formación para actualizar sus posibilidades de ejercicio profesional, perfil de adultos que se suma al de muchos otros, con necesidades educativas diversas y contrastantes características entre sí.

Marco teórico

La literatura especializada abordada en el seminario de la maestría privilegió la gran riqueza semántica de las fracciones, entre cuyos *constructos intuitivos* se destacan los *significados* de la relación parte-todo, el cociente, la medida, el operador multiplicativo y la *razón*, según Kieren (1984, 1988). Atendiendo a tales contenidos semánticos de la fracción, los integrantes del seminario de la maestría escogieron con cuáles de ellos llevarían a término un proyecto de desarrollo consistente en estudiar a profundidad sus fundamentos, planear clases referidas a dicho tópico y luego aplicarlas en el aula; Roberto asumió estas labores en vinculación con el abordaje de razón y proporción.

La *razón* fue definida en el seminario de la maestría como la relación entre dos magnitudes, en tanto que la *proporción* fue entendida como la relación de equivalencia entre dos o más razones (Hart, 1988). Cuando las magnitudes eran del mismo tipo se identificaron las *razones internas*, en contraste con las *razones externas,* cuya composición remitió a magnitudes de distinta naturaleza, de acuerdo a Freudenthal (1983).

Asimismo, fue adoptado el enfoque didáctico de Freudenthal (1983) y Streefland (1991) con el sentido de que la enseñanza a desarrollar en el aula debe ser fenomenológicamente rica, marcadamente variada, bien integrada y con gran apego a la vida real de los sujetos del aprendizaje y de sus experiencias cotidianas.

Roberto asumió el planteamiento de Ruiz (2002) y Ruiz y Valdemoros (2004, 2006) según el cual, para el sujeto del aprendizaje, *la proporcionalidad cualitativa precede a la proporcionalidad cuantitativa*, requiriéndose a partir de ello que el diseño didáctico de la enseñanza se ajuste a tal circunstancia; en ese marco de referencia, el pensamiento proporcional cualitativo se expresa mediante palabras (como “grande”, “mediano”, “pequeño”, las que permiten hacer diversas comparaciones), en tanto que el pensamiento proporcional cuantitativo se manifiesta a través de

relaciones numéricas. La raíz última de dicho eje teórico de planeación instruccional la retoman las mencionadas investigaciones de Piaget e Inhelder (1978) y de Van den Brink y Streefland (1979), quienes formulan que el *pensamiento cualitativo* del sujeto cognoscente evoluciona hacia un *pensamiento cuantitativo,* llegando luego a coexistir ambos y brindando el primero fundamento y sentido al segundo.

Problema, preguntas de investigación y objetivo del estudio

Nuestro *problema de investigación* es:

La indagación de las dificultades implícitas tanto en la planeación didáctica como en la enseñanza inicial de razón y proporción, atendiendo en especial a la emergencia de los números fraccionarios en este ámbito.

Las *preguntas del estudio* son:

¿Cómo desarrolla el maestro la enseñanza de razón y proporción? ¿Qué dificultades didácticas debe superar en dicha práctica?

El *objetivo de la investigación* es:

Explorar la enseñanza de razón y proporción que Roberto diseña y desarrolla en su grupo de primer grado de secundaria.

En este estudio de caso *no se formula ninguna hipótesis inicial* porque la investigación es de naturaleza exploratoria. Por no haberse realizado indagaciones previas en este terreno, sus resultados representan una aportación bastante original a esta disciplina.

Método

El *sujeto* del presente estudio de caso fue Roberto, maestro de primer grado de secundaria (cuyos alumnos tenían doce y trece años de edad), con quince años de práctica docente previa, quien decidió abordar el *tratamiento didáctico de razón y proporción.*

El *escenario* en el que llevamos a término la investigación fue la institución educativa en donde este profesor estudió su maestría.

Para el seguimiento del caso que nos ocupa aquí, involucramos varios *instrumentos metodológicos:*

a) Diversas modalidades de *observación indirecta* de la enseñanza (presentación de *reportes verbales* del maestro y de *videograbaciones* de la *intervención didáctica* en el salón de clases) y, al final, varias experiencias de *observación directa* del aula.

b) Seis *entrevistas* individuales y semiestructuradas (dos en cada una de las tres fases de la investigación).

La *validación* del estudio la realizamos a través de *triangulaciones entre diversos métodos y de triangulaciones en el tiempo*, de acuerdo con Cohen y Manion (1990), Woods (1998), Taylor y Bodgan (1987). Por los primeros procedimientos contrastamos unos con otros, dentro de una misma fase de la investigación, los resultados obtenidos mediante las entrevistas y las diferentes modalidades de observación. Apoyándonos en los segundos procedimientos, comparamos entre sí los contenidos similares dados en las tres fases de la investigación. Así, también se nutrió el análisis del caso.

Resultados del estudio

I. En la *primera fase* de la investigación (consistente en el reconocimiento de la *experiencia docente previa* a su integración al posgrado), en las *entrevistas* pudimos *reconstruir críticamente la enseñanza de razón y proporción* desarrollada por Roberto antes de incorporarse a la maestría, práctica que él caracterizó como:

"Una enseñanza muy cargada de algoritmos, aislada de las situaciones reales que viven los alumnos y sin que yo llegase a despertar la intuición de ellos… Comenzaba la clase presentando uno o dos ejercicios a ser resueltos por los alumnos e inmediatamente iniciaba una extensa ejercitación del algoritmo de la regla de tres… No usaba libros de texto".

A lo cual agregó:

*"*Ya vieron el error que yo cometí ahora [con esto, se estaba refiriendo a los problemas que tomó de la investigación de Hart (1988) y los aplicó a sus estudiantes, durante el primer año de su permanencia en la maestría], empecé con el algoritmo para obtener proporciones y me di cuenta

de que yo carezco de los elementos necesarios para poderles enseñar a los niños, por ejemplo, a conceptualizar la proporcionalidad y a dar sentido a la unidad".

Con respecto a las *dificultades de enseñanza* de razón y proporción que Roberto podía reconocer en su práctica docente de los años previos, él enfatizó: "No logro que el alumno entienda qué es la razón ni sus distintos significados… por eso yo estoy aquí, porque quiero aprender todo esto para podérselo enseñar a mis alumnos".

Cuando se le preguntó acerca de la algoritmización de su enseñanza de la que ya había estado hablando, Roberto respondió:

"Sin lugar a dudas, ésa fue una gran dificultad años atrás; pero algo que he podido reconocer en la maestría, ahora, es que llegar al algoritmo es el último paso de la enseñanza porque es conveniente empezar por lo más sencillo hasta trabajar lo más complejo, lo que viene siendo el conocimiento formal, lo algorítmico… Porque no es con una constante ejercitación de los algoritmos aislados que los estudiantes van a aprender más; ése es un error y es el error de muchos maestros".

Por último, Roberto destacó: "Otra dificultad de enseñanza muy importante consistió en que yo no podía reconocer los errores comunes de los estudiantes" y por eso "tampoco ajustaba mi enseñanza para ayudarlos a superar dichos errores".

La *observación indirecta del aula* se logró a través de varios *reportes verbales* en el seminario de la maestría, donde Roberto informó acerca de *diversas aplicaciones de problemas a sus estudiantes* (tareas que fueron retomadas de la literatura especializada en razón y proporción, durante el primer año de la maestría) y, también, mediante *videograbaciones* de dichas experiencias. De conjunto, estas observaciones indirectas nos permitieron confirmar buena parte de lo planteado por este maestro, en las entrevistas.

II. Durante la *segunda fase* de la investigación (etapa de *planeación de la instrucción*), Roberto diseñó siete sesiones de enseñanza cuya progresión inició con la *resolución cualitativa* de distintos problemas de proporcionalidad, avanzando poco a poco hacia la *resolución cuantitativa* de nuevas tareas, previendo en ellas el desarrollo final de los algoritmos básicos. *Los problemas de estas clases eran de naturaleza mixta: incluían breves textos y figuras, comúnmente presentadas en papel cuadriculado para que pudieran ser ampliadas o reducidas. Para el desarrollo del*

pensamiento proporcional cuantitativo también se incluyeron tablas a ser interpretadas o elaboradas por los estudiantes. Ejemplo de un problema propuesto para indagar la proporcionalidad cualitativa: en una misma hoja, presentación del dibujo grande de una casa (modelo), acompañado de cuatro dibujos menores de casas, entre las cuales debía reconocer el alumno cuál era la que correspondía a una "reducción" del modelo. Ejemplo de una tarea destinada a explorar la proporcionalidad cuantitativa: en papel cuadriculado se presentaban dibujados un objeto y su sombra, requiriéndose al estudiante dibujar y cuantificar la sombra del segundo objeto representado en esa misma hoja.

Pudimos reconstruir esto a través de dos *entrevistas* donde Roberto expuso sus reflexiones acerca de los fundamentos del diseño didáctico de clases y las dificultades asociadas a tal planeación. Con respecto a la *programación de actividades*, él destacó:

"Lo más importante en el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo es que, en este último terreno, el alumno construya los conceptos de *razón* y de *proporción*, así como también, de *razón interna* y *externa*… Las tareas que se diseñen deben generar discusión y enriquecer a los estudiantes, quienes elaborarán aquellos conceptos a medida que vayan descubriendo los valores numéricos de las relaciones que estén considerando… Todo esto tiene que desarrollar competencias en los alumnos".

En cuanto a las *dificultades del diseño de clases* Roberto señaló:

"Lo más notable fue romper con el paradigma de algoritmización de la enseñanza, muy fuerte y arraigado para mí… Otra dificultad importante fue decidir acerca de la estructura que debían presentar las actividades diseñadas… Muy relevante fue que las clases resultasen interesantes para los estudiantes… También me preocupaba poder reconocer qué preguntas realmente guiaban a los alumnos hacia la comprensión de los problemas".

La *observación indirecta del aula* se ejerció a través de la presentación de *reportes verbales* en el seminario de la maestría, los que eran contrastados con las *videograbaciones* del *piloteo* realizado en torno a los problemas y las clases planeadas por Roberto. Así, pudimos establecer que los cambios introducidos por él, en su práctica docente, habían producido mejorías notorias en el aprendizaje de los estudiantes del piloteo. Por otra parte, después de esta última experiencia y como resultado de ella, Roberto mejoró el diseño de las actividades didácticas programadas.

III. En la *tercera fase* del estudio (consistente en la *intervención didáctica en el aula*), Roberto desarrolló las clases diseñadas y evaluó los avances de sus estudiantes mediante la aplicación de un cuestionario previo a la enseñanza y de un cuestionario final, a los que en último término contrastó, haciéndose evidente un claro progreso en el aprendizaje de todo el grupo porque al concluir disminuyó ostensiblemente el total de errores de los alumnos y no se registraron ya tareas sin respuesta.

En las *entrevistas*, con respecto a la *enseñanza*, Roberto expresó:

"Tuve que hacer grandes esfuerzos para que los estudiantes comprendieran *qué son la razón y la proporción* … Además, tuve que indagar por qué cometían errores, para procurar guiarlos en su superación … En el terreno cuantitativo, continué modificando los factores escalares para que los alumnos *no creyeran* (como habían empezado a hacerlo) *que "ampliar" una figura es duplicarla y que "reducirla", es dividirla a la mitad* … Un gran logro fue la facilidad con la que los estudiantes llegaron a leer y organizar tablas de proporcionalidad".

En cuanto a las *dificultades didácticas* que aún experimentaba, Roberto dijo:

"A pesar de haber avanzado mucho como maestro, me cuesta modificar el estilo algoritmizado de enseñanza que antes tenía; por ejemplo, no me resultaría sencillo enseñar, sobre los nuevos fundamentos didácticos, la división de fracciones o la función lineal, mencionando contenidos matemáticos próximos al que ya trabajé en la maestría".

También en esta fase, la *observación indirecta* del salón de clases se cumplió a través de la presentación de *reportes verbales* en el seminario de la maestría, los que fueron comparados con las *videograbaciones* del desarrollo de las clases planeadas por Roberto para el primer grado de secundaria. Otro miembro del seminario sobre fracciones realizó *observaciones directas* del aula, en las que pudo detectar las dificultades de Roberto para dar sentido a los algoritmos y para ayudar a los estudiantes a superar errores.

Tanto las entrevistas como las observaciones indirectas se complementaron adecuadamente y nos permitieron comprobar que este profesor produjo un profundo giro en sus tratamientos de razón y proporción; aunque reconocemos que son muchas las causas que determinaron dichos cambios, sin lugar a dudas, en un lugar fundamental se sitúa la planeación progresiva y crítica que Roberto realizó en la segunda fase de nuestra investigación. Por otra parte, es remarcable que las

dificultades didácticas que este maestro reconoció en la enseñanza de razón y proporción, tendieron a evolucionar en el transcurso de nuestro estudio y a consecuencia de sus progresos en la maestría a la que él se incorporó.

Conclusiones

Al comienzo del estudio, Roberto reconstruyó críticamente la enseñanza de razón y proporción por él desarrollada durante quince años, indicando que *su instrucción estaba cargada de algoritmos y reglas, pero carente de nexos con la vida real de los estudiantes* y que por ello, éstos no comprendían los conceptos de razón y proporción. *Pudimos constatar esto mediante la observación indirecta* desarrollada y también comprobamos, por esa vía, que *la algoritmización de la enseñanza era el rasgo común en la práctica docente previa de los tres casos,* en nuestra investigación.

En la segunda etapa del presente estudio, habiendo avanzado en la maestría respecto a sus conocimientos didácticos de razón y proporción, Roberto efectuó la planeación de siete clases que involucraron problemas tendientes a generar, en los estudiantes, una evolución desde el pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo. También, llevó a cabo un ensayo preliminar de toda esta experiencia y de su evaluación. *Nosotros pudimos advertir que, por la fecunda realización de la planeación de clases, la práctica docente de Roberto en esta etapa evidenció profundos cambios y avances, en contraste con el período previo*.

En la tercera fase de nuestro seguimiento, Roberto aplicó sistemática y secuencialmente sus siete clases, procurando lograr la comprensión de la razón y la proporción en sus alumnos y dejando para el momento final la introducción de algoritmos y reglas. La evaluación del aprendizaje de sus estudiantes indicó grandes progresos en ellos, atendiendo al contraste entre el cuestionario inicial y el final que les aplicó (en el último, se pudo constatar una marcada disminución de los errores registrados en cada tarea). Pese a todo eso, *detectamos que Roberto continuaba evidenciando dificultad para reconocer los errores de los alumnos, en el desarrollo de las clases.*

Aunque las dificultades didácticas experimentadas por Roberto fueron cambiando en las diversas etapas de esta investigación longitudinal de tres años ya concluida, pudimos constatar que *las labores de planeación desarrolladas en la segunda fase fueron profundamente esclarecedoras para*

este profesor y le permitieron incursionar en la subsiguiente fase de intervención en el aula y de evaluación de resultados, con mayor claridad y consistencia, así como con menos conflictos didácticos.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (2000). Preface. En: D. Coben, J. O. Donoghue y G. FitzSimons (Eds.), Perspectives on adults learning Mathematics (xi-xiii). Dordrecht, Holanda: Kluwer Publishers.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid: La Muralla.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holanda: Reidel Publishing Company.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.), Concepts and operations in the middle grades, 2 (pp. 198-219). Reston, EUA: NCTM.

Kieren, T. (1984). Mathematical knowledge building: The Mathematics teacher as consulting architect. 35th International Congress on Mathematics Education, 187-194.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.), Concepts and operations in the middle grades, 2 (162-181). Reston, EUA: NCTM.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En: J. Delval (Ed.), Lecturas en Psicología del Niño, 1 (70-119). Madrid, España: Alianza Editorial.

Ruiz, E. F. (2002). Estudio de estrategias de solución y una propuesta para la enseñanza de razón y proporción. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, (pp. 201-208). Bergen, Noruega.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 9 (2), 299-324.

Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. Disertación doctoral. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Van den Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – Ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics, 10, 403-420.

Woods, P. (1998). Investigar el arte de la enseñanza. El uso de la Etnografía en la educación. Barcelona: Paidós.

ANÁLISIS COGNITIVO DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
UTVM México
CICATA-IPN
ESIME-IPN
elitret@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *En todos los niveles educativos se plantea como una necesidad que los alumnos sean competentes en matemáticas, particularmente en la resolución de problemas reales. Debido a ello y teniendo como marco teórico a los Campos Conceptuales de Vergnaud y marco de referencia a la Matemática en el Contexto de las Ciencias se realiza el análisis del conocimiento del estudiante en relación al campo conceptual de sistema de ecuaciones en el balance de materia, atendiendo particularmente situaciones de mezclado de sustancias químicas. Los resultados mostrados son derivados de la observación de un grupo de enfoque que trabajo durante seis sesiones tanto en laboratorio como en salón de clases.*
Palabras clave: contexto, ecuaciones, matemática, campos conceptuales

Introducción

La instrucción matemática en el nivel Técnico Superior Universitario vive condiciones particulares pues de acuerdo al modelo educativo se debe privilegiar un conocimiento matemático contextualizado, coincidiendo con lo que propone Camarena (1995), Riodan & Noyce (2001) y Meyer & Diopulus (2002). Adicionalmente el estudiante se forma para insertarse directamente en el mercado laboral y en su vida profesional deberá resolver problemas técnicos donde se requiere integrar conocimientos específicos de su formación con conocimientos matemáticos básicos. Un caso particular lo ocupan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, concepto matemático que de forma recurrente se requieren para modelar fenómenos del área de competencia de los Técnicos Superiores en Tecnología de Alimentos (balance de materia, estandarización de leche, jugos, soluciones químicas, por citar algunas). Sin embargo, a pesar de ser un tema que se aborda desde secundaria, en el nivel educativo de interés se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades para modelar mediante este objeto matemático problemas contextualizados. Algunos investigadores como Camarena (1995) y Rivera *et al* (2003) consideran que esto se ve favorecido por la falta de conceptualización y desde luego por presentar conocimientos aislados, desarticulados y sin significado para los estudiantes; para subsanar en la

medida de lo posible esta situación proponen el presentar a los estudiantes una matemática con problemas reales de la vida cotidiana de tal manera que se logre la aprehensión del conocimiento. En relación con los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se han realizado investigaciones como las de Herrero (2004) y Ochoviet (2009) donde se hace manifiesta la necesidad de estudios que generen propuestas didácticas. Empero, hasta el momento no se tiene reportada ninguna en el contexto del nivel de estudios de interés, siendo un campo de aprendizaje con condiciones particulares.

Derivado de lo anterior se tiene la necesidad de entender cómo se da el proceso cognitivo de los estudiantes al enfrentarlos a un conocimiento matemático en un contexto particular, por lo que en este reporte se hace mención a una alternativa entre otras, para explicar cómo el estudiante adquiere el concepto de sistemas de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia, en situaciones de mezclado de sustancias químicas. La explicación de los resultados se realiza utilizando como marco teórico a los campos conceptuales de Vergnaud (1990), por lo que se analizan los esquemas mentales de un grupo de enfoque. Dado que se trabajo con un problema contextualizado se tuvo como marco metodológico a la fase didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias (Camarena, 1995).

Metodología

El estudio cognitivo se realizó a través de dos componentes básicos, a saber:

1. La actuación de los estudiantes sobre el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia. Ubicándose las situaciones que le dan utilidad y significado al concepto. Por lo tanto en esta investigación se han considerado tareas, actividades y problemas en donde se requieren conceptos matemáticos en vinculación con el mezclado de sustancias químicas.

2. Esquema mental, visto como una forma de organización de la actividad que genera la acción, en donde están presentes los siguientes elementos: propósitos, invariantes operatorios, inferencias y reglas de acción. En relación con los esquemas mentales de entendimiento se clasificaron como canónicos, no canónicos; los esquemas de solución en e algorítmicos y no algorítmicos tal como lo

propone Flores (2005). De igual manera se caracteriza el dominio progresivo del campo conceptual de interés para lo cual se establece una propuesta de la progresividad.

El grupo de enfoque estuvo formado por dos estudiantes de 17 años de edad, los cuales cursaban Matemáticas I en el Programa Educativo de Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, ubicada en Ixmiquilpan, Hidalgo México. Los cuales se enfrentaron a situaciones (en el sentido de Vergnaud) de salón de clases (lápiz y papel). Se diseñaron cuatro situaciones. La primera situación tuvo una duración de dos horas, la segunda situación se atendió en dos clases de laboratorio de 3 horas cada una; al igual que la tercera situación. Finalmente la última en una sesión de salón de tres horas.

Resultados y discusión

I) Determinación de las situaciones

Vergnaud (1990) establece que un estudiante le dará sentido a un concepto a través de diferentes situaciones en que esté presente dicho concepto. Entonces, la operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones diferentes, de tal forma, que el análisis de la variedad de conductas del sujeto ante estas situaciones muestre un panorama cognitivo sobre el concepto. Esta definición pragmática, relaciona el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de las acciones de los estudiantes para el análisis de su aprendizaje. Con esta idea y de acuerdo a resultados de investigaciones previas se consideró que las situaciones de contexto que propician la vinculación de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son las que se derivan del mezclado de sustancias químicas. Estas situaciones se identifican mediante el cambio de concentración de la sustancia en donde está presente el planteamiento de sistema de ecuaciones lineales. Entonces el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales se puede formar por un conjunto de situaciones cuyo marco sea el mezclado de sustancias químicas, en donde se propongan una serie de tareas ya sea en condiciones de laboratorio o en lápiz y papel que permitan analizar la acción del estudiante ante dichas situaciones.

Cobijados en la idea anterior y de acuerdo con la caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales en el fenómeno de balance de materia se propusieron cuatro situaciones de las cuales

emanaron tareas. Las tareas establecidas se caracterizan por la relación entre los conceptos derivados de los contenidos matemáticos y del contexto. Las situaciones se enuncian a continuación

Situación A	Estado inicial del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia.
Para determinar el estado inicial del campo conceptual de interés se plantea a los estudiantes una serie de preguntas que permitirán la exploración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia. Así mismo se propone la solución de un problema contextualizado. *Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 L de solución de ácido al 25% . Si en existencia hay disponibles solución al 30% y al 18% ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?*	

Situación B	Comprensión del fenómeno.
La parte sustantiva de la segunda situación en el reconocimiento del fenómeno a través de la fase experimental: Preparación de soluciones químicas con concentración porcentual, específicamente soluciones azucaradas. Un aspecto importante a analizar será la interacción, la observación, la comprobación y la toma de datos. Al realizar esta segunda etapa se ha considerado que el estudiante cuente con los conocimientos previos sobre preparación de soluciones químicas, específicamente de concentración porcentual, dado que precisamente de este conocimiento se desprenden las tareas.	

Situación B: Comprensión del fenómeno.	
	Se solicita a los estudiantes preparar:
Tarea 1	100 mL de solución azucarada al 35%. Comprobar la concentración mediante el refractómetro. Indicar cuantos gramos de azúcar se requieren y que volumen de agua.
Tarea 2	100 mL de solución azucarada al 60%. Comprobar la concentración mediante el refractómetro. Indicar cuantos gramos de azúcar se requieren y que volumen de agua.
Tarea 3	Construir una tabla en donde se indique cuantos gramos de azúcar se requieren para preparar 100 mL de las siguientes soluciones porcentuales: 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 35%, 40%, 45%, 50%, 55%, 60% , 65% y 70%.
Tarea 4	Con la tabla construida elaborar una gráfica. ¿Qué representa la gráfica?; ¿Qué variable representa el eje x? ¿Qué variable representa al eje y?; ¿Dónde se espera que la gráfica corte al eje de las y? Explica por qué. Se puede obtener la ecuación de la gráfica ¿Cuál es?.

Situación C	Mezclado de soluciones químicas (Balance de materia).
Las tareas que se plantean en esta situación tienen el objetivo de que el estudiante analice el comportamiento lineal mediante la obtención de combinaciones de concentraciones y volúmenes (Cada uno por separado) para posteriormente confrontarlo con la idea de manejar las dos variables simultáneamente. Induciéndolo a la búsqueda de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para su solución. Una vez obtenido el modelo matemático se busca el análisis en la representación gráfica. De tal manera que los conceptos que se trabajan en esta situación estén relacionados con ecuaciones lineales y sistema de ecuaciones lineales (representación analítica y gráfica). A su vez se vinculan los conocimientos matemáticos con los técnicos al estarse resolviendo un problema del área profesional.	

Situación C: Mezclado de soluciones químicas	
Tarea 1	A partir de los 100 mL al 35% y los 100 mL al 60%, indica que volumen podrías colocar de cada una de las soluciones si quieres obtener un volumen final de 100 mL (no consideres la concentración); escribe estas combinaciones en una tabla de datos y luego grafícalos. Explica que representa la gráfica. Escribe una ecuación matemática que describa la mezcla de volúmenes.
Tarea 2	Ahora solo toma en cuenta las concentraciones para obtener una mezcla resultante al 50% (no tomes en cuenta el volumen).Escribe estas combinaciones en una tabla de datos y grafícalos. Explica lo observado en la gráfica. Escribe una ecuación que represente el mezclado de las concentraciones.
Tarea 3	Ahora se debe considerar tanto el volumen como la concentración para reparar con las dos soluciones una mezcla para obtener una solución resultante de 100 mL al 50%. Debes comprobar la concentración mediante el refractómetro. ¿Cuántas posibles combinaciones existen que satisfagan las dos condiciones?¿Por qué? Escribir cuál es la(s) expresión(es) matemática(s) que permite obtener los mililitros a mezclar de cada una de las dos soluciones para obtener 100 mL al 50%. La expresión matemática ¿Se puede representar gráficamente? Si es así ¿Qué representa la gráfica?. En relación con la representación gráfica, explica qué sentido tendría un resultado obtenido en el segundo y cuarto cuadrante.

Situación D	Aplicación en la industria.
Con el objetivo de analizar la progresión en la adquisición del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia, se plantea una última actividad enmarcada por un problema de mezclado de sustancias azucaradas, teniendo la finalidad de preparar un néctar. Es decir este problema emula una situación real ubicada en la industria de los alimentos.	

Situación D: aplicación en la industria.	
Tarea 1	Se desea obtener un lote de néctar de mora que tenga 20% de pulpa y 12 ° Bx finales, con un índice de madurez de 15. (Recordar que el índice de madurez es la relación de azúcar/ácido

	presentes en el néctar). La pulpa disponible tiene 12° Bx y 1.6% de acidez. *¿Cuántos Kg de pulpa y de sacarosa se deben mezclar para obtener un lote de néctar con 20% de pula y 12 °Bx?.*

II) Aproximación cognitiva

La aproximación cognitiva del concepto de interés se realizó en cada una de las etapas de las situaciones planteadas, se analizó y clasificó el tipo de representación e invariantes operatorios utilizados por el grupo de enfoque para dar respuesta a las tareas planteadas (tabla 1).

Tabla 1. Aproximación cognitiva al campo de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de mezclado de soluciones químicas.

Situación	Tarea	Tipo de representación		Invariantes operatorios	
		Esquema de entendimiento	Esquema de solución	Invariante	Categoría de análisis
A. Estado inicial del CC de SEL2 -BM *Escenario: salón de clases*	Comprensión del campo conceptual de SEL2 en el contexto del BM	*C* *N*	*NA* *SE*	Ec. Lineal, rep. Graf y anal.# de incógnitas y # de ecuac. Métodos de solución, BM, Concentración	*EE,R, CL*
	Solución de un problema contextualizado por medio de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	*No se resolvió el problema.*			
B. Comprensión del fenómeno *Escenario: salón de laboratorio*	Preparar 100 mL de solución azucarada al 35%.	*C* *C*	*A* *NA*	Entradas y salidas del BM, [Soluto] [%]; azúcar=°Bx	*R, OP, RS*
	Preparar 100 mL de solución azucarada al 60%.	*C* *C*	*A* *NA*	Cálculos matemáticos [%]; azúcar=°Bx	*R, OP, RS*
	Comportamiento gráfico de una ecuación lineal.	*C* *C*	*NA* *A*	Correspondencia entre pares ordenados. Grafica a partir de datos (interpretación de c/u de los elementos)	*R, OP, RS*

Situación	Tarea	Tipo de representación		Invariantes operatorios	
		Esquema de entendimiento	Esquema de solución	Invariante	Categoría de análisis
C. Mezclado de soluciones químicas. *Escenario: salón de laboratorio*	Mezcla de soluciones química (volumen).Considerar soluciones azucaradas	*C*	*A*	Y=mx+b, comportamiento decreciente (signo -) relación c/fenómeno.	*RP, OP, RS*
	Mezcla de soluciones química (concentración).	*C*	*A*	Relación de rep. Grafica, tabular y analítica.	*RP, OP, RS*
	Mezcla de soluciones (Considerando volumen y concentración)	*NC* *NC* *C*	*NA* *A* *A*	Relación azúcar vs °Bx Variables, constantes. Planteamiento y solución de un SELC2 Relación gráfica-anal.	*RP, OP, RS*
D. Aplicación en el área técnica y la industria. *Escenario: salón de laboratorio*	Resolución de un problema contextualizado.	*C*	*A*	Obtención de SEL. Sol gráfica; relación gráfica y analítica.	*RP, OP, RS*
	Resolución de un problema de la industria	*C*	*A*	Elementos de contexto. Vinculación Elementos gráficos y analíticos.	*RP, OP, RS*

Fuente: Clasificación de resultados derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009).

NOTA: C= canónica; NC=no canónica; A=algorítmica; NA=no algorítmica; CL=clasificación; EE=Expresión escrita; RP=representación; OP=operacional; RS=resolución.

III) Progresividad en el dominio del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en situaciones de mezclado de sustancias químicas

Atendiendo cada una de las situaciones se posibilitó el analizar el progreso del grupo de enfoque en el dominio del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del mezclado de sustancias químicas. Como resultado se presenta una propuesta de diferentes niveles de dominio del campo conceptual de interés (tabla 2) misma que sirvió para caracterizar el avance

de la adquisición del conocimiento del grupo de enfoque en torno al campo conceptual de interés (Tabla 3) observándose que el dominio del campo conceptual, por parte del grupo de enfoque, ocurrió a lo largo del tiempo, a través de la experiencia, madurez y aprendizaje dado por las situaciones propuestas.

Tabla 2. Niveles de dominio del Campo Conceptual de Sistema de ecuaciones lineales en situaciones de mezclado de sustancias químicas.

Nivel	Descripción
N_0	Ausencia de invariantes operatorios para comprender el concepto de Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia.
N_1	Reconocimiento de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin explicación de significados científicos aceptables del concepto.
N_2	Reconocimiento de sistema de ecuaciones lineales y explicación parcial de significados científicos del concepto: reconoce situaciones en donde se pueden utilizar ecuaciones, ecuaciones lineales, representación grafica de ecuaciones lineales así como sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y representación gráfica.
N_3	Transición entre un reconocimiento y significación parcial del concepto de Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con aplicación del concepto a situaciones y problemas del contexto de balance de materia.
N_4	Aprehensión del concepto para el nivel de instrucción: manifiesta comprensión y explicitación de conocimientos en acción del concepto. Usa operaciones, representaciones simbólicas y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales en diferentes situaciones de contexto.

Fuente: Caracterización de niveles de conocimiento derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009)

Tabla 3. Nivel de conceptualización del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en situaciones de mezclado de sustancias químicas.

Situation	Tarea	Nivel de conceptualización				
		N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
A. Estado inicial del CC de SEL2 -BM	Comprensión del campo conceptual de SEL2 en el contexto del BM	✓	✓			
	Solución de un problema contextualizado por medio de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	✓				

Situation	Tarea	Nivel de conceptualización				
		N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
B. Comprensión del fenómeno	Preparar 100 mL de solución azucarada al 35%.		✓	✓		
	Preparar 100 mL de solución azucarada al 60%.			✓		
	Comportamiento gráfico de una ecuación lineal.			✓		
C. Mezclado de soluciones químicas.	Mezcla de soluciones química (volumen).Considerar soluciones azucaradas			✓		
	Mezcla de soluciones química (concentración).			✓		
	Mezcla de soluciones (Considerando volumen y concentración)			✓	✓	
D. Aplicación en el área técnica y la industria.	Resolución de un problema contextualizado.				✓	
	Resolución de un problema de la industria				✓	✓

Fuente: Resultados derivados del análisis cognitivo del grupo de enfoque (2009).

Conclusiones

Con los resultados presentados se puede concluir que es necesario conocer en los alumnos las características de sus conocimientos previos y el desarrollo conceptual, siendo condiciones necesarias para un aprendizaje significativo de conceptos científicos, de igual manera resulta importante conocer el grado de comprensión de los estudiantes en un ambiente de aprendizaje matemático contextualizado, para saber previamente si pueden comunicar y explicar fenómenos de contexto, usando el lenguaje propio del área, debido a que en muchas ocasiones los estudiantes no comprenden los significados y estructuras simbólicas del contexto, lo cual obstaculiza necesariamente el logro de aprendizajes significativos.

El conocimiento de los estudiantes en torno al campo conceptual de interés se ha descrito a partir del análisis de la variación en las representaciones de entendimiento y solución de las situaciones planeadas, posibilitando la identificación de las invariantes operatorias en las conceptuaciones de los estudiantes.

Finalmente la importancia de proponer en la clase de matemáticas problemas en el contexto profesional o técnico de los alumnos permite que ellos se involucren en su resolución así mismo se

posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, (pp. 123-153). México.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. Educación Matemática. 17(2), 7-34.

Herrero, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 7(1), 49-78.

Meyer, M. R. and Diopoulos, G. (2002). Anchored learning in context. Mathematics Teaching in the Middle School 8 (1), 16.

Ochoviet, F. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Riodan, J. E. and Noyce, P.E. (2001). The impact of two standard based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. Journal for Research in Mathematics Education 32 (4), 368.

Rivera, C. R. E., Leyva, S.E., Amado, M. M.G. (2003). El estudio del dominio del lenguaje algebraico que prevalece entre alumnos de nuevo ingreso, Universidad Autónoma de Baja California-Instituto Tecnológico de Mexicali. Mosaicos Matemáticos. 11, 115-120.

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10 (2), 133-170.

COMPRENSIÓN DEL NÚMERO NATURAL: EQUIVALENCIA, COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN

Juan José Giraldo Huertas
Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Cali — Colombia
juangiral@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento numérico — Nivel: Básico

Resumen. *Los modelos de procesamiento numérico y redes conceptuales para la construcción del número natural (Dehaene, 1997; Fuson, 1998) son insuficientes para varias preguntas sobre la comprensión del número natural (Skemp, 1980/1999; Vergnaud, 1991/2004). Por lo anterior, se identifican las relaciones que favorecerían la comprensión del número natural en 61 niños y niñas de dos grados escolares (Transición=30; 1º de primaria=31), a partir de los desempeños en diversas tareas. Los resultados indican que además de diferencias significativas entre ambos grados en todas las tareas, existe una fuerte interacción entre los desempeños parciales en las tareas (excluyendo a las tareas de orden) y el desempeño general. Al observar con mayor detalle los coeficientes, podemos indicar que el mayor efecto es para los desempeños en las tareas de Equivalencia (β = .331, p < .000) y el menor efecto para las tareas de Escritura (β = .090, p < .007).*
Palabras clave: comprensión, número natural, equivalencia, composición, lectura y escritura

Introducción

En el campo de la educación matemática, los enfoques que definen la comprensión (Skemp, 1980/1999), identifican con claridad los componentes y relaciones que se presentan bajo dos maneras de asumir *la comprensión*: como estado u objeto (la estructura de Wittrock, 1990) y como proceso u acción que permite operar y transformar (Simon, 1986). Otra manera de analizar la comprensión en el campo de la educación matemática, propone una dicotomía entre enfoques que la definen desde una aproximación atomizada y desde otra aproximación más integral (Gallardo, González y Quispe, 2008). Bajo esta última aproximación, una estructura propuesta por Fuson (1998) que recibe el título de *red de soporte conceptual* (conceptual-support net), presenta tres componentes que se relacionan en la construcción conceptual del número: referentes de cantidad (objetos concretos), expresiones numéricas (palabras) y notaciones numéricas (numerales arábigos). Estos tres componentes son comunes a diversos y variados modelos del número natural (Dalton, 2008), los cuales se usan con frecuencia en la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción de numerales de dos dígitos. Dentro del modelo de Fuson (1998), sólo nos interesa atender al núcleo o centro significativo de las relaciones entre estos componentes, que hacen parte de modelos e investigaciones que analizan la construcción

del número natural desde una perspectiva constitutiva e integradora (Fuson, 1990; Piaget & Szeminska, 1967; Skemp, 1980/1999; Vergnaud, 1991/2004). Cada componente se presentará en la revisión bibliográfica con una breve justificación para su inclusión.

Revisión bibliográfica

Entre las relaciones que se pueden incluir en el estudio de la comprensión del número natural, las de equivalencia y de orden son privilegiadas para el estudio de la síntesis entre los procesos de orden y cardinalidad numérica (Piaget y Szeminzka, 1967). En dicha obra se ofrece una perspectiva del número como síntesis de dos tipos de relaciones: el orden y la inclusión jerárquica. Con estas relaciones puede afirmarse que, en la medición de conjuntos de objetos aislables, se construyen y comprenden las relaciones binarias que definen y dan sentido al conjunto numérico de los naturales (Skemp, 1980/1999; Vergnaud, 1991/2004). Para Piaget y Szeminzka (1967) las relaciones de equivalencia y orden serían esenciales para la construcción del número natural y pueden verificarse cuando las estructuras mentales de niños y niñas permiten una colaboración "solidaria" entre los procesos ordinales y cardinales (Piaget y Szeminzka, 1967). Esto quiere decir que para comparar dos colecciones que representan un mismo número o uno mayor que otro, el niño deberá anular la relación física del material y realizar la equivalencia entre los valores correspondientes para cada colección.

Por otro lado, la importancia y especificidad que atribuimos a la composición y descomposición de colecciones con material concreto en la comprensión del número natural, se debe a las relaciones entre los diversos formatos (expresiones verbales y numerales arábigos) y las operaciones que se abstraen del manejo y manipulación de objetos o materiales concretos (Vergnaud, 1991/2004; Behr, Harel, Post & Lesh, 1994; Lakoff y Nuñez, 2000). En este sentido, la noción de "homomorfismo" (Pallares, 2006; Vergnaud, 1991/2004) cobra importancia para la definición de comprensión que proponemos; en especial, porque nos permite asumir que las operaciones (S) que se realicen en el conjunto de partida (E) serán las mismas operaciones (S') que se realicen en el conjunto de llegada (F), tal y como se espera en lo que algunos autores han llamado "matemática de la cantidad" (Behr et al., 1994). Esta posibilidad de observar la correspondencia entre operaciones y conjuntos diferentes de elementos y relaciones, hace parte de diseños y estudios previos que han buscado una relación entre habilidades matemáticas y tareas con

material concreto (Saxton & Cakir, 2006; Towse & Saxton, 1997). Nuestros resultados tratarán de hacer un aporte a dichas afirmaciones al medir los desempeños de los niños y niñas de Transición y 1° de primaria en la resolución de tareas de asignación de valor y composición de verbal y arábigo.

Por último, tendremos en cuenta las actividades de mayor inclusión y atención escolar en la construcción del número natural: la lectura y escritura de numerales. Ante la frecuencia e intensidad de esas actividades, desde diversos enfoques (Dehaene, 1997; Fuson, 1998; Spelke, 2000; Lipton & Spelke, 2005, Leslie, Gelman y Gallistel, 2008) no parecen existir mayores dudas sobre la relación entre la comprensión del número y las habilidades que permiten el dominio de los sistemas de representación del número (e.g., Sistema de notación en Base 10). Por tanto y aunque existe un amplio consenso sobre la relación entre los formatos y los sistemas de representación de los números naturales (Collet & Grégoire, 2003), se desconocen los mecanismos cognitivos que nos pueden ayudar a comprender por qué los niños y niñas cometen frecuentes errores en la lectura y escritura de numerales arábigos (Castaño-García, 2008). Este estudio nos permitirá una mayor claridad sobre la relación entre estas actividades escolares y la comprensión del número natural en los niños y niñas de transición y 1° de primaria.

Todo lo anterior implica que es posible explorar *la comprensión* como *una relación o cohesión entre componentes de una estructura conceptual,* al identificar el peso que tiene el desempeño de los niños y niñas de transición y 1° de primaria en tareas que exigen los componentes de la estructura teórico conceptual de los naturales, sobre la comprensión general, es decir, incluidas todas las tareas.

Metodología

Participantes: Se trabajo con 61 niños y niñas (27 niñas – 44% y 34 niños – 56%) de dos grados escolares (30 de Transición y 31 de 1º de primaria) y con edades promedio de 81 meses (*6; 9 años, meses*; *SD*: 6 meses; rango: 76-84 meses) para Transición y 93 meses (*7; 9 años, meses*; *SD*: 2 meses; rango: 86-97 meses) para 1º de primaria. La selección de los niños y niñas se hizo teniendo en cuenta la disponibilidad y acceso que proporcionaron las directoras de grupo en cada grado. Los niños y niñas pertenecen a una institución privada de la ciudad de Cali, con un nivel

socioeconómico entre los estratos 3 y 5. Los participantes no fueron evaluados en cuanto a habilidades cognitivas o conceptuales para las matemáticas, ni presentan reportes de dificultad o déficit escolar alguno; son hispano-parlantes y el predominio étnico es mestizo y blanco.

Tareas y Materiales: Para indagar la comprensión del número natural, a los niños y niñas de Transición y 1° de primaria, se aplicaron tres tipos de tareas y se utilizaron materiales concretos diferenciados por valor y tamaño : (cubos de valor 1, de 1cm de arista: ; cubos de valor 10, de 2 cm de arista:). Estas tareas se aplicaron así:

1. Dos versiones de la tarea de Equivalencia (12 vs. 12; 21 vs. 21). Se pide a los niños y niñas comparar dos colecciones de igual valor: una colección convencional configurada por cubos que representan el valor y el número de decenas y unidades que corresponden con los numerales propuestos (12: ; 21:) y una colección no convencional configurada por un número mayor de unidades que las correspondientes con los numerales propuestos (12: ; 21:).

2. Tres versiones de la tarea de Orden (9 vs. 11; 12 vs. 19; 19 vs. 21). Se pide a los niños y niñas comparar dos colecciones: una colección de menor valor y una de mayor valor (p.ej., 12: vs. 19:). En dos versiones, la colección de menor valor presenta un número mayor de cubos que la colección de mayor valor (9: vs. 11: ; 19: vs. 21:).

3. Seis versiones de la tarea de Asignación de valor y dos modalidades de la tarea de Composición (verbal y arábigo) con seis versiones cada una para construir colecciones de igual valor que las de Asignación de valor (9, 11, 12, 19, 21 y 91). La respectiva presentación de cada tarea es:

    a) Asignación de valor: se pide a cada niño y niña que exprese verbalmente el valor de una colección convencional de cubos. Los valores de las colecciones presentadas son: [9] –nueve cubos de 1; [11] –un cubo de 10 y un cubo de 1; [12] –un cubo de 10 y dos cubos de 1; [19] –un cubo de 10 y nueve cubos de 1; [21] –dos cubos de 10 y un cubo de 1; [91] –nueve cubos de 10 y un cubo de 1).

b) Composición de verbal: cada niño y niña debe construir una colección correspondiente con un número que el entrevistador pronuncia en voz alta (Numerales verbales hablados: "nueve", "once", "doce", "diecinueve", "veintiuno" y "noventa y uno").

c) Composición de arábigo: cada niño y niña debe construir una colección correspondiente con un numeral arábigo impreso en una tarjeta de 12 cm x lado, en letra Arial de 98 puntos (Numerales arábigos: 9, 11, 12, 19, 21 y 91).

4. Seis numerales de la tarea de Lectura, en las que se utiliza el mismo numeral arábigo impreso para las tareas de Composición de arábigo (9, 11, 12, 19, 21 y 91) y se solicita a cada niño y niña que lo lea en voz alta.

5. Seis numerales de la tarea de Escritura de numerales arábigos, para las cuales se entrega a cada niño y niña una hoja de papel tamaño carta con un lápiz mina H2 y se le pide que escriba el número que el entrevistador pronuncia en voz alta ("nueve", "once", "doce", "diecinueve", "veintiuno" y "noventa y uno").

Procedimientos: Todas las tareas se aplican de manera individual, sobre una superficie repartida en tres zonas con cinta de enmascarar, formando una "T" hacia el entrevistador. En estas tres zonas se reparten 60 cubos pequeños en seis hileras de 10 cubos cada una y 35 cubos grandes en siete hileras de cinco cubos cada una. En la línea que divide la superficie entre el entrevistador y el niño o la niña, se ubica una pantalla móvil que impide al niño observar la manera como el entrevistador forma las colecciones con el material concreto, para las versiones de las tareas de equivalencia, orden y asignación de valor. Para la aplicación de las tareas, se programaron dos momentos, distanciados temporalmente con al menos un día entre cada sesión. Todas las sesiones se registraron con medios audiovisuales y se digitalizaron posteriormente. No se restringió el tiempo para la realización de las tareas y el promedio del tiempo de aplicación de las tareas, por sesión, fue de 10 minutos con 20 segundos para la primera sesión y 9 minutos con 25 segundos para la segunda sesión.

Resultados

Al observar la distribución de todos los niños y niñas, tanto de transición como de primero, podemos afirmar que ningún niño o niña de transición y 1° de primaria se encuentra en los dos

niveles más bajos de la escala y más del 70% de niños y niñas de ambos grados, supera el promedio de la escala. Además, el 50% o más de los niños y niñas de ambos grados, se encuentran por encima los promedios grupales (transición: *X*=61,6; *DE*=22,2; 1° primaria: *X*=79,4; *DE*=18,6), ubicándose en los niveles más altos de la escala de desempeño.

Comparación de desempeños entre Transición y 1° de primaria

Al comparar los puntajes de desempeños entre grados y entre tareas, podemos observar tal y como era de esperarse, que en todas las tareas sin excepción, el desempeño en transición es menor que en 1° de primaria.

Esta comparación nos indica que en general, para los niños y niñas de transición y de 1° de primaria, las tareas más difíciles son las de equivalencia (transición: *X*=22,5; *DE*=35,3; 1° primaria: *X*=46,6; *DE*=41,8) y después las tareas de asignación de valor (transición: *X*=46,4; *DE*=31,3; 1° primaria: *X*=62,7; *DE*=31,2); le siguen en dificultad las tareas de composición de verbal (transición: *X*=53,1; *DE*=30,4; 1° primaria: *X*=73,7; *DE*=31,1), composición de arábigo (transición: *X*=56,5; *DE*=30,4; 1° primaria: *X*=78,4; *DE*=23,4) y orden (transición: *X*=56,7; *DE*=41,1; 1° primaria: *X*=80,5; *DE*=32,8). Por el contrario, resultan más fáciles las tareas de escritura (transición: *X*=86,4; *DE*=14,3; 1° primaria: *X*=97,8; *DE*=7,5) y después las de lectura (transición: *X*=86,3; *DE*=13,3; 1° primaria: *X*=96,2; *DE*=8,7). Un análisis estadístico de estas comparaciones, nos indica que las diferencias entre los desempeños de los niños y niñas de transición y 1° de primaria, son significativas en todas las tareas: *Equivalencia* ($t(59) = -2.43$, $p < .05$, $r = .30$), *Orden* ($t(59) = -2.51$, $p < .05$, $r = .31$), *Asignación de Valor* ($t(59) = -2.03$, $p < .01$, $r = .26$), *Composición de verbal* ($t(59) = -3.15$, $p < .01$, $r = .38$), *Composición de Arábigo* ($t(59) = -2.61$, $p < .01$, $r = .26$), *Lectura* ($t(59) = -3.43$, $p < .01$, $r = .38$) y *Escritura* de numerales ($t(59) = -3.89$, $p < .01$, $r = .38$).

Efecto del desempeño de los niños y niñas de Transición y 1° de primaria en cada tarea sobre el desempeño general

Para identificar con mayor claridad el efecto que puede tener cada tarea en el desempeño general de los niños y niñas de Transición, se realiza un análisis de regresión de los desempeños en los numerales 12 y 21 para las tareas de *Equivalencia*, *Asignación de valor, Composición de arábigo*, *Composición de verbal*, *Lectura* y *Escritura*, debido a que el diseño utilizado sólo permite hacer análisis para estos numerales en estas tareas: No se tiene en cuenta las Tareas de Orden, por que

las versiones en esta tarea no corresponden con las versiones de las tareas que se analizan en el modelo de regresión. Con este análisis, el modelo que emerge es altamente significativo, puesto que las variables utilizadas llegan a explicar el 95% de la varianza, $F_{6,\ 54}$ = 204.62, p<.000, R^2 ajustado = .95. Al observar con mayor detalle los coeficientes (Ver Tabla 1), podemos indicar que en orden de mayor a menor efecto, el mayor efecto se encuentra para los desempeños en las tareas de *Equivalencia*, luego en la *Composición de arábigo*, *Asignación de valor*, *Composición de verbal*, *Lectura* y por último, *Escritura*.

Tabla 1. Resumen de análisis de regresión de efectos simples para las variables (tareas) que predicen el desempeño general de los niños y niñas de transición y 1° de primaria (N=61)

	B	***SE B***	**B**
Constante	0.03	0.03	
Equivalencia	0,32	0,03	,33**
Asignación Valor	0,26	0,04	,26**
Composición verbal	0,20	0,04	,21**
Composición arábigo	0,30	0,04	,31**
Lectura	0,11	0,03	,11*
Escritura	0,09	0,03	,09*

Nota: R^2 ajustado = .95; *p<.01, **p<.001

Discusión

Los resultados indican que las tareas elegidas nos permiten una aproximación valida y confiable para el estudio de la comprensión del número natural. La relación entre el desempeño en las tareas de equivalencia, de orden y el desempeño general, nos permite inferir que algunas propiedades formales del sistema numérico de los naturales no son fácilmente adquiribles a través de los formatos de representación del número o del trabajo con materiales concretos. Sin embargo, una gran proporción de niños y niñas tanto de Transición como de 1º de primaria, pueden trabajar con el valor que se asigna al material concreto y construir propiedades y habilidades numéricas avanzadas. Más del 50% de los niños y niñas de Transición y de 1º de primaria se ubican por encima del promedio de cada grupo (Transición: 53,3%; 1º primaria: 67,7%). Si atribuimos el desempeño en las tareas elegidas a un dominio de componentes que hacen parte de modelos e investigaciones que analizan la construcción del número natural desde una perspectiva que es, simultáneamente, formal y cognitiva (Piaget & Szeminska, 1967;

Vergnaud, 1991/2004), podemos afirmar que la mayoría de niños en los primeros años de escolaridad ya comprenden los conceptos y soportes que permiten la construcción del número natural.

Es posible que, para mejorar el modelo propuesto, sea necesario indagar y discriminar las estrategias que usan los niños, con tiempos de reacción para la resolución de cada tarea. Esto permitirá una mayor validez de los procesos y operaciones que hemos intuido en la observación del comportamiento de los niños y niñas de Transición y 1º de primaria y que hace parte del modelo teórico propuesto. El análisis de los errores en las tareas de Lectura y de Escritura, podría conducirnos a incorporar los controles y las categorías de otras investigaciones más precisas y detalladas (Orozco, Guerrero y Otálora, 2007).

Por el momento, podemos señalar una dirección segura que acerca estudios futuros sobre la comprensión del número natural, en el desarrollo de habilidades, estrategias y errores que definen al número tanto de manera formal como cognitiva.

Referencias bibliográficas

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. En: G. Harel and J. Confrey (Eds.). The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics. (pp. 123-180). Albany, New York : SUNY Press.

Castaño-García, J. (2008). Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas. Universitas Psychologycal, 7 (3), 895-907

Collet, M. & Grégoire, J. (2003). The development of the relationships between representation of quantities, verbal oral and arabic representations for two-digit numbers. En: L. Mason, S. Andreuzza, B. Arfè and L. Del Favero (Eds.). 10th Biennial Meeting of the European Association for Research on Learning and Instruction. Padova, Italia: CLEUP.

Dalton, P. (2008) An Investigation of Instruction in Two-Digit Addition and Subtraction Using a Classroom Teaching Experiment Methodology, Design Research, and Multilevel Modeling. Tesis doctoral no publicada. Escuela de Educación de Souther Cross University.

Dehaene, S. (1997). The number sense. New York: Oxford University Press.

Fuson, K. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. Cognition and Instruction, 7 (4), 343-403

Fuson, K. (1998). Pedagogical, Mathematical, and Real-World Conceptual-Support Nets: A Model for Building Children's Multidigit Domain Knowledge. Mathematical Cognition, 4 (2), 147-186

Gallardo, J., González, J. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11 (3), 355-382

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). Where mathematics come from. New York: Basic Books.

Leslie, A., Gelman, R. y Gallistel, C. (2008). The generative basis of natural number concepts. Trends in Cognitive Sciences 12 (6), 213-218

Lipton, J., & Spelke, E. (2005). Preschool children's mapping of number words to nonsymbolic numerosities. Child Development 76 (5), 978-988

Orozco, M., Guerrero, D. & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. Infancia y aprendizaje 30 (2), 147-162.

Pallares, I. (2006). Unificación conceptual en matemáticas. En: J. González (Ed.) Perspectivas contemporáneas sobre la cognición. (pp. 212-236).Morelos, México: Siglo XXI Editores.

Piaget, J. y Szeminzka, A. (1967). Génesis del Número en el Niño. Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Saxton, M. & Cakir, K. (2006). Counting-On, Trading and Partitioning: Effects of Training and Prior Knowledge on Performance on Base-10 Tasks. Child Development 77 (3), 767–785

Simon, H. (1986). An information processing explanation of Gestalt phenomena. Computers in Human Behavior, 2, 241-55. Reimpreso en: Simon, H. (1989) Models of thought V. 2, New Haven: Yale University Press

Skemp, R. (1980/1999). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ediciones Morata.

Spelke, E. S. (2000). Core knowledge. American Psychologist 55, 1233–1243.

Towse, J. N., & Saxton, M. (1997). Linguistic influences on children's number concepts: Methodological and theoretical considerations. Journal of Experimental Child Psychology, 66 362–375.

Vergnaud, G. (1991/2004) El niño, la matemática y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. México: Trillas Editorial

Wittrock, M. (1990) Generating processes of comprehension. Educational Psychologist 24 (4), 345-376.

OBSTÁCULOS, DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Mariela Lilibeth Herrera Ruiz
Unidad Educativa Nacional: "Creación Barrio 19 de Abril" Venezuela
marielalilibeth@gmail.com, marilibeth@yahoo.es
Campo de investigación: Pensamiento numérico Nivel: Medio

Resumen. *Este artículo constituye el reporte de una investigación que pretende describir los problemas y conflictos cognitivos que surgen en estudiantes de 3º año de educación media durante el aprendizaje de los números irracionales, conflictos interrelacionados con la teoría propuesta por Socas (1997) sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. Para ello, se recolectaron los cuadernos y las evaluaciones escritas de los estudiantes, y se diseño y aplicó un cuestionario.*
La investigación pretende explorar el primer contacto de los estudiantes en la educación formal con los números irracionales en las condiciones habituales en la que tiene lugar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y asimismo, resaltar la importancia del rol investigador del docente, ya que al investigar dentro de su salón del clase el docente puede realizar una descripción detallada y densa de la realidad, ya que forma parte del contexto educativo.
Palabras clave: dificultades, obstáculos, errores, números irracionales

Introducción

La aplicación del Teorema de Pitágoras a los lados y a la diagonal del cuadrado evidenció la existencia de los inconmensurables, y el surgimiento de los Números Irracionales desencadenó una crisis de los fundamentos de matemática en la época griega cuando sólo se reconocían como números a los naturales y a ciertas fracciones. Esta crisis involucró a tres nociones matemáticas: el *número* y su concepción entera, finita y positiva, el *principio de no contradicción* que propició el rechazo de los irracionales al conllevar a la paridad de los números impares como consecuencia de suponer la diagonal conmensurable, y por ultimo, *el campo operativo* donde se realizan las operaciones por estar inmerso el número. Por todo esto, está crisis desencadenó la reflexión del concepto de número y el desarrollo de una teoría para los irracionales desde la reestructuración de las ya concebidas. Sin embargo, es hasta el siglo XIX que Dedekind (1831-1916) introduce las "cortaduras" para realizar la construcción formal de los números reales.

Por lo controversial de su historia, resulta de especial interés el aprendizaje de los irracionales, sobre todo porque el conocimiento de las operaciones y sus propiedades se requiere para temas tan importante como: el Teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos, la ecuación ordinaria

de la circunferencia, el cálculo de áreas, la resolvente, las sustituciones trigonométricas. Aunado esto, a que los números reales que constituyen la base del análisis matemático, y del desarrollo del pensamiento numérico.

Bases Teóricas

El marco teórico soporte de esta investigación se fundamenta en la adopción de la teoría propuesta por Socas (1997) en su tesis doctoral sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, las dimensiones afectivas descritas por Gómez (2000), la teoría de obstáculos de Brousseau (1976) y la teoría de errores de Radatz (1979).

Para Socas (1997) "las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas" (p.35), de manera que éstas vienen a ser el resultado de un combinación de elementos intramatemáticos (objetos, procesos, simbolismo, etc.) y extramatemáticos (cognición, actitudes, etc.). La clasificación que hace este autor de las dificultades obedece a la naturaleza de su origen:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas*: *se relaciona con el lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:* se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático; los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas, pueden generar errores.
- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas:* los métodos de enseñanza deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular.
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos:* al momento de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza se deben considerar las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus características y capacidades.

- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* en esta investigación el dominio afectivo comprende las: creencias, actitudes y emociones, que actúan como fuerza impulsadora o de resistencia al cambio de la actividad matemática.

Los obstáculos son dificultades propias del sujeto que conoce, causales de estancamiento y retroceso, es un conocimiento que por diversos motivos se han convertido en trabas. En cuanto a los tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico Brousseau (1976) distingue tres: *de origen epistemológico*, se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos, no quiere decir que se deben reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido; *de origen didáctico*, resultado de elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza; y *de origen ontogénico* o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño. En esta investigación sólo se consideraran los obstáculos epistemológicos y didácticos.

En cuanto a los errores, Radatz (1979) plantea su análisis puede ayudar a clarificar cuestiones elementales del aprendizaje de las matemáticas y los categoriza en cinco clases:

- *Dificultades del lenguaje*: los errores se derivan del uso inadecuado o erróneo de los símbolos y términos matemáticos, por lo que su aprendizaje se realizó inadecuadamente.
- *Dificultad para obtener información espacial*: este tipo de error se genera de las representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos*: son causados por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos para las tareas matemáticas adquiridos previamente.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento*: se relacionan con la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas, y se subdividen en cuatro tipos: por perseverancia, de asociación, de inferencia, y de asimilación.
- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* los errores son producidos cuando se emplean reglas o estrategias análogas en contenidos diferentes, ya el razonamiento por analogía no siempre funciona en Matemática.

Objetivos de la investigación

El objetivo de esta investigación es explicar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales, a partir de las dificultades y obstáculos, contemplando como objetivos específicos:

- Diagnosticar las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los números irracionales.
- Diagnosticar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.
- Describir los obstáculos que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.

Metodología

La reconstrucción y análisis de la realidad del fenómeno contempló una exploración metódica, minuciosa, comprensiva, desprejuiciada y profunda del proceso en estudio y se realizó a partir de las observaciones de los estudiantes en el salón de clases en las condiciones habituales en las que tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, privilegiando las actitudes y comportamientos espontáneos, es decir, se interpretaron las conductas de los estudiantes en su ambiente natural, se empleó un enfoque cualitativo y dado que la información fue aportada por el propio sujeto de estudio y que los hechos serán examinados en un contexto y sujetos específicos, el diseño corresponde al de estudio de casos, a la tipología de caso único y a la modalidad de micro-etnografía.

Los procedimientos de la investigación se dividirán en función de los objetivos específicos, y de acuerdo a la noción que se pretende comprender de la siguiente manera:

- *Para indagar las dificultades en el aprendizaje de los números irracionales*: se diseñó, validó y aplicó un cuestionario. A los datos obtenidos se le aplicó un análisis de contenido, empleando la reducción, la codificación y la representación a través de matrices.
- *Para indagar los obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales*: se realizó un registro anecdótico, se recolectaron artefactos (los cuadernos de los Informantes Claves). Se

analizaron los registros, considerando: contenido desarrollado, ejercicios realizados por el profesor, ejercicios planteados, intervención de los estudiantes, y comportamiento. Se analizaron los cuadernos de los estudiantes en cuanto a: correspondencia del contenido desarrollado en clase, observaciones o aclaratorias redactadas por el estudiante durante la explicación del profesor, ejercicios realizados por los estudiantes. El análisis y la presentación de los resultados se realizó de forma narrativa, a través de relatos de episodios y descripciones.

- *Para indagar los errores en el aprendizaje de los números irracionales*: se diseñó y aplicó las evaluaciones correspondientes al contenido de números irracionales. Se realizó un análisis de contenido de las evaluaciones realizadas por los alumnos para determinar los errores, se listaron los errores y se categorizaron de acuerdo a la tipología de Radatz.

Hallazgos

Los conflictos cognitivos encontrados en el aprendizaje de los números irracionales se especificaron de acuerdo a la noción que se pretende comprender de la siguiente forma:

Dificultades en el aprendizaje de los números irracionales:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas:* se detectó la confusión semántica por la injerencia del lenguaje cotidiano de homónimas en la enseñanza de los irracionales: la palabra *raíz* los estudiantes la asociaron con árbol, la palabra *índice* la asocian con el dedo que lleva ese nombre y con la tabla de contenido de un trabajo; *radical* la relacionan con la ropa, moda, con una persona atrevida, audaz y decidida; la palabra *coeficiente* la afilian con la medición intelectual y como sinónimo de eficiente; la palabra *racional* en su mayoría la asocian con número, sin embargo, algunos alumnos la consideran sinónimo de equilibrio; el *exponente* lo consideran un expositor o un cantante; y la palabra irracional la relacionan con un atributo de la personalidad, con una persona que no entiende, con un animal, con algo incoherente o sin sentido.
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*: los estudiantes distinguen con facilidad el argumento lógico de una situación cotidiana; sin embargo, cuando el enunciado involucra nociones matemáticas los estudiantes no comprenden el

argumento lógico de la situación, incluyen información no propuesta y suelen omitir alguno de los datos dados. En cuanto a la abstracción, los estudiantes realizar inferencias más efectivas en dibujo o caricaturas que sobre figuras geométricas. En cuanto a los contenidos previos, se encontró que los estudiantes no reconocen la caracterización de los elementos de los distintos conjuntos numéricos, realizan la descomposición factorial de un número hasta encontrar un número primo no llegan al uno como factor mínimo, consideran que dos términos son semejantes si tiene la misma variable y no le prestan atención al exponente de la variable, al simplificar una expresión algebraica tienden a sumar todos los coeficientes sin prestar atención a la variable.

Los alumnos tienen problemas para sumar dos enteros de distintos signos, dos enteros negativos, un entero y una fracción, aplican la regla de la multiplicación de los signos al sumar; en cuanto a la multiplicación omiten el signo menos en el resultado al multiplicar dos números de distintos signos, emplean el procedimiento de la adición de fracción al multiplicar; para dividir dos fracciones suelen emplear la expresión decimal, es decir, realizan la división de las expresiones decimales equivalentes, emplean parcialmente el procedimiento de la adición de fracción al dividir, colocan el inverso del resultado; en potenciación, cuando el exponente es cero escriben como resultado la base o cero, cuando el exponente es uno escriben el cuadrado de la base sin considerar el signo de la base, suman la base tantas veces como el exponente, cuando la base es negativa y el exponente impar escriben la potencia positiva.

- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas*: los alumnos manifestaron que la cantidad de números representados sobre la recta numérica para explicar la ubicación de los números irracionales entre dos racionales (fracciones, enteros o naturales) entorpecía la explicación, sugirieron la graficación exclusiva de los irracionales en una recta numérica.
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: después de la lectura y explicación de cada uno de los ítems del cuestionario los estudiantes reiteradamente solicitaban al docente la explicación de los enunciados, evidenciando déficits del lenguaje y de la comprensión lectora.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* los estudiantes consideran que la matemática es importante, útil, difícil, agradable, compuesta

por reglas y operaciones, y aburrida; creen que la asignatura es importante para la universidad, el liceo, la vida cotidiana y el futuro; piensan que son poco exitosos en los exámenes, cuando no prestan atención o no entienden y despejando ecuaciones; de acuerdo a la percepción de los estudiantes los profesores enseñan usando el pizarrón, a través de la practica de ejercicios, de forma lógica, creativa, ordenada y con energía; y entienden cuando los profesores explican bien, con claridad, paciencia, lento, paso a paso, con exactitud cada proceso, cuando prestan atención y aclaran sus dudas.

Obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales

De origen epistemológico: los estudiantes identifican a 5 y $\sqrt{5}$ como un mismo número, consideran que todos los de decimales infinitos son irracionales.

- *De origen didáctico:* se empleó la relación pitagórica para explicar la representación de las raíces en la recta, sin embargo no se había enseñado el teorema de Pitágoras porque el tema requiere conocer los radicales. Se emplearon los radicales para explicar la insuficiencia de los racionales en la solución de ecuaciones de la forma $x^2=2$.

Errores en el aprendizaje de los números irracionales

- *Dificultades del lenguaje*: los alumnos identifican al radical como "v", y la lectura de es $\sqrt{5}$ "ve cinco"; emplean el signo igual para comparar dos elementos distintos.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos*: los alumnos no identifican cuando dos términos son semejantes, tienen dificultades con las operaciones de adición, multiplicación, división y potenciación en los números enteros y racionales, no realizan la descomposición factorial de un número correctamente, no reconocen el producto notable de una suma por su diferencia.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento*: al solicitarle identificar los elementos de un radical, la cantidad subradical los alumnos la consideran como coeficiente, como exponente de la cantidad subradical, como denominador de la cantidad subradical o como coeficiente; el denominador del coeficiente es considerado como cantidad subradical, como

exponente de la cantidad subradical, los alumnos identifican el denominador del coeficiente del radical como la cantidad subradical, como el índice, como el exponente de la cantidad subradical. Algunas veces los alumnos omiten elementos del radical, como: la cantidad subradical, el coeficiente y el exponente. Los alumnos no son identificados correctamente cuando dos radicales son semejantes, algunos sólo consideran la igualdad del índice de la raíz, otros sólo la igualdad de las cantidades subradicales, tampoco identifican cuando un radical es simple.

- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* los alumnos suman radicales sin verificar si son semejantes, tampoco realizan la reducción a radicales simples, ya que emplean los requerimientos de la multiplicación de radicales para su suma. Para multiplicar radicales de diferentes índices determinar el mínimo común múltiplo de los índices y lo emplean como índice común, sin embargo, no alteran la cantidad subradical.

Comentarios finales

Los errores presentados por los estudiantes no se deben percibir como simples descuidos o equivocaciones ingenuas, ya que su aparición es sencillamente la evidencia de los conflictos cognitivos que surgen producto de dificultades y obstáculos, por ejemplo, detrás de los errores por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento subyacen dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas, en concreto los estudiantes no identifican correctamente los términos de un radical ya que presentan dificultades de confusión semántica por la injerencia del lenguaje cotidiano de palabras homónimas. Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático originan errores por un aprendizaje deficiente de los prerrequisitos, en particular cuando los estudiantes no identifican si dos radicales es porque no comprenden cuando dos términos semejantes.

Para diseñar estrategias pedagógicas dirigidas a fomentar el pensamiento numérico necesitamos realizar previamente una investigación indagatoria de las deficiencias que presentan los estudiantes, y justamente esta investigación surgida dentro de la práctica profesional docente pretende servir de punto de partida para la elaboración de una propuesta didáctica.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et Ics problèmcs en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4 (2), 165-198.

Gómez C., I. (2000). Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. (En) Rico, L. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: ICE/Horsori pp.124-154

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal Research in Mathematics Education, 10(3), 163-177.

LAS PRUEBAS ESTANDARIZADAS DE MATEMÁTICAS: LO BUENO Y LO MALO, OPINIÓN DE DOCENTES

Edwin Chaves Esquivel
Universidad Nacional de Costa Rica — Costa Rica
echa@una.ac.cr, edwchaves@racsa.co.cr
Campo de investigación: Pruebas estandarizadas — Nivel: Medio

Resumen. *En el documento se realiza un análisis sobre las pruebas nacionales de Matemáticas para Bachillerato en Costa Rica, se incluye la opinión de una muestra de 249 profesores de esta disciplina pertenecientes a diferentes regiones educativas del país. Los resultados muestran que no existe consenso entre estos educadores respecto a la conveniencia de estos exámenes para mejorar el proceso educativo.*
Dentro de las principales preocupaciones se encuentra la denuncia que hacen las universidades por la mala formación matemática con que los jóvenes llegan a estas instituciones, el efecto que implica el uso de la calculadora para la resolución de estos exámenes, así como también preocupa el condicionamiento que las pruebas pueden provocar en la actividad académica cotidiana, específicamente en la metodología de trabajo y en las evaluaciones regulares del proceso educativo, entre otras.
Palabras clave: pruebas estandarizadas de matemáticas, examen de bachillerato

Introducción

Las pruebas nacionales estandarizadas

De acuerdo con lo que establece Popham (1999), una prueba estandarizada se concibe como un examen que se aplica siguiendo un predeterminado procedimiento estándar. Se conciben dos tipos generales de pruebas estandarizadas: *las pruebas de aptitud* y *las pruebas de logros*. Las pruebas de *aptitud* permiten establecer el nivel de preparación que tiene un estudiante para incursionar en un determinado nivel educativo subsiguiente, es decir, tiene un carácter predictivo sobre que podría pasar en el futuro. Como ejemplo se tienen los exámenes de admisión a las universidades. Por su parte, las pruebas estandarizadas de *logros* permiten determinar la eficiencia de un proceso educativo, es decir, tiene un carácter evaluativo (Popham, 1999). Un ejemplo de estas últimas son las pruebas nacionales estandarizadas que se aplican al culminar la Educación Media de Costa Rica. Con estas pruebas, se pretende determinar los conocimientos y destrezas que debe poseer el estudiante al finalizar la secundaria (Moreira, 2006).

Las pruebas nacionales estandarizadas se aplican en Costa Rica en las asignaturas de Español, Estudios Sociales, Idioma Extranjero (Inglés o Francés), Educación Cívica, un área de las Ciencias

Naturales (Física, Química o Biología) y Matemáticas. Un estudiante para poder concluir la Educación Media y poder optar por ingresar a la universidad debe aprobar este proceso en todas las asignaturas (APSE, 2009). Dichas evaluaciones son elaboradas por la División de Control de Calidad y Macroevaluación del Ministerio de Educación Pública (MEP). Su objetivo básico consiste en controlar la calidad del sistema educativo y acreditar a los estudiantes que han concluido sus estudios en la denominada Educación Diversificada, que corresponde al cuarto ciclo de la educación general, también denominada *Bachillerato*. Con estas evaluaciones se pretende democratizar el proceso educativo de manera que, sin importar la institución educativa, los estudiantes que aprueban la Educación Media tengan una formación similar en las asignaturas básicas (Moreira, 2006).

Los funcionarios de la División de Control de Calidad y Macroevaluación del MEP, en conjunto con los asesores nacionales de las respectivas asignaturas, elaboraron los *Temarios unificados para las Pruebas Nacionales de acreditación para Bachillerato.* En ellos se describen los contenidos y objetivos temáticos. Estos se elaboran tomando en cuenta los diversos niveles cognitivos de la taxonomía de Benjamín Bloom. Las pruebas se diseñan con referencia a normas. Los objetivos se plantean en términos de productos de aprendizaje, es decir, transciende los contenidos específicos del proceso desarrollado en el aula y permiten:

a) *Dirigir los resultados del aprendizaje al enfatizar en el contenido temático más importante y determinar su nivel cognitivo.*

b) *Planear eventos de evaluación válidos al especificar los resultados de aprendizaje esperados.* (Moreira, 2006, pág. 3)

Con respecto al valor ponderado de las Pruebas nacionales de Bachillerato, el artículo 113 del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP establece que la calificación del estudiante, en cada una de las asignaturas, se determinará mediante la combinación porcentual de la calificación obtenida en la respectiva prueba de Bachillerato con la "*nota de presentación*". La "*nota de presentación*" se define como el promedio de las calificaciones obtenidas por el estudiante en décimo año y en los dos primeros trimestres de undécimo año en la asignatura. Para establecer la nota final se asigna un valor del 40% a la nota de presentación y un 60% a la calificación obtenida en la Prueba Nacional. En el artículo 114 de este reglamento se establece que

la nota mínima ponderada debe ser superior o igual a 70 (APSE, 2009). Para más detalles sobre este tema se puede consultar el estudio de Moreira (2006).

Las pruebas estandarizadas de Matemáticas

Específicamente en el área de las Matemáticas, debido al nivel de dificultad de esta disciplina y a la trascendencia que los resultados tienen para el futuro de los jóvenes, año a año se genera un ambiente de tensión a su alrededor, no solo entre estudiantes, sino también entre profesores, padres de familia, autoridades de las instituciones educativas y del MEP e incluso en la opinión pública.

En el país se realizan estas pruebas en los años sesenta e inicios del setenta; en 1973 se eliminaron y se instauraron nuevamente en 1988. En ese momento se establecieron grandes expectativas alrededor de ellas, esperando que propiciaran una mejora significativa en el nivel de destrezas matemáticas con que los estudiantes terminarían la Educación Media y estarían preparados para la realización de estudios superiores (Chaves, 2003). No obstante, a pesar de las buenas intensiones que llevaron a la creación y aplicación de estas evaluaciones, los resultados evidencian que existen graves problemas asociados con su implementación. El problema que genera esta situación consiste en la trascendencia del examen para el desarrollo profesional y el crecimiento social de los estudiantes que participan en proceso educativo. Cada año cerca del 30% de los alumnos que concluyen la educación secundaria no aprueba el examen de Bachillerato en Matemáticas, por lo que terminan frustrados y, muchos de ellos, deben abandonar el sistema educativo.

En investigación realizada en la Universidad Nacional de Costa Rica relacionada con la enseñanza de la Estadística, se realizaron observaciones de aula en diferentes regiones educativas del país, en relación con las pruebas nacionales se logró concluir que:

a) Los profesores tienen a darle mayor importancia a los contenidos pertenecientes al temario de estas pruebas sobre los demás contenidos del currículo educativo. Pero además, el trabajo de aula tiende a concentrarse en la resolución de ejercicios mecánicos similares a los planteados en las pruebas y se descuida el desarrollo de habilidades intelectuales tal como lo promulgan los programas del MEP.

b) La evaluación implementada en las aulas es similar al que se realiza en las pruebas nacionales, aunque los principios que regulan estos dos tipos de evaluación son muy diferentes.

c) Muchos de los textos que se utilizan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina están en función de estas pruebas estandarizadas.

d) Una gran cantidad de profesores enfatizan en el uso de la calculadora como estrategia para encontrar la alternativa correcta en ítems de selección única, similares a los de las pruebas de bachillerato, aunque no tienen pleno dominio del concepto matemático.

En relación con lo anterior, Chaves (2008) y García (2009) cuestionan fuertemente el nivel matemático con que los estudiantes están concluyendo la secundaria, para ello analizan el contenido de las pruebas nacionales y los resultados de los exámenes de diagnóstico en Matemáticas que realizan algunas universidades estatales a estudiantes de primer ingreso. Queda en evidencia la escasa formación Matemática con que los jóvenes llegan a la universidad. Los resultados son preocupantes si se considera que los contenidos y destrezas matemáticas evaluadas en las pruebas de diagnóstico son los mismos que se evalúan en las pruebas estandarizadas que los estudiantes aprobaron solamente un par de meses atrás.

Para complementar estos y otros aspectos relacionados con las críticas que se le hacen a estos exámenes, en la siguiente sección se analiza la opinión de un grupo educadores matemáticos.

Principales resultados del estudio

Informantes

La información se recolectó por medio de un cuestionario auto-administrado a una muestra de 249 profesores de diferentes regiones educativas del país. La encuesta se aplicó entre julio y noviembre del 2008. Los docentes entrevistados no solo poseen una alta categoría profesional en el MEP, sino también una importante trayectoria en labores docentes. Con relación en la experiencia docente, se presentó un promedio de 9,6 años de experiencia con una desviación estándar de 7,2 años. Estos datos son relevantes para el presente estudio, debido a que una adecuada formación universitaria y una amplia experiencia docente, puede garantizar que la

opinión sea suficientemente representativa con respecto a los tópicos de mayor trascendencia para la investigación. En el cuestionario se utilizó una escala de actitudes. Las categorías utilizadas son: *muy de acuerdo*, *de acuerdo*, *ni de acuerdo ni en desacuerdo*, *en desacuerdo* y *completamente en desacuerdo*. Para este caso particular se busca medir la percepción de los individuos sobre los exámenes de Bachillerato. Seguidamente se analizan las respuestas a cada una de ellas.

Estandarización del conocimiento y habilidades matemáticas

Debido a que uno de los objetivos de la instauración de las Pruebas nacionales consistía en lograr una adecuada estandarización en los conocimientos y destrezas matemáticos más importantes que debe poseer un estudiante al concluir la Educación Diversificada, se procedió a consultar si dicho objetivo se estaba logrando.

El 41% de los profesores encuestados contestó afirmativamente, contra un 22% que opinó lo contrario y el 37% que tuvo una posición neutral. Aunque, de las respuestas se deduce una percepción positiva, no hay claro convencimiento con respecto a que se esté logrando el objetivo, pues el porcentaje que se abstiene y opina lo contrario es muy alto.

Para complementar este aspecto, se consultó si la cantidad de contenidos que se incluyen en estas evaluaciones eran excesivos, el 32% de estos profesores respondió afirmativamente, contra un 35% que lo hizo en forma negativa, el resto tuvo una posición neutral. Con estos datos, no se observa una tendencia clara respecto a este punto.

Condicionamiento sobre la labor docente

Una de las críticas hechas a estos exámenes consiste en el nivel de condicionamiento que producen sobre el proceso educativo.

Se consultó a los encuestados si los exámenes de Bachillerato establecen prioridades en los contenidos y estrategias que se desarrollan en el aula. Al respecto, el 26% respondió afirmativamente, contra el 40% que dio una respuesta negativa y el 34% presentó una posición neutral. Los profesores opinaron también respecto a que si el tipo evaluación que realiza en las aulas está condicionado por la prueba estandarizada. El 21% respondió afirmativamente, mientras que el 47% indicó lo contrario. La tendencia encontrada en estos resultados pareciera indicar que estos educadores no respaldan la hipótesis que las pruebas estandarizadas de Matemáticas condicionan la labor docente.

Efecto sobre el educador

Según se ha manifestado en diferentes sectores "*si los puntajes que obtiene una escuela en pruebas estandarizadas son altos, la gente piensa que su profesorado es eficaz. Si los puntajes en las pruebas estandarizadas son bajos, se considera que el cuerpo de profesores es ineficaz.*" (Popham, 1999, p.2). Al respecto el 50% de los docentes encuestados opinó que los resultados de las pruebas estandarizados constituyen una estrategia para evaluar el trabajo del docente, únicamente el 22% respondió negativamente y el 28% indicó una posición neutral.

Estos datos son alarmantes, pues dejan entrever que, al menos en este grupo de 249 educadores matemáticos, existe la percepción que las pruebas estandarizadas son un instrumento para evaluar su trabajo. El problema básico consiste en que, bajo esta percepción, se deja al estudiante como si fuera un instrumento intermediario, lo cual está en franca contradicción con los objetivos de la prueba.

Eliminación de las pruebas estandarizadas

Hace menos de cinco años, además de los exámenes de Bachillerato, en el país se realizaban también las pruebas estandarizadas al concluir la Educación Primaria y al concluir el Tercer Ciclo. No obstante, el Consejo Superior de Educación decidió eliminar estos dos tipos de exámenes, debido a que, según su criterio, no estaban cumpliendo los objetivos propuestos (Villegas, 2008; Agüero y Villegas, 2007). Por ello se pidió la opinión a los docentes sobre esta decisión de eliminar de la prueba de Tercer Ciclo. Al respecto, el 55% de estos docentes se manifiesta en contra de la decisión tomada contra un 27% que estuvo a favor.

Para complementar lo anterior, se consultó también si era viable eliminar las pruebas de Bachillerato sin generar un trastorno en el sistema educativo. Al respecto, el 39% de los educadores encuestados se opinó a favor de su eliminación, mientras que el 35% tuvo una posición negativa y el 26% un pronunciamiento neutro. Estos resultados dejan entrever, nuevamente, que los educadores consultados no están convencidos plenamente de la importancia de estas pruebas, aunque no hay un pleno convencimiento de su eliminación.

Uso de la calculadora

El hecho de permitir la utilización de la calculadora para resolver las pruebas nacionales de Matemáticas, ha sido un tema de gran discusión en el ambiente académico nacional. Según

especialistas de diversas instituciones e incluso los mismos responsables de la elaboración y sistematización de los pruebas, una gran cantidad de ítems que incluyen en dichas evaluaciones se pueden responder mediante el uso de una calculadora científica, sin necesidad de dominar los conceptos que se evalúan (García, 2009). A manera de ejemplo, seguidamente se incluyen dos ítems que aparecieron en una de estas pruebas:

El conjunto solución de: $\begin{cases} 1-y=2x \\ x+2=\frac{y}{3} \end{cases}$ es

A) $\{(1,9)\}$ B) $\{(1,-1)\}$ C) $\{(-1,3)\}$ D) $\{(-3,-3)\}$

La solución de: $\log(5x+2)=\log(x-3)+1$ es

A) -1 B) $\frac{11}{2}$ C) $\frac{32}{5}$ D) $\frac{-5}{4}$

Como puede notarse, con la utilización de una calculadora científica fácilmente se puede obtener la respuesta de cada ejercicio, sin necesidad de dominar los procedimientos matemáticos para llegar a esa respuesta. En total, la prueba incluye 60 ítems de selección única, de los cuales un alto porcentaje puede responderse con el uso de la calculadora.

Al preguntar a los educadores sobre este particular, el 39% respaldó el uso de la calculadora en estas pruebas contra un 30% que no lo hizo y un 31% que mantuvo una posición neutral. Tampoco es este aspecto se encuentra consenso entre los docentes. Este hecho denota la complejidad del tema, las autoridades del MEP indican que la eliminación del uso de la calculadora incrementaría la reprobación por parte de los estudiantes; pero, en la universidades estatales se indica que esta práctica es una de las principales responsables de la escasa formación con que los jóvenes aprueban la Educación Media (Blanco, 2007).

Conclusiones

El objetivo del presente estudio consistió en analizar la opinión de docentes de Matemáticas respecto a algunas críticas sobre las pruebas estandarizadas de Matemáticas en secundaria. Dentro de los propósitos por los que se instituyeron las pruebas nacionales de Matemáticas consistían en el establecimiento de parámetros en el nivel de conocimiento y de habilidades matemáticas mínimas para un estudiante que concluyera la educación secundaria.

Se ha determinado que los profesores no tienen una opinión uniforme con respecto a la importancia de estas pruebas. En la mayoría de preguntas planteadas, los porcentajes de opiniones positivas fueron similares a las negativas; pero además el porcentaje de educadores que manifestaron una posición neutral fue muy alto en todos los casos.

Resulta muy preocupante que la mitad de los docentes entrevistados considere estas pruebas como un medio de evaluación de su labor, pues con ello se demuestra el desconocimiento de los objetivos que privaron para su implementación. Esto posición es concordante con la fuerte división de opiniones relacionadas con la eliminación de estos exámenes; en este sentido un alto porcentaje de aquellos educadores que opinan que estas pruebas son un medio de evaluación de su labor están a favor de eliminarlas.

Resalta también el hecho de que no existe un claro convencimiento entre los profesores entrevistados respecto al aparente condicionamiento que las pruebas nacionales producen al proceso de enseñanza de las Matemáticas. No obstante, tal como se indicó en el documento, estudios previos han demostrado que, en las mismas regiones educativas donde se realizó el presente estudio, la labor de aula está claramente condicionada por las pruebas, especialmente en el énfasis dado a los contenidos, a los ejercicios propuestos y a las evaluaciones realizadas en dichos procesos. Este hecho también está relacionado con respecto la percepción de los educadores sobre el uso de la calculadora por parte de los estudiantes, mientras entre ellos no existe una clara tendencia en sus opiniones, diferentes estudios indican que, en la coyuntura actual, la utilización de este recurso está provocando un efecto distorsionador en el logro de los objetivos del examen.

En síntesis, los resultados reflejan que la problemática con la aplicación de las pruebas nacionales de Matemáticas es digna de un análisis más profundo, es necesario relacionar la opinión de los docentes con la realidad de aula y con lo propuesto en los programas del MEP sobre este tema. Se debe recordar que los educadores son los responsables de ejecutar las propuestas y lineamientos de este órgano, por lo que resulta prioritario que tengan la sensibilización necesaria para poner en práctica dicho propuesta ministerial en función de las verdaderas necesidades de los estudiantes tanto en su integración a la sociedad como en sus requerimientos académicos para sus estudios superiores.

Referencias bibliográficas

Agüero, M. y Villegas, J. (2007, 18 de enero). MEP elimina Pruebas Nacionales de Sexto Grado. Periódico La Nación. Recuperado el 9 de marzo 2009 de http://www.nacion.com/ln_ee/2007/enero/18/pais963950.html

APSE (2009). Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes. En Leyes y Reglamentos Docentes. Asociación de Profesores de Segunda Enseñanza. Recuperado el 13 de octubre del 2009 de http://www.apse.or.cr/WebApse/legdoc/leg03.htm

Blanco, P. (2007). Recomiendan eliminar calculadora en Pruebas de Bachillerato. Semanario Universidad. Recuperado el 10 de marzo del 2009 de http://www.ucr.ac.cr/boletin/index.php?option=com_content&task=view&id=85

Chaves, E. (2008). Los problemas de formación matemática de los estudiantes a su ingreso a la universidad. Conferencia presentada en el VI Festival Internacional de Matemática. 29 al 31 de mayo, Palmares, Costa Rica.

Chaves, E.(2007). Inconstancia entre los programas de estudio y la realidad en el aula en la enseñanza de la estadística de secundaria. Actualidades Educativas en Educación. Vol. 7(3). Setiembre – Diciembre 2007. http://revista.inie.ucr.ac.cr/

Chaves, E. (2003). Semejanzas y diferencias por región en la Educación Matemática de Costa Rica. Revista Uniciencia 20 (1), 59-73.

García, A. (2009). La calculadora científica y la obtención de la respuesta correcta en el ciclo diversificado. Actualidades Investigativas en Educación 9 (2), 1-19.

Moreira, T. (2006). Estimación de la validez predictiva de las pruebas de bachillerato en educación media. Actualidades en Psicología 20 (107), 121-141.

Popham, W. J. (1999). ¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa? Educational Leadership 56 (6).

Villegas, J. (2008, 18 de enero). Eliminadas pruebas de 9no año. Periódico La Nación. Recuperado el 10 de marzo 2009 en http://www.nacion.com/ln_ee/2008/enero/18/pais1389069.html

LA MATEMÁTICA DE ÚLTIMO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA EN GRUPOS DIFERENCIADOS SEGÚN INTERESES Y HABILIDADES. UNA EXPERIENCIA DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Santa Daysi Sánchez González
Colegio Babeque Secundaria. Universidad Autónoma de Santo Domingo — República Dominicana
daysisanchez@hormail.com
Campo de investigación: Atención a la diversidad — Nivel: Medio

Resumen. *El proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática presenta tradicionalmente una serie de dificultades. Su objeto de estudio, que es pura abstracción creada por el ser humano, así como la existencia de diferentes estilos y ritmos de aprendizaje en los estudiantes, son algunos de los factores que influyen en las dificultades mencionadas. La clase planificada y dirigida a la media del curso provoca frustraciones en los que tienen menos aptitud hacia la Matemática y aburrimiento en los más aventajados.*
Con el objetivo de que los estudiantes de último año pudieran aprovechar más efectivamente la diversidad curricular, se diseñaron tres grupos diferenciados de Matemática, con un mismo programa, pero ofreciendo la oportunidad de experimentar con un grupo afín en intereses y habilidades, y con una metodología adecuada a los ritmos y estilos de aprendizajes de cada individuo. En este trabajo presentamos la experiencia de estudiantes, profesores, psicólogos y directivos en un esfuerzo común por lograr el desarrollo humano integral.
Palabras clave: competencias, atención a la diversidad, estilos de aprendizaje

Introducción

El Colegio Babeque Secundaria es un centro educativo auspiciado por la Fundación Pedagógica Dominicana Inc., institución sin fines de lucro, nacida en el año 1977 en la ciudad de Santo Domingo, capital de la República Dominicana. Es un centro que comprende los dos últimos años de la educación Básica y los cuatro de la Media. Tiene 512 estudiantes con edades comprendidas entre 11 y 18 años. La condición de ser una institución sin fines de lucro favorece la utilización óptima de los recursos para ofertar una educación de calidad.

En el proyecto educativo de centro publicado en 2001, se definen los principios que fundamentan la práctica educativa en el colegio. Se concibe el centro educativo como un espacio formativo, cultural, social que ayuda al individuo a interpretar la realidad y a encontrar significados. Se visualiza la institución como abierta, actualizada y de vanguardia; integrada y democrática, que promueve la auténtica participación y el genuino interés por los seres humanos.

Con esta filosofía, el colegio Babeque Secundaria ha mantenido un proceso de reflexión continua y la asunción crítica de los lineamientos de la transformación curricular iniciada en el país en los años 90, organizando cursos y talleres orientados a incrementar la capacidad intelectual del profesorado, actualizando sus conocimientos en las diferentes áreas, así como su formación integral. Además, ha puesto en ejecución un programa de formación magisterial para implementar en las aulas el desarrollo de las destrezas de pensamiento y de la conciencia moral y ética, y se ha involucrado en la construcción de un currículo basado en competencias humanas generales.

Marco teórico

Competencias Humanas Generales

Hablar de competencias en educación lleva a considerar su definición desde una perspectiva amplia. En el colegio Babeque se ha asumido la definición de competencia como aquella "habilidad general producto del dominio de conceptos, destrezas y actitudes, que el estudiante demuestra de forma integral y a un nivel de ejecución previamente establecido por un programa académico que la tiene como su meta" (Villarini, 2000, p. 19)

Con esta definición se asume que ser competente significa tener el conocimiento declarativo que permite saber qué se hace, por qué se hace y conocer el objeto sobre el que se actúa. Ser competente también implica tener la capacidad de ejecución, es decir, la disposición de las destrezas intelectuales y psicomotoras para ejecutar los procesos. Y por otro lado, poseer la actitud o disposición para querer utilizar el conocimiento y actuar correctamente.

En ese sentido, se seleccionaron y definieron las siguientes competencias humanas generales, para ser desarrolladas por los estudiantes:

- Competencia Cognitiva
- Competencia Ética
- Competencia Comunicativa
- Competencia Afectiva-Social
- Competencia Social y Cívica

- Competencia Estética
- Competencia para una salud integral

Para construir un currículo basado en competencias es necesario asumir ciertos principios filosóficos, educativos, psicosociales y otros. El personal docente del colegio comparte en su Proyecto de Centro, los siguientes:

La educación, (…), es un proceso activo, gradual y constante y el ser humano participa en él con una creciente libertad y responsabilidad. (…) Creemos que la dimensión emocional puede potencializar o neutralizar las capacidades cognoscitivas, ya que es determinante en las relaciones interpersonales. En el Colegio Babeque creemos que la educación tiene la doble función de individualizar y de socializar.

Además, el proceso educativo es una interacción entre docente y estudiante donde ambos construyen conocimiento; por lo que el aprendizaje será más efectivo si se observa, se atiende y descubren las necesidades de los sujetos, se adecuan las estrategias de enseñanza a sus habilidades e intereses y si se tiene en cuenta lo afectivo.

Compartimos la idea de que el ser humano tiene el sistema de aprendizaje más elaborado y sofisticado que se conoce, en comparación con otro ser vivo o con los sistemas artificiales de conocimiento que están en nuestra sociedad (Pozo, Mateo y Pérez, 2006). Citando a Piaget estos autores plantean que: “Lo cognoscitivo (conceptos y destrezas) y lo afectivo (sentimientos, intereses, valores) son inseparables en el pensamiento. Lo cognoscitivo le da la estructura y lo afectivo la energía al pensamiento”. Lo que significa que: “no habría pensamiento sin la energía o la voluntad de pensar, es decir sin las actitudes”. (Villarini, 2001, p. 18).

Dimensión psicológica

La ausencia de una metodología y un ambiente adecuados para el proceso de aprendizaje y enseñanza de la Matemática, como son la tendencia a reducir el acto pedagógico a un sencillo esquema lineal: profesor – saberes – estudiante, en la creencia de que un profesor enseña unos saberes que son aprendidos por el estudiante, provoca la falsa idea de que la relación estudiante

profesor está mediatizada por los saberes. En consecuencia los estudiantes muestran: estrés, baja autoestima, depresión, trastorno de ansiedad, indefensión aprendida.

Si por el contrario se aplicaran nuevos esquemas, como el propuesto por Páramo Fonseca (2004), en el cual, los tres elementos se relacionan de forma triangular, de modo que haya mayor equilibrio y la relación entre el profesor y el estudiante se manifieste de una manera más clara; las posibles consecuencias psicológicas serían: motivación, curiosidad, actitud positiva, aprendizaje.

Si se tienen en cuenta los estilos de aprendizaje, los estudiantes aprenden todavía mucho mejor. Según los sentidos en que se apoyan los individuos para captar y organizar la información, algunos autores esquematizan los estilos de aprendizaje en: visual o icónico que lleva al pensamiento espacial; auditivo o simbólico que lleva al pensamiento verbal; y cinético o activo que lleva al pensamiento motórico. Otros autores como Honey y Mumford (1986), citados por Nevot (2001), clasifican los estilos de aprendizaje en cuatro tipos: Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático. Esto implica que un aula siempre estará integrada por estudiantes de capacidades e intereses diversos, sea que los caractericemos por sus habilidades de percepción o de cómo se acercan al conocimiento. Por tanto, si el docente se preocupa por el aprendizaje de sus estudiantes, deberá atender a la diversidad que se encuentra en su aula. La atención a la diversidad no implica enseñanza individualizada, sino el desarrollo de estrategias que permitan la participación activa de cada individuo en los procesos de aprendizaje.

Naturaleza de la Matemática y perfil del profesor/a

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática está orientado a desarrollar la capacidad de utilizar el conocimiento para enriquecer la comprensión y promover la capacidad de acción. Pensar y razonar, representar, argumentar, utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas, utilizar ayudas y herramientas, plantear y resolver problemas, son algunas de las competencias que se adquieren con el aprendizaje de esta disciplina (Niss, 1999, citado en “The PISA 2003 Asssessment Framework” publicado por OECD/PISA). Todo esto implica el aprendizaje de conceptos y procesos, el reconocimiento y la aplicación de principios y propiedades, lo cual obliga al uso del pensamiento abstracto.

Tradicionalmente la Matemática es percibida como una de las asignaturas más difíciles. El proceso de aprendizaje de esta disciplina crea temores e inseguridades en los estudiantes. Las posibles causas del rechazo a esta asignatura se reparten entre la metodología de enseñanza, la falta de motivación, el currículo y la actitud del profesorado y del alumnado. Se puede afirmar que causas externas e internas a las propias matemáticas explican esta situación.

Teniendo en cuenta lo anterior, el profesor/a de Matemáticas, dentro de sus capacidades pedagógicas, necesita reconocer la importancia de transmitir los conocimientos en una relación afectiva agradable. Mostrar capacidad para descubrir qué matemáticas necesitan conocer sus alumnos y aplicar estrategias de enseñanzas diversas que favorezcan un ambiente de cooperación e integración, que propicien el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, según las habilidades y potencialidades de cada estudiante. Asimismo, debe analizar los resultados de su trabajo, evaluarlos y modificarlos para mejorar la calidad de los aprendizajes de los alumnos y alumnas.

¿Por qué grupos diferenciados?

En el colegio Babeque Secundaria, el nivel de dominio de las competencias matemáticas es más alto que la media en el país, por lo que la mayoría del estudiantado es sometido a mucho estrés en las clases de Matemáticas. Como una manera de que los estudiantes del último año pudieran aprovechar la diversidad curricular del colegio, completar su formación integral y realizar una elección profesional acorde con sus intereses y habilidades, pensamos en diseñar tres grupos diferenciados.

Se consideró que el cuarto año del nivel medio era idóneo para esta experiencia, ya que los estudiantes habían recibido la formación integral que ofrece la institución y habían desarrollado unas habilidades académicas al nivel que el colegio le había demandado para su permanencia en el mismo. Además, los intereses de estos jóvenes estaban dirigidos a su vida futura, sobre todo a su carrera universitaria; por lo cual era posible plantear alternativas curriculares atendiendo a los intereses y habilidades que habían mostrado.

Por otro lado, las clases de idiomas extranjeros: Inglés y Francés, se imparten en el colegio en grupos diferenciados, de acuerdo al dominio del idioma mostrado por el estudiante. Se desarrollan niveles de inglés desde séptimo grado de Educación Básica, y niveles de francés desde el segundo

grado del Nivel Medio, siendo éstos: principiante, intermedio y avanzado. Estos niveles en las clases de idiomas están organizados de modo que el alcance de contenidos es diferente para cada nivel. En ambos idiomas, la experiencia ha sido muy exitosa.

Antes de la reforma curricular de los años 90, el cuarto año de nivel medio también desarrollaba programas diversificados en el país, según que la concentración de los estudios fuera en: Ciencias y Artes, Matemática, Filosofía y Letras o Ciencias Naturales.

Al reflexionar sobre estos antecedentes, se formulan las preguntas: ¿De qué manera podría lograrse que el estudiantado de último año pudiera potenciar sus aprendizajes matemáticos, al mismo tiempo que bajara su nivel de estrés? ¿Es posible que pudieran dividirse en grupos que atiendan a intereses y habilidades? ¿Qué variables deberían tenerse en cuenta? ¿Qué papel jugarían las estrategias que utiliza el docente de matemáticas a la hora de enseñarla? ¿Convendría que se hablara de niveles de matemática?

Con estas inquietudes se plantearon los siguientes PROPÓSITOS:

- Elaborar una propuesta que permita potenciar los aprendizajes matemáticos de los estudiantes de último año, organizándolos en grupos según intereses y habilidades.
- Analizar las aptitudes e intereses profesionales que permitan integrar a los estudiantes al grupo adecuado.
- Aplicar las estrategias de enseñanza adecuadas a las características individuales de cada estudiante.

Aspectos metodológicos

Inicio del proyecto.

El año escolar 2006-2007, se inicia con la Matemática de último año, dividida en grupos diferenciados según intereses y habilidades. Se evita en lo posible hablar de niveles para no etiquetar a los estudiantes. Con el mismo programa y diferentes estrategias metodológicas, se hace énfasis en las fortalezas y limitaciones individuales para lograr en cada uno, el desarrollo de las competencias matemáticas básicas planteadas en el currículo.

Los grupos creados son los siguientes:

General: Formado por estudiantes cuyos intereses en las matemáticas es normal, y muestran tendencias a estudiar carreras en las cuales los cálculos podrían tener considerable incidencia.

De Artes y Humanidades: Este grupo está conformado por estudiantes que tienen habilidades e intereses en otras áreas ajenas a las matemáticas y a quienes ha resultado difícil involucrarse en el aprendizaje de las mismas.

De Ciencias Aplicadas: Está conformado por los estudiantes que tienen un especial interés y habilidad para las matemáticas, además de que se inclinan a elegir carreras de alto contenido matemático. Estos podrían ser candidatos a participar en olimpíadas.

¿Cómo lo hicimos?

La coordinadora académica general, la coordinadora del área de Matemática y la orientadora del grupo de estudiantes plantean la idea ante el consejo académico e inician una serie de consultas a estudiantes de último año del 2005-2006, así como a los de 11mo, quienes serían los beneficiarios del proyecto. Se consulta también a todos los profesores. Estas encuestas arrojan opiniones muy favorables acerca de la oportunidad que se ofrece, aunque con algunas reservas; lo que estimulan el inicio del proyecto a manera de prueba.

De esta manera se toma la decisión de formar los grupos según la definición anterior. Los criterios de selección serían: intereses, aptitud, la carrera universitaria que se desea estudiar y la opinión del departamento de matemática, de acuerdo con las habilidades mostradas en el desarrollo de los aprendizajes de la asignatura en años anteriores.

Con este fin, a los estudiantes se les encuesta, se les aplican pruebas psicológicas y se realizan entrevistas individuales de modo que cada uno esté ubicado en el grupo idóneo para él. Las pruebas aplicadas fueron el test de Razonamiento Diferencial (TRDA) que mide aptitudes de razonamiento general, numérico, espacial, mecánico y fluidez verbal, y el test Perfil de Intereses Profesionales (PIP) que evidencia las áreas de interés numérica, mecánica, científica, administrativa o de oficina, persuasiva o ejecutiva, musical, literaria, artística y de servicio social.

Durante todo el año escolar, las profesoras desarrollan en cada aula, el programa oficial del grado, haciendo énfasis en utilizar las metodologías que más pueden aprovechar al grupo correspondiente. Cada una establece un ambiente de confianza, comunicación, afecto y respeto. En el grupo de Artes y Humanidades se propicia la utilización de técnicas grupales que permiten a los estudiantes mejorar su ejecución, integrándolos, con el fin de fomentar el trabajo en equipo, en ambiente cooperativo. Se presenta la información de manera novedosa y creativa, posibilitando, no sólo la adquisición de nuevos conocimientos, sino también el desarrollo de las destrezas de razonar, argumentar, utilizar el lenguaje propio de la matemática, plantear y resolver problemas, etc. En todos los grupos se identifica, respeta y usa como base las diferencias individuales de los estudiantes y sus estilos de aprendizaje.

Entre las experiencias más relevantes del primer año destacamos:

- Cada una de las profesoras aplicó metodología adecuada al grupo correspondiente, haciendo los ajustes necesarios en cada caso.
- Entre los estudiantes se manifestaron sentimientos encontrados al estar en grupos diferentes. Algunos muy a favor y otros totalmente en contra. Debimos trabajar la resistencia de algunos estudiantes y de una de las profesoras que iba llevando el proceso. Profesores y estudiantes hablaban de niveles aunque insistíamos que se trataba de grupos diferenciados por intereses y habilidades. Los dos primeros meses fueron de ajuste y tensión, y a partir del tercer mes hubo mayor identificación y control.
- Las calificaciones comenzaron a mejorar en algunos estudiantes, lo cual fue dando confianza a éstos, a las maestras y a las propulsoras del proyecto.
- Los cambios de estudiantes de un grupo a otro se hicieron sólo al final del primer semestre. Dos estudiantes del grupo de Ciencias aplicadas pasaron al general y uno al revés.
- Ya en el segundo semestre había mayor adaptación. Comenzaron a verse las fortalezas y posibles limitaciones.
- Dimos un seguimiento continuo desde el inicio, que incluyó: observaciones de clases, comparación de las pruebas, entrevistas a estudiantes y profesoras, y aplicación de nuevas encuestas.

En el tercer año (2008-2009).

- En el 3er año hay más confianza en el proyecto. Ya hablamos del programa de Matemática en grupos diferenciados.
- Los estudiantes siguen hablando de niveles, pero se sienten cómodos trabajando la Matemática según sus habilidades y pudiendo dedicar tiempo para otros intereses.
- La evaluación de fin de año hecha a partir de un formulario con preguntas abiertas, arroja valoración positiva. Los estudiantes opinan que debe mantenerse la división en grupos diferenciados.

A manera de conclusión

Atender a la diversidad de los estudiantes, a partir de la formación de grupos diferenciados para el aprendizaje de la Matemática, propició que cada estudiante alcanzara aprendizajes óptimos, de acuerdo a sus capacidades. Las calificaciones del grupo de ciencias aplicadas y del grupo general se mantuvieron en los niveles acostumbrados por los estudiantes, pero fue posible profundizar más en cada uno de los temas. En el grupo de Artes y Humanidades las calificaciones de los estudiantes fueron más altas que en años anteriores, además de que se mostraron más confiados en su ejecución y en el acercamiento con la asignatura y con la maestra, con la cual fue posible desarrollar relaciones afectivas. En la evaluación de fin de año manifestaron satisfacción por haber podido, no sólo aprender, sino también ayudar a otros compañeros en su proceso de aprendizaje. Al finalizar el año escolar teníamos un grupo de estudiantes que salieron fortalecidos en su autoestima y en sus aprendizajes.

Nuestros retos

- Reconocer las fortalezas del proyecto y sus limitaciones, para mejorarlo cada vez más.
- Seguir afinando los criterios de selección de los estudiantes para la formación de los grupos.
- Diferenciar las actividades de aplicación de aplicación de los temas tratados, de modo que se relacionen con el perfil profesional de los grupos.

- Dar seguimiento al desenvolvimiento en la matemática universitaria de los egresados del proyecto, para retroalimentar los procesos internos.

Referencias bibliográficas

Cejas Yanes, E. (1997). Acerca de los conceptos de competencia y competencia laboral. Instituto Superior Pedagógico para la Educación Técnica y Profesional (ISPETP). Recuperado en septiembre 2007 de http://www.monografias.com

Colegio Babeque Secundaria. (2001). Proyecto Educativo de Centro. Santo Domingo.

Deval, J. (1991). Crecer y pensar. La construcción del conocimiento en la escuela. México: Paidos.

Gómez, I. (2000). Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Nevot, A. (2001). Análisis crítico de los estilos de aprendizaje de los estudiantes de enseñanza secundaria y propuesta pedagógica para la enseñanza de la matemática. UNED. Extraído en septiembre 2009 de http://www.estilosdeaprendizaje.es

OECD/PISA. (2003). Competencias en Matemáticas. Traducción realizada por EDUTEKA del documento "The PISA 2003 Asssessment Framework" publicado (en inglés, en formato PDF, 1.7MB) Extraído en septiembre 2009 de http://www.pisa.oecd.org

Páramo Fonseca, A. (2004). Reflexión final Seminario La relación profesor-estudiante, celebrado en la Universidad de los Andes. Recuperado en septiembre 2007 de http://www.temasmatematicos.uniandes.edu.co/seminario

Pozo, J., Mateo, M., Sanz, M. y Pérez, P. (2006). Aprender para comprender y construir conocimiento, Buenos Aires: Santillana.

Segura, M. (2002). Ser persona y Relacionarse. España: Narcea.

Tomlinson, C. (2005). Estrategias para trabajar con la diversidad en el aula. Buenos Aires: Paidos.

Villarini, A. (2000). El currículo orientado al desarrollo humano integral y al aprendizaje auténtico. San Juan: Proyecto de Educación Liberal Liberadora.

VARIABLES, FUNCIONES Y CAMBIOS: ¿QUÉ CONOCEN NUESTROS ALUMNOS?

Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Natalia Henzenn
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio, Superior

Resumen. *El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en diferentes fenómenos biológicos, económicos y sociales. Sin embargo, durante la escuela media, no se favorece demasiado el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, base para la comprensión de los conceptos de la matemática de la variación y el cambio, es decir el cálculo. Por este motivo, este trabajo, enmarcado en el proyecto de investigación "Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial", tiene como objetivo el análisis y valoración de los resultados obtenidos en una experiencia de aula centrada en el diseño, implementación y corrección de una guía de actividades que indaga las nociones que tienen los alumnos que ingresan al nivel universitario con respecto a variables, cambios, funciones, imagen, gráficas, expresión analítica, valor numérico y comportamiento de funciones.*
Palabras clave: variables, funciones, cambios, pensamiento variacional

Introducción

El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas en diferentes áreas y disciplinas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en distintos fenómenos biológicos, económicos, sociales.

De acuerdo con el Dr. Cantoral, el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula. Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento de funciones. (Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002, p. 73)

Sabemos que los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función.

Los datos y evidencias mostradas por los investigadores indican, que la construcción de la idea de variable no es una tarea sencilla, pues surgen dificultades, confusiones y concepciones alternativas que interfieren en ese proceso. Ante estas dificultades, es conveniente que los estudiantes comprendan este concepto, pues es pieza fundamental para la formación de nuevos conceptos como función, concepto importante en la matemática de la variación y el cambio. Presumimos que si los estudiantes construyen y se forman en la mente la comprensión de la noción de variable, serán más asequibles los nuevos conceptos asociados a esta noción. (Gómez, 2008, p. 10)

Siempre que dos magnitudes (variables) están relacionadas mediante una función, se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. De ahí la importancia del estudio de las funciones. En este sentido, Dolores (2004, p. 197) manifiesta:

… poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, que precisa – como señalan Cantoral y Farfán (2000) – de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico.

Un elemento fundamental para entender el proceso de variación de las funciones es trabajar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Las funciones se utilizan como modelos de situaciones del mundo real, incluyendo aquellas que son resultado del avance tecnológico y que tienen enorme aplicación para la descripción de fenómenos físicos.

La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. (López y Sosa, 2008, p. 309)

Valero (2003, p. 4) asegura:

Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

En nuestro país, desde la escuela primaria los alumnos abordan situaciones donde intervienen la variación y el cambio. En general, el hilo conductor lo constituyen la lectura, elaboración, análisis de tablas y gráficas donde se registran y analizan procesos de variación. Sin embargo, durante la escuela media no aparecen los procesos de cambio como eje temático. Generalmente se trabaja el tema funciones pero no desde un enfoque variacional. Se hace hincapié en la elaboración de tablas y el traslado de las mismas al registro gráfico construidas a partir de un enunciado relacionado con situaciones de la vida cotidiana. Se estudian las diferentes funciones (primer grado, segundo grado, exponencial, entre otras) desde su definición y gráfica. Lo enunciado anteriormente justifica el hecho de que en nuestro trabajo cotidiano en el aula observemos el problema del escaso y, en algunos casos hasta deficiente, desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en ingresantes a la universidad. Numerosos trabajos en Matemática Educativa realizados durante las últimas décadas avalan nuestra afirmación. Valero (2003) destaca que Dolores, Solache y Díaz abordan el problema en estudiantes que terminan el bachillerato y en ingresantes a la universidad, especialmente en lo relacionado con conceptos y procedimientos relativos a las variables, funciones, derivadas y análisis del comportamiento variacional de funciones.

En este contexto, resulta interesante buscar la manera de abordar mejor su estudio indagando sobre las ideas y conocimientos formados y adquiridos en los niveles previos ya que, en muchos casos, están fuertemente arraigados y condicionan la adquisición de nuevos conceptos. Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial” y tiene como objetivo el análisis y valoración de los resultados obtenidos en un trabajo de aula con alumnos ingresantes a la carrera Ingeniería Agronómica. La experiencia se centró en el diseño, implementación y corrección de una guía de actividades que indaga las nociones que tienen los alumnos que ingresan al nivel universitario con respecto a variable, variación y cambio, relación de una variable con otra,

valoraciones cualitativas y cuantitativas, gráficas, expresión analítica, valor numérico, signos de la función, ceros, crecimiento y decrecimiento.

Desarrollo de la propuesta

La guía se propuso a todos los alumnos inscriptos en Matemática I que estaban presentes en una clase habitual, en grupos de a dos integrantes (53 grupos) antes de comenzar a desarrollar el tema "Funciones" del programa analítico.

Para la preparación de las diferentes actividades que forman parte de la propuesta de clase se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados por los alumnos dado que para cursar esta primer asignatura deben tener aprobada el área Matemática en el marco del Programa de Articulación Disciplinar exigido por la Universidad Nacional del Litoral.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos: el diseño y discusión de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades observadas en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y finalmente la utilización de las respuestas obtenidas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo. Posteriormente, desde el equipo docente, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos y se favoreció la toma de decisiones estratégicas en acciones futuras. Las distintas actividades abarcan los conceptos de variable, función, dominio, conjunto de imágenes, intervalos de variación, representación gráfica y comportamiento de una función.

Las situaciones se presentan en distintas representaciones: verbal, tabular, algebraica, gráfica, y se constituyen en los medios para indagar las concepciones de los alumnos.

Presentación de algunas actividades y análisis de los resultados más importantes

A continuación enunciamos algunas actividades y los resultados que consideramos más significativos. (La guía completa puede solicitarse a los autores).

Actividad. Exprese en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación:

a) El área "a" de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que 2 cm^2.

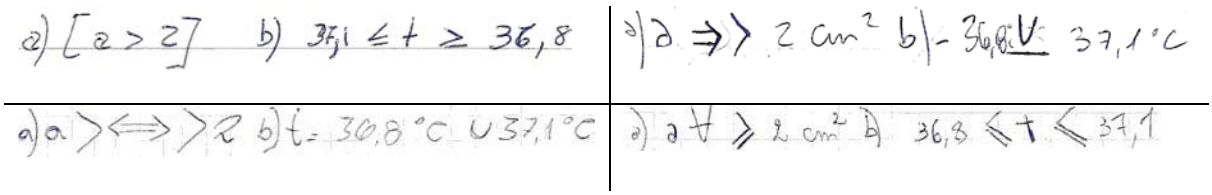
b) La temperatura "t" del cuerpo de un hombre sano varía desde 36,8ºC hasta 37,1ºC.

Para poder analizar fenómenos que cambian, es necesario en primer lugar trabajar adecuadamente con magnitudes variables y ser capaces de representarlas matemáticamente.

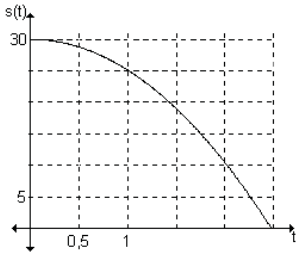
En esta actividad, que requiere la conversión del lenguaje coloquial al numérico, se busca indagar sobre el manejo de la notación para intervalos de variación. Algunos optaron por utilizar la notación de intervalos y otros de desigualdades. En ambos casos observamos que el manejo de simbología es deficiente en muchos alumnos.

El 55% de los grupos resolvió correctamente el ítem a). Se observa que del 34% respondido mal, el 56% escribe mal la notación como intervalo. El 11% no responde.

Con respecto al ítem b) el 66% respondió correctamente. Del 23% de respuestas incorrectas, el 50% escribe mal el sentido de la desigualdad y el 33% no incluye los extremos. Algunas respuestas obtenidas fueron:



Actividad. Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica.



a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?

b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?

c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?

En esta actividad exploramos, a partir de información presentada gráficamente, la identificación de las magnitudes que cambian y cómo cambian.

En el inciso a) se observan grandes dificultades para identificar que en la situación presentada intervienen dos variables. En algunos casos, los alumnos no se limitan a responder lo solicitado sino que intentan explicar la relación entre las dos variables: *"A medida que varía la altura varía el*

tiempo", "Disminuye la altura y aumenta el tiempo", "Cambia de posición a medida que transcurre el tiempo". Aparecen algunas respuestas erróneas: *"A mayor altura, su posición a los t segundos será mayor, es proporcional", "lo que cambia es el tiempo, a mayor distancia mayor es el tiempo transcurrido".*

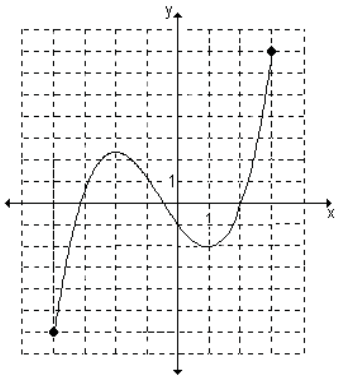
a) Sólo el 9% responde bien. Del 76% que responde mal, el 45% no considera la variable tiempo y más de la mitad de los grupos considera una sola variable.

   En el segundo y tercer inciso se presentaron básicamente los mismos problemas que en la actividad anterior.

b) El 25% responde correctamente mientras que el 73% no logra escribir el intervalo correcto.

c) Fueron escasas las respuestas correctas (4%) y el 85% resultó incorrecto. En el 73% de los grupos, las respuestas equivocadas se deben a que escriben mal el orden de los extremos del intervalo. En muchos casos consideran el intervalo abierto.

*Actividad***.** Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:



d) ¿Cuál es el intervalo de variación de x?

e) ¿Cuál es el intervalo de variación de y?

f) ¿Para qué valores de x, $y > 0$?

g) ¿Para qué valores de x, $y < 0$?

h) ¿Para qué valores de x, $y = 0$?

i) ¿Para qué valores de x, y crece?

j) ¿Para qué valores de x, y decrece?

k) ¿Para qué valores de x, y no crece ni decrece?

En esta actividad se trabaja con el registro gráfico y el simbólico. Los ítems a) y b) tuvieron el 51% y el 49% de respuestas correctas respectivamente y los "no responde" alcanzaron el 2%. Las mayores dificultades se relacionaron con no incluir los extremos en los intervalos de variación. En general, más dificultades aparecieron en los incisos siguientes. Los porcentajes de respuestas incorrectas fueron: c) 79%; d) 91%; e) 55%; f) 87%; g) 58% y h) 85% (el 44% no considera los

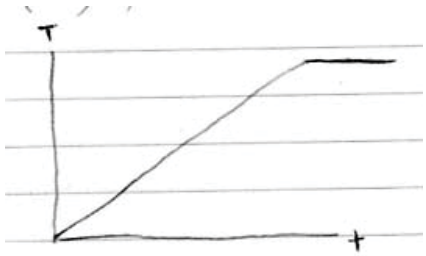
extremos). El 4% no respondió lo solicitado en c), d) y e), el 6% en f), el 8% en g) y en h) alcanzó el 15%.

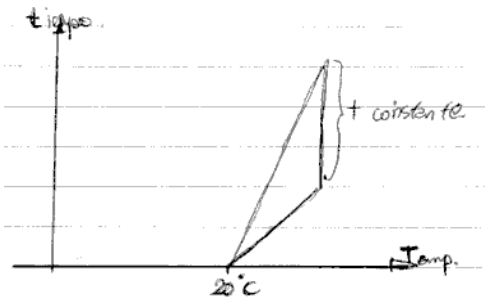
En los incisos c) y d) los alumnos identificaron en general los intervalos donde la función es negativa o positiva, pero presentaron dificultades para su notación, mostrando confusiones en la identificación del tipo de intervalos (abiertos o semiabiertos).

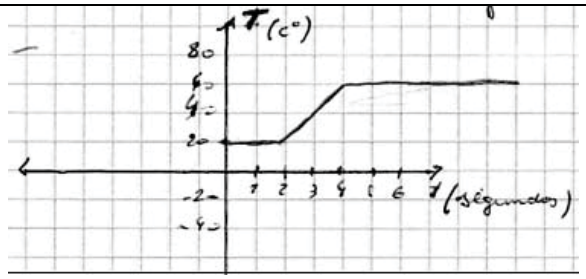
Algunos escriben como puntos y otros expresan los intervalos que corresponden a la variable dependiente. En cuanto a los incisos donde se solicita analizar los intervalos donde la función crece o decrece, las mayores dificultades no se encontraron en la obtención de los intervalos, sino en la escritura de los mismos. Tienen serios problemas para expresar intervalos discontinuos. Presentamos algunas producciones obtenidas:

Actividad. Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua. Realice un bosquejo aproximado de la temperatura T en función del tiempo t.

Esta actividad pretende que los alumnos puedan interpretar un fenómeno de cambio presentado en el registro verbal. Procuramos analizar por un lado, la identificación y la correcta representación de las variables involucradas y por otro, cómo describen gráficamente su comportamiento variacional (la temperatura aumenta con rapidez, se mantiene constante, disminuye). Si bien sólo el 8% no responde, el 62% lo hace mal. Muchas de las representaciones fueron incompletas. No consideraron uno o más de los intervalos de variación. La mayoría de los errores estuvieron relacionados con no establecer cuál es la temperatura ambiente y comenzar la gráfica directamente a partir del origen. En algunos casos, las dificultades para representar los cambios llevaron a los alumnos a representar gráficas que no son funciones. A continuación presentamos algunas gráficas realizadas por los distintos grupos:







Conclusiones

Los resultados obtenidos nos hacen reflexionar y pensar por qué los conceptos matemáticos involucrados en el estudio de la matemática de la variación y el cambio presentan tantas dificultades. Los estudiantes no los comprenden y, como consecuencia de ello, en el aula surgen interpretaciones que no se corresponden con el conocimiento matemático aceptado.

Pudimos confirmar en nuestra aula los resultados de numerosas investigaciones sobre el escaso e inadecuado desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en alumnos ingresantes a la universidad. Detectamos:

- Claras dificultades en el manejo de diferentes notaciones.
- Confusión entre las variables dependiente e independiente.
- Errores en el manejo de la recta real y la determinación de intervalos.
- Dificultades relacionadas con el concepto de función según sus diferentes representaciones.
- Inconvenientes con la interpretación de los gráficos.
- Dificultades en la identificación y manejo de variables.

Con esta forma de trabajo logramos motivar a los alumnos en la búsqueda de sus propias estrategias de solución para resolver las actividades, propiciamos el aprendizaje activo en el aula y fuera de ella mediante la construcción y reflexión. El trabajo en grupo favoreció la discusión de estrategias y soluciones, el uso de vocabulario específico, la defensa de ideas y el debate. Es muy importante brindarles un espacio que les permita argumentar sobre los conceptos expresando sus propias ideas y darles la oportunidad para estar o no de acuerdo con sus pares y con el profesor. Los resultados obtenidos nos permitieron tomar decisiones al momento de abordar el tema Funciones y desarrollar actividades que favorezcan la construcción de la idea de variación y cambio. De esta manera llegaron mejor preparados para abordar los temas del cálculo durante el dictado de Matemática II.

Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite diseñar, implementar y rediseñar estrategias para favorecer el aprendizaje de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 7(3), 195-218.

Dolores, C.; Guerrero, L.; Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 15 (1) 73 – 84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, E. (2008). La construcción de la noción de variable. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21, 308 – 318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Valero, M. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN EL DESEMPEÑO PROFESIONAL DE LOS INGENIEROS EN CD. DEL CARMEN, CAMPECHE, MÉXICO

Myrna Delfina López Noriega, Cristina Antonia Lagunes Huerta, Mario Sucedo Fernández
Universidad Autónoma del Carmen, Campeche México
mdlopezn@pampano.unacar.mx, clagunes@pampano.unacar.mx
Campo de investigación: Capacitación para el trabajo Nivel: Superior

Resumen. *Como parte de las acciones para institucionalizar el Modelo Educativo de la Universidad Autónoma del Carmen se aprobó un tronco común vertical que deben cursar todos los estudiantes a lo largo de su carrera considerando las Disposiciones Deseables en sus futuros egresados. Matemáticas I quedó inscrita dentro del mencionado tronco común. El presente documento, dividido en cuatro partes, presenta los resultados obtenidos en una investigación que pretende validar los temas abordados en Matemáticas I través de los contenidos matemáticos que los ingenieros de la localidad utilizan en su ejercicio profesional. En la primer parte se plantean los antecedentes del problema; en el segundo apartado tenemos la metodología empleada; en la tercera se encuentran los resultados obtenidos y finalmente tenemos las conclusiones y reflexiones de esos hallazgos.*
Palabras clave: modelo educativo, programa educativo, responsabilidades profesionales

Introducción

La Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR) se encuentra enclavada geográficamente en una región caracterizada por la gran movilidad y afluencia de visitantes como resultado de la actividad de explotación de los yacimientos petroleros de la Sonda de Campeche (Petróleos Mexicanos, 2006b). Lo anterior ha planteado a la universidad grandes desafíos y oportunidades, a los cuales, desde 1992, responde a través de una serie de acciones basadas en cuatro grandes ejes rectores. Dentro del segundo eje estratégico, Modernizar la Universidad, plantea como uno de sus objetivos: "Transformar el proceso educativo, centrándolo en el aprendizaje del alumno, para desarrollar disposiciones deseables que le garanticen éxito en su vida" (Universidad Autónoma del Carmen, 2000, p.10); teniendo como vector de orientación el "institucionalizar un Modelo educativo centrado en la organización del aprendizaje para toda la vida" (Universidad Autónoma del Carmen, 2000, p.10). Para lograrlo, el estudiante al egresar deberá reunir quince Disposiciones Deseables que le permitan "alcanzar un desempeño exitoso en su vida profesional y personal" (Universidad Autónoma del Carmen, 2000, p.14).

Las Disposiciones Deseables deberán desarrollarse en todos sus alumnos a través de experiencias de aprendizaje, independientemente de la carrera en la cual se encuentre. Dentro de ellas

tenemos: “Aprender a aprender; Identificar y resolver problemas de su profesión; Pensar y actuar con método, rigor y lógica; Expresar sus ideas con claridad y; Trabajar eficientemente en equipo” (Universidad Autónoma del Carmen, 2000, p.14).

Antecedentes

La estructura y organización curricular de todos los programas de estudio de la UNACAR quedó conformada por tres grandes bloques. En el primer bloque conformado por el Tronco común, el cual representa el 15 % de su formación, quedó inscrito Matemáticas I. (Secretaría Académica de la Universidad Autónoma del Carmen, 2003).

El objetivo general del curso de Matemáticas I: “Desarrollar el pensamiento lógico como una forma de razonamiento mediante la solución a los problemas planteados a través de los elementos algebraicos que le permita emitir un juicio sobre la congruencia entre la solución obtenida y el problema planteado” (Cuerpo Académico de Matemática Educativa, 2002, p.2), responde a las Disposiciones Deseables de: Pensar y actuar con método, rigor y lógica; aprender a aprender, comunicar ideas con claridad; trabajar en equipo; e Identificar y resolver problemas de su profesión, inscritas en el Plan Faro U-2010.

Para seleccionar los contenidos del curso el Cuerpo Académico de Matemática Educativa realizó un análisis riguroso y exhaustivo de las necesidades de cada una de las carreras que llevarían dicho curso, también se revisaron programas ofertados por varias universidades en México e incluso los indicadores señalados en Curriculum and Evaluation Standards (National Council of Teachers of Mathematics, 1980).

Planteamiento del problema

A dos ciclos de impartir el curso de Matemáticas I y ante los escenarios cambiantes dentro de los que se encuentra la universidad, surgió la inquietud y necesidad de validar los contenidos de este programa: ¿los temas y contenidos propuestos en los cursos de matemáticas son los que requieren en su desarrollo profesional nuestros egresados?, ¿los contenidos propuestos son básicos para el desarrollo de habilidades matemáticas?

Se planteó realizar una investigación sobre los contenidos matemáticos que los ingenieros de la localidad utilizan en su ejercicio profesional, considerando que de acuerdo a sus responsabilidades profesionales son los que requieren de una base de conocimientos más profunda y amplia de esta área del conocimiento humano, por lo tanto nos podrían arrojar indicadores también validos para las otras carreras.

Justificación

La actividad docente requiere una revisión constante de sus contenidos bajo la premisa del desempeño laboral que el futuro egresado realizará, para ello es necesario obtener información real de aquellos quienes ya participan en este. Si bien se han realizado algunos estudios de egresados (Salazar, 2006, p.15), ninguno responde a las necesidades particulares que en este momento marcan nuestras interrogantes.

Este proyecto de investigación encuentra su justificación en la imperiosa necesidad de contar con información valiosa que permita dar sustento a la propuesta de sus temas matemáticos considerando la pertinencia de estos de acuerdo al esquema de experiencias de aprendizaje referidas al desarrollo de habilidades y competencias que plantea el modelo educativo institucional. De lo anterior se deduce que el estudio tiene un impacto directo e inmediato sobre el programa de Matemáticas I.

Delimitación

Pemex Exploración y Producción en el 2006 reportó que contaba con 48,271 trabajadores (Petróleos Mexicanos, 2006a, p. 12), de los cuales 13,406, entre administrativos y operativos estaban adscritos a la Región Marina Noroeste de la sonda de Campeche. Del personal corporativo, se tenían 6,169 considerados locales y 7,497 considerados “flotantes” (Arrocha, 2008, p.25). Adicionalmente, se tiene que los trabajadores administrativos de las empresas de apoyo de la isla ascienden a 1,956 trabajadores de origen local, mientras que los trabajadores operativos representaron un total de 15,383, divididos en 4,153 locales y 11,230 con residencia fuera del municipio, considerados como población flotante (Arrocha, 2008, p.25). Dentro de este contexto, si bien se tiene determinada la población que trabaja en la industria extractiva no existe un censo

por profesión, por lo que no se pudo delimitar la población en base a una cantidad específica de esta. Lo que si es conveniente remarcar que esta se integrará únicamente de ingenieros que laboran localmente en el período de enero a julio de 2005 (fecha a la cual se circunscribe la recolección de datos), sin considerar su lugar de procedencia o si su base de trabajo se encuentra en alguna otra ciudad, (población flotante).

Objetivos de la investigación

Objetivo General: Determinar los temas matemáticos pertinentes en función del desempeño profesional de los ingenieros que laboran en Ciudad del Carmen, a fin de tomarlos como base para validar la inclusión de contenidos en el programa Matemáticas I.

Objetivo particulares: Obtener información que permita el análisis de los contenidos matemáticos, determinar los temas de las matemáticas ejercidas en base a la ingeniería en áreas diversas, establecer los temas matemáticos aplicados en base al área en que se desempeñan los ingenieros e identificar las áreas de desempeño y el tipo de matemáticas empleadas en base a ellas de los ingenieros de la localidad.

Preguntas de investigación

¿Cuáles son los temas matemáticos que utilizan los ingenieros en su desempeño profesional?, ¿cuáles son los contenidos matemáticos de acuerdo al área de desempeño de los ingenieros?, ¿qué áreas de las matemáticas tienen mayor relevancia de acuerdo a las diferentes áreas de la ingeniería?

Marco de referencia

Con el propósito de unificar significados de los términos más relevantes usados en este estudio, a continuación se definen:

Programa educativo: “Instrumento curricular donde se organizan las actividades de enseñanza-aprendizaje, que permite orientar al docente en su práctica con respecto a los objetivos a lograr,

las conductas que deben manifestar los alumnos, las actividades y contenidos a desarrollar, así como las estrategias y recursos a emplear con este fin" (Salazar, 2006, p. 33).

Desempeño profesional es la "Aptitud de un individuo para desempeñar una misma función productiva en diferentes contextos y con base en los requerimientos de calidad esperados por el sector productivo. Esta aptitud se logra con la adquisición y desarrollo de conocimientos, habilidades y capacidades que son expresados en el saber, el hacer y el saber hacer" (Mertens, 2000, p. 50).

Se entiende por población flotante aquella población ocupada del país que se desplaza diariamente a trabajar a una entidad o a un municipio distinto al de su residencia (Instituto de Geografía Estadística e Informática, 2009).

Metodología

El estudio será de carácter eminentemente descriptivo. Se pretende determinar los temas más utilizados por los ingenieros en sus actividades profesionales, sin pretender profundizar sobre las razones que llevan a dicha utilización; sin embargo como un aspecto secundario posterior, se realizará un análisis correlacional que nos permita establecer relaciones entre campo de trabajo y estudios de ingeniería realizados con respecto a los temas matemáticos aplicados.

Diseño de la investigación

La presente es una investigación no experimental de diseño transversal, utilizándose como instrumento de recolección de información un cuestionario previamente estructurado, con aplicación única a cada sujeto seleccionado que integra la muestra.

Población muestra

La población objeto está constituida por los ingenieros de cualquier área que laboran en diversos sectores de Cd. del Carmen. Ante la carencia de un marco muestral bien definido se recurrió a tomar una muestra no probabilística de 240 ingenieros seleccionados a juicio en diferentes

empresas tanto del sector petrolero como del comercial e incluso educativo, sin importar rangos de edad ni sexo.

Instrumento

Se diseñó un instrumento con doce preguntas que incluía información de tipo general como: edad, sexo, lugar de origen, institución en la cual realizó sus estudios universitarios, y por otro lado información sobre su lugar de trabajo: antigüedad, puesto, funciones y el empleo de las matemáticas.

Fuentes para la obtención de la información

La información necesaria para la investigación se obtuvo directamente de los ingenieros que laboran en las empresas locales, tanto en oficina como en el campo. Para ello se utilizó el instrumento (cuestionario) previamente diseñado.

Procesamiento de la información

La información obtenida, cuantitativa y cualitativa, se procesó con el SPSS 16.1. Se obtuvieron medidas descriptivas, cuadros estadísticos y gráficos, sintetizando sus valores y contenidos que permitieron extraer conclusiones.

Finalmente, la interpretación de datos está relacionada directa y constantemente con el estudio en proceso, debe considerarse esencialmente dinámica, en el sentido de que la confiabilidad guarda una relación con que en cuanto más datos (muestra más grande) mayor es la posibilidad de describir el acontecer del uso de las matemáticas en las labores ingenieriles.

Resultados

Los resultados permiten reseñar los temas matemáticos obligando, en consecuencia, a revisar contenidos matemáticos el programa del curso de Matemáticas I.

El estudio, de carácter eminentemente descriptivo, partió de una muestra no probabilística de 240 ingenieros seleccionados a conveniencia en diferentes empresas tanto del sector petrolero, como del comercial e incluso educativo, sin importar rangos de edad ni sexo, a quienes se les aplicó el instrumento tomando en consideración la información que se deseaba obtener para su análisis, de acuerdo a la confidencialidad y anonimato requeridos.

La información cuantitativa y cualitativa más relevante se puede resumir de acuerdo a los objetivos iniciales perseguidos como se detalla:

Se trabajó con la información de 237 encuestados (se eliminaron 3 por no tener certeza en cuanto a sus respuestas) de los cuales sólo 35, el 15% fueron mujeres, el 65% restante fueron hombres.

En lo que se refiere el rango de edad iba de 22 a 57 años encontrándose distribuido un 26% de 22 a 30 años, la mayor concentración fue en el rango de 31 a 40 años con un 54%, mientras que de 41 a 50 años tuvimos un 16%, para finalmente de 50 a 57 años sólo se registró el 4% de los encuestados.

En cuanto a la carrera, encontramos que el 18.72% se concentró en ingenieros civiles; seguido del 11.49% que dijeron ser ingenieros en sistemas computacionales; con un porcentaje igual de 10.64% lo ingenieros mecánicos navales e industriales; el 8.94% fueron eléctricos o electricistas; y, los ingenieros petroquímicos y petroleros con un 6.81% y 5.53% respectivamente. En total encontramos 22 programas educativos diferentes del área de ingeniería, destacando los mencionados.

El 65% de los encuestados se desempeñaba en “campo”, mientras que el 23% se desempeña en oficina, un 11% en la docencia y el 1% restante dijo estar en otra área.

En cuanto a la rama de las matemáticas de uso más frecuente en su trabajo, encontramos que el 40% dijo que esta era el Cálculo, un 19% dijo que era el álgebra, mientras que con igual porcentaje del 15%, encontramos el uso de la aritmética, y alguna “otra” rama que se desglosó en un 6 % en el empleo del Análisis Numérico, un 4% el uso de algoritmos y un 5% la Estadística; finalmente sólo un 11% dijo que empleaba Ecuaciones Diferenciales.

Reflexiones finales

Si bien es cierto que tradicionalmente se ha considerado que el ingeniero "debe" tener un dominio de las matemáticas mayor al resto de las profesiones, considerándosele como una herramienta fundamental en toda la gama de procesos de análisis y de cálculo que debe llevar a cabo, también es cierto que es una herramienta a través de la cual modelamos y damos respuesta a problemas reales todos los profesionales.

Sin embargo, de acuerdo a los resultados que obtuvimos en nuestra investigación, el ingeniero que se encuentra inmerso en actividades de campo no aplica el enorme cúmulo de contenidos matemáticos que recibió durante su formación, sino aplica conocimientos básicos del cálculo, álgebra, aritmética, mientras que porcentajes menores dijeron emplear análisis numérico, estadística y ecuaciones diferenciales.

Lo anterior, no demerita en nada al hecho de que la estructuración de los conocimientos matemáticos en las asignaturas de las carreras de Ingeniería modela la lógica hipotético-deductiva y favorece la de la actuación del profesional en la solución de los aspectos cuantitativos de las situaciones problemáticas que se presentan en la correspondiente esfera de actuación (Guerrero, 2004).

Adicionalmente observamos que si bien ha habido un crecimiento sustancial de la presencia de mujeres en las ingenierías esto no se refleja en el trabajo de campo pues del 15% encontrado en la muestra, todas realizan labores de oficina.

Referencias bibliográficas

Arrocha, F. (2008). El Impacto de la Población Flotante en el Gasto Público Municipal de Ciudad del Carmen en el 2006. Industria Extractiva. Instituto Municipal de Planeación Carmen.

Cuerpo Académico de Matemática Educativa (2002). Programa Sintético de Matemáticas I. Universidad Autónoma del Carmen.

Guerrero, E. (2004). La estructuración del contenido matemático por problemas: un mecanismo para alcanzar un conocimiento efectivo en educación superior. Revista Electrónica de

Investigación Educativa, 6 (2). Recuperado el 18 de octubre de 2007 de: http://redie.uabc.mx/vol6no2/contenido-guerrero.html

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (2006). Información Estadística. Recuperado el 2 de marzo de 2006 de: http://www.inegi.org.mx/lib/olap/general_ver4/MDXQueryDatos.asp?#Regreso&c=10401

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (2009). Ficha Técnica. Conceptos Técnicos y Definiciones. Consulta Interactiva de Datos. Recuperado el 15 de febrero de 2006 de: http://www.mapserver.inegi.org.mx/estandares/Index.cfm?Ligas=ficha.cfm&idf=1228

Mertens, L. (2000). Competencia laboral: sistemas, surgimiento y modelos, CINTERFOR/OIT, Montevideo. Recuperado el 15 de marzo de 2009 de http://www.cinterfor.org.uy/public

Petróleos Mexicanos (2006a). Anuario Estadístico 2006. PEMEX

Petróleos Mexicanos (2006b). Producción por entidad. Pemex. Exploración y producción. Producción por Entidad. Recuperado el 5 de marzo de 2009 de: http://www.pep.pemex.com/AnuEst2006/index.htm

Petróleos Mexicanos (2007). Informe Desarrollo sustentable. Recuperado el 5 de marzo de 2009 de http://desarrollosustentable.pemex.com/portal/index.cfm?action=content&SectionId=1&catid=110&contentid=112

Salazar, A. (2006). El Modelo Educativo de la Universidad Autónoma del Carmen. Una Experiencia de Aprendizaje Institucional. Cd. del Carmen, Campeche, México: Imprenta Yax-ol.

Secretaría Académica de la Universidad Autónoma del Carmen (2003). Boletín Informativo del Nuevo Modelo Educativo 02, no publicado. Cd. del Carmen, Campeche, México.

The National Council of Teachers of Mathematics (1980). Curriculum and Evaluation Standards. Recuperado el 12 de agosto, 2002 de http://www.nctm.org/profile/login.aspx?return=/fullstandards/previous/currevstds/Default.asp

Universidad Autónoma del Carmen (2000). Plan de Desarrollo Institucional Faro U-2010. Cd. del Carmen, Campeche, México: Talleres Gráficos de la Universidad Autónoma del Carmen.

INDICADORES DE MOTIVACIÓN EN PROFESORES QUE CONOCEN UNA NUEVA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Rosario del Pilar Gibert Delgado, Patricia Camarena Gallardo, José Guadalupe Torres Morales
Instituto Politécnico Nacional México
giberty42@hotmail.com, patypoli@prodigy.net.mx, jgtorresm@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *El propósito de esta investigación es identificar los indicadores de motivación que se manifiestan en los docentes cuando conocen una nueva estrategia didáctica, la matemática en contexto (MC). Para esto la presente investigación, comprende cuatro vertientes: 1) Seleccionar los indicadores de motivación; 2) Dar a conocer la estrategia didáctica;3) Identificar en el profesor los indicadores de motivación; 4) Analizar la información. En el presente trabajo se detalla como se desarrollaron cada una de estas vertientes.*
Palabras clave: contextualización, indicadores de motivación

Introducción

La motivación es un factor que está presente en el proceso de aprendizaje y por añadidura, en el proceso de enseñanza. El estudio aquí presentado es precisamente la motivación que del docente con el uso de la matemática en contexto, como una estrategia didáctica de enseñanza. El problema de investigación que se analiza en el desarrollo de este trabajo radica en "Cómo determinar el impacto que tiene al profesor de matemáticas el conocimiento de la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto (MC) para impartir la distribución normal y la evaluación de cómo concibe dicho cambio con respecto a la forma tradicional de la enseñanza de este concepto".

En este trabajo se analiza, como una inquietud que surge a partir de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en las escuelas de ingeniería, la motivación del profesor ante una contextualización de la matemática para el concepto de distribución normal, cuyo contexto es la transmisión de información por canales diversos. El desconocimiento de la utilidad práctica de las matemáticas que se estudian es un problema que influye determinantemente en el desempeño escolar, incidiendo principalmente en la motivación hacia el curso de matemáticas (Camarena, 1988). Por lo que la Matemática Educativa es una disciplina que requiere de investigadores o profesores no sólo interesados en los problemas educativos, sino formados para enfrentarlos , constituyendo además objeto de estudio, de los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral, 1995). Desde luego se pretende

identificar los indicadores de la motivación en el profesor para concebir un cambio en la impartición del concepto de distribución normal, cuando conoce la estrategia didáctica de la MC.

Metodología

De acuerdo al objetivo de investigación, la metodología para el desarrollo de este proyecto, consta de las siguientes vertientes:

1. Seleccionar los indicadores de motivación
2. Dar a conocer la estrategia didáctica
3. Identificar en el profesor los indicadores de motivación
4. Analizar la información.

La primer vertiente, se llevó a cabo mediante un análisis de teorías sobre motivación, relacionadas con el proceso de enseñanza, determinando qué indicadores de motivación intrínseca o extrínseca se ponían de manifiesto en cada una de estas teorías.

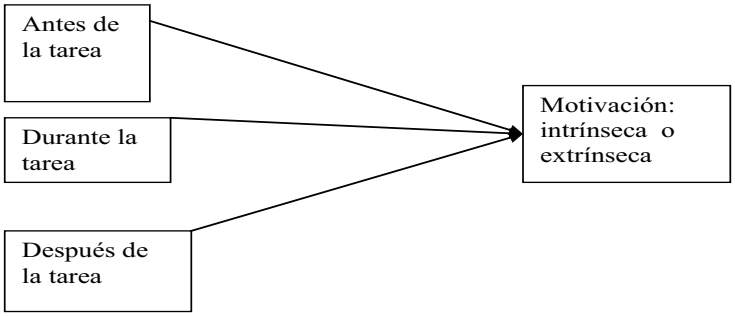
A continuación se presenta un cuadro donde se relacionan las diferentes teorías sobre la motivación con el indicador que lo identifica. Esto es con el objetivo de mostrar que aspectos de la motivación se tuvieron en cuenta para la determinación de los mismos.

Cuadro 1.Diferentes teorías sobre la motivación y sus indicadores.

Autor	Año	Aspectos de la motivación que considera	Indicadores de la motivación de cada teoría
P.T Young	1948	Proceso para despertar la acción, sostener la actividad en progreso y regular el patrón de actividad	Si no se rinde y mantiene un buen nivel de activación
Monique Croizier	1990	En la medida que el hombre pueda tener una intención profunda y actuar en consecuencia , podrá considerarse a sí mismo como proyecto de vida	Si da persecución de metas
Luis Haro Leeb	1990	Las motivaciones son fuerzas conocidas o desconocidas por el propio sujeto , que determinan cualquier comportamiento, sea o no aparentemente	Si manifiesta su comportamiento

Autor	Año	Aspectos de la motivación que considera	Indicadores de la motivación de cada teoría
Maslow	1991	Una sólida teoría motivacional deberá suponer que la motivación es constante, que nunca termina, fluctúa y que es compleja y que casi es una característica universal de prácticamente cualquier situación del organismo	Si el interés por la actividad es constante o fluctúa
Brown	1991	Considera tres variables motivacionales teniendo en cuenta sus respuestas a diferentes estímulos	Si a partir de un estímulo: -Aprende de dicha respuesta -Un aumento de este hace que se abandonen las respuestas - Sus efectos no pueden atribuirse a otros procesos no motivacionales
Reynaldo Suárez	1992	Motivar es incitar a una persona a hacer u omitir algo	Si tiene interés en aprender y crear las condiciones para su logro
John Marshall Reeve	1992	El individuo se encuentra con una actividad y decide si es nueva, interesante y si le provoca curiosidad, si no muestra conductas motivadas y desvía su atención hacia otra actividad	Si le provoca curiosidad la actividad
Ángel Ruiz Zúñiga	1992	Cuando los estudiantes aprenden por curiosidad y deseo de nuevos retos (motivación intrínseca) se implican más y derivan más satisfacción del proceso educativo	Si manifiesta satisfacción al afrontar la tarea
Jesús Tapia Alonso	1997	Interés de cómo los individuos afrontan la realización de la tarea: Capacidad para experimentar orgullo tras el éxito o vergüenza tras el fracaso	Si demuestra orgullo o vergüenza al observar los resultados de la ejecución de la tarea
Huertas	1997	La base de la conducta motivada no es una disposición estable de personalidad relacionada con una necesidad natural. Las explicaciones que damos a nuestras acciones a las acciones de los demás, determinan nuestras tendencias de acción.	Si desea recabar información válida para una buena autoevaluación
Gustavo Saldaña Jalttar	1997	Factor importante para la investigación de la conducta, siendo esencial para que un organismo aprenda	Si es capaz de mantener un nivel alto de activación

Continuando con el análisis de las teorías de motivación que sirven de soporte a esta investigación podemos decir que todas las teorías citadas anteriormente se ven reflejadas cuando un individuo lleva a cabo una tarea en sus tres momentos fundamentales: antes, durante y después de la misma, teoría sustentada por Dweck y Elliot (1983), sobre que piensa y hace el sujeto durante estos momentos ver Cuadro 2.



Cuadro 2.-Teoría motivacional de Dweck y Elliot

Por lo que este trabajo de investigación, se sustenta en dicha teoría, analizando los indicadores de motivación intrínseca y extrínseca mencionados en el cuadro 1.

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias se tomó como el marco referencial que soporta la estrategia didáctica a ser empleada (MC). Por lo que a continuación exponemos brevemente dicha teoría para mostrar el por qué de su selección.

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) nace en 1982 en el Instituto Politécnico Nacional de México .Esta teoría enfrenta las razones por las que se imparten los contenidos de los programas de estudio en carreras de ingeniería en las que el alumno está desmotivado hacia el aprendizaje de la matemática porque no le encuentra sentido, repitiéndose así la situación de que en apariencia “nunca han visto los conocimientos que les exige el profesor” (Camarena, 1999). Esta teoría es el resultado de investigaciones hechas por más de 20 años por un grupo de trabajo de investigadores de esta teoría (MCC) y que contempla cinco fases:

- La curricular, desarrollada desde 1984
- La didáctica, iniciada desde 1987
- La epistemológica, abordada en 1988
- La de formación docente, definida en 1990

- La cognitiva, estudiada desde 1992

En cada fase se realizan investigaciones, sin que esto signifique que son fases aisladas. Esta investigación incide solamente en la *fase didáctica*, tomando de ésta *la estrategia didáctica de la matemática en contexto***.** La Fase Didáctica presenta una propuesta denominada *Matemática en Contexto* (Camarena, 1995), en donde se vincula la matemática con otras asignaturas y contempla 9 etapas:

- Búsqueda del problema en otras ciencias
- Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto
- Determinación de las variables y de las constantes del problema
- Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución
- Determinación del modelo matemático
- Solución matemática del problema
- Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas en contexto
- Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto

Con conocimiento de todo lo anterior, es que se pasa a la instrumentación de la segunda vertiente.

En la segunda vertiente, se dio a conocer la MC mediante un taller para profesores, el cual fue impartido por especialistas en cada tema, en cada sesión o bloque. Tuvo partes tanto teóricas como prácticas, lo que permitió interactuar a profesores e instructores, propiciando un ambiente que favoreció la manifestación de los indicadores de motivación. El objetivo general del taller fue observar las manifestaciones de las conductas de los docentes a través de la vivencia experimentada con la estrategia didáctica de la MC y de esta forma, analizar la incidencia de los indicadores de la motivación en el transcurso del mismo mediante los instrumentos de observación.

En el taller, denominado “Matemáticas en el contexto de la transmisión de la información”, se verificó la manifestación de los indicadores de la motivación en el docente. Se estructuró de tal forma que se pudiera observar el comportamiento de los profesores cuando interactuaban con una forma de contextualizar las matemáticas utilizando la MC.

Este taller, tuvo como objetivo general que el docente conociera y trabajara con la contextualización de la distribución normal en la Transferencia de Información de Señales por canales diversos, generada a partir de las etapas para resolver un problema utilizando la estrategia didáctica de la MC. Dicho taller estuvo formado por cuatro bloques:

I. Elementos de la Matemática en el Contexto de las Ciencias

II. Áreas de contexto

III. Simulador en Matlab

IV. Contextualizar

En la tercer vertiente, se identificaron mediante los instrumentos de observación, las encuestas y la filmación, los indicadores de motivación intrínseca y extrínseca que se pusieron de manifiesto en los tres momentos de ejecución de la tarea (taller): antes, durante y después, según la teoría de Dweck y Elliot (1983), ver Cuadro 3.

- Filmación: Tuvo como objetivo analizar los indicadores y comportamientos.
- Encuestas: Se utilizaron antes, durante y al final del taller. Se observan conductas externas e internas de los participantes al ver cómo interactúan sobre los tema de Probabilidad, uso de las TIC como lo es el software Matlab, y otras más encuestas al cierre y final del curso y una última sobre la socialización.

Instrumeto Encuestas	**Antes de la tarea**	**Durante la tarea**	**Después de la tarea**
Cuestionario Diagnóstico	X		
Encuesta del tema de Probabilidad		X	
Encuesta del Bloque de Matlab		X	
Encuesta del cierre del curso		X	
Encuesta del final del curso		X	
Encuesta de la socialización			X

Cuadro 3.-Momentos en los que se aplicó cada encuesta

En el siguiente cuadro se relacionan los indicadores observados con cada una de las encuestas aplicadas en los diferentes momentos de ejecución del taller.

Cuadro 4.-Indicadores observados en cada instrumento

INDICADORES	Cuestionario diagnóstico	Encuesta de la sesión de probabilidad	Encuesta de la sesión de matlab	Encuesta del cierre del curso	Encuesta del trabajo final	Encuesta de la socialización
Si no se rinde y mantiene un buen nivel de activación		X	x	x		
Si da persecución a las metas	x	X	x	x	x	
Si el interés por la actividad es constante o fluctúa		X	x			x
Si a partir de un estímulo: -Aprende de dicha respuesta			x			

-Un aumento de este hace que se abandonen las respuestas -Sus efectos no pueden atribuirse a otros procesos no motivacionales						
Si tiene interés en aprender y crear las condicionales para su logro		X	x	x	x	
Si le provoca curiosidad la actividad	x	X	x	x	x	
Si desea recabar información válida para una buena autoevaluación	x	X	x	x	x	

La cuarta y última vertiente se realizó mediante el análisis de la información obtenida a través de las encuestas aplicadas antes, durante y después del taller .Se realizó un seguimiento individual de los participantes, lo que permite tener una visión global del grupo. Para el análisis se realizo con el siguiente orden:

1. Se clasificaron las respuestas de acuerdo a expresiones más representativas.
2. Se colocaron las evidencias de la respuesta más frecuente de cada pregunta. Esta respuesta se interpreta en términos del indicador para determinar cuál fue el de más ocurrencia.

Conclusiones

Para hacer un mejor análisis de los siete indicadores que tomamos como base en nuestra investigación, los agrupamos en tres categorías, haciéndolo de forma más explícita para la investigación:

Categoría A

1. Si el participante no se rinde ante el reto del aprendizaje de la estrategia didáctica de la MC y mantiene un buen nivel de activación para el logro de éste.

2. Si continúa con el propósito que él mismo se estableció al inicio del taller.

3. Si mantiene el interés por la estrategia didáctica de la MC

Categoría B

5. Si además de conocer la estrategia didáctica de la MC, surge el deseo de crear las condiciones para utilizarla en su práctica docente.

6. Si el interés de la estrategia didáctica de la MC es solamente por lo novedoso de la misma.

7. Si desea conocer a fondo la estrategia didáctica de la MC para poder aplicarla en el salón de clases y con ello determinar qué tan tanto aprendieron de la estrategia.

Categoría C

4. Si a partir de un estímulo:

Aprende de dicha respuesta

Un aumento de éste hace que se abandonen las respuestas

Sus efectos no pueden atribuirse a otros procesos no motivacionales

A continuación se detalla lo anterior:

- *Categoría A* los autores de las teorías motivacionales, se refieren a que la motivación depende de si el interés por la actividad se mantiene y que es consecuencia de la persecución que se le da a sus metas. Esto es, para la presente investigación, *la categoría A habla de la motivación a través del interés por el conocimiento de la estrategia didáctica de la MC.*

- *Categoría B* de forma general se plantea que el interés por aprender -que en un principio pudo ser por curiosidad por la actividad a enfrentar- les permitió crear los medios necesarios para lograr ese aprendizaje y a su vez evaluar qué tan capaces son para enfrentar este reto. Es decir, para la presente investigación, *la categoría B estableció la motivación a*

través del interés por crear las condiciones para el aprendizaje de la estrategia didáctica de la MC y crear los medios para utilizarla en su práctica docente.

- *Categoría C* el autor basó su teoría *en estímulos externos* que puedan llevar al individuo a aprender y una vez que éstos hayan dejado de actuar, el sujeto abandona la actividad.

Las primeras dos categorías nos permitieron establecer qué tan motivado intrínsecamente estuvo el participante. La categoría C establece la motivación extrínseca.

Este análisis se realizo a partir de estos tres grupos logrando determinar a qué categoría se apegó cada participante del taller y de esta forma observar la motivación en cada momento de la tarea (taller), y por consiguiente determinar si los profesores se mantuvieron motivados mientras interactuaban en el taller con una nueva estrategia didáctica, la MC.

Para facilitar el análisis se hizo una clasificación en tres niveles, atendiendo a los momentos de ejecución de la tarea (taller), para determinar si los participantes estuvieron o no motivados hasta el final del taller y en dependencia de la cantidad de indicadores manifestados en las categorías A y B, que fueron las más significativas para la investigación pues son las que muestran motivación intrínseca, que es de fundamental interés para nuestra investigación como ya se ha mencionado anteriormente.

La diferenciación que se hizo antes y después del taller de acuerdo a la cantidad de indicadores que se manifestaron, fue diferente a la que se hizo al determinar el número de indicadores durante el taller (durante la tarea), puesto que en este periodo hubo más actividades por lo que se requirió aplicar cuatro encuestas. Además, cabe señalar que antes de iniciar el taller (antes de la tarea) se utilizó sólo una encuesta al igual que una vez finalizado el mismo (después de la tarea), ya que la motivación al inicio la provocó la expectativa sobre el taller y después de un período de reflexión (un mes después) se instrumenta una encuesta para observar que indicadores de la motivación permanecen.

Lo anterior permite establecer niveles de motivación: Si ningún indicador se cumple, se tiene el nivel no motivado (NM), si se cumple un indicador el nivel es poco motivado (PM), dos indicadores regularmente motivados (RM) y si se cumplen de tres o cuatro indicadores el participante estuvo motivado (M).

Utilizando las categorías A y B y los niveles de motivación anteriores se realizó un análisis por cada participante con el fin de determinar individualmente su nivel de motivación en cada uno de los tres momentos de la tarea (taller): antes, durante y después. Después de este análisis individual, se hizo un análisis de forma general de todos los participantes teniendo en cuenta los niveles de motivación, a partir de rangos de estos niveles de motivación, con el fin de obtener una visión general de la motivación de los participantes al taller.

Según los rangos anteriores pudimos observar que un participante empezó motivado en el taller y después elevó su motivación hasta terminar muy motivado. Ocho participantes comenzaron motivados, durante el taller fue muy alta su motivación y después del taller su motivación disminuyó. Tres participantes comenzaron muy motivados, se mantuvieron de esta forma durante el taller y al final también disminuyó su motivación. Y por último, un participante inició el taller motivado, luego elevó su nivel de motivación durante el taller y al final terminó sin ninguna motivación.

De acuerdo a lo anterior se mantuvo constante la motivación de los participantes en los tres momentos en el taller, excepto un participante que al final se desmotivó por completo, y otro que siempre fue alta su motivación. Como ha sido mencionado solamente un participante inició, se mantuvo y terminó motivado.

Resumiendo

Se planteó al inicio de esta investigación la pregunta: *¿Cómo determinar que el docente se motive con el conocimiento de la estrategia didáctica de la MC para concebir un cambio en la impartición del concepto de la distribución normal?.* Esta interrogante nos llevó a utilizar encuestas antes, durante y después del taller, como instrumentos de observación, que nos permitieron determinar los indicadores de motivación que se pusieron de manifiesto. Los resultados de estas encuestas nos permiten abordar esta interrogante de investigación concluyendo lo siguiente:

1. Una sola persona finalizó con un nivel alto de motivación, además que este participante mantuvo una motivación constante durante todo el taller, de tal forma que al final presentó una propuesta de contextualización en la materia que imparte.

2. Once participantes terminaron regularmente motivados, pero de acuerdo a sus opiniones fue producto de los obstáculos "tiempo" y "más trabajo", que limitaría el poder instrumentar esta estrategia didáctica en sus salones de clases. Sin embargo, algunos de ellos estaban dispuestos a enfrentar este reto.

3. Solamente una persona quedó totalmente desmotivada al terminar el taller. Cabe mencionar que su desmotivación seguramente estuvo provocada por problemas personales ya que actualmente abandonó la labor docente.

Como consecuencia de todo lo anterior se tiene que de acuerdo al problema de investigación que se plantea, *como la determinación de si el conocimiento por parte del profesor de la estrategia didáctica de la MC para impartir la distribución normal motiva al profesor a concebir un cambio en la enseñanza de este concepto*, queda demostrado que sí es posible, aunque no con los resultados deseables. Los obstáculos "tiempo" y "más trabajo" les impiden hacer cambios en su práctica docente.

Es importante destacar que sí es posible que el docente se motive ante la matemática en contexto independientemente que existan otros factores importantes que intervienen en la motivación de cada profesor, como es el medio que lo rodea en la Institución donde labora y las condiciones que se presenten en su actividad laboral y su entorno. Es necesario tener en cuenta que existen investigaciones que indican que aunque la motivación es un factor importante que facilita el aprendizaje, no es de ninguna manera una condición indispensable para lograr la enseñanza de algún concepto como ya se ha mencionado anteriormente.

Aportes

- Hay investigaciones relacionadas con las actitudes de los maestros, y otras centradas en el saber; pero a echar de ver ninguna sobre la motivación del docente cuando utiliza la MC.
- Se detectaron dos obstáculos que impiden al docente hacer cambio en su práctica docente hacia la matemática en contexto: el tiempo adicional que deberá dedicar y aumento en el trabajo diario.

Recomendaciones

Como todas las investigaciones ésta no es exhaustiva por lo que se recomienda continuar esta línea de investigación con respecto a la motivación del profesor de matemáticas en diversos niveles educativos. Asimismo, realizar la búsqueda de otros motivadores para el cambio en la práctica docente que conduzca al estudiante a la construcción del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Camarena, P. (1988).Propuesta curricular para la academia de matemáticas del Departamento de ICE. México: Instituto Politécnico Nacional, Esime, Unidad Zacatenco.

Camarena, P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. Memorias del XXVII Congreso de la Sociedad de Matemática Mexicana, DF, México.

Camarena, P. (1999). Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas en Ingeniería. Memorias del Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electrónica y de Sistemas. México, D.F, México.

Cantoral, R. (1995). Matemática Educativa .Revista Pedagógica 10(5), México.

Dweck y Elliot (1983). Interrelaciones de factores asociados en la motivación Intrínseca. Revista Mexicana de Psicología, 18(2), 265-272.

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Javier Eduardo Maldonado Dennis, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav IPN México
jmaldonado@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística
Nivel: Básico

Resumen. *Esta investigación se interesa en caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estadística de alumnos de educación primaria, resultante de su enseñanza. La investigación consta de tres etapas, la segunda, que aquí presentamos, corresponde a la enseñanza en el aula de contenidos de estadística. Con el propósito de caracterizar su enseñanza en el aula y constituir un referente para identificar sus resultados en la comprensión de los alumnos de los temas enseñados, se observaron y transcribieron, para su análisis, 16 sesiones de estudio (tres por grado escolar, con excepción del primer ciclo, donde sólo se plantea la enseñanza de dos lecciones por cada grado), referentes a contenidos de estadística propuestos en las lecciones respectivas de los libros de texto. Participaron en la investigación un grupo de alumnos de cada grado y su docente titular, en total 250 alumnos y seis docentes.*
Palabras clave: estadística, enseñanza, educación primaria

Antecedentes

La estadística está infiltrada en la vida cotidiana y en la profesional. Sin embargo, en la enseñanza en educación primaria, el predominio de la operatividad aritmética propicia el desvío de situaciones de naturaleza estadística hacia la comparación de la distribución de las frecuencias de los valores de la variable aleatoria (Maldonado, 2006); esta etapa estudia la interrogante de cuáles son las características de la enseñanza de contenidos de estocásticos, en particular, de ideas fundamentales de estadística en educación primaria.

Elementos teóricos

Heitele (1975) ha propuesto lo fundamental en estocásticos para un currículum en espiral. En nuestro estudio, centrado en ideas de estadística, son relevantes las de muestra (población), variable aleatoria (frecuencia y medidas de tendencia central), y espacio muestra. Consideramos la constitución del concepto matemático como resultante de la interacción entre él, el objeto y el signo, según el acercamiento propuesto por Steinbring (2005). De manera esquemática, el autor se refiere al triángulo epistemológico para la constitución del concepto, como muestra la Fig. 1.

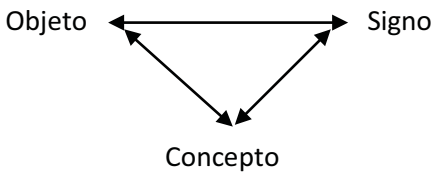


Figura 1. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005, p. 22).

Método

La investigación, organizada en tres etapas, es cualitativa (Eisner, 1998). En la segunda etapa, de interés aquí, se videograbaron y transcribieron 16 sesiones de enseñanza en el aula de contenidos de estadística propuestos en las lecciones respectivas de los libros de texto (SEP, 1994; SEP, 1999; SEP, 2000; SEP, 2001; SEP, 2002; SEP, 2004). Su propósito es caracterizar la enseñanza de la estadística en el aula y constituir un referente para identificar sus resultados en la comprensión de los alumnos de los temas enseñados, mediante la aplicación de cuestionarios al final del ciclo escolar. De los elementos teóricos considerados se han derivado los criterios para analizar los datos obtenidos (Ojeda, 2006). A éstos se les ha puesto en juego en el análisis de las características de la enseñanza de contenidos de estadística en educación primaria, a saber: 1) *ideas fundamentales de estadística*; 2) *otros conceptos matemáticos*, distinguidos de las ideas de estadística, tales como, por ejemplo, los aritméticos; 3) los *recursos semióticos* empleados para organizar y tratar datos (tablas, figuras, gráficas, simbología matemática, lengua natural), para vigilar la discriminación entre las tres entidades del triángulo epistemológico; 4) los *términos* utilizados en la enseñanza para la referencia a ideas fundamentales de estadística; 5) los *tipos de situaciones* propuestas por la docencia para el estudio de ideas fundamentales de estadística.

Proceso de análisis de las sesiones de enseñanza

De las 31 lecciones que incluye la propuesta institucional (programa de estudios y libros de texto) para ideas fundamentales de estadística en educación primaria, en esta etapa de la investigación se eligieron 16 para ser enseñadas por los docentes, en particular, las que se refieren a las ideas fundamentales que son de interés para la investigación. La puesta en juego de los criterios de análisis de las sesiones de enseñanza de contenidos de estadística en el aula se ejemplifica aquí con la caracterización de dos de ellas, las cuales se plantean en quinto grado: lección 10 “Un juego

con el diccionario" (SEP, 2000, pp. 28-29), y lección 27 "Qué tan altos somos" (SEP, 2000, pp. 64-65), ambas del eje temático "tratamiento de la información". La primera se refiere a ideas de estadística mediante la interpretación de los datos que se organizan en una tabla de frecuencias, que muestra la distribución de longitud de palabras en castellano identificadas en la primera página para cada letra del abecedario en el diccionario del idioma español, el número de palabras constituidas por una letra, por dos, por tres, cuatro,… hasta por el mayor número de letras que ahí ocurra (véase Figura 2), en tanto que la segunda plantea el cálculo de las medidas de tendencia central correspondiente a las estaturas de los alumnos.

Primera sesión: Lección 10 "Un juego con el diccionario" (SEP, 2000, pp. 28-29).

Propósito. Se pretende que el alumno "Identifique situaciones que requieran recabar información para tomar decisiones" (SEP, 1997, p. 12).

Contenido. La lección de refiere a la distribución de la longitud de palabras en castellano identificadas en la primera página de cada letra del abecedario en el diccionario del idioma español. No se proporcionó información explícita por parte del docente respecto al contenido de esta sesión.

a) *Ideas fundamentales de estadística.* La idea de variable aleatoria, que en este caso consiste en asignar números naturales a las frecuencias de eventos, adquiere significado por los señalamientos de la docente sobre las posibilidades de ocurrencia de todas las palabras con un determinado número de letras. La idea de espacio muestra se introduce de manera clara para distinguirla de la de variable aleatoria, porque plantea la búsqueda del conjunto de todas las palabras en la primera página del diccionario del idioma español para cada letra del alfabeto, por ejemplo, la letra inicial del nombre de todos los alumnos de este grupo. Ejemplos de ello son las intervenciones que aquí se transcriben. Para registrar e identificar las participaciones durante la enseñanza, las transcripciones correspondientes indican, con P, profesor; con A, Alumno.

1P. Busca la primera página del diccionario que corresponde a la primera letra de tu nombre, cuenta cuántas palabras hay con un mayor número de letras y regístralas en una tabla [lee en el libro].

2P. Bien, busquen entonces la primera letra del diccionario con su nombre.

1A. Ya.

3P. ¿Ya la encontraron?

4P. ¡Hagan su tabla!

5P. ¿Con qué letra voy a buscar mi nombre?

6P. La mía, la de Pati.

2A. Con la P.

7P. Bien, a buscar en la primera página, en la primera página nada más.

b) *Otros conceptos matemáticos*. El número natural, se utilizó para indicar en el plano cartesiano los valores que delimitan el rango en que pueden ocurrir las distintas frecuencias de un determinado número de palabras (véase Figura 1).

Figura 1. Gráfica de las palabras encontradas en la primera página del diccionario con la letra inicial del nombre de un alumno del grupo

c) *Recursos semióticos*. La gráfica propuesta en esta lección resulta hasta cierto punto innecesaria; sólo hace referencia a la actividad de conteo de un conjunto de trazos diagonales dispuestos de izquierda a derecha, "talis", como registro de la frecuencia de eventos (véase Fig. 2), para después presentarlo de abajo hacia arriba mediante la altura de un rectángulo.

Letra "P"	
Número de letras	Número de palabras
1	/
2	/
3	/
4	////
5	////
6	///// ////
7	///// //
8	///// //
9	///// /
10	///
11	/
12	//
13	/

Letra "S"	
Número de letras	Número de palabras
1	/
2	
3	
4	/
5	///// /
6	///// /
7	///// ///
8	///// ///// ///
9	///// //
10	///
11	///
12	//
13	

Figura 2. Tabla con datos presentada en la lección 10 (SEP, 2000, p. 28)

La docente hizo notar que con sólo rotar la tabla 90º se hubiera prefigurado la distribución de frecuencias de igual forma.

> 1P. Ahora vean su tabla, si yo…, fíjense bien, su tabla está así [muestra las tablas con datos en la presentación de la actividad]. ¿Qué pasa si yo giro la tabla? [coloca la tabla de manera horizontal]. A ver, ¡gírenla, la tabla! Vamos a ver la tabla, la tabla…
>
> 2P. ¿Qué pasaría? ¿Qué están viendo?
>
> 1A. La que está acá [se refieren a la gráfica de barras].
>
> 3P. La que está acá, ¿pero la que está acá… qué?
>
> 2A. Es la misma.
>
> 4P. A ver, vamos a ver qué tenemos aquí [señala las dos tablas con datos] ¿Qué son?
>
> 3A. Palitos.
>
> 4A. Gráficas.
>
> 5P. ¡Frecuencias!
>
> 6P. Es una frecuencia, pero ¿qué parece, Raúl?
>
> 5A. Una gráfica.
>
> 7P. Parecen gráficas, ¿ya se fijaron?
>
> 6A. Sí.

d) *Términos empleados.* Es notoria la falta de sentido con el que se utilizan los términos para hacer referencia a las ideas fundamentales de estadística. El empleo de expresiones distintas para referirse a una misma idea, por ejemplo, *qué más*, *más frecuente* y *más alto* (variable aleatoria), revela que la operatividad aritmética juega el papel principal en su enseñanza**.**

e) *Situación propuesta*. Buscar en la primera página para cada letra del alfabeto (con la inicial del nombre de todos los alumnos del grupo) en el diccionario del idioma español el número de palabras constituidas por una letra, por dos, por tres, cuatro…; hasta por el mayor número que ahí ocurra.

Segunda sesión. Lección 27 “Qué tan altos somos” (SEP, 2000, pp. 64-65).

Propósito. Se pretende que el alumno “Recopile, organice y analice la información recolectada en diversas fuentes” (SEP, 1997, p. 18).

Contenido. La lección se refiere al cálculo de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda), correspondiente a las estaturas de los 32 alumnos del grupo de quinto grado. No se proporcionó información explícita por parte del docente respecto al contenido de esta sesión.

f) *Ideas fundamentales de estadística*. La variable aleatoria, tanto la variable estadística (numérica y continua) en juego en la situación planteada, como la frecuencia y el promedio de los valores de la variable, es el principal foco en la actividad y adquiere sentido por los señalamientos de la docente sobre el conjunto de dieciséis valores entre los cuales se encuentran las estaturas de los alumnos de este grupo. Ejemplos de ello son las intervenciones que aquí se transcriben.

1P. Estas medidas que tenemos [de los alumnos] en el salón, ¿cómo se llaman?

2P. ¿Se acuerdan que lo vimos?

1A. Frecuencia.

3P. No, la frecuencia es cuántas veces se repite [un dato].

4P. Se acuerdan cuando lanzábamos los volados, águila y sol ¿qué eran?

2A. Árbol.

5P. ¡No, no, no!

6P. ¿Cómo se llamaba [lo] que les decía [de] cuáles son los posibles resultados de un fenómeno aleatorio?

3A. Espacio de muestra.

7P. ¿Cuál?

4A. El espacio de muestra.

8P. ¡Fuerte, Raúl!

5A. ¡El espacio de muestra!

9P. El espacio muestra, que son los resultados que tenemos aquí [señala la primera columna de la tabla de frecuencias].

Se puso en juego la operatividad aritmética para apuntalar la idea de muestra mediante la suma de las frecuencias absolutas obtenidas para cada estatura de los alumnos del grupo; la docente se aseguró de que la suma de las frecuencias absolutas fuera igual al tamaño de la muestra (treinta y dos de alumnos). Como ejemplos se citan las siguientes intervenciones.

1P. Ahora vamos a sacar el total muchachos, para ver si son los que están.

2P. A ver chicos, ¿cuántos tenemos?

3P. Tenemos uno [señala la tercera columna de la tabla de distribución de frecuencias], tres, cinco, siete, diez, trece, diecisiete, veinte, veintiocho, treinta y dos.

4P. Treinta y dos.

5P. ¡Ya, completo!

g) *Otros conceptos matemáticos*. Se utilizaron números naturales para indicar los valores de la frecuencia absoluta de los valores de una variable aleatoria en una muestra y el tamaño de ésta. En cuanto a producto cartesiano, la docente propuso sobreponer dos gráficas de barras para comparar la distribución de frecuencias de los eventos del espacio muestra (véase Fig. 3).

Figura 3. Sobreposición de dos gráficas de barras para comparar
la distribución de frecuencias de los eventos del espacio muestra

h) *Recursos semióticos*. La tabla propuesta en esta sesión hace referencia a la actividad de conteo de un conjunto de marcas diagonales "talis" como registro de la frecuencia de eventos, en este caso la estatura en metros de un determinado número de alumnos (véase Figura 4), para después presentarlo en forma vertical mediante la altura de un rectángulo, y comparar la distribución de frecuencias de los eventos del espacio muestra.

Estaturas	Frecuencia	Total
1.30	|	1
1.33	||	2
1.35	|	1
1.36	|	1
1.37	|	1
1.39	|||	3
1.40	𝍸	5
1.45	|||	3
1.46	𝍸	5
1.47	|	1
1.50	|||	3
1.52	|	1
1.53	|	1
1.55	||	2
1.56	||	2

Figura 4. Estaturas en metros de los alumnos de quinto grado.

i) *Términos utilizados para referirse a estadística*. El docente utilizó las siguientes expresiones: cuál es menor (variable aleatoria), cuál es mayor (variable aleatoria), datos (valores de la variable aleatoria por cada evento del espacio muestra), frecuencia (variable aleatoria), más alto (variable aleatoria), posibles resultados (espacio muestra), espacio muestra (espacio muestra), promedio (variable aleatoria), valor intermedio (variable aleatoria). Obsérvese que esta idea juega el papel principal en la enseñanza y no se distingue de la de espacio muestra. El uso de estos términos indica que, en la enseñanza, cuando se plantea una situación de estudio de naturaleza estadística en términos de una variable aleatoria, se desconoce al espacio muestra que corresponde a su dominio.

j) *Situación propuesta*. Los alumnos midieron sus estaturas con una cinta métrica, y la docente registró cada estatura mediante marcas diagonales "talis" en una tabla de frecuencias antes de trazar una gráfica de barras, para luego plantear las mismas preguntas, a partir de esos datos, que las que propone el libro de texto (SEP, 2000), único medio utilizado en la enseñanza. Ella propuso calcular el promedio de las estaturas de los alumnos de su grupo y compararlo con el que plantea la actividad del libro.

Resultados del análisis de las sesiones de enseñanza

La enseñanza de la estadística se centra en el cálculo de las medidas de tendencia central (moda, mediana y promedio), sin enfatizar si los datos se distribuyen de forma simétrica o asimétrica. La propuesta es calcular el promedio venga como viniere. Aunque los distintos promedios constituyen resúmenes útiles de un conjunto de datos, sólo permiten identificar el valor central o representativo de ellos. Sin conocimiento de su dispersión en torno al promedio, no se proporciona una idea de su comportamiento que permita la predicción.

Conclusiones

La orientación determinista de la enseñanza se enfatiza con el predominio de la aritmética. El conocimiento de las reglas de cálculo no implica la comprensión de los conceptos básicos

subyacentes. Si los alumnos adquieren sólo el conocimiento de tipo computacional, es probable que cometan errores predecibles, salvo en los problemas más sencillos.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H. y Bollás, P. (1999). *Matemáticas*, *cuarto grado*. México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H. y Fuenlabrada, I. (2000). *Matemáticas*, *quinto grado*. México: SEP.

Balbuena, H., Block, D. y Fuenlabrada, I. (2001). *Matemáticas*, *sexto grado*. México: SEP.

Carvajal, A., Martínez, N. y Block, D. (2004). *Matemáticas*, *primer grado*. México: SEP.

Castrejón, J., Ávila, A. y Balbuena, H. (2002). *Matemáticas*, *tercer grado*. México: SEP.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Madrid: Paidós educador.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), pp. 187-205. Holanda: Reidel.

León, H., González, N. y Guzmán, M. (1994). *Matemáticas*, *segundo grado*. México: SEP.

Maldonado, J. (2006). *Medios y enseñanza de estocásticos en la educación primaria: Elementos para formación docente. Ensayo*. XI Verano de la Investigación Científica del Pacífico (programa delfín), DME, Cinvestav del IPN. México.

Ojeda, A. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.) *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, (pp. 195-214). México: Santillana.

SEP (1997). *Avance programático, Matemáticas,* Quinto grado. México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.

SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN AL RESOLVER UN PROBLEMA DE MEZCLAS

Rebeca Flores García
CICATA – IPN México
rebefg@gmail.com
Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad Nivel: Básico

Resumen. *El presente documento tiene por objetivo evidenciar algunos de los significados asociados a la noción de fracción al trabajar con un problema de mezclas dentro del aula. La escuela elegida para su realización pertenece al sistema educativo estatal del nivel básico, ubicada en el centro de la Ciudad de Toluca, Estado de México; se seleccionó a un grupo de secundaria. Se aplicó un cuestionario con seis problemas tomados de libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública. Para el caso que nos ocupa, se aborda sólo uno de estos problemas. Se pretende mirar algunos procesos cognitivos de los alumnos para comprender cómo se llega a la construcción del número fraccionario, además de cómo se van asociando a ella algunos de sus significados. Entre los resultados se identificaron por un lado nociones primarias tales como: parte todo, razón, proporción medida; así como nociones complementarias: partición, equivalencia y la suma tanto de fracciones como de razones.*
Palabras clave: fracción, razón, proporción, significado

Introducción

Así como lo establece Fandiño (2005), el proceso de enseñanza aprendizaje relacionado con las fracciones es ciertamente uno de los más estudiados desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, debido probablemente a que (junto con la cuestión relacionada de los números decimales) representa una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo. Al respecto, Lamon (2001), señala que se ha documentado repetidamente tanto en evaluaciones nacionales como en evaluaciones internacionales que los estudiantes están aprendiendo poco, si no es que nada, acerca de los números racionales.

Estas ideas permitieron asomarnos a los libros de texto de primer grado de nivel secundaria para explorar cómo es que se les plantea a los estudiantes cierto tipo de significados que se le asocian a una fracción, tales como razón, proporción, cociente, operador, parte todo, porcentajes, decimales, entre otros; centrando nuestra atención en las dos primeras nociones las cuales se encuentran muy relacionadas. Dada la relevancia del problema y los objetivos de nuestro estudio, nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los significados asociados

a la fracción al resolver un problema de mezclas? ¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes al resolver el problema?

Marco teórico y metodología

El avance de investigación que se presenta se desarrolla bajo el enfoque de la aproximación socioepistemológica; la cual considera cuatro dimensiones que determinan la construcción del conocimiento en el ser humano: la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la social. De acuerdo con Montiel (2006, p.818): *la componente epistemológica* debido a la componente social desvía su atención de los conceptos y objetos hacia la identificación de prácticas de referencia y actividades ubicadas en contextos particulares; *la componente cognitiva* asume al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se desarrollan socialmente; la *componente didáctica* explica la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar examinando sus efectos e implicaciones didácticas.

Esta investigación se centra en analizar la presencia de las fracciones en el discurso matemático escolar del nivel secundaria a través de la presentación de investigaciones realizadas en torno a los significados que se otorgan a las fracciones en la escuela y a la identificación de los mismos en libros de texto de uso habitual en la actualidad y en el programa de estudio de México.

Se diseñó y aplicó un cuestionario inicial exploratorio conformado por seis problemas distintos. La aplicación del cuestionario fue a un grupo de 36 estudiantes (13 hombres y 23 mujeres) que cursaban el primer grado de secundaria, cuyas edades oscilaban entre los 12 y 14 años y quienes se encontraban finalizando el Ciclo Escolar 2008 – 2009. Este grupo fue seleccionado por dos razones, la primera refiere a que se encontraban desarrollando el último bloque del programa de estudio, motivo por el cual ya tendrían cubiertos los contenidos del problema planteado y la segunda se debe al tipo de procesos expresados en las soluciones que propusieron a los problemas.

Es importante conceptualizar a la fracción a través de todos sus significados, puesto que una elección de enseñanza con solamente uno o dos de ellos resulta ser inadecuada, al respecto Lamon (2001) subraya que aún no queda claro cómo es que los distintos significados puedan

integrarse en la enseñanza. Por su parte Fandiño reporta al menos catorce significados asociados a la noción de fracción, lo cual dificulta aún más su enseñanza.

Una mirada a la solución del problema

El problema planteado.

En dos jarras iguales tenemos una mezcla de agua con jugo de naranja. En una de las jarras, la proporción es de $3:7$ *; es decir, de 3 partes de agua y 7 de jugo de naranja, mientras que en la otra hay una proporción de* $3:5$*. Si juntamos el contenido de las dos jarras, ¿cuál será la proporción?* (Cantoral, Castañeda, Cabañas, Farfán, Lezama, Martínez, Montiel, Molina y Sánchez, 2008, p. 83)

Este problema fue seleccionado en función de los datos encontrados en la revisión de los libros de texto, por un lado los libros proponen variadas situaciones relacionadas con mezclas y por el otro, se observó en este tipo de problemas la conexión entre varios de los significados asociados a la fracción para acceder a la solución, lo cual brinda elementos para observar cómo es que los estudiantes logran establecer ciertos vínculos entre esos significados o posiblemente detectar qué noción no les permite hacerlo apropiadamente.

Dada su complejidad, el problema se desglosa en los siguientes pasos:

1. El problema explicita inicialmente 2 jarras; es decir 2 unidades de 1. Finalmente una jarra de 2 (es decir, una unidad de 2 (1 de 2))

2. Los contenidos de la jarra son iguales, lo que posibilita la suma $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}$

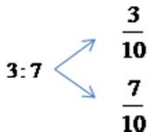
   (la cual se pudo haber resuelto "directamente" $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}=\frac{12+15}{40}=\frac{27}{40}$)

3. La reescritura se induce a partir de la incorporación de los contenidos de las 2 jarras en una nueva jarra (cuyo contenido es el doble del contenido de una de las jarras).

4. El problema incluye varios de los significados de la noción de fracción: el de razón (aquí mencionado como proporción), parte todo, medida, partición, cociente.

5. El procedimiento de solución incluye:

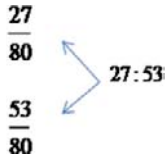
a. Pasajes de la noción razón a la noción fracción común



b. Equivalencia de fracciones $\frac{3}{10}=\frac{12}{40}$

c. Adción de fracciones $\frac{3}{10}+\frac{3}{8}$

d. Pasaje de la noción fracción común a la noción razón



e. Equivalencia de razones $\frac{28}{80}=\frac{53}{80}\sim 27:53$

f. Suma de razones $(3:5)+(3:7)=(27:53)$

Las producciones de 4 estudiantes

A continuación se presentan las realizaciones de cuatro estudiantes. En un primer nivel aparecen las soluciones planteadas por Carlos y Coral, tanto uno como otro recurre a un tipo de representación, la idea central descansa en la creencia de que las partes son iguales en las mezclas originales. En ellos se observa la suma de razones siguiente:

$(3:7)+(3:5)=(6:12)$

$(a:b)+(c:d)=(a+c:b+d)$

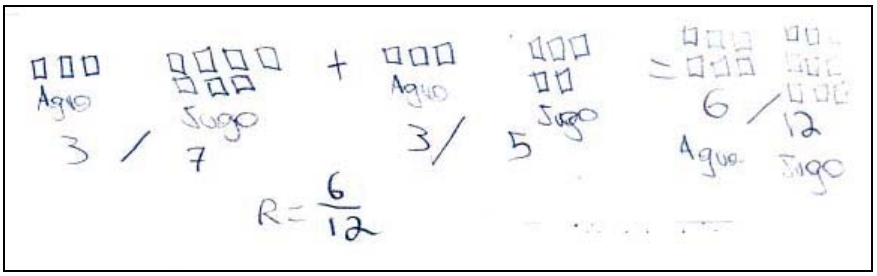


Figura 1. La solución propuesta por Carlos.

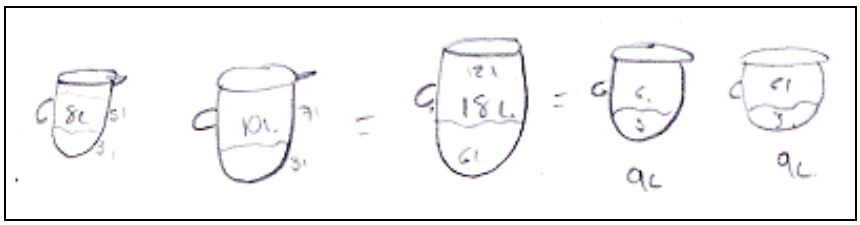


Figura 2. La solución propuesta por Coral.

Ahora bien, en un segundo nivel aparecen las soluciones de Alberto y Ángel.

En lo expuesto por Carlos, en su procedimiento asume que las partes son iguales en las mezclas originales. En ellos se observa la suma de razones siguiente:

$$(3:7)+(3:5)=(6:12)$$

$$(a:b)+(c:d)=(a+c:b+d)$$

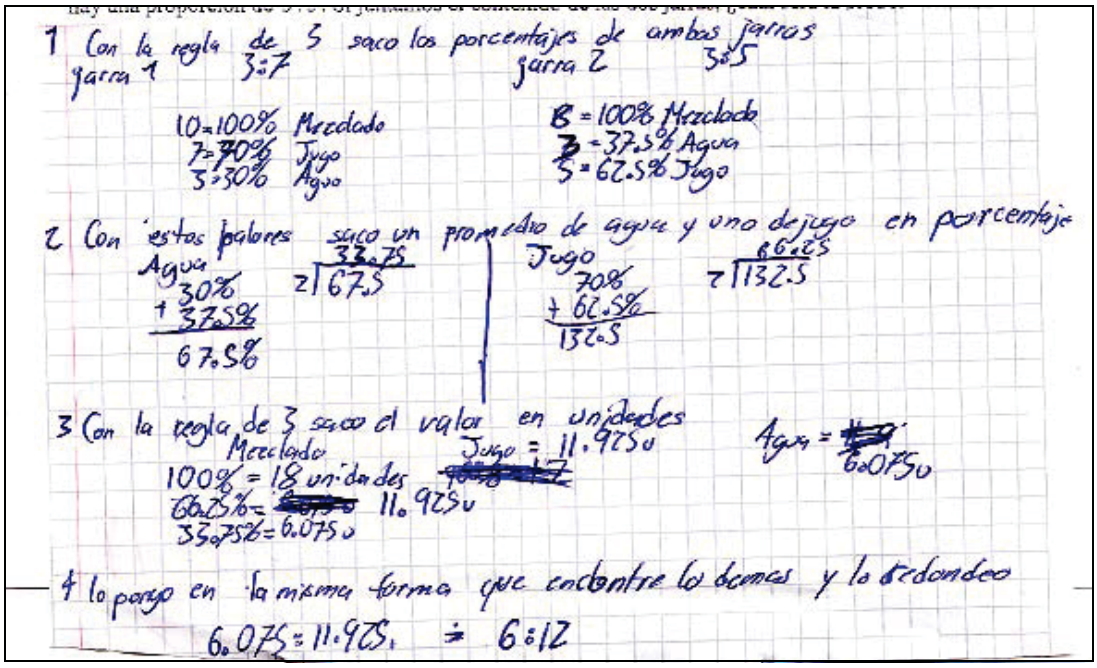


Figura 3. La solución propuesta por Alberto.

Por su parte Ángel, desarrolla una estrategia similar a la de Alberto, ya que como se observa a continuación:

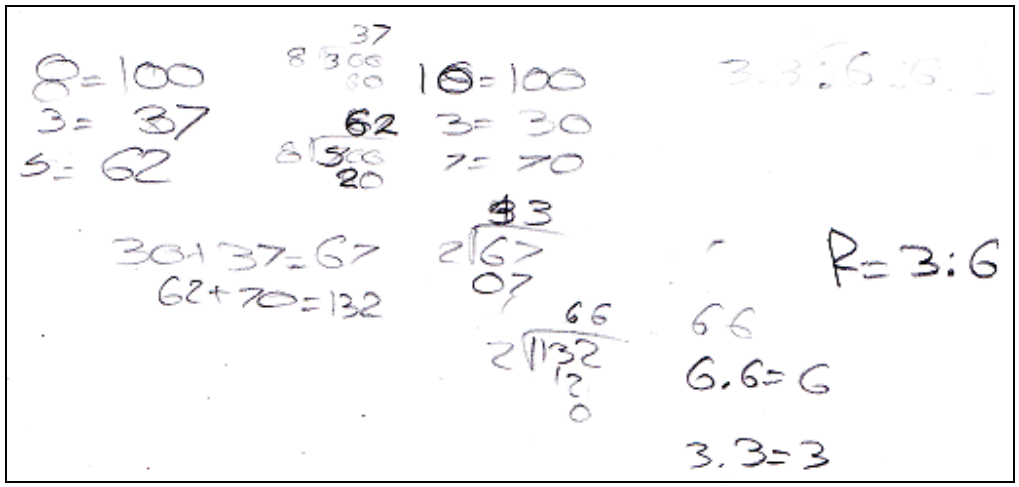


Figura 4. La solución propuesta por Ángel.

Ambos realizan una interpretación de las razones originales para realizar un reparto proporcional a través de las nociones parte – todo, porcentaje, promedio y medida. Sus procedimientos sólo incluyen representaciones simbólicas. Alcanzando a percibirse en sus propuestas de solución un equivalente al procedimiento expuesto en la sección *una mirada a la solución del problema*.

Algunas observaciones interesantes respecto a sus soluciones son las siguientes:

a) El trabajo de Ángel se corresponde con los pasos 1 y 2 de Carlos, con la diferencia de que Ángel anticipa los redondeos, ambos recurren a expresar las razones generadas con los datos iniciales a porcentajes para poder hacer uso de la información, emergiendo así los números decimales. Evidenciando como le "dan la vuelta" al problema para no trabajar directamente con cocientes, con las fracciones en términos de razones.

b) El trabajo de Alberto incluye dos pasos más, que desde una perspectiva de la matemática resultan innecesarios; pero que desde una *perspectiva psicológica* le resultan obligados. (Esto último parece haber sido inducido por el número total de partes (18) involucradas en el problema). Hecho del que Lamon (2001) también advierte. Al parecer Alberto necesita "verifica" su solución haciendo un regreso al problema, mientras que Ángel no lo ve así.

c) Resulta interesante ver cómo "operan" la integración – desintegración de las dos jarras en una sola jarra, esto a través del promedio de contenidos expresados en porcentajes. Podríamos asegurar que compactaron el procedimiento. De esta manera "evitaron" el

trabajar con cocientes aparentemente, sin embargo en sus cálculos se ve cómo se encuentran manejando la noción de razón, no cómo un cociente (2 números), sino como un solo número.

d) La respuesta $(27 : 53)$ es equivalente a las respuestas: $(33.75 : 66.25)$ y $(6.075 : 11.925)$

Conclusiones

Los resultados hasta el momento obtenidos evidencian la importancia de reflexionar en torno a dos ideas: los significados que son asociados a la noción de fracción al trabajar un problema de mezclas y el uso que se le ha dado en un determinado contexto.

Una de las principales dificultades enfrentadas al resolver este tipo de planteamientos será sin lugar a dudas el tipo de interpretación que se le asigné, el grado de profundidad con que se reflexione, junto con la estrategia de solución a plantear.

Una de las aportaciones relevantes propuestas por los estudiantes en la solución del problema es la incorporación de un par de significados asociados a la noción de fracción que no fueron contemplados en la solución son tanto el porcentaje como los números decimales, ellos en su solución en lugar de partir de razones como fracciones comunes, recurren al manejo de los porcentajes, dando lugar a la aparición de los decimales para poder establecer sus comparaciones. Estos datos dan cuenta de una forma en cómo es posible "evitar" trabajar con las fracciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Castañeda, A., Cabañas, G., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G., Molina, J. y Sánchez, M. (2008). Matemáticas 1. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: McGraw Hill.

Fandiño, M. I. (2005). Le frazioni, aspetti concettuali e didattici. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italy.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From Fractions to Rational. En A. Cuoco,. (Ed), The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics (pp.146-165) Reston, V.A: National Council of Teacher of Mathematics.

Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 818-823. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

LA ARTICULACIÓN CONCEPTUAL ENTRE CONTAR-MEDIR Y DISCRETO-CONTINUO

América Fuentes, Carlos Rondero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
americafuentesgalvez@LatinMail.com; rondero@uaeh.edu.mx; anataras@uaeh.edu.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Medio

Resumen. *En la enseñanza de las matemáticas a nivel medio superior y superior se tratan temas en los que se enfatiza la variación continua, sin relacionarse generalmente con una variación de tipo discreto, es decir, se presenta una dicotomía entre saberes discretos y continuos. Existe la necesidad de articular conceptualmente en el aprendizaje de las matemáticas, lo discreto y lo continuo, con el contar y medir, dado que al presentar al estudiante tales transiciones como un todo coherente, considerando la dualidad inherente entre estos saberes, le puede permitir tener más herramientas para abordar fluidamente diversas situaciones de estudio. Con base en la metodología de Ingeniería Didáctica se diseñó una situación de aprendizaje en la que se incluyen actividades que permiten realizar un análisis de las concepciones en los estudiantes desde el nivel básico hasta nivel superior, lo que ha permitido identificar la carencia de un discurso argumentativo coherente por parte de los estudiantes.*
Palabras clave: saberes discretos y continuos, articulación conceptual

Introducción

En la vida cotidiana se pueden separar de manera muy general dos tipos de acciones relacionadas con contar y medir; dentro del contexto de la matemática esto corresponde a las cantidades discretas y continuas respectivamente. En el estudio de la matemática elemental se parte de la necesidad de contar para posteriormente realizar cálculos u operaciones aritméticas; en el caso de querer realizar una suma se parte de conocer los sumandos y el algoritmo para su realización, aunado a esto se tiene la herramienta para la solución a posteriores problemas de aplicación usando sumas.

Del contar al medir existe una necesidad de información que permita adquirir nuevos conocimientos y ponerlos en práctica posteriormente para la solución de nuevos problemas, pero ¿qué existe en el pensamiento de un individuo cuando se transita del contar al medir?, resulta interesante pensar en las posibles respuestas a la pregunta anterior desde diversos puntos de vista como son el cognitivo y el didáctico.

Para transitar entre el contar y medir se requiere que el estudiante posea diversos conocimientos, habilidades y actitudes que le faciliten dichas actividades, es decir mediante la articulación de

conocimientos previos se desarrolle la capacidad de aplicar la actividad requerida en el contexto del problema a resolver y se tengan suficientes argumentos para expresar su solución.

Problemática

En el desarrollo de la práctica docente en el nivel bachillerato específicamente en la materia de precálculo y cálculo diferencial se observa que al abordar la gráfica de una función como por ejemplo $f(x) = 5x-3; x \in [1, 8]$ ocurre que algunos estudiantes asocian tal dominio al conjunto de números enteros $x= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ lo cual trae consecuencias cognitivas para el estudiante, pues le resulta difícil distinguir el comportamiento gráfico de una función en un dominio discreto o bien definido por un intervalo continuo. La consideración equivocada de los estudiantes respecto a distinguir uno u otro dominio de la función, se convierte en un obstáculo para conceptualizar otras funciones.

Asociado a la problemática indicada, se considera que la enseñanza generalmente se ha desarrollado sin evidenciar la coexistencia explícita en la didáctica de los saberes discretos y continuos, considerada como una dualidad (Rondero, 1995), dicho problema es acarreado desde el nivel básico, al no adentrar al estudiante en ambos enfoques como saberes que se contienen o se complementan.

Articulación conceptual entre: contar-medir, discreto – continuo y digital – analógico

Es posible considerar que las actividades básicas de contar y medir se complementan, las cuales además coexisten en la matemática básica y son a su vez previas a la aprehensión y la comprensión del conocimiento sobre lo discreto y lo continuo. Sin embargo, difícilmente se percata de la importancia de reconocer que existen ciertos hilos conductores de forma vertical y horizontal entre saberes matemáticos relacionados con lo discreto y lo continuo que se requieren en el estudio de la matemática básica y la matemática avanzada (Figura 1).

Hay necesidad de explicitar la articulación conceptual existente entre las actividades básicas de contar y medir, las cuales son necesarias para el estudio de lo discreto y lo continuo y esto a su vez es el sustento conceptual requerido para abordar la electrónica digital – analógica, de forma tal

que se considera la importancia para la didáctica de la búsqueda de la conexión entre ambos enfoques y en diversos niveles definidos en el siguiente esquema.

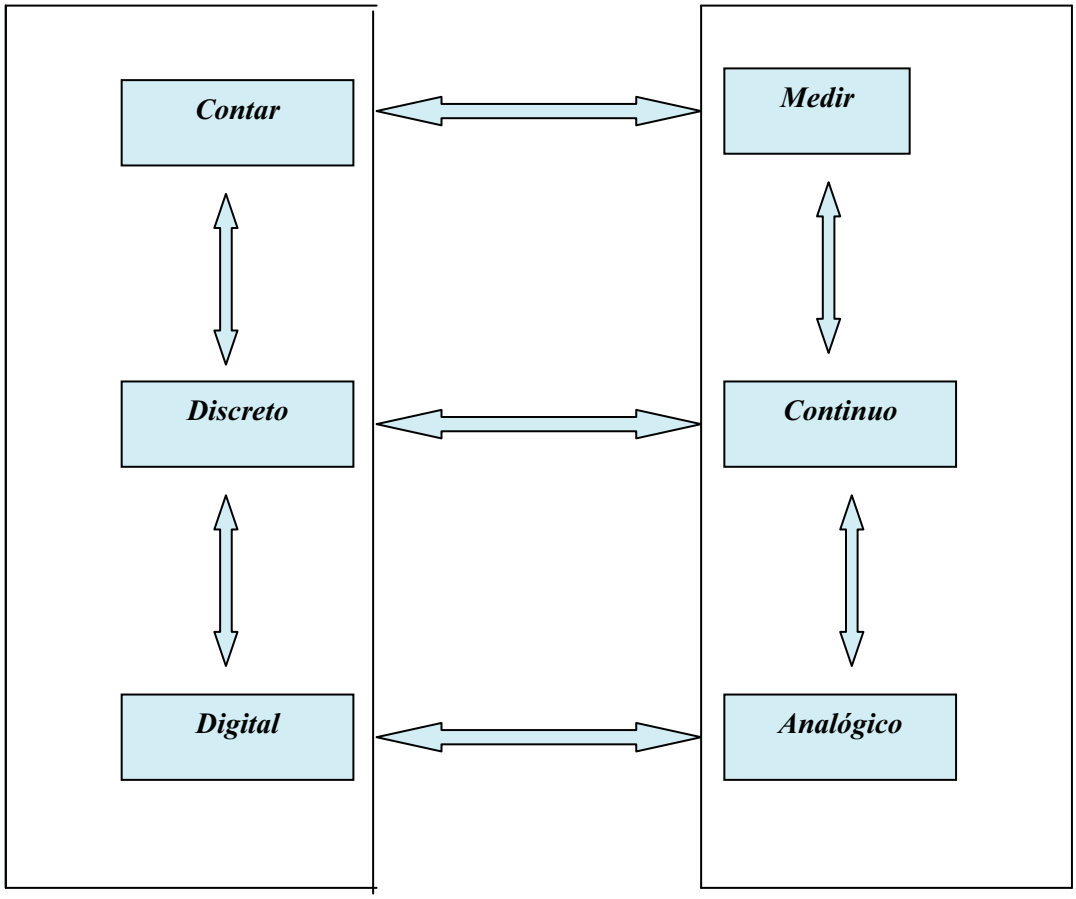


Figura 1: Articulación conceptual entre: Contar – medir, discreto – continuo y digital – analógico

Marco teórico y metodología

El trabajo se enmarca como un estudio en el que se incluyen algunos aspectos de tipo cognitivo, didáctico y epistemológico, que permiten evidenciar la relación conceptual existente de contar con lo discreto y de medir con lo continuo.

Se precisa a la didáctica de las matemáticas como la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas cuyo objetivo es "llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio o procesos didácticos, de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.), que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a estudiar matemáticas" (Chevallard, Bosh y Gascón, 1998).

Desde la perspectiva de Piaget, (Flavell, 1993) se distinguen tres tipos de conocimiento que el sujeto puede poseer: I- Físico, II- Lógico-matemático y III- Social, de los cuales el conocimiento lógico-matemático es preponderante para incorporar o asimilar los conocimientos físico y social. El pensamiento lógico-matemático comprende varias actividades como son: clasificación, alineamiento, objetos colectivos, objetos complejos, colección no figural y seriación, las cuales hay necesidad de poner en concordancia con la visión dual articulada contar-medir, discreto-continuo y en su caso digital-analógico, de los saberes matemáticos que son objeto de nuestro estudio, como se analiza en (Fuentes, 2008).

Con base en la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995; Douady, 1995) se realiza un análisis cognitivo, didáctico y epistemológico que da muestra de las concepciones erróneas de los estudiantes las cuales determinan la evolución de su aprendizaje, permitiendo identificar la carencia del discurso argumentativo en diversas etapas.

Resultados de la investigación

Se ha indicado la importancia de reconocer ciertos hilos conductores de forma horizontal y vertical entre saberes matemáticos del nivel básico al nivel avanzado, dichos saberes se expresan en la educación escolar conformados por lo numérico, algebraico y geométrico, desde la educación básica hasta la educación superior, a este respecto se considera el estudio de la transversalidad de las parejas de conceptos necesarios como precedentes y como subsecuentes, entendido el aprendizaje como una cadena donde cada eslabón establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje siguiente (Figura 1).

En consideración a las nociones matemáticas básicas se parte de la necesidad de contar para posteriormente poder medir, lo que implica necesariamente el conocimiento firme y articulado de conceptos tales como cantidad, número y medida.

Se presenta el caso en el que un estudiante (del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH) comprende las diferencias entre las acciones contar y medir, careciendo de argumentos en su respuesta.

Instrucción: De las siguientes acciones di cuándo cuentas y cuándo mides, argumentando tu respuesta.

La distancia entre dos puntos: *Mido porque es una longitud.*

El número de ovejas de un rebaño: *Las cuento porque son cantidad*.

El resultado que aparece al arrojar un dado: *Cuento solamente los puntos y no la distancia a la que cayó.*

La distancia de un árbol: *La mido, no conjunto de árboles que contar*.

Ante la evidente necesidad de ampliar el discurso argumentativo del estudiante, se requiere por parte del profesor, reforzar la conceptualización de lo discreto-continuo, por medio de secuencias de aprendizaje cuyo diseño debe incorporar una red de redes conceptuales, entendidas como la interrelación semántica y conceptual que se va explicitando entre un conjunto de saberes, para favorecer la aprehensión de nuevos saberes. (Figura 2).

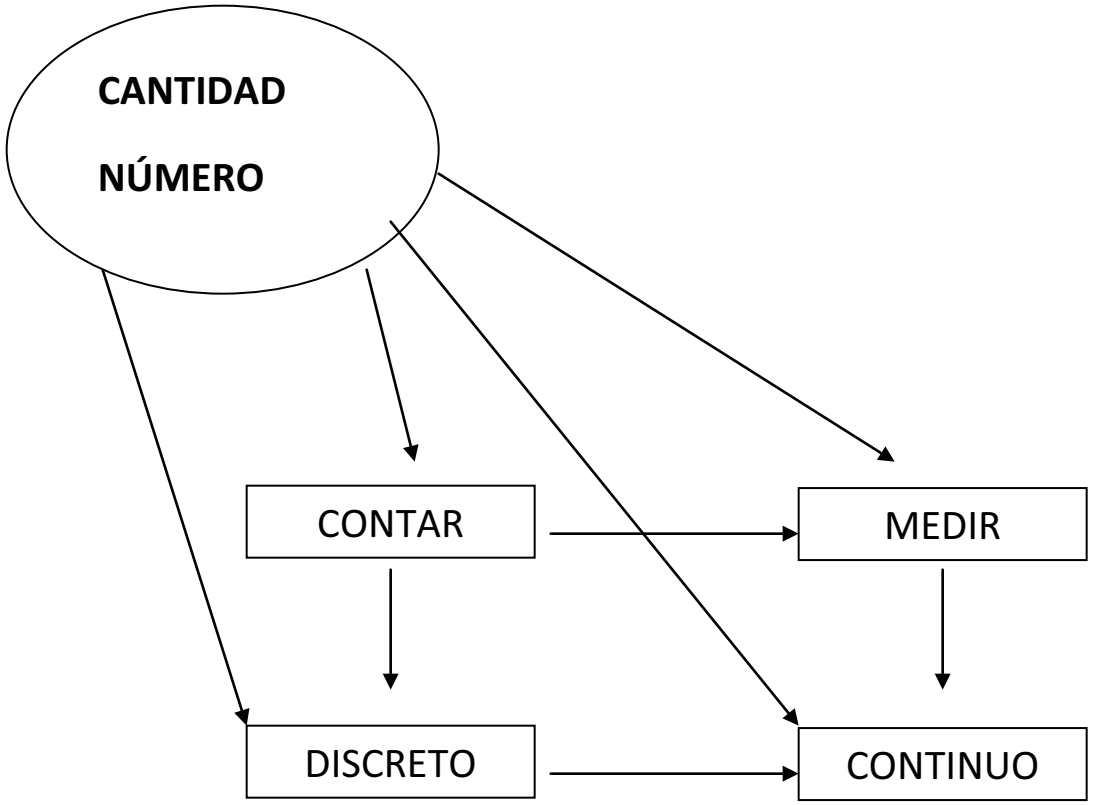


Figura 2: Red de redes conceptuales

El análisis también ha permitido identificar la carencia de un discurso argumentativo coherente por parte de los estudiantes, mismo que se expresa al ver lo discreto-continuo como algo dicotómico en vez de ser interpretado en su concepción amplia, esto es, como una dualidad.

Conclusiones

En la medida que se va construyendo "el saber matemático los cimientos que dan soporte al mismo se van ocultando, es también latente la necesidad de reforzar las columnas que soportan dicha construcción", (Chevallard, Bosh y Gascón, 1998). En este sentido, contar y medir considerados como objetos matemáticos que se estudian desde la matemática elemental, no pueden quedarse sólo como acciones operativas, sino que se requiere ampliar su riqueza conceptual, a los significados y relaciones que le son inherentes y a las formas de hacer explícitas sus articulaciones conceptuales con la matemática avanzada que conllevan las dualidades entre lo discreto – digital y lo continuo – analógico.

Se requiere privilegiar el tratamiento de la dualidad discreto – continuo, para contraponerlo con el tratamiento que actualmente se le da en la matemática escolar, "que es el de una dicotomía" (Rondero, 1995), lo que conlleva a diferentes conflictos conceptuales en los estudiantes. Esta orientación didáctica, puede posibilitar el que a los saberes matemáticos se les dote de un anclaje de significados incidiendo a su vez en la estructuración de argumentos, de tal forma que se puedan instalar en los estudiantes elementos conceptuales para resignificarlos, y presentarlos articuladamente en los diferentes niveles educativos medio, medio superior y superior.

El incorporar el tratamiento de lo continuo – discreto como una dualidad en situación escolar, puede llegar a tener una fuerte implicación cognitiva y didáctica en cuanto a que se les va dotando a los estudiantes de una poderosa herramienta en la construcción del conocimiento, reconociendo la gran trascendencia de esta dualidad inherente a los saberes matemáticos tratados, cuya incidencia formativa interviene de modo preponderante en la estructuración de un discurso argumentativo consistente tanto de profesores como de estudiantes.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (1995). En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard,Y., Bosh, M., Gascón, J. (1998). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Universitat de Barcelona: Editorial Horsori/ICE.

Flavell, J. (1993). La Psicología Evolutiva de Jean Piaget. Barcelona: Piados, 8a edición.

Fuentes, A. (2008). Acerca de la articulación conceptual entre contar – medir, discreto – continuo y digital – analógico. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Rondero, C. (1995). Ensayo sobre la dualidad discreto - continuo de los saberes matemáticos. Casos de transición y transposición didáctica. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México.

EL GRADO DE VISUALIZACIÓN. UN INDICADOR DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VISUAL

Miguel Díaz Cárdenas, Luis Gilberto Dircio Ramírez
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero — México
CEBACH Plantel Tlapa, Guerrero
midica01@gmail.com, luis_d_ramirez@yahoo.es
Campo de investigación: Visualización — Nivel: Superior

Resumen. *En este documento, se presenta una propuesta metodológica para medir el grado de visualización en personas que realizan actividades de resolución de problemas matemáticos. Dicha propuesta se basa en las ideas de Krutetskii sobre los distintos estilos cognitivos de las personas, y la sugerencia de Norma Presmeg, para interpretar gráficamente la acción de la fuerza de la lógica (las generalizaciones) y de la fuerza del pensamiento visual, que intervienen en todo tipo de actividad matemática.*
Palabras clave: pensamiento visual, generalizaciones, grado de visualización

Introducción

La presente propuesta metodológica para medir el *grado de visualización* en personas que realizan actividades de resolución de problemas matemáticos (*ARPM*), es producto de un estudio realizado en el campo general de investigación denominado matemática educativa. Específicamente, dentro de la línea llamada Visualización Matemática. El propósito central de esta línea radica en investigar y documentar la influencia de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes áreas y en los distintos niveles de escolaridad. En este estudio (Dircio, 2008) de carácter cognitivo, se asumió como problema *clarificar el papel que la visualización desempeña en la actividad de resolución de problemas matemáticos*. Y como objetivo, *el estudio y análisis del tipo de generalizaciones y argumentaciones que las personas exhiben como producto de procesos visuales, así como las restricciones de su pensamiento visual*. El establecimiento del *grado de visualización* de cada uno de los participantes en este estudio, constituyó la forma concreta, en la que fue posible valorar el papel de la visualización de las personas en *ARPM*.

Elementos teóricos

El concepto de visualización

Entendemos de acuerdo con Vigotsky (1988), que en el ser humano el pensamiento y el lenguaje se desarrollan por separado; pero muy pronto comienzan a asociarse, de modo que tal asociación entre pensamiento y lenguaje, adquiere una de sus formas más desarrolladas, es lo que conocemos como lenguaje racional o intelectual o pensamiento verbal. Guétmanova (1989) reconoce al pensamiento verbal, o lenguaje intelectual, o pensamiento abstracto como medio para la construcción de conocimiento. Pero distingue otras formas de lenguaje no-intelectual asociadas a pensamiento no-verbal que pueden transformarse en pensamiento abstracto; entre ellas destacamos las formas de pensamiento asociadas a lenguaje figurativo (imágenes, diagramas, figuras, símbolos o representaciones en general). A este pensamiento asociado a representaciones lo designaremos como *pensamiento visual*. Entonces el pensamiento visual puede convertirse en pensamiento abstracto, es decir también puede ser medio para la construcción de conocimiento.

De acuerdo con Presmeg (1999), asumimos que el pensamiento visual es producto de procesos visuales, y adquiere la forma concreta de *generalizaciones* y los argumentos para sustentarlas.

De acuerdo con Duval (1999), asumimos que la visualización es un proceso cognitivo que tiene una función sinóptica, es decir, la visualización permite darnos cuenta de la configuración completa, de las relaciones contenidas en una representación. Y aunque la visualización es relevante en la actividad matemática, esta no es inmediata; pues si bien es cierto que los procesos visuales pueden iniciarse cuando el individuo disponga de una representación interna o externa creada por él o proporcionada por alguien más, también es cierto (como señala Presmeg), que no cualquier representación garantiza que el proceso de visualización sea efectivo.

El grado de visualización

Desde nuestra perspectiva, las investigaciones que hablan del *grado de visualización* (Moses (1977), Lean y Clements (1981), Suwarsono (1982), Presmeg (1985, 1986b), (Galindo, 1994) en (Dircio, 2008), en realidad nos muestran que en la actividad de resolver problemas matemáticos existen diferentes modos o estilos cognitivos para procesar la información. Observamos además, que dichos estudios al investigar el *grado de visualización* sólo centran su atención en la cantidad de imágenes empleadas por los estudiantes y en el pensamiento visual autónomo; sin embargo, en el contexto de la enseñanza nos hemos percatado empíricamente, que los estudiantes pueden visualizar si se les apoya con representaciones adecuadas. Por ello entendemos que el *grado de visualización* no sólo debe ser establecido por la preferencia y cantidad de imágenes empleadas en

la solución de un problema, sino que además, se debe tomar en cuenta el producto del proceso de visualización, así como también el hecho de que los estudiantes logran visualizar si se les proporcionan representaciones adecuadas para realizar el proceso.

Estilos cognitivos

Aceptamos de acuerdo con Kruteskii (1976), por una parte, la existencia de tres tipos básicos de estilos cognitivos de las personas en actividades de resolución de problemas matemáticos: *analítico, geométrico, armónico*. Por otra parte, que la fuerza de la lógica en el pensamiento necesaria para resolver un problema matemático, puede producirse con o sin apoyo visual es decir, que la visualización puede ser útil pero no es esencial.

Por nuestra parte, entendemos que las generalizaciones son la fuerza de la lógica en el pensamiento, y que éstas pueden resultar de distintos tipos de acuerdo a la clase de actividad matemática que se esté realizando: *descripción de regularidades, reconocimiento de patrones, formulación de procedimientos, formulación de proposiciones, formulación de definiciones y finalmente la formulación de resultados*.

Atendiendo a la sugerencia de Presmeg (2002), decidimos elaborar una representación que permitiera ubicar la actuación de las personas en actividad de resolver problemas matemáticos de acuerdo a su estilo cognitivo (figura1). En este diagrama consideramos en el eje Y positivo la fuerza de la lógica en el pensamiento matemático, en el eje X positivo la fuerza del pensamiento visual y además se consideró una línea horizontal que representa la fuerza de la lógica necesaria (las generalizaciones requeridas) para la solución del problema. Luego entonces, en la actividad de resolver problemas matemáticos habrá personas no visualizadores (zona Azul), es decir aquellos que no requieren de apoyos visuales y en cambio se caracterizan por recurrir a estrategias lógico/verbales para resolver y encontrar la solución al problema; además personas de tipo armónico (armónico abstracto y armónico pictórico) quienes se caracterizan por tener un equilibrio entre las componentes lógico/verbal y visual pictórico (zona verde), y finalmente los visualizadores (zona amarilla), quienes se apoyan frecuentemente en el uso de imágenes visuales en la resolución de problemas. En esta misma representación, hemos incluido una zona de color naranja para ubicar a las personas que en la solución de un problema matemático, requieren de apoyo visual proporcionado por alguien más, prácticamente estamos hablando de pensamiento

visual asistido; este último aspecto, abre la perspectiva para estudiar lo que pasa en la enseñanza de la matemática con la mayoría de los estudiantes.

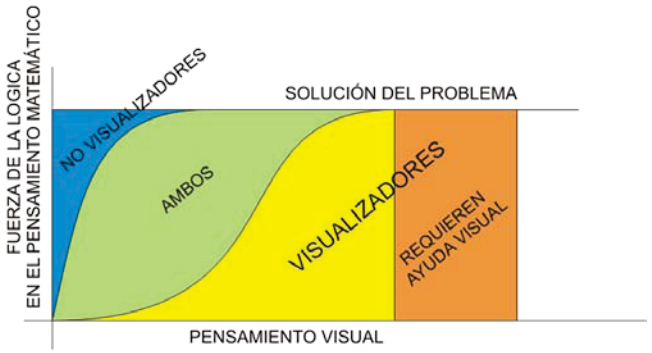


Figura 1. Diversas formas y grados de uso de pensamiento visual en actividades de solución de problemas matemáticos

Metodología

Para encontrar una forma metodológica para la valoración del papel de los procesos visuales que realiza una persona en *ARPM*, cualitativamente distinta de las formas propuestas en las investigaciones mencionadas, fue necesario plantearnos una interrogante:

¿Qué definición de grado de visualización será adecuada, para que a través de ella podamos valorar el papel de la visualización en ARPM?

Por un lado, entendemos que el *grado de visualización* no sólo debe ser establecido por la preferencia y cantidad de imágenes empleadas en la solución de un problema, sino que además debe considerarse el producto de los procesos visuales, que son las generalizaciones y los argumentos para defenderlas. Asumimos que las generalizaciones constituyen la fuerza de la lógica en el pensamiento, y que ésta podía valorarse a través de la calificación de las generalizaciones: generalizaciones correctas e incorrectas respecto al resultado, pero empíricas o teóricas de acuerdo a la base de los argumentos que se emplean para sostenerlas (Davýdov, 1982; Canul, 2007). Por otro lado, se contempló el hecho de que las personas en situación escolar logran visualizar si se les proporcionan representaciones adecuadas; ello permite valorar la fuerza del pensamiento visual, en dos etapas, una para estudiar el desarrollo del pensamiento visual autónomo, y otra para estudiar lo relativo al pensamiento visual asistido. Y con ello atendimos al

estudio de la visualización desde dos perspectivas: desde la naturaleza individual de dicho proceso y, desde la enseñanza de la matemática.

Se decidió probar esta forma metodológica para medir el grado de visualización con un grupo de 8 estudiantes de tercer año de Licenciatura en Matemáticas, con conocimientos de Cálculo Diferencial, a los que se enfrentó con un par de problemas de máximos y mínimos. Desde una perspectiva de enseñanza, se hizo necesario considerar una forma de representación (basada en la representación de la figura1), que pueda describir el actuar de una persona en relación con los procesos visuales que realice cuando se enfrenta a *ARPM*.

En el siguiente diagrama (figura 2), se presenta la forma que se usó para recabar la información por cada persona participante en el estudio. Representamos por un lado la fuerza de la lógica en el

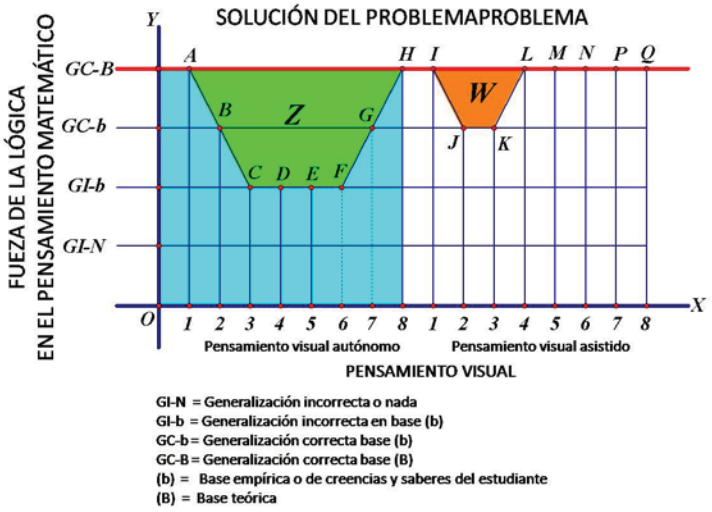


Figura 2. Forma para registrar el grado de visualización por persona participante en ARPM

pensamiento (en el eje Y positivo), los distintos valores que puede tomar dependen de la calidad de las generalizaciones: generalización incorrecta sin argumentos o nada (*GI-N*); incorrecta con argumentos basados en los saberes del estudiante o en sus creencias (*GI-b*); correcta con argumentos en una base de creencias del estudiante (*GC-b*); y correcta con argumentos en una base teórica (*GC-B*). También se representa la fuerza del pensamiento visual (en el eje X positivo) el cual se ha dividido en *pensamiento visual autónomo*, es decir aquel que el estudiante exhibe cuando resuelve de forma individual los problemas, y *pensamiento visual asistido*.

Para ambas fases de estudio, se muestran los procesos de visualización durante la actividad de resolver problemas con los números: 1, 2, 3, 4, etc., los cuales están en dependencia de la situación o problema a resolver (el número de generalizaciones requeridas), la línea continua que se levanta sobre cada número, indica que alguna representación visual fue utilizada por la persona, la línea punteada significa que no exhibió alguna representación, los extremos de estas líneas nos hablan de la altura alcanzada por la fuerza de la lógica en cada proceso visual. Debe comprenderse que en una situación ideal, los extremos de cada línea vertical deberán llegar a la línea (en color rojo) denominada como solución del problema, en caso contrario significa que las generalizaciones requeridas para la solución no alcanzaron la suficiente calidad, o que existe una debilidad manifiesta en la fuerza de la lógica.

Resultados

La información contenida en la ficha de la figura 3 es un resultado real que corresponde a la alumna *M*, y allí se observa que existe una zona *Z* y una zona *W* respectivamente en cada etapa. Entonces el significado que le atribuimos a dichas zonas es la distancia a la que quedan las

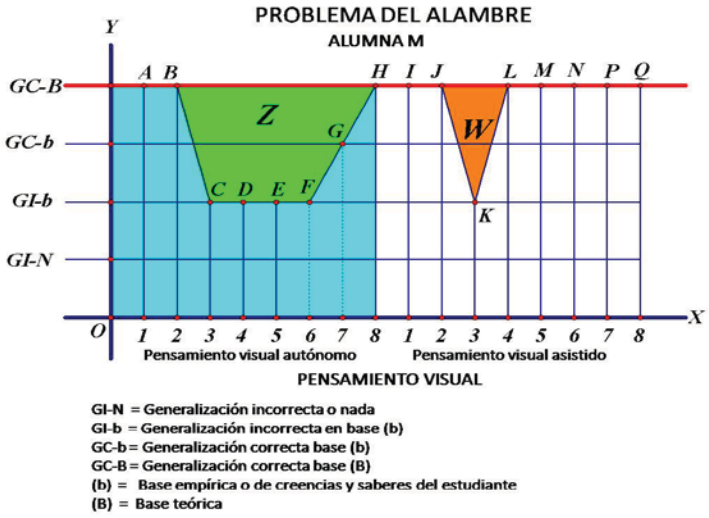


Figura 3. El grado de visualización de la alumna M

generalizaciones producidas por los estudiantes, de las requeridas en una actividad específica, en este caso, en la actividad de resolución de problemas matemáticos.

Los factores que inciden en el crecimiento de la zona *Z* son: por una parte, la falta de procesos visuales; el uso de representaciones no adecuadas, es decir restrictivas en si mismas; y por otra parte, la calidad de las generalizaciones producidas. En tanto que los factores que influyen en el crecimiento o decrecimiento de la zona *W* dependen únicamente de la calidad de las generalizaciones. Ya que aquí, se contribuyó con representaciones adecuadas, aspecto que en la etapa de pensamiento visual autónomo no estaba garantizado.

En la misma figura 3, podemos observar que la zona ***Z*** es mayor que la zona *W*, y ello significa que la habilidad de visualización de *M* no se encuentra desarrollada, ya que su pensamiento visual autónomo produce la mayoría de generalizaciones del tipo incorrectas.

Sin embargo, cuando se trabajó en un ambiente de resolución de problemas, el área de la zona *W* es menor que el área de la zona ***Z***, y ello se debe a que en esta segunda etapa de algún modo se contribuyó con representaciones adecuadas sobre las cuales la alumna realizó procesos de visualización. En éste caso, la alumna *M* manifestó un grado de visualización mayor, porque pudo apoyarse en representaciones visuales que le hicieron producir generalizaciones de mejor calidad.

Conclusiones

Nuestra propuesta metodológica para determinar el grado de visualización, nos permitió observar el actuar de cada estudiante en cada una de las fases de la resolución de los problemas, y sus producciones; y se pudo determinar que en todos los casos en este estudio, la zona *Z* fue mayor que la zona *W*. Con esta base puede afirmarse por un lado, que el pensamiento visual autónomo no está desarrollado en la mayoría de estos estudiantes; pero, por otro lado, también puede afirmarse, que con algo de ayuda ellos pueden efectuar procesos efectivos de visualización. Una conclusión que emerge a partir del hecho comparativo entre las zonas *Z* y *W*, es que hace falta desarrollar la habilidad de visualización en la enseñanza de la matemática.

De lo anterior, surge como necesario el desarrollo del pensamiento visual autónomo tanto en estudiantes como profesores, pues se reconoce como una vía muy fructífera para el desarrollo del pensamiento matemático. Pero antes de emprender alguna acción en el sistema de enseñanza, se hace necesario determinar las habilidades y hábitos que pueden constituir la capacidad de visualizar. Porque sólo con este conocimiento se podrán ejercer acciones válidas para el desarrollo

del pensamiento visual en la escuela. Ello hará que la visualización se coloque en una posición de equilibrio al lado de los contextos numéricos y algebraicos en la matemática escolar.

Queremos puntualizar que al tener en cuenta aspectos no considerados por los anteriores investigadores en la determinación del grado de visualización de personas en *ARPM*, pensamos que se contribuye metodológicamente con un indicador que puede dar cuenta del estado de desarrollo del pensamiento visual con sólo observar la relación entre las zonas ***Z*** y *W*.

Referencias bibliográficas

Canul, E. (2007). Actitudes Generalizadas sobre la enseñanza de la matemática en el nivel medio. Tesis de Licenciatura no publicada. UADY. Mérida, Yucatán, México.

Davýdov, V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. México: Pueblo y Educación.

Dircio, L.G. (2008). La resolución de problemas mediada por la visualización. Un estudio de casos. Tesis de Maestría no publicada. UAG. Chilpancingo, Guerrero, México.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in the Matematical Thinking. Basic Issues for Learning. 25p.; In procedings of the Anual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psicology of Mathematics Education. (21st. Cuernavaca Morelos, México, October 23-26 1999.

Galindo, E. (1994). Visualization in the calculus class: Relationship between cognitive style, gender, and use of technology. Doctoral dissertation, Ohio State University.

Guétmanova, A. (1989). Lógica. Serie: Biblioteca del estudiante. Moscú: Progreso.

Krutestkii, V.A. (1976). The psychology of mathematical habilitéis in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Presmeg, N. (1999). On visualization and generalizations in mathematics. Psychology of Mathematics Education, proceedings of the twenty first annual meeting. (1): (pp. 151-154).

Presmeg, N. y Balderas, P. (2002). Graduate students' visualization in two rate of change Problems. En F. Hitt (Ed). Representation and Mathematics Visualization. (pp. 47-62). México: PME-NA. CINVESTAV-IPN.

Vigotsky, L (1988). Pensamiento y lenguaje. México: Quinto Sol.

Capítulo 2

Propuesta para la enseñanza de las matemáticas

Introducción al Capítulo 2: Propuesta para la enseñanza de las matemáticas

Olga Lidia Pérez González

Tradicionalmente las investigaciones y estudios sobre la enseñanza de la Matemática, han tenido como objetivo principal el perfeccionamiento de su enseñanza y el óptimo aprendizaje de los estudiantes, a pesar de que han estado relacionadas con diferentes marcos teóricos y metodologías de su aplicación.

Desde una perspectiva global, examinan la enseñanza de la Matemática dentro del escenario histórico en que vivimos y muestran los resultados de reciente evolución, las principales tendencias actuales en sus componentes teóricos, en la búsqueda de una fundamentación en aras del constante perfeccionamiento de su enseñanza.

Las propuestas que aquí presentamos evidencian que la enseñanza de la Matemática se encuentra en un constante proceso de renovación de sus enfoques, con la intención de que los estudiantes adquieran, a través de la Matemática, una concepción científica del mundo, una cultura integral y un pensamiento científico que los habitúe a cuantificar, estimar, extraer regularidades, procesar informaciones, buscar causas y vías de solución, incluso de los más simples hechos de la vida cotidiana, y en consecuencia, los prepare para la vida profesional, de manera tal que puedan mantener una actitud comprometida y responsable ante los problemas, científicos y tecnológicos a nivel local, nacional, regional y mundial (Ministerio de Educación, 2004).

Son muchas las aristas de las investigaciones y estudios realizados, lo esencial es que existe la comprensión de que debemos seguir trabajando por el constante perfeccionamiento de su enseñanza, en lo esencial en lo referido al cambio en los métodos y estilos de trabajo del docente, aunque hay aspectos en los que más debemos insistir, por su impacto en la formación de las nuevas generaciones.

Por ejemplo, en los métodos y estilos de trabajo del docente para que los estudiantes tengan una cabal comprensión de los conceptos, propiedades y relaciones que se estudian y puedan dominar la base conceptual que subyace en los algoritmos y procedimientos de trabajo que emplean, a modo de alejar todo formalismo en el proceso de enseñanza.

Es muy importante, además, que la enseñanza de la Matemática se desarrolle mediante la resolución de problemas, propiciando que los estudiantes se habitúen, en un ambiente interactivo, a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas, de modo que la resolución de problemas no sea sólo un medio para fijar los conocimientos y habilidades, sino también para adquirir nuevos conocimientos y mostrar la utilidad y el carácter instrumental de los conocimientos matemáticos (Pérez, 2010).

Pero, no siempre, la resolución de problemas debe ser utilizada como un medio para fijar los contenidos, pues los problemas podemos utilizarlos para plantear el estudio de nuevos contenidos matemáticos, se trata de considerar un concepto amplio de problema y sobre todo de propiciar la reflexión, la comprensión conceptual junto con la búsqueda de significados, el análisis de qué métodos son adecuados y la búsqueda de los mejores, dando posibilidades para que los estudiantes elaboren sus propios procedimientos, mediante la comunicación que se logre crear en el aula a lo largo de todas las clases y no como algo que ocurre en un momento dado.

El trabajo con los errores, es otro aspecto en el que se debe insistir, pues a través del error podemos indagar sus causas en un adecuado clima afectivo, en este sentido es importante señalar que una misma manifestación errónea puede estar provocada por varias causas, y a la vez, una misma causa pueda dar lugar a diferentes manifestaciones erróneas (Pérez, 2010).

En este sentido es muy importante exigir que los estudiantes expliquen sus ideas, no para debatir si una tarea se ha resuelto bien o mal, sino discutir si las argumentaciones subyacentes son correctas o incorrectas, dándoles siempre la oportunidad a los estudiantes de corregir su propio error. Es recomendable que los estudiantes tomen notas de los obstáculos y errores más frecuentes que se tienden a producir en el trabajo con un concepto, proposición o procedimiento dado.

Otros aspectos en lo que debemos enfatizar son:

La utilización de las tecnologías de la informática y la comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos.

La planificación de la evaluación, como proceso continuo que promueva la discusión de alternativas y procedimientos para la solución de tareas, con el empleo de la crítica y la

autocrítica, valorando en cada caso cuáles son las causas de las dificultades de los estudiantes y velando por crear una cultura del error en la clase.

La sistematización de conocimientos, habilidades y modos de la actividad mental, como son los procedimientos lógicos, heurísticos, y meta cognitivos, tratando de que se integre el saber de los estudiantes procedente de distintas áreas de la Matemática e incluso de otras asignaturas.

Planificar, orientar y controlar el estudio independiente de forma sistémica, variada y diferenciada, que estimule su independencia y creatividad, para que los estudiantes comprendan el significado de los conceptos tratados y las relaciones entre ellos.

El desarrollo de habilidades para la lectura, la búsqueda de información, la interpretación de diversas fuentes y la argumentación y comunicación de sus ideas.

La elaboración de tareas donde los estudiantes elaboren resúmenes y esquemas o determinen los conocimientos y habilidades particulares y los modos y estrategias generales de pensamiento que les han sido útiles en la resolución de un ejercicio y/o problema

Hemos mencionado algunos de los aspectos, que a nuestra consideración, son los más importantes, lo más esencial es que se comprenda que con el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática estamos contribuyendo a que nuestros estudiantes puedan adoptar decisiones responsables en su vida personal, familiar y social sobre la base de la comprensión de las necesidades vitales de la sociedad, la aplicación de procesos del pensamiento, técnicas y estrategias de trabajo y la utilización de conceptos, relaciones y procedimientos de la Matemática, exponiendo sus argumentaciones de forma precisa, coherente, racional y convincente a partir del dominio de la simbología y terminología matemáticas, como base para su mejor desenvolvimiento en todos los ámbitos de su actividad futura.

A eso es a lo que aspiramos!!!!

Referencias bibliográficas

Pérez, O. (2010). *Perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática*. Manuscrito en preparación. Universidad de Camagüey, Cuba.

Cuba, Ministerio de Educación. (2004). *Programa de Matemática de Décimo Grado*. La Habana, Cuba.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS ESTADÍSTICOS

Pericles Ramírez Jiménez, Miguel Herrera Miranda, Juan Villagómez, Jaime Arrieta Vera
UAG. Facultad de Matemáticas México
pericles_r@hotmail.com, herrerapolo@hotmail.com, juanvillagomez2006@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con estadística Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo de investigación se presenta una guía de aprendizaje construida para utilizar una diversidad de herramientas tecnológicas y matemáticas como parte de una estrategia didáctica, estructurada en función de las necesidades de los estudiantes, donde se cuenta con una variedad de problemas contextuales y factibles, considerando una sociedad en crisis y cuya repercusión se proyecta en el proceso educativo.*
En la aplicación de ésta, se puede apreciar el hecho de la intencionalidad para utilizar las herramientas, las construcciones de conceptos estadísticos, la motivación del trabajo en equipo y los argumentos presentados por los estudiantes para dar significado a la media aritmética y la noción de variabilidad; como logran darle sentido a la toma de decisiones en forma empírica, basados en los efectos que presenta la inestabilidad de los datos.
Palabras clave: herramientas estadísticas, cultura de la estadística, significados, estrategias didácticas

Introducción

En toda sociedad, pueblo o nación, su tipo de cultura, está determinado por los diversos medios de producción y de cómo se distribuye esa riqueza; de estos satisfactores, uno de los componentes de la cultura es su educación y a la vez, la escuela juega un papel primordial en el desarrollo de los estudiantes (Brünner, 1995).

Hay infinidad de problemas a los que nos enfrentamos los profesores en el contexto escolar al querer preparar a un alumno en el aula como menciona (Michel y Luviano 1997, p. 11), “pretender investigar y resolver todos estos problemas es una tarea difícil”. Actualmente, en algunos países, una de las prioridades nacionales es la reducción de la extrema pobreza y el mejoramiento en los niveles educativos en cuanto a la calidad, pertinencia y competencia. La educación es la plataforma de cambio que tiene el mayor impacto en el mejoramiento de la calidad de vida de los pueblos (Ivanovic, Ivanovic y Middleton, 1988).

Sin embargo, la problemática educacional se nos presenta de forma multicausal y multifactorial, ya que está condicionada por múltiples factores dependientes del educando, de la familia y del sistema educativo, los cuales están afectando el desarrollo óptimo del proceso enseñanza-

aprendizaje, lo que en último término impacta en la productividad interna y externa del sistema educacional, medida como rendimiento y deserción escolar (Ivanovic y Middleton, 1988).

Problemática

A los profesores se les exige la entrega oportuna de guías secuenciales, en nuestro subsistema educativo (Dirección General de Educación Tecnológica e Industrial, México), ante este acto surgen las interrogantes, ¿Los profesores elaboran las guías didácticas?, ¿Éstas cumplen con los requisitos que establece el modelo de educación adoptado por el subsistema?, ¿Con el uso de estas guías se concluye con buenos resultados del perfil del egresado?, ¿Sólo se construyen conocimientos?

El principal propósito se centra en el uso de los medios didácticos y TICs que faciliten la labor docente (Marqués, 2000), así como otras herramientas alternativas, tecnológicas o matemáticas, "el trabajo con proyectos con datos obtenidos de investigaciones comunitarias, científicas y serias" (Batanero y Díaz, 2004, p. 125), esto es, una propuesta donde el profesor recurra a todas las formas posibles de construcción de conocimientos, metodologías y actitudes, con una diversidad de herramientas alternativas.

Así que la hipótesis se plantea afirmando que, *los estudiantes al ejercer las prácticas de modelación de diversos fenómenos contextuales, utilizando variados medios didácticos, construyen sus conocimientos matemáticos, particularmente los estadísticos, otorgándoles significados, interpretándolos en otros contextos; dando sentido a la interpretación y significación del proceso de toma de decisiones*.

La estadística, hoy, a partir de las reformas educativas en México, se incorpora en todos los niveles educativos, desde la educación primaria, y *aspira a una sociedad culta en estadística* (Batanero, 2002a). En este trabajo se presentan evidencias de cómo los estudiantes dentro y fuera del aula construyen sus herramientas estadísticas.

Marco Teórico

Se ha desarrollado este trabajo de investigación, adoptando la perspectiva teórica llamada *Socioepistemología* (Cantoral, 1999), cuyas componentes fundamentales en la construcción del conocimiento son su naturaleza epistemológica, los planos de lo cognitivo, los modos de transmisión vía la enseñanza y la dimensión social.

La línea de investigación al cual se adscribe el trabajo es la que atiende a las *Prácticas sociales* y la *construcción del conocimiento* (Arrieta, 2003).

Respecto a la didáctica de la estadística, coincidimos con (Batanero, 2002b, p. 1), al decir que, "para conseguir una sociedad estadísticamente culta, se necesitan educadores en estadística", y (Batanero 2000, p.2), donde indica que "los docentes e investigadores tenemos la obligación de tender y fomentar una *cultura de la estadística*" en el presente y futuro, y para esto también se requiere instituciones comprometidas con las escuelas.

Una *metodología* acorde al marco teórico es la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1992), cuyas fases estructurales son el análisis preliminar, análisis a priori y diseño de la situación didáctica, la experimentación y el análisis a posteriori.

La validación del diseño, de acuerdo a esta metodología, es vía la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori. El análisis del discurso es parte de la metodología utilizada para el estudio de la producciones y el discurso establecido en la puesta en escena del diseño (Candela, 1999).

En base a estas metodologías, el planteamiento es que a través de un conjunto de diseños de aprendizaje cimentado en las prácticas de modelación, que hemos llamado *guía de aprendizaje*, los actores construyen sus conocimientos, interpretan resultados y adquieren significado contextual los conocimientos escolares (Hernández y Ramírez, 2004).

Escenario didáctico

El centro escolar de aplicación fue el CETis 116 de Acapulco, Guerrero, México, cuya muestra se conformó en dos grupos de 16 alumnos c/u, seleccionados arbitrariamente de acuerdo a una invitación voluntaria. Los grupos participaron en un curso de 8 horas, utilizando SPSS y Excel, así como apoyos de videos y apuntes de estadística de la red.

Los diseños reportados se basan en el tratamiento de datos ficticios o ideales con la expectación de identificar las condiciones previas y datos reales en la etapa de experimentación con la intensión de que los actores construyan las herramientas estadísticas para discriminar conjuntos de datos respecto a sus medidas de tendencia central (media aritmética) y a su variabilidad (rango o varianza)

Resultados y conclusiones

Algunos de los resultados de la investigación muestran que los alumnos, ante una situación contextual, utilizan el promedio como una herramienta de la medida representativa de un conjunto de datos y saben calcularlo, entienden el algoritmo, aunque cometen errores al quererlo plasmar en su forma algebraica; mediante operaciones mentales o usando calculadora muestran una gran habilidad en el cálculo numérico, figura 1

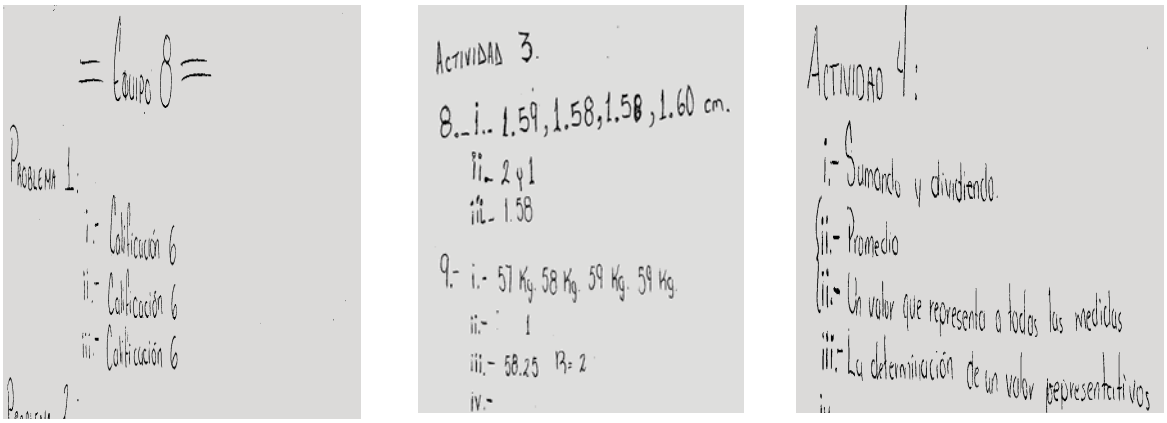


Figura 1. Calculo del promedio de calificaciones, estaturas, pesos y la variación de los datos

El promedio toma diferentes significados acordes al contexto de los alumnos, el promedio para unos, significa punto medio, calificación promedio, pesos promedio, velocidad media y punto de equilibrio. En algunos casos llegan a formalizar la idea de media aritmética.

Por otro lado, se evidencia, que inicialmente los estudiantes, sólo utilizan al promedio como único instrumento de análisis de los datos, no considerando las medidas de dispersión en grupos de datos. En el transcurso de la puesta en escena, los estudiantes indicaron los efectos y

repercusiones de la variabilidad de los datos y pudieron comparar empíricamente la diferencia de medias entre grupos de datos, figura 2.

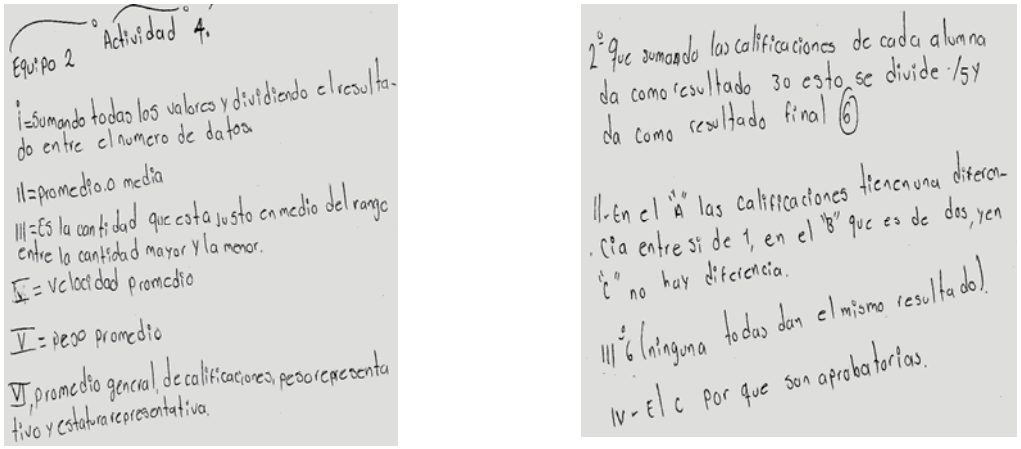


Figura 2. Conceptualizaciones, significados, interpretación de resultados y efectos de la variación

La conclusión en esta etapa del trabajo, es que los estudiantes lograron calcular la media aritmética de diversos problemas contextuales, interpretaron los resultados y le dieron diferentes significados de acuerdo con área del problema planteado, figura 3.

En otra etapa de la puesta en escena, la mayoría de los equipos e individualmente coincidieron con la selección de los datos, visualizaron la relación entre los elementos que componen el algoritmo de la media aritmética y la noción de variabilidad (rango), presentando operaciones incompletas.

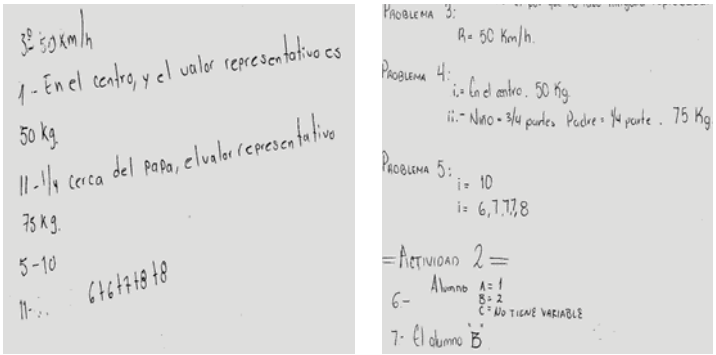


Figura 3. Aplicaciones contextuales de la media aritmética y su variabilidad

En la etapa de la experimentación, se pudo reflejar que el trabajo con datos reales, les produce confusión en sus construcciones, donde los alumnos consideran que la variabilidad de los datos se da solo en forma discreta, pero con las preguntas articuladas del profesor logran reconstruir la idea de rango y algunas nociones de desviación media.

En la etapa de la confrontación, todos los equipos tuvieron una clara idea intuitiva del significado de variabilidad, en una de las respuestas, se puede apreciar una percepción de la desviación media o promedio de desviaciones entre datos, figura 4.

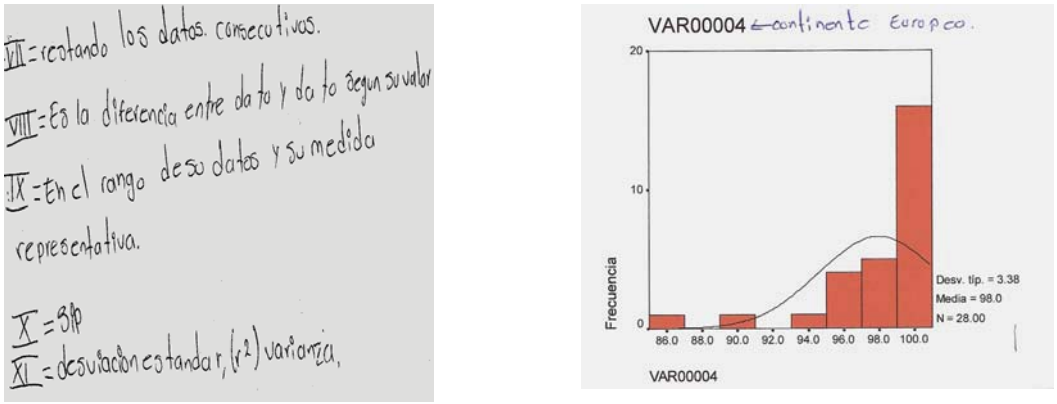
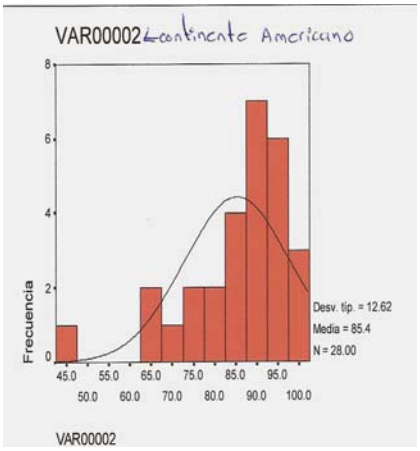


Figura 4. Nociones de variabilidad, graficación y comparación de grupos

Para la etapa del trabajo sobre proyectos, se dejaron indicaciones para trabajar con datos contextuales reales, recolectarlos, ordenarlos, analizarlos y tomar decisiones empíricas, sobre la diferencia de medias de grupos de información cuantitativa. Algunos equipos trabajaron con Excel y otros con SPSS, presentando gráficos, así como resultados del cálculo de medias y desviación estándar, interpretando resultados y las variables cuando no pudieron asignar nombres, pero sin llegar a clarificar las diferencias de los grupos, figura 5.



Continente americano
Continente europeo.

Estadísticos		VAR00000	VAR00004
N	Válidos	28	28
	Perdidos	10	10
Media		85,3607	97,967857
Error típ. de la media		2,38537	0,6386173
Mediana		89,35	99,72
Moda		90	100
Desv. típ.		12,6222	3,3792453
Varianza		159,32	11,419299
Asimetría		-1,50818	-2,177125
Error típ. de asimetr		0,44052	0,4405244
Curtosis		2,57022	4,6425145
Error típ. de curtosis		0,85833	0,8583292
Rango		53,5	13,2
Mínimo		45	86,8
Máximo		98,5	100
Suma		2390,1	2743,1
Percenti	1	.	.
	10	67,08	93,87
	20	74,69	96,07
	25	81,05	96,9
	28	82,508	97,406
	30	83,18	97,91
	40	85,64	98,77
	50	89,35	99,72
	60	90,12	99,832
	70	93,52	99,944
	75	95,6	100
	80	95,97	.
	90	97,75	.

Figura 5. Aplicación del programa SPSS para calcular la media y la varianza

A continuación se exponen algunas evidencias de cómo a través del discurso, los estudiantes dan muestra de cómo construir la idea de variabilidad y sus efectos, y a partir de estos efectos logran concluir con el concepto de rango y la noción de la desviación media.

1. Profesor:	Haber, primera pregunta. ¿Cuál es la variabilidad en las calificaciones de los tres estudiantes del problema 1? ¿Qué respuesta nos dieron?
2. Alejandra:	1, 2, 0.
3. Profesor:	¿Uno para quién?, ¿dos para quién? Y ¿cero para quién?
4. Alejandra:	Uno para el alumno A, 2 para el alumno B y 0 para el alumno C.
5. Profesor:	En su caso (refiriéndose al equipo 2).
6. Miguel A.:	El alumno A aumenta su calificación de uno en uno, el alumno B de dos en dos y el alumno C cero o estable.
7. Profesor:	¡Muy bien!, vamos de este lado, ¿haber qué nos dice el equipo 3?
8. Karina:	Que varían sus calificaciones, pero al promediarlas nos da como resultado, 1, 2, 0; 1 para A, 2 para B y 0 para C.
9. Profesor:	¡¡Muy bien!! Haber el equipo 4, ¿Cuál es su respuesta?
10. Rosy:	En el alumno A, va de uno en uno, en el alumno B es de 2, y en el C, no hay variabilidad porque es 0.
11. Profesor:	¡Muy bien!, quieren concluir en algo sobre lo que se dijo, alguien quiere tomar la palabra, que la pregunta quede bien definida, creo que todos coincidieron o alguien tiene diferente la respuesta.

46. Profesor:	¿Y el mejor estudiante de los 3? ¿Por qué? ¡Alguien debe ser mejor de los 3!
47. Gabriela T.:	Para nosotros entre comillas sería el alumno C, ya que no reprobó ninguna materia.
48. Ana Luisa	El C porque siempre se conservo en una calificación aprobatoria.
49. Profesor:	Pero uno tuvo 10.
50. Ana Luisa:	Ahh, pero tuvo 2 reprobadas.
51. Profesor:	Ese sería un efecto negativo, porque tiene que venir a pagar pasaje, cursos extraordinarios, qué pudiéramos decir de eso; A ver que dice el equipo # 8.
52. María G. :	Para nosotros el alumno C, porque no tuvo ninguna reprobada, porque los demás aunque tuvieron buenas, también tuvieron materias reprobadas.
53. Profesor:	¿Qué podemos concluir aquí?, entonces, olvídense de las calificaciones en general, cuando un número se permanece constante y otro fenómeno cambia mucho; ¿afecta o no afecta?
54. Todos	El grupo en coro, contesta: si, si afecta.
55. Profesor:	En conclusión que diría el equipo # 5 sobre la variabilidad de los datos; de cualquier dato, no de calificaciones, cualesquiera, ¿Cuál sería su conclusión?
56. Gabriela T.:	¿De la variabilidad?

Figura 6. Análisis del discurso alrededor de la variabilidad y sus efectos o repercusiones sociales

Y por último mostramos cómo se dio el discurso alrededor de la media y cómo cada alumno vertió sus ideas discursivas motivado por está estrategia de trabajo, así mismo se plantea como se cuestiona a los estudiantes sobre la idea intuitiva de variabilidad y cómo surge a través del efecto ó repercusiones sociales, figura 6.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula*, Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Artigue, M. (1992). *Didactic Engineering. Recherches en Didactique des Mathématiques*. Selected Papers. (pp. 41-66). Francia

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp.125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. (2000). *¿Hacia dónde va la educación estadística*? Blaix, 15, 2-13

Batanero, C. (2002a). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferencia inaugural.

Batanero, C. (2002b). *Presente y futuro de la educación estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática, (pp. 1-13). Universidad de Granada, España.

Brünner, J. (1995). Educación superior, integración económica y globalización. En: *Primer Simposio Regional "Educación, Trabajo y la Integración Económica del Merconorte"*. Consejo de Educación Superior de Puerto Rico, San Juan, (26 de septiembre).

Candela, A. (1999). *La ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México: Paidós Educador

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12 (1)*, 41-48. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hernández A. y Ramírez P. (2004). *El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas de la universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ivanovic R. y Middleton, S. (1988). *Rendimiento escolar y estado nutricional*. Santiago: Universidad de Chile, INTA.

Ivanovic D., Ivanovic R. y Middleton S. (1988). *Rendimiento y deserción escolar: Un enfoque multicausal*. Rendimiento escolar y estado nutricional. Santiago: Universidad de Chile, INTA.

Marqués, P. (2000). *Entornos formativos multimedia*: elementos, plantillas de evaluación/criterios de calidad. Departamento de Pedagogía aplicada, Facultad de Educación, UAB, DIM. España.

Michel, G. y Luviano, V. (1997). *El mundo como escuela. Manual para el aprendizaje autodirigido*. México: Ed. Trillas

ALGUNAS REFLEXIONES DE CONTRASTE DEL FORMALISMO CON LA ALGORITMIA EN LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN ESCUELAS DE INGENIERÍA

Ernesto Bosquez[1,2], Javier Lezama[2], César Mora[2]
Instituto Tecnológico de Toluca[1] Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional[2] México
ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Nuestras reflexiones se basan en el trabajo de investigación doctoral titulado "Un estudio Didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución en escuelas de ingeniería en un contexto de la transformada de Laplace" (Bosquez, 2009), sustentada en la aproximación socioepiestemológica (Cantoral, 2006) Estas reflexiones nos permiten identificar dos prácticas en la enseñanza del Teorema de Convolución (TC), una con enfoque formalista, y otra con* **enfoque** *algorítmico. Estas prácticas de enseñanza, según nuestro análisis, no permiten al estudiante de ingeniería vincular ni construir un significado con los objetos matemáticos relacionados con el teorema, la ecuación diferencial y la posible construcción de significado basado en las prácticas de uso tanto en el aula como en su ingeniería. El contraste entre estas prácticas de enseñanza nos induce a cuestionarnos ¿Cuál es la práctica de enseñanza del TC que permita vincular a este teorema con los elementos involucrados del mismo?*
Palabras clave: Enfoque formalista, enfoque algorítmico

Introducción

En la disciplina científica de la Matemática Educativa se han realizado investigaciones relevantes correspondientes a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales; se han estudiado fenómenos, prácticas docentes asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las mismas, detectándose prácticas que generan desinterés y aburrimiento, debido a su carácter rutinario y carentes de un contenido claro para los estudiantes; tal es el caso de estudiar múltiples técnicas para resolver ecuaciones diferenciales en las que no se entiende de dónde surgen y qué modelan, llevando a los estudiantes a considerar tales prácticas como "el más aburrido recetario de cocina"(Hirsch, 1984 p, 22). En otros resultados, se afirma que hay tres escenarios fundamentales en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales; algorítmico- algebraico, numérico y geométrico (Artigue, 1995, p. 128). Así mismo se afirma que el escenario más utilizado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es el algorítmico algebraico (Hernández, 1996). Siguiendo esta perspectiva, las reflexiones que haremos están enfocadas al sentido de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en escuelas de ingeniería, en nuestro caso particular, se trata de una problemática didáctica asociada a la enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución.

Identificamos a dos tipos de enseñanza de este teorema, una es con enfoque formalista y la otra con un enfoque algorítmico. A continuación se dará una descripción de cada una de estas prácticas asociadas a los enfoques mencionados.

Enfoque *formalista*. Un primer enfoque lo encontramos en lo siguiente:

En la filosofía de las matemáticas, se reconocen los trabajos, entre otros, de Hilbert, Banach, Gödel, tanto sus aportaciones como sus controversias con respecto a el formalismo (Cavaillès, 1992) Este enfoque encadena de una manera a lo formal, como un conjunto de axiomas y teoremas rigurosamente demostrados que permitirán demostrar otras proposiciones de manera lógica y éstas podrán implementar nuevas proposiciones que requerirán de nuevas demostraciones. Aunque la postura anterior sería normal y necesaria para un matemático, no lo es así para un estudiante de ingeniería (y ésta es una postura de enfoque teórico y por supuesto discutible) y consideramos que no debería ser tampoco, esta práctica de enseñanza, de un profesor de matemáticas en una escuela de ingeniería. La exploración (diálogos, encuestas y entrevistas con profesores y estudiantes) nos muestra, que tal postura provoca en los estudiantes, una desvinculación entre la práctica y la construcción conceptual de los objetos matemáticos en estudio, como es el caso, de enseñar el teorema de convolución, con un enfoque formalista. Por ejemplo, el profesor comunica este objeto matemático como sigue; primero da a conocer el objeto matemático, es decir,

Teorema de Convolución

Sea $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ y $G(s)=\mathcal{L}\left[g(t)\right]$,

entonces $\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right]=F(s)\,G(s)$

Para que se complete la comunicación de este objeto matemático se define la operación de convolución entre dos funciones como sigue.

Definición de Convolución de dos funciones.

La convolución de f *con* g *es:*

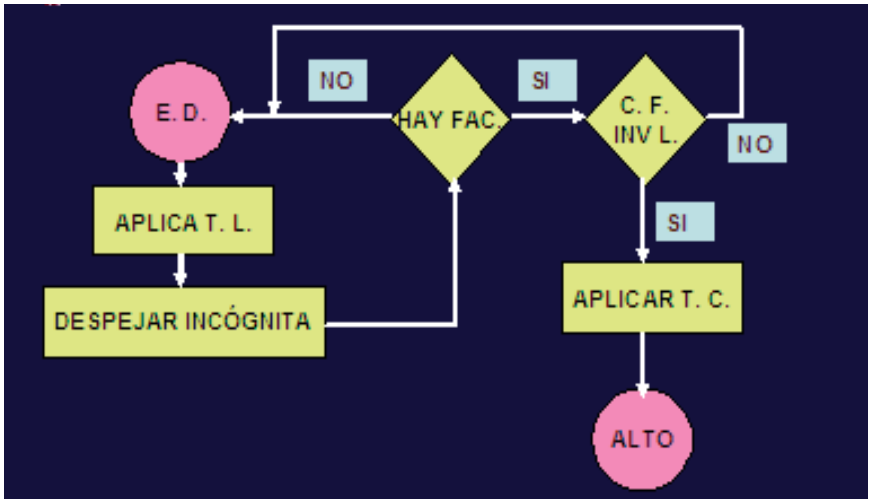
$$f*g\,(t)=\int_0^t f(t-\alpha)\,g(\alpha)\,d\alpha$$

Esta definición induce a los estudiantes a plantearse los cuestionamientos; ¿Cómo se llega a la misma? ¿Qué significa? - Aquí parte de nuestra propuesta es de construir un significado de tal enunciado, dándole un sentido en las prácticas de aplicación en su entorno profesional, ante la dificultad de darle un significado en estricto sentido matemático, debido a la complejidad teórica (Mellin, 1896) - seguidamente el profesor da la demostración del teorema mencionado, y en este caso la demostración juega un papel justificativo, en el sentido de que se muestra al estudiante que la definición es consistente, operativamente hablando. Esta demostración es generalmente expuesta en los textos típicos de uso en estos cursos, por ejemplo, Zill (Zill, 2008, p.220-221). Finalmente la exposición concluye con un ejemplo que por lo general contiene la frase "Pruebe usted….", provocando en el estudiante aún mayor desconcierto con este tipo de práctica educativa o enseñanza.

Enfoque *Algorítmico*. Aquí tenemos que:

El Algoritmo" es un instrumento de desbloqueo y de resolución de conflictos didácticos, en cuanto a que permite momentáneamente un reparto claro de las responsabilidades. El maestro muestra el algoritmo. El alumno lo aprende y lo "aplica" correctamente debe ejercitarse pero su incertidumbre es casi nula. Se le asegura que existe una clase de situaciones distintas en las que el algoritmo da una solución (el conflicto volverá a aparecer cuando se trate de elegir un algoritmo para un problema determinado). (Brousseau, 1986, p. 21.)

Sin embargo para evitar lo anterior, él propone extender el término de *"procedimientos algorítmicos"*, lo que da valor o le quita a un procedimiento es su *función y su presentación didáctica*. En nuestra reflexión nos referimos a la enseñanza del teorema de convolución con una tendencia algorítmica a lo siguiente. El profesor comunica el objeto matemático, en este caso el *teorema de convolución,* seguidamente se propone un algoritmo, por ejemplo, una manera es la siguiente.



Y se finaliza dando un ejemplo en dónde se enfatiza el uso de este algoritmo, por ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial siguiente.

$$y' - 2y = 1, \text{ tal que } y(0) = 0$$

Solución:

Aplicando T. L. $\quad \mathfrak{L}[y' - 2t] = \mathfrak{L}[t]$

Despejando a la

Incógnita $\quad \mathfrak{L}[y(t)] = \frac{1}{s}\frac{1}{s-2}$

Cómo $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$ y $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}$ entonces aplicando el teorema de convolución, se tiene que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = 1 * e^{2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Aunque este enfoque, como menciona Brousseau, aparenta resolver la enseñanza del teorema de convolución (para nuestro caso), resulta en la experiencia docente, y en el estudiante un fracaso, ya que a éste, en efecto, por un lado se le quita su responsabilidad de aprendizaje del mismo y por

otro queda aún un vacío de sentido, pues no hay elementos claros que permitan la construcción de significado, es decir, las prácticas no articulan la relación entre los objetos matemáticos involucrados; la ecuación diferencial, la solución, la transformada de Laplace, el teorema de convolución y la convolución misma.

La experiencia docente nos reporta que una enseñanza del teorema de convolución con ambos enfoques tanto *formalista* como *algorítmico*, deja en los estudiantes de alguna manera, con problemas en su aprendizaje, nuestra apreciación de la problemática anterior nos permite suponer, que esto pueda ser una causa de uso de elementos matemáticos vacíos de significado en el aula, y difícilmente utilizables en ámbitos ajenos a ella. Ante la problemática planteada de la enseñanza y aprendizaje del teorema mencionado, podemos plantear los cuestionamientos siguientes y considerarlos como objetos primarios de investigación dentro de la disciplina de la matemática educativa.

¿A través de un nuevo diseño del discurso escolar para la enseñanza y aprendizaje del T C se lograría vincular los elementos relacionados con el teorema mencionado?

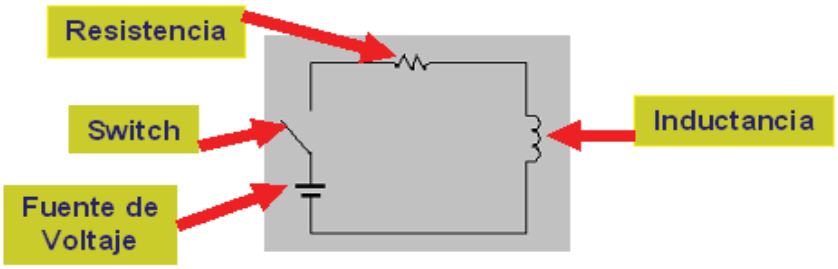
¿Este nuevo diseño del discurso escolar incorpora necesariamente alguna de las actividades de enseñanza con enfoque *formalista o algorítmico* o requiere de la ampliación o resignificación de alguna de ellas?

Para dar una posible respuesta a estos cuestionamientos usaremos resultados de investigaciones en nuestro campo. Primero se justifica que el teorema de convolución se relaciona de alguna manera con las EDO. El marco teórico que respalda esta investigación es la *aproximación socioepistemológica* (Cantoral, Farfán, Lezama, 2006). Básicamente esta aproximación socioepistemológica comprende los siguientes aspectos. *Aspectos Cognitivos*: Con los dos tipos de prácticas de enseñanza del TC descritas, el estudiante de ingeniería presenta dificultades para su aprendizaje, ya que en ambos casos no vincula los elementos involucrados. *Aspectos Didácticos*: El discurso escolar del docente, según nuestra apreciación, se identifican dos prácticas de enseñanza de este teorema, una con enfoque *formalista* y otra con enfoque *algorítmico*, sin embargo en ambas se presentan el mismo vacío de significado. *Aspecto Epistemológico*: La génesis del TC crece en un escenario formal y teórico con un alto grado de complejidad lo que plantea como un reto orientar o ampliar el enfoque de enseñanza con enfoque *algorítmico*, en el sentido de incorporar los aspectos de funcionalidad así cómo de presentación didáctica (Brousseau, 1986). *Aspecto*

Sociocultural: Para el estudiante de Ingeniería, cuáles son las prácticas y técnicas en el sentido de uso en los escenarios de la ingeniería que permitan construir un significado al uso y al contenido del mismo del TC, es decir, ¿Tiene algún sentido el TC como demanda social de conocimiento?

Lo anterior nos permite situar y orientar nuestra investigación en la necesidad de una ampliación en el discurso de la enseñanza de este teorema en el sentido de un enfoque *algorítmico*, incorporando los aspectos de funcionalidad y presentación didáctica (Brousseau, 1986) que llene los vacíos de significado de la enseñanza común de dicho contenido matemático. En este aspecto la funcionalidad y presentación didáctica se incorpora un contexto electrónico que permite al estudiante modelar, y a través de esta vincular a la ecuación diferencial con su solución, la transformada de Laplace y el teorema de convolución, es decir esta propuesta didáctica permitirá darle un sentido de relación a estos objetos. La manera en que funciona este contexto electrónico se describe a continuación.

¿Cómo se relaciona el T. C. con éstos circuitos?
Para responder esto consideremos la representación siguiente del circuito RL, es decir;



Al cerrar el Switch, la corriente fluye en el circuito, bajo las condiciones siguientes:.

1.- El resistor, que se opone a la corriente, implica una caída de voltaje igual a,

$$E_R = Ri$$

2.- El inductor produce una caída de voltaje igual a,

$$E_L = L\frac{d}{dt}i$$

3.- La suma algebraica de todas las caídas de voltaje es cero, es decir,

$$E_R + E_L = E \Rightarrow E - E_R - E_L = 0$$

De lo anterior se deduce que:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Un circuito RL se modela con una EDO, de primer orden lineal.

Consecuentemente se muestra que la EDO está relacionada siempre al TC.

Aplicando la transformada de Laplace a la EDO que modela un circuito eléctrico RL es decir,

$$\mathcal{L} \longrightarrow L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$$

$$LsF(s)-i(o)+RF(s)=\mathcal{L}[E(t)]$$

$$F(s)=\frac{\mathcal{L}[E(t)]}{Ls+R}$$

aplicando inversa de Laplace

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[E(t)]\cdot\frac{1}{Ls+R}\right]=\frac{1}{L}E(t)*e^{-\frac{R}{L}t}$$

Es decir, se obtiene siempre, con las condiciones indicadas, una expresión, la cuál depende del teorema de convolución.

Finalmente nos resta incorporar los resultados ante la problemática planteada de una manera sistémica, para que finalmente a través de la metodología de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), se pongan en escena que permitirán aproximar una respuesta a la problemática planteada.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica

Bosquez, E. (2009). *Un estudio Didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución en escuelas de ingeniería en un contexto de la transformada de Laplace*. Memoria predoctoral no publicada. CICATA-IPN, México.

Brousseau, G. (1986). Fondements et mèthodes de la didactiques des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 82-102

Cavaillès, J., (1992). *Método Axiomático y Formalismo.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Gardner, M. (1942). *Transients in Linear Systems*. New York: Edt. Jhon Wiley & Sons.

Hernández, A. (1996). *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Algebraico y Gráfico en Relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Tesis Doctoral no Publicada, CINVESTAV IPN, México, D. F.

Hirsch M. W. (1984). The Dynamical Systems Approach to Differential Equations, *Bull. American Mathematical Society* 11 (1)

Mellin H.(1896). "Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten". *Acta Soc. Sci. Fenn*., 21(1 96). pp. 6-57. Alemania.

Zill, D. (2008). *Ecuaciones Diferenciales*, México: McGraw-Hill.

EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE USANDO MEDIADORES, CON LA FINALIDAD DE AMPLIAR LA ZONA DE DESARROLLO POTENCIAL EN LA ENSEÑANZA DE LA DESCOMPOSICIÓN LU

Rogelio Ramos C.
Universidad Nacional Autónoma de México México
egorrc@gmail.com, egor1131@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Pensamiento numérico Nivel: Superior

Resumen. *Propuesta experimental, en la que se plantea el problema de mejorar el aprendizaje del método de descomposición LU; la cual consiste en ampliar el nivel de desarrollo potencial en estudiantes de Ingeniería. En el aprendizaje escolar, la actividad del alumno está mediada por la actividad del profesor, que es el que debe ayudarle a activar los conocimientos previos (a través de las "herramientas") y a estructurar los conocimientos previos (a través de los "símbolos") proponiéndole experiencias de aprendizaje. En el modelo Vygotsky, se entiende por desarrollo, a la interiorización de medios proporcionados por la interacción con otros: el desarrollo viene guiado y conducido por el aprendizaje (Vygotsky, 1979). Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la mencionada "ZDP" que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose, cierta autonomía e independencia para aprender a aprender más.*
Palabras clave: Mediadores, zona de desarrollo potencial, factorización LU, enseñanza-aprendizaje

Introducción

En el modelo sociocultural de Vygotsky, es muy importante aclarar el significado de los términos, herramientas y símbolos. Las "herramientas" (herramientas técnicas) son las expectativas y conocimientos previos del alumno que transforman los estímulos informativos que le llegan del contexto. Los "símbolos" (herramientas psicológicas) son el conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos.

Todo este proceso recibe el nombre de "ley de la doble formación" puesto que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las "herramientas" y reestructurándolo luego en el interior, a través de los "símbolos".

Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la mencionada "zona de desarrollo potencial" que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

Así, tenemos como propuesta establecer las condiciones adecuadas para facilitar la ampliación del nivel de desarrollo potencial, proporcionando una herramienta didáctica al docente para la enseñanza-aprendizaje del modelo LU.

Las condiciones se desarrollan con base a cuatro actividades fundamentales: Andamiaje Didáctico, La Enseñanza Reciproca, Conducción Social del Aprendizaje, y Colaboración entre Compañeros.

Descripción general

Se ha experimentado, con estudiantes de ingeniería, en situaciones en el aula de clase, con objeto de caracterizar el comportamiento que tienen ellos ante la presencia de estrategias de aprendizaje. Este experimento es parte de una investigación en la que se plantea el utilizar e implementar medios educativos, adecuados para lograr que el estudiante adquiera tanto los elementos que le permitan el autoaprendizaje, así como un aprendizaje significativo y duradero. Se sustenta en uno de los supuestos de la teoría sociocultural de Vygotsky, la Zona de Desarrollo Potencial. Se aplica al aprendizaje de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, mediante el método de descomposición LU. Así, como resultado del citado experimento, propusimos en este trabajo llevar a cabo situaciones didácticas en un taller durante la XXIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Antecedentes

La historia de las matemáticas no es sólo una colección de hechos ubicados en un tiempo, país, materia y autor, es una estrategia que nos permite reconocer los principales problemas que han permitido el progreso de la ciencia, y sentado las líneas de avances para estudios posteriores. Así, el conocer, y el comprender dichos fenómenos, no sólo desde un punto de vista técnico, sino humanístico nos ayudará a comprender y relacionarnos con los problemas de nuestra época. En el aspecto de la enseñanza de las matemáticas, Cantoral y Farfán (2003) mencionan que se ha convertido en una necesidad básica, el proporcionar a una investigación en matemática educativa de una aproximación sistémica y situada, que haga posible incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Justificación

En la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, se han planteado, propósitos dentro del plan de desarrollo institucional, y uno de los más importantes es el reducir el índice de reprobación y deserción; por lo que en el presente experimento nos hemos propuesto contribuir a un mejoramiento en el aprovechamiento escolar mediante el uso de metodologías para la enseñanza del pensamiento numérico, dichas metodologías se fundamentan en el modelo sociocultural de Vigotsky.

Planteamiento del problema

Se podrá facilitar el aprendizaje de la factorización LU, para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, usando como metodología para su enseñanza, mediadores; con el propósito de ampliar la zona de desarrollo potencial de los estudiantes en escuelas de ingeniería.

Objeto de estudio

Los estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, que cursan la asignatura de Métodos Numéricos, en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Objetivos

Objetivos generales

Se ha producido y editado un cuaderno de notas a través del comité editorial universitario como parte de los materiales educativos para la asignatura de métodos numéricos correspondiente al cuarto semestre de la currícula del plan de estudios para las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM y se pretende que estos sirvan de refuerzo para fortalecer las herramientas técnicas, que son parte de los mediadores que se han utilizado en el experimento diseñado.

Objetivos particulares

Un objetivo del experimento diseñado, ha sido el de mostrar que se pueden obtener mejores resultados en el aprendizaje de la técnica de descomposición LU, a través del uso de mediadores,

como una de las principales componentes de los referentes cognitivos propios de la teoría sociocultural de Vygotsky.

Hipótesis

El uso de mediadores en la enseñanza-aprendizaje de la factorización LU, podría contribuir a ampliar la Zona de Desarrollo Potencial de los estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Marco teórico

La Zona de Desarrollo Potencial (ZDP), sería pues, de acuerdo con la teoría de Vygotsky (1979), la distancia entre el nivel real o actual de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. La acción conjunta (interactividad) del sujeto y de los que le rodean en el espacio de esta ZDP es justamente el factor que hace posible que los mediadores externos lleguen a convertirse en procesos internos.

El concepto de ZPD se relaciona así con la Ley de la doble formación de las funciones psicológicas (Vygotsky, 1979) según la cual toda función aparece dos veces: primero entre las personas, interpsicológica, y después en el interior del propio sujeto, intrapsicológica. Esta doble formación supone que el "aprendizaje en sentido estricto" y "el aprendizaje en sentido amplio" interactúan de modo que el primero posibilita la internalización de los instrumentos externos, los cuales una vez internalizados se transforman en procesos de desarrollo que hacen posible la reestructuración: el aprendizaje precede de este modo al desarrollo.

En el aprendizaje social, los logros se construyen conjuntamente en un sistema social, con la ayuda de herramientas culturales (en este experimento, materiales didácticos y antecedentes) y el contexto social en la cual ocurre la actividad cognitiva es parte integral de la actividad, no simplemente un contexto que lo rodea (Resnick, 1991).

Al aceptar la premisa básica en la construcción del conocimiento, no hay razón para buscar fundamentos ni usar el lenguaje de la verdad absoluta. La posición constructivista es post-

epistemológica y es por eso que es tan poderoso para inducir nuevos métodos de investigación y enseñanza. Reconoce el poder del ambiente para requerir adaptación, la temporalidad del conocimiento y la existencia de múltiples identidades (selves) comportándose de acuerdo con las reglas de varias subculturas (Noddings, 1990).

La cuestión clave de la educación está en asegurar la realización de aprendizajes significativos, a través de los cuales el alumno construye la realidad atribuyéndole significados. Para tales fines, el contenido debe ser potencialmente significativo y el alumno debe tener una actitud favorable para aprender significativamente. (Coll, 1993). Coll plantea que la significatividad está directamente vinculada a la funcionalidad y plantea que:

"(...) cuanto mayor sea el grado de significatividad del aprendizaje realizado, tanto mayor será también su funcionalidad" (Coll, 1993, p. 167).

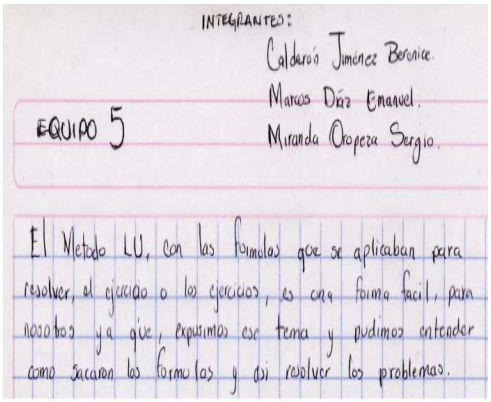
Continúa Coll con el planteamiento de que el aprendizaje requiere una intensa actividad por parte del alumno, y que cuanto más rica sea su estructura cognoscitiva, mayor será la posibilidad de que pueda construir significados nuevos y así evitar memorización repetitiva y mecánica. Además el aprender a aprender constituye el objetivo más ambicioso de la educación escolar, que se hace a través del dominio de las estrategias de aprendizaje.

La teoría subraya que el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, condicionada por dos tipos de mediadores: "herramientas" y "símbolos", ya sea autónomamente en la "zona de desarrollo real", o ayudado por la mediación en la "zona de desarrollo potencial". Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la mencionada "zona de desarrollo potencial" que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

Aplicación del experimento y resultados obtenidos

El proceso de experimentación consistió en realizar un desarrollo intuitivo de la formulación del método de descomposición LU, apoyado, tanto en los conceptos (mediadores) vistos en cursos antecedentes y que consisten únicamente en el producto de matrices y sus reglas; así como en el material de apoyo desarrollado para el propósito del experimento. En el proceso se mostraron la

forma de realizar los productos correspondientes a fin de obtener un algoritmo para la determinación de los elementos de la matriz U, así como el correspondiente algoritmo para la determinación de los elementos de la matriz L. Enfatizando en esta operación, las observaciones que se pueden poner en relieve acerca del patrón de comportamiento en el calculo de los elementos de las filas y columnas de las matrices triangulares superior (U) e inferior (L). Una vez que se determinaron las fórmulas correspondientes para el cálculo de los elementos de las matrices L y U; se aplicaron dichos algoritmos en la solución de algunos casos de aplicación en los que intervienen sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Se aclararon lo que se creyó pertinente durante el desarrollo y la aplicación del método de descomposición LU. Una vez que se aclaró se pidió a los participantes que cada uno de los equipos que se formaron diera una explicación o exposición del método con sus propias palabras y recursos. A continuación presentamos algunos de las experiencias de los participantes, quienes describieron con sus propias palabras lo que ellos consideraron su experiencia de aprendizaje.


INTEGRANTES:
Calderón Jiménez Bernice.
Marcos Díaz Emanuel.
EQUIPO 5
Miranda Oropeza Sergio.

El Metodo LU, con las formulas que se aplicaban para resolver, el ejercicio o los ejercicios, es una forma facil, para nosotros ya que, expusimos ese tema y pudimos entender como sacaron las formulas y asi resolver los problemas.

Fig. 1. Descripción equipo No. 5

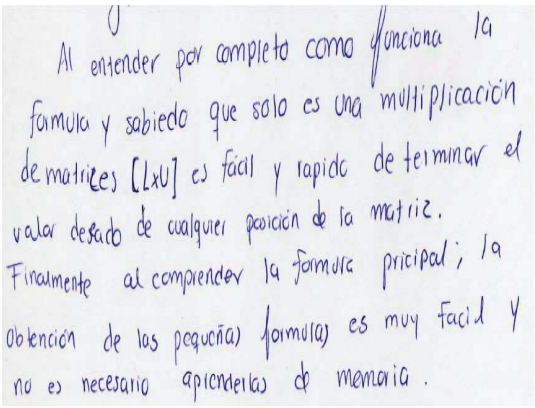
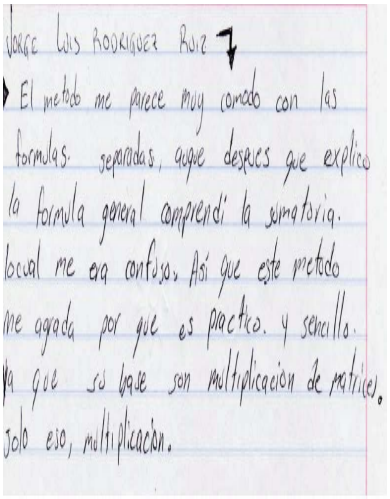
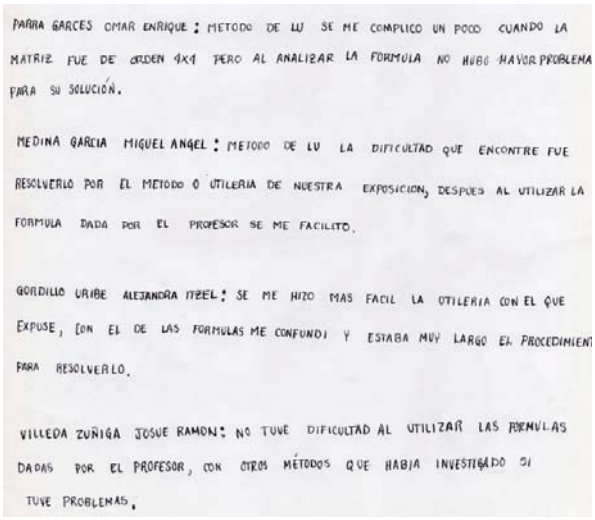

Al entender por completo como funciona la formula y sabiedo que solo es una multiplicacion de matrices [LxU] es facil y rapido determinar el valor deseado de cualquier posicion de la matriz. Finalmente al comprender la formula pricipal; la obtencion de las pequeña formulas es muy facil y no es necesario aprenderlas de memoria.

Fig. 2. Descripción equipo No. 3A


Jorge Luis Rodriguez Ruiz 7

El metodo me parece muy comodo con las formulas separadas, aunque despues que explico la formula general comprendi la sumatoria. Local me era confuso, Así que este metodo me agrada por que es practico y sencillo. ya que su base son multiplicación de matrices, solo eso, multiplicación.

Fig. 3. Descripción alumno

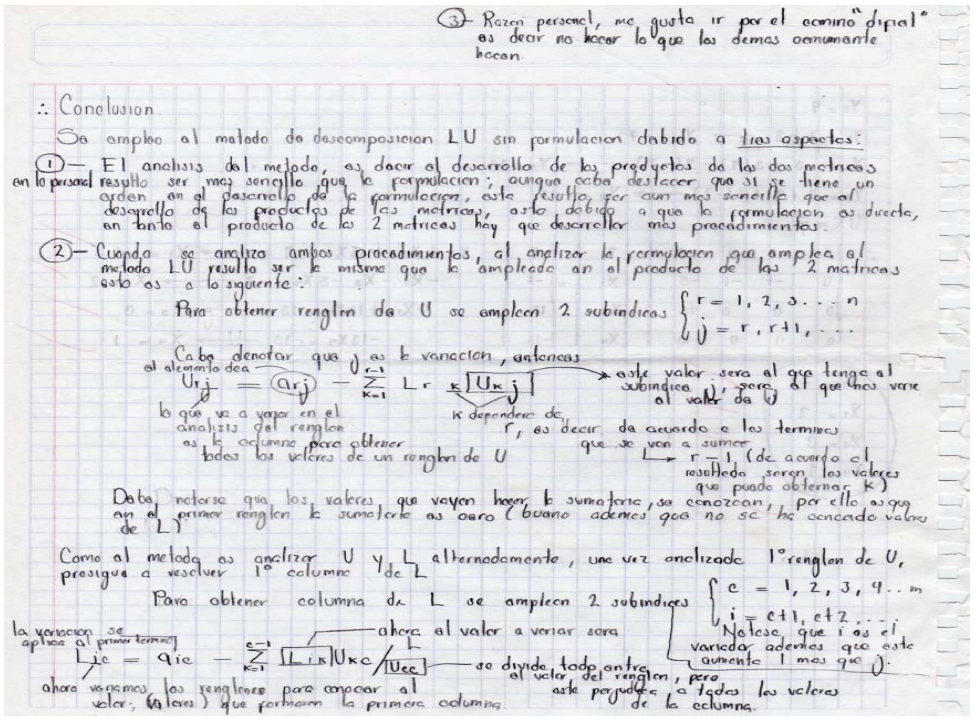

PARRA GARCES OMAR ENRIQUE : METODO DE LU SE ME COMPLICO UN POCO CUANDO LA MATRIZ FUE DE ORDEN 4X4 PERO AL ANALIZAR LA FORMULA NO HUBO MAYOR PROBLEMA PARA SU SOLUCIÓN.

MEDINA GARCIA MIGUEL ANGEL : METODO DE LU LA DIFICULTAD QUE ENCONTRE FUE RESOLVERLO POR EL METODO O UTILERIA DE NUESTRA EXPOSICION, DESPUES AL UTILIZAR LA FORMULA DADA POR EL PROFESOR SE ME FACILITO.

GORDILLO URIBE ALEJANDRA ITZEL : SE ME HIZO MAS FACIL LA UTILERIA CON EL QUE EXPUSE, CON EL DE LAS FORMULAS ME CONFUNDI Y ESTABA MUY LARGO EL PROCEDIMIENT PARA RESOLVERLO.

VILLEDA ZUÑIGA JOSUE RAMON: NO TUVE DIFICULTAD AL UTILIZAR LAS FORMULAS DADAS POR EL PROFESOR, CON OTROS MÉTODOS QUE HABIA INVESTIGADO SI TUVE PROBLEMAS.

Fig. 4. Descripción equipo No. 6


③ Razon personal, me gusta ir por el camino "dificil" es decir no hacer lo que los demas comunmente hacen.

∴ Conclusion

Se empleo el metodo de descomposicion LU sin formulacion debido a tres aspectos:

① — El analisis del metodo, es decir el desarrollo de los productos de las dos matrices resulto ser mas sencillo que la formulacion; aunque cabe destacar que si se tiene un orden en el desarrollo de la formulacion, este resulta ser aun mas sencillo que el desarrollo de los productos de las matrices, esto debido a que la formulacion es directa, en tanto al producto de las 2 matrices hay que desarrollar mas procedimientos.

② — Cuando se analiza ambos procedimientos, al analizar la formulacion que emplea el metodo LU resulto ser la misma que la empleada en el producto de las 2 matrices esto es a lo siguiente:

Para obtener renglon de U se emplean 2 subindices $\begin{cases} r = 1, 2, 3 \ldots n \\ j = r, r+1, \ldots \end{cases}$

Cabe denotar que j es la variacion, entonces

$U_{rj} = (a_{rj}) - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk} [U_{kj}]$

el elemento de la ij — este valor sera al que tenga el subindice j, sera el que mas varie al valor de U

lo que va a variar en el analisis del renglon es la columna para obtener todos los valores de un renglon de U

k dependera de r, es decir de acuerdo a los terminos que se van a sumar $\rightarrow r-1$, (de acuerdo al resultado seran los valores que puede obtener k)

Debe notarse que los valores que vayan hacer la sumatoria, se conozcan, por ello es que en el primer renglon la sumatoria es cero (bueno ademas que no se ha cancelado valores de L)

Como el metodo es analizar U y de L alternadamente, una vez analizado 1°renglon de U, prosigue a resolver 1° columna

Para obtener columna de L se emplean 2 subindices $\begin{cases} c = 1, 2, 3, 4 \ldots m \\ i = c+1, c+2 \ldots \end{cases}$ Notese que i es el variador ademas que este aumenta 1 mas que j.

la variacion se aplica al primer termino

$L_{ic} = a_{ic} - \sum_{k=1}^{c-1} [L_{ik}][U_{kc}] / [U_{cc}]$ — ahora al valor a variar sera

se divide todo entre el valor del renglon, pero este pertenece a todos los valores de la columna.

ahora veremos los renglones para conocer al valor, (valores) que formaran la primera columna

Fig. 5. Descripción de Alumno, que fue uno de los casos excepcionales en los que se produjeron los resultados esperados; expansión de la Zona de Desarrollo Potencial

Es pertinente aclarar que además del material didáctico de apoyo, consistente en un cuaderno de notas, se utilizaron cuadrados (de 3 por 3 centímetros) de cartulina en los que se escribieron los elementos de las matrices participantes en el proceso; teniendo como propósito el facilitar la visualización del patrón de comportamiento en el desarrollo de la inducción ordinaria, para la obtención de las fórmulas representativas del método, y esto se aplicó en el taller en la RELME 23.

Conclusiones

Una de las observaciones que vale la pena destacar en la aplicación del experimento, es el hecho de que los participantes presentaron ciertas dificultades en el uso o aplicación del algoritmo, debido, muy probablemente a la falta de comprensión de una de las principales características de los algoritmos, y que se refiere a la generalización. Se les pidió que describieran con sus propias palabras la principal dificultad en el uso y aplicación de la formulación del método de descomposición LU; dicha formulación consiste de un par de expresiones generales que sirven para el cálculo de los elementos de las matrices L y U, respectivamente. Se pudo observar que en el momento de aplicar las fórmulas a los casos propuestos, se presentaban dificultades para el uso formal del algoritmo que define al método; así mismo, se observó en general, que los participantes se inclinaron por usar preferentemente a los elementos a partir de los cuales se llega a la formulación generalizada del método de descomposición LU; es decir, a llevar a cabo el producto de las matrices LU, en lugar de usar el proceso formal y que consiste en la correcta aplicación de las fórmulas del método. Por lo anteriormente expuesto, podemos concluir que se han presentado ciertas dificultades en el aprendizaje del método LU; y se observa que las expectativas y conocimientos previos del alumno (“herramientas técnicas”), se han podido presentar y manejar de manera adecuada, transformando los estímulos informativos que llegan del contexto; por lo que el problema podría radicar en la reestructuración del conocimiento en el interior del participante, mediante el uso de símbolos (herramientas psicológicas). Así pues, pensamos que no se produjeron los resultados esperados salvo en algunos casos aislados; en términos generales, no se consiguieron establecer los conocimientos estructurados, mediante el uso de mediadores, los cuales generarían en el alumno la Zona de Desarrollo Potencial, que permitiría acceder a nuevos aprendizajes y que a su vez, permitirían una cierta autonomía e independencia para conseguir la meta mas ambiciosa de la apropiación del conocimiento; es decir,

el metaconocimiento (aprender a aprender más). Este último argumento de la teoría sociocultural de Vygotsky, se pudo observar en los estudiantes, dado que ellos prefirieron solamente usar los conocimientos previos, ellos hablan de realizar el producto de matrices, cada vez que se les presente un caso de estudio para resolver por descomposición LU, en lugar de usar la formalización del método, en cuyo caso podrían haber internalizado el proceso.

Un aspecto muy importante al que se puede llegar a manera de conclusión, es que se presentaron ideas que conducen a una mejora en el diseño de la situación didáctica; y esta situación quedaría definida por la aplicación de una inducción ordinaria para la descripción y caracterización formal del método LU, mediante la que se espera que el sujeto se vea forzado a resolver problemas usando el método de descomposición LU; de tal forma que al aplicarla, el sujeto no conocerá otro proceso que el que se establece por las expresiones que definen al método formalmente; y de esta manera se produzca un mejor resultado en el crecimiento de la zona de desarrollo potencial en el estudiante. En el momento de escribir este documento, ya se ha puesto en práctica esta mejora de la situación didáctica y se espera tener resultados a finales de 2009, los cuales podrían ser presentados en la próxima RELME XXIV.

Una observación muy importante y aclaratoria es el hecho de que el sujeto ha descrito con sus propias palabras, lo que piensa de las dificultades o bondades para el aprendizaje del método de factorización LU; que en términos generales, se destaca el hecho de que se les ha dificultado la aplicación de las expresiones generales del método; a diferencia de la facilidad que tuvieron para realizar los productos de las matrices L y U cada vez que fuera necesario para resolver los casos que se les presentó (esto representa solamente el uso de la herramientas o herramientas técnicas); no obstante esta situación no asegura el hecho de que en un momento dado se produzca en el estudiante el proceso de reestructuración del conocimiento (mediante el uso de los símbolos o herramientas psicológicas) y de esa manera pueda internalizar, y hacer propio el proceso de aprender a adquirir aprendizajes mediante la expansión de su zona de desarrollo potencial.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *6(1)*, 27-40.

Coll, C. (1993). *Aprendizaje Escolar y Construcción del Conocimiento.* Buenos Aires: Paidos.

Noddings, H. (1990) Constructivism in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1(4), 7-18.

Resnick, L. (1991). Shared Cognition: Thinking as Social Practice. En L. Resnick (Ed.) *Perspectives on Socially Shared Cognition* (pp. 1-20), Washington, D.C.: American Psychological Association.

Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Critica/Grijalbo.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA. RESULTADOS DE SU IMPLEMENTACIÓN

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio y Superior

Resumen. *En el ámbito de la investigación en Matemática Educativa son conocidas las dificultades que plantean la enseñanza y el aprendizaje de contenidos del cálculo. En la búsqueda de alternativas que favorezcan un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento propios de la matemática, diseñamos y pusimos a prueba una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada.*
Consideramos como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión y apropiación de esta noción, adoptando la posición de que el manejo de sistemas de representación es fundamental para la actividad cognoscitiva del pensamiento. Presentamos algunas de las actividades trabajadas en clase y un breve análisis sobre su implementación y las respuestas de los alumnos.
Palabras clave: Pensamiento variacional, derivada, diferentes representaciones

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje del cálculo constituyen uno de los mayores desafíos de la educación actual. Existe consenso en que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, estas acciones están muy alejadas de lo que significa una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento. Esto plantea la necesidad de preguntarnos qué enseñamos y cómo enseñamos de manera de modificar esta situación y lograr que el alumno pueda comprender y dar sentido a los conceptos.

En el marco de la Matemática Educativa se han realizado en las últimas décadas numerosas investigaciones en las que estas cuestiones son abordadas desde diferentes perspectivas. Debido a lo complejo de los procesos que se ponen en juego (abstracción, demostración, generalización, visualización) se ubican dentro del campo denominado pensamiento matemático avanzado (Cantoral, 2003).

En el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento se resalta la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos (Cantoral, 2003). Con la prioridad de dotar a las investigaciones de

una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento (su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico), surge lo que se ha denominado "acercamiento socioepistemológico".

Bajo esta aproximación se encuentra la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, cuyos trabajos se orientan al desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto al nivel de los procesos como de los conceptos propios del cálculo, principalmente de función, límite, continuidad, derivada, convergencia y analiticidad, basados en ideas variacionales (Cabañas y Cantoral, 2007).

Lo hasta aquí descrito conforma el marco teórico general de nuestro trabajo. Como marco teórico de comprensión de los objetos matemáticos consideramos la "Teoría de los Registros Semióticos" de Raymond Duval, quien plantea la importancia de los sistemas de representación en el sentido que no sólo son necesarios para fines de comunicación sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento (Duval, 1998).

Todo concepto matemático necesita de representaciones ya que no se dispone de objetos para mostrar en su lugar y sólo por medio de éstas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Las representaciones algebraicas, tablas, gráficas y expresiones verbales que contienen la misma información, ponen en juego diferentes procesos cognitivos, cada uno relacionado con los otros. Aprender matemática consiste en el desarrollo progresivo de coordinaciones entre diferentes representaciones.

Nos propusimos tomar una de las nociones básicas del cálculo diferencial: la derivada. Diseñamos y pusimos a prueba una secuencia didáctica para la introducción de este concepto.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos generales: el diseño y análisis a priori de la secuencia, su implementación y, por último, el análisis de los resultados y su valoración, esencialmente cualitativa. Por razones de espacio a continuación presentamos sólo algunos aspectos de cada etapa.

Diseño de la secuencia

Desde sus orígenes el cálculo se caracterizó por un componente fundamentalmente visual e intuitivo en interacción constante con problemas geométricos y físicos. El análisis de fenómenos variacionales es lo que llevó al estudio de la derivada y al desarrollo del cálculo.

Ser la matemática de la variación y el cambio lo convierte en la rama que permite modelar, explicar, predecir y cuantificar el movimiento. Sin embargo, en el sistema educativo actual el cálculo ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos.

Los estudios realizados nos llevaron a considerar que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión de la derivada. Tomamos esto como hipótesis básica para la elaboración de la secuencia. La idea es, siguiendo a Dolores (2007a, p. 198):

> *...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.*

Tuvimos en cuenta además las ideas de Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996) con respecto a la necesidad de partir de las concepciones previas de los alumnos acerca de la velocidad, utilizando las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas.

La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a una curva en un punto constituye otro aspecto fundamental en la construcción del concepto de derivada. Sin embargo, su presentación como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, resulta de gran dificultad didáctica (Dolores, 2007b).

A partir de esto, las actividades fueron diseñadas de manera que permitan organizar la enseñanza en torno a situaciones inmersas en contextos variacionales, donde exista la necesidad de estudiar cambios entre magnitudes en fenómenos presentados en diversas representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal), y que exijan además el uso de las rectas secante y tangente para caracterizar dichos cambios.

Implementación de la secuencia. Presentación y valoración de resultados

La secuencia se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral en el año 2008. Para su desarrollo se dedicaron siete horas reloj distribuidas en cuatro clases. La primera parte de cada clase se dedicó a repasar lo desarrollado en la anterior. Teniendo en cuenta la importancia de la interacción en la construcción de los conceptos, los alumnos resolvieron las actividades en grupos de a dos. El profesor apoyó a los equipos, atendiendo las preguntas pero intentando que ellos mismos encontraran las respuestas. En la última parte de cada clase se hizo una discusión grupal, revisando las distintas actividades y aprovechándolas para formalizar los conceptos.

A continuación enunciamos cuatro de las actividades propuestas y un breve estudio de las producciones de veintitrés equipos, resaltando las principales dificultades detectadas. Tuvimos en cuenta, en relación a los contenidos, los aspectos variacionales presentes en cada situación. En cuanto al análisis de la comprensión, observamos el grado de coordinación de las distintas representaciones, la posibilidad de realizar transformaciones en un mismo sistema y la manera en la que logran transitar de un registro a otro.

Las actividades que siguen corresponden a la primera clase. En ésta se llegó a discutir el concepto de velocidad instantánea y se planteó la necesidad de determinarla en el caso de un movimiento no uniforme. Se trabajó la idea de que el cálculo de la velocidad promedio cuando la amplitud del intervalo tiende a cero es una aproximación de la velocidad instantánea. Es importante aclarar que los alumnos ya habían desarrollado el tema “Límite”.

Actividad. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t2 - t1$ y $s(t2) - s(t1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla?

¿Cuál es la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto? ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

En esta actividad se observó confusión al leer la tabla. En las columnas correspondientes a Δt y Δs los alumnos sabían que se refería a variación pero confundían las variables.

Al pedirles la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, sólo cinco equipos (22%) respondieron correctamente. Esto nos muestra cómo, a pesar de que los alumnos utilizan algunas nociones relacionadas con la pendiente (la identifican con el coeficiente del término lineal de la ley y la asocian con la inclinación de la recta), no manejan los aspectos variacionales que les permitirían hacer una correlación entre la razón de cambio media en situaciones de cambio constante con la pendiente de la recta correspondiente.

Con respecto a la velocidad del móvil a los dos segundos, algo más del 50% (doce equipos) respondió correctamente. Sin embargo, notamos que habiendo manifestado que la velocidad es constante, casi todos recurrieron a la fórmula espacio sobre tiempo para calcularla, de lo que deducimos que no interpretan correctamente la noción de velocidad instantánea o qué implica en el movimiento que los cambios se mantengan constantes.

En relación a los registros, no se observaron grandes dificultades para convertir del registro algebraico al numérico, pero sí al gráfico. La gran mayoría no fue capaz de interpretar las medidas de los cambios en la representación gráfica.

Actividad. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por s(t) = –2t2 + 8t + 2 metros, donde el tiempo t se mide en segundos.

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s=s(t_2)-s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$
$0 \leq t \leq 1$		
$1 \leq t \leq 2$		
$2 \leq t \leq 3$		
$3 \leq t \leq 4$		

Represente gráficamente la función y complete la tabla.

¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

Esta actividad es similar a la anterior pero en este caso la función corresponde a un movimiento variado. Se agrega la dificultad de cambios de posición negativos.

Al completar en la tabla la columna correspondiente a las velocidades medias, los alumnos se preguntaban el porqué de los signos negativos. Varios lograron relacionarlos con la dirección de la trayectoria. Sin embargo, al determinar la velocidad a los tres segundos, ningún grupo dio como respuesta un valor negativo.

Para calcular su valor, casi todos los equipos recurrieron a la fórmula espacio sobre tiempo, considerando el espacio recorrido hasta los tres segundos o la posición en dicho instante. Un solo grupo demostró haber comprendido la situación. Escribió: "*la velocidad a los tres segundos no la podemos calcular por regla de tres porque no es constante*".

A la pregunta sobre el comportamiento de la velocidad en todo el trayecto, ocho equipos (35%) dieron respuestas aceptables, limitándose a expresar que cambia o no se mantiene constante. Los demás intentaron dar más detalles y cometieron errores, mostrando que asocian velocidad con rapidez y confunden velocidad con posición.

Observamos que las dificultades no se relacionaron en general con el trabajo en un registro u otro, sino con la interpretación de las distintas cuestiones planteadas.

Actividad. Para estudiar el movimiento de una partícula, un investigador la ha iluminado mediante un flash que lanza destellos instantáneos a intervalos de 0,1 segundo. Tomando medidas sobre

una fotografía, ha registrado los espacios recorridos por la partícula en los instantes que se muestran en la tabla.

Instante t (en segundos)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4
Espacio e recorrido hasta el instante t	12	12,37	12,68	12,93	13,13	13,28	13,5	16

a) El investigador intentó determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando t1 = 2 y t2 = 2. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior.

Intervalo [2,t]	[2;2,1]	[2;2,2]					
Espacio recorrido en el intervalo [2,t]							
Velocidad media en el intervalo [2,t]							

Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

Esta actividad, con la que se busca que los alumnos descubran la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante a partir de la fórmula de velocidad media y reflexionen sobre la amplitud de los intervalos, no fue respondida por diez equipos (43,5%). Se presentaron muchas dificultades pero las ideas que se buscaba generar surgieron en varios equipos.

Con respecto al inciso a) los resultados fueron positivos ya que, la mayoría escribió alguna conclusión que consideramos correcta (no se puede calcular, no existe, es error).

Al completar la tabla del segundo inciso varios grupos manifestaron "esto tiene una idea de límite". Siete equipos (es decir un 30 % del total) eligieron correctamente la mejor aproximación, explicando que es la calculada en el intervalo más corto de tiempo.

Los resultados fueron retomados en el debate grupal para trabajar nuevos conceptos: en los fenómenos que cambian a cada instante, la velocidad en determinado intervalo no alcanza para determinar el comportamiento preciso de los cambios. Los alumnos reflexionaron sobre el hecho de que la velocidad instantánea no es lo misma que la media y por lo tanto no se puede calcular de la misma manera. El planteo en el registro numérico facilitó el cálculo de los espacios recorridos y las velocidades medias.

Actividad. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t3$.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \le t \le t_1$	$1{,}9 \le t \le 2$	$1{,}99 \le t \le 2$	$1{,}999 \le t \le 2$	$\ldots\rightarrow$		$\leftarrow \ldots$	$2 \le t \le 2{,}001$	$2 \le t \le 2{,}01$
Δt				$\ldots \rightarrow$		$\leftarrow\ldots$		
Δs				$\ldots \rightarrow$		$\leftarrow \ldots$		
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$				$\ldots \rightarrow$		$\leftarrow \ldots$		

b) Según el acercamiento realizado**,** ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en $t = 2$? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

c) Obtenga la velocidad media $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo $[2, 2+\Delta t]$. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

e) Calcule $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

Esta actividad se presentó a los alumnos en la última clase e integra todos los contenidos desarrollados. Anteriormente los alumnos trabajaron con problemas que los llevaron a relacionar el concepto de razón de cambio media con la pendiente de la recta secante y la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente a una curva.

En los primeros incisos se retoma, numéricamente, la idea de que con cambios cada vez más pequeños para la variable independiente, la aproximación es cada vez más exacta, pretendiendo además que descubran la necesidad del paso al límite.

A partir de la tabla, aproximadamente la mitad de los grupos lograron conjeturar sobre la velocidad de la partícula en el instante y el comportamiento en caso de que los intervalos sean infinitamente pequeños. Las mayores dificultades se presentaron en los últimos tres incisos, con el trabajo algebraico y la interpretación física y geométrica de los resultados.

Al finalizar el docente retomó en el pizarrón todo lo trabajado y, a partir de las conclusiones presentó la definición de derivada de una función en un punto.

Reflexiones

La secuencia desarrollada dio oportunidad a los alumnos de trabajar distintos aspectos variacionales del concepto de derivada. Se intentó en todo momento obtener la máxima información posible de cada una de las situaciones representadas, de manera de favorecer el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

Se corroboró la importancia de la coordinación de diversos registros de representación en la comprensión observando cómo ciertos registros favorecen más que otros determinados aspectos. Los resultados fueron mejores al trabajar en el registro numérico, presentando mayores dificultades en el gráfico y en el algebraico.

La modalidad de trabajo motivó a los alumnos a la búsqueda de sus propias estrategias de solución, promoviendo un aprendizaje más activo y el trabajo cooperativo. La interacción con sus pares llevó a la discusión de distintas soluciones, produciendo explicaciones que dieron lugar a procesos de argumentación y demostración.

Según lo observado en el desarrollo de las clases y en los trabajos posteriores (parciales y evaluaciones finales) la resolución de las actividades les permitió desarrollar una idea correcta de la noción de derivada a un número considerable de alumnos.

Todos estos factores y los resultados alcanzados nos llevan a considerar la propuesta como positiva tanto para los alumnos como para nosotras. La observación del trabajo en clase y el análisis de los trabajos escritos nos permiten profundizar en sus pensamientos lo que resulta fundamental en el intento de producir cambios positivos en la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 2-25), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. (2003). Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático*. (pp. 205-218). México: Trillas.

Dolores, C. (2007a). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp.169-204), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007b). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS EVALUATIVAS EN CURSOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR

Claudia Yahaira Balam Güemez, Martha Imelda Jarero Kumul
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
balamg_claudia@hotmail.com, jarerok@uady.mx
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Superior

Resumen. *Debido a los altos índices de reprobados reportados en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, la investigación desarrollada versó en identificar las concepciones de la evaluación en profesores de dicha institución que imparten la asignatura de Álgebra Superior 1, así como caracterizar los instrumentos, procedimientos y criterios de evaluación que están presentes en el aula. La metodología de investigación que se utilizó fue la etnografía, recurriendo a la observación no participante. Como resultado presentamos que los profesores manifiestan tener una tendencia investigativa pero aún no cuentan con la actualización suficiente para extrapolar dicha concepción al aula, lo cual se evidenció en el escenario escolar ya que éstos privilegian la práctica de evaluación sumativa que corresponde a la tendencia tradicional coincidente con la percepción de los estudiantes.*
Palabras claves: Tendencia didáctica, álgebra superior, evaluación, concepciones de los profesores y estudiantes

Introducción y planteamiento del problema

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación: "La práctica de evaluación en cursos de matemáticas. Explorando su relación con los índices de reprobación", que se desarrolla al interior de la Facultad de Matemáticas (FMAT) de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), México. Y tiene la intención de contribuir a ofrecer argumentos sostenibles referentes a la evaluación, desde la perspectiva del docente de nivel superior en dicha institución.

Como lo reporta Aparicio (2006), en la FMAT-UADY cerca de los últimos 20 años se han presentado problemas de permanencia y eficiencia terminal, particularmente en las licenciaturas de matemáticas y ciencias de la computación. Sin duda, este hecho se ha visto influenciado por el elevado incremento en sus índices de rezago y deserción escolar. Tal incremento se ha asentado mayormente en los primeros semestres de estudio y de manera muy particular, en las áreas de álgebra y cálculo. Por ejemplo, en los cursos de Álgebra Superior I (ASI) el índice de reprobación en el año 2007 fue de 63%; dato calculado por la propia institución. En esta asignatura se aplican tres parciales y en particular en la "Unidad 2. Relaciones y funciones", es donde se ha reportado la mayor reprobación. Por ello, nos planteamos la necesidad de analizar las prácticas de evaluación y consideramos que nuestros hallazgos permitirán generar conocimiento sobre el aspecto de la

evaluación, al tiempo que se estarán sentando las bases para el desarrollo de acciones en pro de esta situación.

De tal forma que asumimos como objetivos específicos el identificar las concepciones acerca de la evaluación en profesores de la FMAT que imparte el curso de ASI, así como caracterizar los instrumentos, procedimientos y criterios de evaluación que están presentes en el aula.

Marco de referencia

Por muchos años, en el sistema educativo se ha privilegiado el uso de las pruebas escritas, como instrumentos para detectar el nivel de aprendizaje de los estudiantes. En la última década, se pretende incorporar otros instrumentos y procedimientos para evaluar el aprendizaje. Con la finalidad de mirar en el aula, cuáles son las prácticas e instrumentos evaluativos que se encuentran en este contexto, consideramos entre los referentes teóricos la propuesta de Contreras (1998), quien propone una caracterización de la práctica docente a partir de la metodología, el sentido de la asignatura, la concepción del aprendizaje, el papel que le otorga al alumno, el papel del profesor y la evaluación, clasificándolas en cuatro tendencias didácticas: tradicionalista, tecnológica, espontaneísta e investigativa. Específicamente nos interesó el aspecto referido a la evaluación donde se considera el carácter otorgado a la evaluación, el criterio y los instrumentos empleados. En las Tablas 1 y 2 se relacionan los aspectos antes mencionados según se interpreta en cada una de las tendencias didácticas.

	TENDENCIA DIDÁCTICA			
	TRADICIONAL	**TECNOLÓGICA**	**ESPONTANEÍSTA**	**INVESTIGATIVA**
INTENCIÓN	Sumativa (producto final)	Sumativa (proceso en función del producto)	Formativa (proceso)	Formativa-sumativa (proceso y producto)
CARÁCTER	Cuantitativa	Cuantitativa	Cualitativa	Cualitativa-cuantitativa
CRITERIOS	No explicita criterios. Subjetiva	Criterios explícitos. Taxonómica	Criterios variables y consensuados. Indefinida	Criterios explícitos negociables. Holística
	Rígidos	Rígidos	Negociables	Reformulables

	Memoria	Operatividad de los objetivos	Grado de implicación	Grado de implicación y significados
	Aplicación mecánica	Interpretación mecánica	Aplicación significativa	Aplicación significativa y relevante
	No diferenciación individual	No diferenciación individual	Diferenciación individual no organizada	Diferenciación individual organizada

Tabla 1. Intención, carácter y criterios de la evaluación

	T E N D E N C I A D I D Á C T I C A			
	TRADICIONAL	**TECNOLÓGICA**	**ESPONTANEÍSTA**	**INVESTIGATIVA**
La recuperación	Repetición global, aislada del desarrollo normal	Repetición puntual, aislada del desarrollo normal	Cada actividad recupera la motivación	Personalizada, compleja e inserta en el desarrollo normal
Papel del examen	Su preparación fija aprendizajes	Su preparación fija aprendizajes	Distorsiona el marco de relaciones y acciones	Actividad creativa del alumno; durante su ejecución se aprende
Tipo de diagnóstico inicial	Con base en los contenidos impartidos con anterioridad o la propia experiencia	Identificación inicial de errores para eliminación inmediata antes del proceso	Sobre el campo de intereses del alumno	Que informa la elaboración y ejecución del proceso
Tipo de calificación	Mediante controles del producto	Mediante controles de los objetivos	Mediante revisión de tareas del alumno y de su participación	Por conjunción de varios instrumentos

Tabla 2. Instrumentos de evaluación

Díaz-Barriga y Hernández (2002) clasifican a los instrumentos según el tiempo de preparación que demanden, pudiendo ser formales, informales y semiformales, los primeros se refieren a las pruebas o exámenes; los segundos a las observaciones de las actividades y la exploración de las

pregunta; y en los últimos se ubican los trabajos y ejercicios en clase y fuera de clase. Por otro lado, los mismos instrumentos también pueden ser clasificados según su intención como diagnóstica, formativa y sumativa. La evaluación diagnóstica se realiza con la intención de obtener información sobre la situación de partida de los sujetos, en cuanto a saberes y capacidades que se consideran necesarios para iniciar con éxito nuevos procesos de aprendizaje. La evaluación formativa, tiene como finalidad regular el proceso de enseñanza aprendizaje para adaptar o ajustar las condiciones pedagógicas. La evaluación sumativa, tiene como fin principal verificar el grado en que las intenciones educativas han sido alcanzadas.

La evaluación formativa se puede dar de forma interactiva, retroactiva y proactiva, en específico nos enfocamos en la primera, por ser ésta la que considera a la autorregulación por parte de los estudiantes y la interacción de pares, quiénes dan lugar a la evaluación formadora, que fue de interés en esta investigación, debido a que los estudiantes van a evaluar sus propias producciones y las de sus compañeros, dándole relevancia a la coevaluación, evaluación mutua y autoevaluación. Haciendo uso de este tipo de evaluación, los estudiantes dejarán de ver al profesor como el único agente evaluador.

Dentro de nuestras consideraciones también incluimos a Falsetti y Rodríguez (2005), quienes diseñaron un instrumento que permite identificar la percepción del alumno acerca de las interacciones reconociendo aquellas que le ayudan en su aprendizaje.

Metodología

Nuestra investigación queda enmarcada en el paradigma cualitativo-descriptivo, en particular hicimos uso de la etnografía como metodología de investigación. De acuerdo al objetivo plateado, nuestro escenario de estudio fue el aula donde se impartió la asignatura de Álgebra Superior 1 en la FMAT-UADY.

Los participantes fueron el profesor titular de la asignatura, el cual tiene una formación de Licenciado en Matemáticas y ha impartido por 12 años ASI en sus 18 años de servicio; 36 estudiantes de las licenciatarias de matemáticas y actuaria, (11 mujeres, 25 hombres), sus edades se encuentran entre 17 y 19 años y 5 profesores que impartían la asignatura en el período en el que fue desarrollada la investigación.

Se realizó la observación no participante durante las 19 sesiones que duró la Unidad 2. Nos apoyamos en las notas de campo para evidenciar lo que ocurría durante el desarrollo de las clases. Para puntualizar algunas situaciones que consideramos importantes diseñamos encuestas para los profesores y los estudiantes y se entrevistó al profesor titular.

El objetivo de la encuesta aplicada a los profesores que impartieron el curso de ASI, fue rescatar las concepciones que éstos tienen respecto a la evaluación. Para ello se diseñó el instrumento utilizando los indicadores que propone Contreras (1998), donde se trata de rescatar las concepciones sobre qué es la evaluación, el tipo de resultados que se pueden obtener a partir de ella (cualitativos, cuantitativos o una mezcla), si los criterios son rígidos y conocidos por los estudiantes, qué se pretende con la evaluación, qué tanto pueden variar los contenidos de aprendizaje establecidos inicialmente, cómo está organizada la información acerca de los estudiantes, en qué momento y qué acciones se proponen cuando se toma conciencia de que no se han producido los aprendizajes deseables en los tópicos o unidades desarrolladas, cómo es interpretado el examen, si considera alguna forma de diagnóstico inicial y qué utiliza para valorar el progreso de los alumnos. Según las respuestas dadas se asociará a cada profesor con alguna de las siguientes tendencias didácticas: tradicionalista (TR), espontaneísta (E), tecnológica (TE) o investigativa (I).

La encuesta aplicada a los estudiantes estaba conformada por dos partes. El objetivo de la primera parte, consistió en recabar información acerca de cómo perciben los estudiantes las interacciones o recursos didácticos y si éstos favorecen su aprendizaje. En la segunda parte, se pretendía que el estudiante jerarquizara qué actividad de las que se les plateaba le era más útil, y determinar en qué medida las actividades realizadas por él o por el profesor ayudaron al logro de sus aprendizajes.

En la entrevista realizada al profesor titular, se puntualizó información relacionada con la prueba, el error, el trabajo en equipo, la intención del pre-examen, los objetivos de las tareas y la revisión de ellas, el papel que le otorga al error, los criterios de calificación, por mencionar algunos.

Resultados

Cada una de las respuestas que los profesores dieron a la encuesta, se asocia a alguna tendencia didáctica y se considera que el profesor manifiesta una tendencia didáctica particular en función de la mayor frecuencia que se reporta en la encuesta total. En la Tabla 3 se reportan las respuestas que dieron los cinco profesores y se puede observar que la tendencia didáctica que predomina es la investigativa.

Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tendencia
Prof A	I	I	I	I	TE	I	E	I	TE	TE	Investigativa
Prof B	E	I	I	E	I	E	I	TR-TE	TE	E	Investigativa y Espontaneísta
Prof C	I	I	I	I	E	I	E	I	I	I	Investigativa
Prof D	I	I	I	I	I	I	TE	I	TE	I	Investigativa
Prof E	I	I	I	I	TE	I	E	TR- TE	TE	I	Investigativa

Tabla 3. Encuesta aplicada a profesores

Mediante la observación no participante, detectamos que el profesor titular utiliza diferentes técnicas e instrumentos de evaluación en el aula, aunque las intenciones de cada una, refieren una evaluación sumativa más que formativa (Tabla 4).

Técnicas	Instrumentos	Intenciones
Informal	Interrogatorio	Asignar puntos
Semiformal	Tareas	Parte calificación
Formal	Examen	Parte calificación

Tabla 4. Técnicas, instrumentos e intenciones de la evaluación

La información anterior evidencia que el profesor utiliza todas las técnicas que se plantean en la literatura, pero la intención con la que las utiliza es sumativa. Por ejemplo, situémonos en la clase donde se hace el repaso del tema "Relaciones de equivalencia".

> *Después de haberse realizado el recordatorio (como se solía hacer todos los días), el profesor propuso un ejercicio en el cuál los estudiantes emplearían las definiciones. Tal ejercicio fue similar a los abordados en la clase anterior.*
>
> $R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a = b\}, R \subset \mathbb{R}x\mathbb{R}$
>
> *Para dar solución al ejercicio, el profesor solicitó la participación de un estudiante, quien no podía resolverlo por lo que el profesor y el resto del grupo fueron indicándole cual era la manera de proceder y cuando faltaba por probar una relación, el profesor pidió al estudiante que demostrará la relación que faltaba sin ayuda de sus compañeros y de hacerlo le daría puntos, de lo contrario le quitaría puntos. El estudiante no demostró la propiedad que faltaba.*

De este extracto se determina que el profesor hace uso de una técnica semiformal (aplicación de un ejercicio), aunque se apoya en la técnica informal al irles preguntando a los estudiantes por definiciones y conceptos que los ayuden a solucionar el ejercicio planteado. Pero la intención de la evaluación es sumativa, ya que está presente lo cuantitativo (la asignación de puntos).

Por medio de las encuestas aplicadas a los estudiantes, manifiestan que prefieren actuar de forma pasivo-receptivo, ya que consideran mejor la explicación del profesor que leer un libro como ayuda para comprender mejor un tema. Esta acción es frecuente en clases de corte tradicionalista, donde se favorece la interacción profesor-alumnos. Por otro lado, los estudiantes no consideran que la explicación por parte de un compañero ayude para aprender un tema, esta preferencia refuerza la idea de no considerar la evaluación mutua en su estrategia de aprendizaje, ya que sólo consideran válido el conocimiento presentado por el profesor.

Para complementar algunas ideas en el trabajo, se entrevistó al profesor cuyas clases se observaron y entre las respuestas dadas manifiesta una intención sumativa de la evaluación, pues expresa el total interés por determinar la calificación que obtendrá el estudiante, por medio de exámenes, tareas o participación; como puede analizarse en el siguiente extracto de la entrevista:

> *…me rijo por los criterios establecidos… debe de quedar claro cuánto valen los exámenes, cuánto las tareas…..pero también puedo hacer uso de la libertad de cátedra y poner puntos a los estudiantes entusiastas…*
>
> *,,, las participaciones en clases, las considero como puntos sobre sus parciales en el sentido de que eso los motiva a estudiar más y a participar más, según me he dado cuenta…*

Conclusiones

De las encuesta se concluye que los profesores de ASI manifiestan tener la tendencia didáctica investigativa, de donde debemos interpretar que los profesores entienden la evaluación como proceso y producto con intención formativa-sumativa y con carácter cualitativa-cuantitativa, entre otros aspectos, sin embargo las observaciones y las intenciones de los diferentes instrumentos de evaluación aplicados, nos dieron evidencia de que a pesar de manifestar esa tendencia, el actuar en el aula de clases no resalta las características de ésta.

Pocos estudiantes realizan conscientemente una autoevaluación de su aprendizaje, no asumen como válida la evaluación mutua y el único que puede evaluar es el profesor. Los estudiantes son pasivos-receptivos, ellos soslayan su participación en el proceso evaluativo ya que están inmersos en una tendencia tradicionalista implementada por el profesor.

Aunque la evaluación educativa es bastante compleja y ha sufrido evolución en su interpretación, hoy en día, se espera sea entendida en el sentido amplio y no limitado a la idea del sinónimo de calificar, esto es, que no se evalúe únicamente el aprendizaje, sino además, debe considerarse la evaluación de la práctica misma.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. En G. Martínez Sierra (Ed.); *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 450-455. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Contreras, L. (1998). *Marco Teórico sobre concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.* Recuperado en Diciembre de 2008 de http://www.uhu.es/luis.contreras/tesistexto/cap2.htm

Díaz-Barriga, F.; Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* (2° edición). México. Mc-Graw Hill.

Falsetti, M., Rodríguez, M. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemáticas preuniversitarias: ¿Qué perciben los alumnos? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8(2),* 319-338.

PROPUESTA METODOLÓGICA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS

Liliana Milevicich, Ulises Arraya
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar; liliana_milevicich@yahoo.com.ar; profe_ulises@yahoo.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico

Resumen. *Varios autores coinciden en que la Geometría ha sido dejada de lado en la enseñanza de la matemática en los niveles inicial y medio. Si bien ésta aparece en los currículos actuales, casi no se enseña en las aulas. Nos encontramos habitualmente con docentes que, en los niveles de escolaridad inicial y medio, tienen dificultades en encontrar situaciones que sean de interés para los alumnos, así como ejemplos sencillos sobre los usos de la geometría en la vida cotidiana. En el mismo sentido, no son concientes de las habilidades que la geometría desarrolla por su naturaleza intuitiva-espacial y lógica, con lo cual se le brinda escaso espacio en los contenidos curriculares y mínima importancia en la organización de los programas. El presente trabajo analiza la implementación de una propuesta didáctica que prevé la conceptualización y descubrimiento de las propiedades de los cuadriláteros, a partir de la experimentación, mediante actividades guiadas apoyadas por la utilización de un CAS (Cabri II plus) y los avances logrados por los alumnos durante y al cierre de la misma.*
Palabras claves: Razonamiento geométrico, visualización, abstracción, generalización

Introducción

La geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Como disciplina, se apoya en un proceso extenso de formalización, el cual se ha venido desarrollando por más de 2000 años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad. Si bien muchos autores la han caracterizado ampliamente, sus aspectos más relevantes, a nuestro juicio, se pueden resumir del siguiente modo, en concordancia con el estudio ICMI "Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI" realizado en el año 1995 en Pisa (ICMI, 2001):

- Es una herramienta fundamental para describir, medir figuras y representar los conceptos.
- Es la disciplina donde mejor se realizan los razonamientos deductivos.
- Constituye un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas de la Matemática y de otras ciencias; por ejemplo gráficas y diagramas.
- Constituye una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovativas. Por ejemplo: gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

- Se puede distinguir entre una geometría que enfatiza las propiedades "estáticas" de los objetos geométricos y una geometría dinámica donde los objetos cambian respecto a los diferentes tipos de transformaciones en el espacio.
- Ha formado una teoría de ideas y métodos mediante las cuales es posible construir y estudiar modelos idealizados del mundo real.

Creemos que la enseñanza de la geometría no es de ninguna manera una tarea fácil. En lugar de tratar de enfrentar y superar los obstáculos que emergen en su enseñanza, las prácticas escolares actuales, en muchos países, simplemente la omiten (ICMI, 2001). Varios autores coinciden en que la Geometría ha sido dejada de lado en la enseñanza de la matemática en los niveles inicial y medio. Si bien ésta aparece en los currículos actuales, casi no se enseña en las aulas. (Guzmán, 1993; Abraira, 1995).

Justificación

Con el propósito de brindar una explicación sobre el abandono en la enseñanza de la geometría, cabe diferenciar dos etapas. Una primera que comprende el período 1960-1980, aproximadamente, dónde se introdujeron nuevos tópicos en la enseñanza de la Matemática (probabilidad, estadística, ciencias computacionales, matemáticas discretas). Se redujo la cantidad de horas dedicadas a estudiar Matemática. Este período se caracterizó por el auge de las Matemáticas Modernas, la introducción de la Teoría de conjuntos, la enseñanza de la lógica y de las estructuras abstractas.

En los veinte años posteriores (1980-2000), se produjo un retorno hacia contenidos tradicionales en matemáticas, con un énfasis específico sobre actividades de planteamiento y solución de problemas.

Allí, los intentos de restablecer la geometría euclidiana clásica no tuvieron el éxito esperado. Varios autores se han cuestionado las causas, entre las que sobresalen con mayor fuerza, que los contenidos tradicionales no están en consonancia con los tiempos actuales, y la forma tradicional de presentar los contenidos es poco atractiva (Abraira, 1995; Villella, 2001; Itzcovich, 2005). Una primera y lógica consecuencia, fácilmente detectable para quienes trabajamos en la formación de

docentes, es que los profesores más jóvenes han aprendido Matemática bajo una currícula que ha descuidado la Geometría.

Creemos que a partir de ellos nos encontramos habitualmente con docentes que, en los niveles de escolaridad inicial y medio, tienen dificultades en encontrar situaciones que sean de interés para los alumnos, así como ejemplos sencillos sobre los usos de la geometría en la vida cotidiana. En el mismo sentido, no son concientes de las habilidades que la geometría desarrolla por su naturaleza intuitiva-espacial y lógica, con lo cual se le brinda escaso espacio en los contenidos curriculares y mínima importancia en la organización de los programas. Creemos que, esto último esté, probablemente, asociado a la inseguridad que poseen los docentes en el dominio de conceptos y procedimientos de esta rama de la Matemática.

Coincidimos con Villella y Steiman en que la falta de interés y motivación en los alumnos es consecuencia de esta situación. (Villella y Steiman, 2004; Villella, 2006)

Marco teórico

Se adoptó el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Dina y Pierre Van Hiele, el cual propone cinco etapas en el desarrollo del pensamiento geométrico: *reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor*. En la etapa de *reconocimiento*, los alumnos usan propiedades imprecisas de las figuras para poder compensarlas, ordenarlas, describirlas o identificarlas; perciben las figuras geométricas en su totalidad, como unidades globales (pueden describir físicamente lo que ven); identifican o describen las figuras apelando a atributos irrelevantes desde el punto estrictamente matemático por ejemplo, color, tamaño, aprenden vocabulario geométrico; identifican formas determinadas y pueden reproducirlas. En la etapa de *análisis* los alumnos descubren que las figuras están formadas por partes y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes de las figuras y enunciar las propiedades de manera informal, utilizando vocabulario apropiado; pueden clasificar las propiedades en necesarias y suficientes en el momento de usarlas para definir, pueden comparan figuras empleando explícitamente las propiedades, así como deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

La tercera etapa está deferida a la *clasificación*, en la cual los alumnos comienzan a desarrollar la capacidad de razonamiento matemático, las propiedades pueden deducirse unas de otras aunque todavía no comprenden el significado de la deducción como un todo, ni el papel que en ella juegan los axiomas. En esta etapa se comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración; las demostraciones explicadas por el docente o el libro son seguidas sin dificultad, pero no se logra su organización por parte del alumno. Se usan las representaciones gráficas de las figuras como una forma de verificación de las deducciones más que como un medio para realizarlas.

En la cuarta etapa de *deducción formal*, los alumnos pueden comprender razonamientos lógicos formales, realizar conjeturas e intentan verificarlas deductivamente. Además pueden construir demostraciones y se atreven a realizarlas de distintas maneras, comprenden las interacciones entre las condiciones necesarias y suficientes y distinguen entre una implicación y su recíproca; aceptan definiciones equivalentes del mismo concepto; comprenden la estructura axiomática de la matemática.

En la etapa del *rigor* los alumnos son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar la actividad matemática, aceptan la existencia de sistemas axiomáticos y pueden analizarlos y compararlos (Villella, 2001).

Desarrollo

Objetivos:

- Explorar las preconcepciones de los alumnos involucrados en la experiencia sobre conceptos geométricos básicos.
- Implementar una propuesta didáctica que prevea la conceptualización y descubrimiento de las propiedades de los cuadriláteros, a partir de la experimentación, mediante actividades guiadas apoyadas por la utilización de un CAS (Cabri II plus).
- Analizar los avances logrados por los alumnos durante la implementación de la propuesta y al cierre de la misma.

La *población* estuvo formada por alumnos de 14-15 años de edad, de ambos sexos, que cursan sus estudios en el nivel de Escolaridad Secundaria Básica (ESB), en escuelas privadas de la provincia de Buenos Aires. La *muestra* se conformó con dos comisiones de 30 alumnos cada una, aproximadamente, que cursan noveno año en un colegio ubicado en el Partido de Tigre.

En el marco de una *metodología* de investigación acción, se inició la experiencia con un estudio de carácter descriptivo, con el propósito de conocer las características de ambos grupos. El pretest permitió indagar acerca de los conceptos geométricos básicos y emparejar los grupos. Luego la segunda etapa, de tipo explicativo, pretendió dar respuesta a la pregunta sobre si los alumnos comprenden los conceptos referidos a la unidad Cuadriláteros a partir de la aplicación de una propuesta de enseñanza con las características mencionadas en los objetivos, en uno de los grupos, mientras el otro recibió una enseñanza tradicional.

Paradigma: Socio crítico

Alcances de la investigación: descriptivo, explicativo

Diseño: cuasiexperimental con dos grupos: E-O

Descripción de la experiencia

A partir de los resultados del pretest (ver tabla 1) se desarrollaron durante dos semanas las actividades de nivelación. En cada comisión (curso experimental y curso de control) los alumnos trabajaron en pequeños grupos sobre una guía de problemas. Se hizo hincapié en aquellos conceptos, a nuestro juicio, críticos: por haber logrado un valor porcentual mínimo del 30 % en la categoría C, en la competencia respectiva; y por ser un prerrequerido para el desarrollo de la unidad de cuadriláteros. Tal es el caso de reconocimiento de segmentos, identificación y dibujo de la mediatriz de un segmento, reconocimiento de las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal, etc.

Los resultados del pretest nos permitió ubicar a los alumnos, ambiguamente, entre las etapas de análisis y clasificación, de acuerdo con el modelo de van Hiele, y sobre esta base se planificó el desarrollo de la unidad cuadriláteros de tal modo que los alumnos del grupo experimental pudieran trabajar a partir del concepto de cuadrilátero, diferenciaran entre cóncavo y convexo,

para luego comenzar con la conceptualización del cuadrilátero convexo que posee un par de lados opuestos paralelos: el trapecio, así como la deducción de las propiedades referidas al mismo. La figura 1 esquematiza la secuencia seguida hasta converger en el cuadrado.

Cabe observar la importancia de remarcar para cada nuevo cuadrilátero, cuáles son las propiedades heredadas y cuáles las correspondientes a la nueva figura. A modo de ejemplo, al presentar el paralelogramo, dado que se trata de un trapecio que tiene el segundo par de lados opuestos paralelos, éste hereda las propiedades del anterior, esto es: la base media es la semisuma de las bases; pero también hereda las propiedades de un cuadrilátero convexo: la suma de los ángulos interiores es 360º.

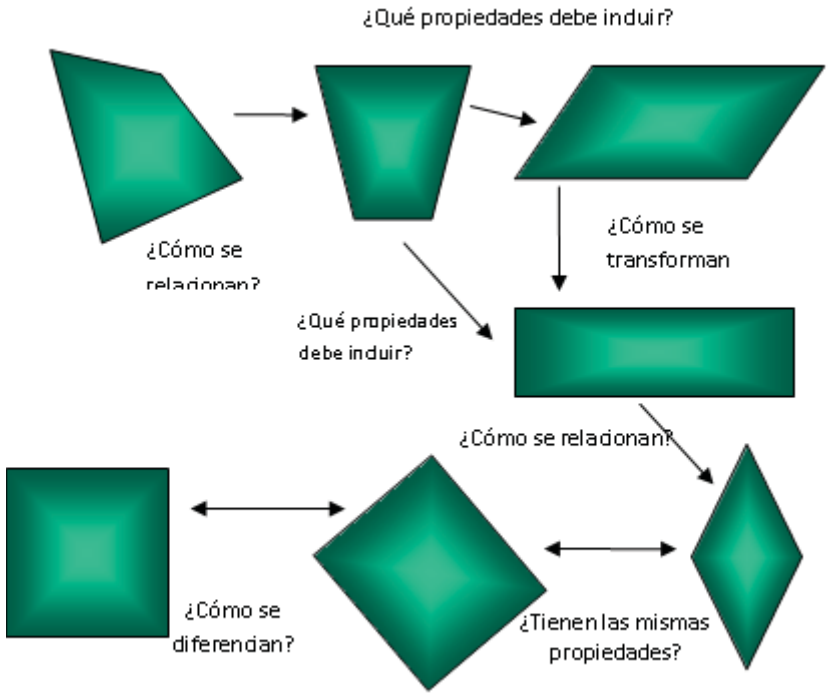


Figura 1

El desarrollo de la experiencia incluyó un importante conjunto de actividades de tal modo que los alumnos tuvieran que experimentar, fundamentalmente construir con el auxilio del CAS, para luego plasmar las conclusiones. A modo de ejemplo se presentan dos actividades que formaron parte de la experiencia.

Actividad 1

Construir, si es posible, el cuadrilátero que se indica. En caso de no ser posible, especificar e incorporar (como dato) un elemento adicional para poder hacerlo.

Datos:

Un par de lados consecutivos y el ángulo comprendido entre ellos

construir:

a) *un trapecio b) un trapecio isósceles c)un trapecio rectángulo d)un paralelogramo*

Actividad 2 (Para desarrollar con CAS)

Construir el rombo ABCD de tal modo que moviendo el vértice A obtengas otros rombos de lados de igual longitud, pero de distintas diagonales.

a) *¿Cómo es el ángulo que forman las diagonales? ¿permanece constante cuando se mueve el vértice A?*

b) *¿En qué se transforma el rombo cuando el ángulo ABC tiende a un recto? ¿Qué sucede en ese momento con las diagonales?*

(Se proporciona una figura de análisis que incluye, como datos, las diagonales del rombo y un ángulo interior agudo)

Resultados

La tabla 1 exhibe los valores porcentuales correspondientes al pretest en ambos cursos. Los resultados fueron categorizados en A: posee la competencia, B: posee la competencia con dificultades en la resolución, C: no posee la competencia.

Competencias evaluadas	Curso experimental			Curso control		
	A	B	C	A	B	C
Reconoce segmentos	41,0	15,4	38,5	38,2	20,6	41,2
Identifica la mediatriz de un segmento	17,9	5,1	71,8	11,8	11,8	76,5
Dibuja la mediatriz de un segmento	48,7	0,0	46,2	44,1	2,9	52,9

Reconoce rectas paralelas	82,1	2,6	10,3	85,3	0,0	14,7
Reconoce rectas oblicuas	35,9	46,2	12,8	47,1	32,4	20,6
Dibuja la bisectriz de un ángulo	71,8	10,3	12,8	70,6	11,8	17,6
Reconoce las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal	84,6	0,0	10,3	64,7	0,0	35,3
Aplica las propiedades de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal	10,3	5,1	79,5	5,9	26,5	67,6
Construye triángulos	2,6	7,7	84,6	2,9	8,8	88,2
Clasifica triángulos según sus lados y ángulos	38,5	5,1	48,7	58,8	17,6	23,5
Reconoce las propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo	17,9	28,2	46,2	26,5	52,9	20,6
Calcula los ángulos interiores y exteriores de un triángulo	2,6	2,6	87,2	8,8	55,9	35,3
Traza las bisectrices de un triángulo	5,1	2,6	84,6	11,8	11,8	76,5
Traza las mediatrices de un triángulo	35,9	0,0	56,4	50,0	2,9	47,1
Traza las medianas de un triángulo	25,6	0,0	66,7	20,6	0,0	79,4
Halla el baricentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Halla el circuncentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Halla el incentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	2,9	0,0	97,1
Halla el ortocentro de un triángulo	0,0	0,0	92,3	8,8	0,0	91,2
Identifica la propiedad pitagórica en un triángulo rectángulo	0,0	0,0	92,3	2,9	0,0	97,1
Calcula los lados de un triángulo rectángulo utilizando la propiedad pitagórica	0,0	0,0	91,8	0,0	0,0	100,0
Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo	0,0	0,0	91,8	0,0	0,0	100,0

Tabla 1

La evaluación de los alumnos tuvo dos instancias, durante el desarrollo de las actividades y al cierre de la experiencia. Por una parte se evaluó el trabajo desarrollado por cada grupo y, por la otra, un examen de carácter individual dónde los alumnos podían hacer uso del mismo software

que habían utilizado durante el aprendizaje de la unidad. Los resultados cuantitativos, con idéntica categorización que el pretest, se resumen en la tabla 2.

Competencias evaluadas	Curso experimental			Curso control		
	A	B	C	A	B	C
Reconoce los diferentes cuadriláteros convexos	88,0	12,0	0,0	85,0	10,0	5,0
Identifica las propiedades de los diferentes cuadriláteros convexos	76,0	12,5	11,5	56,4	14,5	29,1
Identifica las propiedades heredadas de cada cuadrilátero	96,0	4,0	0,0	88,0	12,0	0,0
Construye cuadriláteros a partir de sus propiedades	65,5	22,0	12.5	43,5	26,5	30
Aplica las propiedades de los cuadriláteros a la resolución de problemas	45,5	26,0	28,5	36,0	28,0	36,0
Obtiene conclusiones a partir de la experimentación	76,0	24,0	0,0	25,0	26,0	49,0
Propone nuevas construcciones	32,0			10,0		

Tabla 2

Conclusiones

Desde el enfoque cuantitativo, analizando los datos de la tabla 2, se observan mejores resultados obtenidos por el grupo experimental. Cabe señalar que el ambiente de trabajo, dadas las características de cada experiencia, fue diferente. La primera comisión trabajó fundamentalmente en grupo, lo cual contribuyó en la resolución de las actividades propuestas. También, cabe observar, que el CAS utilizado (Cabri II Plus) contribuyó en la obtención de conclusiones. Su utilización facilita el trabajo de experimentación.

Aspectos claves y retos para el futuro

Consideramos que es necesario enfatizar el trabajo con los centros de formación docente, así como, acercar la investigación en Matemática Educativa, de modo que puedan trabajar docentes e investigadores de manera colaborativa y puedan dar respuesta a preguntas tales como:

- Si los libros de texto tradicionales son tan apropiados como quisiéramos que fueran para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría,
- Qué cambios pueden y deben ser hechos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con el propósito de incrementar el acceso a software, videos, materiales concretos y otros elementos tecnológicos,
- Cuáles son las ventajas que se desprenden del uso de tales herramientas, desde un punto de vista educativo,
- Cuáles problemas y limitaciones pueden surgir del uso de tales herramientas y cómo podrían ser superados.

Referencias bibliográficas

Abraira Fernández, C. (1995). Reflexiones sobre la formación de matemática de los futuros maestros. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado* 24, 143-160

Guzmán, M (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Extraído el 02/05/08 de: http://www.oei.es/edumat.htm

ICMI (2001), Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. *Documento de discusión para un estudio ICMI.* PMME-UNISON.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Villella, J. (2001) *Uno, dos, tres…Geometría otra vez: de la intuición al conocimiento formal en la enseñanza primaria.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Villella, J. , Steiman, J (2004): *Patio, parque y pizarrón. Estrategias para enseñar geometría a chicos de 9 a 14 años.* Montevideo: Espartaco.

Villella, J. (2006) *Ideas para enseñar a través de problemas*. Montevideo: Espartaco-UNSAM.

MODELACION MATEMATICA EN UN CURSO INTRODUCTORIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ángel Balderas Puga
Universidad Autónoma de Querétaro México
balderas@uaq.mx
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Superior

Resumen. *Se describe el uso intensivo de software CAS en el contexto de un curso introductorio de ecuaciones diferenciales. Se detallan aspectos de cambios en el curriculum y en la metodología de uso del software: estrategias de caja-negra al inicio con el fin de enfatizar aspectos centrales de la modelación matemática y de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Se discute sobre la profundidad de análisis de modelos clásicos, la introducción de nuevos problemas, el uso de software para evitar la inversión de grandes cantidades de tiempo en detalles técnicos o en cálculos largos, el diseño y rediseño de materiales y el uso combinado de diferente software.*
Palabras clave: Modelación matemática, ecuaciones diferenciales, tecnología informática

Modelación matemática e informática

Según Colwell (2000), hasta hace poco la ciencia tenía dos componentes, la teoría y la experimentación, pero ahora tiene un tercer componente, la simulación computacional, que relaciona a los otros dos. La Tecnología Informática (TI) no sólo es adecuada para tareas de modelación matemática, al permitir el procesamiento de una gran cantidad de datos, la visualización de resultados y la colaboración con otras personas, sino que, de acuerdo a Bricio (1992), su uso ha introducido un cambio dramático en el esquema clásico de modelación como se puede observar en la siguiente figura. Del modelo matemático se pasa a un modelo computacional que incluye tareas y problemáticas relativas a algoritmos, programación, simulación, etc. Es así como se trabaja en la ciencia y en la ingeniería desde hace unas dos décadas, afirmación de Bricio (1992) luego de consultar a un buen número de ingenieros y matemáticos aplicados, tanto en México como en el extranjero.

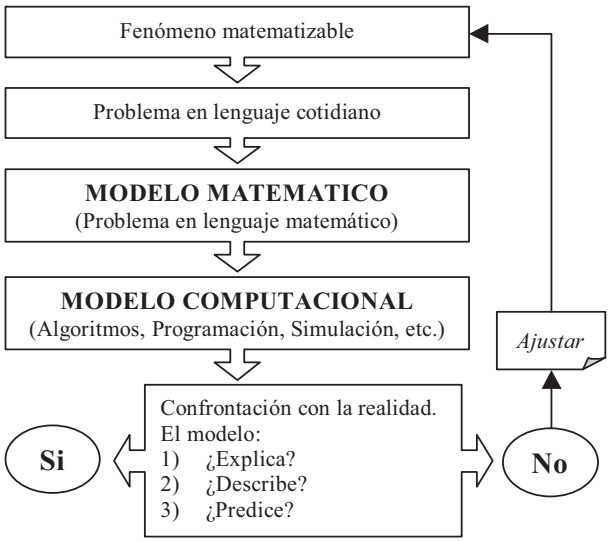


Figura 1: El esquema contemporáneo de la modelación matemática

Estos cambios plantean la necesidad de llevar a las aulas esta forma de trabajo, lo que implica la generación en docentes y alumnos de competencias informáticas adecuadas para reproducir de la mejor manera posible la forma en la que se trabaja en la ciencia hoy en día.

Modelación matemática y ecuaciones diferenciales

El primer problema central de la teoría de las ecuaciones diferenciales (ED) se refiere a su origen y es aquí donde esa teoría se liga a la problemática de la modelación de fenómenos. Después de la construcción del modelo matemático (una ecuación diferencial ordinaria, una ecuación diferencial parcial o un sistema de ED) se resuelve la ecuación o el sistema resultante. Pero ahí no termina el proceso, se debe analizar e interpretar la solución con respecto al fenómeno estudiado y tomar decisiones: ¿el modelo es adecuado o no dentro de la exactitud requerida? Si la respuesta es positiva, el problema está resuelto, si la respuesta es negativa se debe ajustar el modelo y repetir el proceso con el nuevo modelo obtenido.

La implementación del modelo es una tarea que sale ya de las matemáticas y cae en el área del conocimiento que estudia de manera específica el fenómeno modelado.

En Petrovski (1956) se plantea un esquema general de los problemas de la teoría de las ED en una época en la que aún no había una difusión masiva de la TI por lo que se trata de problemáticas

intrínsecas a la teoría. Aunque no se presenta de manera explícita un apartado especial acerca de la modelación, es recurrente la referencia a problemas ligados a ella, ilustrando prácticamente todos los problemas que aparecen en cada una de las etapas del proceso de modelación.

La enseñanza de cualquier rama de las matemáticas debería reflejar una visión global de la teoría que se está estudiando, con las limitaciones naturales de la edad y nivel de los estudiantes. En particular, la enseñanza de las ED debería reflejar puntualmente todas y cada una de las problemáticas centrales de la teoría, pero, pareciera, que en la mayoría de los casos no es así.

Modelación matemática con ecuaciones diferenciales y TI

Gracias a la TI, ahora es posible ilustrar en el aula problemáticas centrales de la modelación matemática con ED. En la última década, ha comenzado a cambiar el panorama de los libros de texto de ED, al incorporar muchos de ellos el uso de TI.

La filosofía que se halla detrás de estas propuestas puede encontrarse en libros como los de Malek-Madani (1998), Coombes, Hunt, Lipsman, Osborn y Stuck (1995), Gray, Mezzino y Pinsky (1997) o Blanchard, Devaney y Hall (1998). Libros como estos se basan en el uso de software tipo CAS (Computer Algebra Systems) como Mathematica o Maple o software de tipo NCS (Numerical Computation Systems) como Matlab o Phaser. Como señalan Coombes et al. (p. iii) «Los cursos introductorios tradicionales de EDO (ED ordinarias) se han concentrado en enseñar un repertorio de técnicas para hallar una fórmula solución de varias clases de ED. Típicamente, el resultado ha sido la aplicación mecánica tanto de fórmulas como de técnicas por parte de los estudiantes sin una comprensión cualitativa seria de aspectos fundamentales de la materia tales como estabilidad, comportamiento asintótico, dependencia de los parámetros y métodos numéricos».

Este es el mismo tipo de crítica que se halla en los otros libros señalados y en artículos en donde se reportan experiencias de uso de TI en cursos de ED, como por ejemplo en Evans (1995) trabajando con el software CAS, Derive o en Shay (1997) usando calculadoras.

Enseñanza y aprendizaje de la modelación con ecuaciones diferenciales y TI

El uso de TI en los cursos de ED permite ofrecer a los alumnos una visión más completa y epistemológica de los problemas de la modelación matemática con ED.

Es posible aumentar el espacio destinado a la modelación. ¿Cómo concebir un curso de ED sin ligarlo a la modelación de procesos físicos? En el caso extremo, se trataría de un curso en el que exclusivamente se enseñaría a resolver ED sin mencionar ni su proveniencia ni la utilidad de haber obtenido la solución. En un curso de este tipo los alumnos estarían imposibilitados de poder dar una interpretación física de la solución, se quedarían con una imagen equivocada de la teoría: una serie de métodos para obtener soluciones de ecuaciones que no tienen ninguna relación con el mundo real.

Es posible discutir algunos ejemplos con el proceso completo de modelación (salvo la implementación del modelo). A pesar de que el proceso de construcción es muy difícil, es posible presentar siempre algunos modelos interesantes así como enseñar a los alumnos a construir modelos sencillos. En muchas ocasiones en los cursos tradicionales nunca se presenta el proceso completo. En el mejor de los casos, se enseña a plantear las ED relativas a algunos modelos sencillos y se obtiene la solución pero no se hace un análisis detallado de la solución, ni se interpreta, mucho menos se valida con respecto al fenómeno que se quería "estudiar". Es muy difícil apreciar la utilidad de la teoría cuando todos sus problemas terminan una vez que se obtuvo la solución de la ED.

Es posible, en muchos casos, analizar e interpretar la solución. En los cursos tradicionales, por lo general, los problemas terminan cuando se obtiene la solución exacta. Una vez obtenida, se pasa al siguiente ejercicio, se obtiene la solución, luego otro ejercicio, etc. En el mejor de los casos se pide la gráfica de una solución particular y eso sólo en el caso que dicha gráfica no sea demasiado compleja. Petrovski señala que *el estudiar las soluciones es el problema básico* de la teoría, por lo que *no* se trata de un problema menor. No es posible "haber visto aplicaciones" sin haber estudiado el comportamiento de las soluciones.

Es posible, en muchos casos, validar el modelo (es decir, confrontar los datos que ofrece con datos reales). Incluso en caso de no haber construido un modelo, siempre es posible presentar el contexto en el que surge, comparar la solución obtenida con el fenómeno al que hace referencia, simular, analizar los parámetros, etc. En los cursos tradicionales en los que no se estudian las soluciones es imposible llevar a cabo este proceso de validación.

Es posible discutir el ajuste de varios modelos. Esta parte importante del proceso de modelación puede ser ilustrarse con algunos ejemplos, y discutirse con otros. En los cursos tradicionales esta

parte se halla limitada pues la nueva función o las nuevas funciones obtenidas son mucho más complejas de ser analizadas, estudiadas e interpretadas, por lo que en la mayoría de los casos, el maestro renuncia a ilustrar esta parte del proceso.

Es posible hacer predicciones. Una vez que se ha resuelto una ED o un sistema de ED, *debería* usarse dicha solución para hacer algunas predicciones. Esta parte es central para ilustrar el problema de la relatividad del modelo. Mejor si las predicciones se hacen con datos reales y plausibles lo que permite evidenciar o negar la pertinencia de la predicción. En los cursos tradicionales, parte de este proceso se halla en algunos ejemplos pero pareciera que no se le da la importancia adecuada. En algunos casos, el profesor inventa datos *no plausibles* para ciertos parámetros (por ejemplo, en el caso de circuitos eléctricos).

El esquema descrito anteriormente ha sido aplicado por el autor en cursos de ED en los últimos diez años en el Instituto Tecnológico de Querétaro (México) con estudiantes de diferentes ramas de la ingeniería (mecánica, industrial, sistemas computacionales, electrónica, eléctrica, y materiales). La edad promedio de los estudiantes es de 19 años.

El software base utilizado es *Derive* dadas sus características. Es tipo CAS, lo que permite llevar a cabo tareas algebraicas, numéricas y geométricas, es fácilmente accesible, fácil de usar, versátil, buena portabilidad, bajo costo, amplia difusión, escasos requerimientos técnicos y amplías experiencias de su uso a nivel mundial.

En el caso de la modelación también se usa el simulador *Phaser* e incluso el software de visualización *Autograph*. Aquí cabe señalar que la tecnología “papel y lápiz” tiene fuerte limitaciones con respecto a la simulación (baja interactividad, lenta retroalimentación, restricciones operacionales, etc.) y que como se señala en Levy (1997) entre las nuevas modalidades cognitivas abiertas por la cibercultura, la simulación ocupa un lugar central.

Por lo general, el curso introductorio es el único que muchos alumnos seguirán por lo que la visión que tendrán de la teoría será consecuencia sólo de este único curso.

En vez de la secuencia estándar de los cursos tradicionales: técnicas de solución de ED de primer orden y luego aplicaciones; técnicas de solución de ED lineales de segundo orden y

luego aplicaciones; transformada de Laplace y luego aplicaciones, etc., se toma como *eje conductor* del curso a la modelación. Desde el inicio del curso se introduce la problemática completa del proceso de modelación. Se introducen ejemplos con un contexto amplio, se construyen los modelos discutiendo ampliamente hipótesis y elementos involucrados.

Una vez que se tiene la ED se usa el software con una estrategia de caja-negra para hallar la solución sin importar el orden o tipo de ecuación (las técnicas algebraicas de solución simplemente se *posponen* no es que se cancelen del curso).

La solución se analiza y se estudia de manera crítica con software, se simula con ella, se analiza su pertinencia con respecto al fenómeno modelado, en su caso se ajusta el modelo. Por ejemplo, en el caso de poblaciones se pasa del modelo maltusiano al logístico y de éste a modelos de competencia entre especies, al modelo de Gompertz o a otros modelos. En el caso de vibraciones mecánicas se pasa de movimientos armónicos a movimientos libres con fricción y de éstos a movimientos forzados y todo desde el inicio con el fin de que el alumno experimente y viva etapas centrales de la modelación.

Esta estrategia permite poner énfasis en cuestiones centrales de la modelación. Al delegar a una máquina la solución de una ED, obtenemos rápidamente la función solución y podemos hacer un análisis detallado de ella de tal manera que cuando el alumno estudie los métodos de solución tenga ya una idea clara de su utilidad y sus limitaciones.

En los cursos tradicionales esto no es posible ya que, clásicamente, se estudian primero los métodos de solución de ED de primer orden lo que introduce una limitación *artificial* en el proceso de modelación pues se presentan sólo modelos que conducen a ED de este tipo.

La capacitación del alumno en el uso del software se da de manera integrada y no artificial. Es decir, el software se introduce en el momento en que se requiere, con una *estrategia recursiva*: se usa el conocimiento matemático del alumno para capacitarlo en el uso del software, luego se usan sus competencias en el uso del software para generar

conocimiento matemático de más alto nivel, luego se usa este conocimiento para generar más competencias en el uso del software, etc.

A continuación se describe brevemente un ejemplo del esquema propuesto. Se hace hincapié que los alumnos aún no estudian ninguna técnica algebraica de solución.

Ejemplo: modelación de sistemas masa-resorte

Como se sabe, la teoría de las ED nació íntimamente ligada a problemas de la Física. Durante más de 300 años, estos campos del conocimiento han mantenido una estrecha relación: las ED son básicas como lenguaje para enunciar leyes físicas y para modelar problemas. En este contexto, en los cursos tradicionales se presentan los sistemas masa-resorte como una aplicación de las ED de segundo orden por lo que este tipo de problemas *deben* presentarse después de estudiar métodos algebraicos de solución para ecuaciones de primer y segundo orden, típicamente se abordan ecuaciones de la forma

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

y más raramente ecuaciones del tipo

$$mx'' + bx' + kx = f(t)$$

este último caso requiere el estudio previo de métodos de solución de ED de segundo orden con coeficientes constantes no homogéneas. Sin embargo, con el uso de software CAS no hay diferencia en la forma en la que se obtiene la solución, la que una vez obtenida se usa para profundizar en el análisis de la situación física, validar el modelo y ajustarlo.

Se parte de la forma tradicional, con un movimiento armónico simple, se ajusta el modelo a un movimiento con fricción, se analizan las distintas posibilidades de este tipo de movimientos y se vuelve a ajustar el modelo para considerar fuerzas externas periódicas.

De esta manera, desde muy temprano en el curso pueden discutirse fenómenos tan importantes como las pulsaciones y la resonancia (véase la figura 2).

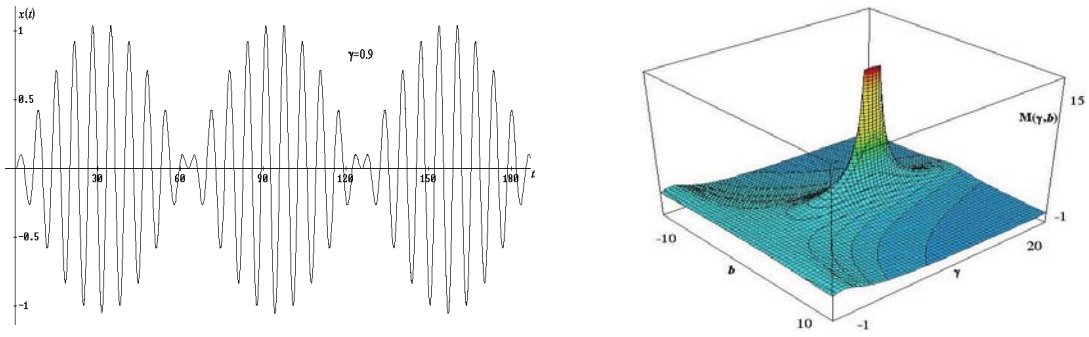


Figura 2: Pulsación y visión tridimensional de la resonancia

Opiniones de los estudiantes

Al final del curso, después de haber entregado calificaciones, se pide a los alumnos una opinión global sobre el mismo con preguntas abiertas, del tipo: ¿cuál es tu opinión sobre contenido y metodología del curso? Estas preguntas tienen como objetivo explorar el territorio de las opiniones de los estudiantes de manera informal. Es interesante observar que sus respuestas reflejan situaciones de las que hablan también profesores e investigadores y muestran una reflexión personal de los estudiantes acerca de sus propias acciones. Estos comentarios sirven también para el rediseño de estrategias de integración de TI. Aquí se presenta sólo una muy breve selección de opiniones que hablan por sí mismas de los aspectos antes discutidos (se respetó la redacción original, los cursivos son nuestros);

”Vi mucha aplicación en la vida real, *siempre nos han enseñado las matemáticas sin ninguna aplicación*. Los contenidos realmente los pudimos aplicar en cosas reales, aplicar software hizo que se utilizaran *problemas más complejos*, pero más apegados a la realidad.” [Rocío]; “Fue muy interesante conocer el significado de las matemáticas, para que sirven y como se emplean. *Yo era de las personas que decían que las matemáticas no sirven de nada* y en verdad fueron muy interesantes las aplicaciones que tienen las matemáticas en la vida.” [Julio César]; “Con el uso de software creo que nos ayudó a aumentar nuestra capacidad en la comprensión de los conceptos y de sus aplicaciones” [Damaris].

Reflexiones finales

Esta forma de trabajo da mayor libertad al docente pues como señalan Coombes et al. (1995) muchas de las ideas de las ED son difíciles de enseñar si no se usa TI. Priorizar la *parte conceptual de la modelación* enfrenta dos obstáculos: para tener la solución hay que resolver la ED con un método previamente estudiado y para analizar la solución se requieren sofisticados instrumentos de análisis geométrico.

Como se ha señalado en varias ocasiones, el uso de software ayuda a desarrollar en los alumnos buenas habilidades en la modelación sin tener que introducir enormes cálculos, puede enriquecerse la solución (Oldknow, 1997) e investigar modelos más complejos de los usuales (Mitic y Thomas, 1994). Como resalta Böhm (1994) los libros de textos presentan sólo modelos sencillos estándar debido al gran número de cálculos que deben hacerse. «La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar tanto lo que los estudiantes deben aprender de matemáticas como la forma en la que deben hacerlo» (NCTM, 2000, p.25). Ahora es posible presentar en clase ejemplos más ricos e interesantes o más ligados a las aplicaciones para ilustrar conceptos y técnicas, lo que enriquece también tareas y exámenes y como se muestra en Balderas (2002) el esquema propuesto aquí puede extrapolarse a cursos de Cálculo, incluso a nivel medio superior.

Finalmente, la TI permite un mejor acercamiento histórico-genético conceptual- tanto a la modelación matemática como a la teoría de las ED, discutir con los alumnos el proceso de modelación matemática de una manera más completa e introducir a los estudiantes al trabajo con metodologías contemporáneas que les serán útiles en el futuro.

Referencias bibliográficas

Balderas, A. (2002). Uso di Derive nella modellizzazione matematica: un'alternativa per l'analisi delle popolazioni. *La matematica e la sua didattica* 1, 96-115.

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G.R. (1998). *Differential Equations*. Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Co.

Böhm J. (1994). Linear programming with DERIVE. *The International DERIVE Journal* 3, 46-72.

Bricio D. (1992). Ideas sobre el futuro de la Matemática Aplicada. *Reunión Nacional de Matemáticas*, Coahuila, México, 65-89.

Colwell R. (2000). Information technology Ariadne's thread through the research and education labyrinth. *EDUCAUSE review*, May/June 2000, 15-18.

Coombes, K.R., Hunt, B.R., Lipsman, R.L., Osborn, J.E. y Stuck, G.J. (1995). *Differential Equations with Mathematica*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Evans B. (1995). Differential equations in a computer classroom. *The International DERIVE Journal* 3, 37-54.

Gray A., Mezzino M. y Pinsky M.A. (1997). *Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica*. New York: Springer-Verlag.

Levy P. (1997). *Cyberculture. Rapport au Conseil de l'Europe*. Paris: Éditions Odile Jacob.

Malek-Madani R. (1998). *Advanced engineering mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley.

Mitic P. y Thomas P. (1994). Modelling the Effects of a Firebreak with Derive. *The International DERIVE Journal* 2, 71-87.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oldknow A. (1997). Modelling a Garden Sprinkler. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 3, 253-271.

Petrovski I.G. (1956). Ecuaciones diferenciales ordinarias. En Aleksandrov A.D., Kolmogorov A.N. y Laurentiev M.A. (Eds), *Mathematics: Its content, methods and meaning*. Cambridge: MIT Press.

Shay K. (1997). The TI-92: An Excellent Companion for Differential Equations Reform. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 1, 99-109.

EJEMPLOS PARA UNA PRÁCTICA EDUCATIVA INNOVADORA: EL CASO DE LA INTEGRACIÓN DE CONTENIDOS Y ACTIVIDADES

Malva Alberto, Marta Castellaro, María Julia Blas
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
mtoso@frsf.utn.edu.ar, mcastell@frsf.utn.edu.ar, mariajuliablas@gmail.com
Campo de investigación: Matemática y Uso de Tecnologías Nivel: Superior

Resumen. *Intentando mejorar nuestra práctica para que a priori se traduzca en mejores desempeños académicos de los estudiantes de primer año universitarios, identificamos como eje de este trabajo la socialización de experiencias llevadas a cabo por docentes y alumnos de cátedras de ciencias y tecnologías básicas, que interactuando en forma horizontal y vertical diseñaron e implementaron secuencias didácticas integradas, colaborativas y necesarias para favorecer la comprensión, articulación y transferencia de contenidos y actividades de las cátedras Matemática Discreta y Algoritmos y Estructuras de Datos. Las secuencias se organizaron en procesos espiralados y cada vez más complejos, seleccionando conceptos y procedimientos, contenidos y trabajos prácticos, que posibilitaron el desarrollo de un software para resolver, constatar y validar soluciones a problemas planteados desde las cátedras. Se hicieron aportes significativos para mejorar el intento educativo, fortaleciéndose además actitudes de colaboración y cooperación entre los involucrados.*
Palabras clave: Contenidos, actividades, matemática, tecnologías, software

Justificación

Hemos registrado en nuestros alumnos de primer año universitario escaso rendimiento cuando tratan de recodificar y aplicar un concepto o procedimiento para resolver nuevos problemas; encontramos debilidades relacionadas con el uso de variables tanto discretas como continuas, con la comprensión, la comunicación y la justificación de argumentos; percibimos insuficiencia de micro habilidades tales como: la búsqueda y selección bibliográfica y la lectura crítica; la redacción de párrafos o argumentos y la expresión oral; notamos escaso uso educativo de los recursos tecnológicos que suelen estar disponibles en centros comunitarios, laboratorios, domicilios particulares o bibliotecas (Roldán, Rogiano, Alberto y Banchik, 2008).

Estas dificultades nos llevan a reafirmar que una de las funciones de la educación es la de promover la capacidad de los alumnos para gestionar sus propios aprendizajes, para adoptar una autonomía creciente en su carrera académica y disponer de herramientas intelectuales, tecnológicas y sociales que les permitan un aprendizaje continuo a lo largo de toda la vida.

Esta función es en la práctica un reto permanente, pero presenta interrupciones, grietas y muchas brechas cuando nos referimos a alumnos que transitan su primer año de estudios universitarios en

las carreras de ingeniería. En este momento se conjugan varias cuestiones: deben adaptarse a nuevos ámbitos y ritmos, a nuevas personas y personajes; deben remontar dificultades y carencias previas; deben cursar asignaturas de las ciencias básicas, complementarias, o introductorias a las tecnologías básicas y aplicadas de la carrera, que pueden, a veces, no ser motivadoras para el estudiante que se inicia y por sobre todas estas dificultades deben además, consolidar la elección de la carrera.

Intentamos innovar en nuestra práctica para que a priori produzca mejores desempeños académicos (Perkins, 1997) de los estudiantes. Para ello diseñamos e implementamos una secuencia didáctica (Litwin, 1997) integrando contenidos y actividades de varias cátedras. Docentes y alumnos de ciencias y tecnologías básicas, interactuamos en distintos momentos para poner en escena actividades integradas y colaborativas. Esta interacción se realizó durante dos ciclos lectivos y tuvo distintos momentos y actores: estudiantes de un mismo semestre; estudiantes de distintos semestres, docentes y alumnos que compartían una cátedra y docentes y alumnos de cátedras cursadas en distintos semestres.

Las secuencias didácticas se diseñaron mediante un proceso en espiral y cada vez más complejo, articulando conceptos y procedimientos, actividades y recursos. Involucraron la real y efectiva participación de alumnos, posibilitando tanto la apropiación del conocimiento como el fortalecimiento de actitudes de colaboración y cooperación con los docentes y entre pares. Coincidimos con Huberman (1992) cuando decimos que en estos diseños no existe intención de aseverar con absoluta certeza la mejora del proceso; tampoco es nuestra intención presentar las situaciones de enseñanza y aprendizaje vividas dentro o fuera del aula como propuestas acabadas e inmodificables; la secuencia didáctica que compartiremos puede trasladarse y enriquecerse involucrando otras cátedras y otros actores.

Los docentes y alumnos involucrados en la secuencia programada corresponden a las asignaturas Matemática Discreta (MAD), y Algoritmos y Estructuras de Datos (AED) del primer año de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional. La secuencia se inició en el año 2008. Las actividades se expandieron, proyectaron y retroalimentaron con el ingreso 2009 y siguieron involucrando a algunos de los alumnos de ingreso 2008 en su segundo nivel.

Antecedentes

A pesar de los esfuerzos bien intencionados de los actores (docentes, alumnos), creemos que en el aula se presentan escenarios aún poco favorables para poder generar secuencias didácticas con aportes significativos tanto para el aprendizaje continuo, como para encontrar otras formas alternativas para aprender. Somos conscientes que existe una estrecha relación entre las estrategias de enseñanza que utiliza el docente y la forma que utilizan los estudiantes para aprender y desempeñarse; sabemos además que existe una distancia entre lo que el docente cree que enseña y lo que interpreta el estudiante como significante para fortalecer su desempeño. Este relato es un espacio para el cambio y para reflexionar sobre la propia práctica educativa (Arnal, Rincón y Latorre, 1992).

Planificamos la secuencia para dos períodos lectivos consecutivos y se inicia cada año con un nuevo grupo de alumnos ingresantes.

Entre las premisas atendidas para el diseño de la secuencia didáctica se cuentan las siguientes:

- Los temas a desarrollar en MAD que implican cálculos, pruebas y procedimientos algorítmicos no están medianamente estandarizados. Es decir, la currícula no contiene expresamente pautados los contenidos que los alumnos 'deben' experimentar, medir, constatar durante las actividades prácticas de MAD.
- En las Ciencias y Tecnologías Básicas (MAD y AED) hay aspectos que requieren experimentar, medir y analizar y buenas prácticas que enseñar.
- El trabajo conjunto entre docentes y alumnos y entre alumnos es esencial para favorecer el descubrimiento y enriquecer el análisis.
- El cuerpo docente estimulará y guiará estas actividades. Esto puede incluir que se adopten estrategias de enseñanza diferentes a las usadas tradicionalmente (Brown y Coles, 2002).
- Existen actividades incluidas en textos y manuales como 'actividades a realizar', con sus consignas y secuencias de procedimientos, que son, prácticamente reproductoras.
- Los alumnos en general disponen en forma particular de recursos (calculadora, computadora, un software de soporte y datos) e insumos necesarios como para avanzar

en productos y resultados requeridos por el avance de la secuencia, por lo que no se torna como 'exigencia' tener que asistir a un laboratorio como espacio físico concreto.

- Los procedimientos a seguir se pueden describir de manera simple mediando un lenguaje informático básico, y los alumnos, poseedores de instructivos de ejecución pueden desarrollarlo en cualquier momento.
- No todo lo que se realiza mediante una computadora puede considerarse una actividad que contribuya al logro de mejores desempeños académicos y sociales.

Particularmente, consideramos que:

- Hay temas que corresponden a los contenidos de MAD, cursada en el primer semestre del primer nivel, que si bien pueden estudiarse y favorecer su comprensión y aplicación con ejercicios realizados sobre papel y con seguimiento manual, la posibilidad de contar con alguna herramienta (informática) de apoyo, estimula y facilita dichas actividades y constituye un medio de constatar resultados o analizar otras soluciones. Tal el caso de los problemas relacionados con 'Estructuras algebraicas Finitas' y 'Teoría de Grafos', por citar sólo dos.
- Si bien se pueden encontrar herramientas de este tipo (y hasta acceder a ellas en forma libre o en línea), cuando se trata de asignaturas de primer año, hay algunos inconvenientes, relacionados entre otros a: la terminología y notación empleadas en otros contextos; el alcances de los temas en estudio (herramientas potentes de las cuales los alumnos están en condiciones de aplicar solo un par de funciones); o aspectos relativos a instalación y acceso a la herramienta.
- El aprendizaje de construcción de programas (algoritmos, estructuras de datos simples, un lenguaje de programación) se logra realmente cuando los alumnos 'desempeñan roles lo más similares posibles a las situaciones profesionales'; en particular, cuando la realización de los trabajos prácticos de laboratorio propios de la cátedra AED tiene metas concretas sobre aspectos conocidos, con requerimientos precisos y si es posible, con conocimiento del perfil de los destinatarios (alumnos de MAD).

Así es que surgió este proyecto de articulación e integración cuidadosamente planificado entre diferentes cátedras (MAD y AED), con un alcance inicial de dos años, a fin de poder evaluar la experiencia y analizar su extensión.

Descripción de la secuencia

Una secuencia didáctica se refiere a la organización de materiales, tiempos, recursos y actividades del currículum que devienen progresivamente complejas a medida que los estudiantes avanzan (Litwin, 1997; Politino y Silva, 2005). La intervención docente centra su accionar en una forma alternativa para la selección, organización e integración de contenidos de asignaturas de las Ciencias y Tecnologías Básicas y se basa en diseñar e implementar las actividades de comprensión y solución de problemas con carácter transdisciplinar. El equipo docente se inserta inicialmente desde un rol de mediador y facilitador, como un puente entre las disciplinas involucradas, las prácticas y el propio alumno. Todos están entrelazados en una propuesta que potencia los procesos de comprensión, experimentación, análisis, construcción y reconstrucción del conocimiento. Inicialmente, la tarea del docente fue de selección de actividades y materiales, generación de los procedimientos que guíen las acciones de los alumnos, y continuó con actividades de intervención e interacción en los momentos de laboratorio y fuera de ellos, propiciando siempre el acercamiento y las consultas.

La estructura de la secuencia didáctica se dividió en cuatro fases, abarcando dos ciclos lectivos.

La primera fase es el inicio de la secuencia y corresponde al primer semestre del primer año de implementación de la secuencia. La caracterizamos de esta manera:

- Los alumnos ingresantes a primer año cursan MAD y en paralelo un Taller de Programación (con sentido nivelador para AED) durante el primer semestre. En el Taller de Programación construyen herramientas simples (aplicaciones sencillas en Python) que dan soporte a temas que estudian en paralelo en MAD, y las emplean para realizar experiencias, mediciones y observaciones (por ejemplo, soluciones con condiciones a ecuaciones diofánticas, manejo de puntos y de rectas, usando como apoyo el texto y la ejercitación propuestos en MAD).

La segunda fase corresponde al segundo semestre de primer año de implantación de la secuencia. La describimos así:

- Los alumnos de AED, que cursan el segundo semestre del primer nivel, construyen herramientas que dan soporte a temas que se desarrollaron durante el primer semestre en MAD. Ellos deben revisar y resignificar los contenidos de MAD para generar un instrumento en AED que sirva a sus pares (alumnos del año próximo) para comprender y afianzar el aprendizaje de ciertos temas de MAD. Al analizar las soluciones que van alcanzado, experimentan con programación y con los temas ya estudiados en MAD. Si bien en AED, es importante 'construir programas', el aprendizaje se consolida con actividades del tipo: analizar una solución ya dada, encontrar un error o defecto de una solución no eficaz, modificar una solución bajo alguna consigna que implique una experiencia concreta, completar o ampliar una solución. Se guía a los alumnos sobre buenas prácticas, no sólo de los recursos básicos de programación, sino en otros aspectos como la interacción del usuario con la aplicación, los formatos de presentación, la documentación que acompaña, el manual instructivo, etc. Las soluciones que van logrando en cada trabajo se van integrando, con lo que se refuerzan cuestiones como legibilidad del programa, flexibilidad, modularidad. El docente acompaña, selecciona y publica la herramienta que más se adecua a los objetivos de la experiencia.

  Los alumnos debieron revisar y reconstruir aprendizajes iniciados en el primer semestre, acudiendo también al soporte de los docentes de ambas cátedras, cada uno aportando algo al proceso. Pusieron en juego las estructuras de datos objeto de la materia y los elementos de programación, realimentando lo dado en clase. Lograron una aplicación concreta, para unos usuarios concretos (es decir, un software para que los alumnos ingresantes de los próximos años puedan resolver problemas más complejos) y eso constituyó un factor de motivación. Nuevamente se promovió el trabajo en equipo, la comunicación, la constatación de resultados y el análisis de alternativas, buenas prácticas de documentación y análisis de defectos sobre resultados logrados. Seguían en progreso, el ejercicio en valores y competencias, para el logro de mejores desempeños (Perkins, 1997).

Se inicia la tercera fase: para los alumnos de ingreso 2008, este momento corresponde a su tercer semestre y es el segundo año de implementación de la secuencia; para los alumnos de ingreso 2009, se corresponde con la proyección de la primera fase de la secuencia.

- Se invitó a los alumnos que ya están transitando el tercer semestre a seguir realizando aportes a la herramienta, dando soluciones más completas y creativas y mejorando la comunicación y ajuste de funcionalidades; en esta fase la cátedra MAD cuenta con una versión preliminar de un software, al que se lo identifica como 'MATDIS', en su versión 1.0; el software está disponible para los primeros usuarios, los ingresantes de Matemática Discreta. Los alumnos que ingresaron a la tercera fase (ingresantes 2008) socializaron sus producciones presentando la herramienta en distintas reuniones. Merecen mencionarse los talleres extracurriculares realizados con sus pares y la presentación en dos congresos.

Para esta fase, pero ya en el segundo año de la experiencia, los alumnos de MAD, que son los nuevos ingresantes 2009, emplean las herramientas (software MATDIS) desarrolladas por sus pares en el semestre anterior, en talleres mediante actividades preparadas para el laboratorio; ellos pueden no sólo constatar resultados de resoluciones manuales, sino también abordar soluciones de problemas con mayor extensión, más complejos o con mayores datos (por ejemplo, abordar problemas de grupos finitos de hasta 20 elementos y dígrafos y árboles de hasta 12 nodos), que serían muy difíciles de resolver en forma manual, aburridos o tediosos, comprendiendo que los recursos computacionales hacen aportes a la comprensión, aplicación y transferencia a nuevas situaciones con mayor precisión y rapidez.

En la cuarta fase, que corresponde al cuarto semestre para el ingreso 2008 y al segundo semestre para el ingreso 2009, la situación se presenta de esta manera:

- Estos alumnos del segundo semestre que ya cursaron MAD y ahora están transitando AED, y los docentes de ambas cátedras participan en un doble rol: como 'usuarios' de las herramientas generadas por el grupo anterior operando en modalidad de 'caja negra' y como 'generadores' de propuestas de ajustes y mejoras para esas herramientas. Ambos roles requieren nuevamente la aplicación de conocimientos informáticos y matemáticos que están estudiando; potencian el aprendizaje, porque permiten entre otras cuestiones: constatar resultados de resoluciones manuales y efectuar resoluciones de problemas más

complejos (que se dificultan manualmente pero que tienen riqueza de resultados). La aplicación de estas herramientas complementarias también genera en los alumnos capacidades de aprendizaje diferentes y competencias nuevas, entre ellas las de validación y valorización de los instrumentos (que fueron construidos por sus compañeros). En su rol de generadores ellos están diseñando propuestas para complementar, ajustar y mejorar dichas herramientas a los fines de su empleo (en este período los contenidos de MAD que revisarán corresponden a temas de lógica proposicional) y (como el proceso se encuentra en curso) se espera también que puedan participar en la revisión de la documentación de usuario. Este grupo de alumnos, al cursar AED contará con los resultados alcanzados en el año anterior, más su propia experiencia de usuarios en el primer semestre y generadores en el segundo semestre. Se ha planificado esta cuarta fase de manera que realicen actividades similares a las anteriores de la secuencia, pero ahora, mejorando y ampliando la herramienta (en esos temas de lógica). Aquí nuevamente se empleará lo aprendido en MAD, reforzando y resignificando, se potenciará el aprendizaje de los temas de programación y se generarán nuevos instrumentos (software MATDIS con nuevas modularidades) como resultado y se desarrollarán competencias de órdenes superiores (en este caso se agregarán la capacidad de análisis crítico de un software ya modelado y construido y las que se requieran para modificar y lograr mejoras en el sentido de operaciones de 'caja blanca').

Reflexiones finales

En esta secuencia propusimos un acercamiento sistemático e integrado donde los estudiantes son expuestos a conceptos y actividades experimentales en forma temprana, y vuelven a realizarlo de manera evolutiva en diferentes momentos del plan de estudios, dando continuidad al proceso. Desde el inicio de la vida universitaria, los estudiantes aprenden realizando experimentos, analizando los resultados, y (quizás más pretenciosamente) hablando y presentando conclusiones basadas en los resultados. La herramienta empleada en todas las acciones de formación experimental que conforman esta propuesta es la computadora, pero no tratada como un utilitario de oficina o comunicación cotidiana, sino en su perfil de medio de apoyo, comprobación, medición y análisis para la comprensión de los contenidos de cátedras de las Ciencias y

Tecnologías Básicas en una carrera de ingeniería. Si bien algunas de las actividades planteadas son realizadas por los alumnos en forma individual y quizás en computadoras que estén fuera del ámbito de la facultad, las actividades planificadas, así como los procedimientos y medios preparados por los docentes, les imponen a su realización todas las características de un aprendizaje para mejorar su desempeño académico, social y profesional.

Podemos además citar algunas acciones de borde o tangenciales a esta experiencia que se nutren de ella y a la vez le realizan aportes de mejora y enriquecimiento:

a) En la Facultad sede de esta experiencia, se ha comenzado a trabajar en una Plan de Mejora Continua, y dentro del mismo se ha puesto especial atención al análisis de las actividades prácticas que realizan los estudiantes. Este trabajo ha constituido un aporte y se está realizando un análisis de esta dimensión a lo largo de toda la carrera.

b) Alumnos que participaron en la tarea voluntaria de complementar el trabajo práctico, se integraron con un alumno del segundo nivel de la carrera y prepararon un artículo que se presentó en un congreso de estudiantes universitarios de informática.

Lo indicado en a) y b) nos permite señalar que el impacto de la experiencia se ha extendido a otros ámbitos más allá del inicial, promoviendo acciones de difusión y divulgación que generan nuevos análisis y discusiones, movilización hacia experiencias superadoras.

Finalmente, las secuencias didácticas socializadas de esta manera deben ser miradas como una tarea de semi divulgación ya que las mismas no son el producto de investigaciones científicas destinadas a intercambios en el campo disciplinar de las matemáticas ni son el resultado de una experiencia medida para que sea reproducida y transferida a un gran público: sólo se pretende difundir secuencias realizadas que, para un determinado grupo de alumnos de los primeros niveles, coadyuvaron a la comprensión de los conceptos matemáticos dando lugar a mejores desempeños. Si bien la propuesta constituye un aporte que intenta lograr mejoras de manera integrada entre dos cátedras, ya se está considerando la articulación con otras cátedras. Una integración que marque el sustento adecuado de una eficiente, continua y consistente enseñanza.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación Evaluativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Brown, L., y Coles, A. (2002). La toma de decisiones complejas en el aula: el profesor como profesional intuitivo. En T. Atkinson y G. Claxton (Ed): *El profesor intuitivo*. 10 (pp. 212-232). España: Octaedro.

Facione, P. (2007). *Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante?* Recuperado el día 30 de marzo de 2008 de http://www.insightassessment.com

Huberman, S. (1992). *Cómo aprenden los que enseñan*. Buenos Aires: Aique S.A.

Litwin, E.(1997). *Las configuraciones didácticas*. Buenos Aires: Paidós.

Perkins, D. (1997). *La escuela inteligente: del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. Barcelona: Gedisa.

Politino, A. y Silva, R. (2005). *Aportes para la elaboración de secuencias didácticas.* Recuperado el 10 de agosto de 2008 de http://www.institucional.mendoza.edu.ar

Roldán,G., Rogiano,C., Alberto, M., Banchik, M. (2008). *Habilidades cognitivas en Matemática: Propuestas didácticas para atender a su fortalecimiento*. Santa Fe: UNL

LA DIMENSIÓN AFECTIVA Y EL RENDIMIENTO EN ESTADÍSTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

José Gabriel Sánchez Ruiz, Julieta Becerra Castellanos, Julieta García Pérez, María del Socorro Contreras Ramírez
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM México
josegsr@unam.mx, juveka_mx@yahoo.com.mx, julygapmx@yahoo.com.mx, socorrocontreras@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Factores afectivos Nivel: Superior

Resumen. *Distintos investigadores, como Gómez-Chacón (2000) han propuesto que los afectos (i.e., las emociones, actitudes y creencias) de los estudiantes son factores claves en la explicación de su comportamiento en matemáticas. Inclusive, se plantea que existe una relación bidireccional y cíclica entre los afectos y el aprendizaje. El estudiante, al aprender matemáticas, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas: problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc., que le generan cierta reacción, emocionalmente de forma positiva o negativa. Esta reacción está afectada por la dimensión afectiva, concepto que es empleado para referirse a todo un amplio rango de factores diferentes a la cognición y cuyos componentes específicos son las actitudes, creencias y emociones (Mcleod, 1989). En este trabajo se pretendió caracterizar la dimensión afectiva en estudiantes universitarios en relación con su rendimiento, de 'éxito' o 'fracaso' en estadística.*
Este trabajo es parte de un estudio financiado por la DGAPA-UNAM, PAPIME No. PE305407
Palabras clave: Dimensión afectiva, rendimiento en estadística, estudiantes de psicología

De acuerdo a Chaves, Castillo y Gamboa (2008), prácticamente en cualquier sector social, no es raro escuchar fuertes críticas por los problemas que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas. Asimismo, estos autores refieren que muchos investigadores señalan que estas críticas, y el rechazo hacia esta disciplina, no obedece únicamente a aspectos relacionados con su naturaleza, sino que son el resultado de una serie de estereotipos que se han creado a su alrededor y que se transmiten en el entorno familiar y educativo. Este hecho provoca que los estudiantes adquieran ciertos prejuicios con respecto al aprendizaje matemático, los cuales afectan significativamente el proceso de su enseñanza y aprendizaje. Incluso, sus repercusiones son mayores ya que, independientemente de la resistencia que existe para aprenderla, es considerada como un obstáculo para lograr una promoción o una admisión en instituciones educativas (Ojeda, Medina y Peralta, 2001, cit. en Martínez Padrón, 2005). En esta situación frecuentemente desempeña un papel crucial, según Gil, Blanco y Guerrero (2006), el entorno del estudiante constituido por los padres de familia, los amigos y/o los compañeros de los estudiantes, independientemente del nivel educativo que se trate. Así, se divulgan

constantemente frases como “las matemáticas son difíciles, complicadas y destinadas a los “más inteligentes’ ” (Gil, Blanco y Guerrero, 2006, p. 552). Lo cual contribuye a la adquisición de creencias, sentimientos, emociones y afectos respecto a las matemáticas que al parecer acrecientan la probabilidad de fracaso escolar.

En el planteamiento de que en el fracaso escolar en matemáticas pueden intervenir distintos factores, independientemente del intelectual, varios autores, incluso clásicos como Polya (1965), han sugerido que “sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual (ya que) la determinación (y) las emociones juegan un papel importante” (p. 80; paréntesis de los autores). Para Gómez-Chacón (2000) el bajo desempeño escolar de los estudiantes, en concordancia con Polya, no siempre se corresponde con su desarrollo cognitivo, dado que las emociones juegan un papel facilitador, o debilitador, del aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, cuando un estudiante aprende matemáticas, a los continuos estímulos que recibe relacionados con esta asignatura y que le generan cierta tensión, reacciona emocionalmente. Según, Gómez-Chacón, dichas reacciones están condicionadas por sus creencias tanto acerca de sí mismo como acerca de las matemáticas y pueden ser automatizadas y consolidadas en actitudes, creencias y emociones.

Lo que se piensa, siente, cree, entre otras reacciones, acerca de la naturaleza de las matemáticas, la manera de usarla, cómo enseñarla, cómo y para qué se aprende, cómo se evalúa y cuánto es útil para la sociedad está ligado a una serie de factores del concepto dominio afectivo (Martínez Padrón, 2005). El dominio afectivo conforma un sistema que regula la estructura del conocimiento matemático de los estudiantes logrando que algunos muestren mayor adicción y gusto hacia las matemáticas que otros. En el dominio afectivo están incluidos aspectos tales como concepciones, creencias, motivaciones, convicciones, opiniones, sentimientos, emociones y actitudes que tienen los estudiantes y los docentes hacia dicha ciencia o hacia el proceso del conocimiento matemático ya mencionado.

Precisamente es McLeod (1989), pionero y uno de los más importantes impulsores de un nuevo enfoque del concepto, antes se concentraba en estudios y en el papel de las actitudes hacia las matemáticas (Gil, Blanco y Guerrero, 2006), quien se inclina por incluir las creencias, las emociones y las actitudes como factores básicos de este dominio, el cual lo conceptualiza como un

amplio rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición.

Es evidente, pues, que los variados factores que configuran el dominio afectivo en educación matemática ha tenido tanta relevancia que en años recientes han sido considerados claves para describir, analizar, comprender y/o explicar muchas situaciones que ocurren en el aula de Matemática. Lo anterior se evidencia dado que los planteamientos de la dimensión afectiva, incluso, se han tomado como base para contextualizar el diseño de modelos de planeación de unidades de aprendizaje no sólo de matemáticas. Sin embargo, llama la atención que en no raras veces las investigaciones se centran exclusivamente en alguno de los componentes de la dimensión afectiva, por ejemplo, las creencias de los alumnos acerca de sí mismos como aprendices de las matemáticas. Esta postura es justificada señalando que ello permite evaluar más puntualmente su influencia en el rendimiento matemático, aunque es probable que también se relacione con el hecho de que la dimensión afectiva es un concepto muy amplio.

Por otra parte, si bien la investigación sobre dimensión afectiva en contenidos matemáticos es amplia (cf., Gil, Blanco y Guerrero, 2006, y Gómez-Chacón, 2000a y b, entre otros) no sucede lo mismo en algunas áreas de las matemáticas, como la estadística, donde también se ha detectado bajo rendimiento escolar en México. Inclusive, esto se aprecia a nivel de educación superior, en la formación universitaria de profesionales donde la estadística es parte fundamental (por ejemplo, en cursos de metodología de la investigación) de la capacitación disciplinaria del estudiante. En alumnos de la Carrera de Psicología, los autores de este trabajo han constatado esta situación.

Por lo anterior, en este trabajo se pretendió estudiar el conjunto de elementos que componen la dimensión afectiva entre estudiantes universitarios en relación con su rendimiento en estadística, identificando las características de la dimensión afectiva que presentan los alumnos de éxito, en comparación de los de fracaso, en el aprendizaje de contenidos estadísticos.

En esencia, la razón principal de tomar el dominio afectivo como variable de estudio se debe a que es considerado un impulsor de la actividad Matemática (Gómez-Chacón, 2000a) y a que se ha explorado poco su influjo en el rendimiento académico en estadística.

Método

Participantes: Ciento cuatro alumnos de la Carrera de Psicología de un campus de la UNAM. Más del 75% era del turno matutino y el 23% del vespertino, todos inscritos por primera vez en el primer semestre. No fueron seleccionados mediante un muestreo intencional sino por su disponibilidad en los días en que se realizó la aplicación de la escala. Predominó el sexo femenino en una razón de 3:1 sobre el masculino, situación que se ha mantenido por generaciones en la Carrera de Psicología. De acuerdo a la calificación promedio final obtenida en la clase obligatoria (oficial) de matemáticas-estadística su distribución porcentual fue: el 14.9% de 9.1 a 10; el 28.7% de 7.1 a 9; el 35.1% de 5 a 7; y el 19.2% logró calificaciones menores a 5.

Instrumentos: Se usó el cuestionario propuesto por Gómez-Chacón (2000a) para evaluar la Dimensión Afectiva. Las características más importantes son que valora en seis categorías (o bloques de ítems) creencias, actitudes, emociones y evaluación de la situación del estudiante frente a las tareas matemáticas. Estas categorías son: Confianza en sí mismo; Atribuciones, referidas al esfuerzo del estudiante, a la eficacia de la estrategia del aprendizaje, entre otras); Actitudes, que abordan aspectos sociales de las matemáticas, la apreciación del estudiante sobre las matemáticas, entre otros; y Emociones y motivación. Este cuestionario permite poner las respuestas del estudiante en un formato tipo Likert de 4-puntos.

Los siguientes son ejemplos de los ítems del cuestionario empleado en el estudio:

- Las matemáticas tratan de resolver problemas

( ) Totalmente en acuerdo ( ) De acuerdo ( ) En desacuerdo ( ) Totalmente en desacuerdo

- Matemáticas es investigar nuevas ideas

( ) Totalmente en acuerdo ( ) De acuerdo ( ) En desacuerdo ( ) Totalmente en desacuerdo

Resultados

Una serie de análisis de frecuencias fue realizado, sobre el tipo de respuesta que la escala del instrumento permitía registrar, con la finalidad de identificar la respuesta típica de cada grupo de

estudiantes en que ellos fueron clasificados, de 'éxito' y 'fracaso', de acuerdo a su calificación final en el curso. Los grupos se dividieron con base en un punto de corte en alto rendimiento o 'éxito' (calificación > 7.5) y bajo rendimiento o 'fracaso' (calificación ≤ 7.5). En la Tabla 1 se concentran, a manera de muestreo, algunas de las respuestas obtenidas en los estudiantes que participaron. En la Tabla se pueden observar diferencias y similitudes en las respuestas de uno y otro grupo, las cuales también se advierten intragrupo al contrastar de acuerdo al género de los estudiantes.

Tabla 1. Características de los estudiantes (masculinos y femeninos), de éxito y fracaso, en dimensión afectiva.

RUBRO DE LA DIMENSIÓN AFECTIVA	ESTUDIANTES MASCULINOS		ESTUDIANTES FEMENINOS	
	ÉXITO	FRACASO	ÉXITO	FRACASO
Acerca de las matemáticas (las matemáticas…)				
*1.- son conceptos y procedimientos para memorizar	De acuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	En desacuerdo
2.- tratan de resolver problemas	De acuerdo	De acuerdo	De acuerdo	De acuerdo
3.- consisten en investigar nuevas ideas	Totalmente de acuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	De acuerdo
4.- son útiles	Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Totalmente de acuerdo
*5.- cuesta mucho entenderlas	Totalmente de acuerdo	En desacuerdo	De acuerdo En desacuerdo	En desacuerdo
Acerca de si mismo en relación con la matemática (autoconfianza)				
1.- Tengo confianza en mi capacidad para resolver problemas matemáticos	Totalmente de acuerdo	De acuerdo	De acuerdo	De acuerdo
2.- Me gusta mucho resolver problemas matemáticos	De acuerdo	De acuerdo En desacuerdo	De acuerdo	De acuerdo En desacuerdo
3.- Me doy por vencido fácilmente cuando el problema es difícil	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	En desacuerdo	En desacuerdo
4.- Cuando me piden que resuelva problemas de matemáticas me pongo nervioso/a	En desacuerdo	En desacuerdo De acuerdo Totalmente de acuerdo	En desacuerdo	En desacuerdo
5.- Busco diferentes maneras de resolver un problema matemático	De acuerdo	En desacuerdo De acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo De acuerdo
6.- Mis capacidades en matemáticas son…	Buenas	-Regulares -Buenas -Deficientes, pocas	Buenas	Regulares
Acerca de la enseñanza de las matemáticas				

1.- Un buen profesor de matemáticas debería…	Formación y preparación	Didáctica y estilo de enseñanza	Didáctica	-Didáctica -Características de personalidad
2.- Mis profesores de matemáticas son…	Malos	Buenos	Buenos	Regulares
3.- La enseñanza de las matemáticas es…	Regular	Regular Mala (33%)	-Buena (40%) -Regular -No me gusta/ necesaria	-Buena -Regular (30%)
Acerca del aprendizaje de las matemáticas				
1.- En matemáticas yo encuentro difícil…	Los temas matemáticos	-Tareas matemáticas-Temas matemáticos -Todo	-Temas matemáticos -Tareas matemáticas	Tareas matemáticas
2.- Podría aprender más matemáticas si…	Aspectos relativos al profesor	Aspectos relativos al profesor	Aspectos relativos al alumno	Aspectos relativos al alumno
3.- Es importante aprender matemáticas porque…	Son un modelo del mundo	Ayudan a desarrollar la inteligencia, razonamiento, memoria o a resolver problemas	-Son importantes para el psicólogo -Facilitan entender al mundo -Son útiles	Son importantes para el psicólogo
Acerca del éxito y fracaso escolar				
1.- Algunos alumnos son buenos en matemáticas, ¿por qué?	Les gustan por sus profesores	-Entienden -Las estudian -Les gustan por sus profesores	-Les gustan -Tienen habilidades	-Les gustan -Las entienden
2.- Y algunos tienen dificultades, ¿por qué?, ¿dónde está la falla?	En alumnos y profesores	En alumnos (no las entienden)	En alumnos (no les gustan)	No les gustan por sus profesores
3.- ¿Qué se puede hacer para ayudar a un alumno que tiene dificultades en matemáticas?	-Asesorarlo -Darle cursos	-Asesorarlo -Motivarlo	-Repasar los temas -"Ponerles ejercicios"	Asesorarlo
4.- ¿Puedes recordar algún tema en matemáticas en el que te fuera bien en la escuela?	-Álgebra -Conjuntos	-Estadística -Cálculo -Aritmética	Álgebra	Álgebra
5.- ¿Puedes recordar algún tema en matemáticas en el que te fuera mal en la escuela?	Probabilidad	-Probabilidad -Análisis -Álgebra y Trigonometría	-Geometría -Álgebra -Trigonometría -Conjuntos	-Estadística -Probabilidad
6.- ¿Qué clase de sentimientos asocias con cada una de las situaciones anteriores?	Gusto y alegría	Satisfacción	Gusto y alegría	Ansiedad y angustia

Conclusiones

En síntesis, los hallazgos indican diferencias, de acuerdo al tipo de rendimiento académico, y sólo parcialmente de acuerdo al género del alumno, en las características de la dimensión afectiva de los estudiantes. Asimismo, la diferencia encontrada entre los alumnos de bajo rendimiento o 'fracaso' y alto rendimiento o 'éxito' sugiere que las características en dimensión afectiva en matemáticas podrían reflejarse en el rendimiento en estadística.

Se considera que la importancia de este tipo de trabajos radica en indagar en otro tipo de factores alternativos a los cognitivos (memoria y pensamiento (resolución de problemas, razonamiento, inteligencia, etc.) como los influyentes en el rendimiento matemático a nivel escolar. Además, de contar con elementos empíricos que puedan ayudar a desenmarañar la relación entre rendimiento-actitud; rendimiento-motivación; rendimiento-atribución; rendimiento-creencias; entre otros aspectos que conforman el concepto de dimensión afectiva. Asimismo, se considera que la dimensión afectiva es un concepto que presenta ciertas ventajas al aglutinar en una sola dimensión distintos factores que podrían tener alguna repercusión en el aprendizaje de las matemáticas y la estadística. El trabajar con la dimensión afectiva, consideramos que permite apreciar e identificar si las experiencias de los estudiantes de la asignatura de estadística con las matemáticas, experiencias que se han traducido en creencias, emociones, actitudes, atribuciones, etc., pueden jugar un papel clave en su desempeño si bien no en matemáticas, como en este trabajo, si en un área perteneciente a las matemáticas.

Una característica adicional que da preeminencia a la dimensión afectiva consiste en que al permitir detectar el papel de los factores que la configuran, sobre el rendimiento en estadística, se tendría lo que constituiría un primer paso para contrarrestar el influjo negativo de cada uno de dichos factores en la efectividad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. Esto se haría mediante el diseño y la aplicación de programas de entrenamiento e intervención sobre aspectos afectivos que podrían adoptar como eje rector el desarrollo de habilidades metaafectivas; por ejemplo, talleres de intervención psicológica de modificación de creencias sobre las matemáticas, talleres de reeducación o cambio atribucional, entre otros.

La implicación para la enseñanza-aprendizaje de la estadística de estudios en esta línea es que podría promoverse un mejor rendimiento al identificar y modificar el influjo de la afectividad sobre el aprendizaje de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Chaves, E. E., Castillo, S. R., Gamboa. A. R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 3 (4), 29-44.

Gil, I. N., Blanco, N. L., y Guerrero, B. E. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa.* 4 (1), 47-72.

Gómez-Chacón, I. M. (2000a). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 43, 149-168.

Martínez Padrón, O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática*. Paradigma.* 26 (2), 7-34.

Martínez Padrón, O. (2007). Semblanzas de la línea de investigación: dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma*. Vol. XXVIII, Nº 1, junio, 237-252.

Mcleod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D. B. Mc Leod y V. M. Adams (eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective.* New York: Springer-Verlang. 245-258.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CORRIENTES A TRAVÉS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN UTILIZANDO VALORES Y VECTORES PROPIOS

Pedro Castañeda Porras, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" Cuba
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu, eugenio@mat.upr.edu.cu
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *La resolución de problemas es un aspecto importante en el aprendizaje de la Matemática. Es esencial que se tracen estrategias de trabajo que garanticen de forma eficiente las posibilidades que tiene la Matemática en la formación del estudiante para conseguir resolver con éxito los problemas a que se enfrenta. Coincidimos con (Delgado, 1998, p.69), cuando considera la resolución de problemas como una habilidad matemática y señala que resolver: ¨es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución de un problema¨. En el trabajo abordaremos una experiencia sobre la resolución de problemas de corrientes en las redes eléctricas que nos inducen a la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales (SED) utilizando el método matricial. Se propone una metodología para la solución de estos SED mediante los valores y vectores propios, auxiliándonos del Asistente Matemático DERIVE.*
Palabras claves: Vectores propios, sistemas ecuaciones diferenciales

Introducción

El perfeccionamiento de los planes de estudio en las diferentes carreras nos exige trabajar aún más en la relación entre las asignaturas de la disciplina Matemática y otras disciplinas de la carrera: Circuito, para poder enfrentar y resolver los problemas de carácter profesional. En la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica es una necesidad la vinculación del Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Circuitos Eléctricos en la resolución de problemas circuitales que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales. Por lo que compartimos el criterio de (Judson, T. 1997) donde plantea que es importante propiciar la transferencia de estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión.

Hasta este momento los estudiantes habían tratado las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de forma individual, pero en la práctica se necesita más de una Ecuación Diferencial para formular matemáticamente situaciones físicas a las cuales ellos se enfrentan.

Hay que centrar la atención en enseñar a resolver los problemas que involucren ecuaciones diferenciales. Todo el proceso está basado en el aprendizaje significativo, que es quien sustenta la

resolución de problemas. Como dijera (Vázquez-Reyna, M.2009): y según Ausubel "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

Este trabajo es resultado de la implementación del plan de estudio D en el segundo año de la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica, dentro del sistema educacional cubano. El propósito del mismo es proponer una metodología de resolución de problemas de circuitos eléctricos a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden utilizando los conceptos de valores y vectores propios, del Algebra Lineal, con el apoyo de un Asistente Matemático.

A continuación exponemos algunas ideas básicas y la metodología de cómo resolver estos SED.

IDEAS BÁSICAS.

Si X, A(t) y F(t) denotan, respectivamente, las matrices

$$X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ F(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\ . \qquad & \qquad . \qquad \qquad (1) \\ . \qquad & \qquad . \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n1}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

puede ser escrito como,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2) \quad ,$$

o simplemente $\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$. (3), si el sistema es homogéneo, (3) se convierte en

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \text{ .(4)}$$

Definición*:* Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ cuyos elementos son funciones diferenciables, y tal que satisface el sistema (3) en el intervalo.

Teorema

Sea X1, X2, . . . , Xk un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (4) en un intervalo I y sea Xp cualquier vector solución del sistema no homogéneo (3) en el mismo intervalo. Entonces X= c1X1+c2 X2 + . . . + ckXk +Xp también es una solución del sistema no homogéneo en el intervalo, cualquiera que sean las constante c1, c2, . . . , ck.

A continuación daremos una metodología o secuencia para aplicar el método de coeficientes indeterminados a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Metodología

Solución del sistema homogéneo. (X_c)

- Conformar la Matriz asociada del sistema homogéneo.

- Plantear la ecuación matricial.
- Obtener la ecuación característica.
- Hallar lo valores y vectores propios.
- Plantear la solución general del sistema homogéneo.

Encontrar un vector solución X_p del sistema no homogéneo.

- Proponer una solución particular de la parte no homogénea.
- Ajustar correctamente tal propuesta.
- Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
- Y plantear $\boldsymbol{X = X_c + X_p}$.

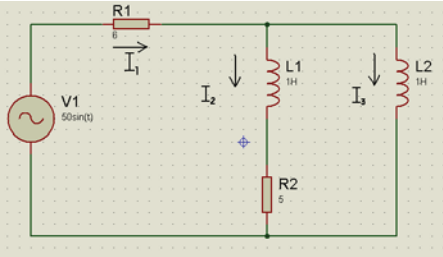
Problema:

Este problema, junto a otros, se presenta para el desarrollo de un seminario de la asignatura de Series y Ecuaciones Diferenciales, cuando se imparte el tema de Ecuaciones Diferenciales a estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica. Se organiza el trabajo por equipos, donde éstos reciben las orientaciones de forma anticipada y van al aula a exponer los resultados, que son analizados y evaluados por el grupo de conjunto con el profesor. En este proceso se puede observar que todo el trabajo matricial en la secuencia metodológica seguida para resolver el problema, se realiza con la ayuda del Asistente Matemático DERIVE, esta es otra forma de articular con el uso de las nuevas tecnologías.

Planteamiento

Determine las características volt-ampéricas de los elementos del siguiente circuito. Dados los valores $R_1 = 6\,ohm,\ R_2 = 5\,ohm, L_1 = 1H,\ L_2 = 1H, V = 50\sin t\ V$

Con las condiciones iniciales: $i_2(0) = 0,\ i_3(0) = 0$



FORMULACIÓN MATEMÁTICA

$$\frac{di_2}{dt} = -11i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

$$\frac{di_3}{dt} = -6i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

$i \quad - \; i \quad \perp \; i$

$$\frac{d}{di}\begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50\cdot SIN(t) \\ 50\cdot SIN(t) \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOSCIADA AL SISTEMA HOMOGÉNEO

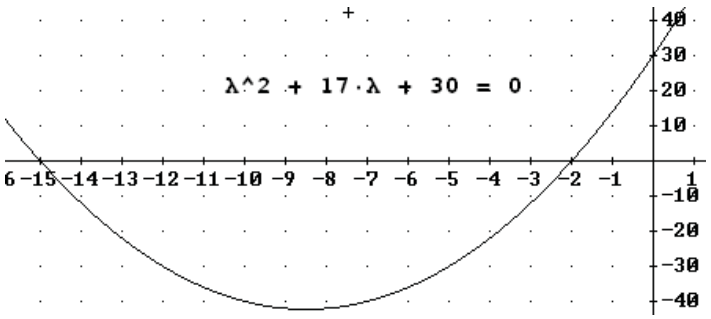
$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$DET\begin{bmatrix} -11-\lambda & -6 \\ -6 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 17\cdot\lambda + 30 = 0$$

$$SOLVE(\lambda^2 + 17\cdot\lambda + 30 = 0, \lambda, Real)$$

$$\lambda = -15 \vee \lambda = -2$$



Es interesante ver en esta experiencia docente cómo los estudiantes tienen que retomar contenidos ya estudiados en el curso anterior para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Según (Maldonado, M. A. 2009) de acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos

se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

Vectores propios correspondientes a los valores propios

$\lambda = -15$ *y*
$\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 4\cdot t - 6\cdot v = 0 \\ 9\cdot v - 6\cdot t = 0 \end{bmatrix}$$

SOLVE([4·t − 6·v = 0, 9·v − 6·t = 0], [t, v])

$$[2\cdot t - 3\cdot v = 0]$$

SOLVE([2·t − 3·v = 0], v, Real)

$$\left[v = \frac{2\cdot t}{3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -9\cdot t - 6\cdot v = 0 \\ -6\cdot t - 4\cdot v = 0 \end{bmatrix}$$

SOLVE([− 9·t − 6·v = 0, − 6·t − 4·v = 0], [t, v])

SOLVE(SOLVE([− 9·t − 6·v = 0, − 6·t − 4·v = 0], [t, v]), v, Real)

$$\left[v = -\frac{3\cdot t}{2}\right]$$

Como la matriz de los coeficientes M es de 2x2 y dado que se han obtenido dos soluciones linealmente independientes, concluimos que la solución general del sistema homogéneo es:

$$i_h = e\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\cdot\hat{e}^{-2\cdot t} + f\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}\cdot\hat{e}^{-15\cdot t}$$

Veremos también algunos ficheros para calcular los valores propios y vectores propios correspondientes, con el uso del DERIVE, donde se darán cuenta que es más práctico y rápido.

$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

EIGENVALUES(M, λ)

[−2, −15]

EXACT_EIGENVECTOR(M, −2)

$$\left[\left[@1, -\frac{3 \cdot @1}{2}\right]\right]$$

EXACT_EIGENVECTOR(M, −15)

$$\left[\left[@2, \frac{2 \cdot @2}{3}\right]\right]$$

Como F(t) se puede expresar de la siguiente manera:

$F(t) = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} \sin t$, intentaremos encontrar una solución particular que tenga la forma:

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema de redes se obtienen las soluciones particulares siguientes:

$$i_2 = -\frac{20 \cdot \hat{e}^{-2 \cdot t}}{13} + \frac{375 \cdot \hat{e}^{-15 \cdot t}}{1469} + \frac{145 \cdot COS(t)}{113} + \frac{85 \cdot SIN(t)}{113}$$

$$i_3 = \frac{30 \cdot \hat{e}^{-2 \cdot t}}{13} + \frac{250 \cdot \hat{e}^{-15 \cdot t}}{1469} - \frac{280 \cdot COS(t)}{113} + \frac{810 \cdot SIN(t)}{113}$$

$$i_1 = \frac{10 \cdot \hat{e}^{-2 \cdot t}}{13} + \frac{625 \cdot \hat{e}^{-15 \cdot t}}{1469} - \frac{135 \cdot COS(t)}{113} + \frac{895 \cdot SIN(t)}{113}$$

Una vez obtenidas las características volt-ampéricas de los elementos del circuito planteado los estudiantes demuestran, a través del aprendizaje significativo y mediante la articulación interdisciplinaria, estar mejor preparados para enfrentar problemas relacionados con su perfil profesional.

Conclusiones

En la experiencia que acabamos de exponer se ha explicado cómo utilizar los conceptos del Álgebra Lineal en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. En la misma los estudiantes se sienten motivados desde el momento que tienen que retomar los contenidos de

valores y vectores propios, lo sienten como algo que no dieron en vano en el curso anterior y por ende reafirman y guardan a largo plazo lo estudiado en su memoria. El Aprendizaje Significativo conduce al alumno a este resultado y lo ayuda a que vaya construyendo sus propios esquemas de conocimiento para una mejor comprensión de los conceptos. También el uso del asistente matemático les facilita el trabajo algebraico, que en ocasiones es engorroso, permitiéndonos defender la idea sobre el rol que deben cumplir las TICs en los procesos formativos.

Referencias bibliográficas

Delgado, R. (1998): *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, ISPJAE. La Habana, Cuba.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de: http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html

Maldonado, M. A. *El aprendizaje significativo de David Paul Ausubel*. Recuperado el 29 de agosto de 2009, de www.monografias.com/trabajos10/dapa/dapa.shtml#teo

Vázquez-Reyna, M. *El aprendizaje significativo.* Recuperado el 16 de junio de 2009 de www.consumer.es/web/es/educacion/extraescolar/2009/06/16/185986.php.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIDAD DE ANÁLISIS COMO HERRAMIENTA EN CONTEXTOS PERIÓDICOS EN EL BACHILLERATO

Rosa Isela Vázquez Camacho
Colegio de Bachilleres de Chiapas México
arqisela@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio Superior

Resumen. *La propiedad periódica de algunos objetos matemáticos no se reconoce al interior de la curricula escolar. A través de las prácticas sociales como generadoras del conocimiento se han destacado herramientas que hacen posible la acción de predecir, al abrigo de la socioepistemología de lo periódico (Buendía, 2004; Buendía 2005), se ha dado evidencia del nacimiento de la unidad de análisis y se descubre como ésta se configura a partir de su acotamiento al objeto matemático que se aborde." Su naturaleza de idea primigenia favorece la reconstrucción de significados haciendo posible el tránsito de lo periódico en diversos escenarios predictivos en distintas situaciones periódicas (Vázquez, 2008)".*
Palabras clave: Socioepistemología, periódico, predicción, unidad de análisis

Introducción

A la luz de la Socioepistemología, se ha dado cuenta de que lo periódico puede constituir un lenguaje que permita abarcar ámbitos culturales, históricos e institucionales, gestionando un carácter útil al conocimiento matemático vinculado con la propiedad periódica (Buendía, 2004; Buendía 2005). Esta puede identificarse en la cotidianidad de los individuos y dada la condición del hombre como ser social, resulta habitual que los significados creados de forma compartida se trasladen en contextos diferentes en donde son aplicados.

En el marco de la práctica de predicción al interior de la socioepistemología de lo periódico, surge una herramienta útil, a la que llamamos unidad de análisis. Ésta se configura a partir de su acotamiento al objeto matemático abordado, en la función periódica dicha unidad de análisis se reconoce como período, misma que contiene información del todo y las partes; ello permite predecir. Su naturaleza de idea primigenia favorece la reconstrucción de significados haciendo posible el tránsito de lo periódico en diversos escenarios predictivos en distintas situaciones periódicas.

Una mirada dentro del currículo

Lo periódico en la curricula en distintos niveles muestra que en el Preescolar se presenta el reconocimiento de patrones como una habilidad a desarrollar dentro del apartado de pensamiento matemático de la forma siguiente: *Identifica regularidades en una secuencia a partir de criterios de repetición y crecimiento.* En libros de texto de SEP (2004) empleados en la Primaria, es abordado mediante series icónicas. Se encuentran diversas lecciones en la que se pudo ver el manejo de patrones. En la Secundaria. Lo *periódico* se trata a través de cifras decimales; aquí los textos privilegian los contextos algebraicos y geométricos, respecto a los temas relacionados con lo periódico involucra la *Percepción de patrones y regularidades.* Se presentan listas o secuencias de números y figuras que representan algún patrón de comportamiento y los alumnos encontrarán algunos de los términos que dan continuidad a la secuencia. En tanto en Medio Superior en (Colegio de Bachilleres de Chiapas), la revisión de textos Olmos (2006), Purcell (1987) y (Zill., 1988) nos da cuenta de que se trabajan primordialmente patrones de estructura creciente, algunos elementos que muestran repetición o algunos periódicos. El poco reconocimiento de lo periódico al interior de la escuela, un currículo con fuerte anclaje a lo periódico vinculado a funciones seno y coseno, como carácter hereditario y por ende a todo fenómeno involucrado permite ahondar en el estudio de aquellos fenómenos que se manifiestan cuando la tarea es predecir

En el estudio realizado por Vázquez (2008) se aborda la identificación y uso de la unidad de análisis para sucesiones y funciones, en tres contextos, gráficos, tablas y verbales, lo cual emerge al interior de una práctica social, por ejemplo, la predicción. Participaron estudiantes de nivel básico, medio superior y superior. Se dio evidencia de que son los contextos los que brindan la configuración de la herramienta, así como las operaciones básicas como la suma y la multiplicación para poder predecir. Ello mediante secuencias didácticas aplicadas a estudiantes de nivel medio superior empleando sucesiones y funciones, se halló que la identificación y uso de la unidad de análisis resulta una acción *natural* para el estudiante cuando trabajan con actividades intencionales de predicción. Se encontró también evidencia de su conformación y uso, así como las herramientas auxiliares para su construcción y cuál es el papel que juegan los contextos científicos, culturales y sociales.

Reconocimiento de patrones

El estudio de patrones implica realizar varios procesos, tales como; reconocer, descubrir, generalizar, organizar, estructurar ideas, establecer un patrón, describirlo y representarlo. Estas actividades son de naturaleza esencialmente distinta; están asociadas a rasgos del pensamiento matemático que tiene que ver con el pensamiento inductivo y deductivo. La detección de patrones y la expresión de generalidad están en el centro de la actividad matemática entendida como reguladora de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas.; sin duda, el estudio de las matemáticas puede ayudar a desarrollar y a refinar las capacidades naturales para ello en la mayoría de los estudiantes. El patrón es la forma de algún objeto. Los patrones pueden ser hileras de letras o de eventos, líneas unidimensionales, imágenes bidimensionales y fenómenos multidimensionales. Mason (1985) dice que el reconocimiento de patrones se desarrolla en cuatro fases: ver, expresar, registrar y verificar.

La secuencia y algunos resultados de su aplicación

Ante este panorama llevamos a escena las secuencias diseñadas para explorar las concepciones y acciones realizadas por estudiantes de bachillerato, los actores fueron estudiantes del 4º semestre del Colegio de Bachilleres de Chiapas. Iniciamos la actividad reconociendo los argumentos de los estudiantes en relación a la concepción que poseen de lo que periódico, empleando diversos objetos, aquí damos evidencia de sus respuestas:

Donde en primera instancia se les preguntóó ¿De los objetos son o no periódicos? Y ¿Por qué? A lo que los estudiantes manifestaron lo siguiente:

	Si, son constantes van de 1 en 1; Si, son constantes van en periodo. Es constante y por eso periódica
	No, las figuras no se repiten igual No, porque van en aumento. No, porque crecen en uno cada vez

Fig. 1 Observando las series de íconos, responden

Los estudiantes observaron con cuidado como se presentaron las figuras, básicamente en el *orden* que se organizan y manifestando como el segundo parecía periódico, sin embargo iban creciendo.

Mientras que para el caso de los decimales, los estudiantes identifican "partes" en las que los números empiezan a repetirse y definieron esa parte como un *patrón o serie*, que si se repetía, era entonces periódica.

Alejandra:

Comenta que *cada seis dígitos, nuevamente se repiten*

1.8392857142857142857142 8...

Fig.2 Reconociendo la unidad de análisis

Al observar el decimal, los estudiantes identifican los trozos en lo que se repite los números, en algunos casos de forma regular, y distinguen aquellos en los que van creciendo en el número de elementos.

Fig.3 Alejandra identifica la repetición y crecimiento de los elementos

Y en el segundo ejemplo hay parecidos, pero no siempre son los mismos números

367.5121031100331111000333...

Posteriormente se presenta la secuencia donde se abordan las sucesiones: en ella algunos estudiantes realizan conteos de uno a uno, sin percatarse del patrón que se presenta, en otros se logra la conformación de la unidad de análisis, donde los tres elementos expuestos son representados por el número 3, esto debido a que la construcción que hacen está compuesta por tres elementos.

Actividad 1: Sucesiones

Se realizará una carrera en la que los competidores participarán en patineta, bicicleta o corriendo. Esto estará definido por el número de inscripción que le toque. Del orden mostrado en la figura, ¿de qué manera realizará el recorrido aquél que se inscribió en el número 219?

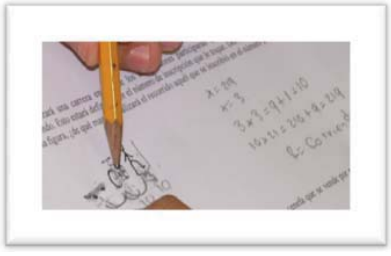
Víctor: realiza la actividad mediante la suma y luego se percata de que será más rápido si multiplica empleando herramientas numéricas

Víctor:
sumo de 3 en 3, Mejor multiplico y me acerco al 219
10 x 21 , me da 210, y le sumo los 9 que me faltan; será corriendo

Iván:
Cada 3,es un grupo, cuento cuántos grupos hay en 219
Así se que el último, lo descompongo en las opciones

Fig.4.Uso de las operaciones, en la búsqueda del resultado.

Luis: **El número que me tocaría seria 219, así que divido entre las formas que son 3, y encuentro que sería corriendo.**



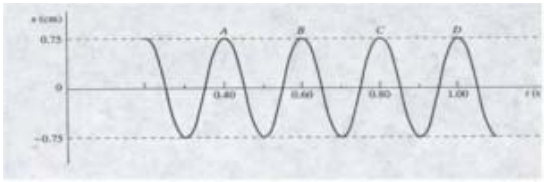
219/3=73, el último número se corresponde a la opción 3 es decir corriendo.

Fig.5 Luis, realiza un conteo puntual

Luis inicia su análisis, mediante un conteo uno a uno, en este caso observa la sucesión y ésta es iconográfica, ajusta el residuo a la unidad de análisis construida y observa que parte corresponde a la posición solicitada, dependiendo de la configuración definida por el contexto y el objeto matemático empleado. Las herramientas que intervienen como auxiliares al uso del a unidad de análisis, son multiplicación y la división. En la secuencia de Sucesiones, los estudiantes emplearon un conteo simple, mientras se identifica cierta *regularidad*. Después inicia un procedimiento de agrupación, en el que se constituirá una unidad de análisis, que es identificada a partir de los referentes curriculares del estudiante, argumentan sobre *serie, orden, repetición, constante*. Logrando predecir la opción que le correspondería a 219,282 y 317.

Actividad 2: Funciones

1. La siguiente gráfica describe el movimiento de una partícula sobre una recta horizontal, durante un tiempo determinado. La distancia (*x*) se mide en centímetros y en tiempo (t*)* en segundos.



a) Describa el movimiento de la partícula

b) ¿Cuál es la posición de la partícula a los 3 segundos?

c) ¿Cuál será su posición en el segundo 124?

Alejandra: *La partícula, se moverá en un ir y venir, de un lado a otro, de forma regular.*

Luis: *si hace el movimiento de la grafica, quiere decir que su movimiento si es constate y regular así que me parece si es periódico.*

Fig.6. Luis analiza el recorrido

Iván: *creo que va y viene, va y viene, por lo tanto es constante y también igual, así que diría que es periódico*

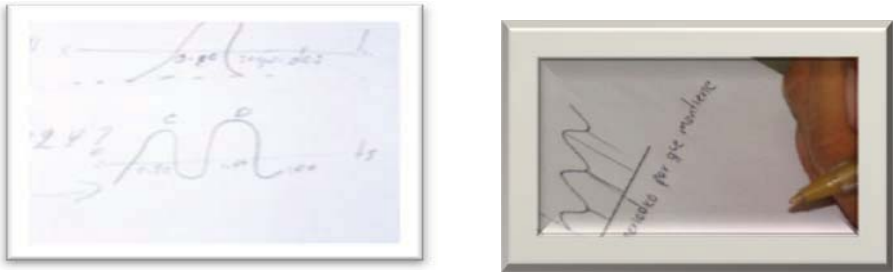


Fig. 7 Iván analiza los puntos significativos para el

Miguel: *Lo periódico, es lo que se repite, es algo que aparece varias veces y es igual.*

Víctor: *Tiene que ver con las series, regularidades, series*

Al trabajar en un contexto de funciones, la identificación de la unidad de análisis fue diversa pues se trabajaron contextos de gráficas. Al presentar la secuencia de funciones, fue evidente la acción de identificar el periodo de la función como unidad de análisis como un" trozo de la gráfica" ya que propone información del todo y las partes, es decir, *el periodo* se identifica como *"aquello que se repite"* .

Comentarios finales

Las operaciones usadas como la suma, multiplicación y división, funcionan a manera de herramientas que permiten la movilización en el tiempo, cuando la tarea es predecir en contextos periódicos; es decir, surgen en *el uso* de la unidad de análisis. El estudiante recurre a la multiplicación, cuando percibe que ésta es más funcional que la suma; mientras que la división, la utiliza para la predicción que le resulta *lejana*, y se da cuenta de la facilidad de transportar al presente la información futura, en la búsqueda del lugar más próximo a la posición requerida. La dificultad con esta herramienta puede estar en manipular el residuo de la división pues tiene que establecer un proceso de ajuste al que le hemos llamado (deconstrucción) *descomposición de la unidad de análisis.* Éste se lleva a cabo cuando el estudiante observa el residuo que le indica que aún está lejos de la posición requerida. Toma la unidad de análisis e identifica cada uno de sus componentes, realiza el conteo uno a uno de cada elemento según los componentes de la unidad de análisis.

Creemos que estos elementos estarán establecidos y, en su momento innovan, el estado de *lo periódico* como proceso u objeto en el conocimiento del estudiante. Por tanto, la construcción de lo periódico no se sustenta en apropiarse del objeto periódico sino en la identificación y uso de herramientas, como la unidad de análisis, al seno de una práctica de predicción que beneficia un tránsito significativo entre contextos. Lo anterior permite manifestar cómo la unidad de análisis es un vehículo que hace posible el acceso y tránsito del estudiante a los distintos contextos periódicos logrando su articulación contribuyendo a una construcción significativa del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G. (2005). Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 77-90), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Mason, J. (1985). *Thinking Mathematically.* New York: Addison Wesley.

Purcelll, E. (1987) *Cálculo con Geometría analítica*. Cuarta edición. México: Grupo Editorial Prentice Hall

Olmos, R et al. (2006*) Matemáticas 1.*Segunda edición. México: McGraw-Hill

SEP, Libros de texto gratuitos de matemática., Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004. México, D. F.

INFLUENCIA DE LA ACTITUD EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Luisa Mabel Morales Maure, José Gabriel Sánchez Ruiz, Homero Roldán Rojas
UDELAS Panamá
FEZ-Zaragoza. UNAM, UAEH México
lui.mora@hotmail.com, josegsr@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Factores afectivos Nivel: Superior

Resumen. *La importancia de las actitudes en el aprendizaje de la Matemática ha sido reconocida en la literatura a través de diversos trabajos empíricos (Ursini, Sánchez, y Orendai, 2004; Gómez Chacón, 1999 y 2000). En México, no es un secreto para ninguno de los actores involucrados en el proceso educativo que los esfuerzos en esta asignatura por lograr un mayor aprendizaje en los estudiantes han mostrado ser insuficientes frente a los malos resultados obtenidos por ellos en las pruebas estandarizadas tanto a nivel nacional (ENLACE y EXCALE) como internacional (PISA, TIMSS y otros). Encontrar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿Influyen las actitudes hacia la Matemática en el rendimiento escolar de los alumnos? ha sido el motivo que llevó a realizar la presente investigación. En la medida en que se investiguen aspectos de incidencia de tipo psicológico, en este trabajo el actitudinal, en el proceso educativo se obtendrá información que permitirá tomar decisiones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.*
Palabras clave: Actitud, cognición, rendimiento académico, matemática, emociones

Los rápidos avances científicos, tecnológicos, sociales y culturales imponen nuevas formas y maneras de interacción entre el sector educativo y el socio productivo. La sociedad en su conjunto se enfrenta a cambios de realidades y a la incertidumbre que estos provocan. Entre otras reacciones, se presenta la ansiedad no sólo en los adultos sino también en los salones de clase entre los actores de este escenario, es decir, los alumnos y los docentes. En este tipo de reacciones se reconoce también la influencia de la *dimensión emocional en el aprendizaje en el aula* (Gómez-Chacón, 2000). Sin embargo, es necesario un mayor desarrollo de sus descriptores básicos, tal como las actitudes, emociones, creencias y valores. Dada la relevancia o influencia de estos factores se les ha dado gran importancia, y se han tomado como ejes de referencia en la Educación Matemática por ser factores clave que impactan directamente en la comprensión y, en consecuencia, en el rendimiento académico de esta materia. Paradójicamente, el desarrollo de las nuevas tecnologías y el avance científico en la era de las telecomunicaciones, requieren diferentes tipos de valores personales, espirituales y emocionales. Tecnología y humanismo no debieran ser dos conceptos contrapuestos sino complementarios del ser humano. En tal sentido, la enseñanza de la Matemática constituye uno de los objetivos fundamentales del currículo, por considerarla un

medio para el mejor entendimiento del hombre, de sus realidades y de su interrelación. Alcanzar un dominio aceptable de los conocimientos matemáticos básicos es un requisito indispensable en la cotidianidad. El tema de las actitudes cobra relevancia en virtud de la realidad existente en la calidad de la educación. Ugartetxea (2002, p. 3) destaca "que el rendimiento intelectual no sólo depende de aspectos cognitivos, existen elementos no cognitivos, afectivos, que inciden con una importancia elevada en tal rendimiento". Por ello es pertinente preguntarse qué tanto influyen las actitudes de los estudiantes en su rendimiento académico en matemáticas, y si alguno de los componentes de la actitud está relacionado con el rendimiento obtenido, aunque no se tienen reportados estudios referentes a este tema.

Encontrar una respuesta a la pregunta ¿influyen las actitudes hacia la Matemática, en el rendimiento académico de los alumnos universitarios? fue lo que motivó la realización de la presente investigación. Los autores de este trabajo consideran que en la medida en que se investiguen aspectos de incidencia de tipo psicológico (actitudinal) en el proceso educativo se obtendrá información que permitirá tomar decisiones para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje, puesto que dentro de la problemática de la Educación Matemática están involucradas variables, como las actitudes, que no les permiten crecer a los estudiantes de manera significativa en el aprendizaje de esta ciencia. El objetivo de este trabajo es evaluar la influencia de las actitudes en el rendimiento académico en Matemática en estudiantes universitarios.

Planteamiento del problema

El proceso del aprendizaje de la Matemática (como objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática, también denominada Matemática Educativa), ha sido analizado y estudiado desde distintas perspectivas que proporcionan valiosos aportes que permiten establecer orientaciones curriculares de la Matemática, cuyos elementos psicológicos, metodológicos y epistemológicos están orientados a la participación del docente, de manera que tales aspectos se deben situar dentro de la aspiración a un proceso de desarrollo personal donde el clima escolar fomente una actitud positiva hacia el trabajo y la ciencia.

Tradicionalmente, las actitudes de los estudiantes hacia la Matemática no han sido siempre las más favorables (Auzmendi, 1992), gran parte del estudiantado llega a esta asignatura con un perfil

emocional que se traduce en un rechazo, letargo o apatía hacia el aprendizaje de la Matemática. Es evidente que existe una gran problemática en el aprendizaje de la Matemática ya que cada año se observa un creciente número de fracasos estudiantiles relacionados con la Matemática. De igual forma se advierte que la mayoría de los estudiantes del nivel medio superior adolecen de conocimientos matemáticos básicos, observándose que el 93% de los estudiantes que egresan de instituciones públicas y en menor medida de escuelas privadas, tienen conocimientos insuficientes en el ámbito del razonamiento matemático y cognitivo (PISA, 2003). Todo esto lleva a considerar que existen además de factores cognitivos, socioculturales y socioeconómicos, distintos factores de tipo psicológico, como motivacionales, actitudinales, entre otros, que pueden afectar al aprendizaje de la Matemática.

Para este trabajo de investigación la hipótesis fue la siguiente: *los alumnos con actitudes positivas hacia la Matemática obtendrán mejores calificaciones y su rendimiento académico será sobresaliente.*

Aspectos teóricos

Las actitudes presentan un tema básico en el estudio de la Psicología Social, ya que éstas constituyen una determinada orientación del individuo, con respecto a su medio social y físico. De acuerdo a Mann (1972) "Tener una actitud implica estar listo a responder de un modo dado a un objeto social" (p. 429). Es decir, una actitud supone una predisposición para acercar o evitar un objeto social determinado. Asimismo, la actitud de la persona frente a una situación de su ambiente refleja la manera en que enfrenta su yo interno y permite que se dé la exteriorización de sus conflictos, lo que reduce la ansiedad, similarmente se puede asociar con los mecanismos defensivos de protección y desplazamiento.

En la literatura se suele definir una actitud como: una tendencia a evaluar una entidad con algún grado de aceptación o rechazo, normalmente expresado en respuestas cognitivas, afectivas o conductuales (Eagly y Chakine, 1993, citado por Aiken, 2002). El estudio de las actitudes constituye un valioso aporte para examinar y comparar la conducta humana, que se circunscribe en la tendencia que busca rescatar la función formadora de la escuela en el ámbito del desarrollo moral, tanto desde el punto de vista individual como colectivo en un ámbito sociocultural. Son muchas las

conceptualizaciones que se pueden presentar del fenómeno actitud, pero consideramos que con los ya expuestos se tiene una noción clara del mismo. Ahora se procederá a presentar el concepto que fue utilizado en esta investigación, según Cook y Selltiz (citado en Summers, l984) la actitud es una disposición fundamental que interviene junto con otras influencias en la determinación de una diversidad de conductas hacia un objeto o clase de objetos, las cuales incluyen declaraciones de creencias y sentimientos a cerca del objeto y acciones de aproximación-evitación con respecto a este.

Las actitudes pueden manifestarse o expresarse mediante factores tales como: ideas, percepciones, gustos, preferencias, opiniones, creencias, emociones, sentimientos, comportamientos y tendencias a actuar. Sin embargo, existe consenso en considerar su estructura de dimensión múltiple como una vía mediante la cual se manifiestan sus componentes o dimensiones expresados en respuestas de tipo cognitivo, afectivo y comportamental.

- *Los componentes cognitivos* incluyen el dominio de hechos, opiniones, creencias, pensamientos, valores, conocimientos y expectativas (especialmente de carácter evaluativo) acerca del objeto de la actitud, se organizaron en tres grupos:

    a) Auto-concepto: que se refiere a la percepción que tiene el sujeto de sí mismo en su relación con la Matemática. En este grupo podemos incluir las siguientes categorías.

    Valoración de la Matemática: como fuente de conocimiento y aprendizaje. *Ansiedad:* caracterizada como un disturbio de los recuerdos de conocimientos y experiencias, asimismo, consiste en una preocupación extrema y poco realista que no está relacionada con los acontecimientos recientes.

    b) Matemática: son aquellas percepciones referidas al tema de estudio, en este caso la Matemática. Aquí se incluye la categoría de *competencia Matemática:* que se refiere a la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las Matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar los conocimientos en forma que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA, 2003).

c) Aspectos didácticos: son aquellas ideas y creencias acerca de las situaciones escolares en las que el individuo se relaciona con la Matemática. En este grupo se consideran las siguientes categorías.

Creencia: la cual se entiende como un modelo creado por la mente idealizándose generalmente en la interpretación de un contenido cognoscitivo.

- *Los componentes afectivos*, este componente representa la evaluación que hace una persona hacia algo, en este caso hacia la Matemática, así, el estudiante puede sentir hacia ésta simpatía o aversión. Estos componentes abarcan:

  Aceptación: que se refiere a la percepción del alumno sobre una asignatura que muchos consideran que no tiene más utilidad que realizar una serie de operaciones en la pizarra o en la libreta, sin un fin de utilidad. *Motivación:* es considerada como el impulso que conduce a una persona a elegir y realizar una acción, entre aquellas alternativas que se presentan en una determinada situación. *Interés,* el individuo tiene expectativa con respecto a su relación futura con la Matemática, particularmente, en los resultados que él puede obtener en su actividad académica. *Bloqueo emocional:* son fobias o inseguridades que limitan al estudiante como miedo al riesgo y falta de motivación, entre otras, sin permitirle abrirse a situaciones y estímulos que le resultarían gratificantes y le ayudarían a progresar en el camino de la vida, de no ser por sus propias restricciones.

- *Los componentes comportamentales*, muestran las evidencias de actuación a favor o en contra del objeto o situación de la actitud. En este componente se incluyen las siguientes categorías:

  Rechazo: que es la representación que tiene el estudiante de la Matemática y que se manifiesta en una oposición a estar en la clase de Matemática, así como las actividades extraescolares a realizar. *Confianza:* es la seguridad o esperanza firme de los estudiantes en sus conocimientos que pueden ser aplicados de manera positiva en la Matemática. *Compañerismo:* es la relación que se tiene con personas del salón de clases con las cuales se comparte ciertas cosas como trabajar en equipo y ayudarse mutuamente para lograr el cumplimiento de los objetivos trazados en cualquier proyecto laboral. *Curiosidad:* es

cualquier comportamiento inquisitivo natural que genera la exploración, la investigación y el aprendizaje.

Todos los componentes de las actitudes llevan implícito un carácter evaluativo hacia el objeto de la actitud. En este caso, dentro de la metodología que se empleó para la investigación se utilizó un instrumento de tipo encuesta Likert de 48 ítems. El siguiente es un ejemplo empleado en el componente cognitivo en la dimensión de competencia matemática.

Ante un problema matemático leo con detenimiento, comprendo, planteo una estrategia y luego trato de encontrar sus posibles soluciones.

( ) Totalmente de acuerdo ( ) De acuerdo ( ) Indeciso ( ) En desacuerdo ( ) Totalmente en desacuerdo

Según Auzmendi (1992) esta es la técnica de medición utilizada para evaluar las actitudes del estudiante hacia la matemática puesto que es una de las más confiables para la medición de las actitudes.

Resultados

¿Cómo se pueden medir? Según Summers (1984) cualquier expresión conductual que refleje o manifieste las cogniciones del individuo, particularmente sus creencias evaluativas con respecto a un objeto, puede servir para inferir la actitud. De manera análoga, cualquier expresión conductual que manifieste una emoción puede ser importante para hacer inferencias. Las manifestaciones conductuales que revelan la disposición del individuo de actuar hacia un objeto (ya sea positiva o negativamente) también pueden usarse como bases provisionales de inferencia de la actitud. Para la caracterización del rendimiento académico se utilizó el modelo propuesto por Lent, Brown y Hackett (1994) que define al rendimiento en un sentido amplio, incluyendo niveles de logro (calificación en las materias, por ejemplo) así como índices de persistencia conductual (estabilidad en la carrera elegida). Este modelo es de utilidad en la explicación de los logros de ejecución relacionados a las metas que el estudiante se plantea personalmente o en el caso de actividades que son impuestas o demandadas por agentes externos (el profesor, la escuela o el modelo educativo) pero ya adoptadas por el sujeto. Por las características de la muestra y el problema de

la investigación se ubica este estudio como Descriptivo y Correlacional en vista que el estudio tiene como propósito medir el grado de relación que existe entre las variables del estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 1991). Las variables de interés en el estudio fueron: la actitud hacia la Matemática y el rendimiento académico. La medición se realizó de manera indirecta a través del establecimiento de indicadores. Se aplicó el instrumento a estudiantes de las 13 carreras del Instituto de Ciencias Básicas e ingeniería (ICBI) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Con base en los resultados del estudio, se encontró una correlación (r= 0.758) significativa entre las actitudes hacia la Matemática y el rendimiento académico, con los estudiantes de nivel superior encuestados. El resultado obtenido es congruente con los hallazgos de investigaciones anteriores acerca de la relación entre actitudes y rendimiento en Matemáticas (Conde, Herrera, Sánchez y Nieto, 1999). Sin embargo, es recomendable realizar otros estudios semejantes para poder corroborar dichos resultados y sustentar mejor este índice de correlación. También se halló que los estudiantes que muestran baja confianza en sus conocimientos tienen la peculiaridad de presentar mayor ansiedad durante el periodo de exámenes, ello se refleja durante el proceso de evaluación, lo cual pudiera ser un elemento que influye en los altos índices de deserción y/o reprobación de los cursos.

Los resultados indican además que la actitud se ve afectada por la edad de los participantes (r = -0.156, p = 0) en la muestra general. Por grupo menor e igual a 18 la media aritmética en actitud es de 3.80 (desviación estándar de 0.711). En contraste, en los alumnos mayores de 18 años su media fue de 3.50 (desviación estándar de 0.875). Al parecer la variable edad juega un papel importante entre la actitud y rendimiento académico, destacándose que a menor edad hay mayor actitud positiva, como señala Suydam (citado en Auzmendi, 1992, p. 22) "…generalmente las actitudes hacia las Matemáticas tienden a ser positivas hasta el sexto grado y luego se van haciendo menos positivas a medida que el alumno accede a cursos superiores en el colegio". Según los resultados obtenidos, dichos estudiantes tienen una mejor actitud debida posiblemente a las expectativas por su ingreso a la universidad y su futuro desarrollo tanto profesional como emocional. Por otro lado, los alumnos de mayor edad (19 años o más) tienen un declive actitudinal en sus expectativas.

Reflexiones finales

En la actualidad el manejo de las destrezas Matemáticas es de gran importancia para lograr el éxito a nivel profesional y personal. Aprender un conocimiento radica en cómo este es recibido y aceptado por los estudiantes. Como lo han indicado algunos autores (Gómez Chacón, 2000), muchas veces aunque se varíe la forma de presentar el material en los cursos de Matemática la manera en que los estudiantes lo perciben no permite el acceso a las ideas, esto suele ocurrir cuando se han desarrollado actitudes negativas hacia dicha disciplina.

En este trabajo se han obtenido elementos que apoyan la hipótesis formulada al inicio. Se obtuvieron correlaciones significativas entre las actitudes hacia la Matemática y el rendimiento académico en los estudiantes universitarios participantes, particularmente, los alumnos que tienen actitudes positivas hacia el aprendizaje matemático tienen mejores calificaciones y su rendimiento académico es sobresaliente. En general, los estudiantes consideran a la actitud positiva hacia la Matemática como algo necesario e importante para desenvolverse en la dinámica del mundo actual. Por ello, se considera útil encaminar los esfuerzos para que las ideas y percepciones favorables del estudiante hacia la Matemática desencadenen en un acercamiento positivo hacia la Matemática escolar. Como lo han indicado algunos autores, asumir una actitud implica el posesionar el objeto de la actitud como un valor (Auzmendi, 1992).

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, se sugiere propiciar el desarrollo de buenas actitudes hacia el aprendizaje matemático por parte de los estudiantes mediante acciones educativas y motivacionales por parte de los profesores e incluso de todo el sistema educativo. En nuestra opinión, el docente es uno de los actores principales del fenómeno educativo ya que no sólo transmite contenidos sino que también fomenta valores, creencias, necesidades y, por supuesto, actitudes.

Referencias bibliográficas

Aiken, L. (2002). *Attitude and Related Psychosocial Constructs*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la Matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.

Gómez-Chacón, I. (1999). Toma de conciencia de la actividad emocional en el aprendizaje de la Matemática. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, UNO*, 21, 29-45.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P. (1991). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Conde, Ma. J., Herrera, G. Ma. E., Sánchez, G. Ma. C., y Nieto, M. S. (1999). Factores implicados en el rendimiento académico de los alumnos de la Universidad de Salamanca*. Revista de Investigación Educativa,* 17. (2), 413-424.

Lent, R., Brown, D y Hackett,G. (1994) Toward a Unifying Social Cognitive Theory of Career and Academic Interest, Choice, and Performance*. Journal of Vocational Behavior*, 45, 79-122.

Mann, L. (1972). *Elementos de Psicología social*. México: Limusa Willey, S.A.

PISA (2003). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003.* OCDE.

Summers, G. (1984). *Medición de actitudes*. México: Trillas.

Ursini S., Sánchez G. y Orendai M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñada con computadora. *Revista Educación Matemática*, 16, (3), 59-78.

Ugartetxea, J. (2002). La metacognición, el desarrollo de la autoeficacia y la motivación escolar. *Revista de Psicodidáctica*, 13. Documento en línea. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/175/17501304.pdf

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMER GRADO

Sonia Bibiana Benítez, Lidia María Benítez, Lidia Esper de Arias
Facultad de Ciencias Naturales e I. M. Lillo, Universidad Nacional de Tucumán — Argentina
soniabenitez2001@hotmail.com, lidiabenitez@hotmail.com
Campo de investigación: Modelación matemática — Nivel: Superior

Resumen. *Las transformaciones generadas por el fenómeno de la globalización e incrementadas por los recursos tecnológicos provocan cambios significativos en la educación y fundamentalmente en el nivel superior. Se propone una innovación pedagógica para la enseñanza y aprendizaje del tema Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1º grado y de 1º Orden en la carrera Lic. en Ciencias Biológicas. Se ha observado que en el ciclo básico se sigue enseñando con el modelo tradicional, de carácter netamente teórico, con una práctica logística, en la que existe una fuerte tendencia a lo abstracto. Esta innovación responderá a una planificación coordinada, en la que se distribuirán por etapas las actividades y acciones a realizar, para el logro de competencias y habilidades que mejoren el aprendizaje del tema en cuestión por parte del alumno, utilizando métodos y técnicas participativas.*
Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, modelación, aplicaciones a la biología

Introducción

Las transformaciones generadas por el fenómeno de la globalización e incrementadas por los recursos tecnológicos, provocan cambios significativos en la vida cotidiana. Estos cambios, sin lugar a duda, se ven reflejados en la enseñanza y en particular en la enseñanza superior.

La educación es el acceso de las personas y de las naciones a la sociedad global del conocimiento. Esta tiene que avanzar con la rapidez de los cambios tecnológicos y científicos para promover una mejor formación científica, tecnológica y humanística de la sociedad; el proceso educativo requiere mayores esfuerzos de sus docentes, estudiantes, y directivos, que se comprometan a propiciar espacios que propendan a mejorarlo.

Este trabajo propone una innovación pedagógica para la enseñanza y aprendizaje del tema *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) de 1º grado y de 1º Orden* en la carrera Licenciatura en Ciencias Biológicas.

Se ha observado en algunos casos sobre todo en el ciclo básico, quizás por el excesivo número de alumnos y los pocos docentes a cargo, que se sigue impartiendo los conocimientos con el modelo de enseñanza tradicional, de carácter netamente teórico, con una práctica logística, en la que existe una fuerte tendencia a lo abstracto. También los docentes experimentan una gran

resistencia al cambio, sin duda porque es más fácil y menos comprometido dar siempre clases expositivas, que tutorear en cada momento la maduración de los alumnos, quienes además se oponen con gran inercia a modificar sus costumbres, pues se sienten muchos más cómodos recibiendo el conocimiento del profesor que elaborándolos ellos mismos.

El concepto de innovación pedagógica supone tres cosas: la creación de algo previamente desconocido, la percepción de lo creado como algo nuevo y la asimilación de ese algo novedoso. En el campo de la educación, la segunda y tercera acepción son las que con mayor generalidad y frecuencia se prodigan. Es por ello que las autoras piensan que la implementación de la misma conducirá hacia los cambios necesarios para superar las debilidades arribas mencionadas.

Responderá a una planificación coordinada, en la que se distribuirán por etapas las actividades y acciones a realizar, orientándolos hacia el estudio independiente, que los conducirá a un mejor aprendizaje del tema en cuestión.

Se trabajarán clases teórico- prácticas donde los docentes involucrados lo harán en forma conjunta utilizando métodos y técnicas participativas. Este curso se dividirá en dos grupos de 50 alumnos, ya que en el primer cuatrimestre se hizo el decantamiento, este grupo reducido permitirá garantizar la interacción docente – alumno y también una real supervisión del trabajo de los grupos y el seguimiento y apoyo de los estudiantes de acuerdo al grado de asimilación de cada uno.

Fundamentación teórica

Las teorías que sustentan el desarrollo metodológico de este tema son: el Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky y el enfoque cognitivo Ausubel entre otros. Es decir teorías cognitivas estructuralistas, las que parten de una concepción constructivista del conocimiento.

El Enfoque Histórico Cultural de Vigostsky (1978) cobra gran importancia, pues se trata de una estrategia en constante enriquecimiento y desarrollo, considera a la actividad como el elemento fundamental para el desarrollo del individuo

El Enfoque Cognitivo dado por Ausubel (1987), cuya base teórica está dada por las estructuras cognitivas y el aprendizaje significativo permite al alumno potenciar su creatividad e independencia.

La Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel ofrece el marco apropiado para el desarrollo de la labor educativa, así como para el diseño de técnicas educacionales coherentes, constituyéndose en un marco teórico que favorecerá dicho proceso. Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

Se estructura el proceso de asimilación, diseñando situaciones de aprendizaje cuyo núcleo generador es un conflicto cognitivo, un sistema de tareas o problemas vinculados con el objeto de conocimiento lo que exige la participación activa del estudiante.

Desarrollo

El tema a tratar, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y de Primer Grado**,** forma parte de los contenidos de la asignatura Matemática que se dicta en primer año, es una materia anual correspondiente al ciclo básico para las carreras Lic. y Prof. en Ciencias Biológicas**,** y tiene como uno de los objetivos principales contribuir a la formación básica y al desarrollo de habilidades en los alumnos que los capaciten y ayuden al razonamiento, para un desempeño eficiente en las asignaturas del Ciclo Superior.

El tema resulta determinante para la formación matemática básica como así también una herramienta de utilidad para el desarrollo de la carrera, pues tiene una fuerte aplicación en materias como Genética. En la mayor parte de las otras áreas de la Biología no hay leyes que puedan utilizarse con la confianza con la que los geneticistas utilizan las leyes de Mendel. En la genética de poblaciones conocemos la manera en que los genes se segregan durante la reproducción sexual y utilizamos este conocimiento para predecir la evolución de las poblaciones. Los problemas biológicos se analizan tratando de captar sus cualidades biológicas básicas para luego ser estudiadas por medio del razonamiento y las estructuras matemáticas.

El objetivo primordial de las Ecuaciones Diferenciales es servir de instrumento para estudiar los cambios en el mundo físico. Los fenómenos naturales más interesantes implican cambios, por lo que se describen mejor mediante ecuaciones que relacionen cantidades variables. Dichas ecuaciones constituyen la reconstrucción de un proceso natural de su medio a una forma llamada modelo matemático. El ámbito de desempeño profesional de los egresados que se dediquen a la

rama de la genética u otras ramas, requiere comprender y dar respuesta a problemas biológicos, por lo que resulta importante desarrollar habilidades de Modelización Matemática, ya que es un instrumento de valor incalculable por las ventajas que ofrece.

Desarrollo de las clases

El tema se desarrollará en dos clases de dos 2 hs y una tercera clase de 4 hs, 2 hs para trabajar con los problemas propuestos y luego 2hs. para su posterior discusión.

La primera clase será teórica donde se motivará a los alumnos con las situaciones planteadas y recordará los conceptos vistos para abordar el tema. Se identificará y resolverá ecuaciones diferenciales ordinarias de 1º orden y de 1º grado. Se analizará y modelará un problema, encontrando su solución mediante un modelo matemático que represente a un fenómeno involucrado en el mismo

Para indagar acerca de las ideas previas de los alumnos, se realizará una conversación heurística, ya que en ella los alumnos tienen una activa participación, ejercitando el pensamiento de forma independiente resultando muy productiva desde el punto de vista mental. Se repasarán los conceptos de ecuaciones algebraicas y su resolución, concepto de función continua, concepto de derivada de una función y su interpretación geométrica y resolución de integrales indefinidas.

Para despertar en los alumnos el interés del tema Ecuaciones Diferenciales, se les comentará que muchos problemas con los que se encontrarán en materias del ciclo superior y en la vida profesional misma tienen que ver con cantidades que cambian o varían en el tiempo los cuales conducen a una Ecuación Diferencial.

Concluida la etapa motivadora, el docente formalizará los conceptos surgidos durante la misma:

- Definición de Ecuación Diferencial, orden y grado
- Definición de solución de una Ecuación Diferencial. Constante de integración. Verificación de las soluciones.
- Definición de: Ecuación Dif. Ordinaria de Primer Orden y de primer Grado.
- Métodos de resolución: Ecuaciones Separables.

La segunda clase será Teórico-Práctica. Para introducir otro Método de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias el docente genera en el alumno un conflicto cognitivo presentando un ejemplo que no puede resolver con el método aprendido. El alumno al pretender separar variables para integrar se enfrentará ante la imposibilidad de efectuarlo entonces el docente irá introduciendo paulatinamente preguntas a través de las cuales el alumno visualizará la imposibilidad de separar variables, y descubre que no puede avanzar en la búsqueda de soluciones con los conocimientos que posee sino que es necesario plantear estrategias alternativas mediante el desarrollo de métodos nuevos que le permitan resolver la Ecuaciones Diferenciales planteadas. Luego, el docente introduce y formaliza el método de resolución para las Ecuaciones Homogéneas. Como ejemplificación del tema, el docente resuelve la ecuación homogénea expuesta inicialmente.

Se aprovecha el contexto para volver a señalar los distintos tipos de soluciones: explícitas e implícitas.

La primera parte de la clase se concluye con una síntesis que consiste en una conversación con los alumnos, donde se revisarán los contenidos a la luz de los objetivos específicos planteados en la primera clase.

Se desarrollará la Actividad Práctica Nº1

Etapa materializada, tipo reproducción y etapa verbal, tipo producción.

Objetivos:

a) Consolidar y profundizar los conocimientos adquiridos en la clase teórica.

b) Identificar tipo, orden, grado y resolver una ecuación diferencial.

c) Resolver ecuaciones diferenciales con variables separables y homogéneas.

Al iniciar la clase se indagará a los alumnos sobre dudas de la clase anterior y se hará un breve repaso de los conceptos vistos, a través de una conversación heurística.

Se genera una Discusión Conferencia donde en cada subgrupo se discuten aspectos diferentes, los cuales fueron previstos en el orden lógico por el profesor.

Para la Discusión Conferencia se formarán 7 grupos de 7 estudiantes cada uno y se les indicará los ejercicios a resolver que forman parte del Trabajo Práctico. La distribución del contenido será la siguiente

Grupos 1, 4 y 7: Especificar orden y grado de una Ecuaciones Diferenciales. Verificar soluciones.

Grupos 2 y 5: Ecuaciones Diferenciales Separables

Grupos 3 y 6: Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Los grupos discutirán los ejercicios propuestos y organizarán según su criterio para la exposición correspondiente.

Durante la exposición de cada grupo que se hará según el orden previsto, cualquiera de sus integrantes podrá intervenir para aclarar o ampliar algún concepto. Al finalizar cada grupo, sus integrantes tendrán que responder a las preguntas que les formulen los otros equipos.

Por último, para evaluar la actividad se realizará un P.N.I. que permitirá mejorar las actividades siguientes. Para ello, los grupos que trabajaron con los mismos ejercicios se harán cargo de cada uno de los aspectos P, N e I.

P: son los aspectos que nos gustan de una idea

N: son aquellos que no nos gustan de una idea

I: son los aspectos originales o fuera de lo común de una idea

Esta técnica permite considerar las ideas desde diferentes puntos de vista y emitir juicios de valor pertinentes a la misma.

La tercera clase consistirá en resolver problemas de aplicación por parte del docente para una posterior discusión de los mismos.

Objetivos: Construir la ecuación diferencial que describe una situación real específica.

Determinar la solución apropiada para esa ecuación.

Actividad Práctica Nº2 a desarrollar por los alumnos, etapa mental, tipo creación. Se utilizará la Técnica de la rejilla. Una vez finalizada se realizará un P.N.I.

La técnica de la rejilla se utiliza cuando se quiere que el grupo maneje una considerable información en poco tiempo, que analice, sintetice y comparta en equipo

El profesor divide los problemas con los que se trabajará en tantas partes como equipos de trabajo se constituyan. Esta técnica supone dos momentos distintos de trabajo:

- se constituyen equipos que abordarán cada uno un tipo diferente de problema con el manejo de la teoría involucrada en el mismo. Los alumnos actúan como registradores, tomando nota de los aspectos esenciales contenidos en el material. Cada miembro tiene la responsabilidad de resumir lo tratado para presentarlo en el nuevo equipo del que formará parte.
- Luego, se reestructurarán los equipos, de modo que queden integrados por nuevos miembros provenientes de cada uno de los equipos anteriores.

Técnica de la rejilla

Se elegirán 10 problemas, dos de cada tipo a analizar y a distribuir en cada uno de los 5 grupos que se formarán.

Problemas A: Aplicaciones Geométricas

Problemas B: Aplicaciones de Enfriamiento y Calentamiento

Problemas C: Aplicaciones de Crecimiento de Población

Problemas D: Aplicaciones de Decaimiento Radioactivo

Problemas E: Problemas de Mezcla

Al aplicar esta técnica, aparecen logros axiológicos (Valores) no señalados explícitamente tales como los valores siguientes:

1. Cooperación entre compañeros.
2. Ayuda mutua.

3. Contribución al desarrollo de la capacidad lingüística.
4. Respecto a las opiniones de los participantes.

La evaluación es una práctica muy compleja. El concepto de evaluación varía según las necesidades a las que ella sirve y en función de las diferentes formas de concebirla.

Para el constructivismo, aprender es una construcción que realiza individualmente cada sujeto en la que tienen importancia las ideas previas sobre todo aquello que se ha de aprender. Conocer las ideas previas que tienen los alumnos sobre un tema o un concepto es la plataforma desde la que aprenden.

En todo proceso de evaluación se establece una dinámica entre funciones, destinatarios, beneficiarios, modos y etapas de la misma. Atendiendo el marco teórico en que se sustenta este trabajo, el enfoque Histórico cultural de Vogotsky, la Teoria de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales, por mencionar algunos autores, se encuentran importantes contribuciones para el estudio de la evaluación del aprendizaje, poniendo especial énfasis en la formación del autocontrol y la autoevaluación.

En este trabajo, se propone una autoevaluación y un modelo de evaluación sumativa. Autoevaluación: actividades para que el alumno se auto-examine.

Evaluación Sumativa: que tiene como propósito valorar el aprendizaje del alumno respecto del tema desarrollado, tanto en sus conocimientos como sus habilidades. No obstante se realizan otras evaluaciones durante el desarrollo del proceso de asimilación: al comienzo de cada clase en forma oral (Diagnóstica**)** y durante el desarrollo de las clases (Formativa**)**.

Conclusión

Sistematizar la clase, introducir innovaciones, obliga a revisar y organizar los contenidos de una manera distinta, exige atender dichos contenidos a la luz del perfil del egresado que muchas veces se lo deja de lado.

Resulta fundamental organizar las clases sustentadas en un marco teórico porque permite dejar de ser intuitivos para transformarse en docentes capaces de fundamentar su propia tarea marcando los por qué de las decisiones tomadas.

Pero es necesario tener en cuenta que cualquier metodología que se use es sólo un medio, que no es mágica y que por el sólo hecho de aplicarlas no se logran actitudes. Más importante es la *actitud de quien la aplica.*

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Editorial Trillas.

Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. (1998). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. México: Editorial Limusa S A.

Colectivo de autores **(**1996). *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas.* Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES), Universidad de La Habana, Cuba.

Díaz Barriga, A. (1990). *Curriculum y evaluación escolar*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.

Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G. (1997). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México: McGraw-Hill.

Nagle, K., Staff, E. (1992). *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Piaget, J. (1978). *La Equilibración de las Estructuras Cognoscitivas*. Madrid: Editorial Siglo Veintiuno.

Pérez Pantaleón, G. (2003). *Metodología de la Investigación Científica y Educacional.* Compilación de Materiales para cursos de Perfeccionamiento, Posgrados y Maestrías. Tucumán, Argentina.

Simmons, G., Robertson J. **(**1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Editorial Mcgraw-Hill.

Spiegel, M. R. (1994). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Talízina, N. F. (1988). *Psicología de la Enseñanza.* Moscú: Editorial Progreso.

Vigotsky, L., (1973). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, A.R., Leontiev, A. y Vigotsky, L.S. (Eds.). *Psicología y Pedagogía*. Madrid: Editorial Akal.

Vigotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial Grijalbo.

Vigotsky, L. S. (1973). *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar.* Madrid: Akal Ed.

Vigotsky, L. (1978). *La mente en la sociedad: el desarrollo de las funciones psicológicas superiores.* Cambridge: Harvard University Press,

APLICACIÓN DE UN INSTRUMENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS PARA MEDIR LA ACTIVIDAD COGNITIVA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA ALREDEDOR DEL FENÓMENO SISTEMA MASA-RESORTE

Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega y Álvaro Encinas Bringas
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California México
maxito6782@hotmail.com, maxito6782@gmail.com, aencinasb1834@gmail.co
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Se presentan los resultados de la aplicación de un instrumento de medición para establecer la eficiencia de dos métodos de enseñanza sobre las actividades cognitivas que logran estudiantes alrededor del fenómeno sistema masa-resorte, en un curso de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. La administración del instrumento se realizó con 48 estudiantes, 18 de los cuales enfrentaron el objeto de aprendizaje con un enfoque de enseñanza tradicional (Gerald, 2002), mientras que el resto de los estudiantes trabajaron con una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora graficadora, y su diseño se basa en la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1993). Los resultados de la aplicación muestran de manera significativa, mayores niveles de eficiencia en cuanto a la competencia de representación para los estudiantes que abordaron el objeto de estudio mediante la estrategia didáctica que incorpora la calculadora.*
Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, sistema masa-resorte

Introducción

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos, los cuales deben ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. También se espera que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural, así como también que logren competencias para modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico y formal. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje esta enmarcada en un contexto físico o de ingeniería.

Estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria se centra en el funcionamiento dentro del cuadro analítico o algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, 1995). Al parecer sólo se prepara a los estudiantes con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos.

En la formación del ingeniero se estima que el 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, a saber: álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas más. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es precisamente el denominado sistema masa-resorte, el cual tiene múltiples aplicaciones en las diversas áreas de ingeniería.

Una situación que impera actualmente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California son los índices de reprobación estudiantil en los cursos de ecuaciones diferenciales del 23% en promedio (determinado desde el ciclo lectivo 2004-2), lo cual es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 75 alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura.

En el presente proyecto de investigación se diseña e implementa una estrategia didáctica, misma que es diseñada a partir de las teorías cognitivas (Duval, 1993, 2000) y (Hitt, 1991, 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998) rescatando dos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, trivialización y visualización, calificados como fundamentales en los referentes teóricos citados, la trivialización en el sentido de no ser obstáculo (por la presencia y uso de la calculadora) en la complejidad algebraica de las ecuaciones diferenciales involucradas durante el proceso de modelización y resolución del fenómeno en cuestión, y la visualización en el sentido de ilustrar el objeto matemático desde sus diferentes representaciones, esta última consideración o estilo de enseñanza se le reconoce como “el poder de la visualización”. El Diseño de la estrategia didáctica considera la dialéctica herramienta – objeto, de acuerdo a (Douady R. 1985), en el cual los conceptos matemáticos van alternando el papel de instrumento o herramienta para afrontar o

resolver un problema, y de objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado.

De acuerdo a PISA (2003) la competencia matemática enfatiza en el uso funcional del conocimiento matemático en situaciones diversas de manera reflexiva y basada en una comprensión profunda, se aclara que la competencia y el conocimiento no son antagónicos, sino mas bien existe una dependencia y una interrelación entre ambos, el conocimiento matemático no debe verse solamente desde una perspectiva conceptual, es decir una persona no es competente solo por saber algo, o solo por saber hacer algo, sino por saber hacer algo, a partir del saber, es decir saber hacer a partir del saber comprendiendo lo que se hace, como se hace y porque se hace, en este sentido la teoría y la práctica no pueden estar desasociadas.

Se alude aquí a una enseñanza tradicional de acuerdo a Gerald (2002), en donde señala que el trabajo con la calculadora no tiene que enfatizarse hasta que las habilidades del cálculo estén bien establecidas, aunado a un proceso de evaluación que se distingue por pruebas de medición que se abocan especialmente a la eficiencia con que se utilizan las reglas y algoritmos matemáticos.

Se presentan los resultados tanto del diagnóstico como del comparativo de las competencias matemáticas logradas por los estudiantes a partir de la implementación de la estrategia didáctica y el post-test.

Desarrollo metodológico

Se evalúa la eficiencia de los conocimientos mediante las competencias matemáticas de los estudiantes en cuanto modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar cálculos, puesto que tales competencias se involucran en general y de manera directa en el logro educativo y desempeño matemático de los estudiantes de ingeniería.

El estudio involucró a dos grupos de estudiantes inscritos en la materia “Ecuaciones Diferenciales” de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Baja California. Ambos grupos fueron seleccionados de manera aleatoria.

El diseño de investigación que se utiliza es el denominado experimento "puro" (Hernández, 2006), en virtud de que se manipula de manera intencional, variables independientes y se mide la variable dependiente, así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos. Con el objeto de comprobar si existe diferencia de la eficiencia de conocimientos que logran los estudiantes ante los dos enfoques de enseñanza se usa la prueba de medias (Walpole & Myers, 1989).

Con el propósito de establecer las condiciones de los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas específicas (modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones), logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, se diseñó y aplicó un instrumento de medición diagnóstico con la consideración de los criterios de Contreras (2004) para la generación de ítems en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum, a la vez es matricial ya que involucra amplitud en contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales han sido estudiados y tratados por los estudiantes tanto en cursos de cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística y métodos numéricos previos, como en el propio de ecuaciones diferenciales

Participaron en la investigación 48 estudiantes de la Facultad de Ingeniería, 30 de ellos integraban el grupo experimental o piloto, y el resto trabajaron de manera tradicional, la experimentación tuvo una duración de 12 días incluyendo la aplicación de la posprueba. La calidad del experimento fue verificada mediante su validez interna (Hernández, 2006).

El instrumento de medición post-test o posprueba esta constituido por 21 reactivos y se ha diseñado bajo las mismas consideraciones que el diagnóstico, a diferencia que se aboca a determinar la eficiencia de conocimientos adquirido por los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas, alrededor de los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte. Con el objeto de ejemplificar los reactivos del instrumento, a continuación se muestra la tarjeta descriptiva del reactivo número 18 de la posprueba.

No. de Reactivo: 18
Competencia: 3. Representar
Indicador: 3.1 Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.
No. de identificación: 3.1
18. La tabulación que se te presenta responde al conjunto de parejas ordenadas tiempo contra posición, de un sistema masa resorte. Determina en base a su análisis el tipo de movimiento al que corresponde. t $x(t)$ 0.0000 1.0000 .25000 .09312 .50000 -.5282 .75000 -.5010 1.0000 -.1013 1.2500 .21864 1.5000 .24542 1.7500 .07392 A) No amortiguado B) Sobreamortiguado C) Críticamente amortiguado D) Subamortiguado
Contenido matemático involucrado en el reactivo: Movimiento libre no amortiguado, movimiento sobreamortiguado, movimiento críticamente amortiguado, movimiento subamortiguado, factor de amortiguamiento, rigidez. Se considera que la complejidad de la comprensión es estructural, y la actividad cognitiva es de tratamiento. El registro original se considera que es numérico y el registro final es en el lenguaje natural.

La posprueba se administró a ambos grupos al finalizar el estudio y tratamiento del fenómeno sistema masa-resorte, de manera que la comparación de los resultados permite determinar si existe diferencia de la eficiencia de conocimientos de los estudiantes.

La determinación de la eficiencia de los conocimientos que logran los estudiantes se lleva a cabo mediante competencias matemáticas (enlistadas en párrafos anteriores), asumiendo el modelo que PISA-OCDE utiliza para las evaluaciones internacionales.

Análisis de resultados

El diagnóstico permitió establecer la uniformidad previa en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes que participaron en la investigación, toda vez que una prueba de

hipótesis de medias con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ evidencia que no hay diferencia en las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos participantes antes de iniciar la experimentación. Se encuentra en De Las Fuentes y Arcos (2008) que las competencias de modelado y planteamiento y resolución de problemas es en donde se obtuvieron los valores de más baja eficiencia (0.45 y 0.47) por parte de los estudiantes de los grupos de investigación, a diferencia de las competencias de representación y la utilización del lenguaje lógico, formal y técnico y ejecución de los cálculos, en donde se presentó un rendimiento mayor (0.56 y 0.55).

La confiabilidad del instrumento de medición post-test es establecida a partir del coeficiente de Kuder – Richarson (KR21), cuyos parámetros involucrados son el número de ítems, media y desviación estándar de los resultados de los estudiantes, la confiabilidad calculada es 0.72, considerado como aceptable para Lafourcade (1971) para el caso de exámenes no estandarizados.

Los cálculos y resultados de la prueba de igualdad de medias para las competencias se llevaron a cabo mediante los índices promedio de dificultad. Los instrumentos de medición diagnóstica y post-test fueron diseñados en conjunto tanto por el investigador como por los instructores participantes en la investigación, se incluyeron sólo preguntas de opción simple, una correcta y tres distractores, lo anterior con la finalidad de enfatizar de manera más objetiva en el aprovechamiento de los grupos tanto de control como piloto. Cabe señalar que en la aplicación de los instrumentos de medición no se permitió el uso de libros, los llamados acordeones, ni calculadoras. Para el caso de los resultados obtenidos en la competencia de representar, se cuenta con los siguientes parámetros.

Grupo	Competencia	No. de alumnos	Media de la dificultad x	Desviación estándar s	Variancia s^2
Piloto	Representación	30	0.5825	0.1347	0.0181
Control	Representación	18	0.3050	0.1510	0.0228

Los resultados de las pruebas de hipótesis para medias de los índices promedio de las competencias matemáticas para el planteamiento y resolución de problemas, representación y utilización del lenguaje simbólico y formal son favorables para el grupo experimental en el que se implementó la estrategia didáctica.

Cabe resaltar en la competencia de representación que todas las diferencias de los índices de dificultad son positivas para el grupo experimental, lo cual indica que la estrategia didáctica promueve de manera importante el desempeño de los estudiantes.

En cuanto a la competencia de modelado este grupo evidenció de manera significativa menor eficiencia de conocimientos. A la vez se observa un notable bajo rendimiento del grupo de control en cuanto a la competencia matemática para el planteamiento y resolución de problemas. Nuevamente se detecta en lo general baja eficiencia en las competencias de modelado y planteamiento y resolución de problemas respecto de las competencias de representación y utilización del lenguaje simbólico y formal. Lo cual evidencia el arraigo del enfoque de enseñanza tradicional.

A partir de los resultados de la prueba de hipótesis para establecer diferencias en cuanto a la actividad cognitiva tanto de representación como de tratamiento, el grupo piloto en lo general sobresale significativamente en ambas, respecto del grupo de control, en el caso del tratamiento externo o conversión no hay evidencia para diferenciar a los grupos de control y piloto.

Conclusiones

El balance general respecto de la eficiencia de conocimientos favorece al grupo experimental, como lo evidenció la prueba de hipótesis de medias respecto al aprovechamiento, en cuanto que con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ y $v = 46$ grados de libertad se rechaza la hipótesis nula planteada en la investigación, toda vez que se obtiene el estadístico $t = 2.96$ contra el rango de rechazo de la hipótesis nula $t < -1.96$ y $t > 1.96$, lo que significa mayor eficiencia de conocimientos de manera significativa por parte del grupo experimental.

También se identificó el reto de reforzar la competencia de modelado en el grupo experimental, toda vez que uno de los propósitos del curso de ecuaciones diferenciales para ingeniería es precisamente la posibilidad de que los estudiantes modelen los fenómenos físicos, químicos y de

ciencia en general, lo anterior implicará modificar algunos aspectos del diseño de la estrategia didáctica con el apoyo de herramientas de aprovechamiento del aprendizaje en la disciplinas de ingeniería.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady R., Moreno L. & Gómez P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, pp. 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, L., Bachhoff, E. & Larrazolo, N. (2004). *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica.* México: Manual Moderno.

De Las Fuentes, M., Arcos, J. & Díaz, B. (2008, 3 de octubre). *Diseño de una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California.* Investigación presentada en el Octavo Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad, Universidad y Política Educativa "Ser, Hacer y Deber Ser". Recuperado 19 de noviembre de 2008, de http://www.retosyexpectativas.uan.mx

Demana, F. & Waits, B. (1998). *El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas.* Recuperado el 12 Marzo de 2007, de sitio de la Universidad de Ohio, Estados Unidos: http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/roleofgraphcalc.pdf

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7 (2), 5-32.

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiótique et Fonctionnement cognitif

de la Pensée. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*. pp. 37–65. Strasbourg, France: IREM.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Recuperado el 12 Marzo de 2007 de http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf

Gerald, A. G. (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.

Hernández, S. R., Fernández, C. C., & Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la investigación* (4a. ed.). México: Mc. Graw Hill.

Hitt, E. F. (1991). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación Matemática*, 7, 63-75.

Hitt, E. F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes de Tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana* 10(2), 12-21

Kutzler, B. (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas (J. Jiménez, Trad.). En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez & E Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: (Artículo original en inglés Kutzler B. The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics.

Lafourcade, P, (1971), *Evaluación de los Aprendizajes*. Buenos Aires: Kapelusz

PISA. (2003). *Marcos Teóricos de Pisa.* [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web http://www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf

Walpole, R. E., y Myers, R. H., (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. México: Interamericana.

EL ANÁLISIS DE LAS REDES SOCIALES: UNA HERRAMIENTA MATEMÁTICA APLICADA A UNA SITUACIÓN EDUCATIVA

Lucía Rodríguez Montelongo, Carmen Mercedes Torrente
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán Argentina
lucymon@it.unt.edu.ar, ctorrente@fbqf.unt.edu.ar
Campo de investigación: Modelo matemático Nivel: Medio

Resumen. *En este trabajo se presenta una aplicación del Análisis de Redes Sociales (ARS) al estudio de las relaciones entre alumnos de segundo año de una Escuela Técnica. El ARS se apoya en la teoría de grafos cuyo bagaje matemático permite analizar y medir, en términos generales, propiedades de las estructuras sociales en particular la escuela. La vida escolar es una trama compleja de factores que influirían en el rendimiento académico de los alumnos, tales como: tiempo de estudio que comparten, desde cuándo se conocen entre los compañeros, la proximidad de sus domicilios, sexo, edad, entre otros. Los factores sexo y edad no son relevantes dado que el grupo bajo estudio está formado por varones alrededor de los 16 años. En este trabajo se mostrarán los resultados obtenidos por el primer factor mencionado que fueron procesados a través de los software Ucinet 6 y Netdraw.*
Palabras clave: Redes sociales, educación, rendimiento académico

Introducción

El Análisis de Redes Sociales (ARS) estudia las relaciones entre actores sociales, describiendo la manera en que éstos están insertos en una red relacional. Según Hanneman "una red se trata básicamente de un conjunto de actores entre los que existen vínculos (o relaciones). Para entender acertadamente una red social es necesario realizar una descripción completa y rigurosa de las estructuras de sus relaciones como punto de partida para el análisis y este análisis se realiza a través de técnicas matemáticas" (Hanneman, 2000).

El ARS es una metodología que toma conceptos de la teoría de grafo y permite entre otras cosas representar la descripción de una red de manera concisa y ordenada, tener operaciones matemáticas que pueden ser utilizadas para analizar y medir diferentes propiedades de las estructuras sociales en particular la escuela. Estas características de la teoría posibilita el uso de la computadora para almacenar y manipular rápidamente la información a través de software, mostrando además de lo que se está buscando, otros aspectos que no son posibles de ver cuando se presenta la información en un texto.

La vida escolar es una trama compleja de factores que influirían en el rendimiento académico de los alumnos. Para Requena Santos el rendimiento académico es fruto del esfuerzo y la capacidad

de trabajo del estudiante, de las horas de estudio, de la competencia y el entrenamiento para la concentración (Requena Santos, 2001).

Dado que el propósito de este trabajo es caracterizar matemáticamente uno de los factores que influyen en el rendimiento académico, "tiempo de estudio que comparten", se dejan de lado otros tales como: desde cuándo se conocen entre los compañeros, la proximidad de sus domicilios, sexo, edad, entre otros. Los factores sexo y edad no son relevantes dado que el grupo bajo estudio está formado por varones alrededor de los 16 años. Para analizar el rendimiento académico con la metodología del ARS se consideró el promedio final, que se asignará al atributo "calificación", que obtuvo el alumno en la asignatura Matemática

Metodología

Para estudiar el factor "tiempo de estudio que comparten" se realizó una encuesta a los alumnos de segundo año, división "A", de la carrera **T**écnico **M**ecánico **E**lectricista (TMEA) de una escuela dependiente de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). La pregunta realizada fue:

¿Con qué compañeros has compartido horas de estudios durante este año?

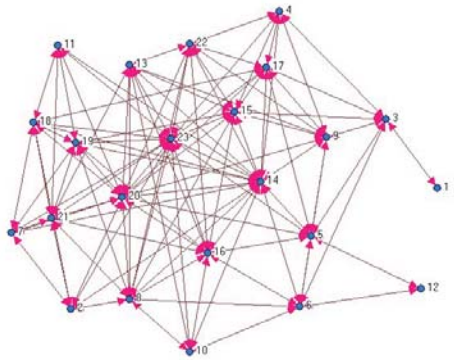
Con las respuestas brindadas por los alumnos se construyó una matriz de 0 y 1. El 0 corresponde a "no compartió horas de estudios" y el 1 corresponde a "si compartió horas de estudio". En dicha matriz se observaron dos respuestas contradictorias. Por ejemplo, el alumno 3 dijo no haberse reunido con el alumno 17, es decir que el elemento $m_{3,17}$ de la matriz es 0, mientras que éste último, respondió que sí compartió horas de estudio con el alumno 3, o sea $m_{17,3}$ es 1. La contradicción puede ser llevada a un 0 o a un 1. En este trabajo se ha supuesto que la reunión existió, lo que equivale a 1, lográndose la matriz simétrica llamada M_1 que se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1. Matriz M_1 de los alumnos de segundo año de la carrera de TMEA

M1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
3	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
5	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
9	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
14	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
15	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
16	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
17	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
18	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
19	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
20	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
21	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
22	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
23	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Resultados

El procesamiento de los datos de la matriz M_1, se realizó con los software Ucinet 6 y Netdraw y se obtuvo la Red1.



Red 1. Red de la matriz M_1

En esta red los nodos representan los alumnos del curso y la relación “compartir horas de estudio” se representa por una línea con doble flecha por ser esta relación simétrica.

Haciendo **un análisis cualitativo** de la red se observa que la mayoría de los alumnos están relacionados entre sí, que el alumno 1 sólo se relaciona con el 3 y que el alumno 12 únicamente lo

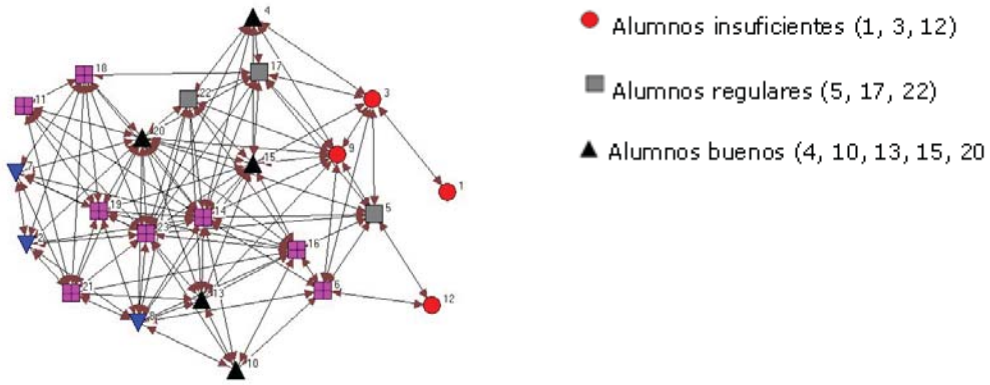
hace con 5 y 6.

Para evaluar el rendimiento académico de los alumnos se analizó la red junto al atributo "calificación", ya que, como es sabido, ésta es una de las clásicas manera de evaluar el rendimiento. Se consideró el promedio final de Matemática y la escala de calificaciones se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2.Escala del atributo calificación

Escala	Insuficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente
Calificación	[0,4)	[4,5)	[5,7)	[7,9)	10

A partir de la Red1 junto al atributo "calificación" y utilizando los software mencionados se obtuvo la Red 2, que se muestra a continuación.



Red 2. Red1 con el atributo calificación

Si se analiza la Red2 cualitativamente se puede observar otras características del curso bajo estudio. Por ejemplo que los alumnos 1 y 12, que se relacionaban con muy pocos compañeros, son alumnos cuyas calificaciones eran insuficientes, [0,4). Por otro lado, casi todos los muy buenos alumnos compartieron horas de estudios entre sí y muy pocos lo hicieron con los regulares o los insuficientes. Los alumnos excelentes sólo se relacionaron con aquellos cuyas calificaciones fueron superiores a cinco y los buenos alumnos se relacionaron con casi todos lo alumnos sin importar la calificación. Esta lectura reforzaría la "idea" que los alumnos que pertenecen a grupos de

calificaciones extremas tienden a relacionarse con aquellos que pertenecen a la misma categoría. Se espera que los resultados que se obtengan de este estudio sean útiles para comprender, explicar y diseñar nuevas estrategias de mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes.

En términos generales, esta metodología aplicada al estudio de diferentes situaciones problemáticas brinda información acerca de comportamientos sociales que resultan de interés para una institución educativa en este caso. En este sentido podría ser empleada como una herramienta de diagnóstico para analizar otro tipo de situaciones problemáticas que se presenten en la institución objeto de estudio.

Análisis cuantitativo - Indicadores de la matriz M1

Una forma de medir si los alumnos compartieron horas de estudio es utilizando indicadores de redes sociales tales como densidad, alcanzabilidad, distancia geodésica y centralidad, entre otros, que pueden obtenerse del software Ucinet 6.

> Densidad: La densidad mide la proporción existente entre los vínculos reales que se establece entre los actores de la red y el total de relaciones posibles.

*El valor que arrojó el software para la densidad fue aproximadamente 43 %, este valor nos estaría indicando que un grupo de alumnos no se relacionó entre sí, es decir, no compartió horas de estudio. Por ejemplo, el hecho que el alumno **1** sólo se relacionara con un compañero, el **12**, influyó en la baja densidad obtenida al perderse 21 relaciones posibles, dado que el tamaño del grupo era de 23 alumnos.*

> *Alcanzabilidad: Un compañero es alcanzable por otro, si existe un camino que conecte a este compañero con el otro, ya sea de manera directa o indirecta.*

Para el caso particular de la matriz M_1 se observó que todos los alumnos fueron alcanzables por ser la Red1 simétrica y conexa.

> *Distancia geodésica: La distancia geodésica es la longitud del camino más corto entre dos nodos.*

Para la distancia geodésica se obtuvo la siguiente tabla:

Tabla 3. Matriz M_2 correspondiente a distancia geodésica

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	0	4	1	2	2	2	4	3	2	3	4	3	3	3	2	3	2	3	3	3	4	3	3
2	2	4	0	3	2	2	2	1	1	2	2	2	3	2	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1
3	3	1	3	0	1	1	1	3	2	1	2	3	2	2	2	1	2	1	2	2	2	3	2	2
4	4	2	2	1	0	2	2	2	2	1	2	2	3	2	1	1	2	1	2	2	2	2	1	1
5	5	2	2	1	2	0	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1
6	6	2	2	1	2	1	0	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2
7	7	4	1	3	2	2	2	0	2	2	2	2	3	2	1	2	2	2	1	1	1	1	2	1
8	8	3	1	2	2	2	1	2	0	2	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1
9	9	2	2	1	1	1	1	2	2	0	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2
10	10	3	2	2	2	2	1	2	1	2	0	2	2	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1
11	11	4	2	3	2	2	2	2	2	2	2	0	3	2	1	2	2	2	1	1	1	1	2	1
12	12	3	3	2	3	1	1	3	2	2	2	3	0	3	2	3	2	2	3	3	2	3	3	2
13	13	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	3	0	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1
14	14	3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
15	15	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	3	1	1	0	1	1	2	1	1	2	1	1
16	16	3	2	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	1	1	0	2	2	1	1	1	1	1
17	17	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2	1	1	2	0	1	2	1	2	1	1
18	18	3	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	3	2	1	2	2	1	0	1	1	1	2	1
19	19	3	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	3	2	1	1	1	2	1	0	1	1	2	1
20	20	3	1	2	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
21	21	4	1	3	2	2	2	1	1	2	2	1	3	1	2	2	1	2	1	1	1	0	2	1
22	22	3	2	2	1	2	2	2	1	1	2	2	3	1	1	1	1	1	2	2	1	2	0	1
23	23	3	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Cuando se analizó la matriz M_2 se observó que la mayor distancia geodésica que hay que recorrer en la Red1, para ir de un nodo a otro, es de cuatro enlaces y corresponden a los alumnos **1**, **2**, **7, 11** y **21,** que son los compañeros más alejados entre sí. La mayoría estudia directamente con un compañero (distancia geodésica igual a 1) o lo hace con una distancia geodésica de 2. Consideremos como ejemplo, para éste último caso, a los alumnos **2**, **23**, **4**. El alumno **4,** *bueno,* podría pertenecer a esta categoría por estar recibiendo, a través del alumno **23,** que es *muy buen* alumno**,** influencia positiva para su rendimiento académico proveniente del alumno **2**, *excelente* alumno.

Centralidad

Según Hanneman (2000) existen tres enfoques de centralidad: grado, cercanía e intermediación que describen la ubicación del individuo o actor, en términos de cuán cerca está del "centro" de la acción de la red. La información brindada por el software acerca de estos indicadores se muestra en un anexo al final de este trabajo.

> *Grado: El grado (degree o rango) da el número de relaciones directas de cada nodo de la red con el resto.*

*En la tabla 4 del anexo se observa que los alumnos **14** y **23**,* muy buenos*, y el **20**,* bueno*, ocupan los tres primeros lugares. Es decir, se relacionan directamente con más compañeros. En cuanto a los* alumnos excelentes*, **8**, **2** y **7**, el más relacionado es el **8**.*

> Cercanía: es la capacidad de un nodo de llegar a los demás nodos de la red. Se calcula al contar todas las distancias geodésicas de un nodo para llegar a los otros nodos de la red.

Según la información dada por el software, que puede verse en la tabla 5 del anexo, se observa que los alumnos **14**, **23** y **20** tienen una mayor cercanía con sus compañeros y los alumnos **1** y **12,** alumnos *insuficientes*, son los más alejados.

> *Intermediación: indica la frecuencia con que aparece un nodo en el tramo más corto que conecta a otros dos. Muestra cuándo una persona es intermediaria entre otras dos del mismo grupo, que no se contactan. Se considera que el actor que ocupa la posición con mayor grado de intermediación tiene el mayor control en la red.*

Para la intermediación el software arrojó un rango grande de variación desde 29,588 hasta 0, como puede apreciarse en la tabla 6 del anexo. El máximo valor corresponde al alumno **14**. El segundo valor al alumno **3** que, si bien no está muy relacionado (7 relaciones), ocupa ese lugar pues es el único que conecta al alumno **1** con los demás.

A modo de conclusión

Se puede observar que la Red1es una red muy conectada ya que todos los alumnos son alcanzables. La distancia máxima que hay que recorrer para acceder entre dos compañeros es de cuatro enlaces. Los actores más centrales de esta red son los alumnos **14**, **20** y **23**, alumnos de buen rendimiento académico. Estos alumnos figuran en los tres primeros lugares de casi todas las medidas de centralidad estudiadas, siendo el **14**, el que encabeza todas las tablas de los indicadores. Los actores más periféricos de la red son los alumnos **1** y **12.**

Del análisis realizado se desprendería que los alumnos **14**, **20** y **23** tienen el perfil de líderes y al ser alumnos con muy buen rendimiento académico podrían estar influenciando positivamente en el resto de sus compañeros, cuestión que se confirma con el buen nivel del curso en general.

ANEXO: Tablas de información resumida dada por el software Ucinet 6 para los indicadores *grado, cercanía e intermediación.*

Tabla 4.

Resultado de *grado* de la Red1

Degree	NrmDegree
14	14 18.000 81.818
23	23 17.000 77.273
20	20 16.000 72.727
8	8 12.000 54.545
16	16 12.000 54.545
15	15 12.000 54.545
13	13 10.000 45.455

Tabla 5.
Resultado de cercanía *de la Red1*

Farness	nCloseness
14	14 27.000 81.481
23	23 28.000 78.571
20	20 29.000 75.862
8	8 33.000 66.667
16	16 33.000 66.667
15	15 33.000 66.667
17	17 34.000 64.706
9	9 34.000 64.706

Tabla 6.

Resultado de *intermediación* de la Red1

Betweenness	nBetweenness
14	14 29.588 12.809
3	3 22.543 9.759
23	23 22.054 9.547
20	20 16.614 7.192
5	5 16.420 7.108
6	6 13.934 6.032
15	15 11.687 5.059

Referencias bibliográficas

de Federico de la Rúa, A (2002). Amistad e identificación: las micro fundaciones de las pertenencias macro. Amigos europeos e identidad europea. *Revista hispana para el análisis de redes sociales. Vol.3, #6*. http://revista-redes.rediris.es.

Hanneman, R. A. (2000). *Introducción a los Métodos del Análisis de Redes Sociales.* California. Recuperado el 21 de marzo de 2005 de

http://wizard.ucr.edu/~rhannema/networks/text/textindex.html

Molina J. L. (2001). *El análisis de redes sociales una introducción*. Barcelona: Ediciones bellaterra.

Molina J. L. (2001). *El análisis de redes sociales. Aplicaciones al estudio de la cultura en las organizaciones.* Recuperado el 15 de diciembre 2007 de

http://ddd.uab.cat/pub/athdig/15788946n0a15.htm

Porras, J. I y Espinoza, V. (2005). *Redes, Enfoques y Aplicaciones del Análisis de Redes Sociales (ARS).* Santiago de Chile: Ed. Universidad Bolivariana.

Quiroga, A. (2003). Introducción al Análisis de Datos Reticulares Practicas con Uncinrt6 y Netdraw1 versión2. *Revista hispana para el análisis de redes sociales*. Recuperado el 30 de julio de 2005 de http://revista-redes.rediris.es.

Requena Santos, F. (1998). Género, redes de amistad y rendimiento académico. Recuperado el 20 de mayo 2005 de http://ddd.uab.cat/pub/papers/02102862n56p233.pdf

Requena Santos, F. (2001).*Amigos y redes sociales*. Madrid: Closas-Orcoyen.

COMPRENSION DEL CONCEPTO DE FUNCION A TRAVES DE SITUACIONES PROBLEMA RELACIONADAS CON EL CONTEXTO

Lía Carolina Mercado Vanegas, Nimer José Aguas Castillo, Wilder José Arrieta Ortega
Universidad de Sucre Colombia
carolina877@hotmail.com, agme047@hotmail.com, wao1983@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Básico

Resumen. *En este trabajo se buscó favorecer la compresión del concepto de función en estudiantes de 8º de la Institución Educativa Antonio Lenis de la ciudad de Sincelejo (Colombia) a través de situaciones problemas relacionadas con su contexto. Se trabajó la comprensión del concepto de función utilizando situaciones del contexto sociocultural de los estudiantes participantes; se hizo un análisis inicial de sus dificultades, se implementó una estrategia didáctica tendiente a minimizar tales dificultades y finalmente se realizó una prueba de contraste para verificar la efectividad del proceso de intervención.*
Palabras clave: Función, comprensión, situaciones problemas

Introducción

Los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia le apuntan con gran insistencia a la formación del concepto de función en la escuela y por ello se insiste mucho en el trabajo con funciones desde grados inferiores. Debido a la importancia y necesidad de este concepto y la dificultad que presentan los estudiantes para llegar a él, nace la motivación de presentar esta propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje y hacer mas factible y significativa la interacción alumno – objeto matemático; para esto consideramos importante que los alumnos sean capaces de analizar y comprender situaciones de la vida diaria que involucren relaciones entre cantidades y además identifiquen las variables que se encuentran implícitas en éstas logrando así generalizarlas mediante expresiones matemáticas, llegando a un gran avance en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

Al aplicar una prueba a estudiantes del grado 8º se evidenció que presentaban dificultades relacionadas con el reconocimiento y clasificación de las cantidades que intervienen en una situación problema, es decir si son constantes o variables. Al igual que generalizar o expresar de forma abreviada el procedimiento para obtener resultados y la modelación matemática de una situación. La prueba consistía en una situación problema con elementos del medio sociocultural de los estudiantes relacionada con funciones.

Con la confirmación de la existencia de estas dificultades relacionadas con el concepto de función se proponen actividades relacionadas con el contexto donde los estudiantes pudieran participar activamente en el proceso de aprendizaje. Dichas actividades se consideran esenciales para motivación y participación de los dicentes, generando así ambientes de aprendizajes en los cuales los estudiantes se sintieran familiarizados y participaran de la elaboración y comprensión de tal concepto.

Marco teórico

El concepto de función es en sí mismo complejo y la misma historia lo demuestra. Ahora bien, esta claro que lo que se enseña en la escuela es una matemática escolar, es decir, una matemáticas a la que hay que sujetarla a una transposición didáctica para poder desarrollarla en la escuela, aspecto que define Chevallar como el paso de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de ese objeto a saber (MEN, 1998).

Sin embargo, es necesario definir el concepto de función que se desea trabajar al momento de iniciar la temática. En la escuela generalmente se trabaja el concepto de función como un caso particular de una relación o de correspondencia matemática. Por lo que se asumió este concepto, una función f de un conjunto X en un conjunto Y es una asignación o correspondencia matemática tal que a cada elemento de X le corresponde un único elemento de Y.

Una función puede considerarse como un caso particular de una relación o de correspondencia matemática. Cada relación o correspondencia de un elemento $x \in X$ con un (y sólo un) $y \in Y$ se denota $f(x) = y$, en lugar de $(x, y) \in f$.

Una vez se tiene el concepto con el que se va a trabajar es necesario buscar la manera de llevarlo a los estudiantes y hacerlo accesible a ellos. Una buena idea para hacer una transposición didáctica coherente de la que habla chevallar es retomar la idea de Mirchi (1998), quien concluyó que para la adquisición del concepto se debería partir de cuatro niveles:

El primero consiste en la utilización de los conocimientos informales del alumno, de la interpretación de gráficos, el segundo en la matematización inicial, el cual se caracteriza por la organización y cuantificación de las primeras nociones, el tercer nivel es la abstracción, esta ocurre

en la generalización del concepto teniendo en cuenta los procedimientos, y un cuarto nivel que es la formalización, la cual consiste en la utilización del lenguaje simbólico; en este caso para crear la expresión matemática correspondiente.

En últimas lo que se pretende es favorecer la comprensión del concepto de función entendiendo como comprensión en matemáticas lo siguiente:

Comprender en matemáticas es saber o dominar temáticamente contenidos disciplinares; es atribuir significado a los objetos matemáticos o al conjunto de símbolos que constituyen al lenguaje matemático; y si se hace énfasis en lo cognitivo, la comprensión hace alusión al dominio conceptual y a los procesos cognitivos subyacentes a la actividad matemática. (Secretaria de Educación de Bogotá, 2005, Pág. 7)

En cuanto a situación problemas se tienen concepciones como la siguiente:

Una situación problema se interpreta como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en donde los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamiza su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimiento (…), Por lo tanto se debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación y la heteroevaluaciòn. Al mismo tiempo representa un espacio de interrogantes que posibilita, la conceptualización, la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas de tipo matemático. (Obando y Múnera, 2003, p. 183).

Metodología

Se aplicó una prueba diagnóstica con el propósito de identificar las dificultades que presentan los estudiantes relacionadas con funciones. Una vez se hace una identificación y una caracterización de las dificultades encontradas en los estudiantes relacionados con el concepto de función a partir de una prueba diagnóstica, se implementa un plan de acción que permita minimizar las dificultades encontradas, y en últimas favorecer la comprensión del concepto de función. Proceso que se denominaría intervención en el aula. Puesto que las intervenciones consecutivas en el aula por parte de un profesor generan un proceso de reflexión que da paso a cambios en las concepciones de la enseñanza, porque movilizan, de manera integrada y constante, la motivación,

la acción práctica con los estudiantes, la observación de posibilidades y dificultades, la revisión de resultados y la aplicación autónoma de propuestas aceptadas cómo válida.

Para ello, se diseñaron y se tomaron situaciones problemas materializadas en talleres. Cada situación problema aumentaría el grado de complejidad a medida que los estudiantes las desarrollaban. Cada situación contaba con los siguientes tópicos, que los llevarían a la comprensión del concepto; desempeño en elaboración de tablas, relación entre cantidades, identificación de cantidades que intervienen en la situación, identificación de cantidades constantes y variables y modelación matemática. En algunas se anexó la representación en el plano cartesiano.

En el desarrollo de cada situación problema se dejaba libre a los estudiantes y luego se daba inicio a una socialización de las respuestas con la finalidad de corregir y concientizarlos de los errores que cometieran en algunas de las respuestas.

Así por ejemplo en la primera intervención, el objetivo era validar y aclarar dudas sobre las respuestas dadas por los estudiantes, se hicieron preguntas abiertas a ellos divididos en grupos teniendo en cuenta las respuestas dadas a la prueba. Una vez validadas las respuestas, se continúa con la intervención en el aula. Así se hace una explicación a los estudiantes sobre las actividades que se desarrollarían durante el proceso de intervención. Se aclaró lo que se haría resolviendo situaciones problemas, qué es una situación problema y qué elementos se deben tener en cuenta para resolverlos.

La clase Nº1 consistió en la aplicación de un instrumento que permitiera validar y comparar dificultades encontradas en la prueba diagnóstica. Siguiendo con los tópicos con los que se estipulo trabajar y que fueron definidos previamente. A continuación se muestran algunas de las preguntas que conformaron la primera situación.

Roberto, para sostener a su familia trabaja en la fábrica de calzado Bucaramanga. Donde cada empleado tiene un sueldo fijo de $450000, para obtener este sueldo Roberto tiene como obligación, fabricar 200 pares de zapatos mensuales. Pero, por cada par de zapato adicional que fabrica le pagan $1450.

1. ¿Cuánto dinero mensual ganara Roberto si fabrica 1, 2, 30, 100, 150, 200 y 250 pares de zapato adicionales en el mes?. Regístralo en una tabla.
2. ¿De que depende que Roberto gane más o menos dinero mensual?
3. ¿Qué cantidades intervienen al momento de determinar el sueldo que la fábrica debe cancelar a Roberto?
4. Menciona que cantidades siempre se mantienen fijas para determinar el sueldo de Roberto y cuales varían o se modifican?
5. Explica que se debe hacer para calcular el sueldo de cada trabajador en un mes.
6. Determina una expresión que te permita calcular el sueldo de cada trabajador de la fábrica.

En la clase 2, se realizó la socialización y confrontación de las respuestas dadas por los estudiantes de la situación que se aplicó la clase anterior, así los estudiantes expresaban como lo habían hecho y mostraban respuestas y estas se confrontaban con la de los demás, de tal forma que se autocorrigieran.

En las clases 3 y 4, se procedió de manera muy similar, se trabajó la resolución de forma individual de una situación problema presentada a los estudiantes y la socialización de la misma. A continuación se muestran la situación Nº 2:

La siguiente tabla muestra la relación entre los centímetros que avanza un gusano cada minuto en una pared.

Tabla 1. *Distancia y tiempo del gusano*

Tiempo (min.)	1	2	3	4	5	6	7
Distancia (cem)	2	4	6	8	10	12	14

Grafica esta situación en el plano cartesiano

1. ¿Qué hay que hacerle al número que representa el tiempo para obtener el número que representa la distancia que recorre el gusano?
2. ¿Cómo aumenta el tiempo y como aumenta la distancia que recorre el gusano?
3. ¿es constante esa distancia que recorre cada minuto?
4. ¿Qué cantidades intervienen en la situación, cuales son constantes y cuales varían?

Con estas situaciones se buscó complejizar un poco más la actividad, se hicieron más complejas en la medida en que las situaciones implicaban un mayor análisis y, además les exigía llevar la información a otras representaciones como la del plano cartesiano que antes no se había trabajado. De igual forma se les pedía la descripción de sus propios procesos matemáticos. Esto se hizo para llevarlos a una mayor comprensión de la situación que trabajaron.

Durante la clase 5, una vez más los estudiantes resolvieron una de las situaciones planteadas, en lo que se varió fue que al momento de socializar, se contó con el aporte de compañeros entre sí. Al iniciar la actividad se entrego la situación a cada estudiante, se hicieron las orientaciones pertinentes, y se aclararon las dudas que surgían durante la clase.

Una vez hechas las actividades de intervención se hizo necesario verificar el progreso de los estudiantes, para ello se aplicó una prueba final; que evaluara los mismos tópicos que se trabajaron en las intervenciones, atendiendo al concepto de función. Algunas de las preguntas fueron las siguientes:

Andrés para ayudarse con los gastos del colegio tiene un Sai en su casa, en el cartel que tiene para dar a conocer al público los precios por minuto a los distintos operadores son:

Tigo, Movistar y Comcel: $150 fijo: $200

1. ¿Cuánto debe pagar una persona que consuma 1, 2, 5, 10,15 minutos a Tigo, Movistar o Comcel? Registra esa información en una tabla.
2. ¿Cuánto debe pagar una persona que consuma 1, 2, 7, 12, 17minutos a fijo?

3. Calcula la cantidad de dinero que debe pagar una persona que consuma 6 minutos a Comcel y 3 minutos a fijo, si consume 11 minutos a Tigo, 2 a Movistar y 13 minutos a fijo.
4. ¿De que de pende que una persona pague mas dinero o menos al hablar por teléfono?
5. ¿Qué cantidades se mantiene fijas y cuales varían en la situación?
6. Determina una expresión que te permita calcular la cantidad de dinero que debe pagar una persona si solo consume minutos a Tigo, Movistar o Comcel.
7. Determina una expresión que te permita calcular la cantidad de dinero que debe pagar una persona si solo consume minutos a fijo.
8. Determina una expresión que te permita calcular la cantidad de dinero que debe pagar una persona si consume minutos a móvil (Tigo, Movistar y Comcel) y fijo.

Después de aplicar la prueba final analizar resultados se resaltan las siguientes conclusiones

Resultados

Cuando nos referimos a que los estudiantes muestran dificultades para llegar a este concepto, las que más se encuentran usualmente son: no reconocen las cantidades que intervienen en una situación problema, de igual forma se les dificulta identificar cuando las cantidades que intervienen en una situación son fijas (constantes), o variables. Tampoco explican porque un resultado puede cambiar a pesar de trabajar con datos comunes. Por lo que les resulta complejo generalizar o expresar de forma abreviada el procedimiento para obtener resultado, lo que implica que no modelen matemáticamente una situación.

Conclusiones

Uno de los aspectos en los que avanzaron los estudiantes fue en la representación de la información en tablas de manera coherente. Al igual que en gráficas en el plano cartesiano. Esto es una de los aspectos que se quería favorecer, pues la representación semiótica de los objetos matemáticos con los que se trabaja hace parte de la comprensión de un concepto.

Con relación al reconocimiento de las cantidades que interviene en una situación, la relación y dependencia entre las mismas. Después de la intervención los estudiantes fueron capaces de identificarlas, clasificándolas en cantidades constantes y variables, elementos fundamentales para trabajar funciones.

Un aspecto para resaltar fue el avance que se logró en la modelación matemática, pues en primer momento cuando se aplica la prueba diagnostica la gran mayoría de los estudiante no logran dar una expresión matemática que represente la situación, es decir dan ejemplos con valores específicos y otro grupo ni siquiera respondieron. Mientras que al momento de aplicar la prueba final el 50% logran encontrar la expresión matemática que modela la situación.

Después de esta investigación se pudo ratificar que las situaciones muy cercanas a su contexto y por lo tanto a su realidad son muy provechosas para los estudiantes, pues obtienen mejores resultados y ellos se interesan mucho más para realizarlas.

Con respecto a este tema, los estudiantes logran mejores resultados cuando las situaciones que se utilizan son diseñadas por el grupo investigador y de fácil dominio de ellos, que cuando son tomadas de otras referencias.

Referencias bibliográficas

Grupo de Tecnologías Educativas. (2002). *Metodología de intervención en el aula que evoluciona hacia la autonomía del docente formación de docentes en ejercicio.* Trabajo de investigación. Corporación Parque Tecnológico de Mérida

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares curriculares de matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Magisterio.

Mirchi, M. (2005, diciembre). El concepto de Función: Optimización de su comprensión, comunicación y aplicaciones en la escuela temprana. Recuperado en 01 de octubre del 2006 del sitio web: http://magazinefactory.edu.fi/magazines/EducacionMatematica/?str=40&artCat=0&artID=9

Obando, G. y Múnera, J. (2003). Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista educación y pedagogía* 15(35). Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.

Secretaria de educación de Bogotá. (2005*). Pruebas Comprender en matemáticas.* Bogotá: Serie cuadernos de evaluación.

PROPUESTAS PARA TRANSITAR NUEVOS CAMINOS DESPUÉS DE UN CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL

Ana Lucía Hurman, Félix Orlando Sentinelli, Gabriela Beatriz Tomazzeli
Universidad Nacional de Cuyo - Universidad Tecnológica Nacional Argentina
ahurman@uncu.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *Hemos creado un espacio extracurricular para estudiantes de primer año de ingeniería, a partir del interés que muestran en participar de las distintas propuestas que les formulamos al término de un curso de Álgebra Lineal. Las propuestas surgen de la interdisciplinariedad de esta asignatura y nos permite plantearnos como objetivo de nuestro trabajo, mejorar la calidad de los aprendizajes de dichos estudiantes. Para lograrlo, elaboramos un material didáctico que los estudiantes desarrollan con sus conocimientos previos y con nuevos conceptos matemáticos que surgen a partir de la necesidad de encontrar soluciones a distintas situaciones. La concepción de las propuestas conlleva la necesidad de conversión entre distintos registros de representación semiótica, para lograr una mejor comprensión de los conceptos involucrados.*
Palabras clave: Álgebra lineal, aplicaciones, registros de representación

Introducción

Varios son los investigadores en didáctica del Álgebra Lineal, como los grupos franceses, canadienses y estadounidenses (Jean Luc Dorier (2000) hace una excelente recopilación de algunos de estos trabajos), que están preocupados y trabajando sobre distintos aspectos de la problemática relativa al proceso enseñanza - aprendizaje de esta asignatura. Como docentes, en el primer semestre en facultades de ingeniería, coincidimos con esas apreciaciones.

Como el Álgebra Lineal nos permite un importante trabajo interdisciplinario, presentamos en este artículo, una parte de la experiencia extracurricular con modalidad aula taller, que realizamos con algunos estudiantes de primer año de ingeniería industrial, aunque es aplicable a cualquier especialidad y orientación en el campo de la ingeniería.

Para el material didáctico, en forma de proyectos, tenemos especial cuidado en la selección, elaboración y validación de los mismos, considerando criterios para cada una de estas etapas.

Metodología

Los criterios que establecimos para la selección de nuestros proyectos buscan abordar actividades que, presentadas como situaciones problemáticas, están en función de algunos temas básicos de ingeniería, de matemática pura y/o computacional. Al mismo tiempo la selección se orienta hacia actividades que se resuelvan dentro de un marco computacional con un software matemático. También nos interesa que los proyectos motiven relaciones entre ideas y más interrogantes para acceder a nuevos conceptos de Álgebra Lineal, por ejemplo valores propios complejos, y también temas que serán estudiados en otras asignaturas, como ecuaciones diferenciales o sistemas dinámicos.

En segundo término los criterios de elaboración de cada uno de los proyectos son: que tengan una introducción motivadora del problema a tratar, que muestren una breve referencia teórica necesaria para abordar el tema, que enuncien diversas situaciones a resolver con lápiz y papel y con la computadora, y que finalice con la resolución del problema planteado. Otro criterio importante es, tener siempre en cuenta la utilización de distintos registros de representación para ayudar a los estudiantes a internalizar conceptos, según la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval R (1999).

En tercer lugar la validación del material, se realiza desde el punto de vista conceptual por colegas especialistas del tema a tratar y miembros del equipo de investigación. Además desde el punto de vista didáctico se hace a través de nuestras observaciones y los comentarios de los estudiantes participantes.

Finalmente respecto al desarrollo del aula taller, ésta fue realizada en el laboratorio de computación con una duración total de 30 horas. A la misma asistieron 18 estudiantes a los que les fue entregado el material elaborado según los criterios mencionados anteriormente. Se estableció como pautas de trabajo que durante esas horas se desarrollasen siete proyectos, de un estilo análogo al que presentamos en este artículo, buscando la mínima intervención de los docentes investigadores (evitando así el modelo de clase magistral). En cada jornada se destinó un tiempo para la realización de una puesta en común (exposición de lo obtenido en el día en forma individual o grupal) y en la última reunión, los estudiantes hacen entrega de la totalidad de sus trabajos desarrollados y esto permite otorgarles una certificación de aprobación.

Descripción de uno de los proyectos

El problema motivador surge de la presentación del modelado de un sistema dinámico que utiliza ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y lineal (este tema no ha sido abordado por los estudiantes en sus clases regulares). Para nosotros trabajar con un sistema de ecuaciones diferenciales, nos brinda la oportunidad de destacar la importancia de los valores y vectores propios, como parte de la solución. El caso que se presenta es un sistema hidráulico, en particular el llenado de dos tanques y la distribución de la concentración de sal a lo largo del tiempo en ambos tanques (León, S (2000) pág. 233, enuncia y encuentra la función solución). A partir de este problema les presentamos diversas situaciones que los estudiantes analizan desde distintos registros de representación para entender los conceptos involucrados.

En la situación I usamos el registro gráfico para visualizar la función solución en términos de las concentraciones de sal presentes en cada tanque. Para ello proponemos la ejecución de los comandos de un software matemático que el estudiante deberá convertir al registro del lenguaje natural, para describirlos.

En la situación II utilizamos el registro tabular, usando matrices en bloques, para seguir la evolución de la función solución a través del tiempo, las concentraciones en ambos tanques y la función solución. Además como la orientación es una de las características de la conversión entre registros, les proponemos el proceso inverso, esto es, el armando una tabla que busca mostrar el acercamiento de la función solución a uno de los vectores propios.

En la situación III y con el fin de reforzar lo observado en las tablas, usamos el registro gráfico de la manera que se hace en la situación I, para visualizar el comportamiento de la función solución y del vector propio.

En la situación IV se trabaja en el registro algebraico analizando cuatro problemas según las dificultades que puedan aparecer en el sistema de tanques. Finalmente se realiza la conversión al registro pedido que es el gráfico.

Material didáctico

Introducción

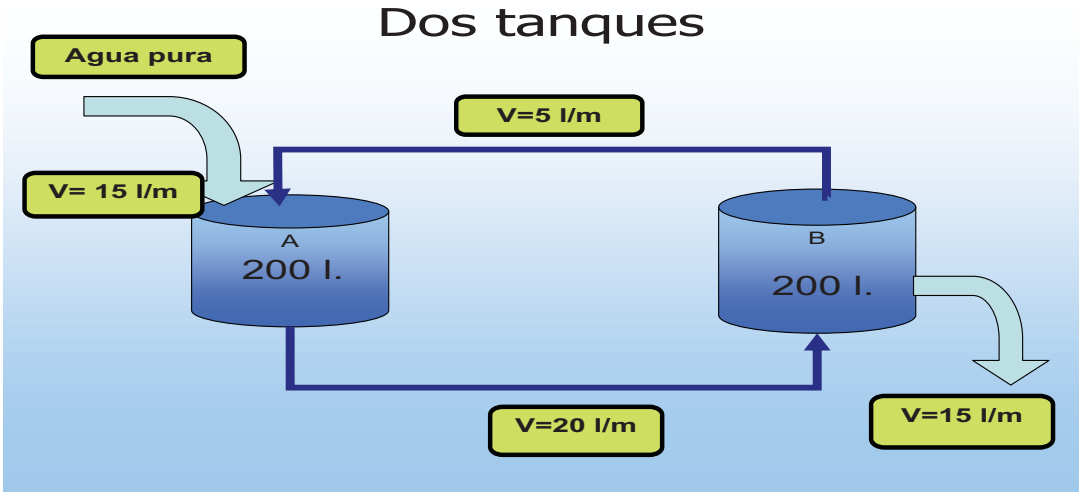
En las aplicaciones matemáticas surgen con frecuencia problemas en los que la incógnita es una función. Llegamos así a las ecuaciones funcionales, entre las cuales conocemos algunos ejemplos como el cálculo de primitivas. En muchos problemas de aplicación, hay cantidades que varían continuamente con el tiempo y están relacionadas por medio de un sistema de n ecuaciones diferenciales con n incógnitas, que esta vez son funciones. Matricialmente escribimos y' (t) = A. y (t), en la solución de estos sistemas aparecerán los valores y vectores propios.

Modelación de un sistema hidráulico

Dos tanques se conectan como se ilustra en la siguiente figura. En un principio el tanque A tiene 200 litros de agua en el que se han disuelto 60 gr de sal y el tanque B contiene 200 litros de agua pura. Se introduce y se extrae líquidos por bombeo de los dos tanques a las intensidades que se indican. Determine la cantidad de sal que hay en cada tanque en el tiempo t.

Para esta situación llamaremos $y_1(t)$ = cantidad de sal en el tanque A en cierto tiempo t.

$y_2(t)$ = cantidad de sal en el tanque B en cierto tiempo t.



Se sabe que: Intensidad de variación = Intensidad de entrada – intensidad de salida,

Para el tanque A, mirando la figura

$$IE = \left(15\frac{lt}{\min}\right)\left(0\frac{gr}{lt}\right) + \left(5\frac{lt}{\min}\right)\left(\frac{y_2(t)}{200}\frac{gr}{lt}\right)$$

$$IS = \left(20\frac{lt}{\min}\right)\left(\frac{y_1(t)}{200}\frac{gr}{lt}\right)$$

$$IV : y_1'(t) = \frac{-1}{10}y_1(t) + \frac{1}{40}y_2(t)$$

Para el tanque B, ¿cuál es la intensidad de variación?

De ambas variaciones logramos el siguiente sistema de ecuaciones (corrobore):

$$\begin{cases} y_1'(t) = \dfrac{-1}{10}y_1(t) + \dfrac{1}{40}y_2(t) \\ y_2'(t) = \dfrac{1}{10}y_1(t) - \dfrac{1}{10}y_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Ahora bien, expresando el sistema en forma matricial

Comenzamos a determinar la solución de este sistema, sabiendo que es de la forma:

$$y(t) = c_1.e^{\lambda_1 t}y_1 + c_2.e^{\lambda_2 t}y_2$$

Los λ_i son los valores propios de la matriz A, los y_i son los vectores propios de A y los c_i son las constantes a calcular a partir de los valores y vectores propios.

Primero usaremos el comando [V, D] = eig (A), para conocer los valores y vectores de la matriz A

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{-3}{20}.t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\frac{-1}{20}.t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos determinar los valores de las constantes c_1 y c_2. En la expresión anterior, tenemos en cuenta que para t = 0 las condiciones iniciales son de 60 gramos de sal en A y 0 en B, podemos reemplazar y obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales, que resolvemos.

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ de donde resulta que $c_1 = c_2 = 30$

La solución general de nuestro problema la podemos expresar entonces:

$$y(t) = 30\, e^{\frac{-3}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 30\, e^{\frac{-1}{20}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Situación I: Visualización de la solución general

La solución se representa teniendo en cuenta ambas concentraciones y está expresada como una combinación lineal de los vectores propios. Complete especificando cada comando usado y ejecute.

```
>> t = [0; 60].....
>> s = min(t): 1:max(t);.....
>> y = 30*exp ((-3/20)*s)' * [1; -2] ' + 30 * exp ((-1/20)*s)' *[1; 2] ';....
>> plot ( y (:,1), y(:, 2), '*')....
>> grid....
>> xlabel ( 'Concentración de sal en A' )....
>> ylabel ('Concentración de sal en B' )....
>> title ('Solución general')....
```

Situación II: Tablas

Complete las proposiciones a partir de la siguiente tabla construida como una matriz en bloque m = [s' y (:,1) y (:,2) y (:,1) + y (:,2)]. Ella muestra en sus columnas el tiempo, la concentración en A, la concentración en B y la función solución.

- ¿En t = 0 qué concentraciones de sal tienen ambos tanques?.

- ¿En qué tiempo son aproximadamente iguales y cuáles son sus valores?.
- Después de los primeros 30 minutos ¿Cuántos gr de sal están presentes en el sistema?.
- A medida que $t \to \infty$ resulta que los valores de la función solución $y(t) \to$ ……..
- A medida que t crece resulta que los valores de la concentración en B se aproximan al doble del valor de ….

Complete las proposiciones a partir de la observación de una tabla que usted construya. Ella debe mostrar en sus columnas el tiempo, el primero y segundo término de la función solución y la función solución.

- Si $t \to \infty$, el término para λ = -3/20 (de mayor valor absoluto) tiende más rápido a ……..
- Si $t \to \infty$, el término para λ= -1/20 (de menor valor absoluto) tiende más lento a …….

Situación III: Gráficas y vectores propios

Veamos cómo la curva de la solución se acerca al vector propio (1, 2) a medida que transcurre el tiempo, a través de las gráficas. Use los comandos anteriores para graficar la función y complete especificando cada comando usado y ejecute.

>> z = 0: .1:20; .....

>> v1= z'*[1 2]; .....

>> hold on …….

>> plot (v1(:,1), v1(:,2),'m*') …….

>> plot (y (:,1), y(:, 2), '*') …….

Situación IV: Armando un catálogo

Arme un catálogo con gráficas para un operario, de modo que pueda determinar dónde se producen bloqueos en el sistema que él tiene a su cargo.

- Problema 1: Deja de bombear del tanque B al tanque A.

- Problema 2: Se bloquea la salida de la mezcla del tanque B (15 l/min).
- Problema 3: Se bloquea la salida del tanque A hacia B (20 l/min) en el tiempo $t_o = 0$.
- Problema 4: Supongamos que está funcionando y se bloquea la salida del tanque A hacia el tanque B (20 l/min) en el tiempo $t_o=4$, las concentraciones en ese instante son 41.0263 y 16.1951 gramos de sal respectivamente.

(Ayuda) Te damos un archivo en el que identifiques cada parte del mismo y modifiques según el problema.

```
function g = problema(A)
[P, D] = eig(A)
v1 = P(:,1);        v2 = P(:,2);
L1 = D(1,1);        L2 = D(2,2);
 s = [60;0];
 M = [v1 -v2 s]
 R = rref(M)
 for t = min(s): 1:max(s);
 y = R(1,3)*exp(L1*t)'*(v1)'+ R(2,3)*exp(L2*t)'*(-v2)';
 tabla = [t' y(:,1) y(:,2) y(:,1)+ y(:,2)]
                    hold on
                    plot(y(:,1),y (:,2),'b*')
                    xlabel ( 'concentración en A' )
                    ylabel ('concentración en B')
 end
```

Reflexiones finales

Llevamos cuatro años haciendo nuestra propuesta de aula taller con siete proyectos, que cambiamos cada dos años. En este artículo, quisimos compartir uno de ellos. Para poder determinar el logro de nuestro objetivo, mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes,

nos planteamos ciertos indicadores. En este proyecto, nos interesa el desarrollo de competencias en informática y la formación para un autoaprendizaje responsable.

El desarrollo de la competencia en informática les posibilitó usar comandos, archivos y crear los propios, dentro de un software matemático (esta vez se usó Matlab), que resultó de fácil manejo por la similitud con las expresiones simbólicas de álgebra lineal. Centramos nuestros esfuerzos alrededor de esta posibilidad tecnológica, ya que permite el tratamiento (transformación dentro de un mismo registro) y la conversión entre registros. De este modo, se ve facilitado recorrer registros discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales (Duval 2004).

De acuerdo con Duval, toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa, y cada registro muestra aspectos diferentes del objeto; por lo tanto los distintos registros son complementarios. Esto permite interpretar las consignas manteniendo la referencia del objeto matemático que se estudia, pero con otras propiedades que facilitan su adquisición conceptual o noesis.

La formación para un autoaprendizaje responsable se tradujo en la realización de la totalidad de los proyectos propuestos, y como dijimos buscando una mínima intervención por parte de los docentes a cargo. Todo su trabajo se ve fortalecido por la creación del hábito en el uso de más de un registro de representación semiótica, la coordinación entre ellos y las posibilidades de tratamientos algorítmicos. De este modo estos elementos se transforman en herramientas para el inicio de la investigación autónoma del estudiante.

Por otra parte nos interesa comentar que usamos un modelo matemático, no como un curso corto de ecuaciones diferenciales, sino como motivador para la aplicación de los conceptos ya estudiados y para otros nuevos de Álgebra Lineal y de otras asignaturas.

Finalmente podemos agregar que esta enriquecedora experiencia, tanto para profesores como para alumnos, permite la validación constante entre colegas y estudiantes para mejorar el material ya desarrollado y elaborar otros nuevos.

Referencias bibliográficas

Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Colombia: Universidad del Valle.

León, S. (2000). *Álgebra Lineal con aplicaciones (3ª edición)*.México: Cecsa.

LAS PROPUESTAS DE LOS DOCENTES COMO CONSTRUCTORES DE SUS PROPIOS MATERIALES DIDÁCTICOS

Teresita Terán, Mercedes Anido de López
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. U.N.R. Argentina
teresitateran@hotmail.com
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Superior

Resumen. *Respondiendo a los requerimientos de docentes de la Provincia de Santa Fe se diseña y pone en marcha un Postítulo en Matemática y Estadística en la Universidad Nacional de Rosario, con el fin de profundizar en distintas áreas del conocimiento específico de Matemática y Estadística y su didáctica. Específicamente, la asignatura Didáctica de la Estadística, presenta un interés especial por tratarse de una temática no abordada en ningún profesorado. Se investigará acerca de cómo los docentes-alumnos construyen sus propuestas de enseñanza a partir de su propio aprendizaje. El marco teórico fundamenta, una trayectoria didáctica que se fundamenta en el método de proyectos (Batanero, 2001). El marco metodológico es el de una investigación activa, siendo su propósito el de mejorar y perfeccionar la práctica educativa. Como resultado, los docentes-alumnos, han propuesto distintos proyectos que hacen de la Estadística una herramienta estratégica para el análisis de distintos problemas de las ciencias aplicadas y del entorno escolar.*
Palabras clave: Propuestas, construcción, materiales didácticos, proyecto

Introducción

Como un emergente de la anterior Ley Federal de Educación de la República Argentina, ha quedado establecido que la etapa profesional de grado no universitario debe estar preferentemente articulada horizontal y verticalmente con la Universidad y que la educación cuaternaria debe estar a cargo de las Universidades. En concordancia con la misma y respondiendo a los requerimientos de docentes de la Provincia de Santa Fe, se pone en marcha un Postítulo en Matemática y Estadística en la Universidad Nacional de Rosario. En este Postítulo transita una tercer cohorte a partir del 2007. En su diseño desde la Universidad se buscó la profundización en distintas áreas del conocimiento específico en Matemática y Estadística y la actualización didáctica, con el fin de concretar la articulación entre el Sistema Educativo Formal y la Universidad. Específicamente, la asignatura Didáctica de la Estadística presenta un interés especial por tratarse de una temática no abordada en ningún profesorado.

En este trabajo se describe una experiencia de Formación sobre las propuestas de los docentes participantes del Postítulo en Matemática y Estadística ya mencionado, en la aplicación del llamado Método de Proyectos a la enseñanza de la Estadística en la Educación Secundaria.

En la Legislación Argentina se considera que una de las funciones básicas de la Universidad es la formación de profesionales, docentes y técnicos capaces de actuar con solidez, según las demandas individuales y los requerimientos nacionales y regionales. En este sentido prevé espacios de formación a nivel de Postítulo, entendiéndolos como instancias de formación superior en el área de que se trate y de actualización de conocimientos y competencias. Así, la Universidad Nacional de Rosario crea en el año 2005 un Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, con el objetivo de brindar formación disciplinar y pedagógica en las áreas de Matemática y Estadística. Específicamente, en Estadística los contenidos abarcan Estadística Descriptiva e Inferencial. Este Postítulo está dirigido a graduados de nivel terciario no universitario, con título de Profesor de Matemática y con desempeño docente en la asignatura Matemática y/o Estadística del nivel secundario. Pretende constituir una alternativa transformadora respecto a una oferta diversificada y asistemática de cursos que, muchas veces no están integrados en proyectos y diseños curriculares específicos. Asume, además, la necesidad de intervenir frente a la demanda expresada por los propios docentes.

La propuesta académica sistemática se focaliza en la formación superior en las disciplinas Matemática y Estadística pero también la actualización en temas didácticos. De esta manera, se pretende que los docentes del curso realicen una profundización profesional a nivel universitario con orientación en dichas áreas. Desde el punto de vista académico el proyecto que se desea evaluar atiende a una propuesta que intenta presentar los contenidos y las estrategias de enseñanza-aprendizaje respondiendo a criterios enmarcados en las corrientes actuales, en lo que se refiere a: fundamentación epistemológica y procedimientos y actitudes.

El método de proyectos en la formación de profesores

Las investigaciones sobre el conocimiento de los docentes, relativo al tema científico a enseñar y su relación con su práctica docente, ha sido tema de numerosas investigaciones.

En el marco ontológico-semiótico de Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2009) se aportan algunos elementos de su modelo del proceso de instrucción y una trayectoria didáctica en su primera fase exploratoria de ejecución: el método de proyectos. Este método, se caracteriza por la realización de un proyecto de trabajo, cuyo objetivo es una mejor adaptación individual y social. Se trata de

una actividad previamente determinada, cuya intención dominante es una finalidad real, que orienta los procedimientos y les confiere una motivación.

El trabajo en el aula alrededor de proyectos se vincula con el movimiento de la Escuela Nueva, que en las primeras décadas de este siglo postuló y llevó a la práctica experiencias sustentadas en una concepción centrada en la actividad del alumno.

Sobre la base de las ideas de Dewey (1961) que afirma que el pensamiento reflexivo no se produce en abstracto sino ante problemas, fue sistematizado por Kilpatrick (1982) para quien el proyecto constituye una actividad intencional y con sentido, que se realiza en un ambiente social. Estos pedagogos estadounidenses desarrollaron sus teorías al mismo tiempo que grupos de docentes experimentaban, en escuelas agronómicas y de artes de nivel medio y superior, un sistema que tendía a unificar las materias aisladas alrededor de problemas propuestos por los profesores o elegidos por los alumnos.

Problema de investigación

Este trabajo se plantea y justifica a partir de las dificultades de los docentes de Matemática para enseñar Estadística, debido a que en la currícula de formación de grado dichos docentes, en su mayoría, no han recibido preparación suficiente en Estadística o no estaba incluida como asignatura en su formación profesional.

Se presentan como cuestiones a investigar: ¿cómo construyen los docentes-alumnos sus propuestas de enseñanza a partir de su propio aprendizaje de la asignatura?, ¿qué particularidades toma el desarrollo profesional de profesores de Matemática inmersos en un escenario de modelización matemática?, ¿qué propuestas harían a sus alumnos, tomado el Proyecto como eje de planificación?

Objetivos

La problemática inicial y nuestro análisis del método de proyectos nos permiten aproximar una respuesta como aporte al problema de investigación que consistirá en tomar como objetivos:

1. Estimular la formación del docente por el desafío que genera la propuesta de un proyecto como forma de crear condiciones para la gestión de situaciones fundamentales de aprendizaje.
2. Indagar sobre las competencias docentes en el logro de un proyecto inicial.

Fundamentos teóricos

El marco teórico fundamenta, una trayectoria didáctica que se presenta como propuesta de modelización a través del método de proyectos (Batanero, 2001) y el modelo epistemológico y cognitivo propuesto por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2008). Para analizar los fenómenos ligados a la comprensión de las abstracciones matemáticas es preciso elaborar respuestas a dos cuestiones básicas: qué comprender y cómo lograr la comprensión. Por tanto, un modelo de la comprensión tendrá dos ejes principales: uno descriptivo que indicará los aspectos de los objetos a comprender y otro procesual que indicará los niveles necesarios para el logro de una buena comprensión.

Godino et al (2009) consideran el objeto matemático como una entidad emergente de un sistema de prácticas ante una cierta clase de situaciones-problemas, concretado en un término o expresión matemática y su correspondiente regla de uso. La idea clave es asociar al objeto matemático, el sistema de prácticas del que emerge, entidad que hemos designado como el significado sistémico del objeto matemático, atribuyéndole una doble dimensión: personal e institucional.

Cada uno de los significados se componen a su vez de los elementos lingüísticos, situacionales, actuativos, conceptuales, proposicionales y argumentativos.

En el medio o contexto instruccional incluimos cualquier factor que pueda condicionar y relativizar el desarrollo del proceso de estudio, como el nivel educativo, el tiempo de estudio, los recursos tecnológicos, etc.

La tarea docente se centra, por tanto, en dos áreas básicas de actividad:

1. Adaptación de los *significados de referencia* a las restricciones específicas del medio instruccional (¿Qué enseñar?).

2. Organización, implementación y control de los procesos de instrucción (¿Cómo enseñar?).

El conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas. Pero la interacción con otras personas, o bien, sujetos en la misma posición, y sobre todo con el profesor experto, es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje.

Godino et al (2009) designan como aprendizaje interaccionista el que tiene en cuenta o atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso, la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional, apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno. También considera la posición de Ausubel (2002) en cuanto a que la significatividad de un aprendizaje se logra cuando el alumno puede relacionar el nuevo problema o concepto con la estructura de conocimientos de que ya dispone.

De este modelo de Ausubel y de la consideración de la definición de aprendizaje interaccionista definido por Godino et al (2009) surgen una serie de consecuencias sobre la instrucción matemática, entre las que mencionamos:

1. La planificación de la enseñanza debe partir del análisis del significado institucional pretendido para el objeto matemático incluyendo los diferentes tipos de elementos de significado que hemos identificado.

2. Los estudiantes deben tener oportunidad de plantearse y tratar de resolver problemas relevantes para ellos, formular hipótesis y conjeturas, confrontar diferentes sistemas de representación, comunicar y validar las soluciones propuestas para los problemas a sus compañeros, así como confrontarlas con las convenidas en la cultura matemática en el propio contexto institucional, material y temporal.

Marco metodológico

El marco metodológico elegido para nuestro estudio es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías, siendo su propósito el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos.

El método de proyectos como trayectoria didáctica

Llamaremos trayectoria didáctica a la conjunción interactiva entre las trayectorias epistémica, docente, discente y mediacional relativas a un sistema de prácticas y a unas circunstancias dadas. Esto es, el modo específico en que los distintos componentes o facetas del significado sistémico son estudiados. La trayectoria didáctica que analizaremos en una primera fase exploratoria de ejecución y que elevamos como propuesta se fundamenta en el método de proyectos.

Un proyecto, en el sentido en que lo entendemos, supone necesariamente la construcción de algo concreto, visible, mostrable, desarrollado en un tiempo predeterminado, para lo cual deberemos adquirir, afianzar o ejercitar determinados saberes y competencias y el cual pondrá en tela de juicio muchas de nuestras actitudes y procedimientos.

El Proyecto puede surgir tanto del docente como del alumno o de una necesidad de articulación con el Currículum Institucional; lo importante en cualquiera de los casos es tener en cuenta que siempre implica una elaboración previa por parte del docente, que es quien determinará su intencionalidad pedagógica.

Álvarez (1990) considera que los proyectos no son un modo diferente de planificar; se trata de una metodología de enseñanza-aprendizaje que parte de la base de que lo que coloca al sujeto en una mejor situación de aprender, es la necesidad de tener que llevar a cabo algo.

Sanjurjo y Vera (1994) afirman que los proyectos tienden a generar autonomía y responsabilidad en los alumnos así como a democratizar su acceso a los objetos de conocimiento, partiendo de las diferencias y privilegiándolas.

Los proyectos como trayectoria didáctica en Estadística

Para Batanero y Díaz (2002) los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los alumnos. No hay nada que haga más odiosa la Estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta de regresión a un conjunto de números. No hay que olvidar que la Estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto. La principal característica de un curso basado en

proyectos es que el énfasis se da a las tareas, que, al menos aproximadamente, deben ser realistas.

Como sugiere Holmes (1997) si los estudiantes trabajan la Estadística por medio de proyectos se consiguen varios puntos positivos:

- Los proyectos permiten contextualizar la Estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- Los proyectos refuerzan el interés, sobre todo si es el alumno el que elige el tema. El alumno quiere resolver el problema, no es impuesto por el profesor.
- Se aprende mejor qué son los datos reales, y se introducen ideas que no aparecen con los datos inventados por el profesor; precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- Se muestra que la Estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

Los proyectos se conciben como verdaderas investigaciones, donde tratamos de integrar la Estadística dentro del proceso más general de investigación. Deben escogerse con cuidado, ser realistas (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema dado), abiertos y apropiados al nivel del alumno.

La propuesta de un proyecto como exigencia de evaluación de una asignatura del Postítulo

Para la evaluación a los docentes considerando que el mejor aprendizaje es aquel que se aprende haciendo, se propuso trabajar con el método de proyectos.

Se colocó a los alumnos-docentes en posición de tener que pensar en preguntas como: ¿cuál es mi problema?, ¿necesito datos?, ¿cuáles?, ¿cómo puedo obtenerlos?, ¿qué significan los resultados en el contexto del problema?, ¿cómo los interpreto?

El momento que demandó más tiempo y esfuerzo fue la elección del tema que pudiese motivar a sus propios alumnos y el pensar de dónde se recabaría la información pertinente. Luego, los alumnos en grupos de 3, en función del tema elegido presentaron los distintos contenidos de

Estadística Descriptiva que podrían ser utilizados, la justificación de su elección y la interpretación correspondiente en función del contexto de la situación problemática.

Se realizó una puesta en común donde cada grupo presentó el esquema de proyecto sobre el tema elegido, y analizó una posible trayectoria didáctica, anticipando todas las técnicas estadísticas que utilizarían, justificando y argumentando su aplicación.

Este trabajo, fue entregado luego por escrito y evaluado, en fecha consensuada por alumnos y profesor.

Adjuntamos a continuación algunos de los esquemas presentados por los docentes-alumnos:

- S.O.S. Salud.
- El mundial desde la óptica multimedial.
- La deserción escolar y los deportes.
- ¿Cómo utilizan Internet los alumnos del Nivel Medio?
- Los adolescentes ante las sustancias adictivas: tabaco y alcohol.
- Perfil del máximo goleador de cada mundial de fútbol.
- Uso de la telefonía móvil por adolescentes.
- ¿El uso del cinturón de seguridad salva vidas?

Los resultados satisfactorios de esta evaluación permiten considerar a esta metodología como motivadora para lograr una buena comprensión de los contenidos estadísticos enseñados y generadora de nuevas experiencias de este tipo por parte de los alumnos-docentes en sus clases como constructores de sus propios materiales didácticos.

Conclusión

Los docentes-alumnos, han propuesto como material didáctico, distintos proyectos elaborados por ellos mismos, que hacen de la Estadística una herramienta estratégica para el análisis de distintos problemas de las ciencias aplicadas y del entorno escolar.

Ha surgido en prospectiva, como conclusión de las instancias de discusión sobre los proyectos presentados, la posibilidad de llevar esta perspectiva metodológica propia del curso de Didáctica de Estadística a la propia práctica profesional en la enseñanza media, ejercida por los docentes alumnos participantes.

Referencias bibliográficas

Álvarez, S. (1990). *Proyectos integrados en el aula*. Buenos Aires: Kapelusz.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognoscitiva*. Barcelona: Paidos.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Recuperado el 12 de octubre de 2009 de http://www.ugr.es/~batanero/

Batanero, C. y Díaz, C. (2002). *El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. Aspectos didácticos de las matemáticas*. Zaragoza: ICE.

Dewey, J. (1961). *Experiencias y educación*. Buenos Aires: Losada.

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 12 de octubre de 2009 de

http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2009). Systems of practices and configurations of objects and processes as tools for the semiotic analysis in mathematics education. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education* - 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009. Recuperado el 12 de octubre de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/

Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. Garfield (Eds.) *The assesment challenge in statistics education 1*, 153-164. Amsterdam: IOS Press.

Kilpatrick, J. (1982). Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2(3)*, 393-379.

Sanjurjo, L. y Vera, M. (1994). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Rosario: Homo Sapiens.

DE LO LÚDICO DEL ORIGAMI AL TRABAJO CON FUNCIONES

Tulio Amaya De Armas, Josefina Gulfo de Puente
Institución Educativa Madre Amalia, Sincelejo Colombia
tuama1@hotmail.com, jgulfo26@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En el presente trabajo se comparte una experiencia de aula que se realiza, utilizando el Origami, para introducir el trabajo con funciones cuadráticas, con estudiantes de la media académica. En el proceso de iniciación al cálculo, se estudió la relación entre el plegado de papel y la geometría, al desarmar un módulo cuadrado y analizar las cicatrices que quedan en él. Se relacionaron algunos elementos matemáticos presentes en el módulo, con los conceptos matemáticos que emergieron en las cicatrices y se analizaron algunas propiedades de los poliedros. Esto permitió el estudio de conceptos como rectas paralelas y perpendiculares, bisectrices y mediatrices y familias de poliedros, relacionando el área lateral de los poliedros con el tamaño del módulo y con el número de éstos, lo que llevó al estudio de familias de funciones, haciendo el tránsito por diferentes sistemas semióticos de representación y al interior de algunos de estos, llevando a los mismos estudiantes a que le asignaran significado y sentido a los conceptos estudiados, al poderlos manipular.*
Palabras clave: Plegado, poliedros, pensamiento geométrico, familia de funciones

Introducción

En trabajos que involucren funciones, es común estudiar conjuntamente dos o más variables. Este análisis de covarianza resulta problemático para estudiantes de diferentes niveles, (Nájera, 2008). Sin embargo, estos ambientes brindan una gran oportunidad para explorar diferentes representaciones del mismo objeto en un mismo ambiente y así facilitar el estudio de funciones; así, "hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc." (Font, Godino y D`Amore, 2007, p. 1). El trabajo con figuras poliédricas construidas con la técnica del origami, aparece como una alternativa para el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, permitiendo relacionar los sistemas tabular, gráfico, icónico y algebraico, y "asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras, así como el tránsito al interior de un mismo sistema de representación, al variar el tamaño de los módulos, dejando el número de éstos fijos" (Amaya y Gulfo, 2009, p. 898), facilitando el estudio de funciones en un ambiente natural, de mucha camaradería y cooperación mutua.

Acercamiento teórico

El arte del plegado de papel, es utilizado para obtener figuras de formas variadas, el cual es de gran interés por contribuir a adquirir ciertas actitudes y habilidades de forma amena, aparte de aprender y enseñar geometría y poderse relacionar con otras ramas de la matemática, (Badilla, 2007). En este trabajo lo utilizamos para estudiar el pensamiento numérico, y variacional. En particular, nos apoyamos de la postura del Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior, quien sostiene que "uno de los elementos centrales a considerar es la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones" (ICFES, 2007, p. 29). Por lo que se procura trabajar con situaciones familiares para los estudiantes, analizadas en diferentes sistemas de representación. Según Duval (1999), para que una representación pueda funcionar como tal, y se puedan reconocer dos representaciones del mismo objeto, se necesita disponer de por lo menos dos sistemas semióticos que representen al objeto que se quiere representar y que se pueda pasar espontáneamente de un sistema semiótico a otro sin siquiera notarlo. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), sugiere que entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentren los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas, considerando que el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica (MEN, 2004). Esto muestra la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar un proceso de traducción entre representaciones, (Janvier, 1990). De esta forma, el pensamiento variacional, (entendido como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de variación y cambio, con el propósito de analizarlas y realizar algunas transformaciones en ellas), permite el trabajo con elementos del contextos sociocultural donde se pueden ver relaciones de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. El ICFES manifiesta que lo que se quiere es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que el estudiante sea capaz de modelarlos y transformarlos (ICFES, 2007), es decir, no solamente identificar la matemática en situaciones reales y contextualizadas, sino que tenga la capacidad de

modelar matemáticamente esa situación. Para Monzoy (1998), La importancia de estudiar el concepto de función se puede justificar a partir de la interdependencia que se da entre los conceptos matemáticos y las situaciones reales, como un auxiliar para hacer las interpretaciones y esto es considerado fundamental en la formación matemática básica de los estudiantes.

En la búsqueda de poder relacionar la matemática con el medio sociocultural, casi siempre aparece como mediadora la geometría; especialmente cuando se trata de buscar propiedades geométricas en un objeto real, se necesita del poder geométrico, el cual se concibe como aquél que ejercitamos cuando resolvemos un problema o prueba dificultosa; para desarrollar tal poder, se debe entrenar el ojo geométrico para ayudar a ver propiedades geométricas separadas de una figura (Godfrey, 1910, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004). Esto suele ser un problemas en educación geométrica, donde los estudiantes aparecen como incapaces de ver propiedades geométricas en los objetos, esto es, sin su ojo geométrico desarrollado, (Sinclair, 2003, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004). En este contexto parece ser muy importante entrenar la imaginación de los estudiantes, y en su instrucción geométrica intuitiva, apuntar hacia el desarrollo de sus habilidades espaciales a través de actividades apropiadas. Las visualizaciones en geometría son muy importantes en la resolución de problemas, y un requisito previo puede ser, tomar mentalmente una figura, mirar sus elementos individuales y hacer conjeturas suficientemente buenas sobre sus relaciones, de forma semejante al ojo geométrico de Godfrey.

Metodología

En este trabajo participaron estudiantes del último año de la media académica, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de iniciación al cálculo, los estudiantes no habían trabajado antes funciones. Se organizaron en grupos de tres o cuatro, que ellos mismos armaron según sus preferencias.

Un módulo es la unidad mínima de plegado que se repite y se ensambla para armar las figuras geométricas, resultado de manipular adecuadamente un cuadrado de papel. A continuación se muestran, figura 1: un módulo terminado y listo para ensamblar, figura 2: un módulo desplegado, figura 3: un módulo desplegado y repasadas las cicatrices con tinta para resaltarlas, y figura 4: una pirámide siamesa triangular.

Figura 1. Módulo terminado

Figura 2. Módulo desarmado

Figura 3. Módulo desarmado y repasado

Figura 4. Pirámide siamesa triangular

Al desplegar un módulo y observar el cuadrado inicial, permitió analizar las cicatrices que quedaron en el papel y asociarlas con conceptos matemático. El trabajo se realiza a partir de un único tipo de módulo por lo que se instruyó a los estudiantes en la construcción de éstos. El primer poliedro que se construyó fue una pirámide siamesa triangular, la cual se arma con tres módulos, por lo que cada grupo al completar tres, se les explicó cómo armarla. Se varió el tamaño del módulo y se armaron varias de estas pirámides, una por cada tamaño de módulos, se anotan los valores del lado del cuadrado con que se construyó cada módulo y el área lateral de las pirámides correspondientes en una tabla, luego se pasaron al plano cartesiano para construir la gráfica correspondiente a cada número de módulo. Cada punto del plano es una pareja de la forma (lado del cuadrado con que se construyó el módulo, área lateral del tetraedro); Cuando se varió el tamaño de los módulos sin variar el número de éstos, aparecieron familias de poliedros por cada número de módulo y cada familia dio origen a la gráfica de una función; luego se varió el número de los módulos y su tamaño, resultando familias de funciones, apareciendo poliedros a escala, (Ver fig. 5 a 8). En cada sistema de representación para un número fijo de módulo, se verificó si los datos cumplían con las condiciones para ser una función, por ejemplo, cada longitud del lado del cuadrado con que se construyó cada módulo debía estar asociada al área lateral de un único poliedro, si dicha longitud se repetía, había que verificar que el área lateral del poliedro, también se repetía; para el caso de la representación gráfica, se utilizaba el criterio de la recta vertical.

Resultados

El análisis se basa en las dificultades y aciertos de los estudiantes en relación con la definición del concepto de función y con el cambio de sistema de representación. Al comenzar el estudio se quiso priorizar los presaberes que tenían los estudiantes acerca del concepto de función, se comenzó con el dominio y el rango, se identificaron en cada sistema de representación y se compararon los elementos correspondientes en cada registro. Llamó la atención que los estudiantes inicialmente no aceptaran el cero como parte de los intervalos de variación, no aceptaban la continuidad de las variables y la posibilidad de valores muy grandes tanto para el lado del cuadrado como para el área de los poliedros. Al analizar las cicatrices en los módulos, se identificó el conjunto de lados de éstos como el dominio, se calculó el área, primero de la pirámide siamesa triangular, luego del cubo y se analizó el patrón que seguían y a partir de ahí se obtuvo una expresión algebraica para cada número de módulos de cada poliedro lo que permitió asignarle significado a los parámetros de la representación algebraica, al relacionarla con los elementos en la tabla y en los módulos. Los estudiantes inicialmente no llegaron a estos resultados por cuenta propia, por lo que hubo que inducirlos a éstos y en algunos casos mostrarles lo evidente de los conceptos matemáticos en las cicatrices presentes en cada módulo que se desplegó, lo que puede deberse al poco desarrollo de su ojo geométrico (Sinclair, 2003, c.p. Fujita, Jones y Yamamoto, 2004), por su poco trabajo con la geometría hasta entonces. Después de estudiar un concepto, siempre lo tuvieron en cuenta para un desarrollo similar siguiente.

Para relacionar las diferentes representaciones, se comparó un módulo desarmado con otros listos para ensamblar, se identificó la parte del módulo que queda visible en cada poliedro, cuya área es de $\frac{x^2}{8}$, ya que al observar las cicatrices, cada módulo queda dividido en ocho cuadraditos congruentes y es exactamente una de estas partes la que queda visible por módulo en un poliedro. Amaya y Gulfo (2009) encontraron que el área lateral de la pirámide siamesa triangular es $\frac{3x^2}{8}$ ya que la componen tres módulos y por lo tanto quedan visibles tres cuadraditos; el área del cubo es $\frac{6x^2}{8}$, ya que tiene seis cuadraditos, esto es, uno por cada cara. Y en general para una figura construida con n módulos de este tipo, el área lateral es $\frac{nx^2}{8}$. De manera que el significado y el sentido de los conceptos se establecieron manipulando directamente elementos de la vida

práctica, acorde con lo sugerido por el MEN (2004). A continuación se muestran algunas de las familias de poliedros obtenidas por los estudiantes.

Figura 5. Familias de pirámides siamesas triangulares con diferentes tamaños de módulos

Figura 6. Familias cubos siameses con diferentes tamaños de módulos

Figura 7. Familias de cubos con diferentes tamaños de módulos

Figura 8. Familias de estrellas de doce puntas con diferentes tamaños de módulos

Siempre que a los estudiantes se les pidió verificar el concepto de función en un conjunto de datos, primero realizaron la gráfica dándole valores a la variable independiente en la fórmula y enseguida aplicaron el criterio de la recta vertical, por lo que coincidimos con Monzoy (1998) en que asociaron a la definición de función, con su gráfica, y con la necesidad de una fórmula como requisito para la existencia de la función. En el sistema de representación donde ningún grupo cometió errores al decidir si los conjuntos representaban una función, fue en el sagital. En la conversión de un registro a otro, los estudiantes parecían más cómodos del registro algebraico o el tabular hacia los otros, ya que cuando se les pidió encontrar la longitud de un cuadrado para armar un módulo para un poliedro en particular, en la mayoría de los casos escogieron la fórmula y unos pocos utilizaron una tabla. Y cuando se dieron condiciones en una tabla para que se identificara el tipo de poliedro, se construyera la gráfica y se encontrara la fórmula, los estudiantes salieron airosos.

El origami se convirtió en una herramienta muy adecuada para asignar significado y sentido a los conceptos de cambio y variación, al analizar los cambios en los tamaños de los poliedros e ir mirando cuánto era el aumento del área del siguiente, lo que se aprovechó también para analizar los conceptos de dependencia e independencia entre variables, al observar que al aumentar el

tamaño del módulo, necesariamente aumentaba el tamaño del poliedro y el valor de su respectiva área. Este tipo de situaciones que permiten contextualizar los problemas matemáticos son según Hitt (1994, c.p. Monzoy, 1998) un intento por rescatar las ideas intuitivas precursoras de abstracciones, lo que ayuda a reducir obstáculos de aprendizaje y puede ir construyendo a la vez un puente entre ideas intuitivas y conceptos formales, así como un ambiente de experimentación en el aula misma. Cada familia de las que resultaron corresponde a una tabla de las de la figuras 9 y a la gráfica de una función de las que aparecen en la figura 10 respectivamente; a menor número de módulos la gráfica que se obtiene es de menor pendiente, es decir, menor que las demás, así la gráfica correspondiente a las pirámides siamesas es la menor que obtuvimos y la de la estrella de treinta puntas, la mayor ya que no trabajamos con mayor número de módulos.

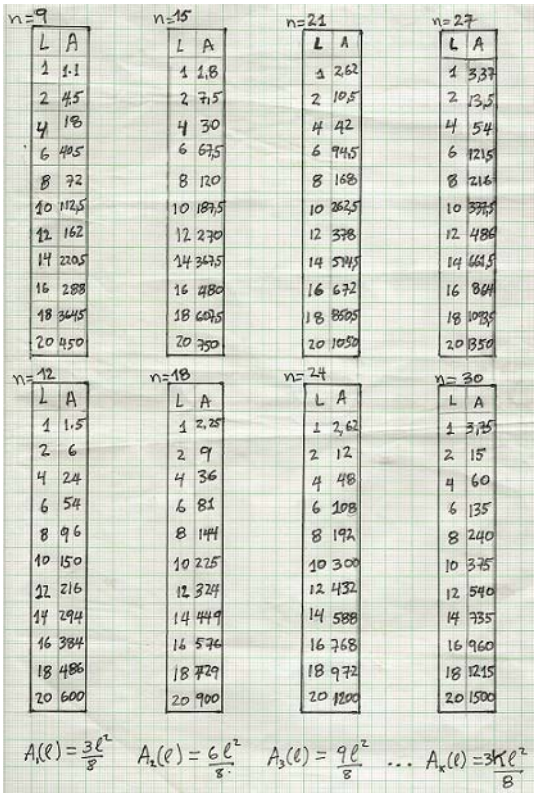


Figura 9. Tablas utilizadas para hacer las gráficas de las familias de poliedros

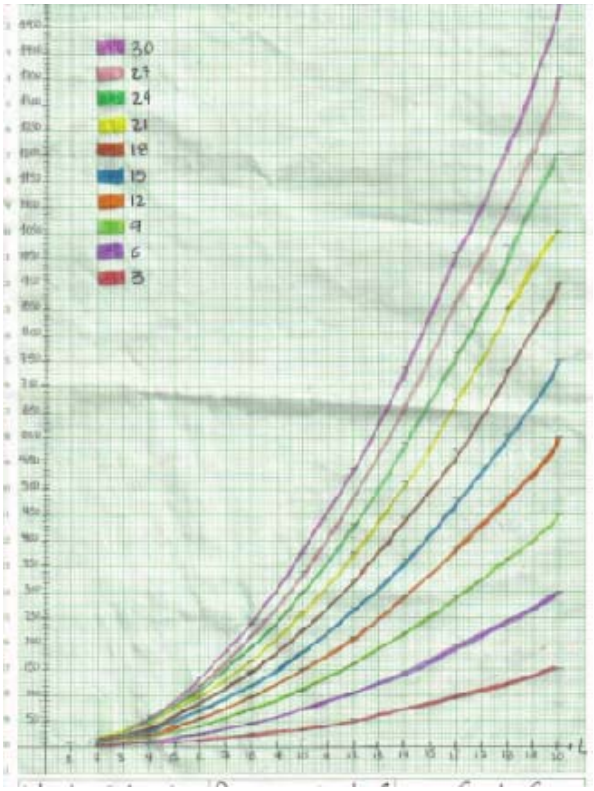


Figura 10. Familias de gráficas correspondientes a las familias de poliedros

El comparar estos sistemas de representación de un mimo objeto matemático permitió asignarle significado al concepto de función al relacionarlo con el área de los poliedros e ir identificando cada elemento de un sistema en los otros, por ejemplo, cada figura poliédrica tiene un lado fijo al que corresponde el área de su figura asociada, esta a su vez corresponde a una pareja en la tabla, que como pareja ordenada representa un único punto del plano cartesiano, verificándose con esto el concepto de función. Así se llega a que cada familia de figuras poliédricas corresponde a una tabla y a una gráfica del plano cartesiano.

Conclusiones

A los estudiantes en general les costó mucho aceptar otro sistema de representación, diferente del algebraico, como representación de una función, para ellos una función es una fórmula, no un conjunto de pares ordenados, en una tabla o en un plano que cumplen ciertas condiciones, ni una gráfica en un plano y mucho menos unas figuritas de colores. Pero una vez lograron relacionar los elementos de un sistema con los correspondientes del otro, las cosas se facilitaron. Esto facilitó el trabajo con otras situaciones en el mismo concepto.

Para decidir sobre si un conjunto cumplía con la definición de función, predominó el criterio de la recta vertical (Monzoy, 1998), y al convertir de un registro de representación a otro, los estudiantes preferían el registro algebraico o el tabular como punto de partida hacia los otros. El Origami se convirtió en una herramienta amena que permite hacer un barrido de muchos conceptos geométricos. Este proceso de análisis de las cicatrices al desplegar un módulo y estudiar sus propiedades geométricas, se convirtió en un paso natural de la geometría espacial a la geometría euclidiana y viceversa.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. y Gulfo, J. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 895-901. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Badilla, J. (2007). El origami y la geometría. Recuperado el día 23 de septiembre de 2009 de http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Talleres/ElOrigamiylaGeometria.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle, Grupo de educación matemática. Cali, Colombia.

Font, V. Godino, J. y D`Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Recuperado el 19 de septiembre de 2009 de http://www.webpersonal.net/vfont/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Fujita, T. Jones, K. y Yamamoto, S. (2004). *Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry.* Recuperado el 23 de septiembre de 2009 de http://eprints.soton.ac.uk/14687/.

Instituto colombiano para el fomento de la educación superior. (2007). Fundamentación conceptual área de Matemáticas. Bogotá: Acevedo, M. Montañés, R. Huertas, C. Pérez, M.

Janvier, C. (1990). *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* SpringerLink 21(1), 91-99.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Bogotá: Castiblanco, A. Urquina H. Acosta, E.

Monzoy, J. (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. Memorias del IX Seminario Nacional microcomputadoras en educación matemática, Septiembre, Ciudad de México.

Nájera, V. (2008). ¿Las gráficas una representación natural? Recuperado el 19 de septiembre de 2009 de http://www.valois.com.mx/archivos/Valois_Najera_Graficas_Y_Representaciones_2008.pdf

ARTICULAÇÃO DOS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS NO ENSINO DA NOÇÃO DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES E DUAS INCÓGNITAS

Marlene A. Dias, Mariza C. da Costa, Ruy C. Pietropaolo, Tânia M. M. Campos
UNIBAN Brasil
alvesdias@ig.com.br, canjirano@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamento Algébrico Nivel: Básico

Resumo. *Utilizando como referencial teórico central a abordagem teórica de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1992) e como referenciais teóricos de apoio as abordagens teóricas em termos de quadro de Douady (1984, 1992), em termos de pontos de vista de Rogalski (1995), sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997) e a noção de "topos" de Chevallard e Grenier (1997), apresenta-se nesse trabalho uma análise da evolução do ensino da noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas para estudantes entre 13 e 14 anos da escola básica no Brasil. Consideram-se, mais especificamente os ostensivos e não ostensivos utilizados nas tarefas propostas aos estudantes das diferentes épocas. Finalmente, são feitas algumas considerações sobre os resultados encontrados, que permitem considerar a existência de um número reduzido de tarefas que podem variar em função dos quadros e dos pontos de vista que se deseja articular para alcançar o nível de conhecimento desejado.*
Palavras-Chave: Sistemas lineares, ostensivos e não ostensivos, quadros

Introdução

A noção de sistemas de equações lineares é uma ferramenta matemática importante tanto para os estudantes do ensino secundário como para os do ensino superior, pois além de permitir a modelagem de diversas situações matemáticas das outras ciências e do cotidiano, ela também possibilita a articulação de outras noções matemáticas, desde o ensino fundamental até o superior. Pode-se citar como exemplo, sua aplicação em questões da engenharia, de álgebra linear e de equações diferenciais.

Certamente, essas aplicações não se reduzem aos sistemas de duas equações e duas incógnitas, mas a escolha dessa noção particular está relacionada ao fato dela permitir uma introdução da noção de sistemas lineares que quando bem explorada, permite discutir as possibilidades de soluções desses sistemas de equações lineares, assim como algumas de suas aplicações.

Sendo assim, o objetivo dessa pesquisa é compreender as escolhas para o tratamento dessa noção para estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos, a fim de verificar como suas diferentes possibilidades de tratamento são exploradas nessa etapa da escolaridade.

Dessa forma, estuda-se neste trabalho, a relação institucional esperada, via análise dos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e a relação institucional existente em diferentes décadas, via livros didáticos referentes a essas épocas. Ou seja, o estudo aqui proposto tenta compreender a ecologia das diferentes tarefas e técnicas encontradas nas diferentes décadas.

Inicia-se, assim, este estudo, a partir do seguinte questionamento:

- Como se aborda a noção de sistema de duas equações lineares e duas incógnitas nas diferentes décadas?
- De quais instrumentos os professores dispõem para efetuar suas escolhas?
- Quais são os ostensivos e não ostensivos em jogo nas diferentes abordagens, conforme definição de Bosch e Chevallard (1999)?
- Em que sistema de tarefas é possível desenvolver os ostensivos e não ostensivos escolhidos?
- Quais são as condições e empecilhos que favorecem ou atrapalham sua utilização?
- Quais são as escolhas institucionais para a sua utilização?

Na tentativa de responder às questões acima, após o estudo bibliográfico das obras encontradas, observa-se a existência de alguns trabalhos de pesquisa sobre as noções de equações e inequações, mas não encontramos no Brasil trabalhos específicos sobre sistemas de equações lineares, em particular, sobre os sistemas de duas equações com duas incógnitas, o que aumentou o nosso interesse por desenvolver uma pesquisa específica sobre essa noção matemática.

Referencial teórico da pesquisa

O estudo bibliográfico conduziu-nos a escolher a abordagem antropológica de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1992) como referencial teórico central para a análise das relações institucionais esperadas e existentes no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas para estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos. Dedicamo-nos, em particular, ao exame dos ostensivos, isto é, dos objetos de natureza sensível como os sons, os grafismos e os gestos, e não ostensivos, ou seja, os objetos como as noções, os conceitos e as idéias que só

podem ser evocados por meio da manipulação adequada dos ostensivos que lhe são associados, privilegiados nas diferentes décadas para o ensino da noção de sistemas de equações lineares.

Dessa forma, o objetivo do estudo da relação institucional esperada e existente para o ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, via documentos oficiais e, principalmente, livro didático, é verificar quais são os diferentes tipos de tarefas propostas nas diferentes décadas, quais técnicas são privilegiadas e quais podem ser utilizadas para justificar o trabalho matemático em jogo, isto é, que discurso tecnológico é empregado para auxiliar o estudante a desenvolver as diferentes tarefas que lhe são propostas em função dos ostensivos e não ostensivos utilizados.

Além disso, para compreender melhor que papéis o professor e o estudante devem desempenhar no processo de ensino e aprendizagem, escolhe-se a noção de "topos" introduzida por Chevallard e Grenier (1997), que permite analisar o que se espera do professor e do estudante, tanto em relação aos conhecimentos prévios necessários quando se introduz um novo conceito matemático, como em relação às atividades e atitudes necessárias para que se desenvolva o trabalho matemático em jogo nas tarefas que competem a cada um deles.

Para a construção da grade de análise, foram ainda utilizadas as noções de quadro, conforme abordagem teórica de Douady (1984, 1992), de pontos de vista, conforme definição de Rogalski (1995) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme abordagem teórica de Robert (1997).

Metodologia da pesquisa

Após um estudo bibliográfico das noções de equações, inequações e sistemas de equações lineares para a escola básica no Brasil e dos trabalhos relacionados ao referencial teórico escolhido.

Na seqüência foram levantadas as sugestões dos documentos oficiais para o tratamento da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas ressaltando os papeis do professor e do estudante e um conjunto de tarefas que possibilitam o tratamento proposto por esses documentos.

A partir dessas tarefas constrói-se uma grade de análise para analisar as regularidades e diferenças existentes nas propostas de ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas nas décadas escolhidas. Essa análise é feita via livro didático.

A grade de análise

A grade serve de instrumento para estudar os ostensivos e não ostensivos possíveis na introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, destacando:

- As tarefas associadas a essa noção e , em geral, utilizadas no trabalho com alunos entre 13 e 14 anos.
- As variáveis dessas tarefas, para as quais se deu ênfase aos ostensivos e não ostensivos possíveis para a sua solução e também as necessidades de mudança de quadro ou domínio em função dos níveis de conhecimento esperados de professores e estudantes em relação ao ponto de vista escolhido para sua solução.

Distinguimos as tarefas apresentadas na figura 1 em função da situação que elas privilegiam:

- situação matemática enunciada no quadro numérico;
- situação matemática numérica transformada para um contexto cotidiano;
- situação matemática algébrica transformada para um contexto cotidiano;
- sistemas de equações lineares algébricos explícitos pedindo ou não o método a ser aplicado;
- estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas;
- situação que exige a articulação da noção de sistemas de equação linear com outras noções matemáticas.

Figura 1: Tipos de tarefas

Para as variáveis das tarefas considerando a tarefa: “Estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas, distinguimos as variáveis descritas por meio da grade da figura 2.

- O tipo de situação dada no enunciado da tarefa;

- Os quadros em que a tarefa é enunciada;

- Os não ostensivos possíveis para o seu desenvolvimento, colocando em evidência aqueles que devem fazer parte do "topos" do aluno e/ou do professor;

- Os ostensivos possíveis para o desenvolvimento das tarefas;

- Os quadros que podem ser utilizados para a solução da tarefa;

- Os níveis de conhecimento esperados para a solução da tarefa, em função do ponto de vista escolhido;

- Os pontos de vista sob os quais a tarefa pode ser trabalhada, colocando em evidência aquele que lhe é mais adequado.

Figura 2: Grade de análise

A análise dos livros didáticos

A análise é feita considerando:

O papel desempenhado pela noção de sistemas de equações lineares na obra em relação às outras noções introduzidas na mesma série por meio de um organograma.

Na seqüência, é estabelecido, teoricamente, o papel do professor e do estudante, a saber:

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do professor: a introdução teórica da noção de sistemas de equações lineares e os exercícios resolvidos ("topos" do professor).

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do estudante: os exercícios propostos ("topos" do aluno).

Resultados da análise

Os resultados abaixo correspondem à análise de oito obras que representam as possíveis relações institucionais trabalhadas entre 1959 e 2005. Essas obras estão indicadas separadamente nas referências bibliográficas como livros didáticos analisados.

Verifica-se que, em geral, as tarefas apresentadas não exigem o cálculo literal (regras e leis que permitem a aplicação da técnica) podendo ser resolvidas apenas por meio do cálculo numérico, isto é, utilizando o cálculo mental ou o ponto de vista das tentativas como mostra o exemplo da seguinte tarefa.

Um menino quer cortar um pedaço de barbante com 30 cm de comprimento em duas partes, de forma que uma dessas partes meça o dobro da outra. Quanto deverá medir cada parte? (Estado de São Paulo, p.130, 1992).

As tarefas "situação matemática transformada para um contexto cotidiano", "sistemas de equações lineares algébrico explicito pedindo ou não o método a ser aplicado", "estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas" correspondem a apenas 39% do total de tarefas propostas, sendo que 34% são as tarefas de aplicação de um método de solução de sistemas, que corresponde ao desenvolvimento das técnicas de solução desse tipo de sistema, isto é, privilegia-se apenas o nível técnico.

A tarefa "situação matemática algébrica transformada para um contexto cotidiano", considerada algébrica, pois exige que os estudantes dominem as noções de equações e sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, verifica-se, conforme nossa proposta de analise, que ela corresponde a apenas 4% do trabalho proposto aos estudantes, o que pode dificultar a possibilidade de aplicação desse conhecimento em outros contextos, no futuro. Ou seja, pouco se exige dos estudantes o que pode dificultar a aplicação da noção de sistemas lineares para a modelagem de situações variadas.

Em relação ao questionamento inicial foi possível observar que:

Para o ensino da noção de sistemas de equações lineares para estudante entre 13 e 14 anos, a abordagem proposta está associada à solução de situações-problema cotidianas e para um tipo de sistema mais restrito, isto é, o sistema de duas equações e duas incógnitas.

Os professores dispõem dos Parâmetros Curriculares Nacionais para efetuar suas escolhas. Nesse documento a abordagem proposta privilegia o trabalho sobre os ostensivos, ou seja, sobre as representações dos sistemas lineares, e o nível técnico no desenvolvimento das seis tarefas propostas.

Verificou-se, ainda, que existe um número reduzido de tarefas que permitem a introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, e as escolhas variam em função dos quadros que se desejam articular, dos pontos de vista que se desejam levar em conta e do nível de conhecimento que lhes são associados.

Além disso, em função das tarefas e da grade de análise construída, foi possível observar, por meio da análise dos livros didáticos escolhidos, que nas obras atuais considera-se a noção de equação do 1º grau, como conhecimento já construído quando se introduz a noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Essa escolha pode justificar o fato de não se utilizar o ponto de vista das tentativas ou o cálculo mental mesmo quando esse é possível.

Existe também a preocupação dos autores das três obras recentes em articular os quadros numérico, geométrico e algébrico, mesmo quando as noções são introduzidas por meio dos ostensivos que as representam, o que exige a utilização de um discurso tecnológico para justificar as passagens de uma representação à outra, ou a aplicação de conhecimentos prévios, no desenvolvimento das tarefas propostas.

Consideramos que as escolhas estão associadas ao "topos" do professor e do estudante, uma vez que variam em função do tipo e da quantidade de tarefas que ficam a cargo de cada um deles, conforme nossa proposta de análise. Dessa forma, parecem que em relação às obras atuais analisadas existe a preocupação de se levar em conta os seis tipos de tarefas consideradas nesta pesquisa.

Considerações Finais

É possível observar que houve uma melhor delimitação do estudo da noção de sistemas de equações lineares, em que a ênfase é dada aos sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, mas esse estudo não se limita apenas ao caráter ferramenta de solução de tarefas da própria matemática, de outras ciências ou do cotidiano. Ou seja, seu caráter objeto também é destacado pela exploração e discussão das possíveis soluções dos sistemas, possibilitando ainda uma mudança de quadros que permite visualizar geometricamente essas possíveis soluções.

Observa-se ainda que entre as décadas analisadas, houve um momento (década de 50) em que se estudavam os sistemas de equações lineares de m equações e n incógnitas, mas o nível

privilegiado era apenas o nível técnico. Essa época é seguida por uma abordagem na qual se privilegia o objeto matemático e não se consideram as situações de aplicação do conhecimento em jogo – abordagem característica da época da Matemática Moderna (década 60).

Pode-se dizer que a partir da década de 70, aqui analisada por meio da obra de Scipione, se inicia uma articulação entre o caráter ferramenta e o caráter objeto dos sistemas de duas equações e duas incógnitas, que vem sendo empregada até o presente.

É importante observar que a articulação considerada é feita por meio de uma mudança entre os quadros algébricos e geométricos, não exigindo um trabalho fundamentado nas estruturas de grupo aditivo, multiplicativo, abeliano, anel e corpo, como se propunha na época da Matemática Moderna.

Referência bibliográfica

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. *(PCN): Matemática*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF.

Castrucci, G. (2002). *A Conquista da* Matemática, 7ª série. São Paulo: FTD.

Chevallard Y. & Grenier, D.(1997). Le topos de l' éleve. En *Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques deHoulgate* (pp. 35-38). França: Houlgate.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

De Farias, S. (1959). *Curso de Álgebra Ensino Fundamental*. Rio de Janeiro: Globo.

Di Pierro Netto, S. (1971) *Matemática na Escola Renovada*. São Paulo : Saraiva.

Di Pierro Netto, S. (1982) *Matemáticos Conceitos e Operações*. São Paulo: Saraiva.

Di Pierro Netto, S. (1991) *Matemática Scipione, 7ª série.* São Paulo: Scipione.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Iezzi, G. et al. (2000). *Matemática e Realidade, 7ª série.* São Paulo: Atual.

Iezzi, G. et al. (2005). *Matemática e Realidade, 7ª série.* São Paulo: Atual.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do Seminário em São Paulo*. Brasil.

Sangiorgi, O. (1966) *Matemática Curso Moderno*. São Paulo: Moderna.

São Paulo (Estado). (1991) *Proposta Curricular para o Ensino da Matemática: 1º grau.* Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: SE / CENP.

ESTUDIO DE LA DERIVADA EN FENÓMENOS DE CAMBIO EN UN ESCENARIO PERIÓDICO

Ángeles Alejandra Ordóñez Morales, Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas México
anlejandra@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación busca articular los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales que muestren elementos que den significados a la relación* $f - f'$ *en un contexto de funciones periódicas mediante actividades en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento. Esta articulación de contextos se desarrolla mediante el uso de herramientas tecnológicas para simular y modelar movimientos y poder estudiarlos desde un ambiente gráfico y analítico.*
Palabras claves: Lo periódico, la relación función-derivadas

Introducción

Lo poco significativa que es la relación entre una función y su derivada provoca que las propiedades de una parezcan ser heredables a la otra. Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, esta constante permanece en su derivada; en consecuencia, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje *y*, la gráfica de su derivada también se desplaza verticalmente. En el mismo sentido esta "herencia" ocurre también para la propiedad periódica ya que las funciones trigonométricas son el referente para esta propiedad, de tal manera que resulta común que la implicación f *es periódica* $\Leftrightarrow$ f' *es periódica* se trivialice al considerar únicamente estas funciones (Ordóñez, 2007).

En esta investigación se desea establecer la articulación de los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales para construir elementos que doten de significados a la relación $f - f'$ en un contexto de funciones periódicas.

Esta articulación de contextos se desarrolla mediante el uso de herramientas tecnológicas para simular y modelar movimientos y poder estudiarlos desde un ambiente gráfico y analítico.

Problemática

Investigaciones en Matemática Educativa, en particular estudios con un enfoque socioepistemológico, dan cuenta del poco significado que se le da a la derivada y a su primitiva, Cantoral (1997) reporta que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivada o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función susceptible a volver derivar.

Algunas investigaciones muestran que en las construcciones de los estudiantes usan argumentos que toman por teoremas. En apariencia son verdaderos porque en algunos momentos funcionan pero en otros no; a estos teoremas se les llama teoremas factuales; al trabajar con la relación $f - f'$ se encuentran algunos de estos teoremas, por ejemplo, Aguilar (1999) al trabajar con estudiantes de bachillerato reporta que si a la función primitiva f se le suma una constante $f + a$, también se le sumará una constante a la derivada f', $f'+a$, a pesar de saber analíticamente que la derivada de f y $f + a$ son iguales. González (1999) desarrolla una secuencia con profesores y en la puesta en escena encuentra que es común suponer que si $f'(a) > 0$, entonces también se cumple $f''(a) > 0$. Hernández (2004) aplicó una situación y halló que dada $f(x) = x^2 + B$, entonces $f'(x) = 2x + B$; suele manejarse que si la gráfica de una función sufre un desplazamiento vertical sobre el eje *y*, entonces la gráfica de su derivada también se desplaza verticalmente, por tanto, "la gráfica de f' persigue a la gráfica de f".

En el mismo sentido para funciones periódicas también se genera este tipo de resultado Ordoñez (2007), reporta que al preguntar sobre la veracidad o falsedad de la doble implicación:

$$f \text{ es periódica} \Leftrightarrow f' \text{ es periódica}$$

se trivializa, como verdadera, una respuesta muy común ha sido *"Sí, porque si tomamos* $f(x) = senx$ *la cumple. Ese es al menos mi conocimiento sobre ello".* Pensamos que esto se ha dado debido a que se asocia a la periodicidad como una característica de las funciones periódicas, y descrita por la igualdad $f(x) = f(x + p)$ (Granville, 1993; Leithold, 1998 y Stewart, 1999).

Aún cuando dicha doble implicación se perciba como no trivial, el privilegio es hacia los aspectos analíticos formales de la matemática. Como ejemplo, Spivak (1980) presenta a la periodicidad

como una propiedad de las funciones en general y no como una propiedad exclusiva de las funciones trigonométricas.

Bajo la problemática de establecer significados para la función-derivada, el objetivo de esta investigación es establecer la articulación de los contextos analítico, gráfico, y físico desde una perspectiva de las prácticas sociales que muestren elementos que den significados a la relación $f - f'$ en un contexto de funciones periódicas, en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento apoyados en el uso inteligente de la tecnología. De acuerdo a Pérez (2009) el uso de la tecnología como una herramienta apoya la generación de conocimiento matemático y establece un vínculo en la articulación de los resultados de investigaciones socioepistemológicas y la matemática escolar vía diseños didácticos en los que las prácticas sociales viven de forma intencional.

Investigación

A lo largo de nuestra investigación encontramos que cuando hacemos una separación de contextos y cuestionamos la pregunta ¿se cumple *f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica?* encontramos distintas respuestas.

Al preguntar a un profesor de Ingeniería Civil en un contexto analítico argumenta que ambas implicaciones se cumplen y se mueve únicamente en las funciones Seno y Coseno, y cuando es cuestionado en un contexto de graficas vemos que no se cumplen ambas implicaciones (ver fig. 2 sus afirmaciones están encerradas), sin embargo no es consciente de este hecho ya que al separar los contextos le asigna a un mismo objeto matemático diferentes concepciones.

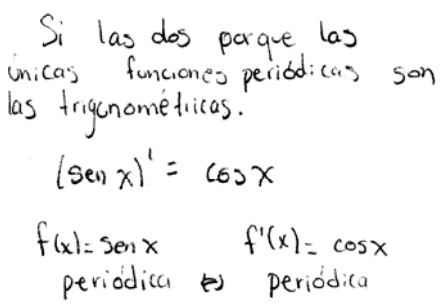


Fig 1. Contexto analítico

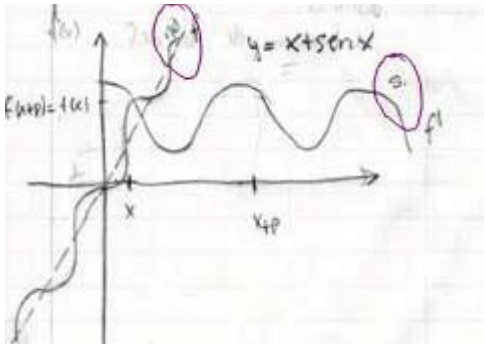


Fig 2. Contexto gráfico, la función *f(x)=x+senx* no es periódica y su derivada *f'(x)* si lo es

Al analizar detenidamente ambas implicaciones tenemos que se cumple la proposición: Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica. En efecto

Si f periódica con periodo a se tiene $f(x) = f(x+a)$ derivando ambos lados de la igualdad y usando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = f'(x+a) * \frac{d}{dx}(x+a) = f'(x+a) * (1) = f'(x+a)$$

De aquí:

$$f'(x) = f'(x+a)$$

Es decir la derivada de una función periódica es periódica.

Para analizar la implicación reciproca consideremos la función $f(x) = x + senx$ esta función no es periódica debido a que es una función creciente, sin embargo su derivada $f'(x) = 1 + cosx$ si es periódica período 2π .

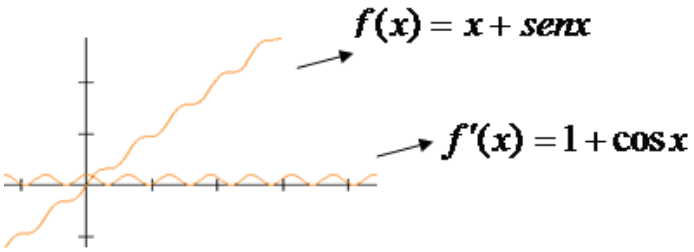


Figura 3. Graficas de la función *f(x)=x +senx* y su derivada

Por lo anterior vemos que si la derivada es periódica no implica que la antiderivada lo sea.

Para un contexto físico, Ordóñez (2007) menciona que si pensáramos en la modelación del movimiento a través de una función $f(x)$ con las características propuestas, resultaría que mientras el desplazamiento no es periódico, su velocidad $f'(x)$ sí lo sería. Esto es, estamos frente a ciertos tipos de movimientos con desplazamientos que no son periódicos pero sí mantienen algunas de sus características periódicas, como la velocidad y por consecuencia, su aceleración. Esto nos lleva a considerar que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un tránsito entre los contextos físico y gráfico.

Hasta aquí identificamos que articular contextos nos permite encontrar elementos situacionales para dotar de significados a la relación función –derivadas en un escenario que involucra fenómenos de cambio con comportamientos periódicos. Por lo que en esta investigación proponemos algunas actividades a realizar con el uso de tecnología (calculadoras-graficadoras y sensores de movimiento) para articular las representaciones analíticas, gráficas y físicas y construir elementos significativos de dicha relación en un escenario periódico en donde se involucren fenómenos de cambio como el movimiento. Dichas actividades aun están en construcción y pretendemos que sean base para que en un futuro lleguemos a una secuencia didáctica para incidir en la matemática escolar.

Marco teórico

Por la naturaleza de nuestra investigación el marco teórico que nos guía es la socioepistemología entendida como una epistemología de prácticas sociales asociadas a la producción y difusión del saber científico a través de una visión sistémica de las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2004). La práctica social para esta aproximación teórica son actividades que las personas hacen a propósito, que no son inerciales y que se realizan de manera intencional con cierto significado. Es decir, la intencionalidad es una característica fundamental que imprime significados al conjunto de acciones que tienen que ver con la intención de hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático (Buendía 2004).

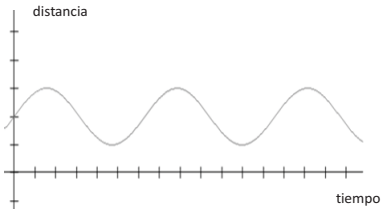
Buendía (2004, 2005, 2006) propone una socioepistemología para lo periódico en ella señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de dicha propiedad. Se reconoce a lo periódico como una construcción social en la que los aspectos analíticos de la periodicidad se nutren de otros de carácter cultural, histórico e institucional.

Las actividades

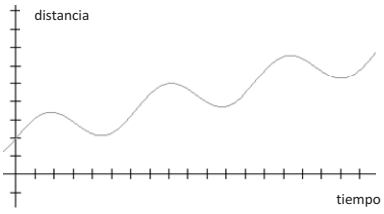
En esta sección mostramos las actividades que estamos trabajando, en donde la idea es articular las representaciones analíticas, gráficas y físicas de la relación función-derivadas.

Actividad A

a)



b)

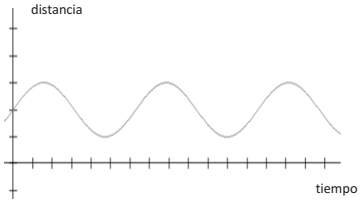


1. En las gráficas anteriores, describa el movimiento y su velocidad.
   ¿Cuál es la velocidad después de 45 segundos?
2. Con ayuda de las graficas realiza una tabla de valores tiempo-distancia
Encuentra la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo.
3. Realiza una gráfica de los datos obtenidos y el tiempo
¿Cuál es la posición y la velocidad en el tiempo 125?

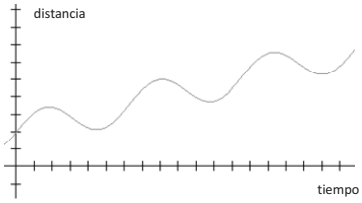
Actividad B

Describa como debe moverse un cuerpo frente a un sensor para que éste dibuje las siguientes graficas

a)



b)



¿Qué velocidad tiene el cuerpo en el tiempo 124?

Con estas actividades se busca intencionalmente que al describir y caracterizar movimientos es necesario considerar la posición y sus variaciones, es decir, velocidad y aceleración; a demás provocar el uso del comportamiento periódico como una herramienta para predecir. El uso de la tecnología en ambas actividades nos permite visualizar la forma de los movimientos ya que la idea, de las gráficas como la trayectoria a seguir se descarta de manera inmediata.

Comentarios finales

Hemos explorado estas actividades mediante entrevistas individuales cada una con distintos participantes. Los primeros resultados que obtenemos es que al articular contextos la derivada se irá construyendo al matematizar la variación del movimiento y los cambios de las gráficas.

De tal forma que realizar actividades en contextos de movimientos nos permite analizar qué es lo que varía –y cómo varía– esto nos ayuda asignar significados a la derivada más allá de lo analítico y algebraico. Trabajar en un contexto de variación nos permite identificar el papel de las prácticas para la construcción de significados de la relación función-derivadas.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2005). Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R.,Carrillo, C.,López, I., Navarro, C. (eds) *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp. 77-90) México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Buendía, G. (2006) Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 9 (2), 227-251.

Buendía, G. y Ordóñez A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 12(1), 7-28

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. *Serie: Antologías, número 1. Programa Editorial del Área de Educación Superior (pp. 81-98).* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y Lenguaje Variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sanchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de matemática educativa*, Vol.18, pp.1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Granville, W. (1993). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: Limusa Noriega Editores

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de* f *y* f' *para las funciones* x, x^2, *y* x^3. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. 7 ed. México: Oxford University Press – Harla

Ordoñez, A. (2007). *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.* Tesis de maestría no publicada, UNACH, México.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología.* Tesis de maestría no publicada, UNACH, México.

Spivak, M. (1980) *Calculus*. USA:Publish or Perish, Inc. Second edition

Stewart, J. (1999) *Cálculo Diferencial e Integral*. México: International Thomson Editores.

USO DE UNIDADES DE AUTOINSTRUCCIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN, EN UN CURSO DE MATEMÁTICA I PARA ADMINISTRADORES

Dalys Alvarado
Universidad de Panamá, Centro Regional de San Miguelito Panamá
crusamatys@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento Algebraico Nivel: Superior

Resumen. *En las últimas décadas en diferentes universidades del mundo se ha observado que la modalidad de estudio con un requerimiento de asistencia "semi presencial", se ha convertido en una herramienta importante en la investigación educativa y un apoyo para las diferentes disciplinas.*
El reporte que se ofrece a continuación es el resultado de una pequeña investigación exploratoria y comparativa de como se desenvuelve un grupo, a su vez dividido en dos subgrupos que trabajan en dos modalidades de aprendizaje: "presencial" apoyada en la clase magistral tradicional y "semi presencial", apoyada en la unidad de auto instrucción".
Esta actividad fue aplicada a estudiantes del curso Mat. 150: Matemática para Administradores de Empresas de la Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito, durante el Primer Semestre 2008.
Palabras clave: Autoinstrucción, semipresencial, factorización

Introducción

La metodología empleada en la universidad centra la enseñanza en la "**c***lase magistral***"**. Al parecer prevalece la idea que el aprendizaje es fruto del esfuerzo y repetición del estudiante, quien debe aprender una serie de procedimientos reforzando su aplicación con una cantidad considerable de ejercicios.

Mucho se insiste que este tradicional sistema, fomenta la deserción del estudiantado, pues no puede involucrarse en el proceso de construcción y reconstrucción de sus conocimientos, habilidades, actividades, efectos, formas de comportamiento y valores propios.

Ante esta situación se plantean otras alternativas, una de ellas, la "Guía didáctica de autoinstrucción". Por ello se realiza este seguimiento a estudiantes de primer año, con el interés de recoger información fidedigna sobra la "efectividad" de esta opción de enseñanza - aprendizaje, se busca: "Seleccionar la perspectiva principal desde la cual se abordará la idea de Investigación. En efecto, aunque los fenómenos del comportamiento humano son los mismos, pueden ser analizados en diversas formas según la disciplina dentro de la cual se enmarque

fundamentalmente la investigación". (Hernández Sampieri, 1999, p. 4).

Pregunta de investigación

La enseñanza apoyada en el desarrollo de tareas de la unidad de auto instrucción, *¿Promoverá el aprendizaje significativo y la aplicación de la factorización, en los estudiantes de la asignatura de Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas?*

Muestra

Este estudio se realizó con 38 estudiantes diurnos de primer año de la asignatura Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas. Los mismos fueron organizados al inicio así: 19 forman el grupo control (quienes participan en clases presenciales) y 19 forman el grupo experimental (quienes usan y desarrollan la unidad de auto instrucción).

Diseño y metodología de la investigación

La investigación es de corte pedagógico, de orientación práctica y con un enfoque cuasiexperimental, a los estudiantes se les administra una preprueba, para verificar la equivalencia inicial e identificar el nivel de los conocimientos previos en ellos.

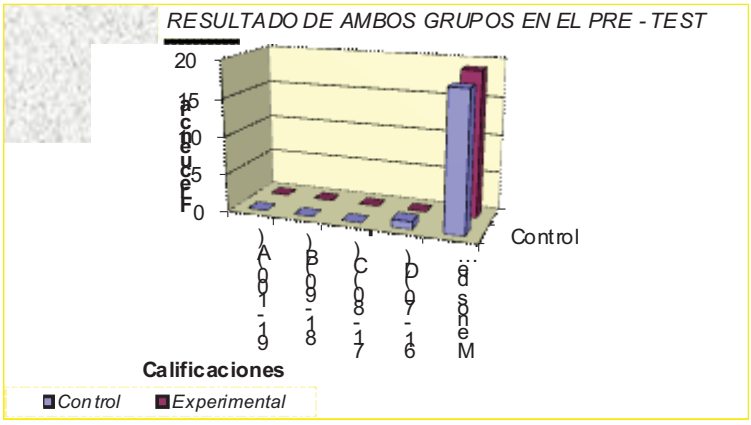
Posteriormente estos estudiantes son distribuidos aleatoriamente en dos subgrupos que realizan actividades de aprendizaje. Con el grupo "control" se trabaja en clases magistrales y presenciales en el salón de clases y con el grupo "experimental" se trabaja a través del desarrollo de la unidad de auto instrucción.

Finalmente se les aplica una postprueba para evaluar si se produce diferencia significativa entre ambos grupos, utilizando el método de diferencia de medias muestrales.

Presentación de resultados

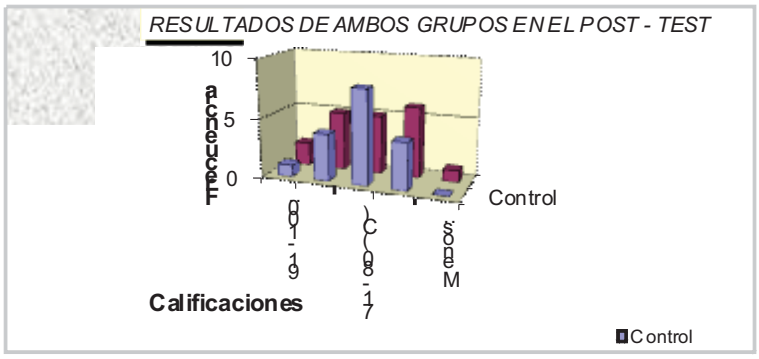
A continuación se presentan los resultados obtenidos luego de aplicados los diferentes procedimientos descritos en secciones anteriores.

GRAFICA # 1



Fuente: Resultados del Pre -Test y Post-Test del grupo de estudiantes del curso de Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas de la Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito. Primer Semestre 2008.

GRAFICA # 2



Fuente: Resultados del Pre -Test y Post-Test del grupo de estudiantes del curso de Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas de la Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito. Primer Semestre 2008.

CUADRO # 1

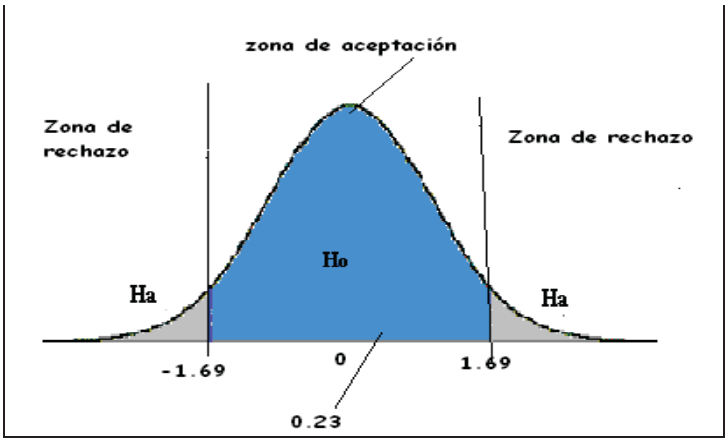
Medidas de Tendencia Central. Reflejan la tendencia del grupo de datos, pues son valores centrales y ayudan a ubicar la distribución dentro de una escala de medición				
Interpretación de la medida	**Pre-Test**		**Post-Test**	
	Grupo Control	**Grupo Experimental**	**Grupo Control**	**Grupo Experimental**
Media aritmética **($\bar{x}$)**: promedio aritmético de los datos.	25.03	24.5	76.26	75.55
Mediana (**Me)**. Refleja la posición intermedia de la distribución, divide en 2 partes iguales los datos, describe el valor central de la población.	25.3	24.5	75.61	74.5
Moda (**Mo)**. Es el valor que ocurre con mayor frecuencia	26.6	41.16	74.95	67.27
2. Medidas de Dispersión. Indican la dispersión de los datos en una escala de medición, son intervalos que designan distancias o un número de unidades en la escala de medición.				
Valor Mínimo (**Mín.)**. Es el valor menor.	0	0	62	60
Valor Máximo. (**Máx.)** Es el valor mayor	61	46	96	94
Rango. (**R**) Diferencia entre la puntuación mayor y la menor, sólo considera los valores extremos. Cuanto mayor sea mayor será la dispersión de los datos.	61	46	34	34
Varianza. (**V)** Promedio del cuadrado de las desviaciones de los valores de las variables con respecto a la media	257.61	252.63.	61.59	104.15
Desviación estándar. (**S)** Cuanto mayor es su valor, mayor es la dispersión de los datos alrededor de la media.	16.05	15.89	7.84	10.2
Coeficiente de Variación.(**CV)** Si su valor es menor al 10%, se considera una distribución con una dispersión poco significativa con relación a la media	64	64.8	10.29	13.51
3. Coeficiente de correlación. Indica la cercanía de los puntos a la recta de regresión.		**Grupo Control**	**Grupo Experimental**	
Se habla de una correlación directa "moderada", cuando 0.3 < r < 0.7		0.3	0.6	

Fuente: Resultados y cálculos del Pre -Test y Post-Test del grupo de estudiantes del curso de Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas de la Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito. Primer Semestre 2008.

Los resultados de las diferentes medidas: media, mediana, moda, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, coeficiente de correlación; permiten afirmar que "*no hay diferencia marcada*" entre el Grupo Control (Clase magistral) y el Grupo Experimental (Uso de unidad de autoinstrucción).

GRAFICA # 3

PRUEBA t – STUDENTEN EL POST TEST



Fuente: Resultados y cálculos del Pre -Test y Post-Test del grupo de estudiantes del curso de Mat. 150: Matemática I para Administradores de Empresas de la Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. Centro Regional Universitario de San Miguelito. Primer Semestre 2008.

El valor de la t – student tabulada se considera como "1.6909". *(*Meyer, 1973, Tabla 4 del Apéndice. p. 354). De allí que el intervalo de aceptación está dado por [-1.6909, 1.6909], e incluye la t – student calculada, cuyo resultado es tc = 0.2353. *Significa entonces que "no hay diferencias significativas" en ambos grupos***.**

Conclusiones

- Al momento del Post – test, dos estudiantes del grupo control habían dejado el curso, el grupo experimental estaba completo. Esto confirma que la modalidad semipresencial permite cierta flexibilidad a los estudiantes con dificultades de asistencia a clases.
- Se observa en esta investigación poca diferencia en el rendimiento académico de quienes utilizaron la unidad de autoinstrucción, con respecto a quienes siguieron una planificación en el salón de clases.

- Se debe considerar la madurez de los participantes, quienes tienen el reto de estudiar metacognitivamente bajo su propio ritmo y conducción logrando sus metas propias.
- Es necesario acompañar esta modalidad con clases tutoriales, que sean complemento y afianzamiento, para el caso particular de los cursos de matemática, considerando la complejidad de la asignatura.

Recomendaciones

- El aprendizaje significativo de los estudiantes, debe partir y apoyarse en los conocimientos previos que tengan acerca del tema propuesto, de manera que garantice el aprendizaje significativo del conocimiento que se construye.
- Es importante motivar al estudiante para que revise sus conocimientos, para que observe la realidad de manera diferente a la habitual, pensando y atreviéndose a buscar, a crear y a encontrar nuevos caminos, contrastando su nivel cognitivo.
- Al presentar los temas a desarrollar en una unidad didáctica, el docente debe proponer actividades y materiales, que puedan favorecer la participación de los estudiantes; de manera significativa.
- La experiencia analizada muestra que se puede mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, si se diseñan estrategias que impliquen un participación más activa de ellos.
- Se debe tener en cuenta que para el desarrollo de la modalidad de aprendizaje apoyada en la unidad didáctica de auto instrucción propuesta, es necesario partir del ritmo de aprendizaje de los estudiantes y además para su adecuado desarrollo requiere de mayor tiempo para su aplicación.

Referencias bibliográficas

Hernández Sampieri, R. y otros, (1999). *Metodología de la Investigación*. Bogotá: Editorial McGraw-Hill.

Meyer, P. (1973). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México: Fondo Educativo Interamericano.

CONCEPTUALIZACIÓN DE IDEAS MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

Arnaldo Mendible, José Ortiz
Universidad Nacional Experimental de la Fuerza Armada Nacional, Venezuela
Universidad de Carabobo
arnmen2005@yahoo.com, ortizjo@cantv.net
Campo de investigación: Modelización matemática Nivel: Superior

Resumen. *El desarrollo del lenguaje y sus funciones asociadas en el pensamiento están ligados con la conceptualización, tal como lo establece Vygotsky. Se considera la ingeniería como una disciplina que aplica conocimientos científicos para resolver necesidades sociales. El reto para el docente de matemática en Ingeniería, es contextualizar las situaciones didácticas, para la construcción y la apropiación, por parte de sus alumnos, de conceptos físicos y matemáticos presentes en problemas de ingeniería. A tal efecto se realizó un estudio de caso en el cual se hizo un análisis de datos cualitativos a partir de las producciones de alumnos de matemáticas de Ingeniería Mecánica de una Universidad en Venezuela. Se plantearon algunas situaciones problema para que los alumnos la resolvieran en equipos de trabajo, en la modalidad de talleres. Se concluye, en la investigación, que en estos ambientes contextualizados de aprendizaje el alumno desarrolla procesos de pensamiento deductivo que le dan significación a su esfuerzo. Además, se mejora, en los estudiantes, las estrategias para resolver problemas con un uso apropiado de variables, parámetros y constantes.*
Palabras clave: Modelación matemática, conceptualización, pensamiento matemático, competencias matemáticas en ingeniería

Introducción

Ante la creciente actividad técnica y científica que aumenta la brecha entre los países avanzados y los países menos desarrollados, la necesidad de los pueblos latinoamericanos de encontrar maneras efectivas de resolver problemas prácticos, en especial en ingeniería, y, además por la importancia que la Universidad posee en la búsqueda y construcción del conocimiento; se hace necesario lograr la armonía entre los resultados de esa búsqueda y su aplicación, teniendo en cuenta su impacto social, económico, político y ambiental.

Por otro lado, la formación profesional, en el campo de la ingeniería, posee condiciones especiales que se traducen en competencias, que al ser empleadas o demostradas por los egresados, les permite resolver problemas de ingeniería de manera eficiente, con un alto contenido social y crítico. En resumen, el compromiso del ingeniero con la sociedad, debe comprender la naturaleza de los proyectos que él aborda. Tal comprensión tiene una importante carga semántica, ya que los elementos de la naturaleza que están presentes en sus proyectos, tienen estructuras que deben

ser manejadas conceptualmente, a partir de la interpretación que el ingeniero hace de las diferentes interrelaciones, con la ayuda de sus experiencias en distintos contextos y del análisis crítico de sus modelos y resultados. En esto, el lenguaje tiene un papel eminentemente conciliador y con él se construyen enlaces, él motiva al pensamiento lógico deductivo, sustenta la creatividad y al pensamiento matemático.

El problema

La descripción de los hechos naturales y la construcción de modelos matemáticos que los explican y quizás hasta los reproduzcan, es la vía y anhelo natural de la ciencia. El acercamiento a esos hechos se logra, cuando esos conocimientos y conceptos que se derivan se tornan manejables, es decir cuando se establecen relaciones entre sus elementos, y cuando de ellos se reconocen sus funciones y sus propiedades. Para esto se requiere mecanismos de representación, pero los elementos, las relaciones, funciones, y sus representaciones, sólo son comprensibles al intelecto humano y permiten su comunicación a otras personas, a través del lenguaje. El mecanismo consiste en activar procesos de pensamiento que hagan conscientes al significado y el significante, dentro del código que se comunica, para representar un concepto o una relación entre conceptos.

Esta dinámica realidad requiere un esquema, de producción y de participación entre interlocutores, para ser adquirida y desarrollada. Tal esquema que debe ser científico con carácter social. Pero estos procesos se ven interrumpidos o desvirtuados por problemas de comunicación o por la descontextualización de las ideas y conceptos que se desean transmitir. Los conceptos y sus relaciones deben ser tratados con técnicas que permitan al alumnos construir significativamente otros conceptos asociados con los elementos que se desean tratar didácticamente (Martínez, Verdú y Gil, 2005).

En consecuencia, siendo la ingeniería una disciplina que estudia la aplicabilidad de los conocimientos científicos, para resolver necesidades sociales, para producir cambios en la naturaleza, medio ambiente u organización, se hace indispensable pensar y aplicar modelos didácticos que introducidos como innovación en el currículo, puedan brindar la oportunidad al docente de matemáticas en ingeniería, de contextualizar situaciones problema, en las que se contemplen la naturaleza de los objetos que intervienen en su solución para que el estudiante de

ingeniería interprete de manera eficaz los aspectos que desea y convienen cambiar. En ese sentido, debe tratar adecuadamente los conceptos involucrados en cada situación problema.

Sin embargo, tradicionalmente, se dictan parcelas de conocimiento no interconectadas, con las que el alumno aprende algunas herramientas conceptuales de uso, y no por el desarrollo de habilidades y competencias integradoras, que permitan resolver problemas de ingeniería con apoyo en lo conceptual. Para lo cual se asume que, la habilidad para comprender esa integración es el reflejo de la actitud y vocación del estudiante, que se logrará cuando aumente su experiencia y conocimientos en el área.

Por otro lado, es común el planteamiento de problemas sin contexto y sin carga semántica alguna, para que los alumnos los resuelvan aplicando alguna regla, fórmula o procedimiento "tipo", con escasas herramientas conceptuales, que deja palabras o ideas sin conceptos asociados, con el peligro de usar preconceptos, con los errores de un concepto mal definido o mal redactado. Lo que obliga al estudiante a interpretar el problema, de alguna forma, dejando la responsabilidad al docente. Evitando, de esta forma, que los alumnos se acerquen al tratamiento conceptual de los problemas que desean resolver.

Tomando en consideración lo antes expuesto, en la presente investigación se persigue analizar las competencias que, desde una perspectiva conceptual, permiten al estudiante de ingeniería formular modelos, diseñar mecanismos físicos y resolver problemas contextualizados. En tal sentido, resulta de interés, analizar, caracterizar y evaluar la construcción de conceptos en un ambiente de clase de un curso inicial de cálculo de varias variables.

Consideraciones teóricas

Un objeto en el contexto puede ser aproximado a través de palabras, y su esencia se describe verbalmente sólo cuando el alumno se apropia de ese objeto en abstracto. El pensamiento se hace próximo a esa realidad a ser descrita (Vygotsky, 1995). Es así como, en el momento en el que se realiza tal apropiación, el docente, debe estar atento, para acercar al estudiante a la realidad y para consolidar el concepto.

En ese sentido, el proceso comienza con la construcción de la palabra. El pensamiento orienta la percepción, es decir, se muestra como un reflejo de la realidad, y se culmina designándole un

significado. En este momento, y en un ambiente contextualizado, el docente debe ayudar para que el alumno construya ese significado. Con el añadido de que es la construcción de esos conceptos lo que permite la comunicación parcial o total de la idea que se consolida en el estudiante.

Lo anterior se logra si se incorporan tareas y actividades, en un ambiente de aprendizaje abierto, con problemas orientados hacia procesos; tanto con herramientas de cálculo automatizado, como a través del auto aprendizaje y de interrelación entre pares académicos. De esta manera, se plantea la situación problema como una oportunidad de aprendizaje para el futuro profesional, y en la que la percepción se conjuga para cambiar conceptos junto al empleo de una función de construcción (Huβmann, 2007).

Operacionalmente, ambas funciones descritas intervienen en el cambio intencional de las condiciones y propuestas del docente al alumno, y se convierte la estrategia de enseñanza en investigativa. Los problemas planteados deben ser abiertos y sin datos, con el propósito de que intervenga la trilogía datos-hechos-teoría (Martínez et al, 2005). La unidad hace a esta terna un sistema, que se autorregula por su coherencia y por la construcción de hipótesis. Y aquí está presente el proceso descrito por Vygotsky, el concepto nace cuando el problema emerge de la situación problema con una carga dialógica y significativa. En esto interviene el razonamiento, el mayor énfasis se hace en la construcción, y no en la verificación hecha durante la investigación, aspecto que riñe con la mecánica investigativa, pero que aquí se hace necesaria para consolidar la construcción de los conceptos (Soares y Martinho, 2007).

En conclusión, abordamos el marco teórico desde el ángulo conceptual descrito por la necesidad real de comprender la naturaleza de los elementos involucrados. Tradicionalmente, el estudiante al principio aplica herramientas conocidas con la ayuda pre-conceptual que brinda el enunciado, luego consolida el uso de esas herramientas en forma de aprendizaje automático, sin criticar las condiciones contextuales del problema, sin relaciones entre estas condiciones y la herramienta matemática empleada (Barriga, 2003). De otra manera, los símbolos y las relaciones controladas en situación de clases se dan en un ciclo de modelización en el que cada uno de sus elementos convoca el uso apropiado del lenguaje, y con él se da la construcción de conceptos de manera significativa (Hein y Biembengut, 2006).

Por último, el contexto, la modelización y los recursos conforman una terna que, administrada por el docente, permite al estudiante construir modelos, y como producto colateral aparecen los

conceptos asociados a él (Mendible y Ortiz, 2007). Como una etapa final de este proceso conceptualizador, se describen las actividades que se hacen conscientes, en la construcción de conceptos en el aula por parte del estudiante de ingeniería. Para que esta problemática sea superada, es indispensable abordar su conocimiento desde la óptica de la formación de conceptos, distinguiendo en ellos la contribución del proceso de modelización.

Metodología

Se desarrolla una investigación de campo bajo la modalidad de estudio de caso, donde participaron treinta y dos estudiantes de Matemática III. Específicamente se tomó como contexto matemático los fundamentos y operaciones básicas del Cálculo Vectorial, en el entendido que su nivel de complejidad es abordable, como para entender las relaciones que en ella se manifiesten y que se dan en ese salón de clases, para construir y utilizar conceptos apropiadamente, cuando se plantean problemas cercanos a su futuro ejercicio profesional como ingenieros.

Se registra una entrevista, se analizan las producciones verbales de los estudiantes. Con ello se logra entrelazar los elementos constituyendo patrones de comportamiento desde los cuales emergerían categorías que se evidencian de esas relaciones. (Denzin y Lincoln, 2005; Miles y Huberman, 1994).

Asimismo, se plantearon situaciones problema para que los alumnos las resolvieran, en equipos de trabajo, en la modalidad de talleres. Siempre con el asesoramiento del docente, que por medio de la discusión crítica fueron contextualizados y se redactaron de manera grupal, obteniendo problemas cuyas cargas semánticas permitieron distinguir sus partes o componentes fundamentales para ser resueltos. Es decir, para que pudieran operarse las variables y datos del problema con conceptos asumidos por el alumno. El punto focal fue la naturaleza de los objetos involucrados y su conceptualización en correspondencia íntima con los objetos interrelacionados empíricamente.

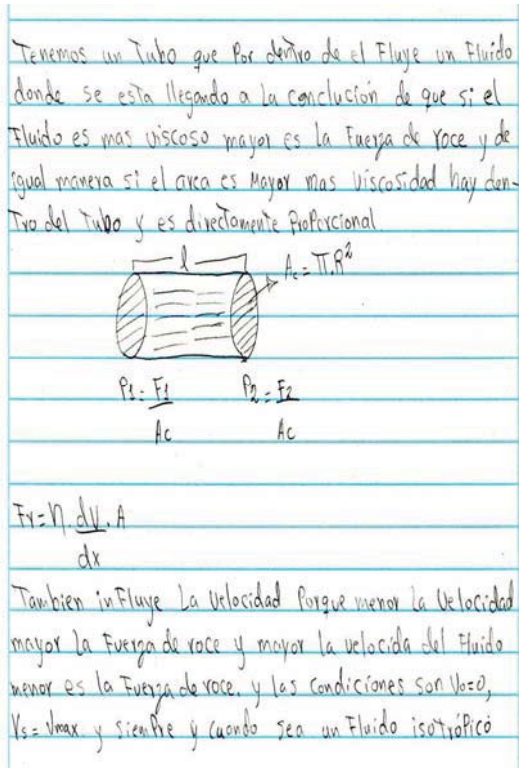
Conclusiones

Se concluye, en la investigación, que en estos ambientes contextualizados de aprendizaje, el

alumno desarrolla procesos de pensamiento deductivo que le dan significación a su esfuerzo.

Por ejemplo, para tratar el tema de derivada parcial, conceptual y operacionalmente; se enunció "Se desea construir un silo para almacenar granos en el que la velocidad de llenado del mismo sea constante, sabiendo que la bomba hace fluir los granos en cantidades crecientes", el problema abierto, no acabado como lo daría un usuario "cliente", presentó al estudiante la oportunidad de completar los elementos faltantes del problema, construyó para eso una vía de solución abstracta, ya que no poseía datos numéricos y no había variables definidas. Utilizó, conceptos que deben ser aclarados y enunciados por el alumno para que tenga posibilidad de enfrentar una posible solución. Por sugerencia del docente, el alumno hizo preguntas al cliente que le suministrara datos e información. ¿Qué significa velocidad de llenado?, ¿Qué forma debe poseer el silo? ¿Qué es un silo? ¿Cómo llenar el silo?, ¿ ¿Cuál es el tipo de bomba a emplear? ¿La bomba dónde se coloca?, ¿Cómo funciona ese tipo de bomba?. Al dar respuestas a estas interrogantes los estudiantes notan que los datos no son numéricos, son características que permiten generalizaciones conceptuales. En este proceso de conceptualización se evidencia un proceso operacional-algebraíco, ya que escribe variables y describe significados de las mismas. Los alumnos logran, en consecuencia, distinguir varias variables actuando en el problema del mecanismo que se desean construir, y destacan la variable que el cliente asocia con "velocidad de llenado". Para una bomba con un flujo cuyo modelo es exponencial, por ejemplo, un estudiante dedujo que el silo no puede ser cilíndrico, ni cónico, y que para que el silo sea cilíndrico la velocidad de carga de la bomba debería ser constante, condición contraria a la hipótesis considerada. Con lo que se observa una mejora en la calidad en las respuestas de los estudiantes, en la incorporación de algunas estrategias para resolver problemas, y con un uso apropiado de variables, de los parámetros y constantes adecuados.

Otro caso consistió en, analizar las características del flujo de una sustancia viscosa que circula por un tubo; ante lo cual, los estudiantes, en discusión dirigida, concluyeron que la mejor manera de representación de los factores que inciden en el fenómeno es ver el flujo desplazándose por un cilindro imaginario en la dirección del fluido. Concluyendo luego que esta representación obliga la consideración del área transversal del cilindro como elemento de análisis. Distinguieron al flujo con superficies isobáricas de nivel. También notaron que la longitud del mismo puede ser relevante para que se describa al flujo de manera real.



Muestra del producto de un alumno al tratar el modelo de flujo en un tubo

Algunos de los estudiantes recordaron el análisis que se planteó en física en los estudios medios, y equilibraron las presiones. Como elemento diferencial hicieron uso de las variables "l", "Δx". Introdujeron el concepto de velocidad a lo que en apariencia estaba estático, y en consecuencia, apareció la aceleración requerida por la segunda Ley de Newton. Aún cuando el interés de esta investigación se centró en los elementos que surgieron y no en la teoría física que los sustentan, se notó que al tratar los entes de manera conceptual como lo hace la física se logra la construcción del modelo con el cual se operan las variables involucradas. La comprobación y evaluación del modelo es otra dimensión que surgirá como consecuencia de la aparición de estos resultados. Las variables aparecen en la misma medida en que los conceptos revelan nuevas relaciones, que se traducen en entes algebraicos.

Este ejemplo ilustra los efectos de esta visión contextualizada con análisis conceptual. Al tratar el Teorema de la Divergencia, se dictó la circunstancia en la que se da un flujo en un campo conservativo y se desea conocer el flujo que atraviesa una superficie cerrada, los estudiantes distinguieron en el cálculo que el total de flujo era cero y que la respuesta confirmaba la hipótesis de conservación del campo vectorial. Sin embargo, algunos estudiantes dieron la respuesta sin cálculo ya que asumieron flujo cero como característica de un campo conservativo, emergiendo el concepto antes que el cálculo.

Se concluye, entonces que la conceptualización de los objetos involucrados (superando algunos preconceptos) contribuye a la definición de las variables, parámetros y constantes presentes en la situación problemática. Además, los conceptos orientan el pensamiento deductivo del alumno al diseñar constructos que son manipulables, y que a su vez no pierden esencia ni significación. Que

son contrastables con la realidad y el contexto asumido. Esta investigación contribuye a soportar estudios empíricos en el ámbito de la ingeniería, relacionados con las competencias en modelización y aplicaciones en contextos matemáticos del currículo actual en Ingeniería en Venezuela.

Referencias bibliográficas

Barriga, F. (2003). *Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo.* Recuperado el 15 de julio de 2008 de http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html

Denzin, N. y Lincoln, Y. 2005) *The SAGE Handbook of Qualitative Research.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Hein, N. y Biembengut, M. S, (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas.* Recuperado el 21 septiembre de 2007 de http: www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-Hein.pdf

Huβmann, S. (2007). Building concepts and conceptions in technology-based open learning environments. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, H. y M. Niss, (Eds) *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (14th ICMI Study, pp. 341-348). New York: Springer.

Martínez, J., Verdú, R., Gil, D. (2005). ¿Por qué y cómo organizar la enseñanza en torno a problemas? En M. M. Callejas (Comp) *Desarrollo de competencias en ciencias e ingenierías. Hacia una enseñanza problematizada* (pp. 19-104), Bogotá: Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería/ Magisterio.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de la Matemática.* Número Extraordinario, 12 (16), 133-150.

Miles, M. y Huberman, A. (1994). *An Expanded Sourcebook. Qualitative Data Analysis*. Estados Unidos de Norte América: Sage Publications.

Soares, L., y Martinho, M. H. (2007). Modelling is for resoning. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan, (Eds.), *Mathematical Modelling. ICTMA 12: Education, Engineering and Economics.* (pp. 480-489). Chichester, Inglaterra: Horwood Publishing.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Paidós.

LAS MATEMÁTICAS Y LOS MAPAS CONCEPTUALES

Sandra Milena Zapata, Carlos Mario Jaramillo López, Edison Sucerquia Vega
Universidad de Antioquia. Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UDEA-EAFIT) Colombia
szapata@ayura.udea.edu.co, cama@matematicas.udea.edu.co, esucerquia@ayura.udea.edu.co
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *Los mapas conceptuales se pueden emplear como una técnica de estudio y como una herramienta para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permitiendo al docente explorar los conocimientos previos que sus estudiantes tienen frente a un tema específico, favoreciendo la construcción de relaciones y organización de conceptos, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.*
La implementación de los mapas conceptuales en investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, han mostrado que éstos ponen de manifiesto los procesos de razonamiento seguidos por el estudiante, evidenciando las conexiones entre los conceptos matemáticos que pueden dar lugar a proposiciones válidas o no válidas y a diferentes niveles jerárquicos, que a su vez, proporcionan una visión sobre el nivel de comprensión que poseen, tanto profesores como estudiantes, en dichos conceptos.
Palabras claves: Mapas conceptuales, redes de relaciones, van Hiele, series infinitas

Los mapas conceptuales y el Modelo de van Hiele

El presente artículo retoma uno de los resultados presentados en la tesis de maestría titulada: *"Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos",* (Zapata y Sucerquia, 2009), cuyo estudio logra consolidar el diseño de un módulo que contiene una serie de actividades enmarcadas en cada una de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, su objetivo es estimular los procesos de razonamiento de los estudiantes frente al concepto de series de términos positivos, logrando que progresen del nivel II al nivel III, en el marco de este modelo.

De acuerdo con van Hiele, la estructura mental de un estudiante debe transformarse en otra nueva, la cual puede representarse como una red de relaciones, en la que los vértices de la red son conceptos o propiedades del objeto estudiado y las conexiones constituyen las relaciones existentes entre éstos. Lo anterior es importante dado que a la luz del modelo, el paso de un nivel de razonamiento a otro se produce mediante la creación o ampliación de la red de relaciones; el fortalecimiento de dicha red constituye un aspecto crucial en la comprensión de conceptos abstractos de la matemática.

Dado el papel determinante de la red de relaciones en los niveles de razonamiento y fases de aprendizaje, es importante definir un mecanismo que posibilite su materialización en

correspondencia con las características y estructura del modelo y, además permita evidenciar las modificaciones que un estudiante realiza a dicha red, es así como se propone la utilización de mapas conceptuales y el software cmaptools, como metodología que favorece la explicitación y la integración de los nuevos conocimientos a la estructura mental de los estudiantes.

Se pretende divulgar el papel de los mapas conceptuales en investigaciones recientes, como el proyecto titulado: Las fases de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita (Universidad de Antioquia, 2004) y la tesis de maestría realizada por Vasco y Bedoya (2005), gracias a estos estudios se ha podido determinar que los mapas conceptuales constituyen una herramienta de enseñanza y aprendizaje cuyas características están en clara correspondencia con las definidas para la red de relaciones.

Los mapas conceptuales surgieron como una forma de instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel. Dentro de los procesos de investigación en el área de las ciencias y otras, que se han venido desarrollando en los últimos años, se han presentado diferentes definiciones de mapas conceptuales, una de ellas es: “un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones”, (Novak y Gowin, 1999, p. 33). Además de ser una técnica de estudio, los mapas conceptuales también pueden ser empleados como una representación gráfica o esquemática del conocimiento acerca de un tema específico. El conocimiento se organiza y representa de acuerdo a los niveles de abstracción, situando los más generales e inclusivos en la parte superior del mapa y los menos inclusivos en la parte inferior. Esta representación gráfica de conceptos y sus relaciones, brinda una estrategia que permite interpretar y comunicar las diversas estructuras mentales de cada uno de los estudiantes sobre un tema determinado.

En consonancia con lo anterior, las redes de relaciones y los mapas conceptuales están estrechamente relacionados pero claramente diferenciados, a continuación se destacan algunas de sus características correspondientes:

Redes de Relaciones	Mapas Conceptuales
En el marco del modelo educativo de van Hiele, el paso a través de un nivel de razonamiento al siguiente por medio de las fases de aprendizaje se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones y el proceso de aprendizaje se ve favorecido gracias a que, a la red anterior se incorporan nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos.	Contribuyen al aprendizaje porque representan una técnica de estudio que permite, según Ontoria (1993): Resumir esquemáticamente lo que se ha aprendido y organizar los conceptos jerárquicamente facilitando el aprendizaje significativo, al englobar los nuevos conceptos bajo otros conceptos más amplios.
Puede ser ampliada, modificada y mejorada gracias a los procesos de razonamiento. El fortalecimiento de la red de relaciones se favorece debido al establecimiento de vínculos significativos entre los conceptos que aparecen durante el proceso de aprendizaje, permitiendo la comprensión de los mismos.	Permiten seleccionar, extraer y separar la información significativa o importante de la información superficial, facilitando la organización lógica y estructurada de los contenidos de aprendizaje y proporcionando un recurso esquemático de todo lo que se ha aprendido.
El lenguaje es un medio importante que le permite al estudiante manifestar sus estructuras mentales y el grado de apropiación de éste, poniendo de manifiesto el nivel de comprensión de un tema o tópico determinado.	El uso del lenguaje, tanto verbal como escrito, es un medio para exteriorizar las estructuras conceptuales, y el refinamiento del mismo muestra el dominio que un estudiante puede alcanzar del concepto objeto de estudio.

Tomado de la tesis de maestría: *"Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos".*

El papel de los mapas conceptuales en la comprensión del concepto de convergencia de series infinitas de términos positivos.

El estudio y comprensión de conceptos del análisis matemático relacionado con el infinito han presentado dificultades, dado que su razonamiento supone obstáculos de carácter abstracto y la construcción de su conceptualización es difícil, pues la concepción intuitiva de éstos difiere de su definición formal matemática. Además, la confrontación entre un aspecto finito y uno infinito es una construcción que debe ser cuidadosa dado el aspecto paradójico que éste conlleva. Las anteriores son algunas de las causas que impiden comprender el concepto de convergencia de una serie infinita de términos positivos.

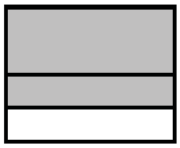
Debido a que el concepto estudiado exige un alto nivel de abstracción, es necesario recurrir a mecanismos adecuados que posibiliten su comprensión, es por esto que la investigación aborda el concepto de series de términos positivos, a través de las áreas para escaleras infinitas, donde el área de cada escalón se asocia a un término de la serie, y si ocurre que ésta existe, entonces la

serie asociada será convergente. Esta manera de familiarizar a los estudiantes con el concepto de infinito genera confianza en ellos al momento hacer sus razonamientos, dado que han tenido mayor contacto con representaciones visuales – geométricas, que con elementos formales y simbólicos asociados al concepto de infinito.

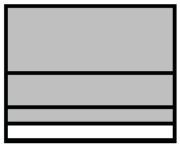
El trabajo de investigación: *"Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos"* propone actividades para cada una de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, éstas son abordadas inicialmente desde una componente visual geométrica y posteriormente exigen procesos de razonamiento formal, apoyados en las construcciones elaboradas en las primeras fases. Los estudiantes participantes de la investigación llegan a explicitar sus conocimientos de diferentes formas, entre ellas, de manera verbal durante las socializaciones y de manera esquemática mediante mapas conceptuales. La realización de estos mapas es un proceso que evoluciona a lo largo del desarrollo de la investigación; los estudiantes realizan inicialmente esquemas en los que representan los conceptos estudiados, se capacitan en la utilización y manejo del software *cmaptools*, y a través de las socializaciones y actividades realizadas, ellos empiezan a diseñar representaciones que posteriormente se estructuran como mapas conceptuales, consolidando así su red de relaciones.

El módulo de aprendizaje propone, entre algunas de sus actividades, la realización de procesos de división y sombreo para determinar áreas de rectángulos; éstas permiten a los estudiantes calcular sumas de áreas, las cuales inicialmente son de carácter finito y posteriormente infinito. Así, por ejemplo, el módulo contiene actividades tales como la siguiente:

Para el siguiente rectángulo, la región sombreada es igual a la mitad del área del rectángulo original, más la mitad de la mitad que había quedado sin sombrear (es decir, un cuarto) por lo tanto, el área de la región sombreada se puede representar así: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$ o también $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{2^2}$.



Continuamos el proceso de división y sombreo, con la superficie que ha quedado sin sombrear, así:



Para la figura anterior el área sombreada se podrá representar como sigue:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

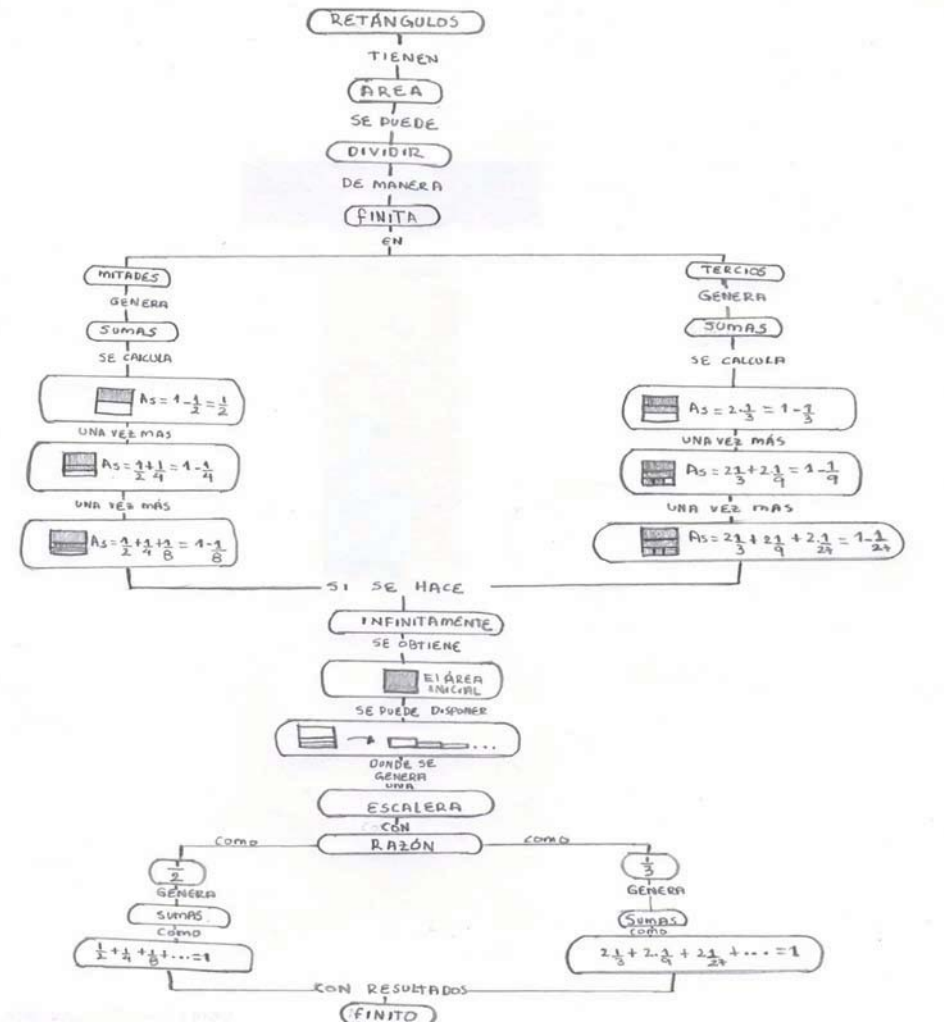
Tomado de la tesis de maestría: *"Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos"*

En el proceso de desarrollo de actividades como la anterior, los estudiantes deben hacer razonamientos inductivos tanto de carácter finito como infinito, logrando sombrear completamente la figura. Ellos razonan sobre otras sumas de rectángulos dispuestos mediante una escalera decreciente infinita que tiene razón geométrica. Vale la pena destacar que el módulo contiene otras actividades, en las que se explicitan procesos de razonamiento infinito que ponen en correspondencia el aspecto geométrico y aritmético, fortaleciendo la integración de los conceptos abordados a lo largo del estudio.

Esta integración se evidencia durante las últimas fases de aprendizaje, orientación libre e integración, en las cuales los estudiantes demuestran condiciones para ser clasificados en un nivel III de razonamiento porque han cumplido con los descriptores de cada una de éstas. Algunos realizan razonamientos de tipo formal al abordar una situación en la que deben interactuar con el concepto objeto de estudio. Estas condiciones se ratifican con las socializaciones realizadas por los

estudiantes, en las que se observa que emplean un manejo apropiado del lenguaje, además se evidencia que éste ha aumentado progresivamente permitiendo que no sólo hablen con propiedad del concepto, sino que también, estén en condiciones de aplicarlo en distintos contextos.

A continuación se presenta uno de los mapas realizados por un estudiante del grado once, participante del proceso de investigación, durante las primeras fases:

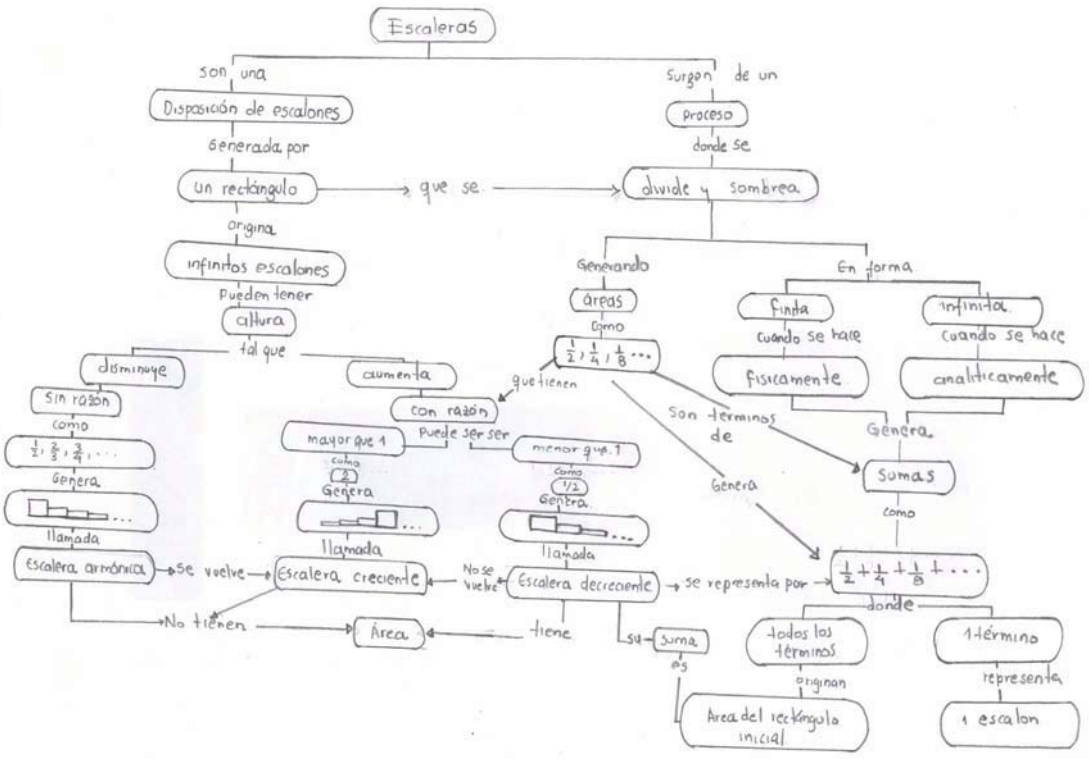


Mapa conceptual realizado durante el desarrollo del trabajo de investigación

Otro de los aspectos primordiales para afirmar con mayor certeza que un estudiante ha alcanzado un nivel avanzado de razonamiento, es la elaboración correcta de los mapas conceptuales propios de cada fase; específicamente, el mapa conceptual correspondiente a la última fase aborda el concepto de forma rigurosa y detallada; cabe anotar que con éstos se hace explícita la forma de comprensión de los estudiantes y la estructura mental de razonamiento, de acuerdo a su propia red de relaciones construida.

El presente estudio permite concretizar el carácter teórico de la red de relaciones propuesta por van Hiele a través de la estrategia de construcción de mapas conceptuales, y abre paso a futuras investigaciones que busquen un nivel de formalización, así como también profundizar en otros conceptos del análisis matemático dotados de una componente visual geométrica, en los cuales sea posible el empleo de esta estrategia.

Finalmente, se presenta un mapa realizado por un estudiante del grado once, que alcanza el nivel III de razonamiento, ya que él logra integrar los conceptos estudiados:



Mapa conceptual realizado durante el desarrollo del trabajo de investigación

Referencias bibliográficas

Jaramillo, C. & Esteban, P. (2005). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele, *Revista Educación y Pedagogía*, 18 (45), 111–118.

Jaramillo C., Sucerquia E. y Zapata S. (2009). Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van hiele. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 989-996. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Jurado, F. & Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Novak, J. & Gowin, B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. España: Martínez Roca.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

Ontoria, A. (1992). *Mapas conceptuales: una técnica para aprender*. Madrid: Narcea.

Vasco, E. & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van hiele.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Zapata, S. y Sucerquia, E. (2009). *Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO, USANDO TECNOLOGÍA DISEÑADA MEDIANTE LA METODOLOGÍA DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO, EN LA ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

Rogelio Ramos C., Armando Aguilar M., Omar García L.
Universidad Nacional Autónoma de México México
egorrc@gmail.com, egor1131@servidor.unam.mx, armando@servidor.unam.mx
Campo de investigación: Pensamiento numérico Nivel: Superior

Resumen. *Esta indagatoria consiste en el desarrollo de material educativo apoyado por tecnologías; con propósitos académicos y de investigación. El propósito fundamental es probar que se pueden obtener mejores resultados en al aprendizaje del Cálculo Numérico (Computo Científico), por medio del uso de adecuados apoyos computacionales. También se espera probar que se puede mejorar los índices de aprobación; así como, propiciar el crecimiento de los indicativos de retención en las carreras de ingeniería que se imparten en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, mediante el uso de materiales educativos en computadoras. El material de apoyo, tiene dos componentes fundamentales; una son los tutoriales que tienen por objeto el facilitar el aprendizaje. La otra componente estará compuesta de herramientas del cómputo científico que servirá de apoyo en la solución de problemas de aplicación, propios de la ingeniería. Es importante mencionar que esta indagatoria esta en proceso de aplicación.*
Palabras clave: Conocimiento, zona de desarrollo próximo, enseñanza, pensamiento numérico

Introducción

El desarrollo de la informática y la introducción expansiva de las tecnologías de la información durante las últimas décadas en los ámbitos sociales a dado lugar a la llamada sociedad de la información que se caracteriza por la globalización de la economía, la aparición de nuevos sectores laborales, la valoración del ritmo del cambio, la potenciación de una infraestructura tecnológica, la flexibilidad del trabajo, y el uso de las nuevas tecnologías de la información y comunicación. Estas condiciones exhortan a importantes cambios en las instituciones educativas para que puedan responder a las demandas sociales, culturales y de cambios en las demandas de cualificación del mercado de trabajo (Cabero, Barroso y Román, 2001). Basado en profundos estudios sobre los sistemas de cómputo, sustentados por las teorías del aprendizaje el grupo de investigación se propone el desarrollo de un tipo de sistema nuevo que presenta ciertas innovaciones: Puede ser capturado desde diversas interfases. Posee diversas opciones pedagógicas pre-definidas que no existen en otras aplicaciones y que además pueden ser modificadas. Incluye dentro del sistema y

de sus opciones de consulta el uso de estrategias de aprendizaje, instrucciones específicas para estudio, elementos de motivación, preguntas relacionadas y otros temas relacionados.

Antecedentes

Los ordenadores están presentes en las escuelas y en las casas, y no pueden ser ignorados por los maestros. En este trabajo, planteamos la idea de que la relación entre la enseñanza de matemáticas y la tecnología de informática debe ser vista como un camino de dos sentidos. Por un lado, el uso de los recursos de informática puede ser útil en la enseñanza de matemáticas, a través de programas que permitan experimentar con las ideas matemáticas. La Computación Científica es el campo de estudio relacionado con la construcción de modelos matemáticos y técnicas numéricas para resolver problemas científicos, de ciencias sociales y problemas de ingeniería. Típicamente es la aplicación de modelado numérico y otras formas de cálculo de problemas en varias disciplinas científicas. Si las matemáticas no son sólo una parte de nuestra cultura científica sino también un útil conjunto de competencias y concepciones para una variedad de actividades profesionales y de otros tipos, entonces debemos revisar de cabo a rabo la filosofía de la educación matemática. (Vergnaud et al., 1990)

Justificación

Las actitudes del estudiante hacia el rol en el uso de la tecnología en la enseñanza aprendizaje han sido analizadas en diversas investigaciones, encontrando que la tecnología fue vista como un dispositivo innovador que produce motivación, responsabilidad e independencia en el sujeto, pues este puede viajar virtualmente en un mundo de conocimiento e interacción. Además, se destaca la relevancia de los compañeros para llevar a cabo los cursos, el aprendizaje centrado en el alumno y la retroalimentación para el aprendiz. En términos generales, en las diversas investigaciones realizadas sobre actitudes de los estudiantes hacia la introducción de la educación mediada por computadora estas han sido positivas. (Ewing-Taylor, 2008) Se considera que probablemente esto sea ocasionado por la facilidad y fascinación de la tecnología en general.

Planteamiento del problema

El uso de la tecnología, con un diseño bien fundamentado en los conceptos propios de la teoría sociocultural del aprendizaje, puede provocar en el estudiante el facilitar la apropiación del conocimiento en el área del pensamiento numérico.

Objeto de estudio

Los estudiantes de Ingeniería, que cursan la asignatura de Métodos Numéricos, en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FESC) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Objetivos

Objetivos generales

Desarrollar materiales educativos para Métodos Numéricos, incluida en los programas de las carreras de ingeniería de la FESC, en interfases diferentes probando qué estas pueden producir mejores resultados en el aprovechamiento escolar de los estudiantes. Producir materiales educativos y probar sus efectos en el aprendizaje y motivación de los estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de métodos numéricos. Elevar el nivel académico de los profesores en el área del cómputo científico, mediante la actualización en los cursos de métodos numéricos; así como, el dominio de los métodos numéricos, su desarrollo, su aplicación y enseñanza de aquellos que se usan actualmente en la tecnología y en la ciencia a nivel internacional.

Objetivos particulares

En particular el objetivo de esta indagatoria es, probar que se pueden obtener mejores resultados en al aprendizaje de los métodos numéricos por medio del uso de adecuados apoyos computacionales. También se espera probar que se puede mejorar los índices de aprobación y de retención en las carreras d ingeniería mediante el uso de materiales educativos en computadoras. Probar la efectividad de los medios de apoyo educativo, desarrollados en la investigación, mediante experimentos diseñados y mostrar los resultados obtenidos a la comunidad dedicada a la matemática educativa. Presentar los avances y desarrollo de los productos de la investigación en los foros, congresos y seminarios, tanto nacionales como internacionales.

Hipótesis

El cuestionamiento que se plantea en este proyecto o hipótesis de investigación es:

¿Realmente el utilizar la tecnología en la enseñanza de los métodos numéricos beneficiará a los estudiantes en cuanto a la mejora de sus calificaciones?

Metodología

A partir del ámbito de investigación que corresponde al trabajo que proponemos, se desprenden las componentes teóricas, que, deben tomarse como referentes (Álvarez y Ramos, 2006). Hemos considerado que la mejor forma de delimitar nuestro trabajo es haciendo referencia a las aportaciones teóricas e investigaciones en cinco aspectos: los métodos numéricos, la enseñanza y el aprendizaje, el uso de las tecnologías en la enseñanza, la enseñanza de los métodos numéricos y el uso de las tecnologías en la enseñanza de los métodos numéricos.

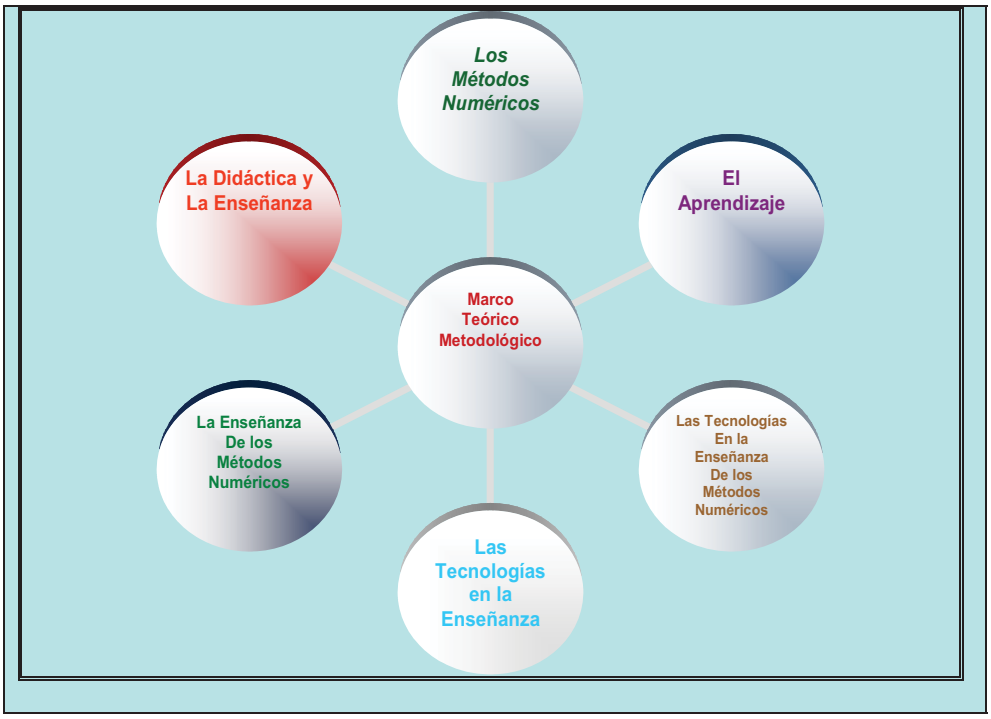


Figura 1. Aspectos teóricos considerados en la indagatoria

El tercer aspecto componente se encarga de describir las aportaciones teóricas relacionadas con el uso de las tecnologías para la enseñanza en términos generales; es decir, la forma en la que se han utilizado las tecnologías, con el propósito de enseñar y aprender en todos los ámbitos del conocimiento humano. Mientras que la componente del uso de las tecnologías en la enseñanza de los métodos numéricos es especifica y solamente hace referencia a las tecnologías que se han utilizado en esta área en particular. Por último la componente relativa a la enseñanza de los métodos numéricos, tomará como referente a las investigaciones hechas en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del área que se ha orientado al objeto de estudio en el que se centra el problema de esta investigación y por consiguiente, en esta componente se incluyen las aportaciones teóricas que en la actualidad se han dado a conocer en el campo de la matemática educativa y que representaría el estado del arte, en el área central de nuestra indagatoria y del que nutrimos el marco teórico con las más recientes aportaciones.

En particular destacaremos en la descripción de la metodología a utilizar, los aspectos más relevantes que se encuentran tras el desarrollo del material de apoyo computacional y nos referimos a los conceptos de las teorías del aprendizaje, que dan sustento a nuestras aplicaciones de software; específicamente estaremos usando el concepto de Zona de Desarrollo Próximo desarrollada por Lev Vygotsky, la cual se puede describir en forma sintetizada como aquella que establece que, las capacidades de solución de problemas pueden ser de tres tipos: i) aquellas realizadas independientemente por el estudiante, ii) aquellas que no puede realizar aún con ayuda y iii) aquellas que caen entre estos dos extremos, las que puede realizar con la ayuda de otros.

Los procesos psicológicos superiores, que son lo procesos específicamente humanos, tienen su origen en la vida social, es decir, se constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos psicológicos creados culturalmente (Vygotsky, 1979). El conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura. Resalta los aportes de Vygotsky en el sentido que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se *internalizan*. Así pues nos proponemos establecer mediante la conceptualización teórica de Vygotsky los objetivos estratégicos específicos:

a) Promover, la formación de los hábitos y actitudes que configuren un tipo humano capaz de convertirse en agente consciente del desarrollo (creatividad, capacidad de

autoaprendizaje, sentido crítico, disciplina y organización en el trabajo, sentido de responsabilidad personal y social). Los medios de operar para conseguir este objetivo serán:

i. Diseñar y aplicar el entramado pedagógico que descanse más en la actividad del estudiante que en la labor informativa del maestro y que se oriente a eliminar la recepción pasiva de información, sustituyéndola por su análisis y comprensión.

ii. Conjuntar la comprensión de la teoría con su aplicación práctica. Propiciar en el estudiante la búsqueda y organización de la información. Preparar al estudiante en el uso personal de material informativo, como condición del auto-aprendizaje.

iii. Establecer sistemas de evaluación de conocimientos para considerar, junto con el aprendizaje, el logro de habilidades y hábitos positivos, que propicien una educación continua. Llevar a cabo reuniones y cursos con el personal docente para reorientar la enseñanza bajo los principios anteriores.

b) Facilitar al estudiante, la información de actualidad de la más alta calidad, con el propósito de estimular el proceso de auto desarrollo. Para la consecución de este objetivo se propone:

i. Establecer los medios que permitan el flujo, hacia la docencia, de la información sobre el desarrollo de la ciencia y la auto-evaluación y superación constante de la calidad del material informativo utilizado en la enseñanza.

ii. Implementar y aplicar la metodología para la transmisión del conocimiento de manera eficaz, que permita distribuir la información de mayor calidad al mayor número de personas en el menor tiempo posible.

Aplicación del experimento

Actualmente la investigación se encuentra en proceso de aplicación del experimento diseñado, utilizando solamente el material escrito y en desarrollo de las principales componentes computacionales que conforman el aspecto más importante de la indagatoria. Para la primera etapa se tiene contemplada la aplicación de los siguientes aspectos, mostrados gráficamente.

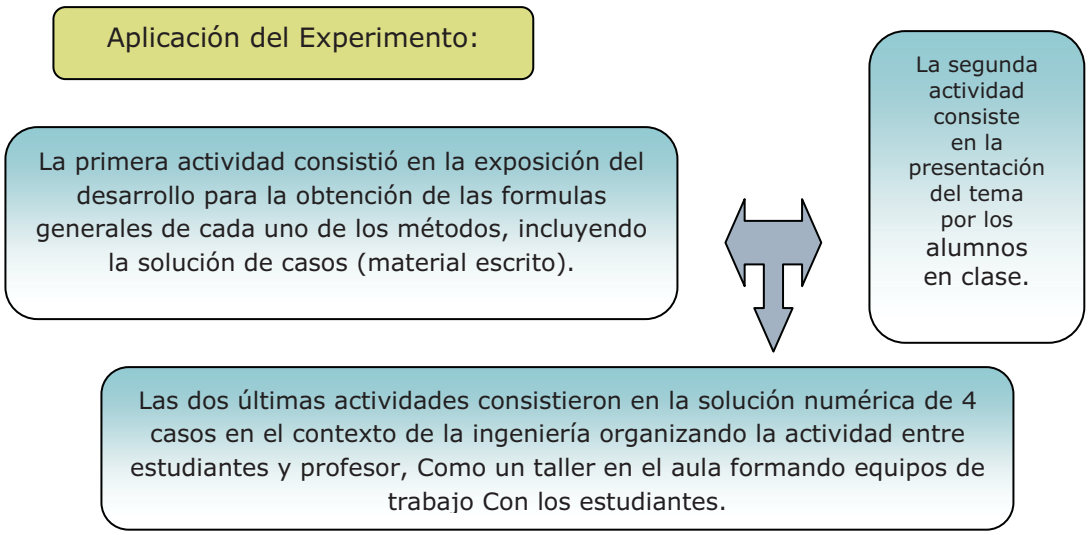


Figura 2. Aplicación de la primera etapa del experimento diseñado

Se muestra la forma en la que se ha considerado, el como se llevarían a cabo las interacciones, en el diseño del experimento

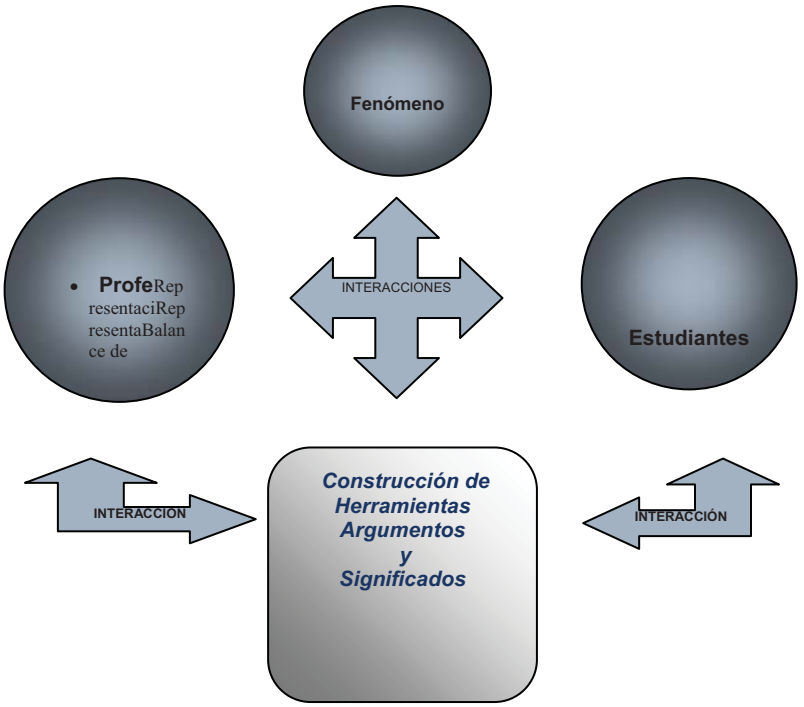


Figura 3. Interacción: Fenómeno-Estudiantes-Profesor

Diseño e implementación del material de apoyo

El material de apoyo escrito se desarrollo de acuerdo a la currícula de cada una de las carreras de Ingeniería, que se ofrecen actualmente en la FESC-UNAM, en relación a la asignatura Métodos Numéricos. El Material escrito contiene el desarrollo de cada uno de los métodos, desde el punto de vista algorítmico, incluye ejemplos, casos de estudio y problemas propuestos. Este material se editó en forma de notas, en el comité editorial de la Facultad. Su implementación consistió en facilitar al estudiante los temas que serían presentados por ellos en una primera etapa del desarrollo del curso.

El material computacional se esta desarrollando, mediante lenguajes y aplicaciones de programación y consiste en dos aspectos fundamentales: un tutorial y un paquete de programas. El tutorial se diseño considerando tres componentes fundamentales. La primera de ellas compuesta por animaciones que explican la formulación de cada uno de los métodos de manera visual. Una segunda componente se refiere a una forma didáctica de realizar la aplicación de los métodos numéricos a casos específicos de las distintas áreas de la ingeniería (casos en contexto); así mismo, en esta componente se llevará a cabo una evaluación por el alumno (autoevaluación) con posibilidades de detectar sus posibles fallas o aciertos y la retroalimentación correspondiente. Una tercera componente consiste de un generador de problemas aleatorios los cuales serían resueltos por el estudiante para su evaluación previa (pre test) correspondiente a cada uno de los métodos numéricos propuestos en el curso. En esa última etapa el estudiante se puede apoyar en el paquete de programas, para verificar sus respuestas. Dicho paquete, esta siendo conformado por todos aquellos programas por computadora desarrollados por los expertos del computo científico y se escribe en Lenguaje “C”. Se escribiría en forma de programa conversacional, indicando la clase de problemas que resuelve en cada caso; tal que, el usuario, sabe que tipo de datos debe de introducir, como y en que momento se introducen estos, para cada uno de los procesos que resuelve el paquete; así mismo, le permite al estudiante observar los datos de salida o solución del problema tratado por el modelo matemático de cada uno de los métodos numéricos incluidos, permitiendo al estudiante anotar las respuestas para su interpretación y discusión de resultados.

Es muy importante mencionar que la teoría que subyace al diseño del software de apoyo, esta fundamentada principalmente en el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, que es uno de los principales conceptos de la teoría sociocultural de Lev S. Vigotsky.

La implementación del material didáctico, se estaría llevando a cabo, primero mediante el uso del material escrito como apoyo para la presentación del tema por los estudiantes con los que se esta experimentando. A continuación los estudiantes harían uso del tutorial para cubrir las tres etapas mencionadas, mediante el uso de cada una de sus componentes. Por último los alumnos resolverían un caso de estudio generado en la última etapa del tutorial y apoyados por los expertos del cómputo científico mediante un programa por computadora para verificar, interpretar y discutir sus resultados. La aplicación del experimento en la forma descrita permite que el profesor observe, escuche y tome notas cuidadosamente acerca de la forma en que el estudiante emplea la ayuda y el nivel de apoyo que necesita. Esta información ha servido para planear agrupamientos instruccionales, tutoría entre compañeros (que es la aplicación de la teoría "vigotskyana" denominada, la enseñanza recíproca), tareas de aprendizaje, trabajos para casa, etc. En este sentido el profesor habría guiado y facilitado con explicaciones, demostraciones y el trabajo con otros estudiantes, lo que hace posible el aprendizaje cooperativo. Por último se aplica a los estudiantes una prueba posterior (post test) al uso del material de apoyo, sin que se valgan de este último, a fin de que se puedan contrastar los resultados y determinar una medida de la zona de desarrollo potencial de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M., Ramos, R. (2006). *Software de apoyo en la enseñanza de las matemáticas*. *Seminario de Educación Matemática en la Universidad Autónoma de Nayarit.* Recuperado el 23 de enero de 2009 de http://www.docencia.uan.edu.mx/revista/vol.1.num.4/software_apoyo_ensenanza_matema.pdf

Cabero, J., Barroso, J. y Román, P. (2001). *Las influencias de las nn.tt en los entornos de formación: posibilidades, desafíos, retos y preocupaciones.* Universidad de Sevilla. Recuperado el 15 de febrero del 2004 de http://tecnologiaedu.us.es/bibliovir/pdf/131.pdf

Ewing-Taylor, J. (2008). *Student attitude toward web-based courses*. Recuperado el 23 de enero de 2009 de: http://unr.edu/homepage/jacque/research/student_attitudes.html

Vergnaud G. Booker G., Confrey J., Lerman S., Lochhead J., Sfard A., et al. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P.Nesher & J. Kilpatrick (Eds) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp 14-30), N.Y.: Cambridge University Press:

Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Critica/Grijalbo.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FAVORECER EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA ORGANIZAR E INTERPRETAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA INGENIERÍA INFORMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE CAMAGUEY

Reinaldo Sampedro Ruiz, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio, María Lourdes Rodríguez
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey Cuba
reinaldo.sampedro@redu.edu.cu, olga.perez@redu.edu.cu, nancy.montes@redu.edu.cu,
maria.rodriguez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: Desarrollo de competencias Nivel: Superior

Resumen. *La estrategia didáctica es uno de los resultados de la investigación que realiza el grupo de matemática educativa de la Universidad de Camagüey. Tiene como objetivo diseñar una estrategia didáctica para favorecer la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en los estudiantes de la carrera Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey. La misma centra sus resultados científicos fundamentales en un modelo teórico para la formación y desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático. En esta estrategia didáctica para favorecer la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en los estudiantes de la carrera Ingeniería Informática presenta un set de instrumentos e indicadores para evaluar la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático. En el desarrollo de la investigación se utilizaron diferentes métodos, y la implementación se realizó en dos grupos de esta facultad con resultados satisfactorios. Con esta investigación se contribuye al Perfeccionamiento de la Educación Superior.*
Palabras clave: Estrategia didáctica, competencia matemática

Introducción

Hoy más que nunca la universidad debe demostrar su pertinencia social como espacio promotor de los valores universales, de desarrollo y difusión de la cultura y como generadora y diseminadora de nuevos conocimientos que garanticen el desarrollo humano y sostenible. El egresado de cualquier carrera universitaria debe ser capaz de solucionar los problemas que se encuentran en su práctica cotidiana, de organizar e interpretar la información necesaria y utilizar los métodos de la ciencia para resolver dichos problemas. Según Díaz Barriga (2000), la formación de un profesional competente, opinión que comparten los autores de este trabajo, es una necesidad del mundo contemporáneo para que pueda responder a las exigencias sociales y esté a la altura del desarrollo científico-técnico de su época. No obstante tales propósitos quedan incompletos si esa cultura, desde el propio proceso docente educativo de las diversas asignaturas

del plan de estudio no se concibe como un elemento consustancial del proceso de formación de los estudiantes.

La Enseñanza Superior cubana, que se enfrenta hoy a grandes transformaciones en su modelo educativo, tiene como misión la de dirigir científicamente la formación de profesionales, con el objetivo de lograr una preparación integral de un futuro trabajador, competente y comprometido con su país, que le posibilite su incorporación al mundo laboral y en tal sentido esta orienta, coordina, supervisa y evalúa el proceso de enseñanza aprendizaje en los centros docentes pertenecientes a esta enseñanza.

La importancia del trabajo principalmente se fundamenta en la necesidad de diseñar una estrategia didáctica para favorecer la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en los estudiantes de la carrera Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey.

Diversos autores en Cuba, y en el extranjero trabajan el desarrollo de competencias matemáticas, entre los que se encuentran Proenza y Leiva (2005); Godino (2005) y González (2009), entre otros, los mismos coinciden con Niss (1999) ,en que la *competencia matemática* es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. Los criterios anteriores constituyen antecedentes para el trabajo que se propone, sin embargo, a pesar de los estudios realizados aún resultan insuficientes las propuestas dirigidas a aprovechar las potencialidades que ofrece la matemática para gestionar la información proveniente de diversas fuentes desde su proceso docente educativo.

Con el objetivo de determinar las insuficiencias en el proceso de formación y el desarrollo de competencias relacionadas con la organización e interpretación del conocimiento matemático, se realizó un diagnóstico inicial a estudiantes y profesores de la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey y se encontraron entre otras las siguientes dificultades:

a) Dificultades observadas en los estudiantes en: la identificación de la información matemática necesaria para realizar una tarea matemática, la localización de las fuentes de información

posibles, selección de las más convenientes, y la verificación de su pertinencia y relevancia, la extracción y procesamiento de la información matemática esencial dentro de la fuente del contenido matemático, la organización e interpretación de la información matemática seleccionada en forma verbal o grafica y la utilización de sistemas de organización y representación de la información matemática.

b) Dificultades observadas en los profesores: escaso aprovechamiento de las potencialidades que ofrece la matemática para organizar e interpretar la información matemática en los estudiantes desde su proceso docente educativo, no se explotan lo suficiente las tecnologías de la información y las comunicaciones, ni las bibliotecas escolares como medios potenciadores de la competencia organizar e interpretar la información matemática, en la generalidad de los casos, no se realiza un trabajo sistémico, sistemático e integrado del colectivo de profesores que imparten la asignatura, en función de la creación de estrategias comunes para el desarrollo de una cultura en torno a la competencia organizar e interpretar la información matemática.

Desde el punto de vista de los autores de este trabajo se ha intentado abordar la problemática, de "cómo favorecer la formación y el desarrollo de competencias relacionadas con la organización e interpretación del conocimiento matemático en los estudiantes de la carrera Ingeniería Informática". A pesar de existir trabajos al respecto aún son insuficientes, por tal razón elaborar una estrategia didáctica que favorezca la formación y el desarrollo de competencias relacionadas con la organización e interpretación del conocimiento matemático es una problemática actual que merita ser investigada. Esta estrategia toma en consideración los niveles de desempeño del proceso de enseñanza aprendizaje y el vínculo de los contenidos de la disciplina matemática a través de un sistema de tareas que favorezca los resultados del proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la Matemática.

Para desarrollar esta estrategia se han tenido en cuenta aspectos como: el papel del maestro, los niveles de desempeño, la integración del proceso de enseñanza y aprendizaje, el empleo de tareas docentes y sus características, con el fin de favorecer la formación y desarrollo de esta competencia. A continuación se relacionan y se destacan sus particularidades.

a) El papel del maestro, por ser este el que dirige, planifica, organiza, ejecuta y controla el proceso docente educativo y que entre otros aspectos debe poseer: conocimientos de los objetivos y contenidos del programa que imparte, preparación para aplicar un diagnóstico en sus estudiantes, preparación tanto técnica como metodológica para dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje y conocimientos básicos de la asignatura de matemática, que permitan el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático.

En el proceso de formación de competencias es importante tener criterios para determinar el grado alcanzado en la formación de éstas. Al respecto, resulta de gran utilidad emplear distintos niveles de desempeño, que están establecidos por diferentes autores y por los que debe transitar la asimilación de los conocimientos en los estudiantes en el desarrollo de la competencia. En este trabajo asumimos los niveles propuestos por Badilla (2005).

b) Los niveles de desempeño

-*Primer nivel.* Reproducción y procedimientos rutinarios.

Es la capacidad del alumno para utilizar las operaciones de carácter instrumental básicas de una asignatura dada, para ello deberá reconocer, identificar, describir e interpretar los conceptos y propiedades esenciales en los que esta se sustenta. En este nivel se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

-*Segundo nivel.* Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Es la capacidad del alumno de establecer relaciones conceptuales, donde además de reconocer, describir e interpretar los conceptos deberá aplicarlos a una situación planteada y reflexionar sobre sus relaciones internas. Este nivel permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas

representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

-*Tercer nivel.* Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Es la capacidad del alumno para resolver problemas, por lo que deberá reconocer y contextualizar la situación problemática, identificar componentes e interrelaciones, establecer las estrategias de solución, fundamentar o justificar lo realizado. Este nivel de complejidad moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen análisis de diferentes estrategias posibles, invención de sistemas de representación no usuales, generalización y explicación o justificación de los resultados.

c) La integración del proceso de enseñanza y aprendizaje

Se coincide en plantear que la integración es una etapa y no un producto acabado de la interdisciplinariedad, es un momento de organización y estudio de los contenidos de las disciplinas, es una etapa para la interacción que sólo puede ocurrir en un régimen de coparticipación, reciprocidad, mutualidad (condiciones esenciales para la efectividad de un trabajo interdisciplinario), se considera entonces según Fiallo (1996), la integración como una etapa necesaria para la interdisciplinariedad

La integración se expresa en cada asignatura, en las relaciones entre ellas las cuales conforman el año o grado de cada carrera. En este trabajo se aborda la integración para contribuir al desarrollo de las habilidades profesionales desde el primer año de la carrera, para dar solución a los problemas profesionales más comunes que se les pueden presentar a los futuros egresados en el desempeño profesional y al mismo tiempo contribuir a la asimilación y fijación de conocimientos fundamentales para el alumno.

d) La creación de un sistema de tareas

Se partió de la definición de tarea docente según González (2009), como la célula del proceso docente educativo, donde, bajo la dirección y orientación del profesor, el estudiante gestiona el conocimiento de una manera responsable, crítica y reflexiva para la solución de problemas, que con cada una de ellas se pretende un objetivo, es decir hay un contenido a asimilar, una habilidad a desarrollar. Por lo tanto se crea un sistema de tareas que pueda favorecer la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático, en los estudiantes de la carrera Ingeniería Informática de la Universidad de Camagüey.

Además de las acciones realizadas para llegar a conformar el sistema de tareas, debe tenerse en cuenta las funciones referidas a la dirección que debe asumir su aplicación y la estructura de la actividad cognoscitiva, es decir su relación con los niveles de desempeño.La complejidad de las tareas se va estructurando de acuerdo a las condiciones propias del proceso de enseñanza y aprendizaje, son adaptables a las particularidades de cada grupo, así como a las necesidades individuales de cada estudiante. El sistema de tareas debe perfeccionarse sistemáticamente por el profesor.

Las características del sistema de tareas según González (2009) son:

- *Tareas que permitan organizar el conocimiento matemático:*

Son aquellas que permiten categorizar, confrontar, clasificar, dar orden y jerarquía, estructurar y sistematizar la información matemática, para poder relacionar nuevas informaciones y transformarlas en conocimientos, para ello se pueden realizar mapas conceptuales, esquemas, gráficos, tablas, etc., con la información ya filtrada, en función del objetivo que se persigue.

Para organizar el conocimiento se pueden utilizar los “mapas del pensamiento”. Hay varios tipos de “mapas del pensamiento”: los mapas conceptuales, los mapas mentales, los diagramas o esquemas, etc.

- *Tareas que permitan interpretar el conocimiento matemático:*

Son aquellas que permiten el reconocimiento e interpretación de términos y conceptos claves, gráficas y tablas, etc., análisis para la búsqueda de relaciones y dependencias entre los objetos

matemáticos, integración de ideas de forma globalizada para llegar a la esencia, se generaliza y sintetiza.

Múltiples son, las clasificaciones sobre el término estrategia, en nuestro trabajo se tomó como definición de estrategia didáctica, según Rodríguez del Castillo (2004) a la proyección de un sistema de acciones a corto, mediano y largo plazo que permite la transformación del proceso de enseñanza aprendizaje en una asignatura, nivel o institución tomando como base los componentes del mismo y que permite el logro de los objetivos propuestos en un tiempo concreto.

El *Objetivo de esta estrategia didáctica es:* Favorecer la formación y el desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático.

Las *premisas fundamentales para su aplicación fueron:* consideración de los componentes no personales del proceso docente-educativo, disposición favorable del docente, participación activa de los estudiantes y consideración de la coherencia interna del proceso enseñanza-aprendizaje.

La estrategia consta de cuatro etapas, cada una con un fin determinado y con sus acciones correspondientes.

1) **Etapa de Planificación**. Esta etapa incluye: el estudio de los programas de las asignaturas de la disciplina matemática, (análisis de los objetivos del año, contenidos, modelo del egresado), intercambio con los profesores del departamento de matemática, la confección de una tabla de doble entrada en forma matricial para la determinación de las relaciones entre contenidos, según Ruiz (2005) y la determinación de las relaciones ínter materias.

2) **Etapa de Organización.** Esta etapa incluye: la organización de los contenidos, el diseño de las tipologías de clases, el diseño del sistema de tareas, según los niveles de desempeño y la tipología de clases y la determinación del sistema evaluativo.

3) **Etapa de ejecución.** Esta etapa incluye: el diagnóstico del grupo de estudiantes, el análisis de cada clase, el sistema de tareas, la relación alumno – profesor – alumno y el desarrollo del sistema evaluativo concebido al planificar la asignatura.

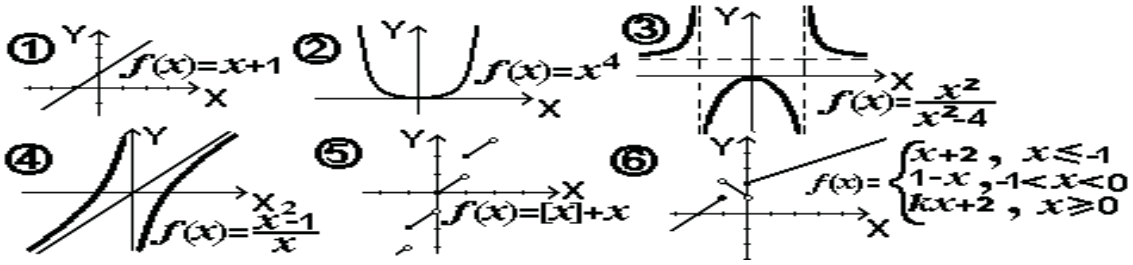
4) **Etapa de control.** Esta etapa incluye: el análisis de la marcha de la propuesta al cierre de cada unidad, y semestre, y reajustar la estrategia según las sugerencias que existan en cada análisis según corresponda.

La estrategia fue aplicada en la carrera de Ingeniería Informatica, en la asignatura de matemática I, con su aplicación sistemática se ha logrado mejorar los resultados docentes de los estudiantes de esta carrera, fue necesario ir reforzando el trabajo docente metodológico de los docentes, exigiéndose de ellos: el estudio de los programas de las asignaturas de cada año y carrera, un sistemático intercambio con especialistas de la profesión, la selección de la, o las unidades a trabajar, la organización de los contenidos de la Matemática I, la confección de las tareas docentes para cada una de las unidades del programa y el desarrollo del trabajo metodológico planificado y de la unidad.

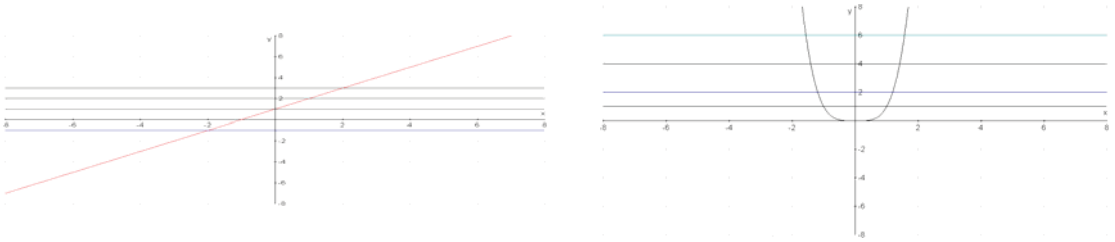
A modo de resumen, para la confección del sistema de tareas, se tuvo en cuenta la asignatura Matemática I, en el primer año de la carrera, por ser donde los estudiantes presentan mayores dificultades que arrastran los alumnos de años anteriores y donde se toman infinitas medidas para lograr la permanencia de los estudiantes en la carrera. Se tuvo en cuenta, los criterios de los profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey y los objetivos del plan de estudios. A continuación se hace una propuesta de tareas de los tres niveles.

Ejemplo de ejercicio del Primer nivel.

Haga un estudio, utilizando diferentes fuentes de información, de las condiciones que debe tener una función para ser inyectiva, observe las siguientes gráficas de funciones, y diga si son invectivas o no. –Los estudiante solamente observando el grafico y con una correcta interpretación del concepto de función inyectiva puede responder este ejercicio.



Ejemplo de respuesta de los alumnos: (Gráficos obtenidos con el DERIVE)



R/Apoyándose en la idea grafica la mayoría de los estudiantes respondió que existe la inversa si al trazar rectas paralela al eje de las ¨x¨, se corta una sola ves el grafico de la función. Otros pero la minoría se basaron en despejar la variable x, para determinar si es posible la inversa.

Ejemplo de ejercicio del Segundo Nivel

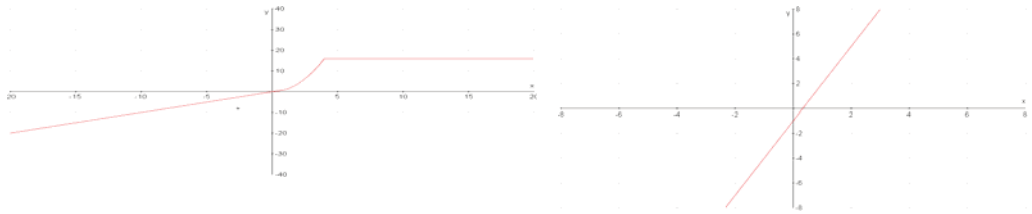
Utilizando el DERIVE, construye el grafico de las siguientes funciones y analice la monotonía de las mismas: 1) $f(x) = 3x - 1$ 2) $f(x) = x^2 + 4$ 3) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \le x \le 4 \\ 16 & x > 4 \end{cases}$

- El alumno además de la utilización del asistente, debe reconocer, describir e interpretar el concepto de función monótona y aplicarlo a la situación planteada y reflexionar sobre los intervalos de monotonía.

.

Ejemplo de respuesta de los alumnos: (Gráficos obtenidos con el DERIVE).

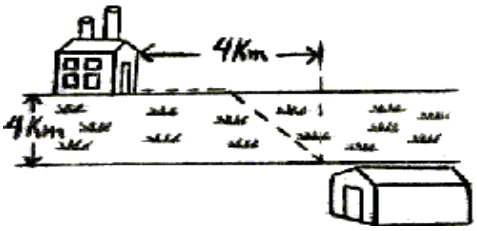
1)3)



R/Los alumnos apoyados en la representación grafica y las propiedades de las funciones respondieron y señalaron los intervalos de monotonía

Ejemplo de ejercicio del Tercer Nivel

Se debe construir una carretera entre una fábrica y los almacenes, a través de un pantano. Exprese el costo de construcción como una función del espacio, si se conoce que a través del pantano el costo es de $100 000 por *Km.*, y en tierra firme es de es de $20 000 por *Km.*



- El estudiante para resolver problemas de este tipo, deberá reconocer y contextualizar la situación problemática, identificar componentes e interrelaciones, establecer las estrategias de solución, fundamentar o justificar lo realizado.

Conclusiones

A través de la investigación desarrollada, se detectaron limitaciones que parten del propio programa de estudios. Se ha comprobado cuan vital es como herramienta para el profesor tener un material auxiliar. En este caso el sistema de tareas para desarrollar la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en la carrera de Ingeniería en Informatica teniendo en cuenta principalmente los niveles de asimilación de las competencias.

Se ha comprobado que con esta estrategia didáctica se puede favorecer el proceso de formación y desarrollo de la competencia organizar e interpretar el conocimiento matemático en la carrera de

Ingeniería en Informática. Revirtiéndose esto en una mejor asimilación de los contenidos de los estudiantes. Además, se logra que el docente posea un mayor dominio de elementos de la carrera con que trabaja por un lado y por otro una mayor motivación de los estudiantes hacia la Matemática al ser gestores de su propio conocimiento y a la vez se logra poseer una mayor cantidad de conocimientos, de aquellos contenidos matemáticos que le permiten justificar elementos prácticos en la carrera.

Con el desarrollo del sistema de tareas contribuyó a que los estudiantes basándose en los modelos establecidos según los niveles de desempeño desarrollaran trabajos de mayor calidad y aplicabilidad en la carrera como se muestra en el desarrollo de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Badilla, L. (2005). *Nociones sobre el concepto de competencias*. Recuperado el 18 de Agosto 2008 de http://www.cumex.org.mx/archivo/ACERVO/tuning.pdf.

Díaz Barriga, F. (2000).Formación docente y educación basada en competencias. *Revista Pensamiento Universitario.* (91).

Fiallo, J. (1996). *Las relaciones intermaterias una vía para incrementar la calidad de la educación.* Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Godino, J. (2005). Perspectiva ontosemiótica de las competencias y de relaciones teoría-practica en la formación de profesores de matemática. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 349-356. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, C. (2009). *Estrategia didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes universitarios*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de estudios en Ciencias de la Educación de la Universidad de Camaguey. Cuba.

Niss, M. (1999), *Competencies and Subject Description*. Recuperado el 20 de Julio 2009 de http://www.pisa.oecd.org

Proenza, Y. y Leiva, L. (2005). Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación*. 40 (6). 6-15.

Rodríguez del Castillo, M. (2004). *Tipologías de estrategia*. Cuba: Editorial. Pueblo y Educación.

Ruiz, J. (2005). *Metodología para la organización científica del contenido de planes de estudios en la educación superior en Cuba*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de estudios en Ciencias de la Educación de la Universidad de Camaguey. Cuba.

A ARTICULAÇÃO MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ALGEBRA LINEAR

Tânia Maria Mendonça Campos, Fabio Simião, Marlene Alves Dias
UNIBAN Brasil
taniammcampos@hotmail.com, fsimiao@yahoo.com.br, alvesdias@ig.com.br
Campo de investigación: Matrizes e Álgebra Linear Nivel: Médio e Superior

Resumo. *Apresentamos nesse artigo o estudo das relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades no Ensino Médio e de matrizes e transformações lineares no Ensino Superior. Observamos que o objetivo de nossa pesquisa é identificar os conhecimentos prévios necessários para trabalhar a articulação entre as noções de matrizes e transformações lineares nos cursos de licenciatura em matemática. Para desenvolver as análises propostas na metodologia da nossa pesquisa construímos uma grade de análise utilizando as ferramentas teóricas de análise apresentadas na teoria antropológica do didático de Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) e nas abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 19992) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997). Os resultados encontrados mostram que é preciso considerar os conhecimentos prévios dos estudantes que iniciam o Ensino Superior para desenvolver o conteúdo escolhido de forma eficaz.*
Palavras chave: Transformações Lineares, relações institucionais e pessoais, matrizes.

Introdução

No Brasil, estamos vivendo uma crescente defasagem em relação à Educação Básica, em especial, no Ensino Médio, ou seja, existe uma diversidade de relações institucionais que têm sido identificadas tanto nos resultados das macroavaliações quanto pelos professores das universidades que, em geral, reclamam da falta de alguns conhecimentos prévios e da dificuldade de desenvolver um trabalho em que o estudante se responsabilize pela sua aprendizagem.

Sendo assim, o objetivo dessa pesquisa é identificar os conhecimentos prévios que podem ser considerados disponíveis para se trabalhar a articulação entre as noções de matrizes e transformações lineares nos cursos de licenciatura em matemática.

Para isso, desejamos identificar quais desses conhecimentos já foram trabalhados no Ensino Médio e se existe possibilidade de apenas revisitá-los no Ensino Superior, em particular, quando se introduz a noção de matriz de uma transformação linear. Observando que a noção de transformação linear pode se apoiar sobre os conhecimentos de funções e suas propriedades, que se supõe disponível para os estudantes do segundo ano das licenciaturas, uma vez que essas

noções têm sido revisitadas na disciplina de cálculo diferencial e integral desses cursos, e que a noção de matriz de uma transformação linear só tem interesse para facilitar o trabalho matemático quando se dispõe de suas operações e propriedades.

Isso nos conduziu a estudar como a noção de matriz, suas operações e propriedades são trabalhadas no Ensino Médio, isto é, quais as relações institucionais existentes para seu ensino, de forma a poder tratá-la, pelo menos, como um conhecimento mobilizável que possa ser revisitado quando necessário, sem que haja necessidade de introduzir novamente a noção e trabalhá-la como um novo conhecimento. O que desejamos é nos apoiar sobre os conhecimentos desenvolvidos nas etapas anteriores da escolaridade para introduzir novos conhecimentos, pois isso permite que os estudantes dêem significado aos seus conhecimentos prévios e possam articulá-los com os novos conhecimentos, o que lhes possibilita resolver qualquer tipo de questão, mesmo quando o que se pede não está explicitado no enunciado. Para isso, escolhemos a teoria antropológica do didático de Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) que permite estudar as relações institucionais esperadas e existentes, que aqui são analisadas via documentos oficiais e livros didáticos respectivamente. Além disso, consideramos as noções de tarefas, técnicas tecnologias e teorias e a questão da representação que é tratada por meio das noções de ostensivos e não ostensivos introduzidas por esses mesmos autores. Consideramos, ainda, as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros conforme definição de Douady (1984) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Uma vez escolhidas as ferramentas de análise, construímos uma grade de análise que permite estudar tanto as relações institucionais existentes como as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Na seqüência apresentamos uma breve descrição do referencial teórico utilizado na pesquisa.

Referencial teórico da pesquisa

Escolhemos, mais especificamente, as noções de relações institucionais, tarefas, técnicas, tecnologias, teorias, ostensivos e não ostensivos de Bosch e Chevallard (1999). Para a construção da grade de análise utilizamos as noções de quadro e mudança de quadros conforme definição de

Douady (1984, 1992) e os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Para Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) tudo é objeto e quando esse é reconhecido por uma instituição, pode ser definido como uma relação institucional a esse objeto, que nesse trabalho é reconhecida por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Nova Proposta do Estado de São Paulo como as relações institucionais esperadas. Assim como os livros didáticos e o caderno do professor que são considerados como relações institucionais existentes. Nas instituições um objeto é reconhecido por meio de tarefas que para serem executadas necessitam de técnicas. Essas técnicas precisam ser justificadas e controladas dando origem às tecnologias ou discurso sobre as técnicas. As tecnologias por sua vez precisam ser compreensíveis e justificáveis dando origem às teorias.

Consideramos também a noção de ostensivo, isto é, os objetos de natureza sensível como os sons, os grafismos e os gestos, e os objetos não ostensivos como as noções, os conceitos e as idéias que só podem ser evocados por meio da manipulação adequada dos ostensivos que lhe são associados. Aqui observamos, ainda, a importância da noção de conhecimento prévio que segundo Moreira (2005) é fundamental para a teoria da aprendizagem significativa, pois o novo conhecimento deve interagir com os conhecimentos prévios. Julgamos, ainda, que é preciso considerar as diferentes relações institucionais que cada indivíduo foi submetido para que o novo conhecimento adquira significado e o conhecimento prévio fique mais rico, diferenciado e elaborado, adquirindo estabilidade.

Para melhor identificar como os conhecimentos prévios estão sendo trabalhados institucionalmente utilizamos a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997), ou seja, o nível técnico que está relacionado às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: identificar o tipo de uma matriz. O nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes, podendo até chegar a uma organização. Mas, o que se questiona é explicitamente pedido. Exemplo: Encontrar o valor de x em uma igualdade de matrizes. O nível disponível que corresponde a uma organização dos saberes que possibilita responder corretamente o que é proposto sem indicações. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, ao fato de dispor de referências, de

questionamentos, de uma organização. Exemplo: Utilizar a representação matricial e a multiplicação de matrizes para determinar a composta de duas transformações lineares.

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz às noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1992), a saber:

> [...] *um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas*. (Douady, 1992, p.135, apud Andrade, 2006, p. 14).

A mudança de quadros é uma transposição do trabalho do matemático para a didática que Douady (1992) considera como:

> *[...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. [...] Qualquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalhos (*Douady, 1992, p.135, apud Andrade, 2006, p. 15)

Após essa breve apresentação do referencial teórico escolhido para a pesquisa, apresentamos a metodologia utilizada para atingir nosso objetivo que é identificar os conhecimentos supostos disponíveis para os estudantes do Ensino Médio em relação à noção de matrizes.

Metodologia da pesquisa

A metodologia proposta para a pesquisa é a seguinte:

- Análise da nova proposta institucional para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades via cadernos do professor da 2ª série do Ensino Médio 2º Bimestre distribuídos pela Secretaria de Educação do estado de São Paulo.

- Análise das propostas institucionais para o ensino de matrizes, suas operações e propriedades via Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+);
- Análise das tarefas habitualmente encontradas para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades via livros didáticos do PNLEM – Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio.
- Análise das Ementas das Universidades particulares e públicas do Estado de São Paulo para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear, para verificar como e quando são trabalhados ou revisitados os conhecimentos prévios necessários para a introdução da noção de matriz de uma transformação linear.
- Análise das tarefas habitualmente desenvolvidas no Ensino Superior, quando se introduz a noção de matriz de uma transformação linear, via livros didáticos.

Para efetuar as análises das tarefas, construímos a seguinte grade de análise.

A grade de análise

O primeiro conjunto de tarefas contribui para análise das relações institucionais existentes para o ensino e aprendizagem do conceito de matrizes, suas operações e propriedades, para o Ensino Médio e correspondem as noções que podem ser revisitadas no Ensino Superior. Já o segundo conjunto apresenta as possíveis relações institucionais existentes para o ensino de transformação linear e matriz de uma transformação linear.

Esse conjunto de tarefas permite identificar a diversidade de relações institucionais existentes em função das variáveis dessas tarefas, que podem ser exploradas com os estudantes desde a segunda série do Ensino Médio quando se tratam da noção de matrizes, suas operações e propriedades.

As *tarefas* usualmente encontradas para a noção de matrizes no Ensino Médio são:

Tarefa 1: Representar a tabela na forma matricial e identificar o tipo ou a ordem da matriz;
Tarefa 2: Representar matricialmente uma tabela de freqüência e analisá-la;
Tarefa 3: Através da representação genérica, escrever a matriz identificar a posição de cada elemento;
Tarefa 4: Identificar a ordem e o tipo da matriz e os elementos da diagonal principal e secundária;
Tarefa 5: Estabelecer igualdade entre matrizes;
Tarefa 6: Efetuar a adição de matrizes trabalhando também com as propriedades da adição de matrizes;
Tarefa 7: Identificar a matriz oposta de uma matriz dada;
Tarefa 8: Efetuar a subtração de matrizes;
Tarefa 9: Multiplicar um número real por uma matriz dada;
Tarefa 10: Determinar a transposta de uma matriz;
Tarefa 11: Determinar matriz simétrica, anti-simétrica utilizando a igualdade de matrizes.
Tarefa 12: Verificar se existe e determinar o produto entre duas matrizes;
Tarefa13: Determinar a Matriz inversa de uma matriz dada utilizando o sistema de equações;
Tarefa 14: Obter uma matriz, através de uma equação matricial;
Tarefa 15: Utilizar os conhecimentos adquiridos trabalhando com objetos em computação gráfica.
Tarefa 16: Transformar um grafo em matriz.

As *tarefas* encontradas para transformação linear e matriz de uma transformação linear para o Ensino Superior são:

Tarefa 1: Verificar se a transformação de um espaço em outro espaço é uma transformação linear, dada a operação.
Tarefa 2: Verificar se a transformação de um espaço em outro é um operador linear, dada a operação;
Tarefa 3: Determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear;
Tarefa 4: Mostrar que o operador linear é um automorfismo e determinar sua inversa;
Tarefa 5: Mostrar que uma transformação linear é um isomorfismo;
Tarefa 6: Determinar a matriz de uma transformação linear em relação as canônicas dos espaços em que a transformação está definida;
Tarefa 7: Determinar a representação matricial de uma transformação linear dadas as bases dos espaços vetoriais em que a transformação está definida;
Tarefa 8: Determinar a composta de duas transformações lineares;
Tarefa 9: Determinara inversa de uma transformação linear;
Tarefa 10:Reconhecer as transformações geométricas (translação, rotação, simetria, cisalhamento) de IR^2 e IR^3 por meio da matriz da transformação sendo ela linear ou não.

Resultados Encontrados

Comentários sobre as relações institucionais esperadas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) propõe que no Ensino Médio devemos preparar os estudantes para o mundo do trabalho. Sendo assim, é importante que se considere no processo de ensino e aprendizagem a participação ativa dos estudantes que possam ser mediadores das próprias informações. Em relação à noção de matrizes as expectativas são para que os professores desenvolvam esse conteúdo mostrando sua importância nas diferentes áreas do conhecimento, em particular, no estudo das transformações geométricas do plano que podem ser identificadas por meio do ostensivo de representação matricial. Nesse momento, o estudo das transformações geométricas do plano permite trabalhar com o novo ostensivo de representação para o não ostensivo transformação geométrica desenvolvido no Ensino Fundamental e revisitado nesse momento em outro contexto.

Assim o objetivo da matemática no Ensino Médio é oferecer as ferramentas que possam favorecer a contextualização das práticas enquanto pessoa humana e profissional. Dessa forma, as tarefas nos mais variados conteúdos têm que estar disponibilizadas de forma a provocar no estudante à compreensão do mundo exterior, por meio da matemática.

O estudante do Ensino Médio será o futuro ingressante do Ensino Superior, em particular, nos cursos de licenciatura em matemática, alvo de nossa pesquisa. Fica, assim, a cargo do professor garantir o ensino de conteúdos essenciais que possam favorecer o processo de ensino e aprendizagem de modo que o estudante possa continuar seus estudos.

A análise dos planos de ensino de 3 universidades públicas e 3 universidades privadas mostram que existe uma tendência em retomar conteúdos já trabalhados no Ensino Médio na tentativa de suprir as necessidades dos estudantes. O que mostra a importância do nosso estudo que prevê a identificação dos conhecimentos prévios que podem ser supostos disponíveis e que assim seriam apenas revisitados quando da introdução de novos conhecimentos na universidade.

Comentários sobre as relações institucionais existentes

Ao analisarmos as relações institucionais existentes observamos que as tarefas abordadas possibilitam desenvolver as ferramentas necessárias em relação ao estudo de matrizes, como propõem os documentos oficiais.

O livro didático desenvolve uma seqüência de tarefas que possibilitam ao estudante adquirir pressupostos básicos, oferecendo os requisitos necessários para continuidade de seus estudos no Ensino Superior, em especial, quando se considera a noção de matizes, suas operações e propriedades.

Logo, nos parece mais adequado desenvolver o curso de Álgebra Linear apenas revisitando essas noções, quando necessário, nesse novo contexto.

Em geral, os livros didáticos para o Ensino Superior têm introduzido a noção de matrizes, suas operações e propriedades e sistemas lineares antes de desenvolver as noções de espaço vetorial de dimensão finita, combinação linear, base e dimensão e transformação linear. Tanto a noção de matriz como a noção de sistemas lineares homogêneos são utilizadas como exemplos de espaços vetoriais de dimensão finita e permitem o estudo das noções de combinação linear, base e dimensão.

Esse trabalho é essencial para a introdução da noção de matriz de uma transformação linear, que termina ficando para o final do curso e, conseqüentemente, e não pode ser explorada em toda a sua potencialidade.

Observamos por meio da macro-avaliação Exame Nacional de Avaliação de Desempenho dos Estudantes (ENADE), que avalia os estudantes do primeiro e último ano do Ensino Superior, que as questões sobre transformações lineares privilegiam os ostensivos de representação gráfica e matricial que são supostamente trabalhados desde o Ensino Médio e, portanto, não deveriam apresentar tantas dificuldades, principalmente, para aqueles que serão os futuros professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio.

Considerações finais

Nossa experiência mostra que, em geral, os estudantes que iniciam o Ensino Superior dispõem das ferramentas associadas às noções de matriz, suas operações e propriedades, de diferentes métodos de resolução de sistemas lineares e dos ostensivos de representação matricial desses sistemas. Suas dificuldades estão associadas à discussão das possibilidades de solução que é justamente a ferramenta que eles necessitam para representar os subespaços de IR^2, IR^3, ..., IR^n e determinar uma base e a dimensão desses subespaços.

Observamos, ainda, que os estudantes dominam rapidamente as técnicas de passagem do ostensivo de representação no espaço das transformações lineares para o ostensivo de representação no espaço das matrizes quando eles compreendem as noções de combinação linear, base e dimensão. Portanto, nos parece importante que se considere os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à noção de matrizes adquiridos no Ensino Médio tornando-os mais ricos e diferenciados e possibilitando que o novo conhecimento tenha significado para os esstudantes.

Lembramos que conforme afirma Moreira (2005).

> *Sabemos que a aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. Nesse processo, que é não-literal e não-arbitrário, o novo conhecimento adquire significados para o aprendiz e o conhecimento prévio fica mais rico, mais diferenciado, mais elaborado em termos de significados, e adquire mais estabilidade. [...] Sabemos, também, que o conhecimento prévio é, isoladamente, a variável que mais influencia a aprendizagem. Em última análise, só podemos aprender a partir daquilo que conhecemos.[...] (*Moreira, 2005, p.13)

Parece-nos importante não iniciar a introdução de um novo conhecimento sem diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes para que se possa torná-los mais estáveis. Isso permitirá que os estudantes sejam capazes de mobilizar ou dispor de seus conhecimentos para articulá-los no momento em que precisem resolver problemas e situações encontrados na própria matemática, nas outras ciências e no mundo do trabalho.

Referências bibliográficas

Andrade, S. N. (2006) *Possibilidade de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: A noção de função afim.* Dissertação de Mestrado não publicada, Unicsul, São Paulo.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: *Recherches en didactique des mathématiques*. 19(1), 77-123.

Brasil. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental***.** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC, SEF.

Brasil, (2000) *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio.* Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. **(**2006). *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias***.** Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010 Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

Brasil**.** (2008) *Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009*.: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Chevallard, Y., (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

Dante, L. R. (2004) *Matemática*. São Paulo : Ática.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Moreira, M.A.(2005) *Aprendizagem Significativa Crítica*. Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul..

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 193-212). França: Houlgate.

São Paulo (2009) *Caderno do professor*: *Matemática, Ensino Médio – 2ª série, 2º bimestre.* Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2008) *Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática.* Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS COMO MEDIO PARA VINCULAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR CON LA VIDA COTIDIANA

Areli Hernández Juárez, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
afenix7@hotmail.com; vil@uaq.mx
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Medio

Resumen. *Cuando un aprendizaje es comprendido verdaderamente y tiene significado para los alumnos hay mayor probabilidad de que se pueda aplicar en un contexto variado para el beneficio del sujeto involucrado. Generando competencias y habilidades que permiten el aprendizaje de conceptos cada vez más elaborados, de una visión global de los conocimientos, de sus posibles aplicaciones en distintas áreas y para distintos usos, en un contexto social. Persiguiendo dicho objetivo se realizó la propuesta de trabajar con problemas de planteo basados en situaciones reales de alumnos de preparatoria de sistema abierto y seleccionados por ellos mismos de acuerdo a necesidades específicas. Con el objetivo de observar el grado de influencia de la vinculación entre los problemas de planteo y las problemáticas cotidianas se realizaron distintas actividades bajo el modelo de los tres usos de la variable propuestos por Ursini para poder vislumbrar los beneficios de la integración y aplicación de los saberes académicos, así como las habilidades y competencias que se pudieran potenciar.*
Palabras clave: Problemas, habilidades, aprendizaje

Introducción

Desde hace algún tiempo se ha considerado que la educación es una de las herramientas con las que se cuenta para la preparación de los futuros ciudadanos inmersos en una sociedad cambiante y compleja. Sin embargo, el grado de influencia de las necesidades de la sociedad tiende a separarse de los contenidos enseñados en la educación, creando una visión idealista y sin conocimiento real de lo que la preparación de un estudiante puede permitir.

La sociedad actual requiere personas capaces de aplicar los conocimientos académicos en problemas cotidianos, pues consideramos que la finalidad del aprendizaje de cualquier materia es su comprensión para poder vincularla con la vida del individuo (cotidiana o académica) y a su vez mejorarla. Ante esta situación es importante buscar que los conocimientos matemáticos, particularmente los algebraicos, se vinculen a la vida cotidiana y que el uso de las habilidades matemáticas permita desarrollar las capacidades de los alumnos, permitiéndoles adentrarse en conocimientos y habilidades más complejos.

Es necesario crear propuestas de actividades que permitan ampliar el campo de percepción de los alumnos y así se den cuenta de que los objetos de estudio, como los problemas de planteo, no

sólo aparecen en las Matemáticas sino que se relacionan con otras áreas del conocimiento. A esto se le ha dado el nombre de "enseñar a entender" (Perkins, 1993). Enseñar a entender que los conocimientos surgieron por una necesidad de comprender el mundo y de poder actuar sobre él, de manera que el conocimiento se ha generado a través de problemas prácticos y que fue mediante las soluciones que se han desarrollado algunas de las grandes teorías que actualmente conocemos.

Propuesta de trabajo

La aplicación de las matemáticas no sólo se refleja en la resolución de un problema, sino en que el razonamiento que se lleva a cabo en este proceso se expande a la creación de distintas habilidades que ayudan en la toma de mejores decisiones y una mayor capacidad de reflexión en distintas áreas de pensamiento. A pesar de que es sabido que este proceso es muy importante, la adecuación de actividades que promuevan estas habilidades no siempre es fácil de lograr debido a las distintas características e intereses de los alumnos considerados.

Todo esto nos llevó a preguntarnos: *¿en qué medida es posible lograr que los alumnos de preparatoria de sistema abierto encuentren el vínculo entre el conocimiento matemático escolar y las situaciones de su vida cotidiana a través de resolución de problemas?*

Como parte de la respuesta hemos considerado el uso que se le puede dar a la resolución de problemas en contextos algebraicos, tal como lo menciona Schoenfeld (1992), ya que eso permite la interacción del sujeto con el objeto de conocimiento, como se considera en la Epistemología Genética, proporcionando así un camino hacia un *aprendizaje significativo* (Coll y Solé, 1989), plasmado en una propuesta que tenía como fin la transformación de inquietudes cotidianas en planteamientos de situaciones problemáticas que pudieran ser resueltas a través del estudio de expresiones algebraicas para poder estudiar los tres diferentes usos de las variables propuestos en el modelo 3UV de Ursini (2005).

La propuesta que se planteó consistía en familiarizar a los alumnos de preparatoria abierta con la modelación algebraica de situaciones o inquietudes problemáticas personales a las que se enfrentaran frecuentemente, utilizando para ello los distintos usos de las variables.

A modo de ejemplo, una de las actividades que se llevó a cabo propuestas por los alumnos fue la necesidad de comprender el uso óptimo de las tarjetas de crédito. Para por auxiliar a los alumnos con este requerimiento fue necesario desarrollar actividades guiadas al estudio de este tema utilizando las variables como herramienta básica de análisis e integradas por una serie de ejercicios o preguntas a desarrollar que guiaron hacia la comprensión de los proceso que intervenían en dicha actividad social.

Cada pregunta planteada en las actividades guiaban a los alumnos a utilizar las variables y a comprender cuales son las diferencias entre una expresión y otra a pesar de que las variables utilizadas pudieran ser las mismas.

Por esta causa en esta propuesta se le dio importancia a la interacción que tuvieran los alumnos con las situaciones problemáticas y se trató de que dichas interacciones generaran puntos de acuerdo entre las distintas concepciones que fueran descubiertas pero que al mismo tiempo se pudieran crear algunos desequilibrios de manera que los alumnos descubrieran que en la mayoría de ocasiones, las matemáticas son un campo de múltiples posibilidades cuyos elementos pueden ser usados de distintas manera y con distintos significados. Así al analizar estos desequilibrios, los alumnos pueden aclara, enriquecer y profundizar sus concepciones.

Aunado a esto, durante la realización de las actividades la discusión y argumentación de sus respuestas e ideas jugaría un papel protagónico para conocer el grado de abstracción y dominio de los conceptos. De manera que al socializarlo se potencializaría el proceso de aprendizaje de cada individuo.

Existen opiniones que afirman que las primeras ideas matemáticas proceden de la experiencia de la vida diaria por este motivo los problemas aplicados a la realidad de los alumnos necesitaban guardar cierta correlación con sus interés y necesidades.

Con esta forma de trabajo se pretendió propiciar el arte de la modelación la cual abre un sinfín de posibilidades para poder observar y analizar el mundo.

En estas actividades se recalcó el protagonismo de los alumnos al ser ellos quienes propusieran o manifestaran sus temas de interés.

Como pretexto para la introducción o conclusión de ciertos conceptos se realizaron ejercicios propuestos por Ursini (2005), para esclarecer la diferencia entre los tres usos diferentes de las variables y las implicaciones de sus usos.

Objetivo

Cuando un aprendizaje es comprendido verdaderamente y tiene significado para los alumnos hay mayor probabilidad de que se pueda aplicar en un contexto variado para el beneficio del sujeto involucrado. Dicho proceso de comprensión genera competencias y habilidades que permiten el aprendizaje de conceptos cada vez más elaborados y de una visión global de los conocimientos, de sus posibles aplicaciones en distintas áreas y para distintos usos, no sólo en el ámbito escolar sino también en un contexto social cuyos beneficios se reflejan en la vida personal de los sujetos a mediano y largo plazo.

Considerando las hipótesis anteriores el objetivo de la presente propuesta fue el de analizar la manera en que influyó el trabajo con problemas de planteo dando importancia a los distintos usos de las variables en el aprendizaje significativo de los alumnos como medio de vinculación entre los saberes académicos y sus posibles aplicaciones en situaciones problemáticas cotidianas.

Vinculación entre lo académico y lo cotidiano

Schoenfeld (1992) considera que el éxito en la enseñanza de las matemáticas depende de cómo es percibida dicha materia. Menciona que el conocimiento matemático comúnmente es visto como un cuerpo de hechos y procedimientos que tratan con cantidades, magnitudes, formas y relaciones entre ellas, lo que implica que el aprendizaje de dicha área se enfoca en el dominio de estos hechos y procedimientos, lo que empobrece y trivializa las matemáticas.

Menciona:

> *Las Matemáticas son un sujeto viviente el cual busca entender patrones que permeen el mundo alrededor de nosotros y nuestra mente. A pesar de que el lenguaje de las Matemáticas está basado sobre reglas que deben de ser aprendidas, es importante para la motivación que los estudiantes vayan más allá de las reglas y sean capaces de expresar las*

> *cosas en el lenguaje de las matemáticas. Esta transformación sugiere cambios tanto en el contenido curricular como en el estilo de la enseñanza. Involucra un esfuerzo renovado para enfocarse sobre: la búsqueda de soluciones y no sólo la memorización de procedimientos; la exploración de patrones y no sólo la memorización de fórmulas y la formulación de conjeturas y no sólo en hacer ejercicios. (1992, p. 4)*

De acuerdo con Brousseau (2000) las matemáticas son un campo en el que se puede iniciar de manera temprana a los niños en la racionalidad inmersa en las relaciones sociales. Es decir, que dicho trabajo no se encasilla en la escuela sino que se relaciona con otros aspectos que son naturales en el desarrollo y desenvolvimiento de los seres humanos.

En esta situación, aunque nos enfocamos al contenido, su didáctica y la interacción que tienen los alumnos con estos aspectos, sabemos que existen otros factores que influyen en su desarrollo de manera que pueden beneficiar u obstaculizar el proceso de aprendizaje. Las relaciones que se crean entre los contenidos, los profesores, los métodos de enseñanza, etc., son algunos de esos factores mencionados anteriormente y que Brousseau (2000) ha estudiado ampliamente con su Teoría de las Situaciones Didácticas.

Tomando en cuenta esto se han propuesto actividades, principalmente contextos algebraicos que permitan diversos usos de las variables con el fin de que los alumnos, al buscar su resolución, se aproximaran a los distintos significados que tienen las variables, las distintas áreas y maneras en que se pueden utilizar, etcétera.

Estos significados de las variables corresponden al modelo propuesto por Ursini y sus colaboradores (Ursini et al., 2005) en el cual se plantea que las variables, como símbolos que representan números que no tienen un valor predeterminado, no tienen un uso único y, por tanto, su significado varía de una situación a otra produciendo, incluso, confusiones en el individuo.

Los tres usos propuestos son:

- La variable como incógnita específica, que es cuando no se conoce el valor de la variable porque, precisamente, se está buscando un valor (o valores) para ella que satisfaga una situación en particular.

- La variable como número general, que es cuando la variable hace referencia a un número que puede tomar muchos valores porque, precisamente, se refiere a una propiedad, una expresión abierta, una tautología, una fórmula o a una ecuación general.
- Las variables en una relación funcional, que es cuando se tiene la situación donde el valor de una variable depende de la otra (u otras) siendo que no se busca el valor desconocido de una de ellas, sino la obtención de aquélla a partir de ésta última.

La confusión entre sus distintos usos puede aumentar porque en un solo ejercicio, problema, ejemplo o situación pueden aparecer los tres usos sobre las mismas variables. Por ejemplo, cuando se trabajan las ecuaciones de segundo grado, donde se hace referencia a la búsqueda de los valores de la incógnita (x), pero también se tiene que usar la relación funcional (con el método gráfico) y cuando se deduce la fórmula general conviven prácticamente los dos primeros, si no es que los tres. Es por ello que vale la pena explicitar estos usos y hacerse consciente de su existencia.

Este modelo se consideró apropiado para este trabajo de investigación ya que concibe de manera integral el álgebra, además de que no se olvida de la importancia que tiene el aspecto de la comunicación de los saberes, es decir, que no sólo se enfoca en la manipulación de símbolos sino que también se preocupa por la habilidades que se generan en los alumnos al ser capaces de verbalizar sus conocimientos.

Resultados

Teniendo en cuenta la dinámica de trabajo que se llevó a cabo y las ideas y concepciones bajo las cuales surgió el interés por realizar este proyecto, para el análisis de los datos obtenidos se consideraron algunos aspectos del Enfoque Ontosemiótico desarrollado por Godino (2008).

Dicho enfoque pretende ser una herramienta de análisis de los procesos de enseñanza – aprendizaje que permite describir, explicar y valorar los procesos. A través del uso de herramientas de análisis se pretende dar paso a una didáctica descriptiva y explicativa con el fin de comprender lo que ha sucedido durante el proceso de aprendizaje, si es que se llevó a cabo alguna

actividad, o para comprender lo que podría pasar y los conflictos que se podrían presentar antes de la aplicación de cierta idea de trabajo.

Por tal motivo se escogió como metodología una de rasgos naturalistas, es decir, observar los fenómenos en un ambiente lo más natural posible, considerando una visión holística y sistémica que, si bien puede complicar los análisis por las variables que intervienen, permite explicar las formas en que los individuos comprenden, narran, actúan y manejan sus situaciones cotidianas y particulares. Esta observación se basó en tres partes principalmente: el avance que se logro en los rubros de contenidos conceptuales, contenidos procedimentales y contenidos actitudinales que se persiguieron en las distintas actividades planteadas.

En cuanto a los contenidos procedimentales se consiguió que algunos alumnos fueran capaces de ver distintas posibilidades para resolver un problema. Fueron capaces de ver más allá del velo que tenían al pensar que las matemáticas no admiten distintas formas de solución y que sus métodos son estáticos. Conforme se desarrollaban las diferentes actividades se logró mayor disposición a experimentar a través del ensayo y error algunas posibilidades que les pudieran ayudar en la superación de los obstáculos en su proceso de aprendizaje.

Vale la pena mencionar que algunos de ellos se dieron cuenta de que la solución de problemas de manera intuitiva si bien es una acción natural, en muchas ocasiones, no es la mejor ruta a seguir ya que los resultados que se obtienen pueden no ser los más óptimos y como resultado de ello, el buscar algún otro método de solución o de análisis puede coadyuvar a encontrar alternativas con mayores beneficios.

En cuanto a los resultados relacionados con el uso de las variables se observó de manera general una mejoría en la identificación de su uso en distintos casos, permitiendo mejorar su desempeño en la solución de las actividades pero de manera más importante, permitió que encontraran el sentido de hacer ciertas acciones, operaciones, deducciones, etc. de manera que los conceptos fueran realmente aprehendidos.

Al verse involucrados en el proceso de desarrollo de su aprendizaje, los alumnos se percataron de la relación que existe entre las matemáticas y su vida cotidiana al poder hacer una modelación de situaciones reales y en las distintas habilidades que se desarrollan al trabajar con estos temas, que

si bien no son puramente matemáticas, podrían ayudan en el mejoramiento de su calidad de vida y la toma de ciertas decisiones.

En el aspecto actitudinal se observó un incremento en la perseverancia, motivación y autoestima, así como la capacidad de anticipar o predecir algunos fenómenos debido al hecho de descubrir su capacidad en la solución de los problemas. Dichos beneficios son reconocidos por Schoenfeld (1992), mencionados anteriormente, al lograr que las Matemáticas sean vistas como un sujeto viviente relacionado con el mundo.

Como se ha mencionado previamente, por la naturaleza de los rubros a evaluar, los resultados se han obtenido por la continua observación del trabajo de los sujetos de estudio, el registro de las actividades realizadas y por comentarios y entrevistas que se realizaron a lo largo del desarrollo de dicha propuesta.

Aunque los intentos por buscar e implementar alternativas que mejoren la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje son reales, muchas veces los esfuerzos por relacionar la teoría con la práctica con la finalidad de que en un futuro los alumnos se desarrollen plenamente, son abandonados o en ocasiones relegados por otros proyectos ya que los resultados, la mayoría de las ocasiones, son observables después de largos períodos de tiempo. Esto no quiere decir que las actividades realizadas no tengan impacto o utilidad sino que la mayoría de los beneficios son a largo plazo.

La propuesta presentada sigue siendo implementada con el fin de buscar los conflictos a los que se pueden enfrentar los alumnos, las distintas formas en que las situaciones problemáticas ayudan en el desarrollo de los alumnos, las habilidades que se van generando en el camino y las formas en que las actividades se pueden enriquecer para ir mejorando cada vez más el pleno desenvolvimiento de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G.(2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática, 12(1),* 5 – 38.

Coll, C., & Solé, I. (1989). Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. *Cuadernos de Pedagogía , 168*, 16-20.

Godino, J. D., Font V. & Wilhelmi M. R.(2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38*, 25 – 49.

Perkins, D. (1993). Teaching for understanding. *American Educator , 17* (3), 28-35.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically*. http://www-gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_MathThinking.pdf.

Ursini L., S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros G., M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental.* México: Editorial Trillas.

INTRODUCCION AL CÁLCULO MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Johan Espinoza González, Marianela Zumbado Castro
Universidad Nacional de Costa Rica, Liceo Nocturno Alfredo González Flores Costa Rica
johanespi@hotmail.com, mzumbad2@gmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Medio

Resumen. *Esta investigación presenta la puesta en práctica de una propuesta pedagógica para apoyar la enseñanza del Cálculo mediante la resolución de problemas a nivel preuniversitario en Costa Rica. El proyecto tiene su origen en las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de conceptos básicos de Cálculo, específicamente el de límite y derivada.*

Esta experiencia se fundamentó en la elaboración de una "situación problema" que provocó un conflicto intelectual en los estudiantes, mientras que el docente fungió como mediador y aprovechó los descubrimientos hechos por los estudiantes para fundamentar teóricamente los diferentes conceptos luego de la aplicación de la propuesta. Los resultados obtenidos son muy positivos y justifican la necesidad de un cambio en las estrategias metodologías utilizadas para enseñar el Cálculo. Sin embargo, es necesario un acercamiento de los docentes hacia la teoría de Resolución de problemas para aplicar con éxito este tipo de actividades.

Palabras claves: Resolución de problemas, cálculo diferencial, limite, derivada

Introducción

El Cálculo diferencial e integral es uno de las primeras materias que cursan los estudiantes de ingeniería y otras carreras cuando ingresan a la universidad. Esta asignatura es básica y es el preámbulo a otras materias específicas de la carrera donde requieren aplicar los conceptos adquiridos en esta área de la matemática.

El problema radica cuando los estudiantes al finalizar el curso de Cálculo afirman comprender las principales herramientas del cálculo, e incluso pueden calcular un límite o la derivada de una función, pero no saben contestar cuando se les pregunta qué es un límite o una derivada. Al respecto Artigue (1991) menciona que luego de que los estudiantes aprueban un curso de Cálculo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo, tienen dificultades en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite y la noción de derivada.

En cuanto a su enseñanza, se ha caracterizado en su mayoría por la aplicación de estrategias de corte magistral, donde el docente explica los contenidos al inicio, resuelve algunos ejercicios

aplicando los teoremas vistos en clase y al final de la misma propone ejemplos similares para que sean resueltos por los estudiantes.

Ante esto, nos propusimos diseñar una actividad diferente a la clase tradicional, que esté más acorde con la naturaleza misma de cómo nacen los conceptos matemáticos, que logre centrar el aprendizaje en el estudiante y lo involucre de una forma más activa dentro del proceso de aprendizaje.

Esta actividad debería permitir a los estudiantes construir formas de pensamiento que relacionen los conceptos matemáticos aprendidos y la aplicación de estos a la vida real.

Tomando en cuenta lo citado anteriormente, el motivo principal de esta investigación fue desarrollar una propuesta pedagógica para la enseñanza del Cálculo, específicamente los conceptos de límite y derivada, basada en la teoría de resolución de problemas planteadas por Pólya (1965), Shoenfield (1985) y Brousseau (1986), entre otros.

La actividad fue aplicada en un colegio público de Costa Rica ubicado en una zona rural. Se escogió esta estrategia porque genera en los jóvenes conocimientos más significativos y propicia en el aula un ambiente de mayor discusión académica. (Espinoza, Espinoza, González, Zumbado y Ramírez; 2008)

Fundamento Teórico

La resolución de problemas se ha convertido en los últimos años en una importante contribución a la Educación Matemática en muchas partes del mundo. Puede considerarse como pionera la obra de Pólya escrita en los años 40 del siglo XX, luego en los años 70 y 80 se realizaron más investigaciones en este campo, destacándose los trabajos de Kilpatrick, Lester, Goulding, Glasier, Schoenfeld y otros.

Lo más importante en la enseñanza de temas matemáticos a través de la resolución de problemas, es que éstos sean contextualizados y orientados. Además, debe caracterizarse porque el profesor ayude al estudiante a construir un profundo entendimiento de las ideas matemáticas y procesos, para que los estudiantes se ocupen de hacer matemáticas, esto es, crear, conjeturar, explorar, evaluar y verificar (Espinoza et al, 2008).

En esta investigación se plantea la resolución de problemas como el medio para hacer matemática, donde los problemas no se ven solamente como una práctica o simplemente como un adorno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, sino que constituyen los medular en el proceso, será lo que permitirá al estudiante construir sus conocimientos matemáticos, Stanic & Kilpatrick (1989) citado en (Barrantes, 2008)

De esta forma la resolución de problemas es una estrategia metodológica que plantea un nuevo paradigma en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que dista mucho del modelo tradicional.

Sin embargo, existen concepciones erróneas sobre lo que significa resolver un problema matemático. La mayor parte de las veces los alumnos piensan que es equivalente a resolver ejercicios rutinarios discutidos en clase, reproduciendo los algoritmos y explicaciones dadas por el profesor (Espinoza et al, 2008). Resolver un problema implica otro tipo de actividad mental de mayor exigencia, que debe estar orientada hacia una mayor participación del alumno en la búsqueda de la solución.

Para Brousseau (1986), un problema es una situación que el profesor propone al alumno para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, por lo que dicha situación se plantea al inicio de la lección y es precisamente la solución a este problema el conocimiento que el docente quiere enseñar a los estudiantes. Sin embargo, estos no saben que van a aprender un concepto nuevo.

El trabajo del docente es de suma importancia en este tipo de metodología, pues toma un rol de guía mediador durante la solución del problema. Según Brousseau (1986), debe promover en su lección algo semejante a una microsociedad científica donde se construyan los conocimientos mediante las situaciones problemas planteadas para este fin.

Por esto es importante que el docente elabore problemas interesantes y adecuados a los conocimientos de los estudiantes, que le permitan desarrollar aptitudes y facultades inventivas, que no quiten la responsabilidad que debe sentir por resolverlo y disfrutar la satisfacción que genera el encontrar, por sus propios medios, la solución. Además, el problema no debe tener una solución inmediata, sino que debe hacer pensar al estudiante ya que “un problema es conceptualizado como una situación que nos hace pensar, así de simple” (Mancera, 2000, p16).

Encontrar la solución requerirá poner en juego todas nuestras capacidades y conocimientos; pero podemos hacer algo para resolverlo.

También debe tomar en cuenta que la situación problema debe estar inmersa en un contexto conocido para el estudiante y poseer una problemática a resolver. Esto conlleva ir más allá de resolver un ejercicio rutinario, es responder a la pregunta para qué y por qué resolver el problema.

Metodología

El primer trabajo realizado fue el de estudiar matemáticamente los conceptos incluidos en la propuesta, así como el nivel de complejidad que se debía alcanzar según el programa del curso. En esta fase fue necesario realizar una investigación histórica del Cálculo, así como de los conceptos a enseñar, para tener un marco referencial de cómo los matemáticos de la época construyeron dichos conceptos y así poder elaborar un problema que modelara de forma semejante dicha situación.

Luego de plantear los objetivos que se pretendían alcanzar con la actividad, se procedió a la elaboración de la situación problema, la cual fue revisada y mejorada varias veces con el fin de aplicar aquella que se ajustara más al marco teórico propuesto. Además se previeron y organizaron en etapas aquellos procedimientos, que consideramos, los estudiantes podían utilizar como posibles soluciones al problema

La propuesta didáctica se aplicó a un grupo de 20 estudiantes de un colegio rural al sur de Costa Rica llamado “Colegio Científico de Costa Rica, Sede Universidad Nacional” que propone en uno de sus cursos la enseñanza del Cálculo a estudiantes entre 16 y 18 años. La actividad tuvo una duración de tres sesiones de 2 horas cada una.

Este grupo se eligió porque uno de los investigadores era su profesor de matemática y éste ya se encontraba concientizado sobre la teoría de resolución de problemas.

La información se recolectó mediante la observación participante. Para ello se elaboró una guía de observación subdividida en categorías de análisis relacionadas con la participación de los estudiantes durante la actividad, la motivación y persistencia que mostraron mientras resolvían el

problema, el papel del docente, el ambiente en el salón de clases, los procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver el problema y el proceso de institucionalización del saber.

También se recolectó información de un portafolio que los estudiantes diseñaron y que contenía todos los procedimientos correctos o incorrectos que utilizaron para resolver el problema, las ideas aportadas por los compañeros del subgrupo y las decisiones tomadas, así como una reflexión del trabajo realizado en cada sesión.

Resultados

Uno de los principales resultados de esta investigación fue elaborar un problema con las características de un verdadero problema matemático, pues según el marco teórico expuesto no debería tener una solución inmediata, debía hacer pensar al estudiante y además estar contextualizado e inmerso en una problemática.

La situación problema presentaba a los estudiantes un escenario hipotético donde él, junto con su familia, se dirigían de paseo por una carretera muy conocida en la zona, pero que a cierta distancia de un punto los detuvo un oficial de tránsito y les dijo que según el radar para medir la velocidad viajaban a exceso de velocidad. Debido a que el padre del estudiante siempre conducía de forma prudente, pero el día anterior se había dañado el tacómetro, no sabía si la versión dada por el oficial era cierta. Ante esto, se le propone al estudiante justificar con argumentos válidos al oficial de tránsito, que el vehículo no había sobrepasado el límite de velocidad permitido y que por tanto no merecían ningún tipo de multa.

Para resolver el problema los estudiantes se organizaron en subgrupos de 4 personas. Estos discutieron a lo interno del subgrupo para comprender la problemática a resolver. Al inicio se observó alguna resistencia a iniciar el trabajo, algunos estudiantes hicieron comentarios como “no sé cómo empezar”. En este momento fue muy importante la intervención del profesor para motivar a los estudiantes a continuar con la solución del problema, ya que el docente es el encargado de generar situaciones que puedan mantener al alumno interesado y provocar un envejecimiento positivo de las situaciones (Chevallard, 1991).

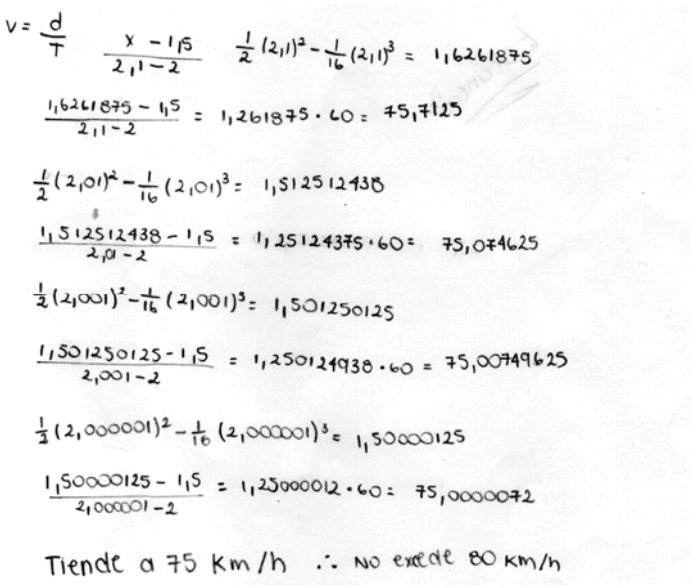
Esta resistencia se dio posiblemente porque los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de actividades; sin embargo, como avanzó la actividad se sentían más comprometidos y motivados a resolver el problema.

Después de comprender la problemática, discutieron a lo interno del subgrupo para establecer una estrategia que les permitiera resolver el problema. En esta fase identificaron que tenían que calcular la velocidad en que viajaba el vehículo en el instante en el que el oficial había tomado la medición de la velocidad.

En la redacción del problema se le indicó a los estudiantes que estudios previos mostraban, que la distancia recorrida desde un punto determinado hasta 4 km al sur (de dicho punto) estaba dado por la relación $s(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad \frac{1}{16}t^2, \quad 0 \leq t \leq 4$. Con esta información determinaron que el oficial de tránsito había tomado la medición 2 minutos después de dicho punto.

En primera instancia determinaron la velocidad media desde el minuto cero al minuto 2; sin embargo, después de analizar la respuesta obtenida y las condiciones del problema, se dieron cuenta que dicha respuesta no era la velocidad con la que viajaban en el momento que el oficial tomó la medición de la velocidad. Luego de analizar las nuevas estrategias que aportaban los compañeros del subgrupo, decidieron calcular la velocidad del vehículo como una razón de cambio entre la distancia y el tiempo, pero en un lapso muy pequeño de tiempo. Al respecto uno de los estudiantes anotó en su portafolio *"al principio pensamos en hacer lapsos de tiempo, pero los que hicimos eran muy grandes, así que lo hicimos con lapsos de 2 segundos y de menos, así la velocidad media nos dio 75 km/h".*

A continuación se presenta la solución dada por uno de los subgrupos de trabajo, donde se observa los cálculos realizados del tiempo, la distancia y por último la velocidad aproximada del vehículo en el instante 2 minutos.



Luego de que los subgrupos resolvieron el problema, el profesor realizó la institucionalización de los conceptos matemáticos empleados por los estudiantes. Para ello se tomó una sesión de 2 horas y se definió teóricamente los conceptos de límite y derivada y se contrastó con las nociones que tenían los estudiantes producto del proceso de solución del problema.

Se debe destacar que los estudiantes tuvieron un gran protagonismo en esta última fase de la clase, ya que relacionaban lo expuesto por el profesor con la experiencia vivida al momento de enfrentar las diferentes etapas para resolver el problema. Además, pusieron en práctica estos conceptos en otros ejercicios que se les aplicó.

Consideraciones finales

Según Brousseau (1986) el trabajo intelectual del estudiante es muy importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que éste no debe basarse solamente en aprender definiciones y teoremas para reconocer su aplicación a ciertos ejercicios. Además, menciona que debe descubrir los resultados por sí mismos, llevando a cabo procesos de formulación, comprobación y refutación para compartirlos con sus compañeros.

Es estimulante observar que el trabajo realizado por los estudiantes en esta actividad se asemejó en gran medida al planteamiento de Brousseau, pues ellos mismos construyeron el concepto de límite y derivada al resolver el problema. Además, las lecciones no se basaron únicamente en aplicar teoremas expuestos por el docente, para que luego los estudiantes determinaran el valor de un límite o una derivada.

De las reflexiones hechas por los estudiantes se extrae que estos se sintieron cómodos con la experiencia de resolver el problema, ya que hicieron anotaciones como *"me sentí motivado porque la actividad era diferente" "trabajar en grupos es más bonito, porque todos aportan ideas", "con este tipo de actividades se comparte más con los compañeros".*

La actividad realizada también dejó ver la motivación y persistencia de los estudiantes para resolver el problema. Aunque al inicio se notó frustración en los estudiantes porque el problema les pareció difícil y no vieron una solución inmediata, al finalizar manifestaron que cuando lo resolvieron quedaron satisfechos porque el esfuerzo que pusieron valió la pena.

En cuanto al papel del docente, los estudiantes manifestaron que este no debe decir la respuesta al problema, sino que ellos tienen que resolverlo con la ayuda del profesor. En este tipo de metodología es importante que el docente se encuentre concientizado sobre los aspectos teóricos de la propuesta, pues no debe dar respuestas a las preguntas planteadas por los estudiantes sino que debe generar discusión a través de buenas preguntas. Según Espinoza et al (2008), las intervenciones que éste hace deben reorientar al estudiante en la solución del mismo.

En síntesis, este tipo de metodologías produce que los estudiantes construyan el conocimiento, despertando el interés, la motivación y la responsabilidad por resolver el problema. Además, propicia una mayor participación académica del estudiante, desarrolla habilidades de comprensión, análisis, trabajo en equipo, actitud de diálogo, toma de decisiones y la convivencia, así como la aplicación de conocimientos al mundo real. Los estudiantes encuentran en esta actividad una forma interesante y diferente a la tradicional de ver los conceptos matemáticos y la manera en que estos son utilizados y reviven de alguna manera la construcción del saber como lo hicieron los matemáticos de la antigüedad.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167- 198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barrantes, H. (2008). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media Costarricense. *En Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 4, 191 – 213.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2)*, 33-115.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M. y Ramírez, C. (2008) *La resolución de problemas en la Enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y Estadística*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de Costa Rica.

Mancera, E. (2000). *Saber Matemáticas es saber resolver problemas.* México D.F: Grupo Editorial Iberoamericana

Pólya, G. (1965) .*Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem Solving.* Orlando: Academics Press

ESTRATEGIA DIDÁCTICA SUSTENTADA EN UN MODELO COMUNICATIVO PARA FAVORECER LA ARGUMENTACIÓN DE IDEAS EN EL LENGUAJE MATEMÁTICO

Mirtha González Fernández, Nancy Montes de Oca Recio
Universidad APEC República Dominicana
Universidad Camagüey Cuba
nancy.montes@reduc.edu.cu, nancymdeoca2002@yahoo.es, m.gonzalez@unibe.edu.do
Campo de investigación: Pensamiento lógico, lenguaje matemático Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo, tuvo como objetivo diseñar una estrategia didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la habilidad argumentar en el lenguaje de la matemática en los estudiantes de octavo grado del Nivel Básico, se sustenta en un modelo comunicativo que se explica a partir de tres subsistemas que permiten develar las relaciones que se dan en el proceso de formación y desarrollo de la habilidad en el contexto del proceso docente educativo de la matemática donde se toma la habilidad argumentar en el lenguaje de la matemática como núcleo integrador del lenguaje matemático y el lenguaje común, capaz de provocar el efecto sinérgico entre ellos. Se realiza la ejemplificación, valoración a través del método de expertos y constatación empírica a través de un pre-experimento pedagógico de la estrategia didáctica*
Palabras clave: Argumentación, lenguaje matemático, pensamiento lógico

Desarrollo

En el presente siglo la educación en general evoluciona y se transforma en función de las necesidades de la sociedad actual que requiere de un desarrollo de las capacidades individuales y de la flexibilidad mental necesaria para enfrentarse e integrarse de manera reflexiva, crítica y autónoma a ella. Relevante importancia se le concede al aprendizaje de las ciencias y en particular de la Matemática, ya que su estudio favorece desde los primeros grados en forma decisiva a promover una cultura científica y desarrollar la personalidad individual y social.

En la actualidad cada vez más se reconoce la importancia de la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar, entre otras razones porque posibilita: expresar ideas para que los demás comprendan, escuchar activamente para comprender las ideas expresadas por otros, pasar de expresiones informales en lenguaje común hasta el lenguaje matemático específico; establecer relaciones entre las distintas formas de representación usadas en Matemática; comprender la necesidad de usar un vocabulario preciso, y compartir definiciones para evitar las ambigüedades que existen en el lenguaje común, entre otros.

En la didáctica de la Matemática actual, se ha focalizado la atención hacia modos de aprendizaje en colaboración, al papel de la discusión en la clase de matemáticas y en consecuencia reconocer

el carácter social de su aprendizaje, siendo la comunicación en la educación matemática una de las alternativas, contrapuesta a la enseñanza tradicional, que se caracteriza por las formas de presentar y apropiarse del contenido matemático sobre la base de la interacción entre docentes y estudiantes.

En la actualidad se reconocen como elementos esenciales de la competencia matemática la capacidad de los estudiantes para interpretar datos; establecer relaciones y conexiones; poner en juego conceptos matemáticos; analizar regularidades; establecer patrones de cambio; encontrar, elaborar, diseñar y/o construir modelos; argumentar; justificar; comunicar procedimientos y resultados.

En este sentido, los procesos como la argumentación, la explicación, entre otros, son procesos de la educación matemática que favorecen la dinámica de la clase. En lo específico de la argumentación diversos autores (Silvestre, 1999) destacan la importancia que tiene la misma como medio para desarrollar el pensamiento y la expresión correcta de las ideas, también es reconocido su valor desde lo específico de la matemática como un instrumento privilegiado de prueba, permitiendo establecer un vínculo entre esta y la comunicación (D'Amore, 2002, Duval, 1999, Montes de Oca, 2002, Balacheft, 1982, León y Calderón, 2003, Plantin, 2004).

Los resultados y experiencias adquiridas en la implementación en la práctica pedagógica de estas investigaciones engendran nuevas necesidades y crean condiciones propicias para continuar perfeccionando el proceso de docente-educativo de la matemática escolar con un enfoque comunicativo.

A partir de lo argumentado, se concibió una investigación que tuvo como objetivo: Diseñar una estrategia didáctica que favorezca la formación y desarrollo de la habilidad argumentar en matemática desde el proceso de docente-educativo de esta asignatura en los estudiantes de octavo grado.

Una argumentación, en general, es una interacción discursiva emprendida con diversos propósitos cuyo denominador común suele ser, en principio, la intención de persuadir o de convencer a alguien de algo y, en la práctica, la intención de ganar su asentimiento o su adhesión a la causa argumentada. El concepto de argumentación ha tenido una evolución desde la antigüedad hasta nuestros días, sus definiciones dependen de la teoría desde la cual se aborde su estudio.

En la actualidad se reconocen varios enfoques que prevalecen en el campo de la argumentación en sentido general, entre ellos se destacan: el examen de las estructuras argumentativas (Toulmin,1977), este rompe con el modo de enfoque logicista de la argumentación al centrar su atención no sólo sobre sistemas formalizados de enunciados, sino sobre la realidad argumentativa, para él una argumentación es la exposición de una tesis controvertida, el examen de sus consecuencias, el intercambio de pruebas y buenas razones que la sostienen, y una clausura bien o mal establecida.

El modelo dialogal de la argumentación (Plantin, 2004) propone una definición de la argumentación como un modo de organización de la palabra en situaciones en las cuales tropieza con una contradicción. Este modelo sustenta el estudio de la argumentación en el estudio del lenguaje, de la interacción y del dialogismo, y lo distingue claramente de las investigaciones en epistemología o en metodología científica, y no la confunde con las teorías o la filosofía de la prueba, de la demostración, de la explicación o de la justificación en matemáticas o en las ciencias.

De manera general desde los diversos enfoques o modelos, argumentar consiste en formular razones para sustentar una afirmación o una opinión del sujeto comunicante para convencer a un sujeto interpretante. La argumentación es a la vez razonamiento, inferencia, pero posee un matiz adicional y característico: está destinado a convencer a cambiar las ideas de uno o varios interlocutores.

De modo que la argumentación puede concebirse como un instrumento proporcionado por una cultura para desempeñar funciones tanto comunicativas como cognitivas específicas en los ámbitos socioculturales concretos que las demanden. Lo hasta aquí expresado señala por qué fue tomado el concepto argumentar (sus invariantes) desde su concepción más general como habilidad comunicativa pero ella se contextualizó al campo de la Matemática. Esto de hecho presupone la redefinición y reelaboración teórica de varios conceptos relacionados con la temática, lo que en cierta medida particulariza el estudio llevado a cabo.

Concepción teórica para dirigir el proceso de formación y desarrollo de la habilidad argumentar en matemática.

En la actualidad no existe consenso en la comunidad científica acerca de los aspectos a tener en cuenta para formar y desarrollar en los estudiantes la habilidad argumentar en matemática. Ello no ha sido suficientemente tratado con un enfoque sistémico en el proceso docente-educativo de esta asignatura.

La concepción teórica que se presenta tiene como fundamentos epistemológicos la concepción de la argumentación en Matemática (Balacheft, 1982), que se sustenta en el carácter productivo y esencial de la interacción social y en el papel del docente como garante de la legitimidad y de la validez de las argumentaciones que se construyen en el aula, la concepción acerca del significado de los objetos matemáticos desde un punto de vista pragmático y la matemática como un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problema y las soluciones encontradas donde los sistemas de símbolos matemáticos tienen una función comunicativa e instrumental (Godino, 2002) y la definición de argumentar en el lenguaje de la matemática como "forma de expresión, que permite aceptar o refutar una proposición matemática dada, el procedimiento o vía de solución empleada en la resolución de problema matemático o hacer explícito el proceso a través del cual se llegó a un resultado." (Montes de Oca, 2002, p. 79).

Teniendo en cuenta los referentes mencionados se precisó por parte de los autores que argumentar en matemática en el segundo ciclo del nivel básico es una forma de expresión que exige analizar las situaciones-problemas y significar en ellas lo esencial, formular, confrontar y validar los argumentos que permiten explicar los procedimientos y procesos utilizados para resolver el problema o situación de una manera coherente, pertinente y consensuada.

En la presente investigación se toma la habilidad argumentar en matemática como núcleo integrador del lenguaje matemático y el lenguaje común, capaz de provocar el efecto sinérgico entre ellos. Se explica cómo el proceso que sigue la argumentación en matemática se relaciona con el proceso de aprendizaje de esta ciencia en su sentido más amplio y con la potencialidad que todos los alumnos tienen para enfrentarse de manera reflexiva y crítica a los problemas matemáticos. Se sustenta que el proceso de formación y desarrollo de la habilidad argumentar en matemática constituye un sistema estructurado a través de los subsistemas: orientación hacia la

situación problema - argumentativa, concientización del proceso argumentativo en matemática y contextualización matemática-comunicativa.

Se reconoce por parte de las autores como idea fundamental que la argumentación en matemática es un proceso de diálogo y de consenso grupal, que atraviesa diferentes fases, que tiene su inicio a partir de la motivación que surge del enfrentamiento a situaciones o problemas, que se ha convenido en llamar situación problema – argumentativo, que a su vez pueden ser problemas vinculados con la materia enseñada o situaciones comunicativas o de conflicto que se dan en el aula como grupo humano.

Del estudio bibliográfico realizado (León y Calderón, 2001) se tomaron como fases del proceso de argumentación en matemática las siguientes: formulación de argumentos, confrontación de los argumentos y validación de los argumentos expresados. Se incorpora explícitamente por parte de los autores la significación del conocimiento matemático como fase esencial y primaria en el proceso argumentativo, lo que destaca explícitamente la importancia del conocimiento matemático en la argumentación. Cada fase mencionada, una vez lograda en el estudiante conforman en términos operacionales, habilidades para: significar el conocimiento matemático, formular, confrontar y validar enunciados matemáticos y extramatemáticos, las cuales de manera integrada componen la estructura de la habilidad argumentar en matemática y no difieren esencialmente de los procesos requeridos para aprender matemática.

Estas fases ocurren en un plano interno, es decir, en el sujeto, pero mediados por factores externos que son los que en el proceso docente educativo deben garantizarse. Las fases se relacionan entre si, pero poseen cualidades particulares y manifiestan dentro del sistema funciones diferenciadas, las que determinan su propia identidad cuando se dan las condiciones que lo promuevan. Esas condiciones son, las que en esta investigación se ofrecen a través del estudio de cada subsistema y la dinámica de este proceso.

En estas fases se han declarado los componentes funcionales:

- Análisis de la situación problema-argumentativo e identificación de los contenidos matemáticos asociados a la situación problema-argumentativo.
- Reconocimiento y autovaloración personal de los conocimientos y recursos estratégicos diversos que deben garantizar la comprensión de la situación problema-argumentativo.

- Reconocimiento de las diferencias de representación: tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación semiótica usado en la situación problema-argumentativo.
- Conversión de la representación de un objeto matemático de un sistema semiótico a otro sistema, en caso necesario y búsqueda de significados de los objetos matemáticos que intervienen en la situación.
- Elaborar conjeturas asociados a la situación problema-argumentativo.
- Analizar si se cumplen las condiciones de veracidad en el caso concreto de la situación problema-argumentativo.
- Establecer grosso modo la secuencia de argumentaciones encontradas para la situación problema-argumentativo.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.

Lo anterior se resume en el trabajo por el logro de la concienciación de las condiciones personales expresadas en el uso de la planificación y evaluación de los procesos que caracterizan el control y autorregulación de la actividad para otorgar significado a los conceptos que aparecen en la situación problema a argumentar, de las estrategias personales de argumentación, el razonamiento matemático y la situación problema – argumentativo para la cual es requerida la formulación de argumentos.

Todo acto comunicativo transcurre en el marco de un contexto y está determinado por él. El contexto es la reconstrucción teórica de una serie de rasgos de una situación comunicativa.

Es por ello entonces que se alude al contexto matemático-comunicativo, entendiéndose este como los diferentes acontecimientos que se suceden en una clase de matemática o fuera de ella y que se caracterizan por los intercambios entre los participantes y por las intervenciones de cada sujeto utilizando el lenguaje matemático.

La argumentación puede ser dialogada o monologada, pero tiene como regularidad el hecho de que casi siempre posee un carácter situacional, esta es orientada y motivada. Estos aspectos determinan la importancia de concebir tipos de situaciones que el profesor, las mismas son un escenario modelado, que tienen en cuenta las relaciones temporales-espaciales en circunstancias y condiciones preestablecidas (contexto).

A partir de lo cual se consideran las situaciones matemáticas-comunicativas como:

Un conjunto de relaciones establecidas implícita y/o explícitamente entre un estudiante, dos estudiantes o un grupo de estudiantes, el contenido matemático y el docente con la finalidad de lograr apropiarse del conocimiento matemático sobre la base de esas relaciones.

Las situaciones mencionadas conforman contextos, los cuales se generan con cada acción de los participantes durante la clase de matemática. Las propias características personales del docente y los alumnos, vienen ya condicionadas por contextos externos a la situación matemática-comunicativa que se presente. Los contextos socioculturales, el propio sistema educativo y el contexto institucional, determinan el tipo de relación comunicativa a fomentar entre el educador y el educando, sin ignorar sus características y condiciones particulares.

En la investigación se conciben una tipología de situaciones matemático-comunicativas en virtud de los objetivos propuestos, estas son: de sensibilización, de significación, de acción y/o confrontación y de validación (M. González, 2009).

Todas las situaciones son de relación interpersonal y grupal, las mismas están presentes en el intercambio comunicativo y son la resultante de la necesidad de comunicación que se gestiona en el aula, y de los diversos roles, reglas e interacciones que se generan y que caracterizan los vínculos entre el docente y los alumnos y de los alumnos entre sí.

Una cuestión importante en la comprensión de la tipología de situaciones es el criterio por el cual se identifica una situación particular como de uno u otro tipo. Para ello, hay que tener presente que una situación es de sensibilización cuando busca esencialmente la motivación del estudiante,; de significación cuando se orienta a la comprensión del lenguaje matemático; de acción cuando lo que requiere de los estudiantes es que pongan en juego medios procedimentales o heurísticos para la resolución de ejercicios o problemas; las situaciones de formulación se identifican por la necesidad que posee la formulación de un mensaje; las situaciones de validación requieren necesariamente no sólo la formulación, sino también la validación de juicios por parte de los estudiantes.

Consideraciones metodológicas

- La argumentación es esencialmente dinamizadora del aprendizaje matemático, dado el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática.
- Cambio esencial en la concepción y formulación de la tarea docente por situaciones matemáticas-comunicativas que deben conducir a la formulación de conjeturas, búsqueda de información, producción de argumentos para asumir y defender posiciones, llegar a conclusiones y reflexionar acerca de las mismas.
- La ejecución de las situaciones matemáticas-comunicativas precisará la realización de acciones individuales y colectivas que combinan la reflexión y esfuerzo mental de cada estudiante, con la interacción estudiante- estudiante, estudiante- docente, estudiante-grupo, donde se produzca la comunicación matemática.
- Mediante el diálogo en diversas situaciones matemático-comunicativas y contextos pueden los alumnos llegar a comprender el significado de los conceptos matemáticos.
- El trabajo del profesor debe estar encaminado a una práctica dirigida, consciente y sistemática de esta forma de expresión oral, para lo cual resulta indispensable orientar al alumno a: ordenar adecuadamente las ideas, emplear acertadamente el vocabulario, los términos y símbolos matemáticos, manifestar las ideas con seguridad y en forma concreta, formular conjeturas y expresar argumentos suficientes.
- Propiciar la discusión para tratar de buscar una posición que logre conciliar los puntos de vista o criterios que se sustenten. En ocasiones puede apreciarse en la discusión una débil argumentación que deja traslucir insuficiencias en el contenido matemático, en la estructuración de la expresión o en ambas lo que permite valorar el estado del conocimiento que acerca del tema tienen los participantes.

El trabajo conjunto favorece el desarrollo de habilidades como son: la toma de decisiones argumentadas, el auto control y autovaloración del proceso y su resultado. Además permite enseñar al alumno a expresar sus ideas de modo que puedan ser comprendidas por los demás y escucharlas ideas de otros para lograr su comprensión. Estas formas de trabajo educan al alumno en el reconocimiento del otro, en el respeto mutuo y en la tolerancia de desacuerdos.

El diálogo es la forma más natural de la comunicación humana, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática la conversación se guía hacia los aspectos fundamentales que se desean abordar, es decir, tiene una intención según el objetivo de enseñanza-aprendizaje, constituyendo un instrumento valioso para la obtención del conocimiento.

Es necesario romper con una enseñanza de la matemática tradicional, centrada en el maestro y en los contenidos, para pasar a realizar un tratamiento interactivo en todos los niveles de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Balacheft, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 3, nº 3

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique de Mathématiques,* Vol. 9, N° 3.

D'Amore, B. (2002). *Artículos sobre la investigación en Didáctica de la Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, *Revista de Educación* 338, 309-346

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3).

González, M. (2009). *Estrategia didáctica para favorecer la argumentación matemática en el segundo ciclo del nivel básico.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de estudio de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. Camagüey. Cuba.

León, O y Calderón, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas. ¿Una relación necesaria? "Hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas".* Bogotá: Colciencias.

Montes de Oca, N. (2002) *La argumentación en el lenguaje de la Matemática. Su contextualización en la asignatura Geometría I de la Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Computación.* Tesis de doctorado no publicada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana.

Plantin, C. 2004, *La argumentación.* (Traducción de la edición francesa L'Argumentation. Paris, Seuil, 1996) Barcelona: Ariel Parcticum

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Silvestre, M. (1999) *Aprendizaje, educación y desarrollo.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana. El uso colectivo y la evolución de los conceptos.* Madrid. Alianza.

Vygotski, L. S (1966). *Pensamiento y Lenguaje.* Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación

CUBRIENDO BACHES

Ana Lasserre, Josefina Royo, Celia Torres Bugeau, Edna Agostini
Universidad Nacional de Jujuy Argentina
perassi@educ.ar ; josefina.royo@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento lógico Nivel: Superior

Resumen. *Ratificadas las conclusiones del diagnóstico realizado por este equipo en años anteriores (Proyecto de Investigación "Habilidades lógicas presentes en los ingresantes a la Enseñanza Superior"), surge la necesidad de proponer un sistema de acciones y estrategias que permita superar las carencias manifestadas por los ingresantes al Nivel Superior, en el área Matemática.*
A partir del estudio de la amplia bibliografía teórica sobre el tema y del relato de casos puestos en práctica en distintas instituciones, se construyeron y validaron una serie de actividades, realizadas por docentes de las Cátedras de Algebra de las instituciones donde este equipo se desempeña.
Se presentan ahora, algunas de las actividades realizadas y los primeros resultados de las mismas, así como una descripción del trabajo futuro.
Palabras clave: Competencias matemáticas, ingresantes, nivel superior

La investigación realizada por este equipo entre los años 1999 al 2001, demostró que en el paso del Nivel primario al Nivel secundario, los alumnos carecen de varias de las habilidades lógicas necesarias para un aprendizaje matemático posterior.

Se pudo comprobar, entonces, que niños de 13 años, edad adecuada al nivel estudiado:

- No tienen casi dificultades para clasificar según categorías dadas, aunque sí tienen dificultades para establecer categorías de clasificación. En jóvenes de mayor edad esas dificultades desaparecen.
- Tienen una gran dificultad en la reversibilidad de las operaciones así como en la interpretación de las consignas propuestas, sean orales o escritas.

Posteriormente se encaró, entre los años 2003 al 2005, el estudio sistemático de: "Las habilidades lógicas presentes en los alumnos que ingresan al nivel superior", ya que su carencia se hace sentir particularmente en este nivel donde la Matemática se aborda con criterio científico más riguroso produciendo, en consecuencia, altos porcentajes de fracaso y deserción. De alguna manera, los propios alumnos muestran que su ingreso a la enseñanza superior se hace en condiciones muy

desfavorables ya que, en una encuesta realizada por este equipo, ellos mismos indicaron que, respecto del Nivel Medio: su preparación es insuficiente, aún en contenidos básicos de Matemática; su aprendizaje ha sido elemental e incompleto (sobre todo en Geometría); su práctica se limitó a la repetición de ejercicios típicos; que no sabían trabajar en forma independiente ni usar bibliografía. Es que, como sostiene M. Otero (Otero et alt, 2001,pp 267-287), la formación de esas habilidades es un proceso complejo que requiere del trabajo coordinado de educadores y psicólogos y además una toma de conciencia sobre los obstáculos cognitivos y epistemológicos que impiden a un individuo apropiarse de un saber en un campo determinado.

El estudio citado permitió diagnosticar en los alumnos ingresantes a la Enseñanza Superior el nivel de adquisición de habilidades lógicas u operaciones mentales necesarias para el aprendizaje de la Matemática en ese nivel. Para hacer ese diagnóstico se precisaron previamente los significados de "pensamiento lógico" y de "habilidad" en general.

Para Piaget e Inhelder (Piaget et alt, 1977, pp 131-148) el niño no nace con la facultad de pensar lógicamente sino que el pensamiento lógico es la coronación del desarrollo psíquico, o sea el resultado de una construcción activa y comprometida con el exterior, que ocupa toda la infancia y la preadolescencia. Es decir que, el pensamiento lógico es una forma de adaptación psíquica al mundo exterior.

Sanz Cabrera (1969) sostiene que "En todo procedimiento lógico se destacan dos componentes, el propiamente lógico formado por el conjunto de acciones y reglas lógicas correspondientes al procedimiento y el componente especifico que corresponde al contenido concreto en el cual éste se aplica" (Sanz Cabrera,1969.pp 3-4). La misma autora define como habilidad a "la capacidad o disposición para realizar una cosa" (Ibíd., p. 4) y como parámetros e indicadores que nos permiten precisar aún más ese significado tomamos los elementos que nos aporta Santos Marín (Santos Marín, 1988, p.5): la forma en que se ejecuta la acción, el grado de generalización, la abreviación e independencia (trabajo personal autónomo) con que se actúa y el dominio de la acción misma.

La clasificación de las habilidades generales y lógicas de Sanz Cabrera (Ibid, pp 8-17) y Santos Marín (Ibid, p 7), adoptada como marco teórico, fue confeccionada como requisito indispensable para alumnos que seguirían estudios superiores de ciencias exactas o tecnológicas. Sin embargo, la misma se adapta perfectamente a la formación que debe tener un egresado de nivel medio

cualquiera sea la carrera a seguir, o aún si no tiene intención de seguir estudiando (Royo et alt, 2007, pp. 142-151).

Los resultados del año 2005

Analizados los resultados de dos test aplicados a alumnos de nuevo ingreso a la Facultad de Ingeniería, y de acuerdo a la clasificación de las habilidades generales y lógicas adoptada, se observó que dichos alumnos: poseen habilidad para expresarse con cierta precisión y fluidez, incluso en forma simbólica; tienen escasa habilidad para trabajar con la información científica y poseen cierta habilidad para poner en práctica una lógica de racionalización del trabajo (interpretación de las consignas y de la solución) y respecto de la habilidad para calcular y construir, el nivel de desarrollo es bajo. Además, si bien pueden reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto, no son capaces de generalizar los conceptos.

También se pudo observar que el no haberse apropiado de los conceptos no implica que no pudieran utilizar el lenguaje de la matemática. Por ejemplo, un alumno escribió la siguiente definición: "Si Z^n es un complejo de módulo ρ y argumento φ, entonces Z_k es la raíz enésima del complejo de módulo ρ y argumento $\frac{2k\pi+\varphi}{n}$". Esta definición es incorrecta, pero al simbolizarla el alumno lo hizo en forma coherente con esa expresión.

$$Z^n = \rho_{\varphi} \Rightarrow Z_k = \sqrt[n]{\rho_{\frac{2k\pi+\varphi}{n}}}$$

Es síntesis, tiene un concepto erróneo pero usa correctamente los símbolos.

Los resultados obtenidos en el año 2005, queda resumidos en el cuadro 1. Este estudio constituyó para el equipo el punto de partida de una investigación tendiente a medir las mejoras producidas a partir de acciones, institucionales y pedagógicas, encaradas con los estudiantes que ingresan a la Facultad.

Para completar el diagnóstico inicial, en ese mismo año, en el marco del Proyecto "Articulación entre Escuelas Medias de la Provincia de Jujuy y la Universidad Nacional de Jujuy", se planteó

como una de las actividades a realizar con los docentes del Área Matemática, un Taller de Reflexión sobre las Habilidades Generales y Lógicas de los alumnos que egresan del Nivel Medio.

Trabajando con el mismo marco teórico, es decir la clasificación de las habilidades generales y lógicas ya mencionada, el taller fue de utilidad como medio o instrumento para despertar en los docentes expectativas respecto a sus propias posibilidades de realización de un trabajo de investigación con sus alumnos. Ello se patentizó cuando los profesores percibieron que podrían hacer un seguimiento de la evolución de sus alumnos, en cuanto a las habilidades que fueran desarrollando, sin necesidad de generar evaluaciones diferentes a las habituales, sino haciendo un adecuado análisis de sus respuestas y de los recursos puestos en juego por ellos en la resolución de las tareas encomendadas.

Habilidad	Si	Mas o menos	No
Simbología correcta	80 %	15 %	5 %
Interpretación y uso de la información	20 %	58 %	22 %
Calcular	37 %	22 %	41 %
Interpretación de la solución	30 %	64 %	6 %
Conceptos	16 %	28 %	56 %

Cuadro n° 1
Síntesis de los resultados obtenidos en el año 2005

Si	Mas o menos	No
40 %	46 %	14 %
14 %	18 %	68 %
54 %	32 %	14 %
2 %	14 %	84 %
16 %	48 %	36 %

Cuadro n° 2
Opinión de los docentes respecto de las competencias desarrolladas por sus alumnos

Si	Mas o menos	No
45%	29%	26%
41%	36%	23%
21%	43%	36%
26%	42%	32%
35%	14%	51%

Cuadro n° 3
Resultados obtenidos en los test realizados a 118 ingresantes a la Fac. de Ingeniería de la UNJu en el año 2008

Finalmente, los docentes expresaron su opinión sobre el nivel de apropiación, por parte de sus alumnos, de las habilidades consideradas (ver Cuadro 2).

En el Cuadro 2 se observa , en primer lugar, que la mayoría de los docentes (54%) opinan que sus alumnos saben “calcular”. Resultado previsible debido a que desde los primeros grados los maestros insisten en la resolución de operaciones o situaciones problemáticas donde el resultado obtenido mediante cálculos es lo primordial.

En segundo lugar, los profesores destacaron que sus educandos habían desarrollado medianamente la habilidad del uso correcto de la simbología y del lenguaje matemático, la cual incluye la habilidad de expresarse con precisión y fluidez.

En tercer lugar, muy pocos docentes indicaron que sus alumnos habían desarrollado las habilidades referidas al análisis e interpretación de las cualidades de la solución que más interesa, así como, buscar y obtener la mayor información de la solución de cada ejercicio o problema. Explicaron que ello es consecuencia de que los alumnos, en su afán de resolver el ejercicio, obtienen un resultado y de ninguna manera se cuestionan si lo obtenido es lo que se esperaba encontrar o si realmente se ajusta a la situación en particular que está resolviendo. Cabe destacar que, respecto de "Interpretación y uso de la información" e "Interpretación de la solución", los docentes expresaron escasa opinión. Algo similar ocurre respecto del "Uso correcto de los conceptos".

Como se observa, las percepciones de los docentes no coincidían totalmente con los resultados obtenidos por este equipo de investigación en las evaluaciones realizadas ese mismo año a alumnos del nuevo ingreso de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy, la que estatutariamente fija que el ingreso es irrestricto, pudiendo los alumnos ingresar a ella sin otro requisito que haber obtenido el título de Nivel Medio.

Los altos índices de deserción y repetición de las asignaturas de 1º año detectados en esos años (2000-2004) hicieron que el Consejo Académico de la Facultad de Ingeniería, sin violentar el principio de ingreso irrestricto, decretara la necesidad de la realización y aprobación de un Trayecto de Nivelación en Matemática como requisito previo al cursado de cualquier asignatura de 1º año.

Los alumnos que no aprueban este Trayecto pueden volver a cursarlo durante el año, completándose su formación con talleres de Técnicas de estudio.

Aunque con diferencias profundas en sus alcances, en sus formas y exigencias, estos Cursos o Trayectos de Nivelación se dictan prácticamente en todas las Facultades de Ingeniería del país y es abundante la bibliografía que analiza sus fundamentos y determina la necesidad de su implementación (Kisilevsky, 2002; Ortega, 1996; Goldenhersch, 2006).

A tres años de la implementación del Trayecto de Nivelación

Una de las primeras consecuencias que tuvo la aplicación del Trayecto de Nivelación fue la disminución, prácticamente a la mitad, de la población estudiantil de nuevo ingreso que se inscribe en las asignaturas de 1º año. Ello permitió mejorar la relación docente-alumno y, por supuesto, al haber menos alumnos nuevos los porcentajes de regularizados y promocionados aumentaron en cada asignatura.

A pesar de ello, no había indicadores claros de que los alumnos actuales hubieran desarrollado mejor, a través del Trayecto, las competencias necesarias para un buen aprendizaje matemático en el nivel superior.

Se ha cambiado la expresión "habilidad" por "competencia". No se ha hecho esto en forma casual sino tratando de expresar los resultados obtenidos en términos actuales.

Se entiende por competencia a una combinación dinámica de conocimientos, comprensión y capacidades (MECyT y UNNE, 2003). Es decir que se debe entender la palabra competencia en el mismo sentido en que se definieron las habilidades al inicio de este trabajo.

Por ello, se decidió analizar desde ese punto de vista, una muestra de 118 exámenes tomados al azar, correspondientes al 1º Parcial de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica que es común a la casi totalidad de las carreras que se dictan en la Facultad. Se obtuvieron los resultados que se muestran en el cuadro 3.

Se observan mejoras sensibles en lo que hace a Interpretación y uso de la información y también a los Conceptos y en la relación de éstos con la Simbología. Sin embargo, y ello debería ser estudiado en particular, hay una disminución importante respecto de los que saben calcular.

En consecuencia, se puede considerar que el Trayecto de Nivelación en Matemática es positivo por las mejoras observadas en algunas de las competencias evaluadas.

¿Son comparables los cuadros 1 y 3 con el cuadro 2 que define la percepción de los docentes respecto del nivel de adquisición de determinadas habilidades por parte de sus alumnos?

Si se observan ahora los cuadros 1, 2 y 3 se podría concluir que los docentes tienen una percepción "optimista" respecto a la capacidad de calcular de sus alumnos y, por el contrario, son un tanto "pesimistas" respecto a su capacidad de interpretación, de manejarse con la información

y de interpretar la solución y ello es válido tanto para los que realizaron el Trayecto de Nivelación como para los que no lo hicieron.

¿Será que tendremos que aceptar lo que los estudios sobre las escuelas eficaces afirman respecto que gran parte del fracaso del alumno se debe a la poca expectativa que el docente tiene sobre él? (San Fabián Maroto, 1989; Báez de la Fe, 1994)

El año 2009

En el año 2009 se decidió trabajar con actividades directas que permitieran a los alumnos nuevos de la Facultad de Ingeniería superar sus deficiencias.

Aunque se tenía conocimiento de que los resultados del diagnóstico no se modificarían significativamente, se decidió realizar un nuevo diagnóstico con los alumnos de esta cohorte con el fin de hacer un seguimiento de las acciones correctivas propuestas tomando siempre la misma población.

Para ello, en el mes de marzo, se tomó un test a 167 alumnos que se encontraban cursando el Trayecto de Nivelación. De esos 167 alumnos, 53 aprobaron el Trayecto y quedaron habilitados para cursar las asignaturas de 1º Año; de éstos, sólo 39 rindieron el Primer Parcial de Álgebra y Geometría Analítica.

En el test tomado en marzo, antes del ingreso, se evaluaron las competencias que se indican en el cuadro nº 4, obteniéndose los siguientes resultados que corresponden a los 39 alumnos que luego rindieron el 1º parcial.

Competencia	Bien	Regular	Mal/NC
Simbología	69%	10%	21%
Interpretación y uso de la información.	38%	10%	52%
Calcular	46%	8%	46%
Interpretación de la solución	38%	21%	41%
Contenidos	33%	13%	54%
Construcción	8%	8%	84%

Cuadro n° 4
Rendimiento de 39 aspirantes a ingresar a Fac. de Ingeniería Año 2009

Bien	Regular	Mal/NC
62%	23%	15%
56%	21%	23%
36%	36%	28%
69%	18%	13%
38%	38%	24%
53%	3%	44%

Cuadro n° 5
39 alumnos- 1° Parcial Algebra y Geometría Analítica 2009

Tomando estos resultados, se implementaron acciones tendientes a la mejora de algunas de esas competencias. En particular se hizo hincapié en la cuestión de la interpretación, incluyendo lo referido a lectura y construcción de gráficos.

Se aplicaron ejercicios donde los alumnos, antes de realizar ningún cálculo, debían explicitar los datos, la(s) pregunta(s) a responder y los conceptos a utilizar. Así, se fue generando un modo de proceder, que algunos ya tenían incorporado, pero que a la mayoría le resultó beneficioso a la hora de encarar ejercicios sin este tipo de ayuda. Se da por descontado que el alumno de nivel superior ya tiene esta capacidad, pero lo cierto es que, en gran medida, el trabajo autónomo debe ser una competencia a desarrollar en los primeros años del Nivel Superior ya que es una cuestión no resuelta en los Niveles educativos anteriores.

Un trabajo similar se realizó con los gráficos, probándose cuán necesario es ejercitar su "lectura" para, luego, proceder a su construcción.

Diez semanas después, se evaluaron nuevamente esos 39 alumnos y el resultado se observa en el Cuadro nº 5. De la comparación de los cuadros 4 y 5 resulta que en las competencias de "Interpretación y uso de la información" e "Interpretación de la solución" se ha mejorado notablemente debido a las acciones planteadas en las prácticas de la asignatura. De igual manera se observa con satisfacción la gran mejora en la habilidad de la "Construcción".

Por otra parte, una variable como "Calcular" (no específicamente abordada en este período de clases) y también "Uso de la simbología" disminuyeron levemente en los porcentajes de rendimientos. En esta cuestión se detectan falencias básicas como ejecutar operaciones con fracciones o despejar un término o un factor. Por ello el trabajo a seguir tiene que ver con instancias especialmente direccionadas al cálculo y también a la asimilación por parte del alumno de los nuevos contenidos que se le van presentando, ya que esta variable también muestra rendimientos bajos.

Ello no implica considerar que en cuanto a la interpretación y a la construcción de gráficos ya no se deba seguir trabajando. Los resultados, si bien alentadores, todavía marcan que un alto porcentaje de alumnos aún no alcanzó esas competencias.

A tales fines, se integrará con los 39 alumnos un grupo o Comisión de T.P., que trabajará con una guía diferenciada de la del resto de los alumnos, quienes oficiarán entonces de grupo testigo. En dicha guía se hará hincapié en ejercicios rápidos que sirvan de adiestramiento para efectuar cálculo como los citados precedentemente.

También se trabajará sobre el "espíritu crítico", es decir, en el análisis de los resultados obtenidos para determinar su pertinencia en relación al ejercicio o problema presentado.

Referencias bibliográficas

Baéz de la Fe, B. (1994) El movimiento de escuelas eficaces: Implicaciones para la innovación educativa. *Revista Iberoamericana de Educación* 4, 93-116.

Goldenhersch, H. (2006): Deserción estudiantil en la Universidad. Estudio de un caso: La Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Córdoba.

Kisilevsky, M. (2002). Condiciones sociales y pedagógicas de ingreso a la educación superior. En Kisilevsky, M. & Veleda, *Dos estudios sobre el acceso a la educación superior en la Argentina*, pp 1-140, Buenos Aires: IIPE-UNESCO.

Ortega, F. (1996): Los desertores del futuro. Recuperado el 30 de mayo 2004 en http:// www.naya.org.ar/congresos/contenido/.../16.htm

Otero, M. R., Fanaro, M.A. y Elichiribetehy,I. (2001) El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la Universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4 (3),* 267-287.

Piaget,J; Inhelder,B. (1977) :Psicología del niño - Ediciones Morata - Madrid

Royo, J., Agostini, E., Torrres Bugeau, C. y Lasserre, A. (2007). Un enfoque diferente en el análisis de las evaluaciones. En Lasserre,A., Daino,M. y Sica,G. (Eds.) *Escuela Media-Universidad: un acercamiento posible* – pp.142-151. San Salvador de Jujuy: EDIUNJu

San Fabián Maroto, J. L. (1989.). Hacia un liderazgo integral: la dirección pedagógica de los centros docentes. *Curso de Formación para equipos directivos: Estructura y Organización del Trabajo en los Centros Docentes* (pp 58-70*).* Ministerio de Educación y Cultura de España, Madrid,

Santos Marin, N. (1988): *Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las ciencias técnicas*. Tesis de doctorado no publicada, Univ. Central de Las Villas, Facultad de Matemática y Cibernética. Cuba.

Sanz Cabrera, T. (1969): *Estudio de los procedimientos lógicos de identificación de conceptos y clasificación en estudiantes de ciencias técnicas.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de La Habana, Facultad de Psicología. Cuba.

MECyT, UNNE (2003). Listado de competencias básicas para el Ingreso a la Universidad. *Programa de Articulación Universidad-Nivel Medio.* (pp 1-15). Dirección de Articulación de Niveles Educativos. Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes (Argentina)

UNA APROXIMACIÓN COGNITIVA DEL CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
UTVM/CICATA-IPN; ESIME-IPN México
elitret@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *Durante muchos años en el sistema educativo se consideró el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como una actividad ubicada en el aula, siendo el único espacio donde el que sabe, el profesor, dota de conocimientos al que aprende, el alumno. Este tipo de enseñanza, sin considerarla mala, trae como consecuencia que al enfrentar al estudiante a un problema real tenga dificultades para su solución. En este artículo se reporta parte de una investigación cuyo objetivo fue a entender el conocimiento que surge en la interacción entre dos contextos diferentes: uno el matemático y el otro el derivado de un área técnica en particular. Se describe el conocimiento de un grupo de enfoque relativo al campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia. La aproximación cognitiva del campo conceptual de interés, se ha realizado sustentado en la Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud y se trabaja con la Matemática en el Contexto de las Ciencias como marco de referencia.*
Palabras clave: Contexto, ecuaciones, campos conceptuales, cognitivo

Introducción

En el nivel de Técnico Superior Universitario las matemáticas son consideradas una herramienta para resolver favorablemente problemas técnicos tanto del área de formación como profesional, por lo cual se pide vincular los conocimientos matemáticos con los de áreas específicas de formación de los futuros profesionistas. Sin embargo, en la práctica el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha sido una actividad meramente algorítmica y ubicada en el aula, siendo el único espacio donde el que sabe, el profesor, dota de conocimientos al que aprende, el alumno. Este tipo de enseñanza, sin considerarla mala, trae como consecuencia que al enfrentar al estudiante a un problema real tenga dificultades para su solución. Razón por la cual se plantea como estrategia didáctica a la matemática en contexto (Camarena, 2006) estableciendo que es a través de situaciones en contexto como se puede contribuir a que el estudiante sea competente en la resolución de "problemas contextualizados", "problemas del mundo real", "problemas relacionados con el trabajo" o "problemas situados" (Font, 2006).

En esta investigación se reportan los primeros resultados de una propuesta de análisis cognitivo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de un problema del área de

competencia de un Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos. El interés de esta investigación de carácter cognitivo es tratar de entender los procesos mentales utilizados por los estudiantes al resolver problemas contextualizados para comprender sus fallos y establecer propuestas didácticas encaminadas a un aprendizaje significativo mejorando como consecuencia sus competencias. Se propone entonces vincular el concepto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el concepto de balance de materia. Para lograr este doble cometido (análisis cognitivo e integración de conocimientos matemáticos con los técnicos) se establece como marco teórico a los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y como marco teórico de referencia a la Matemática en Contexto de las (Camarena, 2006). En esta dirección se tienen entre otras algunas investigaciones de carácter cognitivo como las de Muro y Camarena (2002), Trejo y Camarena (2005) y Zúñiga y Camarena (2007) y quienes a través del uso de diferentes marcos teóricos proponen estudios tendientes a desarrollar diferentes propuestas didácticas donde el contexto es un elemento importante para las mismas; se ha concluido que la motivación es importante para que los estudiantes se comprometan con su aprendizaje y se obtengan aprendizajes significativos que en un momento dado pueden aplicar en sus áreas profesionales.

Metodología (o Métodos)

La investigación se realiza en varias etapas, las cuales se describen a continuación.

1) Integración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia, en situaciones de mezclado de soluciones químicas.

2) La actuación de los estudiantes sobre el campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia. Derivado del campo conceptual obtenido en el punto 1 se generan las situaciones que le dan utilidad y significado al concepto.

3) Aproximación cognitiva al campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, misma que se realiza a través de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) atendiendo los esquema mentales utilizando para ello la clasificación de representaciones por Flores (2005).

El grupo de enfoque estuvo formado por dos estudiantes de 17 años de edad, quienes cursaban Matemáticas I en el Programa Educativo de Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, ubicada en Ixmiquilpan, Hidalgo México; se enfrentaron a situaciones (en el sentido de Vergnaud) de salón de clases (lápiz y papel) y de laboratorio. Se diseñaron cuatro situaciones cada una con tareas y actividades

Resultados y discusión

Atendiendo la metodología señalada previamente se muestran brevemente algunos de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la investigación.

I) Integración del campo conceptual a través de la matemática en contexto.

La caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia consistió en realizar un estudio de la vinculación establecida entre ambas. Para ello, mediante las etapas de la matemática en contexto se analiza el proceso de contextualización de un problema matemático particular.

1. Planteamiento del problema contextualizado.

Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?. Resolver el problema algebraica y gráficamente.

2. Determinación de variables y constantes

Un paso importante dentro de la fase didáctica de la matemática en contexto es la determinación del modelo matemático del problema contextualizado, para lo cual es necesario establecer las variables y constantes del mismo, para este caso se muestran en la tabla 1 y figura 1.

Figura 1. Balance de materia para la mezcla de soluciones azucaradas

Tabla 1. Variables y constantes del problema contextualizado

Variables	Constantes
mL a tomar de solución al 35 y 60%	Concentración de soluciones azucarada a utilizar (35% y 60%)
	Volumen final (100 mL). Concentración final (50%)

3. Determinación del modelo matemático

El modelo matemático queda representado por dos ecuaciones con dos incógnitas, una para el volumen y otra para la concentración (figura 2).

a)Ec. de Volumen	$x + y = 100$
b)Ec. de concentración	$0.35x + 0.60y = 0.50(100)$

Figura 2. Modelo matemático al problema contextualizado propuesto.

4. Solución matemática del problema contextualizado.

El sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se resuelve por el método de reducción (tabla 2).

Tabla 2. Resolución matemática del problema contextualizado

Modelo matemático (***Registro algebraico***)	a)Ec. de Volumen $x + y = 100$ b)Ec. de concentración $0.35x + 0.60y = 0.50(100)$
Solución algebraica Método de reducción y Solución gráfica (***Registro gráfico***)	$x + y = 100$ $0.35) \Rightarrow$ $-0.35x - 0.35y = -35$ $0.35x + 0.60y = 0.50(100) \Rightarrow$ $0.35x + 0.60y = 50$ $y = \frac{15}{0.25}$ $0 + 0.25y = 15$ $y=60$; $X=40$

5. Solución e interpretación requerida por el contexto y en términos del problema.

Para la preparación de 100 mL de solución azucarada con una concentración del 50% a partir de una mezcla de soluciones al 35 y 50% se deben mezclar 20 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60%.

II) Determinación de las situaciones.

Partiendo de la integración del campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia y con el objetivo de realizar la aproximación cognitiva del mismo fue necesario definir las situaciones (Vergnaud, 1990) sobre las cuales los estudiantes debieron actuar. De esta manera el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales se formó por un conjunto de situaciones enmarcadas en el mezclado de sustancias químicas, proponiéndose una serie de tareas. Se elaboró una actividad en la cual se trabajaron cuatro situaciones con tareas específicas para cada una de ellas, la característica principal fue la vinculación del concepto matemático con los conceptos del área técnica. Las situaciones fueron (figura 3):

a. Estado inicial del campo conceptual (CC) de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (SEL2) en el balance de materia (MB).
b. Comprensión del fenómeno contextualizado.
c. Mezclado de soluciones químicas.
d. Aplicación en la industrial.

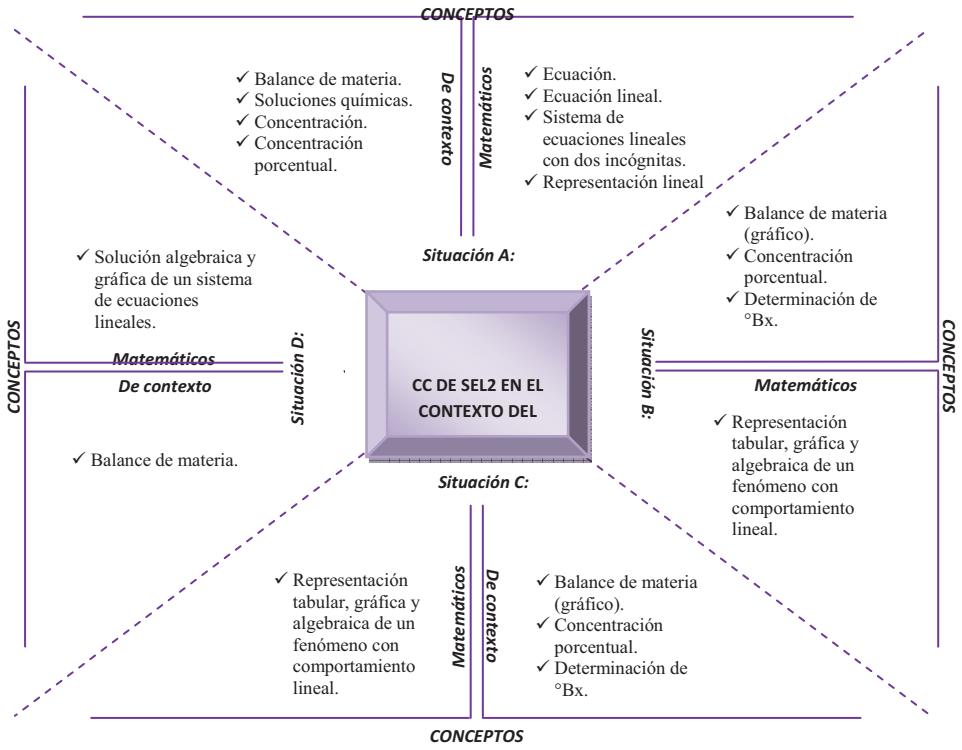


Figura 3. Diseño de situaciones derivados de la integración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia.

III. Aproximación cognitiva

La aproximación cognitiva del concepto de interés se realizó en cada una de las etapas de las situaciones planteadas analizando el tipo de representación (Flores, 2005) utilizados por el grupo de enfoque (figura 4); se comparó un campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales ideal con el obtenido durante la puesta en escena de las situaciones. Se pudo observar un dominio progresivo del campo conceptual conforme el grupo de enfoque actuó para atender dichas situaciones.

Campo conceptual esperado "ideal"

S		A: Estado inicial													
T		1													2
AC		1	2	3	4	5	6	7	8	9	#	11	#	#	1
EE	C														
	NC														
ES	A														
	NA														
CR	NC														
	C														
	CN														
	CAA														
	CA														

Campo conceptual encontrado

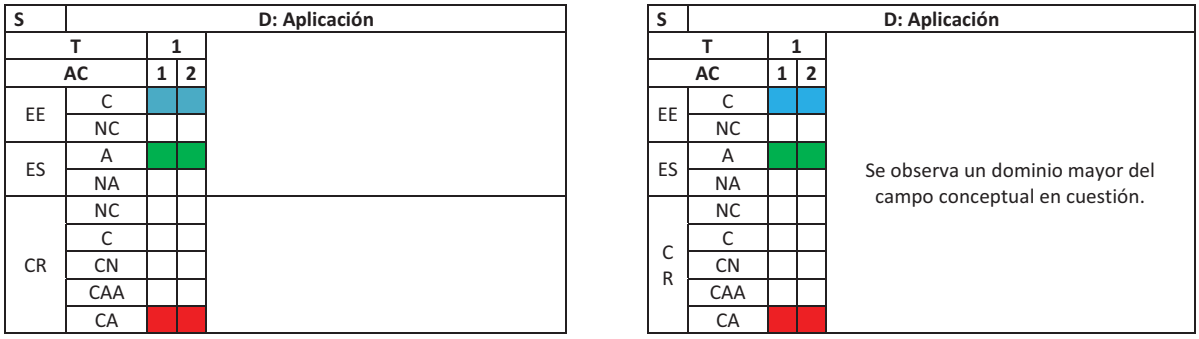
S		A: Estado inicial													
T		1													2
AC		1	2	3	4	5	6	7	8	9	#	11	#	#	1
EE	C														??
	NC														??
ES	A							?	?						??
	NA							?	?						??
CR	NC														??
	C														??
	CN														??
	CAA														??
	CA														??

S		B: Comprensión del fenómeno						
T		1			2			3
AC		1	2	3	1	2	3	1
EE	C							
	NC							
ES	A							
	NA							
CR	NC							
	C							
	CN							
	CAA							
	CA							

S		B: Comprensión del fenómeno							
T		1			2			3	
AC		1	2	3	1	2	3	1	
EE	C								En la actividad 1 de la tarea 3 hay un traslado de la representación simbólica tabular a la gráfica y a la algebraica que posibilitan el entendimiento y resolución de la tarea propuesta .
	NC								
ES	A								
	NA								
CR	NC								
	C								
	CN								
	CAA								
	CA								

S		C: Mezclado			
T		1	2	3	
AC		1	2	1	
EE	C				
	NC				
ES	A				
	NA				
CR	NC				
	C				
	CN				
	CAA				
	CA				

S		C: Mezclado			
T		1	2	3	En la tarea 3 actividad 1 se considera el primer esquema de entendimiento y solución, sin embargo el grupo de enfoque paso del NC-NA al NC-A hasta llegar al CA para dar solución a la actividad.
AC		1	1	1	
EE	C				
	NC				
ES	A				
	NA				
CR	NC				La solución obtenida con la representación algebraica se corrobora con la gráfica.
	C				
	CN				
	CAA				
	CA				



NOTA: S=situación; T=tarea; AC=Actividad; EE=Esquema de entendimiento; ES=esquema de solución; CR=categoría de representación; C=canónica; NC=no canónica; A=algorítmica; AN=no algorítmica; CAA=canónica algorítmica con esquema de solución no algorítmica.

Figura 4. Aproximación cognitiva del campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de un balance de materia.

Conclusiones

Los avances de la presente investigación permiten hasta el momento llegar a las conclusiones siguientes:

- ✓ Los problemas contextualizados posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.
- ✓ Al realizar el estudio del conocimiento del grupo de enfoque se ha realizado el análisis de la forma invariante de la organización de la actividad y de la conducta de los estudiantes en este tipo de situaciones. Los esquemas mentales se han aproximado mediante el esquema de entendimiento y solución durante el desarrollo de las tareas y actividades de cada una de las situaciones.
- ✓ El desarrollo de esquemas alcanzado por el grupo de enfoque, les permitió usar conceptos del campo conceptual en sus acciones sobre las situaciones propuestas, con explicaciones que reflejan una organización, comprensión de significados y uso de operaciones y representaciones simbólicas de los conceptos.
- ✓ Si bien, los estudiantes, al final de las sesiones, disponen de esquemas apropiados para enfrentar situaciones que requieren la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (tanto algebraica como gráficamente) es necesario explorar más sobre ello.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica. 10 (4).* 167-173.

Flores, M. R.C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática.* 17 (02), 7-34.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

Muro, U.C.; Camarena, G. P (2000). *Las series de Furier en la trasferencia de masa.* Tesis de maestría no publicada. UAEH. México.

Trejo, T. E. y Camarena, G. P. (2005). *La ecuación diferencial en el contexto de las reacciones químicas de primer orden.* Tesis de doctorado no publicada. UAEH. México.

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* 10 (2/3), 133-170.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 10(1). 145-174.

FAVORECIENDO LA REGULACIÓN CONTINUA DEL APRENDIZAJE EN AULAS MASIVAS DE MATEMÁTICA

Lisa Holgado, Marta Marcilla, Patricia Villalonga, Susana González, Susana Mercau
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
lvholgado@yahoo.com, marmarcilla@fbqf.unt.edu.ar
Campo de investigación: evaluación del aprendizaje Nivel: Superior

Resumen. *Un equipo de docentes de Matemática, de primer año universitario, se enfrenta cada año con la dificultad de abordar sus clases superpobladas, con una relación docente alumno muy deficiente. Este inconveniente incide sensiblemente en la calidad del proceso de enseñanza - aprendizaje y en consecuencia en la forma de evaluación. Por esto, intentando superar la limitación de realizar en aulas masivas sólo evaluaciones sumativas, se diseñó el proyecto "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática", que se presenta en forma resumida en este trabajo. Su objetivo es diseñar e implementar una estrategia didáctica para integrar la regulación en las situaciones de aprendizaje, proponiendo actividades que no requieran intervención continua del profesor y favorezcan la interacción social. El marco teórico se funda en principios de enseñanza de la Matemática, basados en enfoques cognitivos, del cual se deducirán criterios para guiar la evaluación del aprendizaje.*
Palabras Claves: Aulas multitudinarias (masivas), autoevaluación, regulación continua

Introducción

Matemática I es una asignatura del primer cuatrimestre de primer año, de una Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Tucumán (U.N.T.). Su currículo de tipo técnico, abarca los contenidos sostenes del Cálculo Diferencial e Integral de una variable, necesarios para otras asignaturas de las especialidades cursadas en la Facultad. Esta asignatura se desarrolla en aulas masivas. En el año 2007 fue cursada por 610 alumnos, siendo la relación docente alumno aproximadamente de 1/75 en clases prácticas y de 1/300 en clases teóricas. En el sistema de transmisión – recepción, característico de las clases magistrales dialogadas implementadas, la actividad del alumno se reduce a completar los *espacios en blanco* en un material elaborado por el docente, a posteriori de los cuestionamientos planteados por el profesor y generalmente resueltos por los alumnos más aventajados. De esta manera, el docente sigue desempeñando un rol protagónico y resultan escasas las situaciones de comunicación entre los alumnos. Por otra parte, las evaluaciones llevadas a cabo mediante dos pruebas parciales y un examen final integrador, son realizadas mediante pruebas de papel y lápiz, en fechas prefijadas con antelación, lo que da lugar a un limitado reflejo de las competencias desarrolladas por el alumno en los contenidos evaluados.

Ante la situación planteada, intentando mejorar la calidad de la evaluación y superar la limitación

de realizar sólo evaluación sumativa se diseñó, considerando las limitaciones del contexto y siguiendo lineamientos de principios vigentes en educación Matemática, el proyecto de investigación "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática". Este proyecto fue aprobado por el Consejo de Investigaciones de la U.N.T. (período 2008- 2011). Una síntesis del mismo y de sus avances se presenta en este artículo.

El proyecto

Estado actual de la problemática: Se comenzó por realizar un análisis bibliográfico de numerosas fuentes de información. El mismo muestra que son escasos los antecedentes de investigaciones sobre evaluación del aprendizaje de la Matemática a nivel superior para grupos-clase masivos (Calderón Ariosa, 1996; Pérez González, 2000; Véliz, 2002; Villalonga de García, 2003; González, Villalonga, Marcilla y Mercau, 2006). De esta revisión surge que resultaría un aporte fundamental para esta universidad y otras instituciones educativas con grupos-clase numerosos, la elaboración de criterios basados en lineamientos de teorías vigentes en investigación educativa en Matemática, para orientar la evaluación del aprendizaje de esta asignatura en cursos del nivel superior, como también, el diseño de una estrategia didáctica que satisfaga tales criterios y resignifique la evaluación del aprendizaje en cursos masivos. A la luz de los criterios establecidos, se evaluarán el material instruccional y las actividades e instrumentos evaluativos, así como el proceso de enseñanza y aprendizaje implementados antes y durante la nueva estrategia didáctica.

Se plantearon entonces los objetivos que se enuncian a continuación:

Objetivo General: Diseñar, para aulas masivas de Matemática, una estrategia didáctica que valorice la regulación continua del aprendizaje y contribuya a superar la práctica de evaluación del aprendizaje vigente en estas aulas, actualmente limitada sólo a evaluaciones sumativas.

Objetivos Específicos:

1) *Elaborar un material instruccional impreso* para desarrollar una unidad de la asignatura, el que será empleado por los estudiantes en las clases y en tareas para el trabajo

independiente. Las actividades apuntarán a valorizar la evaluación diagnóstica, fortalecer los mecanismos de regulación del aprendizaje complementarios a la evaluación formativa, y, la interacción social en el aula.

2) *Planificar las tareas pedagógicas* de las clases correspondientes a la unidad escogida.

Acciones efectuadas hasta el momento

Análisis de resultados de investigaciones previas: La génesis de este proyecto estuvo en una serie de trabajos de educación Matemática realizados en el marco del proyecto del Consejo de Investigaciones de la U.N.T. (período 2005-2008): "Metodologías de enseñanza y evaluación que favorecen aprendizajes significativos para cursos masivos de primer año de una facultad de ciencias". Por cuestión de espacio en este artículo se hace referencia sólo a tres de ellos. Dichos trabajos informan de las apreciaciones de alumnos y docentes sobre la evaluación del aprendizaje de la asignatura motivo de estudio. Ambos actores del proceso evaluativo coincidieron en que la evaluación no es parte constitutiva del proceso de enseñanza-aprendizaje, apreciándose deficiencias en algunas funciones vitales de la misma: comunicativa, motivadora y formadora de aprendices independientes (Villalonga de García, Mercau de Sancho y González de Galindo, 2006; Villalonga de García, González de Galindo, Mercau de Sancho y Marcilla, 2007; Villalonga de García et al., 2009 a).

Construcción del Marco Teórico: Para construir el marco conceptual de esta investigación, se estudiaron principios de enfoques cognitivos sustentados por:

a) la Teoría Psicogenética de Piaget, la que sostiene que el conocimiento resulta de una acción transformadora del mundo recortando zonas de significación. Esa interacción implica la construcción del conocimiento que se logra y la de los propios instrumentos de conocimiento. De Piaget también se consideró su Teoría de la equilibración;

b) el Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky y seguidores, con su Ley genética fundamental del desarrollo, la que valida las siguientes afirmaciones: 1) se reconoce el origen social del proceso de aprendizaje (valorizándose la *zona de desarrollo próximo*), 2) existe una

dinámica entre la actividad externa y la interna y 3) el aprendizaje tiene una estructura mediatizada y precede al desarrollo, y,

c) la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, que establece la necesidad de una incorporación sustantiva del nuevo material a las estructuras cognoscitivas propias del alumno al poder relacionarlo con sus conocimientos previos. También, se analizaron lineamientos para la regulación y autorregulación del aprendizaje sostenidos por Jorba y Casellas y principios de los Estándares de evaluación del aprendizaje de la Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M) (Jorba y Casellas, 1997; Camillioni et al., 1998; Pérez González, 2000; Hernández Fernández, Delgado Rubí, y Fernández de Alaíza, 2001; Moreira y Caballero, 2008; N.C.T.M, 1989; 1995; 2000). Parte de este estudio se plasmó en una publicación (Villalonga, González, Holgado, Marcilla y Mercau, 2009).

Basándose en la concepción de aprendizaje promovida por las teorías estudiadas se construyeron los siguientes *criterios generales* orientadores de la evaluación del aprendizaje de la Matemática, los cuales se enuncian sintéticamente:

La evaluación del aprendizaje debiera:

1) *Enriquecer el aprendizaje de la Matemática.*
2) *Enfatizar objetivos y contenidos relevantes.*
3) *Promover la igualdad de oportunidades (equidad).*
4) *Ser un proceso abierto.*
5) *Promover inferencias válidas acerca de aprendizajes significativos de la Matemática.*
6) *Ser un proceso coherente con lo enseñado.*
7) *Ser una herramienta valiosa para la toma de decisiones para la enseñanza y el aprendizaje.*
8) *Mejorar aspectos generales de la personalidad del estudiante (tolerancia, colaboración, solidaridad, comprensión, respeto ante el trabajo propio y ajeno, etc.).*

También, se diseñaron una serie de *criterios específicos* para evaluar los contenidos de la disciplina Matemática (no se incluyen por cuestiones de espacio). Estos criterios, se basan en los principios de los estándares de evaluación del N.C.T.M y se refieren a evaluación de conceptos,

procedimientos, resolución de problemas matemáticos, comunicación matemática, actitudes hacia la Matemática y autoevaluación y autorregulación del aprendizaje (N.C.T.M, 1989; 2000; Jorba y Casellas, 1997).

Información sobre la evaluación del aprendizaje de la asignatura recabada de nuevas fuentes: En el proyecto que se presenta se diagnosticó el grado de desarrollo alcanzado por los estudiantes para llevar a cabo ciertos procedimientos matemáticos en el contexto de los contenidos correspondientes a continuidad de una función. De este estudio resultó que los procedimientos Calcular, Identificar y Recodificar tuvieron un grado de desarrollo alto, en contraposición a Graficar y Controlar que alcanzaron menor grado de desarrollo (Villalonga de García et al., 2009 b).

También, se estudiaron los enunciados de los exámenes escritos de la asignatura, únicas actividades implementados sistemáticamente para evaluar el aprendizaje en el año 2007. Para tal propósito se definieron las variables consideradas relevantes en el contexto de investigación: Actividades de evaluación de conceptos, Actividades de evaluación de procedimientos, Actividades de evaluación de resolución de problemas, Actividades de autoevaluación y de autorregulación del aprendizaje (Villalonga, González, Mercau, Holgado y Marcilla, 2009). Simultáneamente, se analizó si dichos actividades promovían aprendizajes significativos. Se detectó tan sólo un 15 % de actividades con énfasis en manejo significativo de conceptos, un 4 % con énfasis en el manejo significativo de procedimientos, un 3 % que constituyen para el alumno verdaderos problemas de aplicación en el área de la Matemática, de la vida diaria y de las ciencias, observándose por otra parte, ausencia de actividades de autoevaluación y autorregulación del aprendizaje. Por consiguiente, sólo el 22% de las actividades favorecerían aprendizajes significativos (Villalonga de García y González de Galindo, 2009).

Acciones a realizar

Para elaborar el diagnóstico de la evaluación del aprendizaje de la asignatura, restaría triangular la información recabada de las fuentes de información recién consideradas.

Otras acciones proyectadas son:

Diseñar una estrategia didáctica para cursos masivos que favorezca la regulación continua del aprendizaje fundada en los criterios deducidos del marco teórico. La estrategia requerirá de la implementación de un *material instruccional impreso* que abordará una unidad específica de la asignatura. Dicho material incluirá actividades que promuevan la autorregulación de orden metacognitivo y la interacción social en el aula.

El *material instruccional* incluirá instrumentos para explorar (Jorba y Casellas, 1997):

a) Las estructuras de acogida: Ideas previas y grado de alcance de los prerrequisitos de aprendizaje, representaciones que se hacen los estudiantes de las tareas propuestas y actitudes y hábitos adquiridos relacionados con el aprendizaje de la Matemática. b) La comunicación de los objetivos y la representación que se hacen de los mismos los estudiantes. c) El dominio, por parte de los alumnos, de los criterios de realización de la tarea o criterios procedimentales, los que evidenciarían la realización de las operaciones de anticipación y ejecución de la acción. d) La apropiación, por parte de los alumnos, de los criterios e instrumentos de evaluación del aprendizaje. e) La capacidad de los estudiantes para realizar actividades metacognitivas y de autorregulación de sus aprendizajes. f) El rendimiento académico en la unidad seleccionada.

Antes de llevar a cabo la experiencia, las actividades de enseñanza y aprendizaje incluidas en el material serán validadas por juicio de expertos (Vieytes, 2004).

En una primera etapa, se planea realizar una *experiencia piloto* con un grupo de alumnos que no regularizaron Matemática 1, con el fin de indagar las características de las estructuras de acogida del grupo clase relativas a la unidad seleccionada, para luego reajustar el material instruccional de acuerdo a las falencias detectadas.

Luego, se realizará la experiencia con un grupo experimental (GE), que usará el material instruccional reajustado, y un grupo de control (GC) que recibirá la enseñanza actualmente vigente en la asignatura. Se recolectarán los datos para evaluar la estrategia didáctica a partir de: observación sistemática participante y no participante de las clases, grabaciones, filmaciones, entrevistas a docentes, encuestas a alumnos y análisis del rendimiento académico de los alumnos (Vieytes, 2004).

La experiencia se evaluará en dos niveles: cualitativo y cuantitativo, para comprobar si la nueva metodología de evaluación formativa:

a) llevó al estudiante a tomar conciencia del grado de divergencia entre sus producciones y lo previsto en los objetivos; b) favoreció la apropiación de criterios e instrumentos de evaluación propuestos por el docente; c) previó situaciones didácticas destinadas a favorecer la construcción por parte de cada alumno de su base de orientación y la confrontación de ideas y puntos de vista propios; d) contribuyó para que el estudiante realizara gestión de sus errores y planificara las acciones para superarlos; e) mejoró el rendimiento académico en los contenidos desarrollados.

La *evaluación cualitativa de la experiencia* se concretará a través del análisis de los datos aportados por la *observación sistemática participante* de las clases, concretada por el docente a cargo del grupo experimental; la *observación sistemática no participante* de las clases de la experiencia, realizada por docentes de Matemática de la Facultad, y de *datos que surjan de la información recabada de grabaciones y filmaciones*.

Se evaluará *cuantitativamente la experiencia* a través de: a) información aportada por el análisis del diseño de las actividades desarrolladas en las clases del GC y del GE, a fin de establecer diferencias entre las mismas, b) la comparación del rendimiento académico alcanzado por el GE y el GC en la unidad desarrollada en la experiencia y c) el estudio de datos de las encuestas realizadas a ambos grupos para recabar opiniones acerca del sistema de evaluación del aprendizaje implementado en cada uno. En estas encuestas se valorarán, además, actitudes y hábitos adquiridos en relación al aprendizaje de la Matemática.

La información suministrada por las siguientes fuentes también aportarán a la evaluación cuantitativa de la experiencia: a) La entrevista semi-estructurada a docentes a cargo del GE y del GC. b) La entrevista grupal semi-estructurada a docentes que observaron sistemáticamente las clases del grupo experimental. c) Estudio de la calidad de la evaluación formativa implementada en los GE y GC, considerando los criterios establecidos en el marco teórico.

Para obtener conclusiones válidas y confiables se realizará *triangulación* de métodos y de datos (Vieytes, 2004). Triangulando las características del diseño de las actividades evaluativas implementadas en el GC y en el GE, el rendimiento académico en los contenidos de la unidad desarrollada alcanzado por los alumnos de ambos grupos y las conclusiones provenientes de la observación participante y no participante de las clases, de los registros de grabaciones y filmaciones, de las entrevistas efectuadas a docentes y de las encuestas aplicadas a alumnos se podrá corroborar si la implementación de la estrategia didáctica contribuyó a mejorar la calidad de

la evaluación del aprendizaje de la asignatura.

Conclusiones

Las acciones realizadas hasta el momento permitirán diagnosticar la evaluación del aprendizaje vigente en la asignatura. Los criterios construidos en el marco teórico serán referentes al diseñar e implementar la estrategia didáctica que pretende re-significar la evaluación en cursos masivos.

Referencias bibliográficas

Calderón Ariosa, R. (1996). *La enseñanza del Cálculo Integral. Una Alternativa basada en el Enfoque Histórico Cultural y de la Actividad.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, La Habana, Cuba.

Camillioni A., Celman S., Litwin E. y Palou, C. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico.* Argentina: Paidós.

González, S.; Villalonga, P.; Marcilla, M. y Mercau, S. (2006) Metodologías de enseñanza y evaluación que favorecen aprendizajes significativos para cursos multitudinarios de primer año de una facultad de ciencias. En J. Sagula (Eds.), *Memorias de 8vo. Simposio de Educación Matemática,* (pp. 1520-1570). Argentina: Emat.

Hernández Fernández, H., Delgado Rubí, J. y Fernández de Alaíza, B. (2001). *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Jorba, J. y Casellas E. (1997). *Estrategias y técnicas para la gestión social en el aula. Vol. 1: La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Barcelona: Síntesis.

Moreira, M. A. y Caballero C. (2008). *La Teoría del Aprendizaje Significativo.* 1ra. Edición. Porto Alegre- Brasil, Burgos- España: UFRGS, Brasil y UBU, España.

N.C.T.M. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla. Edición española de *Curriculum and Evaluation Standards* for School Mathematics (Tr. por José Alvarez Falcón y Jesús Casado Rodrigo). Sevilla: SAEM Thales.

N.C.T.M. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Obtenido en abril 11, 2003 de http://standards.nctm.org/Previous/AssStds/index.htm

N.C.T.M. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla. Edición española de *Principles and Standards for School Mathematics*. (Tr. por Manuel Fernández Reyes). Sevilla: SAEM Thales.

Pérez González, O. (2000). *La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso docente.* Tesis de doctorado inédita, Universidad de Camagüey, Cuba.

Véliz, M. (2002). *Sistema de autorregulación y autoevaluación del Cálculo Diferencial para estimular el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas.* Tesis de maestría inédita, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Vieytes, R. (2004). *Metodología de la investigación en organizaciones, mercado y sociedad. Epistemología y técnicas.* Buenos Aires: Editorial de las Ciencias.

Villalonga de García, P. (2003). *Un enfoque alternativo para la evaluación del Cálculo en una Facultad de Ciencias*. Tesis de maestría inédita, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Villalonga de García, P., Mercau de Sancho, S. y González de Galindo, S. (2006) Evaluación del aprendizaje: visiones de los docentes de un curso universitario multitudinario. En Facultad de Ingeniería de la Universidad de Misiones (Ed), *Anales XIII EMCI Nacional- V EMCI Internacional*. Área *temática "Investigación Educativa en Matemática"* (Vol. CD). Misiones, Argentina: Facultad de Ingeniería de la Universidad de Misiones.

Villalonga de García, P. y González de Galindo, S. (2009). Aprendizaje significativo. Análisis de exámenes escritos de matemática. En *Actas del Tercer Simposio Internacional de Investigación*. Jujuy- Argentina (en prensa).

Villalonga de García, P., González de Galindo, S., Mercau de Sancho, S. y Marcilla, M. (2007). Espacio de atributos para valorar las apreciaciones de los alumnos sobre la evaluación del aprendizaje. En S. Araujo (Ed.), *Actas del V Encuentro Nacional y II Latinoamericano: La Universidad como objeto de investigación* (Vol. Cd). Tandil, Argentina: Universidad Nacional del Centro.

Villalonga de García, P., González de Galindo, S., Mercau de Sancho, S. y Marcilla, M. (2009 a). Perspectivas de los estudiantes acerca de la evaluación del aprendizaje de un curso masivo. En N. Peñaranda (Ed), *Libro de Actas Segundo Simposio Internacional de Investigación. "La investigación en la Universidad: Experiencias Articuladas a la Docencia y a la Extensión"* (Vol. Cd, pp. 658-668). San Salvador de Jujuy, UCSE, Argentina: DASS-ECSE.

Villalonga de García, P., González de Galindo, S., Mercau de Sancho, S. y Marcilla, M. (2009 b). Diagnóstico del grado de desarrollo de los procedimientos matemáticos en el contexto de continuidad de una función. En J. Sagula (Ed.), *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática* (Vol. Cd, pp. 1523-1539). Argentina: EMAT.

Villalonga, P., González, S., Holgado L., Marcilla, M. y Mercau, S. (2009). Pautas para diseñar actividades evaluativas basadas en teorías de aprendizaje significativo: desde Ausubel hasta Moreira. En J. Sagula (Ed.), *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática* (Vol. Cd, pp. 1812-1829). Argentina: EMAT.

Villalonga, P., González, S., Mercau, S., Holgado, L. y Marcilla, M. (2009). Dimensiones relevantes para analizar exámenes de matemática. En Facultad Regional Tucumán de la U.T.N. (Ed), *Actas del XV EMCI Nacional VII EMCI Internacional FRT – UTN. Tucumán, Argentina* (Vol. Cd). Tucumán, Argentina: FRT – UTN.

APRENDIZAJE DE FUNCIONES REALES EN CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES EN UN AMBIENTE DE INNOVACIÓN

Jhonattan Medina Orellan[1], José Ortiz Buitrago[1] y Arnaldo Mendible Sánchez[2]
Universidad de Carabobo[1], Campus La Morita Venezuela
Universidad Nacional Experimental de la Fuerza Armada[2]
jhonattan772@hotmail.com, ortizjo@cantv.net, arnmen2005@yahoo.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *La incorporación de nuevos organizadores del currículo en la planificación y gestión de unidades didácticas, junto a una adecuada implementación en el aula, conlleva una mayor comprensión y aplicación de los conceptos y propiedades matemáticas por parte de los estudiantes. En ese sentido en la presente investigación se incorporó la modelización y la calculadora gráfica (CG) en un contexto matemático de funciones reales y se indagó respecto a las competencias matemáticas que muestran los estudiantes cuando usan la CG en el aprendizaje de funciones reales, así como los niveles de aplicación en el proceso de modelización matemática. El estudio se abordó como una investigación de campo con carácter evaluativo a través de la metodología de evaluación de programas. Los estudiantes lograron explorar, analizar, conjeturar y validar conocimientos matemáticos relativos a las funciones y que son necesarios para el estudio posterior de conceptos propios del cálculo. Además, los participantes adquirieron competencias matemáticas vinculadas al concepto de función, al uso y manejo de la calculadora gráfica y competencias de modelización matemática.*
Palabras clave: Calculadora gráfica, modelización matemática, funciones

Introducción

El foco de interés de la presente investigación está centrado en las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de habilidades y destrezas para aplicar los conocimientos matemáticos, específicamente lo relacionado con las funciones reales. Los estudiantes, participantes en el estudio, eran cursantes de la asignatura introducción a la matemática, en el primer semestre del ciclo básico de las carreras de Administración Comercial, Contaduría Publica y Economía, en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo Campus La Morita, Estado Aragua, Venezuela. Se diseñó y llevó a cabo una investigación de campo centrada en analizar las producciones escritas de los estudiantes cuando estos resuelven problemas de aplicación de funciones haciendo uso de la CG. Los datos se obtuvieron a través de la aplicación de un curso-taller de dieciocho horas en los cuales los estudiantes resolvieron problemas previamente establecidos sobre la aplicación de funciones en el ámbito de las ciencias

económicas y sociales; además, estos estudiantes no habían aprobado la asignatura en periodos anteriores.

El Problema

En el ámbito de las Ciencias Económicas y Sociales se enseñan algunas nociones de cálculo, tales como: límites, derivadas e integrales, con un marcado énfasis en las aplicaciones sobre esta área. Aprender estos temas requiere conocer acerca de funciones reales; es por ello que los estudiantes deben alcanzar competencias relacionadas con el concepto de función (variables dependientes e independientes, dominio y rango, regla de formación, etc.); competencias relativas a los diversos sistemas de representación de funciones: expresiones algebraicas, tablas de valores numéricos y gráficas; además, competencias útiles para el estudio del comportamiento de una función tales como: crecimiento, decrecimiento, simetría, restricción de dominio, etc. Y finalmente las competencias de aplicación de funciones al mundo real; entre otras.

Sin embargo los estudiantes muestran dificultades; por ejemplo, en cuanto a la noción de variable, como "una letra que representa un número" o "el valor desconocido en una ecuación" (Fey y Steen, 2003, p. 77). Esto evidencia debilidades en la determinación de una variable dependiente e independiente, cuando se estudian funciones en contextos aplicados. Respecto a las nociones de crecimiento y de valores óptimos de una función, "algunos alumnos tienden a definir los intervalos de crecimiento en el eje *y*" (Alson, 1996, p. 53), dificultando así la comprensión de estas nociones matemáticas. Además, en el tratamiento de las representaciones, los estudiantes y las personas en general "leen con dificultad las curvas e interpretan deficientemente las gráficas y las propiedades comunes que de ellas se derivan" (Lacasta y Pascual, 1998, p. 12).

Estas situaciones hacen pensar en la necesidad de diseñar estrategias adecuadas para enseñar el tema de funciones, con el propósito de ofrecer una enseñanza que contemple no solo la "presentación de los conceptos y resultados con las correspondientes técnicas de calculo, sino también un entrenamiento de la intuición y el desarrollo del sentido crítico, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones" (García, Martínez y Miñano, 1995, p.20). Por este motivo se incorporan la calculadora gráfica y la modelización matemática, ya que permiten al estudiante construir, analizar y

conjeturar propiedades matemáticas en forma interactiva y además visualizar situaciones referidas a los objetos matemáticos estudiados y sus relaciones con el contexto que le sirve de referencia a la situación problemática, lo cual favorece que los estudiantes vean utilidades de la matemática para la comprensión del mundo real; con posibles repercusiones en un cambio de actitud favorable hacia las matemáticas.

En este sentido se plantean las siguientes interrogantes de investigación: ¿Cuáles son las competencias matemáticas que muestran los estudiantes cuando usan CG en el aprendizaje de funciones reales? ¿Cuáles son los niveles de aplicación en el proceso de modelización matemática que muestran los estudiantes cuando resuelven problemas de funciones reales con calculadora gráfica? En consecuencia, se persiguieron los siguientes objetivos:

1. Diseñar e implementar un programa para la enseñanza y aprendizaje de funciones reales que integre el uso de la CG y la modelización matemática.

2. Analizar las competencias matemáticas mostradas por los estudiantes cuando estudian funciones reales con CG.

3. Analizar los niveles de aplicación del proceso de modelización matemática por parte de los estudiantes en el aprendizaje de funciones reales con CG.

Marco teórico

La potencialidad de la CG y la modelización en la enseñanza de las matemáticas ha sido un tema de interés en las últimas décadas. Los trabajos de Ortiz (2002), Planchart (2001), Fey y Steen (2003), Cross y Moscardini (1985), Blum y Niss (1991), Stewart y Pountney (1995), Ríos (1995), entre otros, proponen que el proceso de modelización matemática debe llevarse en cuatro fases abiertas ejecutadas como un proceso cíclico:

Fase 1: Análisis: El estudiante en esta etapa analiza los elementos involucrados en el problema, define patrones de comportamiento, visualiza las hipótesis planteadas, identifica conceptos inherentes al problema, representa el problema en forma diferente, relaciona el problema con problemas ya conocidos resueltos anteriormente.

Fase 2: Traducción: El estudiante es capaz de llevar un problema de un contexto no matemático al contexto matemático y viceversa. Por lo general, en esta etapa el estudiante logra hallar la función real que funge como modelo matemático en el problema planteado; para esto es necesario que el estudiante tenga conocimientos previos sobre funciones.

Fase 3: Resolución: En este nivel el estudiante hace uso de aquellos conceptos matemáticos conocidos para resolver el modelo matemático obtenido en el nivel anterior; por ejemplo: utiliza la función lineal en la resolución de cuestiones del contexto, modela el equilibrio entre funciones demanda y oferta haciendo uso de la intersección de gráficas de funciones, utiliza la función cuadrática en la resolución de cuestiones del contexto, integra la calculadora gráfica en la resolución de problemas contextualizados, utiliza diferentes representaciones, usa el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, ajusta el modelo matemático, combina e integra con otros modelos.

Fase 4: Devolución: En este nivel el estudiante reflexiona sobre los argumentos matemáticos usados para interpretar las soluciones encontradas en la resolución del problema y constata que efectivamente la solución encontrada es confiable.

Metodología

Se parte de una investigación de campo de carácter evaluativo. Para obtener la información se llevó a cabo un curso-taller con diecisiete estudiantes repitientes de la asignatura introducción a la matemática. Los instrumentos fueron los siguientes:

1) Hoja de Notas Diarias: para conocer la opinión de los estudiantes día a día sobre los componentes fundamentales del programa.
2) Cuaderno de Notas: los cuales mostraban las producciones escritas de los estudiantes
3) Hoja de evaluación final: para conocer la opinión final de los estudiantes sobre el programa.
4) Guía de observación participante: fue utilizado por docentes investigadores del área que asistieron a la implementación del taller.

Se analizaron las producciones de los estudiantes cuando participaron en un programa para el estudio de funciones reales con CG.

Resultados

A continuación se presenta el desarrollo de algunas actividades propuestas a los estudiantes en el taller, las cuales fueron obtenidas del cuaderno de notas:

Actividad 12: Grafique la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $-2x+y+3=0$, $x+y=-3$, $-x+y+3=0$. Además, pasa por el punto mínimo de la parábola $y=x^2-4x+3$. Determine la ecuación general de dicha recta. Nótese que el problema sugiere determinar la intersección entre las rectas, calcular el mínimo de la parábola, y requiere determinar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos, y finalmente graficarla. Es una actividad que combina muy bien el uso de la CG y el lápiz y papel. Por ejemplo, uno de los estudiantes resolvió la actividad como sigue:

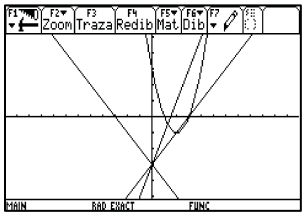


Figura 1. Representación Figura gráfica de las 4 funciones en una sola pantalla

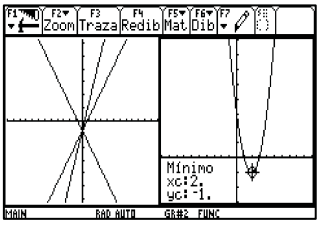


Figura 2. Representación Figura gráfica de las 4 funciones en pantalla dividida

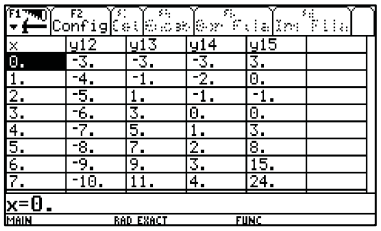


Figura 3. Representación tabular de las 4 funciones en una sola pantalla

Observando las figuras 1, 2 y 3, se puede destacar que el estudiante grafica las cuatro funciones en una misma pantalla para visualizar la situación completa; luego trabaja en pantallas divididas para calcular el mínimo de la parábola y a través de la representación tabular determina el punto de intersección entre las tres rectas. Nótese que la recta solución fue suministrada como un dato y que se constata gráficamente; sin embargo, el alumno no la identificó así.

Posteriormente, el mismo alumno resuelve con lápiz y papel, como se muestra en la figura 4:

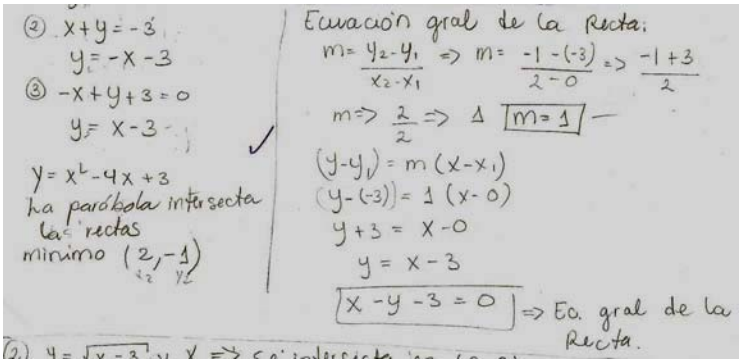


Figura 4. Solución escrita de un estudiante para la actividad 12

Finalmente, de acuerdo con lo mostrado por el alumno se ha evidenciado que el mismo ha sido capaz de desarrollar competencias como pensar y razonar, representar, usar herramientas, hacer cálculos, resolver problemas y comunicar en forma escrita; en virtud de que ha entendido y utilizado la interrelación entre la rectas y una parábola para hallar la ecuación de la recta buscada; ha trabajado con operaciones entre números reales; ha llevado a cabo un proceso en general de resolución de problemas y ha usado la CG como herramienta para desarrollar dicho problema.

Actividad 21: La Fosforera Maracay C.A. vende sus paquetes de fósforos a 2 BF cada paquete. Si x (en miles) es el número de paquetes producidos por semana , entonces el administrador sabe (según el mercado) que los costos de producción están dados, en BF, por: $y = 1000 + 1300x + 100x^2$. Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene ni utilidades ni pérdidas. ¿Hasta cuántas cajas semanales puede producir de manera que obtenga siempre ganancias? Explique.

Para resolver esta actividad los estudiantes necesitaron determinar la función ingresos $f(x) = 2000x$; para luego, con la función costos $g(x) = 1000 + 1300x + 100x^2$, buscar la intersección entre ambas y así encontrar el nivel de producción de paquetes de fósforos donde no se producen ni ganancias ni pérdidas, es decir, el punto de equilibrio.

Véase el desarrollo de la actividad de algunos estudiantes:

Se muestra a continuación la solución que dejó por escrito un estudiante y la imagen de la CG donde desarrolló en forma analítica la resolución del problema, destacándose que el estudiante usó correctamente las escalas en los ejes de coordenadas cartesianas e interpretó y argumentó basado en el análisis gráfico.

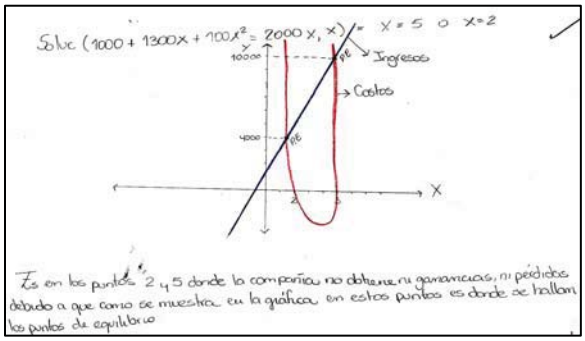


Figura 5. Uso de la representación gráfica analítica de la situación problemática.

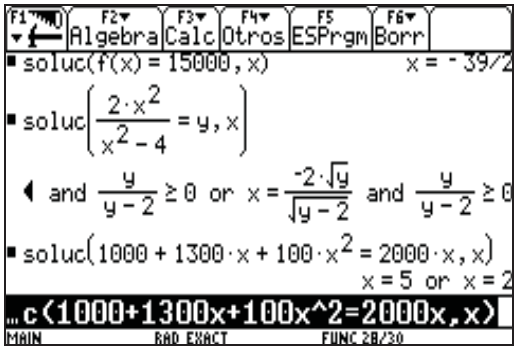


Figura 6. Solución del modelo matemático con la CG

Por ejemplo, en el desarrollo del problema de otro estudiante pueden señalarse las fases del proceso de modelización matemática:

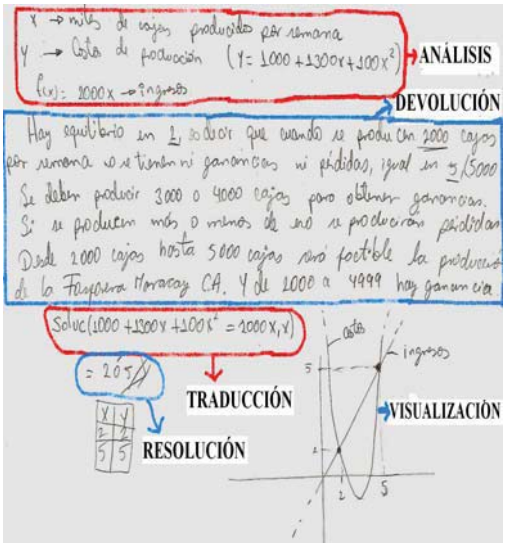


Figura 7. Proceso de modelización de un estudiante en la resolución de la actividad 21

Se evidencia que el estudiante ha sido capaz de llevar a cabo un proceso de modelización matemática, pasando por las distintas fases pero interrelacionadas entre sí. Se observa además, que existen algunos problemas para argumentar la respuesta. Esta debilidad fue detectada en el grupo en general. El estudiante encontró la intersección entre las funciones de manera analítica con la CG a diferencia de otros estudiantes que lo hicieron de manera gráfica o tabular. Por último, el estudiante mostró competencias para determinar variable

dependiente e independiente, usar la proporcionalidad "x en miles", encontrar el modelo matemático, asociar gráficamente los modelos costos e ingresos y argumentar sus respuestas.

Conclusiones

1. En cuanto a funciones reales: Se ha hecho énfasis en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas. En este sentido los sujetos participantes fueron capaces de comprender y utilizar los conceptos matemáticos relacionados con funciones, crear y expresar argumentos matemáticos, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de funciones, expresarse sobre temas de contenido matemático de forma oral, expresar la realidad a través de funciones reales, resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos, además usar herramientas como la CG.

2. En cuanto a la modelización matemática: Se ha hecho énfasis en aproximar a los estudiantes de las ciencias económicas y sociales a su futura realidad como profesionales. Los sujetos participantes estudiaron situaciones problemáticas en un contexto no matemático**,** estructurar matemáticamente situaciones susceptibles de ser modelizadas**,** usar aspectos de las funciones reales para entender y resolver un modelo matemático**,** dar respuesta a una situación del contexto, relacionada con funciones reales**,** dirigir y controlar su proceso de modelización

3. En cuanto al uso de la calculadora gráfica: se evidenció que los sujetos utilizaron la CG como un medio para aprender funciones, mas no como un fin; además los estudiantes bajo esta modalidad de aprendizaje suelen ser mas independientes en sus razonamientos que en clases tradicionales, por lo que la mediación e intervención del docente solo se ha limitado a recordar el uso de algunos comandos de la CG (sobre todo en las primeras tres sesiones del taller) y a ayudar en los razonamientos iniciales de un problema planteado. Los estudiantes mostraron capacidades para realizar operaciones básicas con números reales, resolver ecuaciones de grado mayor que dos y ecuaciones racionales con soluciones en los números reales y en los números complejos, pasar de un sistema de representación de funciones a otro, calcular el máximo y mínimo, analizar gráficas, encontrar puntos de intersección entre gráficas. Sin embargo, las opiniones de los estudiantes alertaron que no se puede dejar de trabajar con lápiz y papel ciertas operaciones;

además, que la calculadora por sí misma no resuelve los problemas matemáticos de funciones en contextos reales sino que ayuda en cálculos elementales para resolver los problemas.

Referencias bibliográficas

Alson, P. (1996). *Métodos de Graficación*. (Tercera Edición). Caracas: Ediciones ERRO.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Cross, M. y Moscardini, A. (1985). *Learning the Art of Mathematical Modelling*. Chichester, UK: Ellis Horwood Limited

Fey, J. y Steen, L. (2003). Cantidad. En L. Steen, (Comp.), *La Enseñanza agradable de las Matemáticas.* (pp. 67-101). México: Limusa.

García, A. Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Lacasta, E. y Pascual, J. (1998). *Las Funciones en los Gráficos Cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación*. (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Planchart, O. (2001) *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*. (Tesis Doctoral). México: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Rico, L. (2005a). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Santillana

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza

Stewart, M. y Pountney, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. Londres: Prentice Hall

OS PONTOS DE VISTA PRIVILEGIADOS NO ENSINO DA NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NO ENSINO SUPERIOR DO BRASIL

Lúcia Helena Nobre Barros, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos
UNIBAN. Universidade Bandeirantes de São Paulo Brasil
lucianobre@ibest.com.br, alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamento matemático avançado Nivel: Superior

Resumo. *O objetivo dessa pesquisa é analisar os pontos de vista sobre a noção de derivada de uma função desenvolvida no Ensino Médio e que podem servir de apoio para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. Para isso, escolhemos como referenciais teóricos centrais os pontos de vista de Thurston (1995) e a abordagem teórica em termos de pontos de vista de Rogalski (1995). Para melhor identificar as dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem da noção de derivada na transição Ensino Médio e Superior complementamos as análises utilizando as abordagens teóricas em termos de quadros de Douady (1984) e níveis de conhecimento de Robert (1997) e a teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999). Os resultados encontrados mostram que pouca atenção é dada ao trabalho desenvolvido no Ensino Médio, não se levando em conta os conhecimentos prévios dos estudantes, o que pode justificar as dificuldades encontradas por esses nos primeiros anos do Ensino Superior.*
Palavras-chave: Pontos de vista, derivada, relações institucionais e pessoais, níveis de conhecimento

Introdução

As dificuldades apresentadas pelos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral têm sido objeto de estudo de várias pesquisas. Em geral, essas pesquisas se desenvolvem no Ensino Superior e no Brasil ainda não encontramos estudos referentes, especificamente, ao processo de e aprendizagem da noção de derivada de uma função na transição entre o Ensino Médio e Superior. Na seqüência quando nos referimos à derivada, trata-se da derivada de uma função.

Além disso, observamos que os trabalhos de Rogalski (1995) e Thurston (1995) colocam em evidência a importância da noção de pontos de vista no trabalho do matemático. Observamos que Rogalski apresenta uma definição de pontos de vista enquanto que Thurston, em seu trabalho, identifica sete pontos de vista para a definição de derivada. Ambos são matemáticos e escrevem sobre sua própria relação com a Matemática, lembrando que Thurston foi Medalha Fields em 1982. Apesar do trabalho de Thurston ter sido publicado desde 1995, não encontramos no Brasil pesquisas que consideram os pontos de vista por ele apresentados, apenas Dias (1998) o utiliza

em sua pesquisa sobre pontos de vista cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear desenvolvida na França.

Sendo assim, em função de trabalhos anteriores que consideram a noção de pontos de vista no processo de ensino e aprendizagem de Matemática decidimos estudar, mais especificamente, quais pontos de vista, daqueles identificados por Thurston, são privilegiados no Ensino Superior brasileiro. Esse estudo é uma parte da pesquisa que estamos desenvolvendo sobre os pontos de vista em jogo na transição entre o Ensino Médio e Superior.

Para melhor compreender o que se espera do estudante do Ensino Superior quando se introduz a noção de derivada de uma função escolhemos analisar quais as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem dessa noção no Ensino Superior e quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Para operacionalizar nossas análises escolhemos como referências teóricas de apoio as abordagens teóricas em termos de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes de Robert (1997), de quadro e mudança de quadro de Douady (1984), e a teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999), que além de definir relação institucional e pessoal, permite identificar as diferentes representações em jogo por meio das noções de ostensivo e não ostensivo, e as necessidades de um discurso que auxiliem no planejamento, execução, controle e justificativa das diferentes tarefas, isto é, as tecnologias das técnicas e as tecnologias das tecnologias que são por eles denominadas teorias e que podem ser propostas nos Planos de Ensino dos cursos de nível superior, ou seja, as relações institucionais esperadas

Para identificar as relações institucionais existentes construímos uma grade de análise, que será apresentada seguida de um exemplo, que permite identificar os diferentes tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias via livros didáticos mais utilizados no Ensino Superior. Verificamos, ainda, se existe coerência entre as relações institucionais existentes e as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes analisando uma macro avaliação proposta para o primeiro e o último ano do Ensino Superior.

Apresentamos abaixo, uma breve exposição dos referenciais teóricos escolhidos.

Referencial teórico da pesquisa

O referencial teórico central para essa pesquisa são os pontos de vista identificados por Thurston, apud Dias (1998) para a noção de derivada, cuja denominação sugere a escolha para a definição dessa noção, como é possível observar no texto abaixo:

> *Podemos pensar a derivada como: 1. Infinitesimal: a razão da mudança infinitesimal do valor da função pela mudança infinitesimal da variável. 2. Simbólico: a derivada de xn é nxn-1, a derivada se senx é cosx, a derivada de fºog é f'ogxg', etc. 3. Lógica: f(x) = d se e somente se, para cada ε, existe um δ tal que se 0 <* $|\Delta x|$ *<* δ *então* $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-d\right|<\varepsilon$ *. 4. Geométrico: a derivada é a inclinação da tangente ao gráfico, se o gráfico tem uma tangente nesse ponto. 5. Taxa: a velocidade instantânea de f(t) se t é o tempo. 6. Aproximação: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear dessa função próxima do ponto. 7. Microscópica: a derivada de uma função é o limite do que se observa com um microscópio aumentando cada vez mais (Thurston, 1995, apud Dias, 1998, p. 39).*

Além disso, consideramos a definição dada por Rogalski (1995) para a noção de ponto de vista:

> *Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de definí-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas, podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro (Rogalski, 1995).*

Consideramos, ainda, a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997), a saber:

> ***Níveis de conhecimento esperados dos estudantes****: nível técnico que está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Determinar a derivada da função f(x) = x2; nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio, podendo até corresponder a uma organização, nesse nível o que se questiona é explicitamente pedido. Exemplo: Determinar a derivada da função f(x) = x2 utilizando a definição; nível disponível que corresponde a saber*

> *responder corretamente o que é proposto sem indicações, esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Exemplo: A função horária do movimento de uma partícula é f(t) = e2t-1lnt. Calcule a velocidade escalar no instante t = 10 (Robert, 1997, apud Nobre Barros e Dias, 2009, pp.4-5).*

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz às noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1984), a saber:

> *[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1984, p.128).*

A mudança de quadros é uma transposição do trabalho do matemático para a didática que Douady (1992) considera como:

> *[...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. [...] Qualquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalhos (Douady, 1992, pp. 135-136).*

Após essa breve descrição do referencial teórico considerado na pesquisa, apresentamos a metodologia escolhida para desenvolver a investigação.

Metodologia da pesquisa

Para as análises propostas utilizamos a seguinte metodologia:

- Análise dos planos de ensino dos cursos de licenciatura de universidades brasileiras públicas e privadas, para identificar as relações institucionais esperadas.

- Análise dos livros didáticos indicados na bibliografia básica dos planos analisados, para identificar as possíveis relações institucionais existentes e verificar se essas são coerentes com as propostas de ensino.
- Análise de uma macro avaliação para o primeiro e o último ano do Ensino Superior, para verificar se existe a possibilidade de identificar as marcas das relações institucionais sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Para efetuar as análises propostas acima, construímos a seguinte grade de análise.

A grade de análise

A grade deve servir como um instrumento para analisar as relações institucionais existentes e as marcas dessas relações sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes para o objeto de estudo da nossa pesquisa, isto é, a noção de derivada.

Essa grade permite identificar às seguintes variáveis das tarefas usualmente encontradas para a introdução da derivada de uma função.

- **Pontos de vista em jogo na tarefa;**
- **Ostensivos associados aos pontos de vista considerados;**
- **Quadro em que a tarefa é enunciada**:
- **Quadro para solução da tarefa**;
- **Níveis de conhecimento esperados dos estudantes**.

TAREFA: Determinar o coeficiente de variação de uma função, dada por seu gráfico, em um determinado ponto utilizando a noção de derivada.

EXEMPLO:

- O gráfico mostrado na figura fornece a relação entre o percentual do desemprego U e o correspondente percentual da inflação I. Use o gráfico para estimar a taxa na qual I muda com respeito a U, quando o nível de desemprego for 3%, e novamente quando ele for 10%.

SOLUÇÃO:

Da figura, estimamos a inclinação da reta tangente no ponto (3, 15), correspondendo a U=3, em aproximadamente igual a -14. Isto é, quando o desemprego é de 3%, a inflação I é decrescente a uma taxa de 14 pontos percentuais para cada ponto de aumento no desemprego U.

No ponto (10, 0), a inclinação da reta tangente é cerca de -0,4, o que significa que, quando há 10% de desemprego, a inflação é decrescente à taxa de somente 0,4 pontos percentuais para cada ponto percentual de aumento no desemprego.

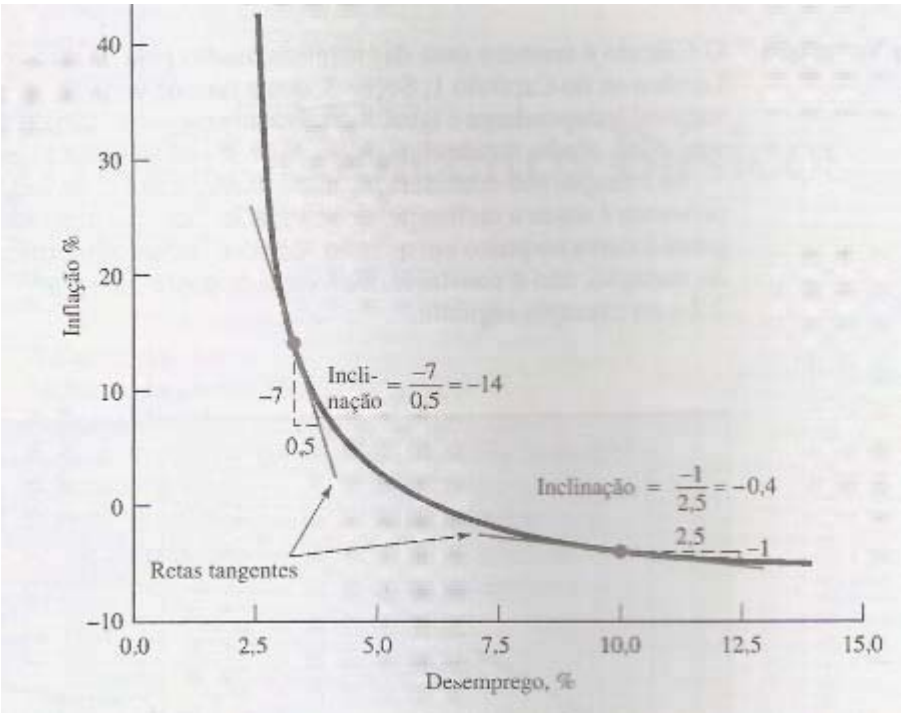


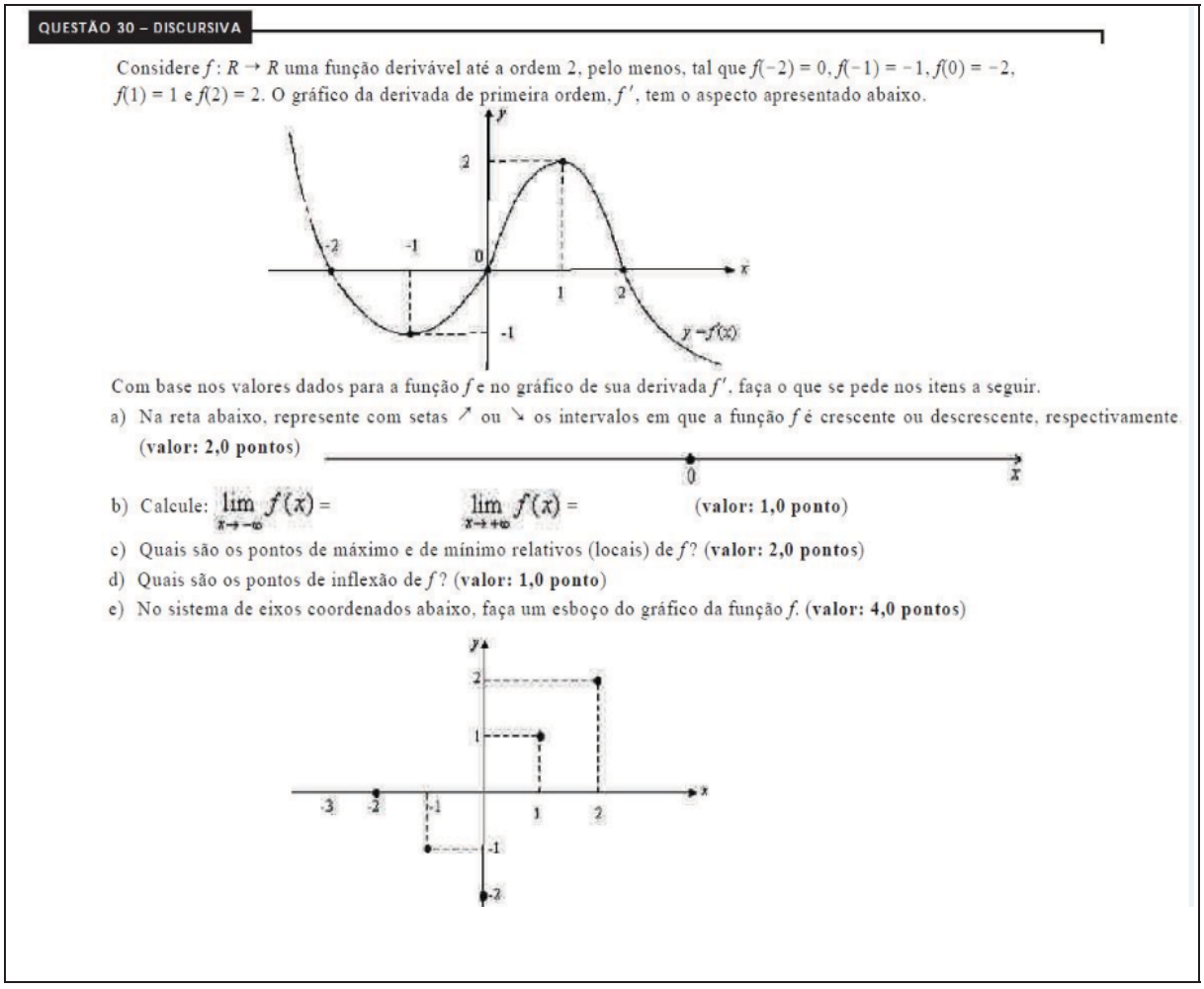
Figura 1. Inflação em função do desemprego, (Eisner, 1974, p.173 apud Hoffmann, 1999, pp. 69-70)

- **Pontos de vista em jogo na tarefa:** Pontos de vista geométrico e aproximação;
- **Ostensivos associados aos pontos de vista considerados:** Ostensivo de representação escrita simbólica explícita e de representação gráfica de uma função;
- **Quadro em que a tarefa é enunciada**: economia;

- **Quadro ou domínio para solução da tarefa**: análise matemática, em particular estudo das funções de uma variável real a valores reais;
- **Níveis de conhecimento esperados dos estudantes**:
  - Mobilizável em relação à noção de derivada enquanto taxa de aproximação, isto é, o ponto de vista aproximação;
  - Disponível em relação à articulação entre a noção de porcentagem e a noção de derivada e suas propriedades, isto é, crescimento e decrescimento e sinal da primeira derivada.

Resultados encontrados

A análise das relações institucionais esperadas mostra que não existe uma preocupação em introduzir a noção de derivada no Ensino Superior utilizando os pontos de vista já desenvolvidos no Ensino Médio, mesmo se as propostas privilegiam as representações gráficas que permitem uma melhor visualização do conceito antes de trabalhar os pontos de vista infinitesimal, simbólico e lógico. O mesmo ocorre para as relações institucionais existentes em que observamos que se privilegia a passagem da representação simbólica da função para representação gráfica utilizando a noção de derivada e a determinação da função dado seu gráfico. Mas, pouca atenção é dada à passagem do gráfico da derivada para o gráfico da função que termina sendo uma das questões pedidas na macro-avaliação Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) para o primeiro e o último ano do Ensino Superior, como mostra o extrato abaixo.



QUESTÃO 30 – DISCURSIVA

Considere $f: R \to R$ uma função derivável até a ordem 2, pelo menos, tal que $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. O gráfico da derivada de primeira ordem, f', tem o aspecto apresentado abaixo.

Com base nos valores dados para a função f e no gráfico de sua derivada f', faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Na reta abaixo, represente com setas ↗ ou ↘ os intervalos em que a função f é crescente ou descrescente, respectivamente. **(valor: 2,0 pontos)**

b) Calcule: $\lim_{x \to -\infty} f'(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f'(x) =$ **(valor: 1,0 ponto)**

c) Quais são os pontos de máximo e de mínimo relativos (locais) de f? **(valor: 2,0 pontos)**

d) Quais são os pontos de inflexão de f? **(valor: 1,0 ponto)**

e) No sistema de eixos coordenados abaixo, faça um esboço do gráfico da função f. **(valor: 4,0 pontos)**

figura 2 . ENADE (Brasil, 2005)

Considerações finais

Em geral, a noção é introduzida após o estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica e os pontos de vista taxa e geométrico são utilizados como meios para a interpretação de gráficos dessas funções. Esse trabalho já tinha sido efetuado no Ensino Médio, mas não existe nenhuma referência aos estudos realizados anteriormente, isto é, eles são revisitados, mesmo que implicitamente, e permitem que os estudantes enriqueçam, diferenciem, elaborem e adquiram mais estabilidade em termos dos significados dos pontos de vista considerados e sejam capazes de compreender melhor os novos pontos de vista que devem ser introduzidos na seqüência.

Apesar de existir uma coerência entre as relações institucionais esperadas e existentes quando se consideram os pontos de vista identificados por Thurston para a noção de derivada e considerando ainda que mesmo implicitamente são considerados conhecimentos prévios supostos disponíveis, uma vez que se espera tenham sido desenvolvidos no Ensino Médio, não se observa o mesmo resultado nas macro avaliações.

Isso mostra que é necessário um trabalho árduo para que os estudantes possam realmente dar significado para os diferentes pontos de vista e aplicá-los de forma autônoma quando necessário, ou seja, para que eles possam utilizar esses conhecimentos de forma disponível como é o caso do exemplo de tarefa encontrado na macro-avaliação que termina deixando muitos estudantes sem condições de resolvê-lo.

Referências bibliograficas

Bosch, M. & Chevallard, Y., (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77- 123.

Brasil, Ministério da Educação (2005). *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) – Exame Nacional de Desempenho do Estudante (ENADE)*. Ministério da Educação – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) – Brasília: MEC. Disponível no dia 10/02/2009: http://www.inep.gov.br/superior/enade/enade_oquee.htm.

Chevallard, Y.,(1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique**.** Grenoble : *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Dias, M. A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Paris, Université Paris VII.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Ingénierie Didactique et evolution du rapport au savoir. Paris. *Repéres IREM*, 6, 132-158.

Hoffmann, L. D. & Bradley, G. L. (1999). *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Nobre Barros, L. H. & Dias, M. A., (2009). Os pontos de vista disponíveis para a Introdução de Derivada de uma Função na Transição do Ensino Médio e Superior [CD-ROOM]. *In: Anais do Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4.* Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques.* 192-212

Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do Seminário de São Paulo*. Brasil.

Thurston, W.P. (1995) Preuve et progrès en Mathématiques. Paris. *Repéres IREM*, 21, 5-26

LA PROBABILIDAD Y LA MÚSICA A TRAVÉS DEL DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA

Elena Fabiola Ruiz Ledesma, Ángel Salvador Montiel Sánchez
Escuela Superior de Cómputo. Instituto Politécnico Nacional México
efruiz@ipn.mx, chavamontiel@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo tiene la finalidad de relacionar a la probabilidad con la música, a través del diseño de una secuencia didáctica para hacer que el alumno sea reflexivo, desarrolle habilidades que son señaladas en el modelo educativo del Instituto Politécnico Nacional (2004), como la observación, percepción, operatorias, entre otras. Para la construcción de la unidad didáctica nos basamos en los estudios realizados por Diennes, (1970). Se trabajó la teoría de la probabilidad a través de lo que denominamos como El Juego de dados Musical de Mozart (1777). Se presentan resultados preliminares después de haberla puesto en práctica con estudiantes de nivel superior de la carrera de Ingeniería en Sistemas. Fueron 35 estudiantes de un grupo de tercer semestre que llevaban la materia de Probabilidad en una Escuela Superior de la Ciudad de México.*
Palabras clave. Didáctica, probabilidad, juego de dados de Mozart

Introducción

El modelo educativo del Instituto Politécnico nacional, (IPN, 2004), busca en el docente lograr un aprendizaje significativo, ello implica realizar acciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Consideramos que lo fundamental es que el estudiante se encuentre motivado cuando se aborden los distintos temas de matemática. Una de las acciones a la que hacemos referencia en el presente trabajo es la de aplicar la teoría en nuestra práctica cotidiana. Recordemos que el alumno puede construir su propio conocimiento cuando más sentidos participan en su aprendizaje, cuando más activo está y existe un ambiente social oportuno, además de recuperar su experiencia personal y académica. Una opción para lograr tal propósito, en el caso particular de las matemáticas, específicamente en Teoría de la Probabilidad, puede ser la aplicación de los bloques lógicos de (Diennes, 1970), con orientación hacia el diseño de una unidad o secuencia didáctica para el caso particular arriba mencionado.

Aspectos Teóricos

En relación al aspecto matemático

Debido a que en el presente artículo se trabajan dos conceptos, uno es el de espacio muestral y otro el de distribución de probabilidad.

Walpole y Myers (2006), señalan que los elementos del espacio muestral S de un experimento aleatorio E pueden ser de distintos géneros. Sin embargo, para establecer un modelo matemático es necesario recurrir al sistema de los números reales y utilizar algunas características numéricas asociadas a los elementos del espacio muestral S.

Respecto al espacio muestral que se trabaja en este artículo es el obtenido al lanzar dos dados y determinar su suma, de esta forma el espacio muestral está formado por los siguientes números.

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

En el juego de dados musical de Mozart, se asocia un compás a cada suma obtenida al lanzar dos dados. Hay 8 números del espacio muestral que se asocian a los primeros 8 compases y 8 números del mismo espacio muestral que se asocian a los 8 compaces restantes. (De acuerdo a dos tablas que serán descritas más adelante).

En relación al empleo de una distribución de probabilidad, ésta consiste en relacionar un valor con la probabilidad de obtener dicho valor. En el caso de los valores o números que corresponden a la suma de dos dados, las probabilidades asociadas a cada uno de ellos se muestra a continuación.

La nomenclatura empleada es: $f(x) = P(X = x)$. En donde X es la probabilidad asignada al valor de x.

De esta forma

$$f(2) = P\left(\frac{1}{36} = 2\right), \quad f(3) = P\left(\frac{2}{36} = 3\right), \quad f(4) = P\left(\frac{3}{36} = 4\right), \quad f(5) = P\left(\frac{4}{36} = 5\right),$$

$$f(6) = P\left(\frac{5}{36} = 6\right), \quad f(7) = P\left(\frac{6}{36} = 7\right), \quad f(8) = P\left(\frac{5}{36} = 8\right), \quad f(9) = P\left(\frac{4}{36} = 9\right),$$

$$f(10) = P\left(\frac{3}{36} = 10\right), \quad f(11) = P\left(\frac{2}{36} = 11\right), \quad f(12) = P\left(\frac{1}{36} = 12\right)$$

El aspecto didáctico de la matemática

Hacemos nuestro soporte didáctico de la matemática en (Poincaré, 1953), debido a que nos hace llegar a la reflexión sobre la forma de llevar una sesión en matemáticas, cuando aborda la relación entre las matemáticas, las definiciones y la educación.

La mayoría de las personas presentan dificultad para aprender definiciones matemáticas, porque se tienen problemas con el entendimiento de una definición. Para Poincaré (1953), entender una definición consiste en reconocer que el significado de todos los términos empleados es coherente y no tiene contradicciones, por ello, para lograr una comprensión de una definición, un entendimiento de la misma, se requiere de la intervención del instructor, (actualmente el docente), quien debe tener la capacidad de conectar las percepciones del estudiante con su esquema mental a formarse.

Una buena forma de lograrlo es a través de la intuición, de guiar a los estudiantes en las sesiones de clase para que tengan suposiciones que las validen o que las refuten, a través del manejo de ejemplos bien intencionados, pero sobre todo motivando la curiosidad y la sorpresa, situaciones fundamentales para generar un pensamiento inductivo. De esta forma el alumno llegará a una generalización.

Para Poincaré, el propósito más importante de la educación matemática es el desarrollo de ciertas habilidades de la mente, y entre éstas, la intuición es fundamental. Debe haber una estricta conciencia en los docentes de que el mundo matemático tiene que estar fuertemente vinculado con el mudo real, aun si las matemáticas puras no lo estén, se debe intentar en todos los aspectos de aula de evitar separar el símbolo de la realidad.

Metodología: Para la construcción de la unidad o secuencia didáctica nos basamos en los estudios realizados por (Diennes, 1970).

Ahora ofrecemos los puntos básicos para una secuencia o unidad (utilizar siempre lo mismo) didáctica, luego del diagnóstico y observación del grupo, esto sin dejar de considerar las condiciones del grupo, los avances del periodo escolar y la cantidad de estudiantes, entre otros factores. Veamos en qué consiste:

1) Iniciar con una actividad lúdica, por ejemplo, que permita la participación del sentido del tacto. Recordemos que no por trabajar con estudiantes ya adultos, está prohibido el término "juego", puesto que toda persona está, por costumbre social actual, predispuesta al juego como reto; asimismo, el juego permite aplicar diversos tipos de reglas conforme a un problema que se resuelve con base en un modelo. Este es el punto que más trabajo cuesta planificar.

2) Después de motivar el reto a través de un juego, se recomienda presentar un problema que, precisamente, surja del juego y el alumno deba resolver con cualquier estrategia, que haya en otro momento empleado o que surja de su creatividad. El estudiante puede trabajar de forma individual o por parejas, o en equipos, propiciando la habilidad de comunicación y redescubrimiento en el alumno, ya que se le solicitará mostrar la forma en que resolvió o resolvieron el problema para que se dé una retroalimentación en el grupo.

3) Un breve espacio dedicado a formular preguntas informales surgidas del problema y que busquen llegar al contenido estudiado, además de provocar respuestas informales para propiciar el "redescubrimiento" de un concepto, modelo, teoría, etcétera, pero dicho con sus propias palabras, conforme a su propio contexto, motivando esa habilidad comunicativa en los alumnos. Es recomendable hacer las preguntas en forma ordenada, alumno por alumno y cuando alguien no responda, simplemente pasar a otro estudiante. (Esto realmente es difícil pero funciona, no al principio, sino cuando el grupo se acostumbra a trabajar de esta forma). Después de anotar las respuestas informales de los alumnos, damos paso a la formalización, es decir, al dictado de los conceptos, modelos o teorías que abordamos informalmente, con respuestas propias de los alumnos. Nótese que si es necesario dictar, exponer, clarificar y dirigir con base en nuestra autoridad de docentes, el conocimiento, pero sólo es una pequeña parte de la secuencia didáctica. Aquí, los escritos deben llevar al estudiante a la reflexión interna, al razonamiento deductivo y apropiación de un lenguaje científico.

4) Realización de ejercicios, con pluma y papel, o con la computadora, también son necesarios, no los podemos dejar de lado, pero sólo son parte de nuestra secuencia, ya que propician el desarrollo de habilidades operatorias necesarias en todo proceso de aprendizaje en matemáticas.

5) Finalmente, cerrar con más problemas, para que el alumno enfoque todo el desarrollo de habilidades, conocimientos y actitudes hacia la construcción de una solución. Estos son los elementos de una sugerencia flexible, cuyo orden puede cambiar y no constituye una panacea ni la última palabra. Es una propuesta basada en una teoría, en la experiencia y en el enorme gusto por enseñar.

Propuesta didáctica: El Juego de dados Musical de Mozart

Mozart a sus 21 años utilizó el lanzamiento de dados para generar una composición de 16 compases que tituló "Juego de Dados musical para escribir valses con ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición".

Hay dos tablas, (ver figuras 1 y 2), una se utiliza para obtener los primeros ocho compases de la composición musical y la otra para construir los restantes ocho compases. Cada tabla consiste de ocho columnas y once filas. Las columnas corresponden a los compases y las filas corresponden al resultado de la suma del lanzamiento de los dados

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Fig. 2 Tabla generadora de los primeros 8 compases en una composición musical basada en el tiro de dos dados . Tomada de (Mozart, 1777).

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51.	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fig. 3Tabla generadora de los segundos 8 compases, tomada de (Mozart,1777).

Mozart designó los compases por columna siguiendo un sencillo patrón armónico de acuerdo a su época. En ella utiliza una escala o colección de sonidos denominada escala de Do mayor, donde los sonidos o notas musicales que más usa son el do, el fa y el sol, junto con los acordes que se construyen sobre ellas, teniendo una composición armonizada que se genera al ejecutar los compases hechos de acuerdo a las reglas anteriores y que se puede escuchar inmediatamente.

Experiencia realizada con los alumnos

Sujetos

Se trabajó con un grupo de 35 alumnos que cursaban el tercer semestre de la ingeniería en sistemas de computación, debido a que en el tercer semestre está ubicada la asignatura de Probabilidad. Como antecedente, ellos habían visto el tema de espacio muestral y el ejemplo del lanzamiento de uno y dos dados. Este grupo de estudiantes pertenece a una Escuela de Educación superior de la Ciudad de México.

De acuerdo a lo sugerido por (Poincaré, 1953) y Diennes, (1970), se inició la sesión con el lanzamiento de un par de dados y se les preguntó a los estudiantes cuál es la probabilidad más alta que se puede obtener al sumar dos de los valores obtenidos en los dados. Después de hacer varios lanzamientos y de entablar una discusión al respecto se llegó a que cuando la suma es 7 se obtiene la mayor probabilidad. Se determinaron las probabilidades de cada valor del espacio muestral de lanzar un par de dados y determinar su suma. Se continuó con una segunda pregunta que fue sobre alguna aplicación ya sea en matemáticas o en otra área del conocimiento, que tiene el empleo del espacio muestral mencionado. Algunos alumnos comentaron que podría ser en otros temas de la misma probabilidad o en algún juego cuyas reglas fueran las señaladas por la obtención de las probabilidades de los valores del espacio muestral.

Se formularon otras preguntas sobre la relación que podría existir entre la música y las matemáticas. Al respecto, algunos estudiantes, comentaron sobre lo que habían visto en la película en donde salía el Pato Donald y mostraba como las matemáticas están presentes en todo.

Posteriormente se les dijo que existía un juego llamado el juego de dados musical de Mozart y se les explicó en qué consistía:

Se emplearon las dos tablas descritas con anterioridad, la tabla 1 contienen los primeros 8 compases que empleó Mozart en sus composiciones musicales y la tabla 2 contiene los 8 restantes compases. Para obtener cada uno de los primeros 8 compases (numerados del I al VIII) se pidió al grupo lanzar un par de dados y anotar la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose 8 parejas de números o sumas, al lado del compás correspondiente, que en este caso lo denotamos como n1, n2, etc. (n1, I), (n2,II), (n3,III), (n4,IV), (n5,V), (n6,VI), (n7,VII) y (n8,VIII). Es decir, cada suma se asocia a un número de la tabla 1 (ver tabla 1) , generándose ocho compases: N1, N2, N3, N4. N5. N6. N7. y N8.

Los 8 compases siguientes numerados de la segunda composición (numerados del I al VIII), se obtienen al lanzar un par de dados y anotar la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose otras 8 parejas de números: (m1,I), (m2, II), (m3,III), (m4,IV), (m5,V), (m6,VI), (m7,VII) y (m8,VIII). Cada número se asocia con la tabla 2 (ver tabla 2) es la tabla 2 generándose los siguientes ocho compases: M1, M2, M3, M4, M5, M6,M7, y M8. Si la composición musical requiere de más de 16 compases se repite el experimento cuantas veces sea necesario.

Al trabajarlo con el grupo se obtuvo lo siguiente:

Se pidió que lanzaran un par de dados 8 veces y de acuerdo a la suma obtenida es que se asociaron a los primeros 8 compases. Algunos ejemplos son los que se muestran enseguida. Primero salió un dos en un dado y un tres en el otro, sus suma nos da 5 por lo que lo asociamos con el número 40 de la tabla 1, y se anotó en el pizarrón (40,I), después la suma fue 7 anotándose (157, II), las sumas de los siguientes seis lanzamientos fueron; 7, 7, 9, 7 y 9. El 7 se asoció con el número 27 de la tabla 1, quedando (27,III); el siguiente 7 se asoció con el número 45 de la tabla 1, quedando (45, IV); el 9 se asoció con el 140 de la tabla 1, cuyo par quedó como (140, V); el 7 se asoció con el 68 de la tabla, por lo que la pareja obtenida fue (68, VI), la siguiente suma obtenida fue 7 el cuál se asoció con el 118 de la tabla 1, obteniéndose como pareja (118, VII) y la última suma obtenida fue 9, el cual se asoció con el 94, quedando (94, VIII).

Después de anotar los 8 pares o las 8 parejas de números se procedió a tocar la melodía utilizando el simulador que se llevó. Cabe señalar que este simulador de música ya está adaptado para ser tocado de acuerdo a las posibles parejas que se obtienen con base en las dos tablas descritas (tabla 1 y tabla 2).

Pasó al frente un estudiante y tocó los 8 compases obtenidos, la melodía que se produjo fue parte de la de un vals de Mozart.

Por otra parte, cabe señalar que los alumnos concluyeron lo que Mozart había señalado, respecto a que su algoritmo hace que los compases del resultado 7, de las dos tablas, sean los que más aparecen, debido a que la suma 7 tiene mayor probabilidad de caer, siguiendo los resultados de las sumas 6 y 8, luego las sumas 5 y 9, después los resultados 4 y10 3 y 11 y finalmente la menor probabilidad de caer como suma es 2 y 12. En ese sentido los compases del resultado 5 al resultado 9 de las dos tablas genera una tendencia central o una distribución normal pues 10 resultados de 16 caen entre dichos números (63%). Los resultados 2, 3, 4, 10, 11y 12 a pesar de ser el 55% de las posibilidades sólo caen 6 resultados de 16 (17%), lo que confirma la veracidad del modelo de la función de densidad de probabilidad.

Resultados preliminares

Después de aplicar el juego de dados Musical de Mozart a un grupo de nivel superior, nos percatamos del gran interés y curiosidad mostrada por los alumnos, lo que coinicide por lo dicho por Poincaré (1953), al relacionar las definiciones con la educación y Diennes (1970), al iniciar la clase con un juego que conduzca a un problema. Hubo reflexión en torno a la parte de la probabilidad. Debido a las preguntas formuladas por los estudiantes. Observamos que las habilidades básicas en matemáticas (la de descubrimiento y la operatoria), afloraron en el estudiante. El pensamiento inductivo fue desarrollado como una capacidad matemática, lo que se pudo observar cuando recordaron la utilidad que tienen las matemáticas en otras áreas del conocimiento o en el juego como lo expresaron ellos al mencionar la película de Donald en varios de sus episodios.

El estudiante pudo llevar a cabo una aplicación del lanzamiento de dados visto en clase Además comprobó que la probabilidad está presente en varios campos, en este caso en la música.

Conclusiones

Es muy importante el dominio del contenido matemático, para evitar caer en una actividad puramente musical, sin embargo se requiere mostrar al estudiante las notas musicales lo que implica que tenga una noción básica de música.

Consideramos de gran interés para el estudiante el que se dé una interdisciplinariedad para que pueda establecer conexión entre las matemáticas y otras áreas. En este caso fue la música. También se estableció una relación con la historia al mostrar al estudiante que Mozart trabajó con las matemáticas ya desde el siglo XVIII.

Por otra parte la situación didáctica propició interés por parte de los estudiantes y la curiosidad por seguir investigando en otras áreas del conocimiento.

Como equipo de trabajo seguiremos aplicando esta propuesta en nuestros grupos y buscando otras alternativas que permitan establecer secuencias didácticas que contribuyan a que el estudiante logre relacionar y dar sentido a su aprendiza.

Referencias bibliográficas

Diennes, Z. P. (1970). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: Teide.

Meyer, P. (1970). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.* México: Fondo Educativo Interamericano. S. A.

Mozart, W. A. (1777). *El Juego de dados Musical***.** Berlin: Schott.

Poincaré, H. (1953). *Science et Méthode*. New York: Dover.

Walpole, R. E., Myers, R. H. y Myers, S. L. (2006). *Probabilidad y estadística para Ingenieros.* México: Pearson Prentice Hall.

IPN (2004). *Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN*. México: IPN.

FLEXIBILIDADE COGNITIVA E NIVEIS DE CONHECIMENTO: a NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

Marlene Alves Dias, Sirlene Neves de Andrade, Tânia Maria Mendonça Campos
UNIBAN Brasil
alvesdias@ig.com.br, sirlene-neves@uol.com.br, taniammcampos@hotmail.com
Campo de investigación: gráficos, funções Nivel: Médio

Resumo. *Centrado na noção de níveis de conhecimento conforme definição de Robert (1997) apresentamos os resultados das análises sobre as possibilidades de articulação de quadros, representações semióticas e pontos de vista quando se considera a abordagem da noção de função afim no Ensino Médio. Para tal identificamos as relações institucionais esperadas e existentes por meio da análise de documentos oficiais e livros didáticos e a relação pessoal desenvolvida por um grupo de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública do estado de São Paulo. Os resultados encontrados colocam em evidência que existe uma preocupação institucional em se considerar a articulação entre os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental e no decorrer do Ensino Médio. Apesar do trabalho desenvolvido institucionalmente, poucos estudantes do grupo analisado são capazes de desenvolver um trabalho onde essas articulações são necessárias.*
Palavras-chave: Flexibilidade cognitiva, níveis de conhecimento, função afim

Introdução

A deficiência no processo de ensino aprendizagem atinge todos os níveis e tem diversas causas. Em diversos países, existem grupos que tentam estudar novas formas para melhorar essa situação. Nessa pesquisa nosso objetivo é estudar as deficiências relativas ao trabalho com a matemática, principalmente no que se refere ao estudante do Ensino Médio. Pretendemos com essa análise, propor novos meios de reflexão que possibilitem um tratamento mais eficiente da noção de função afim.

Em geral, os professores na transição de uma etapa escolar a outra reclamam que seus estudantes não estão suficientemente preparados e, em geral, eles atribuem as dificuldades encontradas à falta de conhecimentos prévios em relação aos conteúdos supostos disponíveis e que deveriam ser facilmente articulados sem necessidade de serem evocados ou pedidos explicitamente. Essa condição conduz alguns estudantes a uma situação de desinteresse difícil de ser ultrapassada, uma vez que, a falta de conhecimentos mobilizáveis e disponíveis tende a aumentar no decorrer das diferentes etapas da escolaridade.

Isso se reflete na qualidade de ensino da matemática no Ensino Médio e Superior. Sendo assim, escolhemos trabalhar a questão da *flexibilidade cognitiva*, isto é, a capacidade de trabalhar e articular diversos quadros, podendo efetuar mudanças de quadro quando necessário, sem que para isso seja feito algum apelo explícito, utilizar a representação mais adequada para a resolução de uma tarefa, articular diferentes pontos de vista e concepções; saber planejar, analisar, desenvolver, justificar e controlar o trabalho matemático executado.

Escolhemos assim, analisar quais as condições necessárias para que o estudante possa articular de forma autônoma as noções associadas ao conceito de função afim, uma vez que essa noção é fundamental para a maioria dos cursos de exatas do Ensino Superior. Trata-se de uma noção essencial para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral que é uma disciplina que no Brasil, em geral, apresenta altos índices de reprovação.

Iniciamos assim, este trabalho com o seguinte questionamento:

1) Como estão sendo trabalhados institucionalmente os níveis de conhecimento técnico, mobilizável e disponível, definidos por Robert (1997), no Ensino Médio?

2) Quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes para a noção de função afim, quando se considera as relações institucionais existentes para o Ensino Médio?

Analisamos, assim, o funcionamento institucional dos três níveis de conhecimento para a noção de função afim conforme definição proposta por Robert (1997) considerando também a noção de relações institucional e pessoal de Chevallard (1996).

Na sequência apresentamos o referencial teórico utilizado para o desenvolvimento da pesquisa. Essas abordagens teóricas permitiram construir a grade de análise para a qual damos um exemplo de seu funcionamento.

Referencial teórico da pesquisa

Para tratar as questões levantadas acima, escolhemos como referencial teórico central a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997), que distingue os níveis técnico, mobilizável e disponível que são relativos, pois funcionam dependendo do nível de conceituação escolhido para o desenvolvimento

de um determinado conteúdo matemático. O trabalho nesses três níveis pode exigir mudanças de quadros conforme definição de Douady (1984) ou de pontos de vista como define Rogalski (1995), sendo que tanto as mudanças de quadros como de pontos de vista podem exigir ainda a conversão de registros de representação semiótica que aqui é tratada segundo definição de Duval (1993, 1995).

Para melhor compreender como o ensino trata a questão da flexibilidade cognitiva, em função das escolhas teóricas apresentadas acima, consideramos as noções de relação institucional e pessoal definidas por Chevallard (1996) e Bosch e Chevallard (1999), que a partir das noções primitivas de objeto, pessoas e instituição definem relação institucional à um objeto quando pelo menos uma instituição reconhece o mesmo como objeto do saber e relação pessoal quando esse último é reconhecido por pelo menos uma pessoa. Isso nos permitiu conceber as relações institucionais esperadas, aqui analisadas por meio de documentos oficiais, as relações institucionais existentes, estudadas por meio dos livros didáticos e as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes, ou seja, as marcas das relações institucionais, aqui examinadas por meio de uma macro avaliação.

Consideramos, mais particularmente, a abordagem em torno dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997), por tratar-se de uma análise mais global onde as abordagens consideradas acima também são levadas em conta.

Descrevemos brevemente, a seguir, a metodologia da pesquisa.

Metodologia da pesquisa

A pesquisa se desenvolveu em duas fases, inicialmente fizemos uma análise institucional das possibilidades de articulação entre as diferentes formas de tratamento da noção de função afim via Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000, 2006) e livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (Brasil, 2005). Em seguida, analisamos as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes de uma escola pública de São Paulo, via questões sobre a noção de função afim encontradas na prova de avaliação do sistema de ensino paulista.

Para a análise institucional se considera:

- Uma análise das sugestões feitas nos documentos oficiais em relação à articulação entre as possíveis formas de tratamento da noção de função afim, via Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 2000) e Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (PCN +, 2006).

- Uma análise para observar como é proposto o trabalho sobre a noção de função afim em dois livros didáticos destinados aos estudantes do Ensino Médio indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio do Ministério da Educação (Brasil, 2005).

Para a análise das relações pessoais desenvolvidas pelo grupo de estudantes se considera:

- Uma análise dos resultados obtidos pelos estudantes de uma escola pública estadual, localizada em um bairro da Zona Sul de São Paulo para as questões do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, 2005) que versam sobre a noção de função afim.

Para as análises propostas acima, construímos a seguinte grade de análise.

A grade de análise

O propósito dessa grade é de servir como um instrumento que permita analisar os diferentes níveis de conhecimento exigidos dos estudantes num curso de introdução à noção de função afim no Ensino Médio. Ela permite analisar os três níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) exigidos dos estudantes:

- Em função das **tarefas** associadas à noção de função afim encontradas no Ensino Médio;
- Em função **das variáveis dessas tarefas**, para as quais damos ênfase ao nível de conhecimento pedido explicitamente no enunciado e os diferentes níveis de conhecimento de outras noções que devem ser utilizados para sua solução.

As variáveis das tarefas são definidas abaixo:

- O nível de conhecimento proposto pela tarefa;
- Os registros de representação dados no enunciado;
- O quadro em que a tarefa é enunciada;

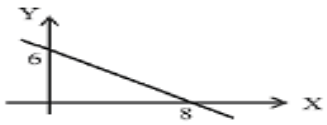
- Os tipos de representações exigidos na solução da tarefa;
- Os níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas.

Exemplo de funcionamento da grade em uma tarefa

Tarefa geral: Conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito.

Na figura 1 apresentamos um exemplo desse tipo de tarefa.

14. No gráfico abaixo, você vê uma reta que corta o eixo X e o eixo Y no ponto de ordenada 6. A equação dessa reta é



(A) $y = -\frac{3}{4}x + 6$
(B) $y = \frac{3}{4}x + 6$
(C) $y = -6x + 8$
(D) $y = 6x + 8$

Figura 1: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio, período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural;
- Quadro em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfica, registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: mobilizar a noção de função afim e articular com: a noção de inclinação

da reta (coeficiente angular e coeficiente linear). Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependem do caminho escolhido para solução.

A análise dos documentos oficiais

Ao examinar os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000, 2006) observamos que existe uma preocupação com o trabalho articulado entre a noção de função afim com as noções de progressões, as noções associadas ao quadro da Geometria Analítica, a noção de polinômio. Além disso, sugere-se que é importante desenvolver as habilidades de leitura e interpretação dos registros de representação gráfica, mesmo se não tratam a questão com essa terminologia. Propõe-se, também, a articulação com outros quadros como os quadros da física, da economia, etc. e que se utilize situações que podem ser identificadas pelos estudantes como cotidianas.

A análise dos livros didáticos

A análise dos livros didáticos foi estruturada em torno das seguintes questões:

- Como é introduzida a noção de função afim, quais representações são utilizadas e como elas se articulam?

- Que pesos respectivos ocupam os níveis: técnico, disponível e mobilizável nas tarefas propostas aos estudantes?

- Que tipo de discurso acompanha as tarefas resolvidas e se esse auxilia os estudantes no desenvolvimento dos níveis mobilizável e disponível?

Analisamos os livros didáticos avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (Brasil, 2005) e apresentamos aqui os resultados de Dante (2005). Para a introdução da noção de função afim, verificamos que, em geral, esse livro didático começa com a definição algébrica utilizando símbolos e fórmulas. Alguns procedimentos são apresentados por meio de exemplos específicos, ou ainda, nos exercícios resolvidos e problemas propostos, onde aparecem algumas articulações, por exemplo: temperatura em função de tempo, custo em função de tempo, havendo uma preferência por casos em que os cálculos não são complicados, pois o que se visa é a compreensão do procedimento e o raciocínio do estudante.

Análise dos resultados obtidos pelos estudantes de uma escola publica do estado de São Paulo no Saresp (2005) - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

Trata-se de um resultado parcial que permite compreender melhor a relação que os estudantes de uma escola estadual de São Paulo desenvolveram em relação ao objeto função afim.

Na figura 2 apresentamos um exemplo de tarefa dessa avaliação.

07. Para estipular o preço por seu trabalho, o pintor de paredes André cobra uma taxa fixa de R$ 50,00 e mais uma taxa de R$ 10,00 por m^2 pintado. André vai pintar uma parede de $10m^2$. Quanto André cobrará por esse trabalho?

(A) R$ 50,00
(B) R$ 100,00
(C) R$ 150,00
(D) R$ 200,00

Figura 2: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio, período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: Disponível;

II - Conhecimentos supostos disponíveis para solução da tarefa:

Aplicação das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão); lei de formação (fórmula) de uma função afim através da fórmula f(x) = ax + b.

Desempenho dos estudantes

Questão 07	Turma D	%	Turma E	%	Turmas D + E	%Turmas D + E
A	1	3,6	1	3,3	2	3,4
B	2	7,2	9	30	11	19
C	8	28,5	12	40	20	34,5
D	17	60,7	8	26,6	25	43,1
Total	28	100	30	100	58	100

Quadro 1: Desempenho dos estudantes

Comentarios

Por meio dos dados obtidos, verificamos que apenas 34,5% dos estudantes responderam corretamente à questão, podemos considerar que a dificuldade está na interpretação do problema e no fato de precisarem mobilizar conhecimentos prévios sobre a noção de cálculo de área para saber quantos metros quadrados foram pintados, o que parece não estar disponível para muitos desses estudantes, em especial, para os estudantes da Turma D. Vale ressaltar a diferença estabelecida entre as turmas D e E, pois na Turma D, a maioria dos estudantes optou pela alternativa D, o que já não ocorreu com a Turma E, onde um número maior de estudantes optou pela alternativa correta. Podemos concluir que existe um grande trabalho a ser realizado para melhorar esses resultados.

Considerações Finais

A análise dos livros didáticos pode ser considerada como um meio eficaz para compreender quais os conhecimentos matemáticos necessários para compreender a noção de função afim, e como esses mesmos conhecimentos podem ser aplicados de forma eficaz. Além disso, com essa mesma análise é possível saber qual o nível de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) pode ser esperado dos estudantes que terminam o Ensino Médio e qual o nível de conhecimento que era esperado dos estudantes que terminam o Ensino Fundamental em relação aos conhecimentos matemáticos que podem ser associados à noção de função afim.

Os documentos propõem que o professor desenvolva um trabalho onde as mudanças de quadros, conversão de registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, mesmo se não tratadas com esta terminologia, são componentes essenciais que devem ser trabalhadas no Ensino Médio.

A grade de análise serviu como instrumento para a análise das relações institucionais. Além disso, a grade ao ser aplicada sobre as questões do SARESP permitiu reconhecer que nível de conhecimento é realmente esperado dos estudantes no final de cada série em relação à noção de função afim e as suas possíveis articulações.

É importante ressaltar que nos livros didáticos destinados aos estudantes do Ensino Médio podemos observar uma preocupação em desenvolver atividades que exigem a conversão dos registros de representação semiótica, mesmo se essa terminologia não é utilizada. Os autores

mostram, sem serem exaustivos, como essas possibilidades podem ser realizadas, com uma ênfase maior ou menor para determinadas conversões que dependem das escolhas pessoais, permitindo assim, uma visão geral dos diferentes casos que podem ser considerados.

Com relação às tarefas destinadas aos estudantes, que foram analisadas nos dois livros didáticos do Ensino Médio, verificamos que na maioria dos casos, fica a cargo do estudante desenvolver a maioria das tarefas que apresentam um contexto de uma situação-problema, exigindo dele um bom nível de leitura e interpretação de textos, além de conhecimentos matemáticos ou relacionados a outras ciências que se supõe tenham sido adquiridos anteriormente e que nesse momento são considerados disponíveis.

Dessa forma, mesmo que as propostas de articulação das diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim e suas respectivas representações, ainda que não sejam tratadas apor meio dessa terminologia, vêm sendo consideradas essenciais, como mostra a análise institucional fundamentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos livros didáticos, existe ainda uma imensa distância entre o que é proposto institucionalmente e o que os estudantes foram capazes de desenvolver. Isso mostra que temos um enorme caminho a percorrer e que é necessária uma maior atenção por parte dos professores em relação a este tipo de articulação, pois na maioria dos casos apresentados, o nível de conhecimento exigido dos estudantes é o disponível e não se pode dizer se o desempenho dos estudantes foi bom ou ruim, apenas constamos que eles têm dificuldades em reconhecer as articulações entre a noção de função afim com outras noções tanto dentro quanto fora da matemática, o que nos permite supor que essas dificuldades estão associadas a uma falta de trabalho com tarefas em que os níveis de conhecimento em jogo são o mobilizável e disponível.

Referência bibliográfica

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123.

Brasil. (2000) Secretaria de Educação Média e Tecnológica**.** *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio* / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC.

Brasil. **(**2006). *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias* / Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em: 20 de março 2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Brasil**.** (2005) *Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005* / Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Chevallard, Y. (1996) Les outils sémiotiques du travail mathématique *Petit-x* 42, 33-57.

Dante, L.R. (2005) *Matemática: livro do professor.* São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Duval, R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitive* 5, 37-65.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine.* Paris :.Peter Lang.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 193-212). França: Houlgate.

Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do Seminário em São Paulo*. Brasil.

São Paulo (2005) *Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas*. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo: Secretaria de Estado da Educação de São Paulo.

EXPLORANDO MI UNIVERSO GEOMÉTRICO DE SEXTO GRADO

Genny Rocío Uicab Ballote, María del Pilar Rosado Ocaña
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
uballote@uady.mx, rocana@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico

Resumen. *El presente trabajo, se enfoca en el diseño de actividades para sexto grado de primaria correspondiente a los ejes de Geometría y Medición, con el propósito de proporcionar a los educandos una nueva perspectiva de hacer matemáticas, a través de actividades diseñadas para trabajar en un ambiente de geometría dinámica, que les resulte innovador. De tal manera que los estudiantes construyan conocimientos a través de actividades que susciten su interés, mantengan su atención y los hagan involucrarse en la resolución de un problema.*
Palabras clave: Geometría y medición, geometría dinámica, innovación didáctica

Introducción

Proporcionar a los educandos de 6° grado de primaria una nueva perspectiva de *hacer matemáticas*, a través de actividades diseñadas para el eje de Geometría y Medición, considerando que los estudiantes construyan los conocimientos a través de actividades que susciten su interés, mantengan su atención y los hagan involucrarse en la resolución de un problema; es el objetivo general de nuestro trabajo. Como responsables de este proyecto, nuestro interés de enfocarnos en el nivel básico, surge, porque consideramos que el cimiento -contenido- matemático debe fortalecerse en ese nivel, no en el contexto axiomático de la matemática, sino en su esencia intuitiva pero formal, que permita a los niños de primaria experimentar de una manera grata y creativa, el contenido matemático.

Marco de referencia y objetivo

El Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, establece en su Eje 3. Igualdad de Oportunidades: *que hoy, en un mundo cada vez más competitivo, todos los actores sociales, incluidos el gobierno, los maestros y los padres de familia coinciden en que el conocimiento se ha transformado en el factor más importante para incrementar la competitividad del país*. En su objetivo 9, en relación a "Elevar la Calidad Educativa", dicho plan, señala (estrategia 9.3) *que la educación es un gran motor para estimular el crecimiento económico, mejorar la competitividad e impulsar la innovación. Para esto, los programas de estudio deben ser flexibles y acordes a las necesidades cambiantes del sector*

productivo y a las expectativas de la sociedad. Los métodos educativos deben reflejar el ritmo acelerado del desarrollo científico y tecnológico y los contenidos de la enseñanza requieren ser capaces de incorporar el conocimiento que se genera constantemente gracias a las nuevas tecnologías de información.

Asimismo, el proyecto PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos), programa promovido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, una organización intergubernamental de países industrializados -entre ellos nuestro país- que actúa como foro de promoción del desarrollo económico y social de los países miembros); basa la evaluación de las matemáticas en el concepto de *"literacy"* o *"alfabetización matemática".* Este concepto se refiere a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicarse lo más eficazmente posible cuando tienen que plantear, interpretar o resolver problemas matemáticos que pueden darse en diversas situaciones de la vida ordinaria. La *alfabetización matemática* expresa, los usos más generales y amplios que pueden hacerse de las matemáticas en la vida de las personas y no se limita al manejo simple de operaciones mecánicas.

El contenido matemático que encontramos en los libros de primaria ha sufrido su proceso de evolución a la par que las tendencias de cada época. A lo largo de varias décadas hoy no sólo se han modificado los contenidos (el *qué* se enseña), sino el para *qué* y *cómo* se enseñan. En esa dirección, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han ido adquiriendo en distintos tiempos, enfoques, estrategias y uso de recursos diferentes *ad hoc* a la reforma del momento. En la actualidad, los propósitos generales enunciados por la SEP señalan al desarrollo de capacidades y habilidades consideradas necesarias para usar los conocimientos adquiridos o para avanzar hacia otros niveles de conocimiento en la línea de contenidos matemáticos. De acuerdo con Alatorre, De Bengoechea, López, Mendiola y Sáiz, (1999) estos propósitos conjuntamente con la lista establecida de contenidos, apuntan a metas altas e implican bastante más que el aprendizaje mecanicista de una serie de definiciones, algoritmos y fórmulas; implican conocer el significado de los objetos matemáticos, comprender sus relaciones, y saber cómo aplicar las operaciones, para qué y cuándo. Se aprecia entonces que la metodología que subyace a estos propósitos debiera estar centrada en considerar al individuo, como ser biológico y social cuyas capacidades y habilidades se van desarrollando gradualmente, que parte de lo concreto hasta acciones mentales abstractas, y que ese saber interiorizado requiere ser consensuado a través de una comunidad que

lo valida. En ese sentido, podemos recorrer en la historia y encontrar a grandes pedagogos preocupados en cómo aprende el individuo, cuyas teorías hoy emergen e influyen en cómo mejorar la calidad educativa.

Siguiendo esa trayectoria, sugerimos que las matemáticas sean transmitidas estimulando por una parte las acciones concretas en los niños, que la realidad sirva como referente de aplicación, que sean presentadas de tal manera que se motive a los niños a encontrar y reflexionar sobre sus procedimientos, estrategias y errores y que además el aprendizaje se propicie como una actividad social y no individual. Es importante para ello, (Cabello, 2006) considerar las herramientas pertinentes en el aula es decir, qué materiales o recursos didácticos son los adecuados y cobran una especial importancia en su faceta de motivadores del proceso formativo de los niños y niñas; el término motivador hace referencia a los materiales educativos que fomentan la exploración, manipulación y comprensión de los contenidos matemáticos siguiendo modelos de enseñanza - recreativo, reflexivo o cotidiano - que respondan a las necesidades educativas de los estudiantes y, por ende favorezca al proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas. Así, el objetivo general de nuestro trabajo consiste en proporcionar a los educandos de 6° grado de primaria una nueva perspectiva de "hacer matemáticas", a través de actividades diseñadas para trabajar en el ambiente Cabri-Géomètre II Plus y Cabri 3D. Asimismo, los planteamientos de los planes y programas de estudio vigentes (en educación básica), señalan, que los estudiantes deben construir los conocimientos a través de actividades que susciten su interés, mantengan su atención y los hagan involucrarse en la resolución de un problema.

Metodología

La unidad didáctica que abarcamos en esta propuesta es la correspondiente a los ejes temáticos de Geometría y Medición. Aunque nuestro foco de atención es el eje de Geometría, los contenidos de ambos ejes están relacionados.

Eje de Medición. El interés central a lo largo de la primaria en relación con la medición es que los conceptos ligados a ella se construyan a través de acciones directas sobre los objetos, mediante la reflexión sobre esas acciones y la comunicación de sus resultados. Los contenidos de este eje

integran tres aspectos fundamentales: el estudio de las magnitudes, la noción de unidad de medida y la cuantificación, como resultado de la medición de dichas magnitudes.

Eje de Geometría. A lo largo de la primaria, se presentan contenidos y situaciones que favorecen la ubicación del alumno en relación con su entorno. Asimismo se proponen actividades de manipulación, observación, dibujo y análisis de formas diversas. A través de la formalización paulatina de las relaciones que el niño percibe y de su representación en el plano se pretende que estructure y enriquezca su manejo e interpretación del espacio y de las formas. Los contenidos de este eje se agrupan en tres aspectos básicos que son: Ubicación espacial, cuerpos geométricos y figuras geométricas

Contrastando la información del aprendizaje que se espera lograr en el 6° grado de primaria (por supuesto con el antecedente de los primeros 5 años de estudio primario) y la revisión de los contenidos temáticos que se presentan en el Libro para el Alumno de Balbuena, Block, Fuenlabrada y Waldegg, (2001); Alatorre et al, (1999) en un estudio que realizaron (titulado: Propósitos y Contenidos de la Enseñanza de las Matemáticas en el Nivel de Educación Primaria en México) analizaron detalladamente las lecciones de todos los libros de texto, encontrando que el eje de Geometría, globalmente, no se encuentra bien estructurado. Se presentan tres líneas de trabajo: por un lado se encuentran actividades que apuntan hacia el plano cartesiano, por otro lado hay actividades que apuntan a la geometría euclidiana y, por último, otras que apuntan hacia un trabajo de la geometría de las transformaciones del plano. La ubicación de las actividades de las tres líneas parece azarosa y no se percibe coherencia en la estructuración de los contenidos del eje. Tomando en cuenta este referente, decidimos basarnos principalmente en el Libro para el Alumno pero considerando los resultados del trabajo realizado por Alatorre et al, (1999) con el fin de integrar las actividades de forma coherente y relacionada persiguiendo con esas actividades atender el objetivo de que los estudiantes construyan los conocimientos a través de actividades que susciten su interés, mantengan su atención y los hagan involucrarse en la resolución de un problema. Así, en conjunto con un equipo de trabajo, conformado por nosotras y tres estudiantes, diseñamos algunas actividades para el alumno, correspondientes a los temas comprendidos en los ejes de Geometría y Medición, las cuales describimos de manera breve en el presente trabajo.

Descripción de las actividades

El orden en el que presentamos las actividades propuestas para los alumnos está relacionado con una propuesta de modificación al orden del programa de 6° grado; pero con base en las ideas presentadas en las actividades de los libros para el alumno y el libro para el maestro de Bonilla, Martínez, y Ramírez, (1994) . En algunas de las actividades se espera que el profesor sea quien de las instrucciones básicas al alumno y que éste interactúe directamente con el software, en otras actividades se pretende proporcionar a los alumnos una hoja de trabajo con instrucciones que deberá seguir para interactuar con la construcción. Se presentan cinco actividades, las cuales describimos a continuación.

Iniciamos con la actividad "*Juego: desplazamiento de carritos en el plano*", la cual está conformada de tres partes en las que se pretende que el alumno realice movimientos de carritos en el plano (a manera de juego) e identifique los tipos de triángulos que se forman entre los tres carritos al ir cambiando de lugar en el plano.

La intención es presentar a los alumnos (formados en equipos de 3) la actividad a través del software y proporcionarles una hoja de trabajo con una secuencia de preguntas estructuradas con la intención de que realicen los desplazamientos de carritos en diferentes puntos del plano y establezcan la relación de los segmentos que unen a los carritos dos a dos con diferentes tipos de triángulos (según la medida de sus lados). (Figura 1).

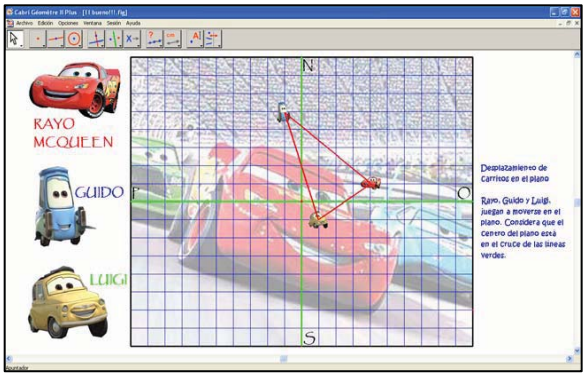


Figura 1. Desplazamiento de carritos en el plano

La segunda actividad es el "tangram dinámico", en la cual se pretende primeramente, que el alumno reproduzca la construcción del tangram en una cuadrícula dada y posteriormente, que forme figuras propuestas con las piezas movibles de un tangram que le serán proporcionadas. En esta actividad los estudiantes deben interactuar directamente con el software y seguir las instrucciones que se les proporcionan en las diferentes pantallas para cada parte de la actividad. (Figura 2).

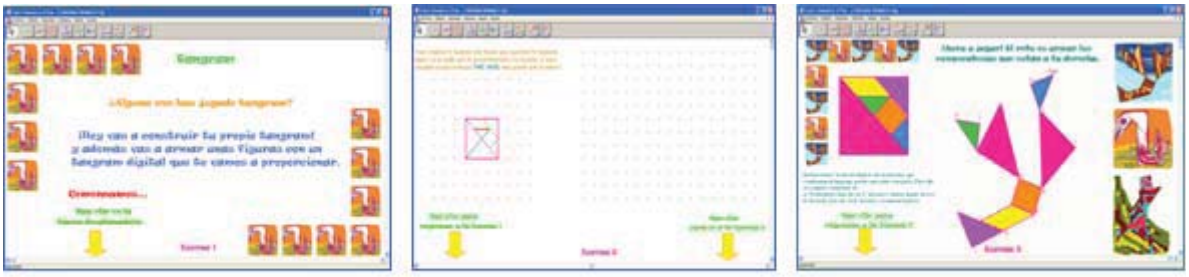


Figura 2. Tangram dinámico

Posteriormente, presentamos la actividad *"Construyendo figuras planas"* en la que el alumno podrá calcular áreas de polígonos. En esta actividad, el propósito es presentar a los alumnos -a través del software- y proporcionarles una hoja con una secuencia de instrucciones y preguntas para que el alumno reflexione acerca de los conceptos involucrados en la construcción de las figuras planas y sus áreas, específicamente se trabajan los triángulos, los paralelogramos y los trapecios. (Figura 3).

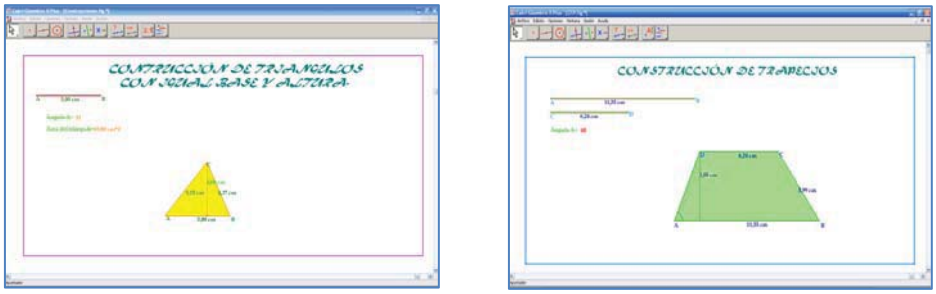


Figura 3. Construyendo figuras planas.

La cuarta actividad se denomina *"Ejes de simetría"* en la cual se muestra la relación entre los ejes de simetría de polígonos regulares con el número de lados del polígono. En esta actividad, se pretende que los alumnos exploren varios casos, de tal forma que dicha exploración les permita llegar a la generalización del número de ejes de simetría para un polígono de 50 lados. Esta actividad tiene dos actividades complementarias en una de las cuales se relacionan las áreas de

polígonos regulares con el área de un paralelogramo y en la otra se relaciona la medida de los ángulos centrales de los polígonos regulares con el número de lados del mismo. (Figura 4).

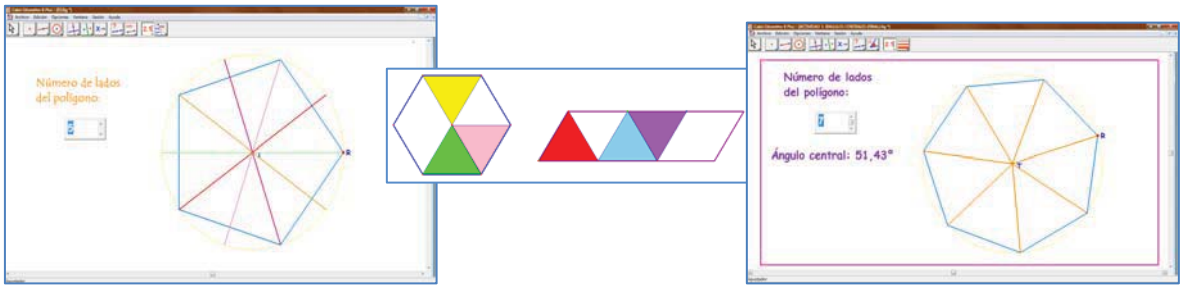


Figura 4. Ejes de simetría

Por último, el diseño de la actividad *"Explorando los elementos que forman los cuerpos geométricos"* (diseñada con el Cabri 3D), pretende presentar al alumno los cuerpos geométricos (prismas y pirámides), proporcionándoles una hoja con instrucciones y preguntas (en el mismo software). Se espera que los alumnos relacionen la forma de cada cuerpo geométrico con la plantilla que lo genera y de esta manera observen y concluyan los elementos que conforman a cada uno de estos cuerpos tridimensionales. (Figura 5).

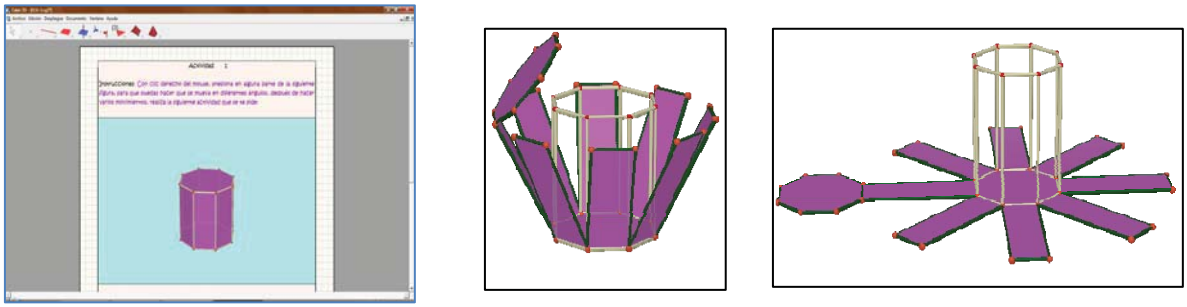


Figura 5. Explorando los elementos que forman los cuerpos geométricos.

Comentarios y conclusiones

En el trabajo se plantearon como objetivos específicos, que los estudiantes: i) identifiquen características y propiedades geométricas, de los contenidos de los ejes de Geometría y Medición

en 6° grado de primaria; ii) que interpreten y analicen situaciones geométricas, presentadas al interactuar con las actividades diseñadas con el software; iii) que desarrollen habilidades en las que empleen estrategias, por medio de las actividades diseñadas como secuencias de instrucciones y preguntas complementando la interacción con el software; y iv) que los alumnos desarrollen habilidades para conjeturar; lo cual consideramos que es posible de lograr a través del desarrollo de las actividades propuestas. De esta manera, concluimos que el trabajo presenta una opción de integrar las actividades correspondientes a los ejes de Geometría y Medición de manera coherente y relacionada persiguiendo de esta manera atender el objetivo de que los estudiantes construyan los conocimientos a través de actividades que susciten su interés, mantengan su atención y los hagan involucrarse en la resolución de problemas.

En el documento que reporta nuestro proyecto, se presentan las descripciones de las construcciones realizadas en el Cabri II Plus para las cuatro primeras actividades descritas anteriormente y las realizadas en el Cabri 3D para la última actividad descrita para los cuerpos geométricos; sin embargo en este escrito no sería posible incluirlo por la extensión del mismo. Consideramos que los profesores que se enfrenten a estas actividades, las podrán reproducir con algunas modificaciones que consideren pertinentes e incluso variar en alguna parte el proceso de construcción, adecuándolo a las necesidades que surjan y creando nuevas actividades para contribuir de alguna manera con los propósitos de la enseñanza de los ejes de Geometría y Medición para el nivel primaria.

Finalmente, esperamos que esta propuesta sea de utilidad y provecho para todos los profesores de primaria y especialmente para los que imparten clases en el sexto grado de primaria.

Referencias bibliográficas

Alatorre, S., De Bengoechea, N., López, L., Mendiola, E., Sáiz, M. (1999). *Propósitos y contenidos de las Matemáticas en el nivel de educación primaria en México.* México. Universidad Pedagógica Nacional.

Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I., Waldegg, G. (2001). *Matemáticas. Sexto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

Bonilla, E., Martínez, A., Ramírez, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas Sexto grado.* México: Secretaría de Educación Pública.

Cabello, G. (2006). *La enseñanza de la geometría aplicando los modelos de recreación y reflexión a través de la funcionalidad de materiales educativos.* Recuperado el 25 de abril de 2008 de http://www.cientec.or.cr/matematica/memoriaV.html.

Poder Ejecutivo Federal. (2007). Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, México. Recuperado el 20 de abril de 2008 de

http://pnd.calderon.presidencia.gob.mx/pdf/Eje3_Igualdad_de_Oportunidades/3_3_Transformacion_Educativa.pdf

Secretaría de Educación Pública. (1993). *Plan y programas de estudio 1993,* México.

DISEÑO INSTRUCCIONAL CON APOYO DE OBJETOS PARA APRENDIZAJE DE LOS CONTENIDOS DE LA UNIDAD 2 DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS I DE LA DGEST

Rafael Pantoja, Edgar Añorve, Leopoldo Castillo, Enrique Gómez, Karla Puga
IT de Ciudad Guzmán, DGEST, SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara México
rpantoja@prodigy.net.mx, eanorve@gmail.com
Campo de investigación: Gráfica y funciones Nivel: Medio superior y superior

Resumen. *El diseño Instruccional se integró de actividades sustentadas en objetos para aprendizaje (OPA): 17 videos digitales con los contenidos de funciones reales de una variable real integrados en dos DVD, para consultar en computadora o residencial, el multimedia "Graficación", la guía de estudio y un cuaderno de trabajo, directrices de las actividades que los alumnos desarrollaron en el aula, en el laboratorio de matemáticas y extraclase. Por ser una investigación de corte educativo, la motivación y la satisfacción por el uso de los medios y materiales empleados, que de acuerdo a una encuesta aplicada, fue agradable para los estudiantes. El diseño instruccional fue adecuado para fomentar el aprendizaje, además de promover la capacidad de autogestión y trabajo colaborativo. Del análisis de los datos obtenidos de los instrumentos de evaluación (examen de diagnóstico, postest, encuesta y observación directa en el aula), se afirma que existe una diferencia significativa positiva sobre los resultados de aprendizaje obtenidos por los grupos experimental y de control.*
Palabras clave: Funciones, diseño instruccional, objeto para aprendizaje, modelo didáctico

Introducción

En el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán (ITCG) dependiente de la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST), los integrantes de la Academia de Ciencias Básicas de Ingeniería (ACBI), se han preocupado por el elevado índice de reprobación y consecuente deserción de los alumnos que cursan Matemáticas I. Una de las acciones con las que se ha intentado que el alumno logre defender su permanencia con conocimiento en el ITCG, es la acreditación del curso de inducción anual de aritmética y álgebra (Pantoja, 2002; Rodríguez, 2005; Ortega, 2005), fortalecido con el programa multimedia E-math (Puga, Añorve y Puga, 2007), cuyos resultados reflejan un avance en su aprendizaje, pero no satisfactorio, porque de acuerdo a las evaluaciones realizadas, son aún pobres los resultados de aprendizaje en el curso de Matemáticas I.

La ACBI se dio a la tarea de situar la forma de enseñanza de Matemáticas I y se identificó que no existe una estrategia didáctica y una pobre elaboración de materiales de apoyo para el aprendizaje de los contenidos, así que se planteo desarrollar el proyecto de investigación registrado ante la

DGEST, *Diseño de Objetos para Aprendizaje en el tema de Funciones del curso de Matemáticas I en las carreras de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán*, en el que se desarrolló el diseño instruccional (Dick & Carey, 1996) para la unidad 2 del programa vigente de Matemáticas I con soporte en las nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC´s), porque como lo ha señalado Echenique (1994, p. 18), el material audiovisual y multimedia son un buen complemento para el material escrito, ya que ilustra situaciones que en el pizarrón son difíciles de describir, además de que brindan la posibilidad de reorganizar los cursos y los métodos pedagógicos en universidades del mundo, tendientes a ofrecer servicios de instrucción, capacitación y actualización (UNESCO, 1998).

Así pues, la ACBI diseñó un ambiente para aprendizaje, presencial y virtual, con soporte en el diseño Instruccional (Dick y Carey, 1996) y las nuevas TIC´s (Yelland y Masters, 1997, Materi y Fahy, 2004; Mason y Rennie 2004), que propició, entre otras cosas, la interactividad y la comunicación entre los actores del proceso educativo, en las que se promovieron distintos acercamientos al concepto de función: analítico, verbal, numérico y gráfico. En Guàrdia y Sangrà (2005) se especifica como punto medular que la estructura de los medios y materiales se fundamente en alguna de las teorías modernas del conocimiento y en esta investigación se sustentó en la teoría de cognoscitiva, en la que se sugiere que con un trabajo adecuado en los conocimientos previos, el estudiante tiene más posibilidades de aprender, por lo que se encargó a los estudiantes, organizados en grupos colaborativos, analizar los contenidos de los DVD fuera del aula y contestaran los cuestionarios y el problemario, elaborados para tal fin, para que en la sesión de clase siguiente, se discutieran con todo el grupo, coordinados por el profesor.

Modelo didáctico

El modelo didáctico en que se apoyó el Diseño Instruccional (Caracheo, Gudiño, López y Pantoja, 2000), se integra de nueve actividades desarrolladas por la ACBI, descritas a continuación:

Actividad 1: La selección de los contenidos: Funciones reales de una variable real.

Actividad 2: Los actores en la enseñanza y el aprendizaje. El profesor diseñó y construyó los 17 videos digitales integrados en dos DVD, generó el cuaderno de trabajo donde se integraron las lecturas, los cuestionarios, los problemarios y por último, los instrumentos de evaluación. El

alumno observó y discutió con sus compañeros los videos, respondieron los cuestionarios y los problemarios. Posteriormente, en el aula se discutió con el profesor y con sus compañeros sobre los contenidos de funciones.

Actividad 3: El contenido en la enseñanza y el aprendizaje. Los definidos en la unidad 2 del programa vigente de Matemáticas I de las carreras de ingeniería del la DGEST.

Actividad 4: Los principios de la enseñanza y del aprendizaje. Son dos: con el apoyo de la tecnología se adquiere aprendizaje; la discusión en el aula se enriquece cuando los alumnos tienen ya un conocimiento previo del tema a discutir.

Actividad 5: Los métodos y las técnicas. El aprendizaje autogestivo y la discusión en grupo colaborativo en el aula.

Actividad 6: Los medios y materiales para la enseñanza y el aprendizaje. Los productos obtenidos son:

- Dos DVD con la teoría del concepto de función real de una variable real.
- El multimedia interactivo "Graficación", que se elaboró con los programas de cómputo: WinPlot®, Studio 11 Plus®, Audacity®, Flash Macromedia 8® y Power Point®.
- Cuaderno de trabajo: Funciones reales de una variable real con dos DVD y un CDROM con el multimedia "Graficación".

Actividad 7: Diseño del ambiente de aprendizaje. Se describe en el apartado metodología del escrito.

Actividad 8: Evaluación en la enseñanza y el aprendizaje. Para la evaluación de los contenidos se tomó en cuenta: el examen de ubicación, el problemario, los cuestionarios, la encuesta, el examen de autoevaluación, la observación directa en el aula y el postest.

Actividad 9: Diseño del proceso de aprendizaje. Es el diseño instruccional propuesto que fue experimentado en los alumnos que cursaron la asignatura de Matemáticas I.

Los objetos para aprendizaje

Un objeto para aprendizaje, (IEEE en Martínez, 2002) es cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado con tecnología. Algunas características de los OPA son: a) facilitar su descubrimiento y almacenamiento en bases de datos locales y globales, para lo que deben estar dotados de información semántica (meta-datos) que simplifique su descubrimiento y reutilización; b) favorecer el uso de una filosofía que permita resaltar su estructura confiriéndoles significado pedagógico y, c) potenciar la personalización de los contenidos educativos y el desarrollo de los OPA inteligentes que puedan asistir al usuario en la realización de tareas más significativas.

Se diseñó el material con la filosofía de los objetos para aprendizaje (Makenzie, 2005), i.e., reusable, sustentado en el aprendizaje significativo, portable, con contenidos específicos y que colabore para que el usuario aprenda en el aula, fuera de ella o en donde tuviera acceso a una computadora con reproductor de DVD o en el equipo de su hogar. El planteamiento que se consideró es que los procesos dinámicos son complicados de representar con lápiz y papel, en consecuencia, se promovió el uso de las TIC´s para motivar y facilitar al estudiante a que aprenda los contenidos de matemáticas seleccionados.

Metodología

Para la unidad 2 del curso de Matemáticas I, se elaboró un diseño instruccional con soporte en los materiales siguientes: a) banco de reactivos para elaborar los exámenes con los que se pretendió verificar los conocimientos previos y los aprendizajes de los estudiantes del curso de Matemáticas I; b) apuntes de los contenidos del curso en diversos formatos; c) la guía de estudio; d) los ejercicios de autoevaluación; e) los 17 videos digitales por cada subtema de la unidad II del curso; y e) el multimedia “Graficación”.

Las sesiones

Sesión 1: Aplicación del examen de ubicación.

Sesión 2: Cuestionario C1. Lectura 1. Ver los videos 2, 3 y 4 del DVD 1. Actividad 1: Definición de función. Actividad 2: Dominio y contradominio de funciones.

Sesión 3: Lectura 2. Ver los videos 5, 6, 7 y 8 del DVD 1. Actividad 3: Relacionar las funciones base con su dominio y contradominio.

Sesión 4: Lectura 3 y 4. Actividad 4: Graficación de la forma af(x-b)+c. Desplazamientos verticales. Actividad 5: Desplazamiento horizontal. Trabajo con el multimedia "Graficación".

Sesión 5: Lectura 5: Transformaciones: Expansión, Compresión y Reflexión. Actividad 6: Graficación de funciones de la forma $y = a\, f(x - b) + c$.

Sesión 6. Ver los videos 2, 3, 4 y 5 del DVD 2. Lectura 6. Cuestionario C2. Actividad 7: Clasificación de funciones por sus propiedades. Actividad 8: Funciones pares e impares. Funciones crecientes y decrecientes. Actividad 9: Funciones periódicas.

Sesión 7. Cuestionario C3. Lectura 7: Gráfica de suma de funciones. Actividad 10: Suma de funciones. Trabajo con el multimedia "Graficación".

Sesión 8. Cuestionario C4. Lectura 8: Gráficas del producto de funciones. Actividad 11. Producto de funciones. Trabajo con el multimedia "Graficación".

Sesión 9. Cuestionario C5. Lectura 9: Gráfica de cociente de funciones. Actividad 12. Cociente de funciones. Trabajo con el multimedia "Graficación".

Sesión 10. Aplicación del postest.

Las actividades

Las actividades que apoyan a los OPA, y que respondió el alumno a lo largo de las sesiones de clase y extraclase se describen como:

- *Examen de conocimientos previos*. Examen que se aplica a los estudiantes al inicio del tema de funciones, con la finalidad de indagar si los alumnos poseen el conocimiento que se requiere para el tema de funciones.
- *Actividades del cuaderno de trabajo.* Son una serie de ejercicios para cada contenido de funciones del programa de Matemáticas I, que se proyecta que el alumno solucione con

trabajo individual y colaborativo, y que propicie la habilidad para trazar el bosquejo de la gráfica de una función, de los tipos incluidos en el método planteado, conocimiento que es importante en el contenido complementario del curso de Matemáticas I y posteriores.

- *Problemas de aplicación.* Son una serie de ejercicios que involucran aplicaciones en las distintas áreas de conocimiento y cuyo objetivo es que a través de la solución, se dé cuenta del gran potencial que tiene la graficación de funciones, como un sustento teórico de otras ramas de la ciencia y la tecnología.
- *Autoevaluación.* Con la finalidad de dar al alumno una idea de los contenidos y el nivel de dificultad de un examen global de Graficación de funciones sin cálculo, se presenta una serie de ejercicios que deberá resolver en el tiempo marcado y con las herramientas que se le indican.
- *Examen postest.* Examen que incluye los conocimientos de funciones que se evaluarán a los alumnos de curso de Matemáticas I del ITCG.
- *Glosario.* Esta actividad se refiere a que el alumno debe indagar las definiciones de los conceptos más relevantes de la materia, con lo que se pretende que al manejar tales términos se propiciará aprendizaje.

Resultados

La fase experimental

La fase experimental fue llevada a cabo por ocho docentes de la ACBI con ocho grupos de distintas especialidades, con una población de 319 estudiantes que cursaron la asignatura de Matemáticas I, con edades de entre 19 y 20 años, organizados en grupos de control y experimental. El grupo experimental se conformó de 233 estudiantes distribuidos en cinco grupos que utilizaron la propuesta metodológica. En cambio, el grupo de control se integró de 86 alumnos distribuidos en tres grupos que participaron con una metodología de trabajo tradicional (sin los materiales de la propuesta).

Análisis estadístico

De los grupos experimental y de control, se seleccionaron dos muestras de 30 estudiantes de forma estratificada. Se utilizó la prueba ***t*** (comparación de las medias), de una cola para valorar la hipótesis estadística planteada, que fue de que los resultados de las calificaciones del examen postest sobre funciones del grupo experimental, son mayores que las del grupo de control (Ver Tabla 1). Para corroborar lo anterior, fue necesario verificar los supuestos de la prueba estadística que consiste en usar la prueba F para demostrar que las varianzas de las dos muestras son iguales.

Al grupo experimental se les aplicó una encuesta, sustentada bajo la escala de Likert con cinco opciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2004), 217 alumnos respondieron el cuestionario integrado por 35 preguntas y diseñadas bajo tres factores: a) Satisfacción por aprender; b) La nueva forma de trabajo en el aula; y c) La evaluación de los materiales de la propuesta. Después de usar los métodos de grupos extremos y correlación *Item-Test* para validar los resultados de la encuesta, los estudiantes manifiestan que la forma de trabajo en el aula, con el uso de los OPA les motivó el interés por aprender los contenidos de funciones; que les agradaría usar este tipo de materiales en los temas y asignaturas subsiguientes, además de que observan por sí mismos, el grado de avance de su aprendizaje comparado con el conocimiento al inicio del tema.

Tabla 1

Resultados de la prueba de hipótesis de una cola entre el grupo experimental y de control

Comparación de Medias
95.0% intervalo de confianza para la media del grupo Experimental: 23.3 - 1.67781 [21.6222]
95.0% intervalo de confianza para el grupo de Control: 19.2 - 1.23658 [17.9634]
95.0% intervalo de confianza para la diferencia de medias considerando varianzas iguales: 4.1 - 2.05044 [2.04956]
Prueba t para la comparación de medias
Hipótesis Nula: Media Experimental = Media Control Hipótesis alternativa: **Media Experimental > Media Control** Considerando varianzas iguales: t = 3.34239 **Valor de P = 0.000729329**

Conclusiones

Con el diseño instruccional se fomentó y mejoró la capacidad de autogestión para aprender, como una cualidad necesaria para el nuevo profesional, que seguramente se incorporará exitosamente a la vida productiva y en las subsecuentes asignaturas. El usar las nuevas TIC´s se sugiere con apoyo permanente a la actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con la finalidad de que

se propicie la socialización del aprendizaje, es decir, se fomenten las discusiones y actividades de investigación en los estudiantes. La evaluación integral de los logros alcanzados por los estudiantes de ingeniería en la unidad 2 es satisfactoria, con la salvedad de que los promedios se sitúan alrededor de la calificación mínima aprobatoria, es decir, los estudiantes si mejoran su aprendizaje, pero no en la medida de haber logrado un aprendizaje significativo.

La elaboración de los materiales es una piedra angular para las actividades a desarrollar en el aula y fuera de ella, por ello se plantea que se apoyen en especialistas de *desarrolladores* de software, y dejar el papel de ***guionista*** al profesor de matemáticas, quien es el que aportará la forma de organizar el conocimiento matemático de la asignatura. En este caso se aprovechó que en el ITCG se integraron tres estudiantes del programa DELFIN (dos del Instituto Tecnológico de Tepic y uno de la Universidad Autónoma de Nayarit) y un alumno de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del ITCG, que fueron los que aportaron el desarrollo de los videos y el programa multimedia “Graficación”.

Es necesario e importante el trabajo en equipo, ya que para la elaboración de los OPA se requiere: El experto, el diseñador instruccional y el desarrollador de software que interprete con el uso de las nuevas tecnologías, lo que el experto y el diseñador plasmen en las instrucciones del material. El uso de los OPA, en la enseñanza de los temas de matemáticas, permite estandarizar el trabajo docente en beneficio del aprendizaje de los estudiantes. Si bien, según con los resultados de la encuesta, los estudiantes se interesan en aprender los contenidos matemáticos mediante el uso de la tecnología, es importante proporcionar diversas formar de interface, para no limitar a los estudiantes en el uso de un solo medio.

Referencias bibliográficas

Caracheo, F. Gudiño, A, López M y Pantoja, R. (2000). *Guía de Estudio de Didáctica de las Ciencias*. México: CIIDET Casa Editorial.

Dick, W. y Carey, L. (1996) .*The systematic Design of Instruction*. Glenview: Scott Foresman & Co.

Echenique, J. (1994), La asesoría y las técnicas para el aprendizaje en los sistemas abiertos y a distancia. *Parámetros de calidad de la Educación Abierta y a Distancia*, Quinta Reunión Nacional de Educación Abierta y a Distancia. México: UNAM.

Guàrdia, L. y Sangrà, A. (2005). *Diseño instruccional y objetos de aprendizaje; hacia un modelo para el diseño de actividades de evaluación del aprendizaje on-line*, Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.

Mackenzie-Robb, L. (2005). Packaging and publishing learning objects: best practice guidelines. BECTA. Recuperado el 30 de octubre del 2006 de http://www.becta.org.uk/page_documents/industry/content_packaging.pdf.

Martínez, H.(2004) *Análisis de modelos de diseño instruccional para eventos educativos en línea*. Informe No. 3 Herramientas nuevas para los ajustes virtuales de la educación.

Martínez, J. (2002). Objetos de aprendizaje. Una aplicación educativa de Internet 2. Recuperado el 28 de Octubre de 2006 de http://eae.ilce.edu.mx/objetosaprendizaje.htm

Mason, R. and Rennie, F. (2004). Broadband: A solution for Rural-e Learning?. *International Review of Research in Open and Distance Learning*. ISSN: 1492-3831. Disponible en línea: http://www.irrodl.org/content/v5.1/mason_rennie.html. 11-05-04

Materi, R. and Fahy, P. (2004). Interim report: A case Study of internet based Distance Education Program Development in Vietnam. *International Review of Research in Open and Distance Learning*. ISSN: 1492-3831. Disponible en línea: http://www.irrodl.org/content/v5.1/materi_fahy.html. 11-05-04

Ortega, J. L. (2005). *Diseño del curso de inducción para el aprendizaje de la aritmética y álgebra para los estudiantes de nuevo ingreso del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán*. Tesis de Maestría no publicada. CIIDET. DGEST. SEP. México.

Pantoja, R. (2002). El constructivismo en la selección de aspirantes a ingresar al Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. Revista CRISOL TECNOLOGICO editada y publicada por el Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, Jalisco.

Pantoja, R. y Ulloa, R (2007). Objetos para aprendizaje que integran un ambiente virtual. En Añorve, E. y Pantoja, R. (Eds), *Lecturas: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas vía la computadora* (pp.98-110), México: ITCG.

Puga, K., Añorve, E., y Puga, M. (2007). El programa multimedia e-math y su efecto en el aprendizaje de los alumnos de nuevo ingreso del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. *Revista CRISOL-Tecnológico* 7(6), 4-9.

Rodríguez, R. (2005). *Estrategia didáctica para el aprendizaje del álgebra para los estudiantes de nuevo ingreso del instituto tecnológico de ciudad guzmán*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara. México.

UNESCO (1998). La educación superior en el siglo XXI : visión y acción. Extractada por Elisa Morales Flores. *Biblioteca Virtual de Bibliotécnic Consultores* Lima: Bibliotécnic Consultores. Disponible en línea: http://www.bibliotecnic.org/archivos_biblioteca/doc51.pdf. 22-02-05

Yelland, N. y Masters, J. (1997). Learning Mathematics with technology: Young Children´s understanding of Paths and Measurement. *Mathematis Eduation Research Journal* 9(1), 83-99.

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA: CONDICIONES FINALES

Saúl Elizarrarás Baena; Ana María Ojeda Salazar
Escuela Normal Superior de México, México; Cinvestav del IPN — México
elizarrarasaul@yahoo.com.mx; amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística — Nivel: Medio

Resumen. *Con la finalidad de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes, el desarrollo de esta investigación consistió en aplicar un mismo cuestionario, antes y después de la implementación de estrategias de enseñanza. Los resultados obtenidos con la primera aplicación del cuestionario, evidenciaron el desconocimiento de ideas fundamentales; mientras que con la aplicación final, se mostraron mejorías para la adquisición y comprensión de algunas ideas fundamentales; por ejemplo, para el problema 1: variable aleatoria, muestra y ley de los grandes números y para el problema 8: medida de probabilidad, espacio muestra y combinatoria. De este modo, la enseñanza mediada por un libro de texto (Arriaga y Benitez y Cortes; 2008) logró desarrollar nociones de probabilidad en alumnos de nivel medio en condiciones de aula alterna —espacio para la conjugación de investigación y docencia—; a pesar de que en el libro de texto, por ejemplo, se presenta indistintamente tanto al enfoque clásico como al frecuencial de la probabilidad.*
Palabras clave: Enseñanza, probabilidad, enfoque frecuencial

Introducción

Con este estudio se pretendió indagar sobre los posibles respuestas acerca de las dificultades de comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), implicadas en el enfoque frecuencial de la probabilidad, en estudiantes de primer grado de secundaria pública ubicada en una Delegación Política del Distrito Federal (México) y, paralelamente, las dificultades en su enseñanza, de acuerdo con el libro de texto utilizado como medio para implementar la estrategia respectiva (Arriaga, Benítez y Cortes; 2008). Respecto a este último punto, de modo específico se pretendió caracterizar los elementos que se requieren para la enseñanza de estocásticos durante la formación docente.

Elementos teóricos

El estudio se fundamenta en tres aspectos: epistemológico (Heitele, 1975), cognitivo (Fischbein, 1975; Frawley, 1999) y social (Steinbring, 2005). El orden epistemológico consiste en identificar lo que es realmente fundamental para la enseñanza de estocásticos.

Los dos últimos atañen al desarrollo de la idea de azar y su estrecha relación con la noción de frecuencia relativa, así como al papel de los recursos semióticos para su prefiguración.

Epistemológico

Heitele (1975) señala que la enseñanza de estocásticos se debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Plantea una lista de diez ideas fundamentales que proporcionan lo fundamental en la educación en estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, modelo de urna y simulación, equidistribución y simetría, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamentales radica en que proporciona al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

Cognitivo

Frawley (1999) caracteriza tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia; lo anterior se debe a que considera al ser humano como máquina y como persona, pues la parte interna (mente computacional) y la externa (mente social) confluyen simultáneamente Por su parte, Fischbein (1975) enfatiza que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de ésta esas intuiciones se tornan de más en más difíciles de erradicar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En este sentido, Gigerenzer y Hoffrage (1995) plantean que el formato de frecuencias activa naturalmente el razonamiento probabilístico de los sujetos.

Social

Según Steinbring (2005), la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se caracterizan por una gran variedad de construcciones e interpretaciones matemáticas, concibiendo el aprendizaje de los estudiantes como un objetivo a largo plazo.

Elementos de método y organización

En este estudio de corte cualitativo (Eisner, 1998), participaron una docente en formación y un grupo de 35 estudiantes (11-13 años, aproximadamente) de primer grado de secundaria pública; la investigación se llevó a cabo en tres fases. En la *primera* y *tercera fases* de este estudio, se identificaron condiciones iniciales y finales para la enseñanza, mediante la aplicación de un mismo cuestionario de opción múltiple, impreso en papel, para contestar individualmente con pluma. En la *segunda etapa* principalmente y, previa examinación (por parte de los investigadores) del libro de texto utilizado por la docente en formación (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008), se implementaron algunas actividades propuestas para desarrollar nociones de probabilidad.

Criterios de análisis

De los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto para el libro de texto como para los datos recogidos. Se consideraron: *ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos para presentar la información, términos utilizados, situación y contextos planteados*.

Instrumentos y participantes

La investigación se dirigió al *libro de texto* utilizado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza —el cual se relaciona con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria para los cursos de Matemáticas (SEP, 2006)—; posteriormente, correspondió al *aula* y al desempeño de los *alumnos*.

Libro de texto

Se analizó un libro de texto propuesto para el curso de Matemáticas 1 (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008). Su presentación concuerda con los apartados que se sugieren en el Plan y Programas de Estudio (SEP, 2006).

Aula

La docente en formación implementó, aproximadamente, veinte sesiones de enseñanza (cada una de 50 minutos); cuyas temáticas tratadas, respectivamente, fueron: técnicas de conteo, frecuencias absolutas y relativas, trazado de gráficas, fenómenos aleatorios y deterministas y eventos equiprobables.

Sólo dos sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis, las cuales correspondieron al tratamiento del enfoque frecuencial; de forma predominante, en bitácora escrita se anotaron datos relevantes fuera de cinta. La *estrategia de enseñanza* consistió en implementar, principalmente, actividades propuestas en los apartados del libro de texto; en este sentido, los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto y, posteriormente, se confrontaban sus respuestas.

Desempeño de los alumnos

Previamente a las sesiones de enseñanza se administró un cuestionario y, al cabo de aproximadamente cinco meses, se aplicó tal cual el mismo cuestionario, con el propósito de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

El cuestionario constó de cinco reactivos para el enfoque frecuencial de probabilidad y otros cinco para el clásico, los cuales fueron presentados en forma alternada; cada reactivo planteó cuatro opciones, correcta sólo una de ellas y la elección debió justificarse por escrito; además, en algunos casos se tenían que completar los datos contenidos en tablas de doble entrada, diagramas de árbol, gráficas de barras y diagramas circulares. La contestación, individual, requirió de dos sesiones de 50 minutos cada una, tanto en la primera como en la segunda aplicación.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis del apartado 9 (Nociones de probabilidad I) del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional. De manera particular, el libro de texto está organizado en cinco bloques, en concordancia con el *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 2006); el contenido relaciona y se organiza en tres ejes temáticos: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SN y PA); Forma, Espacio y Medida (FE y M) y Manejo de la Información (MI) relacionados entre si.

Tabla 1. Ejemplo de análisis del libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008),

Criterio Apartado	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos utilizados
Nociones de probabilidad I	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición. Regla del producto e independencia. Equidistribución y simetría. Combinatoria. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria.	Números naturales y su orden. Operaciones con números naturales. Operaciones con números irracionales en su expresión decimal. Porcentajes fracciones propias	Lengua natural. Tablas de una y de doble entrada. Expresiones numéricas. Figuras. Expresiones simbólicas en forma numérica. Se excluye el uso de gráficas.	Fenómenos, eventos, ocurrir, aleatorios, lanzamos, deterministas, sorteo, resultados posibles, suceder, probabilidades, seleccionar, experimentos, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, rifa, asegurar, probabilidad clásica.

Las situaciones y contextos planteados en el apartado anterior del libro de texto son las siguientes: lanzamiento de sólo un dado, lanzamiento de monedas (1, 2 y 3 volados), extracción al azar de barajas, extracción de cubos, rifa de una grabadora y otro sin especificar. En el planteamiento de todas estás actividades existe un predominio del enfoque clásico de la probabilidad, lo cual podría deberse a la correspondencia que se tiene con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria de Matemáticas (SEP, 2006).

En general, la propuesta de estocásticos se desarrolla en el bloque 3 (apartado 5) y en el bloque 5 (apartado 4) con antecedentes de conteo (bloque 1, apartado 8) y de nociones de frecuencia absoluta y frecuencia relativa (bloque 3, apartados 7, 8 y 9). En el bloque 3 se incluyen los conceptos de frecuencia absoluta y relativa, lo cual implica la simbolización respectiva, pero se descarta una interacción estrecha con el objeto (Steinbring, 2005); se continúa con el trazado de

gráficas y se finaliza con nociones de probabilidad (fenómenos aleatorios y deterministas). Este último punto se concluye en el bloque 5, mediante la referencia a eventos equiprobables con predominio del enfoque clásico de la probabilidad.

En síntesis, el uso de notaciones simbólicas es escaso o implícito; se excluye la formalización matemática. Las situaciones planteadas son susceptibles de tratarlas mediante el enfoque frecuencial y la única actividad que propone la realización de ensayos independientes mediante lanzamientos de monedas no contribuye a una comprensión suficiente del enfoque frecuencial, debido a que no se proponen gráficas ni se conjuntan los resultados obtenidos de los ensayos en forma grupal. Por la presentación se podría confundir el enfoque frecuencial con el enfoque clásico, ya que sólo se formaliza este último y, además, se denotan simbólicamente de forma indistinta:

$$P(\acute{a}guila)=\frac{1}{2}=0.5=50\% \quad P(sol)=\frac{1}{2}=0.5=50\%$$

(Arriaga, Benítez y Cortés; 2008, p. 192)

Aunado a lo anterior, el uso de términos es indistinto o determinista. Por ejemplo,

- *Fenómenos o eventos*. (Arriaga, Benitez y Cortes; 2008; p. 185)
- *Probabilidad: Razón del grado de certeza de que ocurra un evento. Su valor va desde cero hasta 1. (0 % a 100%).*
- *Entonces tienes 1 de 2 probabilidades de ganar,…*(Ibíd., p. 186).
- *En una cajón hay 40 calcetines: 20 negros y 20 azules. Sin ver, ¿cuántos calcetines tienes que sacar para* ***asegurar*** *que tienes un par del mismo color?* (Ibíd., p. 193).

Resultados de la enseñanza en aula

De un total de cinco actividades que requirieron de doce sesiones de 50 minutos cada una, sólo en dos sesiones, la docente en formación solicitó a los estudiantes la realización de repeticiones independientes para el lanzamiento de una moneda; al respecto, organizó a los alumnos en equipos de cuatro personas y, así, realizarían los ensayos correspondientes al fenómeno aleatorio

en cuestión; cuyas frecuencias absolutas y relativas fueron conjuntadas de manera grupal bajo un análisis y reflexión que se derivó de los resultados obtenidos. Bajo estas condiciones, la docente en formación puso de manifiesto la poca importancia que otorgó al tratamiento del enfoque frecuencial de la probabilidad a lo largo de su secuencia de actividades (López, 2009); descartando el enfoque frecuencial como un acercamiento natural a la idea de azar (Gigerenzer y Hoffrage, 1995).

López (2009) también reconoció que otra dificultad que presentó se debió al poco tiempo que le fue permitido para concluir con las actividades propuestas. En bitácora escrita, se registraron las dificultades que tenía la enseñanza para diferenciar entre el enfoque clásico y el frecuencial de la probabilidad, lo cual era el producto de la interpretación de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en el libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008) utilizado como medio para la enseñanza (ver aquí resultados de su análisis).

Resultados generales del cuestionario

Los resultados iniciales con el cuestionario podrían indicar que los estudiantes carecían de antecedentes previos de los temas de probabilidad (ver Figura 1); además, la interpretación y análisis de recursos semióticos son muy escasos. En la segunda aplicación, los alumnos pudieron interpretar la información contenida en tablas y gráficas, cuya aportación pudo deberse a que incluyeron estos recursos como parte de las actividades de enseñanza.

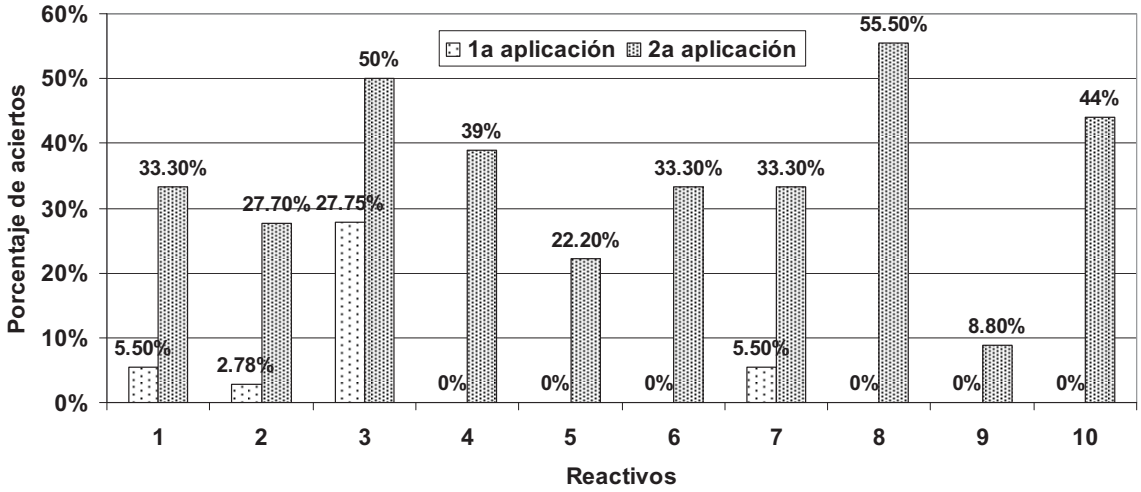


Figura 1. Resultados obtenidos antes y después de la enseñanza

Primera aplicación

A modo de ejemplo, en el problema 3 (ver Figura 2), los 10 alumnos (27.7%), que seleccionaron y justificaron correctamente, se ubicaban en la frontera del procesamiento no consciente y la conciencia; la mayoría de los alumnos respondió mediante una estimación a partir de los datos proporcionados en la gráfica y enfocándose a su cardinalidad; por tal motivo, evidenciaron desconocimiento de las ideas fundamentales de: *medida de la probabilidad*, *espacio muestra* y la *regla de la adición*.

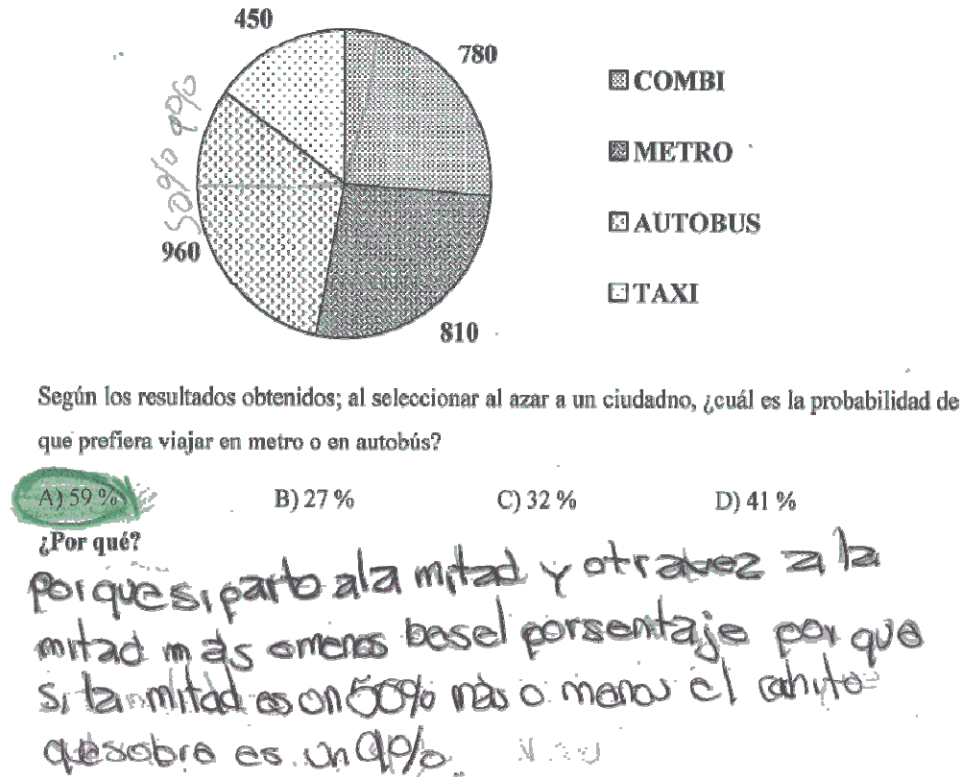


Figura 2. Ejemplo de reactivo propuesto en el cuestionario

Segunda aplicación

De los 18 alumnos (50%) que contestaron correctamente, 5 alumnos se ubicaron en la frontera del procesamiento no consciente y la conciencia, quienes obtuvieron el resultado con sólo observar la gráfica; mientras que los otros 13 alumnos en la conciencia, ellos interpretaron correctamente la información proporcionada en la gráfica circular y utilizaron la *regla de la adición* a partir del uso de procedimientos formales (ver Figura 3), ya que consideraban el evento compuesto por metro o autobús.

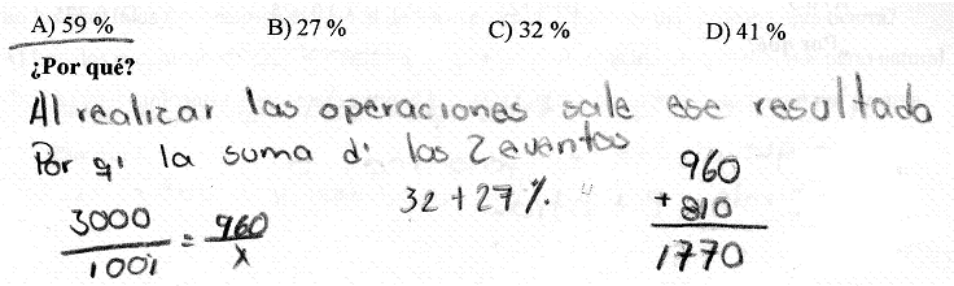


Figura 3. Ejemplo de respuesta que se ubica en la etapa de la conciencia

Comentarios generales

La presentación de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en el libro de texto (Arriaga, Benítez y Cortés; 2008), resultó incompleta e inconsistente; lo cual fue reproducido por la enseñanza, debido a que basó su estrategia en este medio de manera predominante. A pesar de esto, conforme se iba avanzando en las sesiones de enseñanza, algunas dificultades de comprensión fueron remontadas por parte de los estudiantes que participaron en esta investigación; la ausencia de efectividad total se pudo haber debido a que como era de esperarse la enseñanza desarrolló su práctica alrededor del enfoque clásico. Elizarrarás (2004) enfatiza que la enseñanza de estocásticos debe privilegiar el enfoque frecuencial de la probabilidad, porque al contrastar las frecuencias obtenidas con las esperadas de un evento se exploran las condiciones a las que se sujeta la realización de eventos aleatorios (Steinbring, 2005).

Este estudio se enfocó no sólo a la importancia de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos mediante el enfoque frecuencial de la probabilidad con estudiantes de primer grado de secundaria, sino también a los medios y a la formación de docentes, lo cual dejó en evidencia que falta proveer a estos últimos de más y mejores elementos de estocásticos que les permitan facilitar su práctica docente y más aún cuando se encuentren en ejercicio profesional como titulares de un grupo en secundaria. Es conveniente indagar, de un modo específico, el proceso de formación inicial para la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos.

Como señala Elizarrarás (2004), aun cuando se supone que los medios institucionales apoyan la labor del docente, la carencia de formación en estocásticos, define su praxis por la influencia del pensamiento determinista, lo cual impide la advertencia del pensamiento de lo posible en situaciones en las que interviene el azar.

Referencias bibliográficas

Arriaga, A.; Benítez, M. M. & Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 1. Introducción a las competencias.* D. F. México: Pearson Educación.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D. F., México.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Netherlands: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction. Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, 684-704.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

López, A. (2009). *Desarrollo de nociones de probabilidad en alumnos de primer grado de secundaria*. Documento recepcional de Licenciatura no publicado. México: Escuela Normal Superior de México.

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación Secundaria. Matemáticas*. D. F., México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

EL JUEGO COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE OPERACIONES CON CONJUNTOS NUMÉRICOS

Zaira Garrido, Ana Velásquez
Universidad Central de Venezuela
República Bolivariana de Venezuela
zaira_josef@hotmail.com, anavelasquez400@hotmail.com
Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se relata una experiencia, como ensayo preliminar, llevada a cabo con 20 estudiantes del primer semestre, cursando Matemática I, en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela, a quienes se aplicó un juego, diseñado por las autoras, como estrategia de enseñanza –aprendizaje para el tópico de operaciones con conjuntos numéricos finitos. Se utilizó la técnica de la observación participativa que permitió ratificar que el uso del juego favorece el aprendizaje cooperativo, la sana competencia, la motivación y el desarrollo del pensamiento.*
Palabras claves: Estrategias de instrucción, juegos instruccionales, matemática

Introducción

La enseñanza de la asignatura Matemática I, en la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela tiene como objetivo general proporcionar a los estudiantes, los conceptos matemáticos fundamentales que le permitan analizar el comportamiento de funciones reales y aplicarlas a problemas económicos.

El bajo rendimiento estudiantil en esta asignatura es un área problemática y no es fácil determinar a que se debe, podría ser que: los alumnos no poseen la conducta de entrada, no tienen la motivación o dedican poco tiempo al estudio; las estrategias de instrucción son las tradicionales; los medios de instrucción no son del todo adecuados; el rol del docente cuando no propicia la participación, la reflexión y la actitud crítica. Para tratar de resolver esta situación problemática se deben plantear diferentes alternativas tanto académicas como administrativas.

Por otra parte, el docente no debe limitarse a impartir la asignatura mediante el uso exclusivo de la clase expositiva, por el contrario debe tomar parte activa en el proceso de enseñanza aprendizaje, utilizando diferentes estrategias y medios de instrucción. En el enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática, prevalece la didáctica centrada en el docente. El papel del profesor se reduce a explicar el contenido previsto para cada clase y raramente utiliza otros recursos de instrucción distintos al libro de texto. Con el fin de superar las insuficiencias del enfoque señalado, se ha comenzado a utilizar el juego como estrategia de instrucción en el

proceso de enseñanza aprendizaje porque se cree que su uso genera entusiasmo y confianza en la matemática, y le permite al estudiante usar su ingenio.

Las autoras, para promover la participación activa de los alumnos, diseñaron un juego para ser utilizado al momento de dar los contenidos referidos a operaciones con conjuntos numéricos.

Referentes teóricos

El Ministerio de Educación, hoy en día llamado Ministerio del poder popular para la Educación, desde 1978, considera que antes de introducir el juego en la clase, el docente debe definir claramente los objetivos que desea alcanzar y prever en qué medida la actividad lúdica contribuye a lograr dichos objetivos, y que, finalizada la actividad, es importante realizar una discusión para evaluar la experiencia (OSPP). A pesar de los esfuerzos del Centro Nacional para el mejoramiento de la enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) para publicar materiales educativos impresos (MENI), Carpetas de Matemática e invertir en programas de capacitación, son mínimas las evidencias de apoyar la recomendación con hechos, que generen impacto significativo en los docentes al punto de que estos la operacionalicen.

Un alto porcentaje de los juegos que publica el CENAMEC no están acompañados de recomendaciones dirigidas al docente para su aplicación, y aunque sólo aparezcan impresas las reglas del juego, esto no genera impacto significativo puesto que los docentes que no están familiarizados con la técnica, emplean estos juegos por ensayo y error.

No hay una única fórmula para la utilización del juego, sin embargo, existe una serie de recomendaciones metodológicas útiles, entre las cuales se destacan:

Al escoger un juego, hacerlo en función de:

- El contenido matemático que se quiere priorizar, que no sea puramente de azar, que tenga reglas sencillas.
- Materiales atractivos y lugar de procedencia, mejor si son juegos populares. Igualmente una vez escogido el juego se debería hacer un análisis detallado de los contenidos matemáticos del mismo.

También al presentar los juegos a los estudiantes, es recomendable comunicarles la intención educativa que tienen y prever el hecho de permitir jugar varias veces el mismo. Finalmente no se debe olvidar destinar tiempo de conversación con los estudiantes en los distintos momentos del proceso. (Mequé Edo i Basté, 1989)

La Experiencia de aprendizaje D.J.C., consiste en:

D (descubriendo): Los alumnos manipularán los elementos del juego y se promoverá una discusión para describir dichos elementos, familiarizarse con ellos, identificar las relaciones que intervienen y descubrir la forma en que se desarrollará la actividad. Fruto de esta discusión, los alumnos deberán identificar el contenido curricular que se ejercitará para así establecer las reglas del juego. En esta fase el docente deberá conducir la discusión de modo que las instrucciones por parte de él constituyan al final el cierre de la misma.

J (jugando): Los alumnos jugarán, mientras tanto el docente observará y participará sólo para proporcionar alguna ayuda u orientación específica. Esta etapa deberá proporcionar la satisfacción de actuar por parte del alumno, y una retroalimentación al docente para que pueda darse cuenta de cómo se van desarrollando las habilidades de los alumnos.

C (compartiendo): Al terminar el juego se promoverá una discusión a través de la cual los jugadores comparten sus impresiones con respecto a la actividad y a las estrategias que se fijaron. Este compartir deberá promover el descubrimiento de generalidades y constancia entre los elementos, operaciones involucradas, el desarrollo de habilidades y destrezas. Esta fase deberá promover una retroalimentación crítica de lo que se aprendió y lo que se deberá practicar, para tener mejor dominio de las relaciones u operaciones ejercitadas. (Tirapegui, 1994).

Si los juegos son seleccionados cuidadosamente, para el momento y el nivel oportuno, pueden ayudar a desarrollar actitudes favorables en estudiantes que con mucha frecuencia ven la matemática como una tediosa y aburrida asignatura. El mencionado autor considera que para la selección de un juego deben tomarse en cuenta varios aspectos o condiciones. En primer lugar, debe considerarse la habilidad del estudiante y el aprendizaje que se desea lograr. Otra consideración al seleccionar un juego es el tipo de participación que se desea y, una última característica a considerar en la selección es, la retroalimentación que debe seguir al juego.

De la misma manera, el éxito en la selección de los juegos, por cuidadosa que ésta sea, radica en el qué tan bien se usen. En este sentido, el profesor, o quien quiera usar los juegos con fines de aprendizaje, deberá asegurarse de que el material del juego esté preparado con anticipación y las instrucciones bien claras.

Para poder emplear con éxito el juego como estrategia en la enseñanza de la matemática, además de las consideraciones anteriores, el autor precisa que es necesario que el docente participe en el juego de los niños, que los sepa observar cuando juegan, que tengan habilidad para hacerlos jugar y que a él mismo le guste jugar. (García de Clemente, 1994).

Al igual que los autores ya señalados, (Szczurek, 1999), hace una serie de recomendaciones para aplicar el juego como técnica de instrucción. Cabe destacar que este autor divide la aplicación del juego en cuatro fases o etapas: (a) preparación preliminar, entre las actividades a realizar contempla: leer el material, ver si el juego se ajusta a los objetivos, participar en él antes de ponerlo en práctica, determinar el tiempo necesario, incluyendo las actividades integrativas o de cierre, organizar los materiales y el ambiente físico; (b) inicio, durante esta fase recomienda hacer una presentación breve del juego que se va a aplicar, revisar las reglas y los materiales, distribuir los roles; (c) desarrollo del juego, en esta fase las sugerencias para el docente son: mantener una actitud de apoyo, permanecer neutral, a menos que las instrucciones expresen lo contrario, estar preparado para lo inesperado, anotar las dificultades que aparezcan y sobre conductas y conversaciones significativas; y (d) actividades de integración o de cierre, en esta última fase el docente debe: permitir que los participantes expresen sus sentimientos positivos y negativos acerca de la experiencia, hacer que comparen sus estrategias, las decisiones que tomaron y por qué, comparen la lógica de lo sucedido en el juego con lo que ha pasado o podría haber pasado en la realidad, procurar que los participantes expliquen lo que aprendieron y si es posible lo apliquen en otras situaciones.

Cabe señalar que (Szczurek, 1999) comparte con los autores ya señalados la importancia que tiene la preparación de los materiales, los cuales deben estar arreglados con anticipación al juego y las instrucciones bien claras.

A través de un breve análisis de los aportes ofrecidos por: (Lederman, 1984;Thiagarajan, 1996; Thatcher, 1990; Szczurek, 1999; Stewart, 1992; García de Clemente, 1994; Tirapegui, 1994), se afirma que éstos coinciden en que el docente debe promover actividades donde se examinen y se

discuta el impacto de la experiencia individual y grupal, además de permitirle al estudiante verificar conocimientos adquiridos pues su exclusión implicaría la negación a los participantes de una fuente importante de aprendizaje, sin embargo, a diferencia de los otros autores citados, (Szczurek, 1999) considera a las actividades de integración o de cierre, como parte del juego y no como una actividad que se realiza después del juego. Ellas, según el autor, constituyen la última etapa imprescindible para la correcta aplicación del juego, pues los participantes analizan sus experiencias durante las etapas anteriores, procurando responder lo que hicieron y por qué lo hicieron.

Para efectos de la experiencia que aquí se relata, se tomó en cuenta los lineamientos sobre la forma más adecuada para la aplicación y uso de los juegos que proponen todos los autores hasta ahora citados. Se asume que el juego se divide en cuatro fases, que son:

Fase de preparaciones preliminares. Esta fase tiene como propósito que el docente se familiarice con el juego, y se le sugiere realizar las siguientes actividades:

- Leer o revisar todo el material.
- Determinar si el juego instruccional se ajusta a los objetivos académicos.
- Si el juego no ha sido aplicado con anterioridad, es necesario que el docente juegue y participe antes de ponerlo en práctica con sus alumnos.
- Determinar el tiempo necesario para el desarrollo del juego así como para su discusión.
- Preparar y organizar los materiales necesarios.
- Revisar la organización del ambiente físico.

Fase de inicio del juego instruccional. Tiene como propósito que los alumnos conozcan las reglas y distribuyan sus roles. El docente realizará las siguientes actividades:

- Definir y explicar el juego instruccional
- Describir el propósito y característica del juego.
- Revisar las reglas y materiales con los alumnos.

- Distribuir los roles, si no lo ha hecho todavía.
- Si el juego es complejo, hacer una práctica preliminar con los participantes.

Fase de desarrollo del juego instruccional. Consiste en la ejecución de las reglas por parte de los jugadores. Los docentes realizará las siguientes actividades:

- Mantener una actitud de apoyo por parte del docente, a menos que las instrucciones expresen lo contrario.
- Estar preparado para lo inesperado, llegando a improvisar en el momento necesario.
- Hacer anotaciones sobre conductas y conversaciones significativas que puedan serle útiles para la discusión posterior del juego.
- Anotar todas las dificultades que aparezcan.

Fase de actividades integrativas o de cierre. Se sugieren las siguientes actividades:

- Permitir que los participantes expresen sus sentimientos positivos y negativos acerca de la experiencia.
- Orientar a la audiencia para que compare sus estrategias empleadas.
- Comparar la lógica de lo sucedido en el juego.
- Procurar que los participantes expresen lo que aprendieron y, si es posible, expliquen lo que hicieron.
- Comparar el diseño del juego con la realidad.
- Pedir a los estudiantes llevar un registro describiendo cada uno de los puntos anteriores, en el caso de que el juego lleve varias sesiones.

Si bien es cierto que lo anterior es un resumen de todas las recomendaciones, no necesariamente el docente debe aplicarlas en su totalidad, pues dependerá de la situación instruccional particular y será el docente quien decidirá cuáles va a aplicar. También puede agregar otras no mencionadas, si lo requiere la situación instruccional en la que se encuentre.

Relato de la experiencia

El objetivo de la experiencia es evaluar con alumnos el juego diseñado como parte del proceso de validación para su posterior uso como estrategia de instrucción diferente a las tradicionalmente utilizadas. El juego diseñado está constituido por ocho fichas de operaciones con conjuntos (unión, intersección, complemento, etc.), dos dados, fichas indicativas de conjuntos definidos por extensión y/o por comprensión, una hoja de respuestas. Las instrucciones contemplan cómo deben organizarse los participantes, el tiempo necesario para responder una pregunta, la presencia de un árbitro en cada equipo.

Para llevar a cabo la experiencia se siguieron todas las fases señaladas en los referentes teóricos. Participaron 20 alumnos organizados en cuatro grupos, de cuatro personas y, adicionalmente, un árbitro seleccionado entre los mismos estudiantes del curso. Una ronda consiste en que cada miembro del equipo, excepto el árbitro, debe responder una pregunta, seleccionada por él mismo mediante una ficha de operaciones y dos fichas de conjuntos definidos. Para determinar quién inicia primero, cada miembro lanza dos dados, el que obtenga mayor puntuación inicia la ronda. La puntuación de la pregunta depende del nivel de dificultad de la misma. Se pueden efectuar tantas rondas como deseen los jugadores. Gana el jugador que acumule mayor puntuación. Como observadora, además de las autoras, participó una docente de matemática financiera, que retroalimentó con sus observaciones el diseño del juego.

En la fase de desarrollo los participantes, en cada grupo, analizaban y discutían la respuesta a la pregunta, dada por el jugador de turno, y emitían su juicio sobre lo acertado de la respuesta. Una vez emitido el juicio es arbitro indicaba la respuesta correcta. Cabe resaltar que los alumnos que participaron como árbitros manifestaron su deseo de jugar ellos también y la sesión se prolongó para que ellos participaran en la actividad como jugadores.

En la fase integrativa los participantes expresaron y explicaron lo que hicieron en la actividad y compararon sus estrategias de solución.

Conclusiones y recomendaciones

La observación participativa de las autoras permitió confirmar que el uso del juego como estrategia de instrucción propicia un ambiente de aprendizaje que favorece el aprendizaje

cooperativo, la sana competencia, la motivación, la confianza, el desarrollo del pensamiento y la capacidad de análisis.

La motivación fue apropiada al grupo al que estuvo dirigida, se mantuvo el interés y la concentración por lograr los objetivos y hubo consistencia con la dinámica de las sesiones de juego, sin embargo, se observó que los alumnos no seguían adecuadamente las instrucciones porque no están acostumbrados a hacerlo.

Todos los grupos aportaron ideas para el diseño de otros juegos relacionados con diferentes contenidos de la asignatura. Ellos expresaron que la actividad les permitió aclarar dudas, reafirmar conceptos y procedimientos de resolución de problemas.

Se recomienda continuar la evaluación formativa y sumativa del juego diseñado. También involucrar a los estudiantes en el diseño de juegos, pero en todas las fases, no sólo en la aplicación.

Referencias bibliográficas

García de Clemente, C. (1994). *El juego como método de la enseñanza de la matemática*. Caracas: Ciedma.

Lederman, L. (1984). Debiefring. A critical reexamination of the postexperience analityc process with implications for its effective use. *Simulation and Games. 15(4),* 415-431-

Ministerio de Educación. Oficina Sectorial de Planificación y Presupuesto. (1998). Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje. *Informe del rendimiento Estudiantil en las Áreas de Lengua y Matemática. Sexto Grado de Educación Básica*. Caracas: Autor

Mequé Edo i Basté (1989). *Juego y matemática en primaria*. Recuperado el 25 de octubre de 1998 de http://www.indexnet.Santillana.es/rcs/archivo/Primaria/Bibloteca/ apuntes/juegosmates.Pdf

Szczurek, M. (1989). La estrategia instruccional. *Investigación y Postgrado*. 4(2), 7-26.

Szczurek, M. (1999). Simulaciones y juegos instruccionales: Un hipertexto. (publicación pendiente).

Thatcher, D. (1990). Promoting learning through games and simulations. *Simulations and Games. 21 (3),* 262-273.

Thiagarajan, S. (1996). Instructional games, simulations and role-plays. En R.L. Craig (Ed.), *The ASTD training and development handbook.* (pp. 517-533). *New York*: McGraw-Hill.

Tirapegui, C. (1994). *Juegos y Enseñanza de la Matemática.* Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maturín.

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GALPERÍN EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN

Carmen Evarista Matías Pérez
Universidad Autónoma de Santo Domingo República Dominicana
evaristam@gmail.com
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Superior

Resumen. *En la presente teoría, se aborda el proceso de formación en el cual el alumno desarrolla su personalidad a partir de las condiciones externas, las cuales conducen a un proceso de interiorización, lográndose el aprendizaje. Las acciones mentales se desarrollan en la actividad del alumno en un proceso de formación por etapas, partiendo de acciones externas con los objetos. En este proceso de formación se divide en fases y etapas. Para el proceso de formación de una acción mental se presenta la siguiente clasificación: fase de orientación, fase de la formación de la acción y del control y, la fase de aplicación.*
Como consecuencia de este proceso, este mejora y optimiza la mediación, lo que permite al niño una educación mas precisa a su nivel de actividad. Se presentaran modelos en el área de matemática con aplicación a la Teoría de Galperin que conducen a la reflexión, sobre la importancia de la formación por fases y etapas de la acción mental, esta teoría se basa en la concepción dialéctica materialista del desarrollo de la personalidad.
Palabras Claves: Etapa mental, comunicación, fases de orientación, fases de formación de la acción mental y control, fase de aplicación

Concepción Teórica del aprendizaje de Galperín

En los seres humanos, el nivel desarrollo esta relacionado con la estructura mental del pensamiento y la interacción con su medio social a través de la actividad. Esto hizo que Galperin desarrollara una teoría sobre las diferentes etapas de la acción mental cuya concepción materialista esta basada el desarrollo de la personalidad.

Todas las cualidades síquicas del hombre/mujer se desarrollan en la actividad. La asimilación de la materia de la enseñanza se tiene que estructurar como una relación dialéctica sujeta a cambios entre la interiorización y la exteriorización, en la cual lo asimilado de forma consciente y activa se usa para la solución de nuevas tareas.

La teoría de Galperin trata sobre la formación por etapas de la acción mental. Las acciones mentales se desarrollan en la actividad de los alumnos, partiendo de acciones externas con los objetos.

El proceso de formación, de un modelo interno de la acción mental, se divide en fases y etapas. Este proceso es aplicable por el maestro y puede diferenciarlo y estructurarlo exitosamente, conforme a las necesidades correspondientes.

Según Osir E. Geissler y otros (2001), plantea que Galperin establece para el proceso de formación de una acción mental, la estructura: Fases y Etapas.

Las etapas estarán formadas por la orientación, acción y control, aplicación.

La Fase de Orientación a su vez se divide en etapas que se denominan:

Primera Etapa

Al iniciar la primera etapa de las condiciones previas necesarias se analizan con respecto a las clases y especialmente en la ejercitación diaria de la clase de matemática, por ejemplo: Elaboración de los ejercicios básicos de adición sobre una base intuitiva (Primer grado de educación elemental o primaria). En esta etapa se debe asegurar, las condiciones previas siguientes: Fijación del concepto de número. Fijación de los conceptos *Adición* *Sumando* *Suma*.

Por ejemplo 2

\+ 3

5

Segunda Etapa

Luego del aseguramiento de los aprendizajes logrados en la primera etapa.

Sigue la orientación que señala la totalidad de condiciones de los alumnos tienen que considerar en la realización de las acciones. Representa para los alumnos una forma de análisis independiente de un dominio determinado de la realidad.

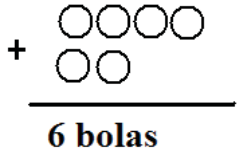
La base de orientación debe de contener, para la enseñanza de la matemática de la escuela primaria:

a. El objetivo de la acción, por ejemplo, ya conocemos algunos ejercicios de la adición. Queremos aprender como se pueden solucionar ejercicios de adición con ayuda de objetos.

b. El objeto de la acción y sus propiedades.

El maestro plantea los ejercicios siguientes:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

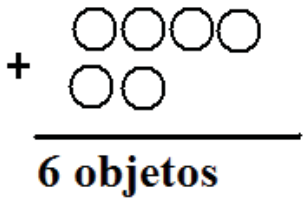


4+2 Los alumnos deben reconocer y formular

3+3 Los números se adicionan. Son ejercicios de adición con dos sumando. Hay que calcular la suma.

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

Transcurso de la acción.



1. Colocamos o dibujamos objetos para ambos sumandos.
2. Unimos los objetos
3. Determinamos cuantos objetos son en total.
4. Este número es la suma. Formamos igualdad.

Como los alumnos no pueden leer, se pueden dar estas instrucciones solamente de forma oral. Quizás se pudiera escribir, como un pequeño apoyo, las cifras de los pasos de la acción.

c. Una sucesión de pasos de la acción y en la elaboración de conceptos, sus características esenciales.

d. Las posibilidades de control del resultado de la acción.

Es aprobado que los alumnos reciban por escrito, en forma general, estos componentes esenciales de la base de orientación (como tarjeta de pizarra o guías de estudios).

Fase de la Formación de la acción y el control.

Primera Etapa

La acción se tiene que realizar como acción externa, por ejemplo en solución de un ejercicio de cálculo con objetos.

Segunda Etapa

Acción en forma del lenguaje externo.

En esta etapa el lenguaje se tiene que convertir en portador continuo de la acción.

Galperin destaco claramente que las verbalizaciones no solo constituyen un medio de información acerca de la acción. El alumno que habla y los que le prestan atención se familiaricen los conceptos tratados, para lograr una elevada calidad de la acción mental. El maestro con esta forma de trabajo puede observar, comprobar e influenciar positivamente en el transcurso de la acción, en el caso requerido.

Tercera Etapa

La acción en forma del lenguaje externo para si.

La acción del lenguaje se transforma, esta se convierte de medio de comunicación, en medio de pensamiento. El alumno reproduce para si mismo las condiciones esenciales de la acción (el objeto de la acción). El maestro puede hacer algunas preguntas de control sobre ellos con el fin de garantizar el transcurso correcto de la acción de los alumnos.

Estas preguntas las pueden hacer antes o después del trabajo individual, puede plantearla a toda la clase o también, durante el desarrollo de un trabajo individual, a un alumno en particular.

Cuarta Etapa

La acción en forma de lenguaje interno.

El lenguaje externo se transforma, poco a poco, en lenguaje interno. El alumno comunica solo el resultado final de su acción, con lo cual se puede controlar su corrección.

El proceso de interiorización concluye con esta forma de acción. El resultado de este proceso de interiorización, es una acción mental automatizada, reducida y generalizada.

Fase de Aplicación

La transición de la fase de la formación de la acción y del control a la fase de aplicación de la acción formada, no se debe separar rígidamente.

El maestro se debe esforzar por plantear ejercicio de aplicación, siempre y cuando la acción mental este formada para ello.

La aplicación se efectúa mediante la solución de ejercicios complejos y variados desde el punto de vista de su contenido, así como, mediante la elaboración y consolidación de la nueva materia de enseñanza.

Este trabajo es presentado por Osire, Gassler y otros (1975), sobre la teoría de Galperin, con esto autores se pretende exponer que una adecuada planificación, ejecución y control del trabajo independientemente favorece un dominio adecuado del conocimiento, los autores (M. Cáceres y R. García Cruz y otros 2009).

Citan a Leontiev y Galperin (1965 pag 12)

“Para que el alumno forme estos procesos, tiene que dominarlos con autenticidad bajo la forma de acciones externas detalladas, basadas en puntos externos de referencias claramente diferenciales’’. Estas formas externas es que permiten que los alumnos puedan estructurar más adelante las formas internas.

También estos autores citan a Leontiev y Galperin (1965 pag 8)

"El dominio adecuado del conocimiento presupone en primer lugar el de las acciones y operaciones correspondiente, cuyos productos son los conocimientos mismos. Por consiguiente, la optimización posterior y autentica de los métodos didácticos exige que la formación de este aspecto operativo del conocimiento no se produzca espontáneamente sino mediante un proceso dirigido: programado y controlado''. Con esta aseveración se plantea la necesidad de un método didáctico que controle todo el proceso educativo del alumno en formación.

Además según S. León (2009), el proceso de enseñanza siempre concede la posibilidad de realización de tarea independiente hasta el momento que el niño enfrenta alguna dificultad, donde se le comienza brindar…, los mismos niveles de ayuda: dirección de la concentración del niño hacia modelos

Referencias bibliográficas

Leon L, S. (2000). *La formación de capacidades cognoscitivas en niños de edad preescolar mediante la actividad de construcción.* Centro de referencia Latinoamericano para la Educación Preescolar. OEI. http://www.oei.org.co/celep/celep8.htm#aa

Galperin, P. (1969). Hacia la investigación del Desarrollo intelectual del niño. *Revista de Psicología*: 1, 12-23.

Galperin (1986). Antología de la Psicología pedagógica y de las edades. La Habana: Pueblo y Educación.

Cáceres, M. Garcia Cruz, R., Sánchez, L. (2009). *Universidad de Cienfuegos. El trabajo independiente de los estudiantes en el ámbito del curriculum. Espacio 127 N°7*.

Glassler, J., Seiber, A. Wolf, A. (1975). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. 1° a 4° grado.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

FORMEMOS CUADRADOS

Gloria Argelia Ek Tuz, Norma Esther Haas Ek, Genny Rocío Uicab Ballote
Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán México
gloria.ek@hotmail.es, normahaas@gmail.com, uballote@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico

Resumen. *La implementación de materiales didácticos tangibles en el proceso de enseñanza aprendizaje puede ofrecer beneficios a la educación matemática, para esto, es importante tomar en cuenta en qué medida nos pueden ayudar a lograr los objetivos establecidos, el contenido que se pretende abordar con dicho material, el nivel al que va dirigido, las características de los alumnos y las diversas actividades que se pueden implementar con el material tangible. El mayor valor de la utilización de los materiales tangibles en la enseñanza de las matemáticas consiste, en que permite al estudiante, tener experiencias concretas y desarrollar su capacidad de razonamiento abstracto. El presente trabajo expone una propuesta de material didáctico tangible, para abordar el tema de las raíces cuadradas.*
Palabras clave: Raíz cuadrada, geométrico, material didáctico

Introducción

La matemática es una ciencia fundamental presente en nuestro entorno, su enseñanza se formaliza cuando empezamos a asistir a la escuela, y es a partir de su estudio donde surgen diversas estrategias para su enseñanza. La implementación de materiales didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ofrecer beneficios a la educación matemática, sin embargo, hay que tomar en cuenta en qué medida nos puede ayudar a lograr los objetivos establecidos, el contenido que se pretende abordar con dicho material, las características de los alumnos, el nivel al que va dirigido, la infraestructura de la escuela y las diversas actividades que se pueden implementar con él. El mayor valor de la utilización de los materiales en la enseñanza de las matemáticas consiste, en que permite al estudiante, hacer experiencias mentales a su medida y desarrollar, de este modo, su capacidad de razonamiento abstracto.

Objetivo

En este trabajo presentamos una propuesta de un material didáctico tangible con el cual se pretende abordar el tema de la raíz cuadrada. Nuestra intención es que, a partir de manipular

dicho material, los estudiantes deduzcan e interpreten geométricamente la raíz cuadrada, lo cual les permita posteriormente apreciar el algoritmo correspondiente para calcularla.

Marco de referencia

La práctica educativa no puede tener éxito si no se consigue que el alumno sea responsable de su propio proceso de aprendizaje. Ausubel, (citado en Negrete, s.f.), sintetiza su postura ante la pedagogía en la siguiente frase: "si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente". Hace notar, de esta manera su teoría del aprendizaje significativo, dejándonos apreciar que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognoscitiva previa que se relaciona con la nueva información. Por estructura cognoscitiva se entiende al conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización. Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos se relacionan de modo sustancial (de modo no arbitrario; ni al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Es decir, las nuevas ideas se relacionan con algún aspecto existente en la estructura cognoscitiva del alumno. En el proceso educativo es entonces realmente importante considerar lo que el individuo ya sabe, de tal manera que se establezca una relación con aquello que debe aprender.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante preexistente en la estructura cognoscitiva. Las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claros y disponibles en la estructura cognoscitiva del individuo y que funcionen como punto de anclaje de las primeras. Se dice que es "aprendizaje significativo" porque es a través de esta conexión con conceptos relevantes como la información adquiere significado en la persona.

Ahora, para que el aprendizaje sea significativo, debemos insistir qué material de aprendizaje, puede relacionarse de manera sustancial con alguna estructura cognoscitiva específica del alumno. Éste debe poseer significado lógico, es decir, tener relación de forma intencional y sustancial con las ideas correspondientes que hay disponibles en la estructura cognoscitiva.

En general no es fácil conseguir el desarrollo de la capacidad de razonamiento abstracto, pero es precisamente en el tratamiento de los objetos geométricos, con su manipulación y deducción de propiedades sencillas, donde más se puede "visualizar la abstracción", donde está más próximo "lo concreto" de "lo abstracto" y donde el desarrollo de estas capacidades está al alcance del estudiante, además cuando los estudiantes van construyendo sus propios conocimientos llegan, con más facilidad a comprender los conceptos y a entender los significados de aquello que están trabajando, y van dotando de sentido los nuevos aprendizajes.

Los materiales manipulativos tangibles pueden apoyar y potenciar el razonamiento matemático, estos materiales (concretos) se caracterizan por poner en juego la percepción táctil. Baéz y Hernández (2002) señalan algunas ventajas de los materiales concretos:

Con el uso del material concreto siempre se está en opción para hacer uso de la intuición.

Primeramente, el material concreto tiene un fuerte carácter exploratorio, lo que hace posible que los estudiantes hagan uso del razonamiento e inicien la discusión, como una sólida referencia para juzgar la validez de las afirmaciones, en lugar de que la autoridad del maestro sea la única base para corregir. Es más efectivo usar los materiales concretos como un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión, inclusive las limitaciones del modelo manipulativo puede generar la chispa para algunas discusiones en clase.

En una segunda instancia, a medida que los estudiantes trabajan con las herramientas por un tiempo considerable y desarrollan más y más el entendimiento de los conceptos matemáticos, ellos tienen menos necesidad de herramientas concretas, sirviendo las piezas concretas solamente como un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.

En un tercer plano, el material didáctico manipulable es un complemento, no un sustituto de otras representaciones. En particular, las representaciones gráficas, la lista sistemática, la estimación y sobre todo la algebraica son extremadamente importantes.

Cabe señalar que la función de los materiales manipulables en el plan de estudios es ayudarnos en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que sirvan de puente para otras representaciones, de tal forma que las piezas concretas no son la "solución mágica" a los problemas en el terreno matemático que algunos profesores le puedan asignar. De acuerdo con Baéz y Hernández (2002) es importante prestar atención a las siguientes consideraciones:

El poder de las piezas manipulativas no puede ser usado efectivamente sin una adecuada preparación del profesor. Las piezas manipulables no hacen "fácil" a las matemáticas, y los profesores necesitan aprender cómo usarlas.

Cuando los alumnos alcanzan un nivel sofisticado de manipulación de las piezas, pueden dar la impresión de que entienden bien los conceptos matemáticos pero, no olvidemos que las piezas sólo son un pretexto para llegar a la etapa simbólica.

La atención debe ser puesta en ayudar a transferir lo que los alumnos saben con las piezas manipulables a otras representaciones, incluida la simbólica, numérica, etc. Recordar que la transferencia no se da espontáneamente.

Finalmente existe el peligro de que el uso de piezas geométricas "fije" al alumno solamente al momento concreto. Es decir, si no se emplean adecuadamente las piezas geométricas o se abusa de ellas, el uso de modelos concretos puede ocultar lo que se pretende enseñar. Los modelos con piezas geométricas pueden anclar a los estudiantes a un contexto concreto progresando dentro de este contexto, demorando la construcción de la sintaxis matemática.

Diseño del material didáctico "Formemos Cuadrados"

Considerando el referente anterior, elaboramos el material que denominamos "Formemos Cuadrados" para abordar el tema de la raíz cuadrada. Colín y Martínez (2007) realizan un estudio en relación a los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada. Señalan que las concepciones se encuentran estrechamente ligados a los conceptos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada, por ejemplo, la noción de raíz, posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En ese sentido, la radicación (la acción de determinar la cantidad que ha de multiplicar por si misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

Tomando en cuenta que el tratamiento didáctico que se le da al tema de la raíz cuadrada en el contexto escolar, privilegia el aspecto algorítmico, decidimos generar un material didáctico tangible, que permita a los estudiantes ir de lo concreto a lo abstracto, de lo geométrico a lo aritmético. Dicho material está conformado por piezas de madera, con las siguientes especificaciones: piezas de 1cm x 1cm x 1cm, las cuales representan a las unidades, piezas de 10cm x 1cm x 1cm que representan a las decenas y piezas de 10cm x 10cm x 1cm que representan a las centenas (Fig. 1).

Fig. 1. Material didáctico
Fig. 1. Piezas de madera, elaboradas para representar a las unidades, decenas y centenas. Los colores sólo proporcionan un estímulo visual, en nuestro caso, escogimos rojo (unidades), verde (decenas) y azul (centenas).

Pretendemos que el estudiante forme cuadrados con las piezas que constituyen el número al cual se le va a hallar la raíz cuadrada exacta, es decir, queremos permitirle al alumno que mediante la manipulación de este material (el de formar cuadrados) le atribuya un significado a la raíz cuadrada, de tal manera que pueda transitar de lo geométrico a lo aritmético. De acuerdo con Ausubel (citado en Negrete, s.f.), de que un factor importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe y que el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante preexistente en la estructura cognoscitiva, nuestro propósito es que a partir de nociones conocidas, como unidades, decenas, centenas, cuadrados, agrupaciones de unidades para generar decenas, y de decenas para generar centenas, los estudiantes conecten dichos conceptos a la nueva información, en lugar de partir de la noción de radical, radicando, raíz e índice para presentar el estudio de una raíz cuadrada.

Apreciando la forma en que se espera trabajar con el material tangible; a continuación presentamos (a través de una secuencia de imágenes), un conjunto de pasos que representan geométricamente la raíz cuadrada, por ejemplo, del número 665:

Fig. 2. Paso 1. Notación desarrollada del número 665. 6 centenas, 6 decenas y 5 unidades

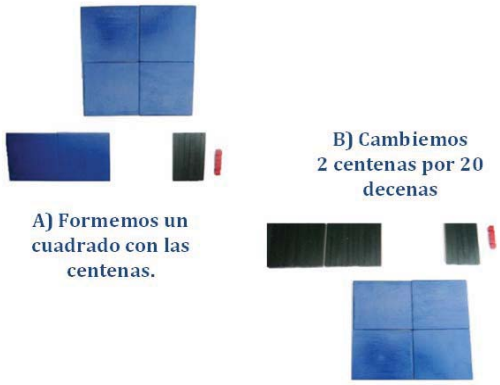


Fig. 3. Paso 2. A) Formamos un cuadrado con 4 centenas y nos sobran 2, B) las cuales cambiamos por 20 centenas.

Fig. 4. Paso 3. Ahora formemos un nuevo cuadrado usando las decenas.

Fig. 5. Paso 4. Ahora, es necesario realizar cambio de decenas por unidades

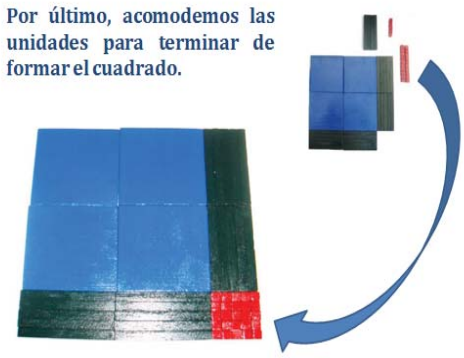


Fig. 6. Paso 5. Completemos el cuadrado con las unidades

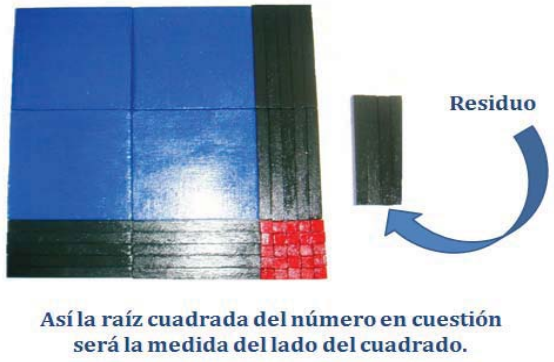


Fig. 7. Paso 6. Cuadrado con 25 unidades en cada lado. Residuo: 4 decenas

Perspectivas futuras

El siguiente paso en nuestro trabajo es la puesta en escena de la propuesta, para ello consideramos realizar el estudio *a posteriori*, que nos permita identificar la presencia de un aprendizaje significativo en los estudiantes, mediante el empleo de dicho material tangible. En virtud de que el operador raíz cuadrada es presentado en el primer año de secundaria, y los libros de texto lo abordan como la operación inversa de elevar al cuadrado un número, nuestra intención es trabajar con estudiantes de dicho grado.

Referencias bibliográficas

Báez, M; Hernández, S. (2002). *El Uso de Material Concreto para la Enseñanza de la Matemática.* Taller de Matemáticas del Centro de Ciencia de Sinaloa. Obtenido Noviembre 13, 2007, de http://redexperimental.gob.mx/descargar.php?id=229.

Colín, M. P. y Martínez G. (2007). De la aritmética al cálculo: Un estudio transversal de la raíz cuadrada. En Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. *Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.* Mosaicos Matemáticos N. 20, (pp. 45-50). México.

Negrete, M. (sf). *David Ausubel y el aprendizaje significativo*. Recuperado el 1 de diciembre del 2008, de http://www.sociologia-organizacion.org/archivos/ausubel.pdf

LA ASIMILACION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO COMO UNA ACTIVIDAD DEL SUJETO

Darly Kú, Solange Roa
CINVESTAV-IPN México
darlyku@cinvestav.mx, roafuentes@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *En este documento intentamos hacer una reinterpretación a la teoría APOE tomando en cuenta el papel que juega el sujeto como constructor de su aprendizaje. Consideramos que es necesario hacer adecuaciones que se adapten al nuevo entorno en el que nos encontramos. Kuhn (1970) menciona que un paradigma (marco teórico) cambia o se modifica, porque satisface las necesidades de los tiempos más que el paradigma existente. Aclaramos que no pretendemos forzar ningún paradigma para dar explicaciones de los fenómenos inexplicados. Simplemente intentamos hacer una reinterpretación de las ideas hechas por Dubinsky acerca del papel que juega el sujeto en la construcción de su conocimiento, considerando que es necesario para el desarrollo de nuevas investigaciones que se desarrollen bajo esta perspectiva.*
Palabras clave: Teoría APOE, asimilación, conocimiento matemático

La teoría APOE

En este apartado intentaremos resaltar cuáles son las ideas principales que se desarrollan en la teoría APOE.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) fue iniciada por Dubinsky, y desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta se apoya en las ideas de Piaget sobre el aprendizaje y educación para aplicarlas al nivel universitario, es decir, fueron adaptadas para ser utilizadas en el estudio del pensamiento matemático avanzado. La idea principal en que se basa esta teoría es "la abstracción reflexiva" como la clave de la construcción de los conceptos lógico matemáticos (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

Acerca del conocimiento matemático, Dubinsky menciona que:

> *El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996).*

Esta afirmación menciona que las estructuras mentales por las cuales un estudiante comprende un concepto matemático son las acciones, procesos, objetos y esquemas. Éstas constituyen la parte fundamental de la teoría APOE.

El marco teórico APOE consiste de tres componentes: *análisis teórico, diseño e instrucción y recolección de datos* (Asiala, et al., 1996).

Un *análisis teórico*, de la investigación comienza con un análisis teórico que modela la epistemología del concepto de estudio ¿qué significa entender el concepto y cómo este entendimiento puede ser construido por un sujeto? Se basa primeramente en la comprensión que tiene el investigador del concepto en estudio y sobre su experiencia como aprendiz y maestro del concepto. Con base a ello se propone un modelo de cognición que describe las construcciones mentales específicas que un sujeto podría seguir para desarrollar su o sus entendimientos del concepto, es decir, describe cómo el concepto se puede desarrollar en la mente de un estudiante. A este modelo se le conoce como una *descomposición genética*.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, las estructuras básicas por las cuales se construye un conocimiento matemático son acción, proceso y objeto.

Acción. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones.

Si la comprensión de un concepto por parte del individuo se limita a realizar acciones, entonces decimos que posee una concepción acción de tal idea. Aunque una concepción acción sea muy limitada, la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la comprensión de un concepto.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos.

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Glosario RUMEC).

El mecanismo para transitar de una estructura a otra es la *abstracción reflexiva* que se refiere a la reflexión sobre las acciones que se hacen sobre un objeto de conocimiento. Trigueros (2005) menciona que este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el individuo hace sobre el objeto de conocimiento. Cabe mencionar que esas concepciones no siguen necesariamente una secuencia lineal. Es decir, un individuo puede tener durante mucho tiempo concepciones intermedias o incluso tener una concepción de un tipo para algunos aspectos de un concepto y de otro para otros aspectos del concepto.

Un *diseño e instrucción* de la investigación está basado en el análisis teórico. En esta segunda componente, los estudiantes son impulsados intencionalmente a un desequilibrio en las actividades propuestas. La idea es que todas las cosas se esparzan en una manera holística como opuesta a comenzar una organización secuencial. En este marco teórico *el contexto social* se utiliza en la aproximación pedagógica, que se refiere al ciclo de enseñanza ACE, a través del uso de grupos de aprendizaje cooperativo.

Una *recolección de datos* de la investigación se basa en realizar una colección y análisis de datos. La información debe ser acerca de los estudiantes y los cursos que toman. En algunos casos se recolecta información acerca de los estudiantes quienes previamente han estudiado las matemáticas concernientes a la enseñanza tradicional o bien a la enseñanza que propone esta perspectiva teórica (Ciclo ACE).

En el siguiente apartado nos centraremos en lo que respecta al análisis teórico.

La asimilación en la teoría APOE

La teoría APOE como bien se conoce es una teoría de orden cognitivo diseñada para el estudio del pensamiento matemático avanzado. Ésta intenta comprender cómo aprende matemáticas un sujeto y cómo podemos ayudarlo a desarrollar este aprendizaje. Pero cuál es el papel que juega un

sujeto en la construcción de los conceptos matemáticos, y qué hace (por oposición a lo que piensa que se hace) para adquirir y utilizar un conocimiento matemático, para considerarlo como bien razonado. Estas son algunas preguntas que nos hemos planteado, para intentar hacer una reinterpretación de la teoría APOE acerca del papel que juega el sujeto en la construcción de su conocimiento.

Revisando la literatura acerca de los trabajos realizados actualmente (Manzanero, 2007; Vargas, 2007; Kú, Trigueros y Oktac, 2008; Parraguez, 2009) bajo esta perspectiva teórica, nos hemos percatado que el papel del sujeto como aprendiz de las matemáticas es el de constructor de objetos matemáticos. Sin embargo en ocasiones no se toman en cuenta qué elementos son comunes en los estudiantes, para dicha construcción. Es por ello que en esta investigación, consideramos necesario analizar por qué es importante considerar las características de los sujetos como constructores de su conocimiento matemático y no verlos solo como receptores de información. Para construir un concepto matemático, un estudiante tiene que tener ciertas estructuras cognitivas existentes relacionadas, con el concepto matemático a conocer. Sin embargo en ocasiones no se toma en cuenta que estas estructuras cognitivas existentes en ocasiones están relacionadas con su realidad y que además interviene la necesidad de quererlas aprender por parte del sujeto. Es decir, pensamos que hay otros factores diferentes al cognitivo que sin duda determinan la manera como un individuo construye su conocimiento, estos de alguna forma intervienen en el desarrollo de nuevas estructuras cognitivas insertándose en las ya existentes.

Dentro de la teoría APOE existe un mecanismo principal llamado “abstracción reflexiva”, que consiste en extraer de un sistema de acciones o de operaciones del nivel inferior, ciertos caracteres cuya reflexión (en el sentido casi físico del término) se reflejan en las acciones u operaciones que se realizan a nivel superior. Pues sólo es posible adquirir conciencia de los procesos de una construcción anterior por medio de una reconstrucción en un nuevo plano. Cabe mencionar que éste es producto de la abstracción empírica puesto que obedece al tipo de acciones mentales sobre los elementos que él o ella puede considerar en su mente. Consideramos que la abstracción reflexiva juega un papel importante en la construcción de nuevos objetos. Sin embargo, hemos observado que la *asimilación* también es crucial en la reconstrucción de las estructuras cognitivas precedentes a la construcción de un nuevo objeto, y que en ocasiones es

afectada por otros factores. Según Piaget y García (2004), la asimilación consiste en considerar el conocimiento como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto, es el sujeto quien extrae el contenido del objeto determinado por sus estructuras anteriores, y quien establece el esquema (o estructura previa) que le llevará a asimilar un nuevo objeto. Ya que cuando el nuevo objeto es asimilado, éste genera una reestructuración en el esquema asimilador y en aquellos que se relacionan con él, produciendo una evolución de las estructuras precedentes y aquellas que establecen de manera paralela a él. Por tanto consideramos que la asimilación juega un papel importante, ya que cuando un estudiante aprende o construye un concepto u objeto matemático, este es incorporado tal vez no como es en realidad si no a la manera de quien lo asimila. Cabe mencionar que la asimilación en su funcionamiento pone en marcha una serie de ciclos motores tendientes a satisfacer una necesidad (Ives – Lys, Agrelo, Barbieri, Brugo, Llanos, Gonzalez, Grilo y Spakapan, 1973). Con base a ello surge la siguiente pregunta cómo los elementos previos, determinan las variantes de una descomposición genética en la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Como parte de la metodología para esta investigación se realizó: una recopilación de los trabajos de investigación en álgebra lineal, realizados bajo la perspectiva teoría APOE; posteriormente se realizo un análisis de las descomposiciones genéticas de dichos trabajos de investigación (Manzanero, 2007; Vargas, 2007; Kú, et al, 2008; Roa, 2008; Parraguez, 2009) y de cómo estas eran aplicadas a los estudiantes. En el análisis se intentaba observar, si el trabajo lo permitía, el fenómeno de la *asimilación* como se ha mencionado en este documento y cómo esta puede determinar las variantes en una descomposición genética. Entonces consideramos que sin duda una descomposición genética sobre la construcción de un concepto en particular, puede ser desarrollada con diferentes grupos de individuos siempre y cuando las estructuras previas consideradas en la descripción de dicho camino hagan parte de las estructuras de dichos individuos. Para aclarar esto último daremos evidencia de un caso particular que fue analizado, el concepto de transformación lineal.

En la construcción del concepto de transformación lineal Roa (2008), determina una descomposición genética refinada donde se describe específicamente el mecanismo de asimilación. En este camino la construcción del concepto está determinada por las estructuras previas de función y espacio vectorial; donde el esquema asimilador es el de función y el objeto asimilado es el espacio vectorial. Según muestra la autora, el objeto espacio vectorial es asimilado

por el esquema de función, cuando un individuo define en su universo de funciones aquellas cuyo dominio y recorrido son espacios vectoriales. Posteriormente, una vez que esta relación se establece, es fácil determinar este tipo de funciones (llamadas transformaciones) y resaltar la importancia de los vectores del espacio, el campo en el que éste se define y las operaciones definidas en ellos para finalmente determinar o no su preservación. En los resultados de la investigación de Roa (2008), se puede apreciar que la construcción del concepto Transformación Lineal está totalmente determinada por la preexistencia de estas estructuras que pueden integrarse mediante la asimilación. En este caso sería importante considerar qué es un esquema completo de función y que relaciones específicas deben establecerse para determinar la asimilación del nuevo objeto.

Conclusión

La relación inicial entre elementos previos y un nuevo concepto determina la construcción del conocimiento matemático, por las relaciones que pueden establecerse. Cuando estas relaciones no se dan por la ausencia de los mecanismos de asimilación y reacomodación, los conceptos son simplemente mecanizados por los individuos sin que haya una verdadera comprensión de los mismos. Por tanto la estructuración del conocimiento lógico matemático se ve afectada por dichos factores, ya que lo que aprendemos lo vamos incorporando a las nuevas construcciones o reconstrucciones de un cierto conocimiento.

Consideramos que ningún conocimiento es una copia de lo real, porque incluye, forzosamente, un proceso de asimilación a estructuras anteriores; es decir, una integración de estructuras previas. De esta forma, la asimilación maneja dos elementos: lo que se acaba de conocer y lo que significa dentro del contexto del ser humano que lo aprendió. Por esta razón, conocer no es copiar lo real, sino actuar en la realidad y transformarla.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A frameworkfor research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education* 2(3), 1-32.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática,*8 (3), 24-41.

Ives-Lys Danna, Agrelo, G.,Barbieri, N., Brugo,L., Llanos, E., Gonzalez, D., Grilo, C. y Spakapan, A. (1973). *El nacimiento de la inteligencia*. Buenos Aires: Ediciones Paidos.

Kuhn, T. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 66– 89.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Roa, S. (2008*). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

APRENDIZAJE DE ESTOCÁSTICOS EN PRIMER SEMESTRE DE INGENIERÍA

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav IPN México
optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística Nivel: Superior

Resumen. *Este estudio se dirige a la cuestión de si la formación del ingeniero satisface los requerimientos de conocimientos de estocásticos para un desarrollo satisfactorio en su futuro desempeño profesional y/o académico tecnológico. Para ello, se interesa en la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en los alumnos del primer semestre de ingeniería y en las dificultades que pueden tener para aprender probabilidad y estadística; se enfoca en la propuesta para estocásticos de los institutos tecnológicos. En la primera etapa de la investigación, el objeto de análisis fue el programa de estudio y los medios que recomienda el sistema de institutos tecnológicos, así como su correspondencia con las ideas fundamentales de estocásticos para un currículo en espiral. En la segunda etapa se considera la simultaneidad de la introducción de probabilidad y de estadística y del cálculo diferencial e integral. La tercera etapa se centra en el examen de la comprensión de estocásticos de los estudiantes.*
Palabras clave: Estocásticos, aprendizaje, comprensión, limitaciones, ingeniería

Introducción

La investigación en la ciencia cognitiva demuestra la prevalencia de algunas maneras intuitivas de pensar que interfieren con el aprendizaje del razonamiento probabilístico correcto (Ahlgren y Garfield, 1988). Este estudio se dirige a la cuestión de si la formación del ingeniero satisface los requerimientos de conocimientos de estocásticos para un desarrollo satisfactorio en su futuro desempeño profesional y/o académico tecnológico. Interesa la comprensión de los estudiantes de primer semestre de ingeniería electrónica de dos tipos de distribución: la Distribución Normal, cuya función de densidad tiene un gráfico en forma de campana y se presenta como el ejemplo más importante de variable aleatoria continua, y la Distribución Binomial, que corresponde a términos sucesivos binomiales, es decir, su correspondiente variable aleatoria es discreta. El teorema del límite central justifica que, a medida que la cantidad de ensayos de Bernoulli aumenta, se aproxime la probabilidad binomial del número de éxitos obtenidos (el resultado de una serie) mediante los valores de una distribución normal (el resultado de una integral definida). Epistemológicamente, las nociones de cálculo se formalizan antes que las de probabilidad. Esa

anticipación es producto de una enseñanza determinista que otorga mayor importancia a los conceptos del cálculo diferencial e integral que a los de estocásticos.

En una primera etapa de la investigación se identificaron, en el tema de interés aquí, las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975) en el programa de estudios propuesto por el sistema de Institutos Tecnológicos y en el libro de texto que recomienda, incluyendo los ejercicios o problemas que plantea; el fin fue valorar la pertinencia de la propuesta. Es notorio un desfasamiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral respecto de la de estocásticos, lo que sugiere una desarticulación de los programas de ambas asignaturas que puede ocasionar el malogro de los objetivos planteados con la enseñanza de probabilidad y de estadística.

En el libro de texto propuesto (Walpole, 1992) en el programa de estudios de los institutos tecnológicos, los elementos de probabilidad se presentan desde el inicio y hasta el capítulo 6. A partir de este capítulo comienza Estadística con la sección de Muestreo aleatorio. De manera paralela a la asignatura “Probabilidad y Estadística” se propone “Cálculo Diferencial e Integral” (Stewart, 2001). La simultaneidad de ambas asignaturas en el mismo semestre plantea la interrogante de si esta última se deba impartir previamente a la de probabilidad y estadística y qué consecuencias tiene tal simultaneidad en la comprensión de estocásticos de los estudiantes.

Pregunta de investigación y objetivos

¿Cuáles son las limitaciones para el aprendizaje de Probabilidad y Estadística en los estudiantes de primer semestre de ingeniería en institutos tecnológicos y a qué factores principales se deben?

Objetivo 1. Identificar la comprensión de los estudiantes del primer semestre de ingeniería, de ideas fundamentales de estocásticos implicadas en problemas que requieren de conceptos del Cálculo.

Objetivo 2. Obtener información de las limitaciones que repercutan hacia el orden cognitivo y transgredan el orden epistemológico.

Objetivo 3. Informar sobre la pertinencia de la propuesta institucional para, en su caso, proponer una alternativa.

Elementos teóricos

Tres ejes rectores orientan la investigación. En el orden epistemológico se ha considerado, como se señala en la introducción, la propuesta de Heitele (1975) de diez *ideas fundamentales* de estocásticos como guía de una formación en ellos y base de su conocimiento analítico. Es necesaria una formación continua en estocásticos, desde la educación preescolar hasta la universitaria, que considere sus ideas fundamentales como guía, de manera que en los grados superiores se pueda presuponer un dominio intuitivo favorable al tratar temas de estocásticos así como bases para su conocimiento analítico. La propuesta de Heitele constituye un modelo a usar en la enseñanza a todos los niveles, no para resolver problemas estocásticos, sino para construir currículas coherentes de estocásticos. Steinbring (2005), por su parte, ha esquematizado con el triángulo epistemológico la constitución del concepto matemático, el cual resulta de la interrelación entre el objeto, el signo y el propio concepto, en atención a la dimensión social que reviste la enseñanza y la interacción en el aula (Ojeda, 2006) respecto a la adquisición del conocimiento de estocásticos en el nivel universitario. El significado de los conceptos no se puede deducir de conceptos más básicos; el significado depende de una manera autorreferente del mismo (Steinbring, 1991). El triángulo epistemológico representa un diagrama de relaciones balanceadas entre sus vértices, los cuales no pueden ser tratados de forma independiente en la deducción del significado del conocimiento matemático.

En el orden cognitivo se ha considerado, en particular, el planteamiento de Frawley (1999) respecto a la conciencia como un concepto amplio que incluye tres tipos de subjetividad en el procesamiento de la información: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia. El procesamiento no consciente es la codificación automática del *input* sin la experiencia subjetiva o la conciencia de los mecanismos de procesamiento: un tipo de subjetividad discreta, identificable y viable. Funciona como un reflejo. Sus mecanismos y contenido son generalmente inmunes a la inspección. La conciencia es la *experiencia con toma de conciencia*. La toma de conciencia es ese elemento sobre el que se puede informar y que puede derivarse de los informes de los demás. De forma diferente al procesamiento ciego, automático, en el nivel consciente existe *algo que parece* tener experiencias: tienen cualidades. El tercer tipo de subjetividad es la metaconciencia: la toma de conciencia y la organización deliberada de la

experiencia (Frawley, 1999). Se considera que las limitaciones cognitivas se revelan como forma de protección del individuo ante demasiada información (Gigerenzer, 2008).

Organización del estudio y criterios de análisis

Para estudiar la cuestión de nuestro interés, se implementa el uso sistematizado de la *célula de análisis* (Ojeda, 2006) en las tres etapas en las que se ha organizado esta investigación (véase Figura 1), *en curso* y de carácter cualitativo (Eisner, 1998). Los constituyentes de la célula derivan de la perspectiva teórica. La fase documental del estudio se centró en la propuesta institucional para estocásticos y cálculo diferencial e integral en la carrera de ingeniería electrónica (Stewart, 2001; Walpole, 1992). Se revisó la correspondencia entre uno y otro y se les analizó respecto a las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele; se han distinguido los estocásticos de otros conceptos matemáticos para discriminar entre la identificación de la naturaleza aleatoria de los fenómenos en estudio de los conceptos que se aplican para hacerlo, así como para identificar posibles impertinencias por introducciones simultáneas o tardías de los segundos respecto a los primeros. Esta fase constituye un referente para examinar, en la segunda, la enseñanza de estocásticos y, en la tercera, los resultados de la enseñanza en los estudiantes.

Figura 1. Organización de la investigación y célula de análisis de la enseñanza.

Los instrumentos para la recopilación de datos son un cuestionario, una actividad experimental (Hogarth, 2002) y el guión de una entrevista semiestructurada. El análisis de los datos recopilados durante las tres etapas de la investigación, registrados en lápiz y papel, en hojas de control y en videograbaciones, se efectúa en matrices. Los recursos semióticos gráficos propuestos o producidos son de interés en tanto están en estrecha relación con los procesos cognitivos de donde derivan, como resultado de la comprensión de los estudiantes de los temas enseñados (Fischbein, 1975; Steinbring, 2005).

Resultados

Se realizó una actividad diseñada para un grupo de 28 estudiantes de primer semestre de ingeniería electrónica de un Instituto Tecnológico para obtener datos acerca de las nociones de los estudiantes de distribuciones centrales de probabilidad (Piaget e Inhelder, 1951) y de las ideas fundamentales de estocásticos implícitas en ella. Se utilizó ante grupos de 10, 10 y 8 estudiantes un tablero de Galton formado por siete filas en la parte superior y catorce columnas en la parte inferior; se proporcionó a cada participante una hoja de control donde apuntaron, con lápiz en papel, su estimación de la distribución final al liberar 200 canicas en el embudo superior del tablero. Después de haber efectuado el experimento se mostró a los estudiantes una simulación digital (Teacherlink, sf) donde se pueden variar las dimensiones del tablero y se muestra la formación respectiva de la binomial.

Tabla 1. Análisis de la actividad mediante el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005).

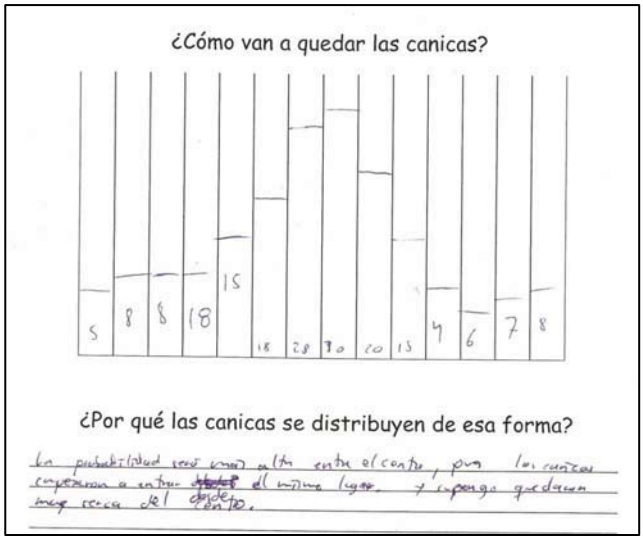
Hoja de Control	Triángulo epistemológico
	objeto/ Distribución final de las **signo/** Gráfica **concepto/** Distribución

Se encontró que cuatro estudiantes participantes pusieron en juego la noción de grandes números en la regularidad de la distribución central y su simetría aproximada al formarse la binomial en la base del tablero con las canicas que rodaron por él. La respuesta del estudiante 1 manifiesta un procesamiento consciente al declarar que *supone* que las canicas *quedarán muy cerca del centro* (véase Figura 2), ya que la distribución le *parece tener la cualidad de concentrarse en el centro*; ubicamos este desempeño en el nivel consciente de subjetividad (Frawley, 1999).

Cuatro días después se aplicó a 13 de los estudiantes del mismo grupo un cuestionario que incluyó tres problemas referidos a la distribución binomial desde el enfoque clásico de la probabilidad y extraídos del libro propuesto en el programa de estudios (Walpole, 1992). Con el cuestionario, impreso en papel para su contestación individual con pluma, se recopilaron datos acerca de la comprensión de las ideas de estocásticos implicadas en el tema después de la actividad experimental.

Del análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes se identificaron patrones. Para el ejemplo citado, tenemos: a) Planteamiento como distribución binomial, b) Definición, c) Identificación explícita de parámetros, d) Notación correcta, e) Aplicación correcta del coeficiente binomial, f) Asignación de 1 a los éxitos, g) Asignación de 2 a los éxitos, h) Notación decimal en las operaciones, i) Fracciones, j) Modo de porcentaje, k) Modo decimal, l) Distribución discreta

uniforme, m) Distribución hipergeométrica. Se identificó con "1" a la aparición del patrón de respuesta, como lo resume la Tabla 2.



¿Por qué las canicas se distribuyen de esa forma?

La probabilidad será más alta entre el centro, pues las canicas empezaron a entrar desde el mismo lugar y supongo quedarán muy cerca del centro.

Figura 2. Respuestas del estudiante 1 en la hoja de control de la actividad.

La tabla 2 resume las respuestas al segundo problema del cuestionario proporcionadas por los estudiantes. Resulta relevante el hecho de que haya una incomprensión del coeficiente binomial por parte de 9 de los estudiantes cuestionados (véase columna e), y hayan hecho la asignación de 1 a los éxitos sin tomar en cuenta el valor de 0 para dar una respuesta de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria en cuestión.

Tabla 2. Identificación de patrones de respuesta en el cuestionario aplicado.

	Clasificación													
Estudiante	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	Resultado
1	1	1				1		1	1	1	1			*Incorrecto*
2										1				*Incorrecto*
3			1				1		1		1			*Incorrecto*
4			1				1				1			*Incorrecto*
5	1						1	1	1		1			*Incorrecto*
6	1		1				1	1		1	1			*Incorrecto*
7				1	1	1			1		1		1	*Incorrecto*
8														No contestó
9	1		1		1	1		1			1			*Incorrecto*
10									1	1	1		1	*Incorrecto*
11			1	1	1	1			1	1			1	*Incorrecto*
12	1	1		1	1		1	1	1		1			*Incorrecto*
13	1						1	1	1		1			*Incorrecto*
	6	2	5	3	4	4	6	6	8	5	10	0	3	0/12

El enunciado del citado ejemplo es el siguiente:

> *2. Si se define la variable aleatoria X como el número de caras que ocurren cuando una moneda legal se lanza al aire una vez, encuentre la distribución de probabilidad de X.*

Se aplicarán entrevistas semiestructuradas individuales para obtener más elementos sobre las predicciones hechas por los estudiantes en la actividad y su comprensión del papel de los grandes números en la regularidad de la dispersión simétrica y la cuantificación inmediata de la distribución central, características típicas del tercer estadio del origen de la idea de azar (Piaget e Inhelder, 1951). Para ello, se diseñará un guión de entrevista que permita identificar el estado del razonamiento probabilístico en los estudiantes a quienes se les aplique, por ejemplo, trabajar con el complemento es característico de poner en juego tal razonamiento porque indica la identificación de eventos y de la totalidad del espacio muestra.

Referencias bibliográficas

Ahlgren, A. y Garfield, J. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education 19(1)*, 44-63.

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dördrecht: D. Reidel Publishing Company.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Gigerenzer, G. (2008). *Decisiones instintivas*. Barcelona: Ariel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6 (2)*, 187-205.

Hogarth, R. M. (2002). *Educar la intuición*: *El desarrollo del sexto sentido*. Barcelona: Paidós.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed), *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 195-214), México: Cinvestav del IPN, Grupo Editorial Santillana.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Bibliothèque de Philosophie Contemporaine. Paris: Presses Universitaires de France.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching : Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22, 503-522.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Thomson.

Teacherlink. (sf). Recuperado el 2 de junio de 2009 de http://www.teacherlink.org/content/math/interactive/flash/quincunx/quincunx.html

Walpole, R. y Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill.

SOBRE AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Tânia M. Mendonça Campos, Sandra R. Firmino da Silva, Marlene Alves Dias
UNIBAN Brasil
sandraprojeto@yahoo.com.br, taniammcampos@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br
Campo de investigación: Resolução de problemas Nivel: Básico

Resumo. *Nesse trabalho pesquisamos o ensino das estruturas multiplicativas, segundo a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991) proposto pelo Programa Ler e Escrever, implantado nas séries iniciais das escolas da rede pública estadual de ensino do Estado de São Paulo. Para tanto, trabalhamos com uma classe da 3ª série do Ensino Fundamental e utilizamos o material de sondagem e as orientações disponíveis no Guia de Orientações do Programa Ler e Escrever. As tarefas propostas aos alunos foram os problemas que constam desse Guia. Além disso, propomos uma situação didática de intervenção com o uso do software ClicMat para observar as possibilidades de aprendizagem com uso dessa ferramenta. As análises e estudos dos dados coletados permitiram a construção de um inventário dos diferentes esquemas que possibilitaram potencializar as situações propostas como recurso de intervenção para a construção do raciocínio multiplicativo.*
Palavras-chave: Estruturas multiplicativas, ensino fundamental, tecnologia

Introdução

O ensino de matemática nos aponta as dificuldades dos alunos em dar sentido e compreender os números e suas operações não estabelecendo relações ou possibilidades de usar essas ferramentas didáticas para resolver situações num contexto sociocultural real, fazendo com que nós, professores, nos sentíssemos intrigados e procurássemos pensar sobre essas questões.

Vivenciamos assim, no cotidiano de sala de aula o professor da classe ensinando o algoritmo da adição, e em seguida propondo problemas que podem ser solucionados por meio de uma adição, ou seja, não se tem um problema e sim uma aplicação do algoritmo, e assim sucessivamente, com as outras operações aritméticas.

Notamos que a situação proposta por meio de problemas apresenta resistência no processo de ensino e aprendizagem, pois a dificuldade de solucionar um problema não está diretamente relacionada à operação envolvida na resolução. Em conseqüência, existem também dificuldades em relação ao ensino de resolução de problemas sobre as estruturas multiplicativas, e por conseqüência, em geral, o ensino desse conteúdo, é trabalhado apenas por meio da adição de parcelas repetidas e não são exploradas as diversas idéias existentes no

campo conceitual dessa estrutura. Observamos que Nunes e Bryant (1997) e Nunes et al (2002) apontam uma diferença básica entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo, considerando que a abordagem do raciocínio aditivo dificulta a introdução dos diferentes esquemas em ação que envolvem a noção de multiplicação, tais como:

- a correspondência um-a-muitos,
- a correspondência em coordenação com a contagem,
- esquema da distribuição equitativa
- a coordenação entre os dois esquemas (de correspondência e distribuição equitativa).

Iniciamos assim nossa pesquisa sobre estruturas multiplicativas nas séries iniciais, mais especificamente, para crianças da 3ª série – 4º ano. No primeiro teste diagnóstico constatamos que os alunos têm dificuldades com as questões que envolvem as idéias de configuração retangular e combinatória, o que já era esperado, pois segundo Vergnaud (1983), são idéias que fazem parte das estruturas multiplicativas e envolvem o teorema em ação correspondência um-a-muitos.

Na tentativa de mudar esse quadro propomos um trabalho com o software livre ClicMat, de forma que as atividades propostas são classificadas nas categorias: problemas, atividades de investigação e jogos.

Para isso, o trabalho aqui proposto trouxe especificamente a noção de multiplicação, por meio da correspondência um-a-muitos. Pode-se considerar assim, que a questão central da pesquisa foi desenvolver um estudo que permitisse a construção e utilização de um conjunto de situações sobre a noção de multiplicação a partir das propostas encontradas nas diferentes pesquisas que compõem o referencial teórico desse trabalho e a construção de um inventário sobre os esquemas em ação encontrados para um grupo de alunos.

Sendo assim, escolhemos como teorias centrais a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1983) e a teoria das situações didáticas de Brousseau (1986), para as quais daremos uma breve descrição dos pontos que nos interessam.

Referencial teórico da pesquisa

Observamos que para Vérgnaud (1991) um campo conceitual é um conjunto de situações em relação progressiva com o conjunto de conceitos que o gera.

- Um conceito => várias situações;
- Uma situação => vários conceitos.

Fez-se então necessário delimitar o problema de modo que a investigação ao qual nos propomos reporte-se apenas aos trabalhos de Vergnaud, pois procuramos compreender diferentes procedimentos dos alunos para determinadas situações multiplicativas e, a teoria das situações didáticas de Brousseau, para a qual consideramos apenas a noção de situação a-didática

Campos conceituais e as estruturas multiplicativas

Segundo Vérgnaud (1991) um conceito se forma a partir de várias situações e vice-versa, o processo de construção e apropriação de um conceito em todas as suas dessemelhanças, e, todos os aspectos de uma situação são longos, com empecilhos e conquistas. Daí vem o termo "campo conceitual" que procura entender o processo de conceitualização da realidade pelo indivíduo.

Ainda em relação ao conhecimento Vergnaud (1991) distingue duas classes de situações:

> *1. Classe de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertorio, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias [...] 2. Classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de competências necessárias [...] (Vergnaud, 1991, p. 156).*

Dadas essas classes de situações Vergnaud (1991) justifica que estas funcionam de maneira diferente segundo os esquemas, as primeiras com *condutas em grande medida automatizadas*, *organizadas através de um esquema único*, e a segunda com *desencadeamento sucessivo de diversos esquemas* ocorrendo num processo de desvendar, ajustando e desajustando e encontrando soluções.

O conceito de competência não é um conceito cientifico sozinho, é preciso compreender a organização da atividade, por isso Vergnaud (1991, p.157) desenvolve o conceito de esquema*: ä organização invariante da conduta para uma dada classe de situação.*

O esquema é a forma pela qual o aluno organiza seus invariantes de ação ao lidar com uma determinada situação ou classe de situações. Um esquema é eficiente para um conjunto de situações e podem gerar diferentes seqüências de ações, procedimentos de coleta e controle de informações, dependendo de cada situação.

Na figura 1 temos exemplos de teorema em ação:

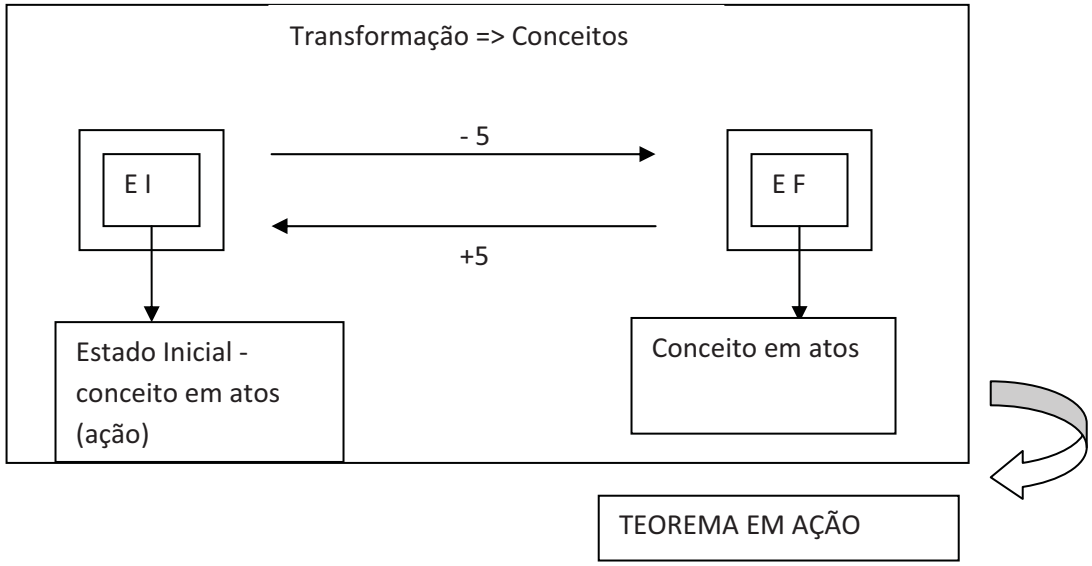


Figura 1: Exemplos de Teorema em Ação

È importante observar que existe uma relação dialética entre conceito em ação e teorema em ação. Os teoremas em ação são proposições tidas como verdadeiras, mas podem ser verdadeiras ou falsas. Os conceitos em ação não são nem verdadeiros nem falsos, mas pertinentes ou não pertinentes. O reconhecimento de invariantes é, pois a chave da generalização do esquema. (1991 p. 161).

Composto por regras de ações e de antecipações o esquema, vem combinado essencialmente por *invariantes operatórios* e *por inferências*. Os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e conhecimento-em-ação) podem ser de três tipos: proposições, função posicional, argumento.

Na pratica as inferências são indispensável em cada situação particular, normalmente uma classe não está acabada e esta faz parte de um universo que permite gerar seqüências diversas de ações em torno das diversas variáveis de uma situação.

Em outras palavras, teoremas-em-ação são relações matemáticas que os alunos levam em consideração quando escolhem uma operação ou uma seqüência de operações para resolver um dado problema. Eles, geralmente, não são expressos verbalmente, podendo até estar errados. Eles aparecem espontaneamente em contextos simples, não tendo um valor universal, mas nos permitem traçar o conhecimento matemático no nível de esquemas em ação.

Quando consideramos as situações encontradas nas Estruturas Multiplicativas, essas podem ser classificadas como: multiplicação comparativa, comparação entre razões (idéia de proporcionalidade), configuração retangular e as associadas à idéia de combinatória.

Em especial, nossa pesquisa terá como suporte teórico o campo conceitual multiplicativo (sobretudo as operações de multiplicação e divisão), o qual tem como pressuposto a interligação entre conceitos, tais como relações, transformações, leis composição de operações, operações envolvendo uma ou mais multiplicações ou divisões, etc. (Vergnaud, 1983).

Teoria das situações

Guy Brousseau define uma situação didática como:

> *Um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição. (Brousseau, 1986, p.45).*

A Teoria das Situações indica diversas formas de conhecimentos como meios para tomar uma decisão, de escolher uma ação, uma formulação, uma prova etc. O sentido assim dado ao "conhecimento" corresponde à idéia exata de uma realidade, da sua situação, do seu sentido, do seu caráter, do seu funcionamento se exclui a condição de exatidão (dado que o tema pode ter um conhecimento inexato no entender do observador).

Uma situação a-didática concerne a parte de uma, situação didática que o professor delega (devolve) ao estudante. O professor se esforça em excluir suas intervenções relativas à solução. O estudante pode então interagir com um *milieu* quase não didático, onde ele pode e deve ignorar as intenções didáticas do professor. Assim a produção pelo estudante de diferentes tipos de ações, de formulações e de validações só respondem a necessidades próprias, não didáticas.

Segundo o autor, para que a aprendizagem possa ser vista sob esta ótica é necessário que o professor busque uma situação apropriada. Neste sentido usamos o recurso do software ClicMat que oferecia situações propicias para devolução com uma diversidade de atividades que entre elas compunha as noções das estruturas multiplicativas.

Objetivos e metodologia da pesquisa

Realizar uma análise sobre o ensino das estruturas multiplicativas, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, proposto pelo Programa Ler e Escrever, implantado nas séries iniciais das escolas da rede pública estadual de ensino do Estado de São Paulo, Brasil, e observar se existe uma preocupação em propor tarefas que considerem a aplicação da Matemática em situações que possam ser compreendidas pelos alunos.

Para alcançar os objetivos expostos acima consideramos a seguinte metodologia:

- Trabalhar com 30 alunos de uma classe da 3ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública do Estado de São Paulo.
- Utilizar o material de sondagem e as orientações disponíveis no Guia de Orientações do Programa Ler e Escrever da Secretaria de Educação.
- Aplicar um teste diagnóstico para identificar tipos de problemas e dificuldades dos alunos em relação à operação multiplicação.
- Após o teste fazer uma intervenção com o software ClicMat.
- Foi aplicado um pós-teste para observar o desenvolvimento dos alunos após o trabalho com o software.

Resultados encontrados

Os resultados encontrados mostram que o software é um recurso interativo que estimula as crianças e desenvolve a cooperação entre elas, uma vez que a escola da Rede Pública Estadual, onde foi feita a investigação, possui apenas 15 máquinas para atividades pedagógicas.

Sendo assim**,** as atividades foram planejadas em dois grupos de 15 alunos com 2 alunos por máquina, durante as atividades as crianças foram brincando e experimentando as idéias por meio da visualização das combinações e organizações o que lhes possibilitou uma vivência "concreta" com as estruturas multiplicativas. Mas, isso não foi suficiente para as crianças com mais dificuldades, pois elas continuaram não sabendo distinguir a operação que devem utilizar em função do problema proposto no pós-teste, que era semelhante ao pré-teste.

Isso mostra que ainda é preciso trabalhar as estruturas multiplicativas com esses estudantes propondo novas estratégias até que eles sejam capazes de compreender o raciocínio multiplicativo e aplicá-lo em diferentes situações quando necessário.

Podemos então acompanhar a evolução desse trabalho segundo a tabulação apresentada nos gráficos 1 e 2 representados abaixo, que descrevem o processo referenciado nos pré-teste e pós-teste.

- Em relação aos esquemas em ação, que envolvem a noção de multiplicação no pré-teste, do qual participaram 30 alunos.

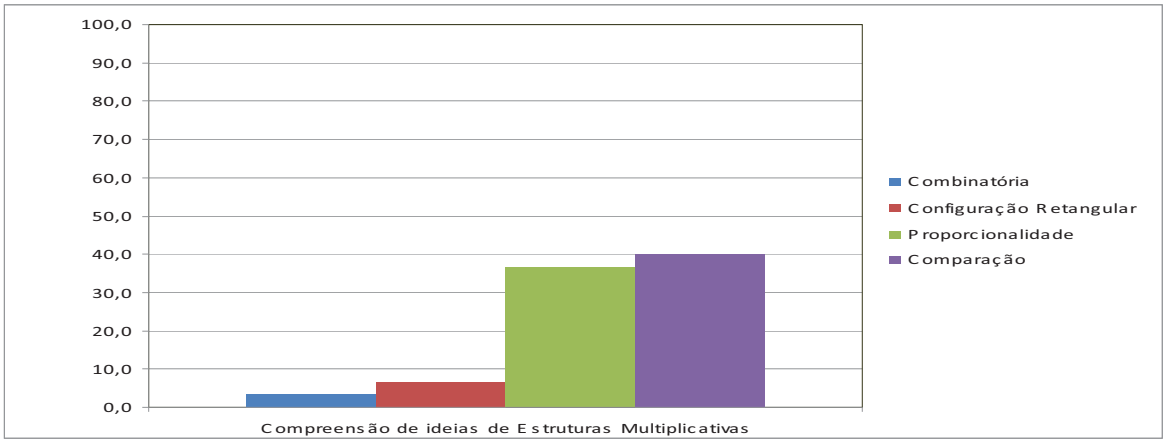


Gráfico 1: Resultados do pré-teste.

- Em relação aos esquemas em ação, que envolvem a noção de multiplicação no pós-teste, do qual participaram 30 alunos.

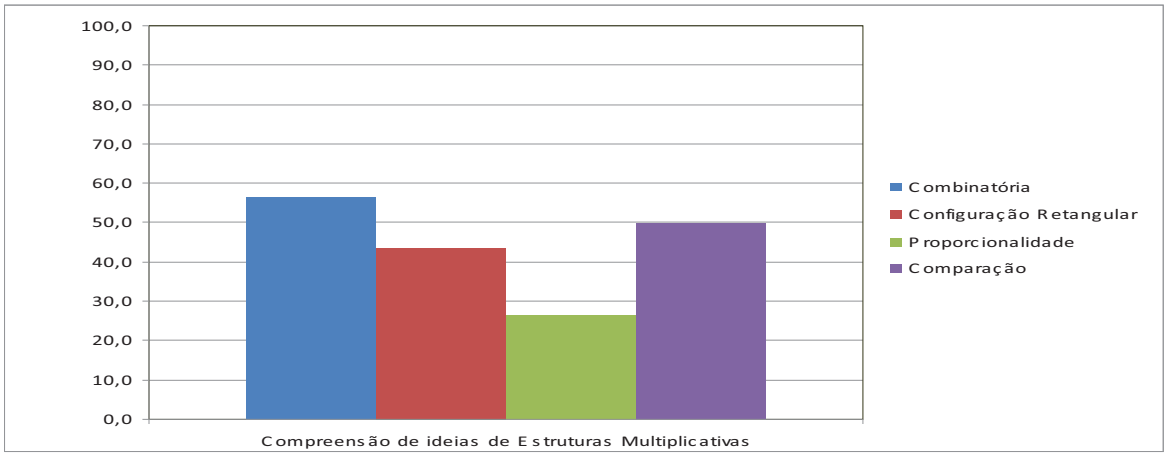


Gráfico 2: Resultados do pós-teste.

Observou-se que na comparação da sondagem inicial, do pré-teste, com a sondagem final, do pós-teste, alguns alunos avançaram no campo conceitual da estrutura multiplicativa conforme previsto por Vergnaud. O gráfico 3 permite uma melhor visualização das diferenças encontradas.

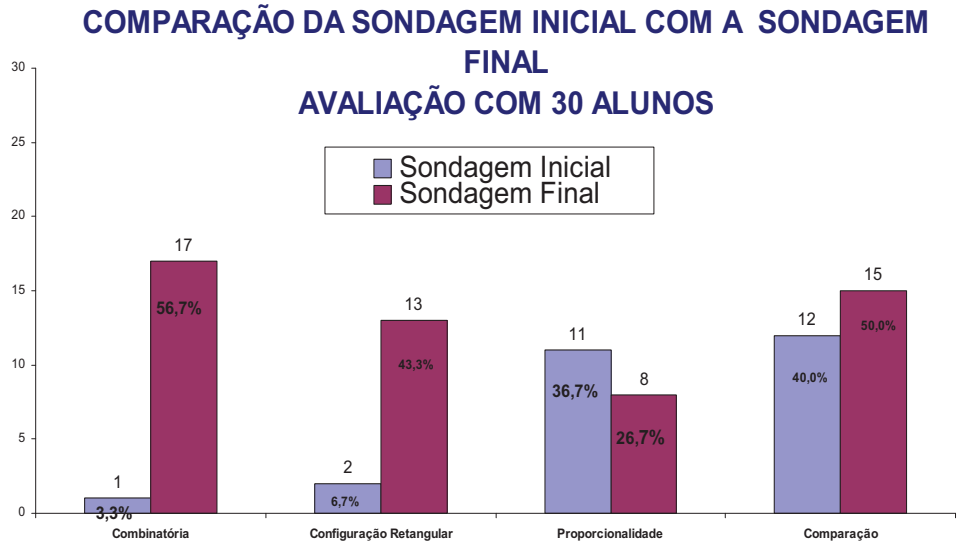


Gráfico 3: Resultados das sondagens inicial e final.

Considerações finais

Uma primeira análise do Programa Ler e Escrever, feita a partir deste estudo, aponta uma preocupação em trabalhar situações problemas levando em conta os diferentes esquemas de ação que envolve o campo multiplicativo. Além disso, o Programa pode propiciar a introdução ao cálculo mental, estimativa, algoritmos e o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas relativos à operação de multiplicação.

As situações selecionadas do Guia do Programa Ler e Escrever, para este estudo, sugere uma preocupação para que se desenvolva um trabalho com os alunos, na extensão do campo conceitual multiplicativo. No entanto, vale ressaltar que o uso do computador na intervenção, não previsto no Programa Ler e Escrever potencializa os resultados positivos obtidos para essa amostra.

Os resultados encontrados mostram que o software é um recurso interativo que estimula as crianças e desenvolve a cooperação entre elas, uma vez que a escola da Rede Pública Estadual, onde foi feita a investigação, possui apenas 15 máquinas para atividades pedagógicas.

Referência bibliográfica

Brousseau, G.(1986). Fundamentos e Métodos da didática da Matemática. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 33-115.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997) *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T. et al. (2002). *Introdução à Educação Matemática: Os Números e as operações numéricas.* São Paulo: Proem Editora.

São Paulo. Secretaria da Educação, Fundação para o Desenvolvimento da Educação (2008). *Ler e Escrever – PIC – Projeto Intensivo No Ciclo; Material Do Professor - 3º série/;* adaptação do material original, Rosenberg. C., Vasconcelos, R. S. R.–SP: FDE.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Multiplicativo Estruturas**.** En Lesh R., Landau M. (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). A Teoria dos Campos Conceituais.. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2.3). 133-170.

EL USO DE LA SUBTANGENTE PARA CARACTERIZAR UNA CURVA

Alma Rosa Pérez Trujillo, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas México
almarpt@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología, tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos un diseño didáctico en donde se aborda un tema del Cálculo del currículo actual, cuyo fundamento teórico está basado en investigaciones de corte socioepistemológico favoreciendo el uso inteligente de la tecnología en el aula de matemáticas. En él se retomarán aspectos que ayuden a la reconstrucción de significados de tópico matemáticos como el uso de la subtangente para caracterizar una curva (máximos, mínimos y puntos de inflexión).*
Palabras Clave: Subtangente, socioepistemología, diseño Didáctico, tecnología

La problemática

En investigaciones sobre Cálculo de Matemática Educativa se han propuesto resignificaciones de diversos tópicos a partir de un análisis epistemológico e histórico, con la finalidad de enriquecer y rediseñar el discurso matemático escolar (Buendía, 2004; Castañeda, 2004; Cordero, 2003). No obstante, aunque el objetivo de muchas de estas investigaciones sea el impacto en el quehacer cotidiano del profesor en el aula, el sentir generalizado de los profesores en servicio es la falta de vinculación entre sus necesidades y las investigaciones que se llevan a cabo (Pérez, 2008). De ahí que establezcamos un vínculo entre la matemática escolar y las investigaciones, vía diseños didácticos que hagan uso de la tecnología y cuyo fundamento teórico sean investigaciones de corte socioepistemológico.

Marco teórico y metodológico

Las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva han sido abordados por diferentes esquemas explicativos para dar cuenta de la construcción del conocimiento matemático de tal manera que el paradigma dominante ha sido el objeto matemático como la metáfora para explicar cómo se construye el conocimiento. Si vemos a las Matemáticas como una construcción hecha por seres humanos, que surge como consecuencia de darle respuesta a problemáticas en particular, consideramos que la perspectiva epistemológica debe cambiar, ya que se debe considerar al ser humano haciendo matemáticas y diseñar situaciones. El análisis de dichas prácticas debe

conformar el aspecto social en el estudio de la construcción del saber matemático estableciendo así un marco en el que lo socio interactúe de manera sistémica con las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva del saber para brindar una explicación más robusta acerca de su construcción. Al resultado de la conjunción de estas cuatro dimensiones, se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2000). Sin embargo, esas prácticas tienen que reformularse, reinterpretarse para lograr llegar al aula. Si bien, son el fundamento epistémico en la construcción del saber en cuestión, se les tiene que imprimir intencionalidad y hacerlas explícitas a fin de favorecer la resignificación de dicho saber; esto es, la reconstrucción del saber en una situación particular.

Debido a las características propias del diseño didáctico propuesto en esta investigación, se siguió la metodología de la Ingeniería Didáctica. Cabe señalar que existen algunas adecuaciones que se realizaron en la utilización de esta metodología, tomando en cuenta que el diseño didáctico nace al seno de los resultados de investigaciones de corte Socioepistemológico. En consecuencia, no se toman elementos de la obra matemática como base del diseño, sino a las prácticas sociales que dieron origen al conocimiento matemático. En este sentido, consideramos que en el diseño didáctico reflejarán las consideraciones epistemológicas en torno al máximo, mínimo y punto de inflexión, además, permitirá favorecer la construcción y constitución de su significado.

Fundamento teórico del Diseño Didáctico

El diseño didáctico está sustentado en el hallazgo del argumento gráfico-analítico hecho por Castañeda (2000) en las obras de difusión: el *Analyse des infiniment petits*, del marqués *L´Hospital* y el *Analitiche Institutioni*, de *Maria Gaetana Agnesi.* Retomamos el tercer argumento propuesto por *L'Hospital* y la segunda caracterización planteada por *Agnesi*, las cuales presentamos más adelante.

Para el diseño se decidió utilizar el pizarrón electrónico como herramienta tecnológica, ya que su utilización tiene como característica, la sensibilidad al tacto; su uso está apoyado en el empleo del software apropiado, como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*. Esta cualidad permite controlar la exposición directamente desde la pantalla del pizarrón electrónico como si se estuviera utilizando el ratón o el teclado; de esta manera se puede acceder, desplegar información

y ejecutar programas de aplicación contenidos en la computadora, como se muestra en las siguiente imagen (ver figura 1).

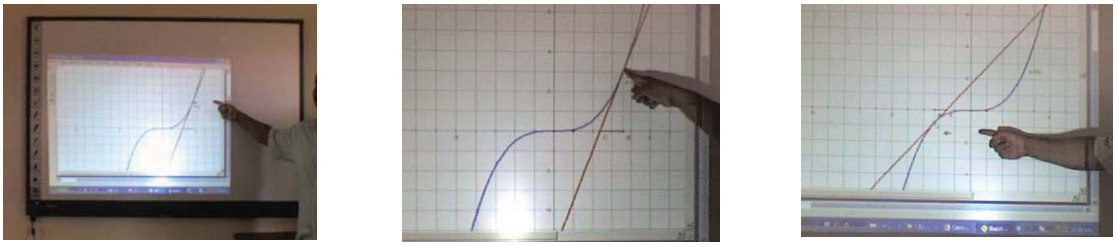


Figura 1. Uso del pizarrón electrónico (Tomada de Pérez, 2008; p. 61)

Una de las ventajas que observamos al hacer las construcciones por computadora apoyados en los software mencionados y no de manera tradicional utilizando lápiz y papel, es la libre manipulación y verificación de la construcción, además, de las ventajas que proporcionan las múltiples realizaciones y hacer ajustes en las construcciones para producir un resultado deseado.

El tercer argumento establecido por *L'Hospital* está sustentado en la observación de la posición relativa que guarda la subtangente y la tangente, a medida que se consideran nuevos puntos en la curva.

> El máximo se alcanza cuando la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente; de manera análoga, esto pasa con el mínimo, (Castañeda, 2006; pp. 259-260).

Si la subtangente PT aumenta [hacia la izquierda] a medida que MP se acerca a DE, es claro que cuando se construya a la tangente en el punto D, la subtangente tiene una magnitud infinita. De esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve de positiva a negativa, o al contrario (Figura 2).

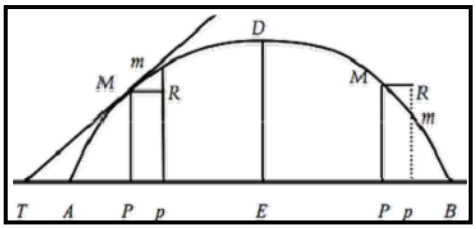


Figura 2. Uso de la subtangente. (Tomada de Castañeda, 2006; p. 260)

La segunda caracterización plateada por *Agnesi* se basa en la propiedad geométrica que guarda la subtangente respecto a la curva.

Es claro que, al aproximarse CG a EF, la subtangente AC será siempre la mayor, y cuando CG cae en EF, la tangente será paralela a BC; por consecuencia, la subtangente será infinita (Figura 3).

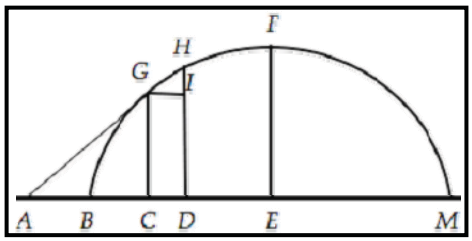


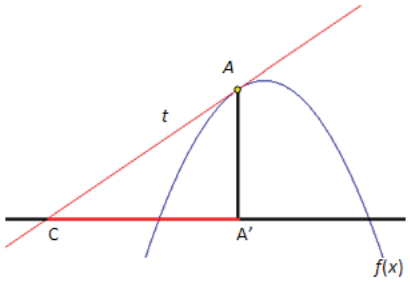
Figura 3. Propiedad geométrica de la subtangente. (Tomada de Castañeda, 2006; p. 260)

El diseño didáctico

Presentamos el diseño didáctico, con el cual pretendemos que se vea al Cálculo como aquello que estudia los fenómenos de la variación y el cambio. El objetivo de este diseño es mostrar el uso de la subtangente en un contexto de variación para caracterizar el comportamiento de las curvas, además, de permitirnos reconocer la riqueza que existe en el uso del argumento gráfico-analítico encontrado en las obras de *L'Hospital* y *Agnesi*. Al hablar de la caracterización de una curva, nos referimos a la posibilidad de incrementar o aumentar los significados de los objetos matemáticos que se estudian en clase, esta caracterización se da de manera intencionada con las actividades propuestas en el diseño didáctico, ya que establecemos una vinculación entre las investigaciones socioepistemológicas sobre Cálculo de los últimos tiempos y el quehacer cotidiano del profesor, favoreciendo además el uso inteligente de la tecnología.

Subtangente: En la siguientes gráficas (figura 4a y 4b) se puede observar un trozo de una curva llamada *f*(*x*), además de una tangente *t* a la curva *f(x)* en el punto A. Llamamos subtangente en A, al segmento CA'.

(a)



(b)

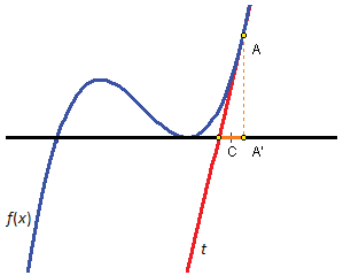
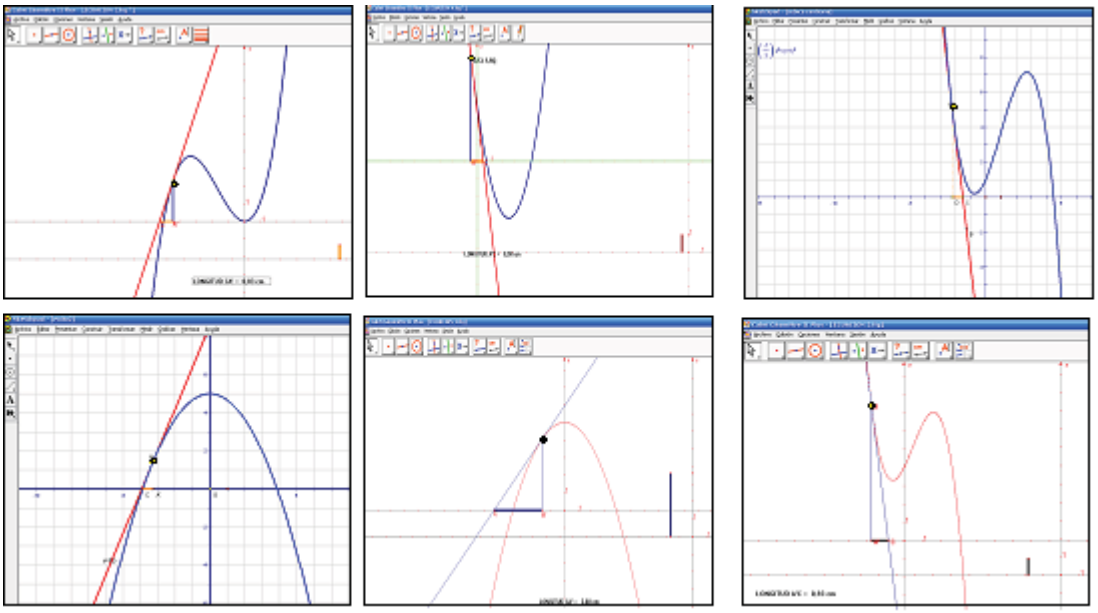


Figura 4. Trazo de la subtangente a una curva de segundo y tercer grado

Proyectar en el pizarrón electrónico cada una de las siguientes construcciones:



1. Mueve en el pizarrón electrónico el punto A en cada una de las construcciones. ¿Qué está sucediendo con el valor de la longitud de la subtangente?
2. Describe qué está pasando en la curva cuándo el valor de la subtangente es el más grande.
3. ¿Qué información proporciona la variación de las subtangentes en relación a la curva planteada?
4. Las siguientes tablas de datos muestran los valores de la magnitud que va tomando la subtangente al momento de desplazar a la derecha el valor de la abscisa en la curva, determine a cuál de las gráficas pertenece cada una de las tablas.

(a)

A	subtg
A_1	0.04
A_2	0.41
A_3	1.56
A_4	509.2
A_5	1.96
A_6	0.99
A_7	0.58
A_8	0.31
A_9	0.10
A_{10}	0.01
A_{11}	0.08
A_{12}	0.24
A_{13}	0.39
A_{14}	0.54
A_{15}	0.68
A_{16}	0.81

(b)

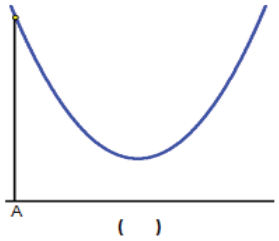
A	subtg
A_1	0.28
A_2	0.42
A_3	1.30
A_4	2.52
A_5	4.59
A_6	9.90
A_7	276.98
A_8	11.37
A_9	4.98
A_{10}	2.72
A_{11}	1.43
A_{12}	0.52
A_{13}	0.19
A_{14}	0.80
A_{15}	1.34
A_{16}	1.93

(c)

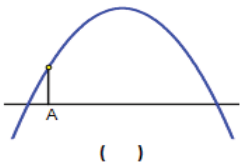
A	subtg
A_1	0.68
A_2	0.52
A_3	0.37
A_4	0.41
A_5	59.73
A_6	0.38
A_7	0.47
A_8	0.72
A_9	1.04
A_{10}	2.15
A_{11}	3.52
A_{12}	9.53
A_{13}	762.25
A_{14}	9.75
A_{15}	2.50
A_{16}	1.02

(d)

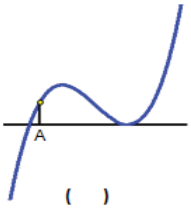
A	subtg
A_1	1.54
A_2	1.34
A_3	1.14
A_4	0.97
A_5	0.86
A_6	0.97
A_7	7.89
A_8	35.92
A_9	1.08
A_{10}	0.85
A_{11}	0.94
A_{12}	1.11
A_{13}	1.30
A_{14}	1.50
A_{15}	1.72
A_{16}	1.93



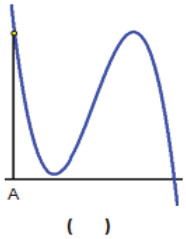
( )



( )

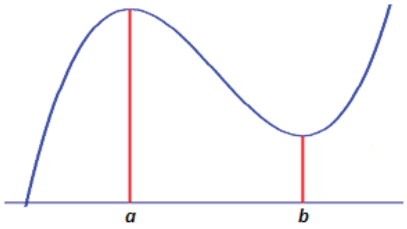


( )



( )

5. Cuál es el comportamiento de las subtangentes en las curvas dadas
6. Considerando que por cada punto x que se elija, es posible determinar una subtangente, explica cuál es el comportamiento variacional que tienen las subtangentes en la curva *f*.
7. Cómo es el valor de la subtangente en ***a*** y ***b*** de la siguiente curva



8. Analiza el siguiente enunciado, argumentando su validez a partir de las reflexiones anteriores.

   "En esta gráfica existe un punto donde se cumple que la subtangente es la mayor o menor magnitud de entre todas las subtangentes posibles (Castañeda, 2004)".

El diseño propone establecer un vínculo entre la magnitud de la subtangente y el comportamiento de las curvas dadas. Es decir, caracteriza un máximo, mínimo o punto de inflexión de una función a través la variación de las subtangentes. Proponemos también que, la variación de la abscisa determina nuevas magnitudes de las subtangentes. Esta relación puede expresarse a través de una relación funcional en la que la idea de máximo o mínimo aporta elementos para la caracterización del punto de inflexión.

Conclusiones

Hoy en día sabemos que los procesos de institucionalización del saber matemático provocan que ciertos contextos en los cuales surge inicialmente algún concepto matemático pierdan presencia en la mayoría de las aulas actualmente, tal es el caso de la subtangente. De ahí que con esta secuencia didáctica se favorecerá el reconocimiento del comportamiento de las curvas a través de ésta como un argumento que permite determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las mismas.

Una práctica que se favorece con el diseño didáctico es la manipulación de los elementos geométricos, ya que al variar la magnitud de la abscisa, el sistema geométrico que se ha definido en la curva se modifica y sus cambios son susceptibles a ser cuantificados, más aún cuando la manipulación puede hacerse de forma automática al hacer uso de las herramientas que ofrecen paquetes computacionales como *Cabri Geometre* o *Geometer's Sketchpad*, además de las bondades del pizarrón electrónico mencionadas anteriormente.

La intención de esta investigación es establecer un vínculo entre la matemática escolar y los resultados de investigaciones de corte Socioepistemológico a través del diseño didáctico propuesto haciendo el uso de la tecnología, ya que éste nos permiten mostrar aspectos que favorecen la generación de significados para los saberes matemáticos en cuestión. De forma particular el diseño didáctico que presentamos permite caracterizar una curva a través del uso de la subtangente, al analizar las longitudes de las subtangentes se pueden encontrar los máximos, mínimos y puntos de inflexión en las curvas dadas.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004*). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral R. (2004) Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, 54-62. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Castañeda, A. (2000). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 9(2), 253-265.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). D. F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

EL USO DE PATRONES GEOMÉTRICOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE SIMBÓLICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Karla Elizabeth Velasco Martínez, Claudia Margarita Acuña Soto
CINVESTAV, IEMS México
kvelasco@cinvestav.mx, claudiamargarita_as@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Medio

Resumen. *La idea que motiva el presente trabajo se refiere a entender cómo generalizan los estudiantes de bachillerato y qué tipo de pensamiento les permite hacerlo, para ello planteamos a un grupo de estudiantes del IEMS actividades donde se debe identificar un patrón que predice una secuencia geométrica, como un primer acercamiento a la idea de generalización. Este patrón debe ser descrito de forma algebraica (fórmula). En este artículo mostraremos dos tipos de formulaciones distintas construidas por los estudiantes para abordar el problema con distintos tipos de pensamiento que nos permiten mirar aspectos que podrían determinar el éxito o fracaso del desarrollo cognitivo puesto en marcha por los estudiantes.*
Palabras clave: Patrones, manipulables, ecuación, generalización

Marco teórico

Para muchos estudiantes es muy difícil introducirse al manejo del lenguaje simbólico sin antes tener una aproximación personal y directa que sea resultado de sus propias conclusiones, por esta razón en algunos bachilleratos se han incorporado tratamientos de secuencias aritméticas y geométricas donde el objetivo es que logren dar sentido a la fórmula que expresa su comportamiento.

Deseamos entender cómo los estudiantes tratan las series, cómo identifican el patrón que predice el comportamiento de una secuencia de formas, cómo logran formularlo mediante el análisis de la progresión, y finalmente cómo lo concretan en la ecuación que predice toda la secuencia.

Es frecuente la utilización de patrones y la periodicidad con el fin de enseñar algunos aspectos de la matemática, debido a que las secuencias son “fenómenos periódicos comprendidos como un proceso unificado que obedece a leyes” (Shama, 1998, p.273). Estas se emplean con frecuencia para mejorar la comprensión del álgebra, en el área de la biología, por ejemplo, se trabaja con patrones o fenómenos periódicos (Billstein y Williamson, 2002).

En esta actividad se requiere de distintas formas para abordar pensamientos abstractos, por ejemplo, Sierpinska comenta: “In analytic-arithmetic thinking an object is defined by a formula

that allows one to compute it; in analytic-structural thinking an object is best defined by a set of properties." (Sierpinska, 2000, pág.235).

La interpretación que le damos a este comentario es que los estudiantes suelen razonar el álgebra en dos vertientes: la manera analítica-aritmética donde solamente se siguen fórmulas establecidas repetidamente para resolver los problemas, y la forma analítica-estructural en la cual el razonamiento hace referencia a un tipo de pensamiento más general, que tiene que ver con el proceso de "des-arimetizar" el contenido analizado, es decir, a partir de las propiedades encontradas en las operaciones aritméticas, se trata de generalizar los conceptos e ideas que se extraen de los cálculos.

Suponemos las dificultades que enfrenta el estudiante en el proceso de internalización del conocimiento cuando se trabaja con herramientas que se transforman en instrumentos psicológicos (Falcalde, 2007), debido a que en nuestro trabajo haremos uso de manipulables, palillos de madera y la computadora, con la intención de proveer a los estudiantes de instrumentos que modelen el problema a resolver y que de ser posible sean hechos a un lado para dar paso a el uso de instrumentos psicológicos que describan las generalizaciones que se concretan en la formulación de una ecuación para la serie.

Metodología

La actividad constó de un cuestionario a lápiz y papel, otro cuestionario que incluyó el uso manipulables, palillos de madera que modelan una secuencia, y un tercero en el que se les facilitó la computadora para resolver el mismo problema. En el primero se propusieron 15 preguntas, 4 de ellas son similares a las del curso normal. El resto solicitan que los estudiantes establezcan las ecuaciones que representen las sucesiones de figuras sobre frisos.

En el segundo cuestionario se construyo una sucesión de cuadrados con palillos de madera y se formulan 16 preguntas que permiten focalizar el proceso de crecimiento e identificar las regularidades de la cuadrícula formada por palillos. En la tercera actividad se usó Cabri Géomètre, el objetivo de esta actividad fue observar si el cambio de ambiente tendría un efecto en la formulación de los resultados, es decir, si los facilitaría o no.

En todas las tareas se solicitaba que se observaran grupos de dibujos a los cuales se les llamó pasos, de éstos se requiere detectar las diferencias entre los dibujos y observar las formas que permiten pasar de un paso a otro que dependerá de por ejemplo el número de vértices, de segmentos de línea que los forman para, finalmente, formular las relaciones de crecimiento con lenguaje simbólico.

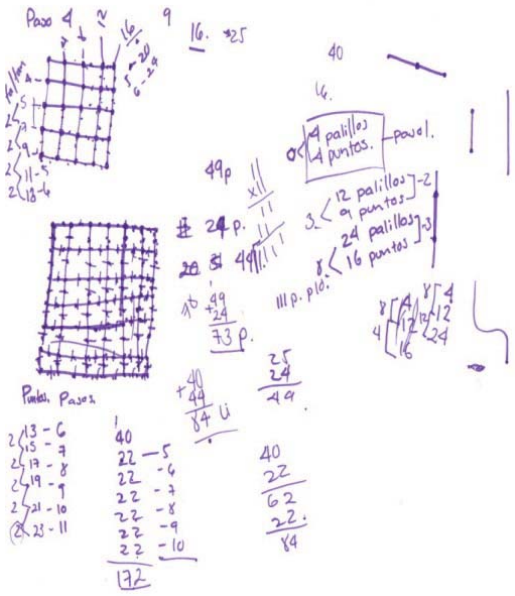
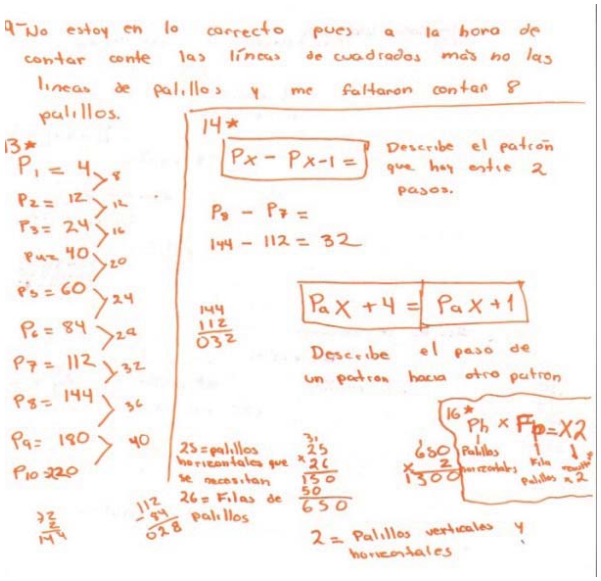
Hoja de trabajo de Jimena	Hoja de trabajo de Celita
	

Fig. 1 Hojas de trabajo de Jimena y Celita

Resultados y análisis

A continuación describimos el trabajo desarrollado por dos de las estudiantes involucradas en este proceso, Jimena y Celita. Las estudiantes fueron elegidas por su capacidad argumentativa a lo largo del desarrollo de las clases y por su alto aprovechamiento de los conceptos compartidos en la materia.

Tabla 1. Relación de las actividades cognitivas desarrolladas por Jimena y Celita

Actividad cognitiva	Jimena	Celita
Organización de la información	Analizando la información por medio de un conteo que le permite a su vez realizar operaciones aritméticas.	Observaciones de regularidad que le permiten generalizar incluso con lenguaje simbólico.
Detección de regularidades	Parece que sólo se concretaba en hacer cuentas y tratar de obtener de ellas una interpretación de lo que ocurría.	Análisis profundo de la información que identifica en las regularidades e inclusive identifica un patrón dentro de otro patrón.
Descripción figural de regularidades	En secuencias numéricas aparece el uso de un signo que une dos elementos y en el vértice anota la diferencia en el paso. En la secuencia de palillos usa una cuadrícula con sintagmas que la confunden.	En secuencias numéricas aparece el uso de un signo que une dos elementos y en el vértice anota la diferencia en el paso. En la secuencia de palillos usa una cuadrícula sin sintagmas, solo hace anotaciones sobre las relaciones.
Uso de el instrumento (palillos)	Su uso mejoró el acercamiento a la descripción de las regularidades utiliza sintagmas que la confunden.	El pensamiento dominante parece ser la formulación de expresiones simbólicas, utiliza una cuadrícula pero no usa sintagmas.
Descripción simbólica de regularidades	Diagramas de regularidades.	Diagrama de regularidades, tabla de resultados y ecuación de regularidades
Uso del instrumento (computadora)	Siente más confianza con la actividad a lápiz y papel.	La pantalla es tratada con indicaciones como una hoja de papel.
Tipo de pensamiento	Analítico-aritmético.	Analítico-estructural.

En lo que respecta al trabajo de nuestras dos estudiantes consideramos que Celita desarrolló un pensamiento del tipo aritmético-estructural descrito por Sierpinska, es decir que pasa de las observaciones aritméticas a un pensamiento más general que la llevo a deducir ecuaciones para generalizar lo que describió en sus respuestas.

Jimena no llegó a la representación simbólica de los datos analizados, pues solo respondía a casos particulares. En cambio a Celita aunque comenzó con la misma técnica que Jimena, contabilizando y haciendo operaciones aritméticas para analizar las relaciones (tabla 1), al no tener contacto con el uso de los palillos en una parte de la actividad, se vio forzada a “des-arimetizar” el problema y emplear sus propios recursos para la obtención de formulaciones simbólicas.

En cierto momento a Jimena le costó mucho trabajo expresar sus conclusiones y argumentar los pasos que desarrolló para resolver las actividades, pero el uso del material tangible (palillos) colaboró en mejorar un poco las justificaciones que ofrecía en sus respuestas.

Por otro lado Jimena trabaja de manera que se pudiera catalogar como analítica-aritmética, pues sólo trabaja con los datos aritméticos operativamente recurriendo en varias ocasiones a la repetición de procedimientos y no logra desarrollar un pensamiento que la lleve a transformar sus observaciones en expresiones simbólicas, la insistencia en el tratamiento operacional no le permitió desarrollar el razonamiento sintético necesario para la formulación simbólica.

Al aplicarle el cuestionario que emplea los palillos, Celita mostró una mayor comprensión del proceso que estudiaba, le permitió no usar tantas operaciones para llegar a la solución de las actividades que se le plantearon, ello contribuyó para que la estudiante expresara mediante una tabla los datos que obtenía de su estudio y así planteó finalmente las ecuaciones que resolvían las actividades.

Celita mencionó que los tres cuestionarios se le hicieron iguales, pues en algunas cosas se confundía, sin embargo durante la aplicación se observó que le costó más trabajo desarrollar el cuestionario con la herramienta del software, parece que se debía a la escasa experiencia en el manejo del ratón para la construcción de los segmentos que describirían las imágenes de los pasos y el nulo conocimiento del software, a pesar de que previa a la aplicación se le dio una breve introducción al manejo de las herramientas.

Por otra parte, Jimena no empleo la herramienta del software, pero al final de la aplicación se le cuestionó pidiendo su opinión sobre el empleo de la computadora en la solución de las actividades parecidas a las que desarrollo y el comentario que refiere es interesante:

“Yo prefiero el cuestionario uno (refiriéndose al que solicitaba contestar preguntas sin el uso de materiales tangibles), porque . . . , valla se me hace más sencillo, más simple, más …. Pues ¡sí!, se me hace más sencillo, más útil, porque tengo la hoja y puedo rayar y puedo poner lo que entiendo y poner los datos y alguna seña o algo así de lo que estoy utilizando y en la computadora, pues no, . . . , no podría hacer eso”.

Finalmente se aplicó a Celita el cuestionario que emplea la tecnología de lápiz y papel; donde expresa con mayor fluidez fórmulas para llegar de forma más eficaz a las respuestas solicitadas en

cada pregunta, además fue capaz de comprobar que éstas funcionaran adecuadamente; en las últimas preguntas de este cuestionario se nota visiblemente el dominio de uso del lenguaje simbólico propio del álgebra, pero sin dejar de mostrar tintes propios del vocabulario de la estudiante, es decir se nota que emplea su propio lenguaje para expresar fórmulas que generalizan los resultados que se le pedían.

Discusión

De ambas observaciones en las aplicaciones de los cuestionarios se concluye que el razonamiento analítico-estructural descrito por Sierpinska (2000) se alcanza después de comprender los procesos que determinan las operaciones que actúan sobre los objetos observados, en este caso sobre las relaciones entre los elementos de las secuencias presentadas a las estudiantes. Y que el análisis detallado de los patrones conduce a la creación de un lenguaje simbólico que contribuyó en la argumentación de los pasos dados en la construcción de las soluciones presentadas como ecuaciones.

En términos generales se observan que en los resultados de ambas estudiantes se encuentra inmersa la observación y el análisis de la información que arrojan las regularidades de las secuencias descritas por los resultados de los ejercicios propuestos, lo cual sirvió de alguna manera en la generalización de algunos patrones (para el caso de Jimena) y para la obtención de expresiones simbólicas (para el caso de Celita).

El análisis de los resultados presentados por Celita y Jimena respecto al manejo de las secuencias y la información que de ella se deriva, nos sugiere dos formas de enfrentar la tarea de interpretar los patrones: organizar la información y abordar finalmente una generalización.

Como producto de la aplicación de la investigación se observó que la forma en que cada estudiante contabilizaba tanto los puntos (vértices de los pasos) así como los segmentos de línea (lados de los pasos) que formaban cada figura, les ayudaba a contabilizar el cambio en los pasos, sin embargo el uso desordenado de este instrumento también podía constituir un obstáculo.

Respecto a las estrategias de solución vemos que aunque ambas detectan los cambios en la secuencia esto no es suficiente para concretarla en la expresión simbólica. En el caso de Jimena, supone que la solución se obtiene a partir de las posibles operaciones realizadas con los datos, en

cambio Celita detecta la regularidad y logra formularla aritméticamente, procedimiento que le permite finalmente abordar el pensamiento analítico-estructural.

Esto muestra que el proceso de generalización no se establece solo a partir de la detección de las regularidades del proceso observado, la interpretación de los datos puntualmente, es decir como un cambio que se verifica de uno en uno, impide la mirada global que permitiría una idea de regulación general para todo los casos observados.

El uso de la computadora no nos permitió observar cambios apreciables en las formas de resolver el problema, posiblemente por los obstáculos que representó su falta de pericia, por lo que consideramos que esta parte del programa de trabajo no dio resultados observables.

Referencias bibliográficas

Billstein R., Williamson J. (2002). Patterns and discoveries. En R. Billstein & J. Williamson (Eds.). *Teacher´s Edition. Middle Grades MATHThematics*. (pp. 238-317). Evaston Illinois: Mc Dougal Littell.

Falcade R., Laborde C., Mariotti M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies Mathematics,* 66, 317 – 333.

Quiles M. (2006). Dominio Abstracto. En M. Quiles (Ed.). *Pienso Razono y Reflexiono 6 de primaria* (pp. 96-171). México: Trabajos Manuales Escolares (ME).

Shama G. (1998). Understanding periodicity as a process whit a Gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 255-281.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students´ thinking in linear algebra. En Dorier J.L. (Ed.). En *On the Teaching of Linear Algebra.* (pp.209-246). Dordrecht. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Warren E., Cooper T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 years olds thinking. *Educational Studies Mathematics,* 67, 171-185.

Zotelo B. (2006). Secuencias y series. En Zotelo B. (Ed.). *Razonando 5° primaria. Redes Cognitivas y Dominios.* (pp. 158-161). México: Trabajos Manuales Escolares (ME).

LA PRÁCTICA DE EVALUACIÓN EN CURSOS DE ALGEBRA SUPERIOR

Martha Imelda Jarero Kumul, María Guadalupe Ordaz Arjona
Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas México
jarerok@uady.mx, oarjona@uady.mx
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Las instituciones de educación superior, en México, reportan bajos índices de eficiencia terminal; asociado a la reprobación escolar principalmente en asignaturas del área de ciencias. En la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, la asignatura Álgebra Superior I reporta mayor índice de reprobación; por ello nos interesó describir los mecanismos de evaluación empleados por los profesores y explorar la posibilidad de considerarlos como factor causal de la reprobación. Como metodología de investigación realizamos una descomposición del sistema didáctico para analizar sus componentes y posteriormente llevar a cabo una triangulación sistémica de la información, con el método etnográfico mediante la observación no participante. Entre los resultados obtenidos, se identifican prácticas de evaluación que conllevan únicamente a determinar una calificación, lo cual provoca que el estudiante no participe en la generación de sus aprendizajes.*
Palabras clave: Práctica, evaluación, álgebra

Introducción

Al seno de las dependencias educativas, evaluar es equiparable a calificar o acreditar. En la cultura docente, se asume que la reprobación escolar, particularmente en los cursos de matemáticas superiores, es consecuencia de una falta de aptitud por parte del educando, de modo que la práctica docente, poco o nada es referida como factor causal.

La Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), en su Plan 91, reporta 83% de reprobación en las asignaturas del área de ciencias en los primeros tres semestres de estudio (Altamira, 1997 citado en Documentos estratégicos de la ANUIES). Particularmente, la asignatura Álgebra superior I (ASI) impartida en el primer semestre es una de las que presenta el mayor índice de reprobación.

En Aparicio, Jarero y Ávila (2007), se reporta que la práctica común de algunos profesores en la Facultad de Matemáticas-UADY, para determinar si un estudiante ha aprendido un concepto, es mediante la aplicación de pruebas escritas dejando al margen cualquier otro tipo de actividad o recurso que pudiera ofrecer una valoración complementaria sobre los aprendizajes alcanzados por los estudiantes.

Por lo anterior, nos planteamos realizar un proyecto cuyo principal objetivo fuera describir las formas o mecanismos de evaluación empleados por profesores en cursos de Álgebra Superior y explorar la posibilidad de considerarlos como factor causal de reprobación y rezago. Para esto se

organizó el proyecto en dos etapas, en la primera se analizaron diferentes fuentes de información asociadas al proceso de enseñanza y aprendizaje, para con ello obtener elementos y poder describir las formas o mecanismos de evaluación de los profesores de Álgebra Superior; y la segunda etapa estará en función de los resultados de la primera. En esta ocasión haremos referencia al trabajo desarrollado en la primera etapa.

Marco de referencia

Los programas de asignatura resultan un orientador a partir del cual los profesores toman decisiones sobre la planeación, realización y evaluación del proceso didáctico. Dichas decisiones se concretan mediante criterios para seleccionar, secuenciar y organizar contenidos, así como para organizar, desarrollar y controlar el trabajo en el aula; definir prioridades sobre el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos y, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores (Rico, 1997).

Entre los principales elementos que integran un programa de asignatura se encuentran los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación. Los objetivos de aprendizaje comunican lo que el curso, asignatura o unidad educacional espera que el estudiante aprenda. En otras palabras, lo que el estudiante debe ser capaz de demostrar al final de un periodo de aprendizaje (Branda, 2000). Los contenidos que se enseñan se clasifican en declarativos, procedimentales y actitudinales según propuesta por Col, Pozo, Sarabia y Valls (1992), citada en Díaz-Barriga y Hernández (2002). La metodología refiere las estrategias de enseñanza, las tareas y actividades de aprendizaje, así como los recursos didácticos propuestos para el logro de los objetivos. Por evaluación se entiende el conjunto de acciones que llevarán a cabo tanto profesores como alumnos, para detectar si éstos últimos han logrado desarrollar las capacidades señaladas en los objetivos y si han aprendido los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales como consecuencia directa del proceso de enseñanza-aprendizaje y con ello determinar si lo planificado estuvo acorde o no a su realidad, a sus posibilidades y capacidades, y a su contexto sociocultural (LOGSE).

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan alrededor del uso de nociones semióticas, como la noción de representación. Esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático. Duval sugiere que no deben confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que estos se organizan, además pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados en la relación de enseñanza-aprendizaje: diversificación de los registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado, coordinación entre los diferentes registros. La construcción de los conceptos matemáticos inevitablemente depende de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos (Duval (1993) citado en D'Amore (2004)). Los registros de representación asociados al concepto "Función" son la notación conjuntista, de manera coloquial, numérica (donde se encuentra la forma matricial, por pares ordenados o en forma de tabla), algebraica, gráfica o el diagrama sagital.

La evaluación según Díaz-Barriga y Hernández (2002) se clasifica de acuerdo a su intención en: evaluación diagnóstica, formativa y sumativa. La *evaluación diagnóstica* es realizada previamente al desarrollo de un proceso educativo con la intención de obtener información sobre la situación de partida de los sujetos, en cuanto a saberes y capacidades que se consideran necesarios para iniciar con éxito nuevos procesos de aprendizaje. La *evaluación formativa*, es aquella que se realiza de manera concomitante con el proceso de enseñanza-aprendizaje por lo que debe considerarse, más que las otras, como una parte reguladora y consustancial del proceso, la finalidad de esta evaluación es estrictamente regular el proceso de enseñanza aprendizaje para adaptar o ajustar las condiciones pedagógicas. La *evaluación sumativa*, se realiza al término de un proceso de enseñanza-aprendizaje o ciclo educativo cualquiera y su fin principal consiste en verificar el grado en que las intenciones educativas han sido alcanzadas, lo cual se verá reflejado con un número o rúbrica. Para llevar a cabo la evaluación, el profesor puede recurrir a diferentes técnicas e instrumentos. Las técnicas se clasifican en formales, semiformales o informales; según el tiempo de preparación que demande.

Metodología

Como metodología de investigación consideramos realizar una descomposición del sistema didáctico para analizar sus componentes por separado y posteriormente llevar a cabo un proceso de triangulación sistémica de información. En particular, se analizó el programa de curso de ASI, buscando determinar los contenidos así como las formas en que se propone enseñar y caracterizar las prácticas de enseñanza en tanto el tratamiento otorgado a los contenidos así como las formas de evaluación empleadas durante la enseñanza.

El análisis del programa se basó en la descripción de los elementos curriculares: objetivos, contenidos, metodología y evaluación, en tanto orientadores de la práctica docente hacia la toma de decisiones sobre la planeación, realización y evaluación del proceso didáctico. Intentando contestar, según lo planteado en el programa de la asignatura, los siguientes cuestionamientos ¿Qué enseñar?, ¿Cuándo enseñar?, ¿Cómo enseñar? Y ¿Qué, cómo y cuándo evaluar?

Nos apoyamos en la etnografía como método de investigación a través de la observación no participante de 19 sesiones de clases de dos grupos diferentes, buscando identificar el tratamiento otorgado a los contenidos así como las técnicas e instrumentos de evaluación empleados por los profesores durante la enseñanza de la unidad 2 del curso, particularmente nos interesó el tema "Funciones".

Resultados y discusión

A partir del análisis del programa de la asignatura ASI, se identifican que los objetivos de la asignatura reflejan una visión estructuralista de la enseñanza del álgebra, donde se concibe a la matemática como una ciencia lógica-deductiva, en el que el objeto de estudio son las estructuras matemáticas, a partir de principios generales para luego caracterizar situaciones particulares. Se percibe que la enseñanza del ASI queda enmarcada en un contexto exclusivamente matemático, formal y abstracto, dejando fuera cualquier otro tipo de experiencias (de aprendizaje) como ir de lo concreto a lo formal, tal cual se ha construido la mayor parte de la matemática fuera de las aulas de clases.

La utilización de verbos como "conocer" y "manejar" en el planteamiento del objetivo general y de las unidades, sugiere una enseñanza enfocada en la memorización, mecanización de algoritmos o

procedimientos y demostraciones deductivas formales. Aproximadamente el 48% de los objetivos son conceptuales, 38% son de tipo procedimental y el 14% corresponde objetivos que implican conocimientos tanto conceptuales como procedimentales. Además de que los objetivos son poco claros, dejando al profesor la interpretación de lo que se persigue en cada tema.

Con las estrategias de enseñanza propuestas como "conferencia", "interrogatorio", "lluvia de ideas", "resolución de ejercicios", "demostración", se deja de lado un proceso de construcción de los conceptos matemáticos involucrados, y consecuentemente, se deja sin sentido los objetivos educativos indicados. Así mismo, sugieren métodos de enseñanza en los que la función del estudiante es pasiva y, por tanto, no es participe en la generación de sus propios aprendizajes.

En la enseñanza de la unidad dos se estudian los conceptos asociados a "Funciones", "Composición de funciones" y "Función inversa", y aunque se pudo observar que el tratamiento otorgado por parte del profesor incluía las representaciones algebraica, conjuntista, numérica y sagital (éste último empleado particularmente para explicar la definición de composición de funciones y algunas demostraciones asociadas al mismo tema), en realidad en su mayoría se empleaban la representación algebraica y conjuntista (Mukul, 2009). Veamos algunos ejemplos del tipo de registros empleados por los profesores, los cuales fueron tomados de las notas de los estudiantes.

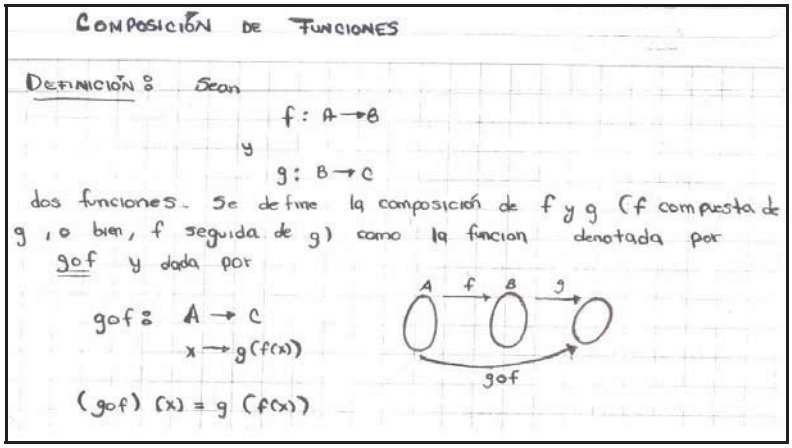


Figura 1. Representación sagital

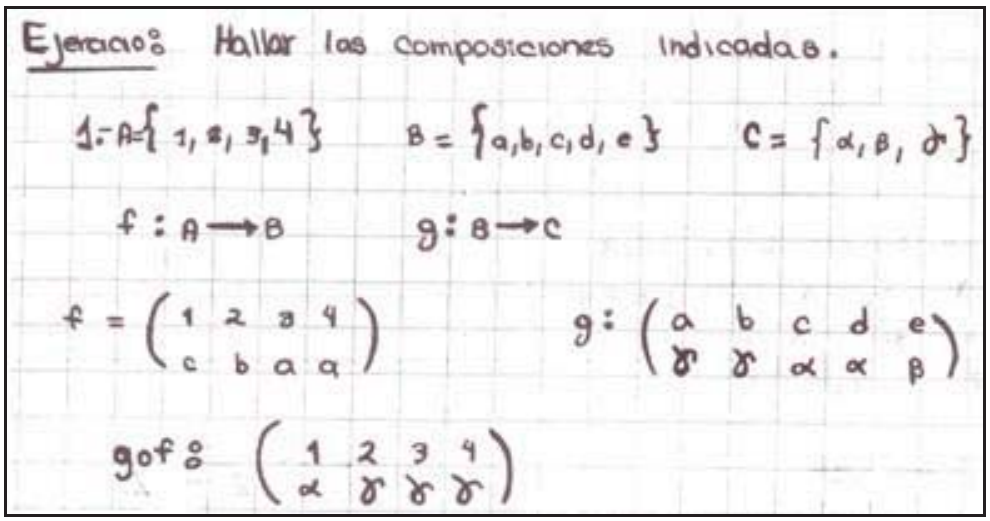


Figura 2. Representaciones conjuntista y numérico-matricial

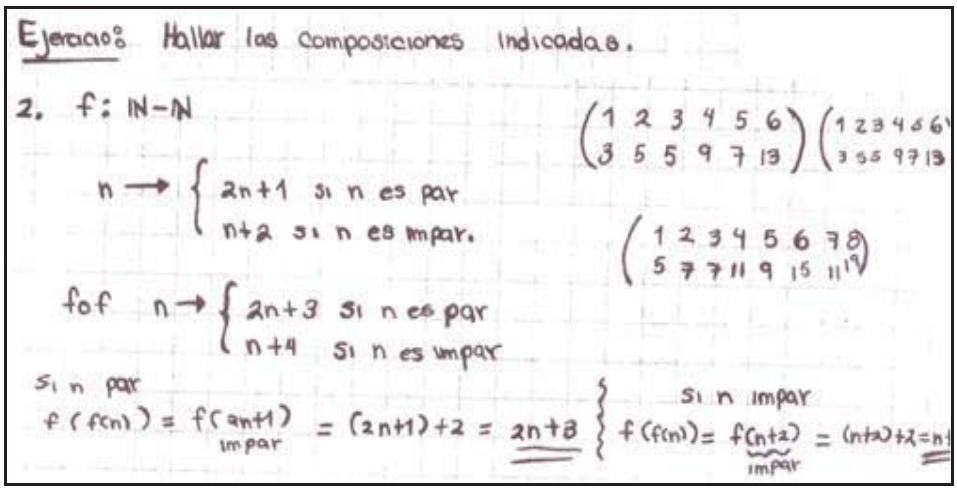


Figura 3. Representación algebraica

Los contenidos abordados en el curso coinciden con los planteados en el programa del curso, al menos para la unidad 2, sin embargo, en cuanto al tratamiento dado por los profesores, hay ciertas diferencias en cuanto a los registros de representación empleados y el nivel de los ejemplos y ejercicios planteados.

Entre las prácticas de evaluación empleadas por los profesores, Balam (2009) identifica diversas técnicas, por ejemplo:

- En las técnicas informales, se recurre únicamente al interrogatorio, donde el profesor asignaba puntos al estudiante que daba la respuesta correcta, sin dar tiempo suficiente para responder, a los demás estudiantes.
- Como técnicas semiformales estuvieron presentes las tareas, las cuales se empleaban para calificar la producción del estudiante.
- En la técnica formal encontramos presentes en el curso dos instrumentos el pre-examen y el examen, el primero se aplicó dos días antes del segundo por lo que consideramos que el profesor no dispondrá de tiempo suficiente para reajustar los conocimientos no adecuados de los estudiantes de modo que no refleja una intención formativa. Por otro lado, Mukul (2007) refiere que el examen incluye reactivos semejantes a los ejercicios propuestos en clase.

Resulta importante destacar que cada una de las prácticas de evaluación empleadas, pretenden determinar el aprendizaje en términos únicamente cuantitativos y al final del proceso, es decir una evaluación sumativa.

Conclusiones

Podemos destacar la coherencia entre los contenidos declarados en el programa del curso, los enseñados y los evaluados, pero en la enseñanza se favorece un tratamiento algebraico de contenidos y la intención de determinar una calificación al final del proceso enseñanza-aprendizaje. Lo cual se debe a que tanto los objetivos y como las estrategias de enseñanza planteados en el programa de curso, no establecen indicadores ni experiencias de aprendizaje para la consecución de los objetivos. Además, los profesores diseñan las pruebas escritas con base en la experiencia y selección de ejercicios ya que los objetivos planteados no les ofrecen elementos para poder determinar qué tipo de competencias deben desarrollar los alumnos respecto a los contenidos planteados y se limitan a solicitar la reproducción de procesos presentados en el aula.

Entonces, en la enseñanza será importante reconocer que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de diferentes registros de representación, de modo que debe promoverse la conversión de registros y no limitarse al tratamiento algebraico-conjuntista, inclusive el profesor puede apoyarse en la tecnología para conseguirlo.

Se precisa incluir criterios y mecanismos de evaluación que consideren el aspecto cualitativo-formativo, donde se de seguimiento al proceso de aprendizaje a lo largo de su desarrollo y no únicamente al final del proceso de enseñanza. Más aún, es importante considerar aspectos actitudinales en el planteamiento de los objetivos y en el contenido del curso que por un lado, favorezcan la interrelación social y el trabajo colaborativo y, por otro, coadyuven a la comprensión de la utilidad y funcionalidad del Álgebra en contextos extramatemáticos.

Las prácticas de evaluación detectadas en las diferentes técnicas e instrumentos, corresponde a prácticas de enseñanza tradicional, donde la concepción de la evaluación está limitada precisamente a la idea de calificación o evaluación sumativa. En tanto que se requiere entenderla en un sentido más amplio, dando cabida principalmente a la evaluación formativa.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E.; Jarero, M.; Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa*, 9(35), 3-12

Balam, C. (2009). *Una caracterización de las prácticas evaluativas en cursos de Álgebra de Nivel Superior*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Branda, L. (2000). *Preparación de objetivos de aprendizaje*. Recuperado el 12 de septiembre de 2008 de http://www.fv.ulpgc.es/ficheros/preparacionobjetivosaprendizaje.pdf

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90 – 106.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill.

Documentos Estratégicos de la ANUIES. (s.f.). *La Tutoría. Una alternativa para contribuir a abatir los problemas de deserción y rezago en la educación superior.* Consultado en http://www.anuies.mx/servicios/d_estrategicos/libros/lib42/17.htm en julio de 2008.

Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). (s.f). *Teoría general del currículo. Diseño curricular como proyecto; desarrollo curricular como realización. Currículo explicito y*

currículo latente. Recuperado el 10 de Diciembre de 2006, de http://www.internenes.com/opositor/or/RESANE/RES03L.htm

Mukul, L. (2009). *Una caracterización del tratamiento, asimilación y evaluación de contenidos en los cursos de Álgebra Superior I*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). España: ICE/Horsori.

Capítulo 3

Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Introducción al capítulo 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Cecilia Crespo Crespo

En las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa se realiza año tras año un rico intercambio de experiencias y resultados de investigaciones en las que se comparten propuestas que permiten el crecimiento de ideas y teorías a partir de su presentación y discusión. Entre ellas, a partir de la problematización del aula, se viene fortaleciendo el estudio de la visión sociocultural de la matemática, que se agrupan en este capítulo.

La postura de la matemática educativa, en la que se enmarcan estas ideas se sustenta en la consideración de que:

> *"La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática". Su objeto de estudio son "los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar." [...] "No nos reducimos a la búsqueda de una 'buena manera de enseñar' una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber". (Cantoral, 1995, pp.2-3)*

El aprendizaje de la matemática, desde esta visión, se comprende como parte de la naturaleza humana, y por lo tanto como una actividad que se desarrolla en un escenario, no como una actividad separada de éste, sino como fundamental en él. Se lo comprende como parte del proceso de participar en una práctica que siempre involucra a toda la persona actuando y conociendo al mismo tiempo, poniendo en juego aspectos explícitos e implícitos del escenario.

Uno de los marcos teóricos que desarrolla la matemática educativa desde esta visión, considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada. Esta aproximación se ha llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico. En la perspectiva socioepistemológica, se identifican algunas unidades de análisis a tener en cuenta en una investigación, como ser las nociones de actividad humana, de práctica social y de resignificación

del conocimiento (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). Estas se han constituido en medulares en la línea de investigación de la construcción social del conocimiento. Sin embargo éstas no son las únicas y de trabajos realizados dentro de la comunidad latinoamericana de matemática educativa, han ido proponiéndose otras como las de convención matemática, escenarios socioepistemológicos, entre otros.

Se agrupan también en este capítulo algunos trabajos que a veces se realizan desde otros marcos teóricos o toman elementos de ellos, como la praxeología, la semióitica cultural o la teoría de las representaciones sociales, pero poseen una visión sociocultural de la matemática y cuyos elementos enriquecen el estudio de la matemática educativa aportando sus elementos y nociones y permitiendo analizar el aula de matemática desde distintos marcos teóricos, pero que comparten ciertas ideas.

Como la problemática de estudio de la matemática educativa es "el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza" (Farfán, 2003, p.5), en las investigaciones de corte sociocultural, resulta fundamental estudiar la manera en la que incorporan los saberes matemáticos en el sistema educativo y las características del proceso que se lleva a cabo. Estas investigaciones se orientan a dar significatividad a las construcciones matemáticas que se llevan a cabo en el aula para lograr un rediseño del discurso matemático escolar.

Si se revisan los trabajos de volúmenes sucesivos del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, es posible analizar la manera en la que esta visión ha ido evolucionando y solidificándose a través de investigaciones en las que se profundizan sus elementos y que permiten comprender cómo una disciplina científica en formación crece y se nutre de pensamientos que aunque de orígenes diversos son compartidos en una comunidad que piensa, difunde y discute resultados de sus investigaciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. M. Farfán (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. 1*. (pp.1-10). La Habana, Cuba.

Cantoral, R. y Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas*. En J. R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *16*(1). (pp.5-10). Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

LOS DIÁLOGOS DE ESTUDIANTES: SU RIQUEZA PARA EL ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México
CICATA–IPN
crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Algunos diálogos de nuestros estudiantes en muchas oportunidades dejan traducir de manera implícita sus ideas y creencias, y a través de ellas es posible comprender la manera en la que se construye el conocimiento matemático escolar. El profesor debe estar atento a observar las conexiones explicitadas por sus alumnos. De esta manera, puede reforzar aquéllas que presentan más ventaja para avanzar en la comprensión y buscar modos de refutar las que son inapropiadas.*
En este trabajo se muestran algunos ejemplos de situaciones presentadas en el aula de matemática a partir de respuestas dadas por estudiantes cuyo análisis permite comprender algunos problemas en la construcción del conocimiento matemático por parte de los mismos.
Palabras clave: Discurso matemático escolar, construcción del conocimiento matemático

El discurso matemático escolar

La investigación en matemática educativa propone un enfoque sistémico y situado en el que se intenta estudiar las condiciones y circunstancias ligadas a la emergencia y construcción del conocimiento matemático (Cantoral & Farfán, 2003). Encontrar contextos significativos de aprendizaje es de primordial importancia para lograr la construcción sólida del conocimiento. La investigación sobre el discurso escolar se propone caracterizar las formas argumentativas que se usan en el aula.

Los errores que cometen los estudiantes, las afirmaciones que realizan y que no son correctas, deben ser analizados con detenimiento, ya que están dejando inferir características de la construcción de los conocimientos matemáticos y en qué basan esa construcción. Los docentes tenemos tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos, están implícitamente claros para los alumnos y son compartidos por la comunidad de la clase. Los estudiantes construyen aunque no nos lo propongamos explícitamente, nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas.

En el aula es posible detectar formas de argumentación que no son las esperadas (Crespo Crespo, 2007), de su análisis es posible determinar cuáles son las estrategias de argumentación que dan convicción a los estudiantes y cómo las aplican en los escenarios en los que se desarrollan sus actividades.

Discurso matemático escolar: sus manifestaciones

El discurso matemático escolar difiere del discurso matemático, es saber transpuesto. Se refiere a cómo se interpreta, se usa y se comparte la matemática en situación escolar. En su formación, influyen, entre otros, profesores, padres, académicos, políticos y autores de libros de texto (Castañeda, 2009). Está compuesto por varios elementos que manifiestan sus características. Es posible analizarlo a través de producciones escritas, orales y gestuales presentes en el aula.

Los diálogos entre alumnos o entre alumnos y docentes tienen por función un intercambio social. En ellos afloran mecanismos de prueba socialmente reconocidos como válidos y construidos fuera y dentro del aula. Su análisis e interpretación, puede mostrar la manera en la que se va construyendo el conocimiento (Crespo Crespo, 2009). A continuación, como ejemplos, se presentan y analizan algunos episodios sucedidos en el aula de matemática. A través de ellos es posible acceder a algunas de las ideas que manejan los estudiantes y cómo esas ideas se convierten en obstáculos para la comprensión del conocimiento matemático.

Episodio 1: ***Números irracionales y aproximaciones*** (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Se les pide a los alumnos determinar los ceros de la función y = x2 – 2 para poder graficar la parábola correspondiente. Uno de los estudiantes A1 pasa al frente, resuelve y obtiene:

$x_1 = \sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -\sqrt{2}$

A continuación, tras hacer uso de una calculadora escribe:

$x_1 = \sqrt{2} = 1{,}41$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -\sqrt{2} = -1{,}41$

Se le observa que $\sqrt{2} \neq 1{,}41$, que se trata de un número irracional, pero se suscita el siguiente diálogo entre el profesor P y varios de los alumnos del curso:

A_2: Ponele más decimales

A_1: La calculadora dice: 1,414213562. ¿Pongo todos?

P: Eso es también una aproximación

A_1: Son todas las cifras que me da la calculadora. ¿está mal?

P: Es también una aproximación, el número tiene infinitas cifras decimales

A_2: Pero necesitamos hacer la cuenta para marcar en el eje

P: Utilizamos la calculadora para obtener una aproximación y marcar en la recta numérica, para ubicar por dónde está $\sqrt{2}$, pero tenemos que saber que $\sqrt{2}$ no es 1,41, no podemos escribir que son iguales

A_1: Pero, ¿en la recta pongo $\sqrt{2}$ o 1,41?

P: Ponemos $\sqrt{2}$, que es el cero de la función

A_1: ¿En 1,41?

P: Sí

A_1: O sea que en el fondo es lo mismo

P: No. Es aproximadamente igual. Lo que se está marcando es aproximado

A_1 (sin decir nada, marca $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ y se sienta)

En esta situación de aula, se pone de manifiesto la autoridad que los estudiantes otorgan a la calculadora. Esa autoridad hace un tiempo, era depositada en libros, docentes, o hermanos mayores con estudios relacionados con la matemática. Actualmente es el recurso tecnológico y sus resultados los que son tomados como depositarios de la autoridad. Se pone de manifiesto, además, que los estudiantes no diferencian entre los números irracionales y sus aproximaciones. Los alumnos no aceptan que se trate de un número, de un resultado una expresión que contenga operaciones, en este caso radicación. Expresan la necesidad que sienten de realizar las operaciones y devolver un resultado en el que no aparezcan operaciones. Para ellos los resultados deben ser expresados en sistema decimal, tal como la calculadora los expresa. Al analizar el intercambio de ideas que surgen en este diálogo, no podemos menos que preguntarnos si finalmente el estudiante comprende realmente lo que hace cuando marca finalmente los valores de las raíces en la recta numérica, o bien si lo hacen finalmente por satisfacer a la docente.

Episodio 2: *"Cuentas sin terminar"* (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Durante el cálculo de un límite de una función, el resultado obtenido fue: $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Uno de los alumnos A_3 escribe en el pizarrón ese resultado y lo recuadra. Uno de sus compañeros inicia el siguiente diálogo:

A_4: Escribí el resultado

A_3: Ya lo hice

A_4: No, está sin terminar la cuenta (toma su calculadora y hace cálculos): A mí me dio 1,207106781

P: No, el resultado es $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

A_4: ¿Por qué no terminamos la cuenta?

P: $\sqrt{2}$ *es un número irracional. Lo que obtuviste con la calculadora es un valor aproximado*

A_4: Pero así está sin terminar

A_5: Tenés razón, está sin terminar. Si lo dejo así no sé cuánto da

P: No

A_5: A veces usted deja cuentas sin hacer en el resultado

P: ¿Cuentas sin hacer?

A_5: Sí, esto es lo mismo que cuando en el ejercicio de principio de la guía usted dejó $\frac{1}{2}$ *en vez de hacer la cuenta y poner 0,5 que es el resultado*

P: $\frac{1}{2}$ *y 0,5 son el mismo número en un caso expresado como fracción y en el otro con su expresión decimal*

A_4: Pero el que está bien es 0,5, porque está terminado

P: No, los dos están bien

A_4: La calculadora da 0,5, ese debe ser el resultado, o ¿no?

P: Si colocás 0,5 o dejás $\frac{1}{2}$*, los dos están bien. Son dos formas de expresar el mismo número*

A_5: Entonces acá está bien escribir $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$*, pero también 1,207106781*

P: No

A_4: ¿Viste? Tenemos que hacer la cuenta y escribir todos los decimales. Es 1,207106781

P: No, justo eso es lo que está mal

A_4: Pero la calculadora da eso

P: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

A_4: Pero da 1,414213562

P: La calculadora te da una aproximación. $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales

A_4: Y, ¿cómo sabe que son infinitas? Si son muchas no sé si no acaban de golpe

P: Está demostrado. Desde la época de los griegos se sabe...

A_3: Es como π, que puedo siempre encontrar siempre una cifra más.

A_4: Pero usamos 3,14

P: Sí, en general usamos dos cifras decimales para hacer cálculos, pero sabemos que tiene infinitas

A_5: En la práctica, si es un número sirve para hacer cuentas y entonces tengo que considerarlo con cierta cantidad de cifras decimales. O, ¿para qué sirven si no los números?

P: Pero tenemos que aceptar que lo que usamos al tomar una cantidad determinada de cifras es un número racional tan cercano como quiera, pero que $\sqrt{2}$ (o π también), no es ese número racional, sino que ese racional está tan cerca como queremos de él, pero que $\sqrt{2}$ no es 1,4142, así como π no es 3,14. Cuando se hacen cuentas no se obtiene el resultado exacto

A_4: Pero si son distintos no es lo mismo

P: Exactamente

A_4: Entonces, ¿por qué la calculadora me da así?, ¿está mal?

P: La calculadora te da una aproximación para que puedas hacer un cálculo. No puede darte todas las cifras decimales porque son infinitas.

A_3: Entonces está mal lo que dice la calculadora, porque da el resultado al apretar el signo "=". De todas maneras la calculadora tendría que decir que no es igual, que no es el verdadero resultado

A_4: Pero con infinitas cifras, ¿cómo se hacen cuentas?

P: Por eso la calculadora nos da las primeras cifras, pero tenemos que saber que son sólo algunas, que es sólo una aproximación. No podemos hacer cuentas con infinitas cifras decimales

A_5: Entonces, ¿para qué sirven los irracionales?...

(la pregunta queda sin respuesta y la clase continúa...)

Nuevamente en este diálogo entre los estudiantes y su docente, surge como una de las ideas centrales, la necesidad que sienten los alumnos de que un resultado no contenga operaciones. En esta situación, nuevamente el resultado que da la calculadora es considerado correcto, más allá de que no tenga en cuenta el concepto de irracionalidad. La expresión de un número irracional es considerado por ellos como una "cuenta sin terminar". Se pone de manifiesto la autoridad que otorgan a las calculadoras. Otro de los conceptos cuya comprensión errónea se manifiestan en este diálogo, es la confusión entre un número y sus representaciones. Es usual que los alumnos confundan a los números con sus representaciones. El hecho de que un número irracional posea infinitas cifras decimales, es pensado por los alumnos como una dificultad para la realización de cuentas, y en ese momento aparece, tal vez de manera inesperada el cuestionamiento acerca de la utilidad práctica de los números irracionales.

Episodio 3: ***La no aceptación encubierta del infinito*** (1° Año Prof. de Informática. Matemática 1)

Al graficar la función y = sen(x), la profesora explica cómo obtener los valores del seno de un ángulo gráficamente a partir de la circunferencia trigonométrica y los segmentos determinados en ella. En la explicación marca en el eje de abscisas los valores en radianes y mediante la participación de los alumnos, va marcando valores en el plano cartesiano, los une e indica a los estudiantes que copien. Mientras copian del pizarrón, tiene lugar el siguiente diálogo:

A_6: ¿Por qué pusimos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π en vez de colocar los grados?

P: Porque estamos midiendo los ángulos en radianes. Por ejemplo: 90° es $\frac{\pi}{2}$, 180° es π…

A_6: ¿Por qué π?

P: π es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Y un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

A_6: ¿Por qué no le ponemos el valor?

P: Es π

A_6: ¿Por qué no 3,14?

P: 3,14 no es π, se aproxima a π

A_7: Sí es 3,141592. Lo da la calculadora

P: Y sigue… tiene infinitas cifras no periódicas. Siempre puedo encontrar otra.

A_7: Entonces, ¿cuando escribo π es porque no puedo escribir todo?

P: Sí

A_6: Pero entonces no es un número

P: Es un número irracional y por eso tiene infinitas cifras no periódicas.

A_6: Pero, ¿π es como una variable, que no sé cuánto vale?

P: No, es constante, π no es cualquier número, se sabe cuánto vale

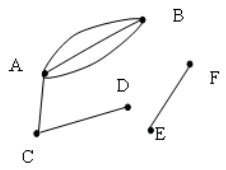
A_6: Es como cuando escribo a o b en un ejercicio, no como cuando escribo x o y...

P: Cuando vemos π, todos sabemos qué número es, no es una constante cualquiera

En este diálogo aparece por una parte la no comprensión del valor de π y de su valor. Los alumnos suelen pensar los ángulos en grados y los radianes les resultan una unidad artificial y sin significado. Se confunde en la conversación de los estudiantes las ideas de variables, constantes y parámetros. Las variables se unen al uso de las x y las y; las primeras letras del alfabeto son reservadas para las constantes. En la consideración del número π, nuevamente se manifiestan dificultades en aceptar la existencia de infinitas cifras decimales no periódicas. Al igual que en el caso anterior, el infinito es considerado en su carácter potencial. Surge fuertemente la influencia de concepciones del infinito que han sido construidas por ellos en escenarios no académicos (Lestón, 2008).

Episodio 4 – Soluciones únicas (2° Año Prof. de Informática – Modelos Discretos)

En la práctica de Teoría de grafos se plantea un problema en el que se pide representar una situación de trozos de autopista entre ciudades



Se le pide construir los tramos de autopista necesarios para que todas las ciudades queden intercomunicadas (alcanza con uno)

A4: ¿Cuál es la respuesta a si posible llegar de A a cualquier ciudad con a lo sumo 2 tramos de autopista?

P: Depende de qué trozo de autopista decidiste construir

A4: Sí, pero ¿cuál es la respuesta correcta? ¿Cuál está bien? ¿Sí o no?

P: Las dos estarían bien...

A3: No, en un examen, ¿cuál será la que se le pone bien? Sólo una puede ser la respuesta correcta…

En este breve diálogo, se manifiesta la creencia de los estudiantes de que en los problemas de matemática debe haber una única respuesta correcta. Esa solución es para ellos la que la escuela quiere. Aún comprendiendo que puede haber varias respuestas, el alumno que participa de este diálogo busca cuál será la que se considere correcta en una evaluación. Indudablemente, considera que todas las actividades que se realizan en clase tiene como finalidad aprobar la evaluación correspondiente.

Algunas reflexiones acerca de qué información dan estos episodios

Estos episodios reflejan la existencia de construcciones no correctas o poco sólidas para conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Algunos conceptos no han sido construidos de manera correcta por algunos de estos estudiantes, no han adquirido significatividad para ellos. Esas ideas se convierten en obstáculos para la comprensión del conocimiento matemático.

Es posible inferir de ellos que la matemática es vista como la ciencia que permite hacer cálculos y por lo tanto el producto de las actividades que se desarrollan en el aula debe para ellos reducirse a cálculos, sin construcción de significados de los conceptos matemáticos. La escuela actual hace hincapié en la construcción de contenidos aritméticos y algebraicos, mostrando a la matemática como una colección de símbolos, reglas y procedimientos de forzosa aplicación que manipulan mecánicamente. La ausencia de significado provoca una manipulación errónea según supuestas reglas.

Los docentes tienen tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos son claros y compartidos, sin embargo, los estudiantes construyen nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas. Debemos estar atentos a observar las conexiones explicitadas por sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 6(1), 27-40.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22.* 1379-1390.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2009). *La comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática*. Revista Premisa 10 (41), 21-30

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

¿FRACASO O EXCLUSIÓN EN EL CAMPO DE LA MATEMÁTICA?

Daniela Soto S.; Ricardo Cantoral U.
Centro de investigación y de Estudios Avanzados del IPN Chile, México
dsoto@cinvestav.mx, rcantoral@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En el marco de un proyecto de investigación más amplio que busca examinar los mecanismos de exclusión del discurso matemático escolar, presentamos las motivaciones iniciales de nuestro estudio y las consideraciones teóricas que fundamentan nuestra investigación: el discurso matemático escolar (dME) –constructo teórico de la aproximación socioepistemológica– y la exclusión como un fenómeno social y escolar. Mostraremos cómo el discurso matemático escolar es el responsable de causar un tipo de exclusión hacia el humano en la construcción del conocimiento matemático.*
Palabras claves: Discurso matemático escolar, exclusión, fracaso

Introducción

Investigaciones recientes en el campo de la Matemática Educativa reportan dificultades y logros que manifiestan los estudiantes ante tareas propiamente matemáticas (De Faria, 2008; Vásquez y Ojeda, 2008). Se evidencia un *fracaso* en el logro de los objetivos de la enseñanza en el campo de la matemática, en la medida en que los estudiantes, si bien dotan de significados a los objetos y procesos matemáticos a un cierto nivel, distan de los que la institución esperaría. Encarar este asunto desde el punto de vista del *fracaso* conlleva, inevitablemente, a un señalamiento hacia el estudiante, ya que es él quien fracasa. Discrepamos con este enfoque. La noción de *fracaso* en el campo de la matemática, debe encararse en el marco de una problemática más amplia, proponemos que el fenómeno social de *exclusión* sería más adecuado para explicar lo que el *fracaso* oculta.

Lo anterior nos lleva a buscar respuestas mediante el examen de los sistemas que excluyen, como los *sistemas de razón*. Estos se pueden ver como mapas, que muestran lo que está dentro de la "razón", lo "normal" y por omisión nos caracteriza lo contrario. Una forma particular de *sistema de razón* es lo que el marco teórico de la *socioepistemología* denomina *Discurso Matemático Escolar* (*dME*). Según Cordero y Flores (2007), el *dME* son las manifestaciones del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Nuestra investigación da evidencia de que es el *discurso matemático escolar* el que genera una exclusión del humano en la construcción del conocimiento matemático. Demostramos que la problemática no se reduce a los problemas cognitivos o didácticos, por lo que cuestionamos si el *fracaso* de la enseñanza de la matemática es material del humano o es la matemática escolar quien excluye.

En concreto, analizaremos el *discurso Matemático Escolar* de una noción específica de la Matemática de nivel superior que nos ha atraído, debido a la claridad con que se manifiesta la transformación que ha sufrido desde sus orígenes, hasta la época actual: el teorema de L'Hospital.

El Fracaso en Matemática

Los países latinoamericanos, además de compartir una historia común, el lenguaje, la diversidad étnica, religiosa y cultural de la población, nos caracterizamos – en ámbitos de educación y ciencia– por la escasa producción científica, el rechazo de nuestros estudiantes a estas disciplinas y los altos niveles de deserción escolar. La comunidad educativa ha tendido a encarar estas problemáticas desde la perspectiva del "*fracaso escolar*", con el fin de dilucidar sus posibles causas y soluciones. Sin embargo, hemos notado que a pesar de todos los esfuerzos, no se ha consolidado lo que en cada contexto social, cultural y educativo se entiende como "*fracaso escolar*", sino más bien notamos que es una noción variable. En tanto a los factores múltiples a los cuales puede responder en cada momento, como a las dinámicas que lo fabrican (Perrenoud, 1990). Por ejemplo, el "*fracaso*" puede ser interpretado como los malos rendimientos de los estudiantes o como las expresiones de comportamiento, que la sociedad o el sistema educativo consideran inadecuados. Por tanto, el "*fracaso*" no es un fenómeno natural, sino una realidad construida en y por la escuela en sus relaciones con los estudiantes y naturalmente, de estos con ella (Escudero, 2005).

Existen diferentes esquemas explicativos de cómo ocurre el *fracaso* y porqué. Algunos análisis abordan la problemática desde la perspectiva de las capacidades y/o habilidades de los estudiantes, otros desde la perspectiva de la diversidad cultural, entendiendo que el "*fracaso escolar*" está asociado a los niveles de consideración de los contextos étnicos, religiosos o culturales en el cual se desarrolla el estudiante. También se asocia el fracaso al nivel

socioeconómico del estudiante que fracasa, es decir, se atienden problemáticas como el trabajo infantil, el rol de los niños en sus hogares, entre otras. Y, por último, la responsabilidad del sistema educativo en términos de infraestructura, financiamiento, amplitud del currículo, etc. y el rol de las prácticas pedagógicas (metodologías de enseñanza, relaciones interpersonales con los estudiantes, etc.). Sin duda, tales análisis son enormes contribuciones a la problemática. Sin embargo, la visión de "*fracaso*" tiende a poner en el centro al individuo, ya que es él quien fracasa. Para evidenciar esta personificación de la problemática mostraremos algunas causas que la sociedad, en general, le atribuye al llamado "*fracaso escolar*". Para ello hemos seleccionado algunos titulares de diarios de diferentes países, en los cuales se da una explicación acerca de esta problemática.

Elgueda, P. El Mercurio. Santiago, Chile. 29 de agosto 2003

Periódico Extremadura. Cáceres, España. 14 de junio 2009

En el caso de la Educación Matemática, hemos observado que el grueso de los análisis suelen personificar aun más el *fracaso*. El profesor o el estudiante aparecen como los únicos responsables del desinterés o de los bajos rendimientos en la materia. Nuestro trabajo cuestiona esta perspectiva del *fracaso* en Matemática, ya que frente a ella la *matemática escolar* no es cuestionable.

Ahora bien, nosotros como sociepistemólogos nos preguntamos *¿Cuál es el rol juega la Matemática Escolar en esta problemática?* Desde este cuestionamiento pretendemos romper el marco interpretativo del *fracaso* -personalizado- para dar un vuelco hacia la idea de *exclusión* provocada por un sistema: el *discurso matemático escolar (dME)*.

El vuelco hacia la *matemática escolar*: una visión socioepistemológica

El problematizar el cómo y porqué la Matemática Escolar genera un tipo de exclusión nace a partir de la reflexión que la teoría socioepistemológica pone en la palestra. La concepción de la Matemática que subyace en la enseñanza ha estado históricamente en términos de lo preexistente, es decir, la matemática se ha considerado independiente del humano, el conocimiento matemático se ha concebido como un sistema de verdades seguras, no modificable por la experiencia humana (Espinoza, 2009). Esto ha generado que en la planeación y ejecución de la enseñanza, el individuo quede al margen de su construcción. La socioepistemología propone dar un vuelco a la visión tradicionalista de la *Matemática Escolar*. En términos concretos, plantea cambiar −a nivel institucional y cotidiano− la visión que ubica a los objetos matemáticos en un altar y que nos lleva a preocuparnos de cómo estos son aprendidos por el humano. Para convocarnos a realizar estudios sobre la base de que el conocimiento matemático es socialmente construido, donde la *actividad humana* y las *prácticas sociales* son las fuentes de creación de dichos conocimientos. Por tanto, de manera natural, el humano queda incluido en esa construcción.

Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra (2006) señalan que el conocimiento matemático adquiere un estatus de saber sólo hasta que se haya socializado, en ámbitos no escolares. Y que su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de transformaciones que afecta directamente a su estructura y su funcionamiento, de manera que afecta también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y sus profesores. En este intento por difundir los saberes se forman discursos, que la socioepistemología los nombra por *discurso matemático escolar (dME)*. Los autores aclaran que la estructura de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

Las investigaciones que se ocupan del *dME* (Buendia, 2004; Montiel, 2005; Cordero y Flores, 2007) han evidenciado una serie de características que permean el modelo que se ha adoptado para explicar la construcción del conocimiento. Entre ellas la centración en los conceptos, el carácter hegemónico del discurso, la concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y

continuo, el carácter utilitario y no funcional del conocimiento y, por último, que el único referente para explicar la construcción del conocimiento matemático es el contexto matemático.

Un ejemplo que muestra con claridad las características antes mencionadas es el *dME* del teorema de L'Hospital. Éste aparece en los diferentes textos de estudio como una regla que responde a la indeterminación del límite. Con el fin de ejemplificar la presentación del teorema mostramos en la figura 1, lo expuesto en un texto de estudio que se utiliza en la enseñanza del cálculo.

Como vemos (figura 1), la argumentación del teorema se encuentra en la indeterminación del límite, esta es la problemática que hace que la regla sea necesaria de enseñar y aprender. Los significados aparecerán en términos de los objetos matemáticos: límite, funciones y cociente. Y, por último, el procedimiento asociado es la derivada.

Si hacemos un análisis a la obra del Márquez de L'Hospital (1696) evidenciamos que el surgimiento del teorema de L'Hospital responde a una argumentación netamente visual. (Véase fig. 2). Ésta se refiere a la problemática que nace cuando queremos encontrar el valor que toma una curva, que se escribe como el cociente de otras dos curvas, en el punto donde justamente estas dos últimas curvas se interceptan el eje de las X (ver fig.3)

Regla de l'Hospital Supóngase que f y g son derivables y que $g'(x) \neq 0$ cerca de a (excepto quizás en a). Supóngase que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite del segundo miembro existe (o es ∞ o es $-\infty$).

Figura 1: Stewart (1999)

Sea AMD una línea curva (AP=x, PM=y , AB=a) tal que el valor de la ordenada y este expresado por una fracción, donde el numerador y el denominador se vuelven cada uno cero cuando x=a , es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B . Cabe preguntarse, ¿Cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD?

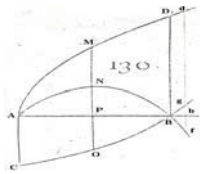


Figura 2: L'Hospital (1696)

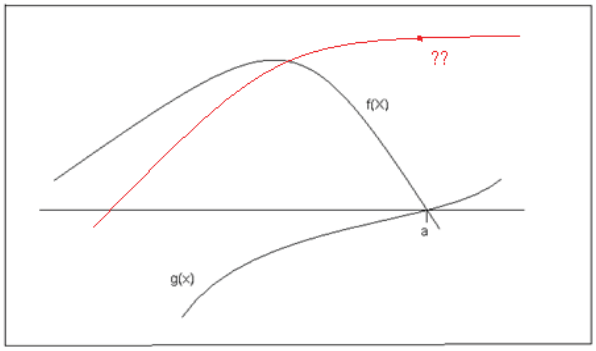


Figura 3: Argmentacion del teorema de L' Hospital

Lo interesante de este análisis es el evidenciar que existen otros tipos de argumentaciones, significados y procedimientos que no son considerados en el *DME*, es decir su carácter hegemónico.

La exclusión

El término "exclusión" tomó gran fuerza durante la década de los 90'. Esto se refleja en los discursos políticos de los diferentes países y en las investigaciones desarrolladas en el ámbito político, educacional, social, económico y cultural que abordan el tema. En particular en educación, Littlewood (2005) señala que existen dos nociones en las investigaciones acerca de la exclusión; la primera entiende a la escolarización y a la educación formal, no sólo como algo que tiene que ver con la transmisión de conocimiento, sino también con la selección y toda selección supone no sólo identificar ciertos candidatos como aceptables para su inclusión, sino identificar a los que no son aceptables y rechazarlos o excluirlos. La segunda, es un tipo más sutil de exclusión, y tiene que ver con los educadores que intentan convencer a los excluidos de que no se trata del sistema que los excluye, sino más bien de ciertas características o déficits que tienen los propios candidatos.

Entre los investigadores que asumen la segunda perspectiva de la exclusión expuesta Littlewood (2005), se destacan los sociólogos Bourdieu y Passeron, quienes describen un tipo de exclusión en la escuela: la *violencia simbólica*.

La violencia simbólica es "*todo poder que logra imponer significados e imponerlos como legítimos disimulando las relaciones de fuerza en que se funda su propia fuerza*" (Bourdieu y Passeron, 2005), es decir, es esa violencia no física que se ejerce por medio de una autoridad que aparece como legítimo, imponiendo significados y que esconde en esa legitimidad su carácter arbitrario. Este es una forma de excluir que nace a partir de la imposición.

Debido a la limitada extensión de este reporte de investigación sólo profundizaremos en dos nociones de la teoría de la violencia simbólica: la acción pedagógica y la autoridad pedagógica. Bourdieu y Passeron (2005), explican que "*la acción pedagógica es objetivamente una violencia simbólica en tanto que impone, por un poder arbitrario, una arbitrariedad cultural"* (Bourdieu y Passeron, 2005, p 45). El poder arbitrario puede resumirse en lo que los autores denominan autoridad pedagógica. "*La acción pedagógica implica necesariamente como condición social para su ejercicio la autoridad pedagógica"* (Bourdieu y Passeron, 2005, p 52). En otras palabras, toda acción pedagógica necesita legitimar la inculcación de ese arbitrario cultural y un mecanismo necesario es la legitimidad del emisor.

En términos concretos, la *acción pedagógica* se puede resumir en las diferentes formas de transmitir el conocimiento a través de una diversidad de conductos, respaldados por una *autoridad pedagógica*. Ésta legitimará el sistema estructural de enseñanza. Desde qué, cómo y cuándo se debe enseñar tal o cual conocimiento. Conocimiento que a su vez se entiende como una arbitrariedad cultural.

El *DME* como sistema de razón que produce violencia simbólica

La relación entre *DME* y *sistema de razón* se puede explorar mediante una analogía con la producción de un mapa. Del mismo modo que un mapa de carretera nos informa las distancia y los caminos para viajar, y lo que queda dentro y fuera de los territorios, un sistema de razón ordena y divide los objetos sobre los que se reflexiona, se ve como las prácticas que no sólo dicen lo que hay dentro de la "razón", sino que también inscribe lo que está afuera de la misma, con lo cual excluye por medio de los instrumentos de ordenación y diferenciación de la razón aplicada a la solución de las problemáticas (Popkewitz y Lindblad, 2005). Por ejemplo, el *discurso matemático escolar* forma las categorías de argumentaciones, significados y procedimientos válidos dentro de

la Matemática, y los "no válidos", delimitando así lo normal y, al mismo tiempo, lo que está fuera de lo normal en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

La *violencia simbólica* se manifiesta en la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos que genera el carácter hegemónico del *dME*. Como en el ejemplo del teorema de L'Hospital hemos podido evidenciar, existen otras argumentaciones y significados que no son considerados.

La exclusión que describimos no se refiere a cómo la matemática escolar excluye a ciertos individuos o grupos (raza, etnia, capacidades diferentes, etc.), más bien nos referimos a la exclusión de la *actividad humana*, que se ejerce bajo la legitimidad de un sistema de razón (DME) que pone en el centro a los objetos matemáticos y que no considera a la Matemática como un constructo social. En este tenor, el *discurso matemática escolar* excluye al ser humano de la construcción del conocimiento matemático.

Reflexiones finales

En este reporte hemos intentado, por un lado, evidenciar cómo la perspectiva del "*fracaso en Matemática*" tiende a personificar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; y cómo el enfoque socioepistemológico nos permite poner el foco sobre la *matemática escolar* evidenciando las características del *sistema de razón* (*DME*) que fundamenta el modelo educativo actual. Y, por el otro, hemos podido hacer evidente un fenómeno social que pareciera ser invisible: la exclusión hacia el humano en la construcción del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, J. y Passeron, J-C. (2005). *La reproducción; elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. (Trad. J. Melendres y M. Subirat). México: edición Fontamara (original en Francés, 1970)

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial, 83-92

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de la grafica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38.

De Faria, E. (2008). Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas en matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 32-39.

Elgueda, P. (agosto 29, 2003). Docentes asocian fracaso escolar a inteligencia. *El Mercurio*, recuperado el (junio 15, 2009) de, http://diario.elmercurio.cl/detalle/index.asp?id={7bd50885-24d5-4b49-a541-4bd22556ace2}

Escudero, J. (2005). Fracaso escolar, exclusión escolar: ¿De qué se excluye y cómo? [Versión electrónica]. *Profesorado. Revista de currículum y formación de profesorado* 9(1), 1-24

Espinoza, L. (2009) *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Littlewood, P. (2005). *Escolarización exclusiva*. En J. Luengo (Comp.). Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación (67-90). Barcelona, España: Pomaires.

Los docentes vinculan el fracaso escolar al desinterés de los padres y la desmotivación (junio 14, 2009). *Periódico Extremadura*, recuperado el (junio 16, 2009) de http://www.elperiodicoextremadura.com/noticias/noticia.asp?pkid=449625

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence de lignes courbe*. Paris, Francia, ACL-Editions. [Reimpresión, 1988]

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. México: Cicata-IPN

Popkewitz, T. y Lindblad, S. (2005). *Gobernación educativa e inclusión y exclusión social: dificultades conceptuales y problemáticas en la política y en la investigación*. En Julian J. Luengo (Comp.). Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación (116-165). Barcelona, España: Pomaires.

Perrenoud, Ph. (1990). *La construcción del éxito y del fracaso escolar* (1996). Madrid, España: Morata.

Stewart, J.(1999). Calculo: conceptos y contextos. México, D.F, México: Thomson

Vásquez, O. y Ojeda M. (2008). Enseñanza y comprensión de estocásticos en tercer grado de secundaria. En P. Lestón (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 234-244.

LO TITIRITESCO EN MATEMÁTICAS: ¿DOS ESENCIAS EN LA MISMA PRÁCTICA?

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero México
marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Preescolar, Básico

Resumen. *En este artículo reportamos una experiencia realizada con profesores de preescolar y primaria en la cual discutimos sobre el papel que podrían jugar los títeres en sus aulas de matemáticas. En el taller se les invitó a, ser espectadores de la obra "La aldea de los rombos" y por otro, ser hacedores, es decir, realizar y presentar su propia obra; propiciando la emergencia de ciertos aspectos matemáticos desde lo titiritesco.*
Palabras clave: Títeres, matemáticas, prácticas sociales

Al escuchar la palabra "títere" algunos rápidamente evocamos imágenes de muñecos, otros además, a nuestra maestra de español o a la de arte que en primaria nos hicieran presentar una obra en algún evento escolar, o aquellos que no hemos olvidado la magia generada por un espectáculo de títeres y no faltan aquellos que recordamos alguna sesión de psicoterapia cuando hemos quebrado la posibilidad de comunicarnos; pero pocos asociarían títeres con matemáticas.

Varios son los investigadores que estudian la incorporación de los títeres en las aulas de primaria como un elemento de construcción de conocimientos. Para Tilleria (2003) y Rogoinski, (2005), los títeres son un aliado pedagógico, pues permiten al niño comprometerse integralmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ayudándolo a ampliar todo su potencial creativo, estimulando sus percepciones, desarrollando su imaginación y favoreciendo, o a la vez fomentando, su contacto con los otros, convirtiéndose, de esta manera, en un importante recurso socializador, pero también en un significativo vehículo para la apropiación y construcción de los distintos saberes. Sánchez y García (2005) aterrizan, por su parte, estas ideas a su clase de matemáticas donde desfilan cuerpos geométricos que cobran vida e interactúan con los niños deseando conocer sus nombres. Se genera así una dicotomía interesante, entre aquella postura donde el niño es un espectador y aprende jugando con los personajes; y aquella que considera importante involucrar al estudiante en la creación de la obra, integrando así varias disciplinas escolares transversales a las matemáticas.

Desde nuestro acercamiento socioepistemológico, son las prácticas sociales las que generan un ámbito propicio para reflexionar sobre la generación de herramientas así como su evolución y anclaje. En este sentido, ante una expresión cultural tan antigua y amplia como la de los títeres, donde conferirle vida a un elemento inanimado respondiera, en sus inicios, a necesidades de distinta índole y alejadas, como las matemáticas, de lo escolar; es que nos cuestionamos sobre un acercamiento particular, una dupla poco trabajada en los salones de clases: "matemáticas-títeres" y la construcción social de conocimiento que tales prácticas conllevan.

Una experiencia con profesores

Es imposible no percibir la gran experiencia que profesores mexicanos del nivel preescolar y primaria presentan al conversar con ellos respecto a títeres, pues la mayoría ha trabajado con títeres de varilla o de guante en su formación como maestros. Sin embargo, pocos son los que comentan que retoman esas actividades con sus estudiantes, quizás algunas de las que se proponen en los textos oficiales.

Efectivamente, en los programas de la Secretaría de Educación sigue estando presente fundamentalmente en las áreas de español y artística. Ambas áreas se concentran y preocupan en el desarrollo de la expresión escrita, oral y estética de los niños, confluyendo en actividades como representaciones teatrales reconociendo en ese rubro la presencia de los títeres. Por ejemplo, en el texto oficial de Español (Gómez, Gonzáles, Iñigo, Morales, Morales, Moreno, Rodríguez, *et al*. 2006) aparece la *Lección 7: Lío de perros, gatos y ratones* (pp. 66-75), que es una obra de teatro, disparando la interacción desde la construcción de un títere con calcetines viejos en el bloque de "leer y compartir". Se les invita luego, a escribir y reflexionar en los personajes y en ellos mismos pues se introduce un texto sobre "los derechos de los niños". Termina la lección con el bloque "hablar y escuchar" con consejos sobre cómo ser un buen titiritero, cómo confeccionar el teatrino, realizar las invitaciones a la función y representar la obra.

Se observa en esta actividad cómo se entremezclan el quehacer literario y el quehacer artístico, donde implícitamente invita a reflexionar sobre matemáticas. ¿Dónde colocar los ojos del gato?, ¿Cuántos bigotes tiene? ¿qué tamaño darle a sus orejas?, o ir más allá de los muñecos y

cuestionarnos en la forma del teatrino, sus proporciones, sus formas, entrelazándose indefectiblemente con la actividad propuesta.

Si analizamos el texto oficial de *Matemáticas* (Ávila, Balbuena, Bollás y Castrejón, 2006), observamos que los discursos parecen no intersectarse. En las actividades propuestas paralelamente al texto de español aparece, una actividad sobre cómo determinar el área de ciertas figuras planas seguido, en el bloque de "Tratamiento de la información", por la idea de comentar sobre sus mascotas y observar cuál es la que con mayor frecuencia se menciona, entrelazando actividades geométricas con aritméticas. Sin embargo, es el maestro quien decide qué lección escoge para el día, es quien genera el ritmo de trabajo e intersecciones entre las áreas que desarrolla con el grupo de niños que tiene a su cargo. Por tanto, sería muy ingenuo analizar el discurso matemático escolar si sólo nos centramos en los textos, ya que obviamente son varios los personajes que le dan vida y sentido.

Esta percepción de que no existe un nexo entre las áreas de español y artística con la de matemáticas, como si conformaran conjuntos disjuntos, y por tanto el títere no podría coexistir en ellos, se percibe en su extrañeza: "*¿títeres en matemáticas?*" al participar en talleres para profesores que hemos estado dictando en distintas oportunidades y al conversar con ellos respecto al uso del títere en su salón de clases.

Iniciamos la experiencia en el taller que analizaremos, discutiendo sobre el papel que ha jugado el títere en sus clases. Todos reconocen haber tenido experiencia con títeres en su formación como maestros, pero pocos lo habían llevado a sus clases. Una colega, psicopedagoga de una escuela primaria, nos narra que presenció una bella clase de una maestra con pequeños de preescolar donde incorpora al títere como un elemento de comunicación con los niños pues estaba preocupada por la disciplina de los mismos. Como conclusión de la interacción de la tripleta: maestro-títere-niños pega en la pared el muñeco utilizado, para acercarse a los niños y explicar algunas reglas de convivencia, confiriéndole ahora el papel de vigilar la disciplina, argumento amenazante para los niños, que nos permitió discutir los matices del uso de este tipo de herramientas.

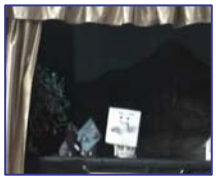
Con la intención de darles una respuesta a la pregunta que los motivó asistir a este taller, ¿títeres en matemáticas? les presentamos una de las obras de teatro que el grupo "Los matetíteres" ha creado en su búsqueda de acercar a las matemáticas a la comunidad, particularmente a los niños.

Este grupo de estudiantes de licenciatura y maestría de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, presenta cada año en el zócalo de Acapulco obras inéditas de su creación, convirtiéndose así en un generador de ilusiones donde las matemáticas es el argumento central.

La obra de títeres disparadora de reflexiones

De las seis obras que han sido creadas por "los matetíteres", escogimos la titulada: "La aldea de los Rombos", cuyo argumento fue realizado entre risas y juegos por Ismael Arios, Kikey Cisneros y Juliana Sánchez, estudiantes de licenciatura que proponen a sus compañeros del grupo de títeres presentarla en la Expomatemática del 2006, fecha en la que se estrena.

La aldea de los Rombos



El personaje central de esta obra es el "señor cuadrado" que llega a una aldea tranquila habitada por rombos. Al llegar se encuentra con dos niños rombos jugando a las escondidillas y que se sorprenden mucho al ver a un forastero distinto a ellos y desconfían antes de acercarse a él. Luego de ayudarlos a bajar unas manzanas del árbol de la aldea les pregunta si conocen un lugar donde pueda hospedarse: *mmmm…* dicen Romlucía y Romdonaldo, dudando mucho y mirándolo detenidamente -*…Y usted, ¿qué figura es? - Soy un cuadrado* contesta el Señor

Cuadrado sorprendido por la pregunta de la niña. - *Entonces usted no puede quedarse, porque en esta aldea sólo viven rombos* dice Romdonaldo… - *Pero… ¿por qué no?… si yo también soy un rombo… mírenme bien…* contesta el Señor Cuadrado muy pero muy sorprendido; *y* volviendo a observarlo con mucho cuidado dice Romdonaldo: *usted no parece serlo, porque no se parece a mí, ni a mi hermana, ni a mi papá…* y por ello, deciden preguntarle a su papá y salen corriendo a buscarlo en tanto que

el Señor Cuadrado se sienta bajo el manzano a esperar. Llegan luego dos chismositas de la aldea que se asustan el verlo y corren a buscar un policía y denunciarlo. Minutos después llega la autoridad, y sin aceptar las explicaciones del Señor Cuadrado sobre sus derechos a estar en la aldea, lo llevan a la cárcel y luego a juicio.

Así, inicia un juicio donde los testigos le acusan de violar las leyes de la aldea pues no cumple con la ley principal: "sólo rombos pueden vivir en la aldea" por lo que lo encuentran culpable. Sin embargo, en el fondo se escucha: -*Un momento por favor, detengan este juicio…* pues ha llegado a la corte el señor Rombo Sabio, el papá de los niños. -…*Pero señor Rombo Sabio, por qué tenemos que detener el juicio justo antes de mi parte favorita que es la sentencia* dice la Juez.

Rombo Sabio defiende al Señor Cuadrado: *¿Acaso no se dan cuenta que el Señor Cuadrado está diciendo la verdad?, sólo véanlo, ¿acaso no tiene cuatro lados como nosotros? ¿Y acaso no son sus cuatro lados iguales como los de nosotros?* A lo que todos exclaman sorprendidos: *Mmmm, pues si….* Y la Juez da fin al juicio: *Tiene razón. Señor Cuadrado, póngase de pie… por el poder que se me confiere lo declaro inocente y libre de todos los cargos. Y desde hoy, yo declaro que todo cuadrado será bienvenido en nuestra aldea de los rombos*. Y así, el Señor Cuadrado fue aceptado en la aldea de los rombos, ya que gracias a la sabiduría del señor Rombo Sabio, todos pudieron darse cuenta que un cuadrado también es un rombo. Y colorín colorado, este cuento se ha acabado.

Analizando las reacciones de los profesores en el desarrollo del taller

Luego de observar la actuación de los matetíteres, presentación videograbada el día del estreno en el Zócalo de Acapulco, se inicia la discusión con los maestros, solicitándoles que analicen la obra y propongan actividades para trabajar con sus estudiantes.

Encontramos en los tres equipos formados, distintas respuestas. Uno, se enfrasca en discutir si un cuadrado es un rombo, idea que lo sorprende y denota no tener argumentos para convencerse de tal cosa y por tanto discute el final propuesto, discusión que agota su tiempo y no logra proponer actividades para sus estudiantes. Otro en cambio, acepta el final del cuento y se dedica a pensar las posibles actividades que podrían desprenderse de esta obra. Y por último, el tercer equipo nos sorprende pues se enfrasca en discutir el problema del rechazo social de cuadrado, se conmueven

por la exclusión y la indiferencia de los rombos ante el cuadrado, identificándose con el argumento pues una de las maestras trabaja con niños de capacidades diferentes y otra tiene una hija con síndrome de Down.

Observamos entonces que el cuento dispara distintos acercamientos, cada uno logra ver lo que puede ver, y discute desde sus herramientas, elementos que se perciben también en las obras que crean en la siguiente sesión. Efectivamente, el primer momento del taller culmina formando equipos de trabajo para generar el argumento para una obra de títeres.

Figura 1: Primer momento del taller

En la segunda sesión, los convocamos a discutir sus argumentos e iniciar la construcción de los títeres de varilla utilizando papel crepe, foami, esferas de unicel, varillas, entre otros materiales, todos aquellos que las maestras acostumbran utilizar en sus clases y momento donde nos demostraron una gran creatividad y entusiasmo.

Figura 2: Segundo momento del taller

No fue necesario indicarles cómo trabajar con papeles y varillas, cómo generar muñecos y telones pues rápidamente se hicieron cargo de la actividad y entre risas y acuerdos fueron dando forma a sus argumentos. Comienzan a delinear sus obras, a desarrollar sus ideas para acercarse a los niños.

Un equipo, se preocupa por generar canciones y personajes que permitan a los más pequeños trabajar con la idea de distinguir colores y tamaños, formas y sonidos (ver Figura 3)

Figura 3: Una obra para los más pequeños donde tamaño y color se deben distinguir

Otro equipo de trabajo, decide adaptar un cuento de la televisión donde los personajes son figuras geométricas, donde aparece un triángulo, un cuadrado, un trapecio, un rectángulo (único que presentan "parado" es decir, no en la clásica posición de los textos), un pentágono, un hexágono, un círculo; todos ellos caracterizados. El argumento central es que se ha perdido uno de los cuadriláteros y la familia sale a buscarlo. En el camino se van encontrando amigos que les van guiando y dando pistas para hallar a su hermano.

Figura 4: El reconocimiento de las figuras geométricas como argumento central

El último equipo nos sorprende dejando "lo matemático" de lado para crear su obra desde una problemática social, la desintegración familiar. Nos explican que las matemáticas están presentes en su trabajo al confeccionar los personajes: padre, hija, hijo y la madrastra donde la proporcionalidad por edades se torna importante. No se detienen allí sino que construyen los árboles del bosque donde vive la familia, y que realizan utilizando papiroflexia, lo cual los lleva a

reflexionar sobre cuerpos geométricos como cilindros y pirámides de distintos tamaños para la escenografía de su obra.

Figura 5: La proporcionalidad entre personajes y escenografía desde una problemática social

Conclusiones

La experiencia realizada con estos doce maestros en las tres sesiones desarrolladas en el taller nos deja un sabor especial, el de haber tocado fibras particulares de la mayoría de los profesores, al acercarlos a reflexionar sobre una herramienta poco utilizada en sus clases, los títeres, propiciando la posibilidad de expresarse con libertad, de explorar algunas nociones matemáticas con creatividad. La mayoría, aceptar el desafío eligiendo a la matemática como el eje del argumento y por tanto, los personajes fueran los elementos que se deseaba discutir con los estudiantes. Los menos, percibieron que la matemática se permea en las actividades que nos invitan a realizar una obra de títeres.

Les propusimos entonces a los maestros discutir dos esencias centrales de los títeres, aquella de crear una ambiente mágico donde los títeres cobran vida gracias a quienes los manejan en el cual nos involucramos con risas y gritos, con gran atención y dejándonos transportar a otro mundo como espectadores; y aquella de hacedores de ese mundo, al involucrarnos en realizar la obra, de crear los personajes, de conferirles nuestra vida, donde nos reconocemos y donde nos reencontramos con nosotros mismos y las matemáticas.

Figura 6: Dos esencias de los títeres

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. y Castrejón, J. (2006). *Matemáticas, Tercer grado.* México: SEP.

Gómez, M., Gonzáles, L., Iñigo, L., Morales, E., Morales, E., Moreno, S., Rodríguez, B., *et al*. (2006). *Español, Tercer grado. Actividades.* México: SEP.

Nava, L. (2006). *Los matetíteres en el aula*. Tesis de maestría. Facultad de Matemática. Universidad Autónoma de Guerrero.

Rogoinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación*. Argentina: Novedades Educativas.

Sánchez y García (2005). Los títeres como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría en la primera etapa de educación básica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Equies Ángulo*. Recuperado en junio de 2006 de http://www.actualizacion docente,ula,ve/ Equisangulo/

Tillería, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción de saberes.* Argentina. Homo Sapiens Ediciones.

EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL COMO EJE RECTOR PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS. UN ESTUDIO EN EL MARCO DE LA RIEMS

Luis Cabrera Chim, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN México
lmcabrera@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento Variacional Nivel: Superior

Resumen. *La actual Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) tiene como objetivo la creación del Sistema Nacional de Bachillerato en un Marco de Diversidad. Para lograr esto, se adopta al Enfoque en Competencias como un medio para promover una formación mínima común compartida por todos los jóvenes que egresen de este nivel. Sin embargo, este enfoque carece de un adecuado marco didáctico metodológico que guíe el trabajo en el aula. Situación que afectará la adecuada concreción de la Reforma. Así, nuestro trabajo pretende identificar si los resultados provenientes de la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional, pueden proporcionarnos elementos para el diseño de situaciones de aprendizaje propicias para alcanzar los objetivos propuestos en la RIEMS.*
Palabras clave: Pensamiento variacional, competencias, reforma de bachillerato

Introducción

La actual Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) tiene como objetivo la creación del Sistema Nacional de Bachillerato en un Marco de Diversidad (SEP, 2008). Ella busca incidir en los problemas relacionados con la *calidad, cobertura y equidad* de la educación que se imparte en el bachillerato, pero también, busca dotar a este nivel de una identidad (SEP, 2008). Para ello se ha propuesto la creación de un Marco Curricular Común (MCC), en donde se establece una serie de desempeños terminales que toda institución de este nivel debe promover. Éste se compone de una serie de competencias genéricas, competencias y conocimientos disciplinares y competencias profesionales.

Por su parte, el Enfoque Educativo en Competencias promueve el desarrollo de aprendizajes funcionales que permitan a los estudiantes afrontar los desafíos de la realidad que viven. Una competencia abarcar a un conjunto de capacidades, que se desarrollan a través de diversos procesos, que conducen a las personas a poder realizar múltiples acciones, las cuales le permiten evidenciar su capacidad para resolver un problema dado en un contexto específico y cambiante (Andrade, 2008). Esto presenta una amplia connotación que va más allá del simple hecho de saber ejecutar una tarea con cierta destreza. Ella involucra la disposición de realizarla con calidad, con

raciocinio, basada en una fundamentación y comprensión conceptual. Se establece que el desarrollo de una competencia requiere poner en acción tres elementos: informaciones, habilidades y una situación inédita que plantee un problema (Díaz-Barriga, 2006). La situación debe promover que el estudiante movilice sus aprendizajes y los reestructure a la luz de ella, favoreciéndose la transversalidad de los mismos.

De este modo, el Enfoque por Competencias exige una serie de cambios dentro el sistema educativo, en especial en el aula, que no son cubiertos dentro la Reforma y que la pueden llevar al fracaso. Por ejemplo, se establece que las instituciones de este nivel no tendrán que modificar sus estructuras curriculares para homologarlas al MCC, así como tampoco, los profesores tendrán, necesariamente, que realizar nuevas tareas (SEP, 2008). Ellos deberán únicamente enfocar su trabajo para lograr que el estudiante desarrolle los desempeños señalados en el MCC. Sin embargo, la escuela se ha abandonado al desarrollo de formas de trabajo rutinarias, lo cual dificulta la formación de una habilidad o construcción de un conocimiento, y por ende el desarrollo de una competencia (Díaz-Barriga, 2006). A esta situación debemos agregar que el Enfoque en Competencias carece de elementos didácticos metodológicos que guíen sus propuestas educativas (Andrade, 2008).

Por su parte, bajo el seno de la Teoría Socioepistemológica se ha venido desarrollando la línea de investigación denominada *Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar),* la cual estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio (Cantoral, 2004). De este modo, nuestro trabajo se centra en analizar cómo el *Pylvar*, en específico el estudio de la variación, puede constituir un eje rector que guíe el diseño de situaciones de aprendizaje, las cuales promuevan el desarrollo de las competencias descritas en el MCC.

Marco de referencia y metodología

La línea de investigación *Pylvar* pone énfasis en comprender los mecanismos de construcción del conocimiento matemático relacionado con el pensamiento predictivo; en encontrar marcos de referencia que resignifiquen tales conocimientos, y comprender el papel que juegan los ambientes socioculturales en ello (Cantoral y Farfán 2003). Para lograr tal construcción y significación, el

Pylvar parte de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes sobre el cambio y la variación, y las hace evolucionar a través de situaciones donde el estudio del cambio es el eje principal. Donde el enfrentamiento con la situación exige del uso y desarrollo de *estrategias variacionales* (Aparicio, 2003). La predicción, la comparación, la aproximación y la estimación son algunos ejemplos de tales estrategias.

La Teoría Socioepistemológica postula que existe una filiación entre el conocimiento matemático y las prácticas humanas (Cantoral, 2004). De este modo, le interesa entender, explicar y modelar el papel de las *prácticas sociales* en los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático. El constructo de *práctica social* hace referencia a aquello que provoca que un individuo o grupo realicen eso que hacen (Covían, 2005; citada en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Es importante aclarar que entenderemos por *situación de aprendizaje* a aquella situación problemática que pone al estudiante ante un ambiente favorable para el desarrollo de procesos de construcción de significados para una noción, proceso, procedimiento, concepto, etc. (Cabrera, 2009).

De este modo, realizamos un estudio teórico, en el cual presentamos un análisis descriptivo-comparativo mediante el análisis de documentos. Nos interesó establecer una posible equiparación entre los resultados educativos que propone el Enfoque en Competencias y los resultados obtenidos en trabajos desarrollados bajo el *Pylvar*. Para ello nos centramos en un aspecto: construcción de conocimientos (elemento inherente a una competencia). Para realizar esta comparación, en lo que respecta a las competencias, nos enfocamos principalmente en las ideas establecidas por Philippe Perrenoud (2002). Esto debido a la discusión que el autor realiza sobre la aplicación del enfoque en el aula. Por otra parte, cabe aclarar que al tomar a la RIEMS como ambiente de estudio, retomamos la división en bloques disciplinares que ella realiza: matemáticas, ciencias experimentales, ciencias sociales y comunicación. Centrándonos aquí en las *competencias matemáticas*. En lo que respecta al *Pylvar*, los documentos analizados se establecieron considerando los siguientes puntos: presentar el diseño de una secuencia de aprendizaje (estudio del cambio y la variación); considerar al constructo de práctica social como eje de la actividad, y una adecuada discusión respecto del trabajo de los estudiantes y respecto al uso de las estrategias variacionales al enfrentar el problema. Sin embargo, esta forma de elección

de los trabajos sobre el *Pylvar* presenta también algunas limitaciones. Por ejemplo, ellos poseen problemáticas de investigación y objetivos diferentes al nuestro, por lo cual sólo presentan y discuten, según sus objetivos, pequeñas partes de las estrategias o acciones realizadas por los estudiantes para enfrentar los diseños desarrollados en cada trabajo. Esto nos impide observar la evolución de las mismas, y nos lleva a necesidad de complementar la información recabada, con las conclusiones y discusiones que el autor realiza.

Resultados y discusión

El desarrollo de competencias en el aula se produce al enfrentar al estudiante con una variada diversidad de *problemas complejos*. Estos *problemas* se desarrollan a partir de las prácticas propias de los *contextos particulares* en los cuales se requiere desarrollar las competencias (Perrenoud, 2002). Esto permite generar situaciones donde ellas se desarrollan al ser elementos necesarios y pertinentes para enfrentar el problema. Se busca generan condiciones iguales a aquellas que se presentarán fuera de la escuela, posibilitando la transferencia y el aprendizaje de aquello que se requerirá al enfrentarlas. A continuación presentamos algunos ejemplos propuestos para la adquisición de capacidades matemáticas.

Una clase de un colegio que quiere alquilar un autocar para hacer una excursión se pone en contacto con tres empresas de transporte para obtener información sobre los precios.

- *La empresa A cobra una tarifa inicial de 375 zeds más un plus de 0.5 zeds por kilómetro recorrido.*
- *La empresa B cobra una tarifa inicial de 250 zeds más un plus de 0.75 zeds por kilómetro recorrido.*
- *La empresa C cobra una tarifa fija de 350 zeds hasta los 200 kilómetros y 1.02 zeds por cada kilometro que sobre pase los 200.*

¿Qué empresa deberá elegir la clase si el recorrido total de la excursión se encuentra entre los 400 y los 600 kilómetros?

Cuadro 1. Problema propuesto por PISA (2006), para la evaluación de la competencia matemática

En PISA (2006) se señala que los problemas deben ser cercanos a la realidad del estudiante, que puedan ser vividos o susceptibles de ser vividos por él (ver cuadro 1). En lo que respecta a la propuesta del Bachillerato Tecnológico (COSDAC, 2008), la cual es desarrollada bajo los principios de la RIEMS, las situaciones se elaboran a partir de vivencias de los profesores, es decir, de aquello

que han observado que tiene resultados "positivos", lo cual tiene un gran mérito e importancia como parte de un proceso gradual de cambio, pero, que a la luz de lo que propone la RIEMS, se presenta como una simulación de la adopción del enfoque en competencia. Por ejemplo, la contextualización del problema se presenta a partir del trabajo con datos obtenidos en encuesta y censos, pero el trabajo con ellos sigue realizándose desde una postura abstracta, al presentarse a través de cálculos que pueden no tener sentido para el estudiante, pero que son necesarios para comprender el concepto bajo estudio (ver cuadro 2).

En lo que respecta a los diseños desarrollados bajo el *Pylvar*, presentamos en el cuadro 3 una de las actividades del diseño didáctico que presenta Aparicio (2003) en su trabajo de tesis. Esta actividad elaborada, a su vez, bajo las ideas de la Teoría Socioepistemológica, nos muestra como el empleo de las *estrategias variacional*es ante situaciones donde se encuentra involucrada la variación, y buscando la *predicción* de los fenómenos de cambio involucrados en ellas, permite a los estudiantes significar los conocimientos que ponen en juego. Pero también, les proporciona caminos de acción que les permite enfrentar situaciones donde el estudio del cambio juega un papel destacado.

Se les solicita (a los estudiantes) revisar los porcentajes de defunciones de gente de 30 a 64 años de edad, por sexo y principales causas (1990-2004, información estadística del INEGI. Ver la carpeta electrónica sobre la bibliografía); llenar la siguiente tabla.

Porcentajes de defunciones por diabetes mellitus, en sujetos de 30 a 64 años, por sexo.		
Año	***D. Hombres***	***D. Mujeres***
1990 *1991* *…* *2004*		

1. Analiza la diferencias entre 1993 y 2004.

…..

c. Determina la razón de cambio promedio (derivada) de porcentajes de defunciones por diabetes, con respecto a la diferencia de tiempo; es decir:

$$\frac{\Delta Pdd}{\Delta t} \text{ entonces } \frac{\Delta Pdd}{\Delta t} = \frac{D_2 - D_1}{t_2 - t_1}$$

…

3. Determina la razón de cambio promedio aproximada, con respecto al año 2000. Para ello, resta los dos resultados de un año antes y uno después, del inciso anterior, y divídelos entre 2, o sustituye de esta manera:

$$\Delta Pdd \text{ (año 2000)} \approx \left[\frac{\Delta Pdd}{\Delta t}(\text{año posterior}) - \frac{\Delta Pdd}{\Delta t}(\text{año anterior})\right]$$

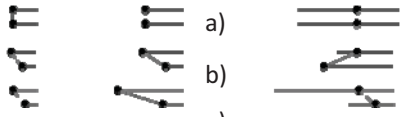
Cuadro 2. Fragmento de la secuencia de actividades propuesta en la fase de desarrollo de la situación didáctica propuesta dentro del bachillerato tecnológico para la generación de competencias (COSDAC, 2008)

Esto favorece ventajas didácticas para el estudio de las nociones matemáticas. Una de ellas es la transversalidad. Esto al desarrollarse bajo prácticas normativas propias de las prácticas sociales. Otra es la integración de los conocimientos y habilidades desarrolladas en una unidad herramental que los capacita para enfrentar nuevas situaciones. Pues las estrategias para enfrentarlas y los conocimientos se desarrollan a la par.

Como argumentamos en Cabrera (2009), el estudio del cambio y la evolución de los fenómenos tanto naturales como de algún otro tipo, es una constante en diferentes disciplinas; y ante la imposibilidad de modificar el tiempo a nuestra voluntad, de modificar algunas variables que influyen en el fenómeno o reproducir al fenómeno mismo, la necesidad de *predecir* su comportamiento se vuelve una necesidad imperante. Esta burda descripción es posible observarla

en diversos contextos. Lo cual nos muestra el potencial de desarrollar un pensamiento que nos permita analizar el cambio y la variación.

Actividad 2. En los tres hechos que se ven en la pantalla, uno está asociado a la función $f(x) = x^2$ en un cierto intervalo. ¿Cuál es? ¿Por qué?



Equipo 1

A_R: Podría ser la primera, bueno no la primera no

A_P: La vez pasada tomamos en cuenta que era…/ (hace referencia a que la primera tiene el mismo comportamiento que la gráfica de la actividad 1)

A_R: Me confundí por la luz,…/…, Vamos a ver el movimiento, desde cero crece, pero ya después como a ¾ se regresa, entonces esa no es x^2, igual la segunda, en cierto punto se detiene y luego se llega hasta ahí, pudiera ser la tercera en dado caso, pues es la única en que y no se vuelve negativa, bueno no se vuelve antes de $f(x)$. (Menciona que no tiene puntos de referencia para discutir sobre la negatividad)

…

Investigador: Si consideran que la función está definida de menos dos a dos.

A_S: Debería ser la de en medio. Porque vemos en un lapso (señala la tercera) cuando viene aquí como se detiene y y, x sigue aumentando y y se detiene y luego sigue un intervalo, entonces la x^2 nunca se detiene y en dos valores iguales nunca deben ser iguales

A_R: ¡ah! Uno y menos uno!!!

….

A_S: Cuando es menos dos aquí, es dos allá y / se supone que aquí debería ser lo mismo, veamos la segunda va a llegar a -2 y en 2, acá también va a ser cuatro y no sabría, no hay marco de referencia.

A_R: Entonces si es la segunda, porque en los dos extremos debe ser el mismo punto.

…

A_S y A_R: Veamos la tercera, / No, porque la tercera sólo va en un sentido

Cuadro 3. Actividad presentada por Aparicio (2003) y fragmento de la discusión de los estudiantes al enfrentarla

Lo discutido hasta ahora, apoya nuestra hipótesis de partida del trabajo, pudiendo afirmar que las Situaciones de Aprendizaje, desarrolladas bajo el *Pylvar*, se presentan como una alternativa adecuada para el desarrollo de competencias, como las señaladas en la RIEMS, al menos para aquellas relacionadas con el estudio del cambio.

Conclusiones

La discusión anterior nos ha permitido observar que el desarrollo de una competencia en el salón de clases, puede realizarse rebasando la idea de poner al estudiante ante situaciones similares al ambiente real que enfrentará en su vida presente o futura. Esta idea puede presentarse como limitada, ya que el estudiante se comporta de manera diferente dentro del salón de clases que fuera de él. En el primer ambiente su actuación se ve normada por los efectos del Contrato Didáctico. Por tanto, se requiere el desarrollo de Situaciones de Aprendizaje diseñadas ex profeso para el salón de clases (que contemplen romper con el Contrato Didáctico), las cuales, como podemos ver en el trabajo de Aparicio (2003), pueden no estar contextualizadas en una situación real. Ellas pueden desarrollarse guiadas por aquellas *prácticas* que norman la construcción de los conocimientos ligados a las competencias que se espera que los estudiantes adquieran. Estas prácticas, además, norman el desarrollo de estrategias y acciones que serán las que, desde nuestro punto de vista, constituirán las competencias. Son, pues, estas estrategias y acciones las que se transfieren de un contexto a otro, y las que exigen la movilización y la utilización de los conocimientos, al verse como herramientas que permiten el progreso de la estrategia. Durante el trabajo, pudimos observar que las *estrategias variacionales* constituyen algunas de tales estrategias. Su uso articula a ciertos conocimientos y procedimientos relacionados con el cambio y la variación. Articulación que nos permite señalar al *Pylvar* como una competencia transversal importante a incluir en el MCC de la RIEMS.

Referencias bibliográficas

Andrade, A. (2008). El enfoque por competencias en educación. *Gaceta Ide@s CONCYTEG*, *39*, 53-64. Recuperado de http://octi.guanajuato.gob.mx/gaceta/

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contexto de geometría dinámica.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México, D.F. México.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Estudio en el marco de la reforma de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México, D.F. México.

Cantoral R y Farfán R (2003). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En Cantoral et al, Trillas: ITESM, Universidad Virtual. *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, D.F., México: Trillas.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 1-9

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, 83-102.

Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico (COSDAC) de la SEP (2008). *Programa de Estudios. Matemáticas. Segunda Versión.* Recuperado del sitio Web de la COSDAC: http://cosdac.sems.gob.mx/programas.php

Díaz-Barriga, A. (2006). El enfoque en competencias en educación ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles Educativos, 28* (111), 7-36.

Secretaria de Educación Pública (SEP) (2008). *Reforma integral de la Educación media superior: La creación de un sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (Documento de trabajo)*. Recuperado del sitio del Sitio Web de la Subsecretaria de Educación Media Superior: http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/reforma_integral_de

_la_educacion_media_superior.pdf

EL USO DE LAS GRÁFICAS EN EL BACHILLERATO. UNA SEGMENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Claudia Cen Che, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
ccen@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *La Socioepistemología a través de diversos resultados de investigación, señala la conveniencia de hacer estudios del uso del conocimiento matemático y su desarrollo para crear un marco que ofrezca las prácticas de referencia en donde se resignifique la matemática. Bajo esa premisa estudiamos los usos de la gráfica en el bachillerato, con el fin de construir un marco de referencia que dé evidencia de los funcionamientos y formas de las gráficas y en consecuencia una resignificación del conocimiento. Lo anterior abre una nueva brecha para tratar a la gráfica, puesto que no la miramos como la representación de algún concepto matemático. Por el contrario, la graficación es abordada como la argumentación que genera conocimiento. En ese sentido, afirmamos que tratamos con una segmentación del conocimiento, puesto que hay un cambio de enfoque que nos conduce a teorizar sobre el uso del conocimiento y como consecuencia se genera un subuniverso de significados.*
Palabras clave: Gráficas, segmentación, uso, funcionamiento, forma

La educación media superior mexicana

La estructura social de la educación en México está formada por los niveles de educación básica, media superior y superior. La educación media superior (EMS), en la cual se ubica nuestra investigación, está conformado por jóvenes de entre 15 y 18 años de edad aproximadamente. En este nivel existen tres modalidades: la educación profesional técnica, el bachillerato general o propedéutico y el bachillerato bivalente.

La educación profesional técnica capacita al estudiante para el ejercicio de una actividad productiva. En tanto que el bachillerato bivalente combina una formación profesional en el ámbito técnico con el bachillerato y prepara al estudiante para sus estudios superiores preferentemente de tipo tecnológico. El bachillerato general promueve el estudio de las diferentes disciplinas humanísticas, científicas y tecnológicas que lo ayuden a identificar su campo de estudio profesional (Zorrilla, 2008).

Puesto que cada modalidad de la EMS tiene su propia identidad, eso conduce a la creación de sus propios planes y programas de estudio. Sin embargo, de forma global se considera suficiente en

los programas que el estudiante domine contenidos de temas con base a la "memorización de sencillas cápsulas sintéticas, clasificaciones, mapas mentales, definiciones, mecanización de operaciones o fórmulas" (Zorrilla, 2008, p. 33).

La investigación que presentamos se ubica en el bachillerato bivalente del Instituto Politécnico Nacional (IPN), particularmente en el área de Ingeniería y Ciencias Físico Matemáticas. Su programa de estudios se explicita que la resolución de problemas es lo que permite generar e integrar conocimiento (IPN, 1995 y 1996), además de distinguir al docente como un sujeto facilitador del aprendizaje. Entre sus objetivos se destaca que los estudiantes desarrollaran su capacidad para comunicar su pensamiento y gradualmente se acostumbrarán a los diversos medios de expresión matemática: lenguajes natural, simbólico y gráfico, así como al uso de tablas y diagramas (IPN, 1995 y 1996).

La problemática

La problemática de investigación que atendemos es aquella centrada en los objetos matemáticos como la manera de referirse al conocimiento matemático (Cordero, 2001). Lo anterior se refleja en los programas de estudio, pues siguen una secuenciación lógica de conceptos matemáticos, donde la atención está en el objeto matemático. Esto se debe a que la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2003).

Por ejemplo, en los programas de estudio de matemáticas que analizamos, las gráficas están asociadas a la representación del concepto de función. Con la gráfica, se señala el dominio, el rango de funciones y se ilustra la dependencia entre variables, por tanto también se establece la contraparte, cuándo la gráfica no es la representación de una función. Además con la gráfica se mira el comportamiento que tiene la función en intervalos.

También con ayuda de la gráfica se ilustra o comprueba la solución de sistemas de ecuaciones lineales y lineales y cuadráticas. En otro momento, la gráfica es utilizada para representar el área bajo la curva y el volumen de un sólido de revolución, sin embargo, la atención está puesta en la función a integrar.

Lo anterior, sugiere que el estatus epistemológico de la gráfica, curricularmente, es el instrumento que permite desarrollar el concepto de función y establecer sus propiedades, según las secuencias semestrales que sugieren los programas de estudios.

Pero, en dónde quedan los sentidos de los participantes al momento de resolver alguna situación, si lo que hacen es seguir los procedimientos establecidos.

Ante tal cuestionamiento, nuestra postura no es realizar un estudio del conocimiento matemático sino, comprender la función del conocimiento matemático. Para ello, se deben identificar o construir marcos o prácticas de referencia donde se manifieste el uso del conocimiento matemático en situaciones específicas (Cordero, Cen y Suárez, en prensa). Porque ahí aparecerán elementos que corresponden a la utilidad del participante.

Marco teórico

La teoría socioepistemológia (SE) no mira los conceptos y sus diferentes estructuraciones en forma aislada, sino trata con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos, es decir intenta crear un modelo de conocimiento que dé cuenta de la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales: el reto es formular epistemologías de las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003). Ante tal situación se deben identificar o construir aquellos marcos de referencia donde se manifieste el uso del conocimiento matemático.

Para la construcción de los marcos de referencia, miramos las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento, que plantea la SE. En forma sistémica miramos las componentes: social, epistemológica, cognitiva y didáctica.

En la dimensión social consideramos a la graficación como una práctica institucional, puesto que ha permanecido en el discurso matemático escolar y se ha ido transformando para establecerse tal y como lo conocemos en la actualidad. La componente epistemológica identifica los usos de la gráfica ubicándolos en escenarios particulares, sin mirar los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos (la gráfica como la representación del concepto de función). La dimensión cognitiva asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos que se han desarrollado al seno de las prácticas institucionales. Por último, la

componente didáctica se ocupa de la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar examinando sus implicaciones didácticas y las resignificaciones del conocimiento matemático (Cordero, Cen y Suárez, en prensa).

La investigación

Bajo la visión SE desarrollamos la teorización *uso de la gráfica* que nos orienta a una segmentación del conocimiento matemático (Berger y Luckman, 2006). Por segmentación nos referimos a una nueva concepción, en este caso de las gráficas, que están presentes en la matemática. El tratar con los usos de la gráfica nos permitirá identificar o construir los marcos de referencia en donde se manifiesta el uso del conocimiento matemático con competencia funcional.

En ese sentido, no estudiamos a las gráficas de las funciones como un desarrollo representacional del concepto de función, sino el desarrollo del uso de las gráficas de las funciones en las prácticas institucionales, en donde ésta normaría el sentido y la funcionalidad a la matemática (Cordero, Cen y Suárez, en prensa).

Investigar sobre los usos de la gráfica, conlleva a la creación de un subuniverso de significados, lo que permite su consolidación y objetivación. El subuniverso que estamos construyendo a la luz de nuestra investigación es categorizar el uso de las gráficas a través de su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica que se presente, a la vez nos permitirá formular un marco de referencia en donde se resignifique la gráfica de la función, de ahí la importancia de hacer estudios del uso del conocimiento matemático que incidan en una matemática funcional en la escuela (Cordero, 2008; Suárez, 2008; Campos 2003, Domínguez, 2003 y Cen, 2006).

El uso de las gráficas

Para formular el uso de las gráficas, realizamos una revisión de los libros de texto sugeridos en los programas de estudio. Pues consideramos que son el medio de difusión de la producción matemática y además es el marco de referencia que generan el discurso matemático que se manifiesta en la práctica del profesor y los estudiantes (Cordero y Flores, 2007).

Resultado de la revisión, fue encontrar el universo de gráficas con que los estudiantes tratan a lo largo de sus seis semestres de bachillerato, las cuales son referidas para representar algún concepto matemático, como hemos mencionado anteriormente, o alguna mecanización de operaciones. Esto nos muestra que el conocimiento así como es tratado en el bachillerato es utilitario, pero no funcional (Cordero, 2008).

Con base a los libros de texto y el análisis del programa de estudios, identificamos los momentos en que aparece la gráfica. De ahí, que examinamos las relaciones entre esos momentos de forma tal que nos orientaron a establecer las distintas situaciones en donde se utiliza la gráfica.

Ella está asociada a situaciones de acción u operaciones algebraicas. Estos son: conocer la forma gráfica de una función, su interpretación geométrica, su asociación curva-expresión algebraica para comprender sus transformaciones, análisis global de la curva, cálculo de área y volumen bajo la curva. Una situación particular en donde no interviene la función es la recopilación de datos o bien la interpretación de éstos (Cen, 2006). Por la naturaleza de cada situación, los usos que ahí aparecen tienen funciones específicas que conllevan formas específicas.

El uso tiene inherente el binomio funcionamiento y forma. El uso de la gráfica, lo ubicamos como el papel que desempeña en la situación y se manifiesta por sus funcionamientos y formas. Así el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación y la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones (Cordero y Flores, 2007).

Los funcionamientos y formas de las gráficas debaten entre sí, su relación es dialéctica, dando origen a un uso de gráfica. Los funcionamientos y formas se van reorganizando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual quiere decir que la gráfica se resignifica. La resignificación es interpretada como la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, la cual se manifiesta en el uso del conocimiento en una situación específica (Cordero, 2005 y 2008).

Los usos de las gráficas que identificamos en el bachillerato con base a la situación que se presente son:

- Uso distribución de puntos. Se presenta cuando la situación es conocer la forma gráfica de una función. Se manifiesta con formas tales como tablas con valores previamente establecidos,

gráficas y ecuaciones con funcionamientos tales como la ubicación de puntos, desplazamiento en el plano cartesiano, variación de los puntos para el trazado de curvas continuas o no (Cen, 2006).

- Uso comportamiento geométrico (Campos, 2003; Cordero y Flores, 2007). Se presenta cuando la situación es la interpretación geométrica de una función, asociación curva-expresión algebraica, con la finalidad de comprender cómo se dan las transformaciones de las funciones. Este uso se manifiesta a través de funcionamientos tales como la obtención de nuevas gráficas de funciones a partir de una ya conocida con formas tales como la traslación horizontal o vertical, estiramiento o reflexión de la gráfica.

- Uso análisis de la curva. Se presenta cuando la situación está dirigida hacia la curva, en específico a la variación de esta, es decir, se hace un análisis global de la curva. Este uso se manifiesta con funcionamientos tales como el análisis del comportamiento, creciente o decreciente, en los intervalos de la función para ubicar los puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión si los hay y la concavidad de la curva en ciertos intervalos, las formas en que se presenta lo anterior es a través de una tabla de variación y los criterios de la primera y segunda derivada (Cen, 2006).

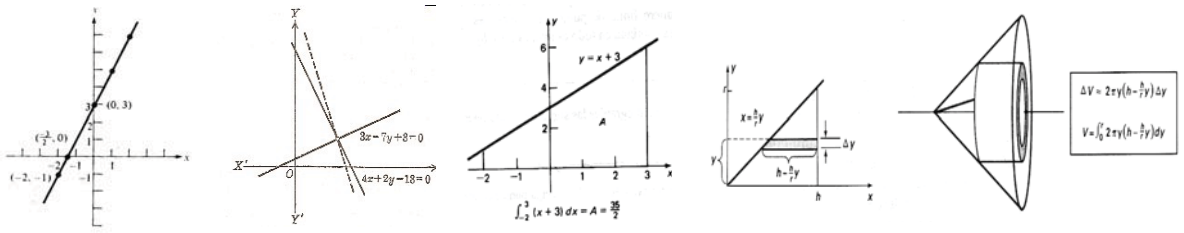
- Uso cálculo de áreas y volúmenes. Se presenta cuando la situación es hallar el área o volumen de una figura limitada por funciones. En esta situación se percibe que para los cálculos anteriores el foco de atención no está en la gráfica misma sino en la unidad de análisis que describen la o las gráficas para establecer la función a integrar y hacer el cálculo respectivo. El funcionamiento de la gráfica es para definir la superficie del área o bien la superficie a rotar para el cálculo del área y el volumen, la forma de tal funcionamiento es a través de la integración (Cen, 2006).

- El uso análisis de información (Cordero y Fores, 2007). Se presenta cuando la situación que se presenta es la recopilación de datos o bien la interpretación de éstos. Este uso se manifiesta con formas tales como tablas, gráficas de barras, poligonales, histogramas y la curva normal. Los funcionamientos son para el análisis de información.

Los usos de la gráfica se desarrollan en el transcurso del bachillerato. Sin embargo, éstos no son vistos como tales en el discurso matemático escolar, ya que la atención está sobre los objetos matemáticos. Los usos presentados evolucionan, ya que se forman construcciones, se hacen

distinciones entre ellas, se ponen en juego clases de actividades y usos del conocimiento, donde no solo se da un lenguaje de herramientas sino que se desarrollan (Cordero, 2008).

Como ejemplo, para señalar el desarrollo de usos, planteamos el escenario de resignificación de la recta.



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3 Gráfica 4

Figura 1. El escenario de la recta (Cordero, Cen y Suárez, en prensa)

En el discurso matemático escolar trata con la recta, en la tercera unidad del primer semestre, en donde el uso de la gráfica es la distribución de puntos (Gráfica 1; AIM-NMS-IPN, 2004), el funcionamiento es la ubicación de puntos para el trazado de la recta a través de la forma tabular, una vez que se reconoce cómo es la ecuación y la forma de la recta, este uso evoluciona para dar lugar al comportamiento geométrico (Gráfica 2; Swokowski, 1998) cuyo funcionamiento es la asociación gráfica-expresión algebraica, en donde las formas en que se presenta es a través de la transformación de funciones (traslación horizontal y vertical, estiramientos y reflexión) en donde el estudiante de alguna manera puede inferir la posición de la recta, posteriormente la recta es usada para el cálculo del área y del volumen (Gráfica 3; Lehmann, 1998 y Gráfica 4; Larson, 1982), el funcionamiento de la gráfica radica en definir el área que genera la superficie del área a calcular las formas de tales funcionamientos son a través de la integración. El desarrollo del uso consiste en distribuir puntos, después establecer comportamientos geométricos y con ello, finalmente, calcular superficies.

Conclusiones

El escenario planteado sobre el uso de la gráfica es un ejemplo de cómo las gráficas como herramienta evolucionan para ser una mejor herramienta. Esto nos lleva a formular la hipótesis que las gráficas como herramientas deberán evolucionar a la par de las formas de hacer de los participantes, el profesor y el estudiante, ya que responde a la funcionalidad del conocimiento matemático. Para probar nuestra hipótesis, miraremos otros dominios científicos para hallar evidencia sobre los usos de las gráficas que tienen los participantes y destacar las similitudes y diferencias entre esos dominios. Lo anterior nos permitirá crear un marco de referencia sobre los usos de las gráficas que permitirá resignificar el conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

AIM-NMS-IPN, (2004). *Álgebra. Libro para el estudiante*. México, D. F: Autor.

Berger, P. y Luckman, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. 20ª reimpresión, Buenos Aires: Amorrortu.

Campos, C. (2003). *La argumentación en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: Una mirada emergente. (CD-ROM) *XI Conferencia Interamericana de Educa ão Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas*. Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1)*, 27-40.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.),*Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 477-482.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). D. F., México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10 (1)*, 7-38.

Cordero, F., Cen. C. y Suárez, L. (en prensa). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

IPN. (1995). *Programas de Estudio. Nivel Medio Superior: Álgebra. Geometría y Trigonometría. Geometría Analítica.* México, D.F: Autor.

IPN. (1996). *Programas de Estudio. Nivel Medio Superior: Cálculo Diferencial. Cálculo Integral. Probabilidad y Estadística.* México, D.F: Autor.

Larson, R. (1982). *Cálculo y Geometría Analítica* (2a. edición). México: McGraw-Hill.

Lehmann, Ch. (1998). *Geometría Analítica*. México: Limusa

Suarez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Swokowsky, E. (1998). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: International Thomson.

Zorrilla, J. (2008). *El bachillerato mexicano: un sistema académicamente precario. Causas y consecuencias*. México: UNAM.

EL INFINITO MATEMÁTICO: LA ESCUELA, CANTOR Y BOLZANO

Patricia Lestón, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires, Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.CICATA–IPN México
patricialeston@yahoo.com.ar, crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El infinito matemático fue caracterizado y formalizado en la obra de Bolzano y Cantor en el siglo XIX. En su época esas ideas provocaron negación e incluso rechazo en parte de la comunidad matemática. En este trabajo, se presenta el análisis de parte de los trabajos de Cantor y Bolzano, buscando obtener algunas ideas que permitan organizar un instrumento de indagación para comprender la manera en que los estudiantes de los últimos años de la carrera de profesorado de matemática entienden las caracterizaciones del infinito dadas por Bolzano y Cantor y su naturaleza, y la presencia y problemática del infinito matemático en el aula*
Palabras clave: Infinito matemático, construcción sociocultural

Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, centrada en la construcción del infinito matemático. En trabajos previos se ha indagado sobre la presencia del infinito en el aula y su construcción fuera de ella (Lestón, 2008, Lestón y Crespo Crespo, 2009).

El infinito no académico de carácter intuitivo, es construido por los estudiantes fuera de escenarios escolares, asimilado a lo que no termina y lo que no se puede contar. Entra en el aula sin que haya conciencia de que se trata de un infinito de distinta naturaleza, y genera dificultades en la construcción del infinito matemático.

Nociones como límite, derivada, variación, función y muchas otras son vistas en la actualidad como imprescindibles dentro del discurso matemático escolar. Se apoyan sobre otros elementos, que se discuten y presentan a lo largo de años previos de educación escolarizada. Sin embargo, el infinito, sobre el que se apoyan muchos de estos conceptos, no forma parte de la matemática escolar, aún cuando aparece en distintos momentos del discurso matemático escolar. Este concepto es, aunque utilizado, olvidado como elemento a ser construido escolarmente. Podría decirse que es uno de los elementos a los que Cantoral (1995) llama *evidencias familiares*.

> *El discurso que marca el inicio de una enseñanza necesita inevitablemente de los puntos de partida no explícitos, que serán tomados como evidencias familiares. Dicho discurso al que hemos llamado Discurso Matemático Escolar señala el principio de una enseñanza. (p. 9)*

El problema es entonces que, para el infinito, lo familiar asociado a esta noción no guarda la relación esperada con lo que la matemática requiere. En esta investigación se toma como hipótesis la existencia del infinito como elemento sociocultural, y su presencia como *evidencia familiar* que sirve de punto de partida para construir otras nociones, mientas que la escuela asume esa construcción no escolar como suficiente y compatible con lo que necesita. Las características del infinito intuitivo que se presentaron en Lestón (2008), en general, distan mucho de lo que es el infinito matemático, más cercanas a lo filosófico o religioso que a lo matemático.

> *Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho", "muy grande". Es lo que excede a todo lo que es cuantificable. Es además una expresión de extensión del amor, del deseo, de la fe. Un amor infinito es un amor absoluto. Tan absoluto como es para un religioso el poder de Dios. (Lestón, 2008, p.114)*

Sin embargo, esa distancia no es contemplada por la escuela, lo que creemos provoca que aparezcan conflictos en las aulas cuando los docentes hablan o utilizan al infinito: hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan. Se lo utiliza en la vida cotidiana para referirse a distintas cuestiones, existiendo fuera de la escuela un infinito, que no corresponde de manera completa al infinito matemático que se utiliza en el aula. La escuela utiliza el concepto de infinito pero no lo define ni caracteriza más allá de un "no tiene fin". Se produce entonces un choque entre esos dos infinitos: el construido socialmente y desconocido por la escuela (que además no es único), y el matemático, que se utiliza en la escuela, pero es desconocido por los alumnos. Entendemos entonces que es necesario centrar la discusión en el infinito matemático para comenzar a modificar el discurso matemático escolar alrededor de ese concepto.

La socioepistemología y la construcción social del conocimiento

La escuela y el discurso matemático escolar intentan responder a lo que una comunidad requiere de ellos. Sin embargo, la deficiente capacidad de actualización de esta institución hace que muchas veces se pierda de vista el sentido de la misma. Y no sólo es el sentido lo que se pierde sino la conexión con la comunidad. La escuela insiste en mantenerse ajena a lo que ocurre en el exterior, intentando defenderse de la invasión de la cultura popular, sin comprender que esa cultura no sólo es valiosa, sino que es parte de cada uno de los miembros de la comunidad y como consecuencia, ingresa en cada uno de ellos a los salones de clase (Lestón, 2008).

La matemática educativa como disciplina ha comenzado a reconocer lo que ocurre con este tipo de nociones y formas de accionar, y está intentando dar respuesta a estas cuestiones (Castañeda, Buendía, Crespo Crespo, Lezama, Molina, Montiel, Martínez, Rosas y Sánchez, 2008). Se reconoce que el saber matemático es producto de diversos escenarios: académicos y no académicos. El infinito al que llamamos intuitivo es una construcción cultural, producto de un escenario sociocultural no académico, que, aunque relacionado con una noción matemática de inconmensurable o, simplemente, sin fin; es distinto al infinito matemático, producto de un escenario académico. Creemos que es necesario un rediseño del discurso matemático escolar que entienda qué ocurre con el infinito en el aula y que se permita discutir lo que llega a ella desde el exterior. Es necesario entonces comenzar a tomar conciencia respecto a estos obstáculos o conflictos, incorporando elementos de discusión a la clase de matemática.

> *La tarea de fortalecer el discurso matemático escolar no se reduce a una tarea de ampliación de los conceptos, debido a que los resultados de carácter didáctico y epistemológico aportan elementos para una tarea de reorganización y/o reconstrucción del discurso. [...] Para los matemáticos educativos, esta disciplina puede proveer de explicaciones detalladas sobre los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones y contextos pasados, los estancamientos, los momentos donde se agregan significados - con lo que se amplían los campos de estudio - o los puntos en la historia en que se descartan ideas asociadas a los conceptos en cuestión. (Castañeda, 2006, pp. 257-258).*

La sociedad ha cambiado desde que aparecieron las primeras escuelas, sin embargo la escuela actual mantiene en su discurso muchas de sus posturas originales. Esto también ocurre con la

matemática escolar como parte de ese discurso. “la matemática escolar debe reconocer su papel dentro de un proyecto social llamado educación y por lo tanto debe evolucionar con la sociedad misma” (Montiel, Castañeda y Lezama, 2007, p.585).

La forma de lograr que lo que se construye en la escuela sea realmente significativo y aplicable es marcando las semejanzas y diferencias que hay entre esa construcción y lo que se intuye: es necesario evidenciar la relación entre el infinito intuitivo y el matemático, eliminar las dudas y poner al infinito matemático en un lugar en que se lo pueda estudiar, discutir, analizar, comprender; para entonces así poder incorporarlo como parte de lo que se conoce.

El infinito según Cantor y Bolzano

Interesa saber cómo se presentó el infinito matemático en sus primeros momentos de fundamentación y enfrentarlo a futuros docentes, que tendrán la tarea de comenzar a modificar la manera en que este concepto se aborda en la escuela, con esas obras. Consideramos entonces, inicialmente, dos fragmentos de las obras de Cantor y Bolzano.

1. El Capítulo 1 de *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* de Georg Cantor (2006) (pp. 85-88)
2. El Capítulo 12 de *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano (1991) (pp. 46-50)

A continuación presentamos los principales conceptos que se discuten en esos fragmentos, que será lo que nos permitirá luego organizar una base de encuesta con la cual comenzaremos la indagación con los estudiantes del Profesorado.

Capítulo 1 de Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta de Georg Cantor (2006) (pp. 85-88)

Este fragmento inicia con una justificación por parte del autor del por qué es necesario para él adentrarse en el trabajo con el infinito, y en particular con la construcción de los números transfinitos; en la búsqueda de continuar con el desarrollo de la teoría de conjuntos en la que estaba trabajando.

> *La dependencia en que me veo respecto a esta extensión del concepto de un número es tan grande, que sin ésta última apenas me sería posible dar sin violencia el menor paso adelante en la teoría de conjuntos; valga esta circunstancia como justificación, o si es necesario como excusa, por la introducción de ideas aparentemente extrañas en mis consideraciones (Cantor, 2006, p. 85)*

Este trabajo provocó a Cantor un enfrentamiento con muchos de sus colegas, que desacreditaron tanto sus producciones como su persona. Según este fragmento, estos enfrentamientos no fueron inesperados, aunque tal vez no haya sabido al escribir estas líneas la magnitud del ataque que le esperaba. La intuición es reconocida como componente de las ideas hasta ese momento aceptadas y es conciente de que lo está a punto de introducir contradice esa intuición. Esas ideas contraintuitivas se siguen manifestando de la misma manera, y la intuición sigue manteniendo su status respecto a este concepto, no ya dentro de la comunidad matemática, pero sí a nivel sociocultural.

Se distingue inicialmente al *infinito impropio* como el infinito matemático que hasta ese momento había sido aceptado. Ese infinito tiene como característica "el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita" (Cantor, 2006, p. 85). Este infinito puede relacionarse con el infinito potencial de los griegos, que había llegado desde la antigüedad hasta el siglo XX, es algo finito variable.

Luego, a partir de trabajos del campo de la teoría de funciones, define un *infinito propio* que permite justificar un pensamiento que ya estaba siendo usado: la existencia de un punto en el campo que representa la variable compleja ubicado en el infinito, infinitamente distante pero determinado. Este tipo de infinito es para Cantor un *infinito determinado*.

En función de esa distinción entre los dos infinitos propio e impropio, Cantor introduce sus números transfinitos, haciéndolos surgir de la existencia de los puntos ubicados en el infinito, el infinito propio de Cantor. Este punto, que hasta ese momento era único, es la base para la fundamentación del conjunto de los números transfinitos, cada uno distinguible de los otros y con relaciones aritméticas regulares entre ellos y con los enteros finitos. A partir de esto, Cantor retoma la idea de potencia, que ya había trabajado y muestra cómo esas potencias definen una secuencia de números transfinitos.

> *Conforme a este concepto, a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, de modo que dos conjuntos tienen la misma potencia si se pueden coordinar uno con otro, elemento a elemento, biunívocamente (Cantor, 2006, p. 88)*

Hasta aquí, Cantor logra caracterizar al infinito no como el resultado de lo finito cambiando, sino como un elemento con entidad, con existencia justificada por el uso previo a su definición, por su coherencia con lo ya existente y aceptado en un cuerpo de conocimiento. Y si bien no encontramos aquí una definición de lo que es el infinito, podemos encontrar un sustento para su entidad como objeto de conocimiento.

El Capítulo 12 de Las paradojas del infinito de Bernard Bolzano (1991) (pp. 46-50)

Esta sección del trabajo de Bolzano presenta una discusión sobre las definiciones o explicaciones que se habían dado al infinito hasta ese momento dentro de la matemática y la filosofía. Al igual que en el caso anterior, no se presenta aquí una definición para el infinito, pero sí una caracterización que permite argumentar en contra de los problemas que este concepto ha presentado a lo largo de la historia. La primera definición que presenta es adjudicada a Cauchy y Grunert y es una idea bastante próxima a la que se puede encontrar en las aulas en la actualidad.

> *Algunos matemáticos […] han creído ofrecer una explicación del infinito al describir a éste como una cantidad variable; cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independientemente de la magnitud de ésta. El límite de ese crecimiento ilimitado sería una cantidad de magnitud infinita. (Bolzano, 1991, p. 47)*

Frente a esta descripción, el autor muestra una serie de inconsistencias que hacen que la definición no sea correcta matemáticamente. En primer lugar, existe la cuestión del uso del término *cantidad variable*, ya que según Bolzano esa *cantidad* no es una cantidad sino una noción de cantidad, la idea de una cantidad. Para comprender esa idea de cantidad, debe aceptarse que existe un conjunto infinito de cantidades que difieren en su magnitud, no pudiendo el infinito pensarse como una cantidad determinada. Además, el autor encuentra un problema al pensar en lo infinitamente pequeño: si el límite de un crecimiento ilimitado es lo infinitamente grande, entonces, el cero debería considerarse como el límite de un decrecimiento ilimitado, es decir, lo infinitamente pequeño, lo que resulta contradictorio.

La segunda definición que se presenta es la ofrecida por Spinoza y otros filósofos y matemáticos. Esta definición a su criterio, contraria a la anterior que caracterizaba como demasiado amplia, le resulta demasiado estrecha, además de incorrecta.

> *Según ellos, sólo es infinito aquello que no es ya susceptible de un incremento adicional o aquello a lo que ya no se puede añadir (adicionar) nada más (Bolzano, 1991, p. 47)*

La manera en que Bolzano explica la inconsistencia de esta definición es, una vez más, haciendo uso de un ejemplo, muy sencillo de seguir, y lo que es más importante, fácilmente aceptable. Toma como elemento para su ejemplo a una semirrecta, ya de longitud infinita, y a su extensión infinita para convertirla en una recta.

> *Sin embargo, algunos matemáticos ponen en duda la legitimidad de este procedimiento. Pero, ¿qué matemático que no rechace sin más todo lo que tenga que ver con el infinito no aceptará que la longitud de una recta acotada solamente en una dirección, pero que se extiende al infinito en la otra, es infinitamente grande y, no obstante, al mismo tiempo, que puede prolongarse y hacerse más grande extendiéndola en el sentido de la primera dirección? (Bolzano, 1991, p. 48)*

Frente a esta pregunta que hace, queda claro que lo infinito puede ser aún incrementado, aumentado en extensión, o agregando elementos a un conjunto que ya es infinito.

La tercera definición que se presenta en este capítulo se refiere al término al decir “que es infinito lo que no tiene un fin” (p. 48). Esta definición, según Bolzano, sigue siendo insatisfactoria. El fin que entiende el autor es un fin en el tiempo, por lo cual, lo que no es susceptible a ser ubicado temporalmente, como los entes matemáticos, no podrían caer en la clasificación de finito o infinito.

Por último considera el planteo de la psicología racional:

> *También en la psicología racional llamamos infinita a una capacidad cognoscitiva si existe un conjunto de verdades infinito (por ejemplo el que contiene a las que enuncian la serie infinita de los dígitos de la representación decimal de la cantidad $\sqrt{2}$), independientemente de que se alcance o no la omnisciencia (Bolzano, 1991, p. 49)*

No pueden conocerse los términos de esa serie, aún cuando pueda comprenderse el significado de los mismos y la capacidad de las personas de conocer sea limitada. Como última definición, Bolzano presenta la más generalizada según lo que escribe.

> *[...] lo infinitamente grande es aquello más grande que cualquier cantidad dada o asignada. Lo que aquí se requiere es, en primer lugar, una determinación precisa del pensamiento que las palabras 'asignada' o 'asignable' sugieren. ¿Significan únicamente que algo es posible, que puede tener realidad o que no es contradictorio? (Bolzano, 1991, p. 49)*

Esta distinción del término asignado es la que lo lleva a explicar las dificultades que acarrea esta definición. En el primer caso, de lo que es posible o real, toma en consideración lo que dice Fries, entendiendo al infinito como lo *no completable.* Sin embargo, se habla de infinito en relación a cosas que no poseen existencia, como las verdades absolutas. Si en cambio se considera asignable a lo que no resulta contradictorio, entonces surge para el autor otro problema que concluye en el absurdo.

> *Si, por otra parte, se entiende por asignable sencillamente a todo aquello que no resulta contradictorio, entonces en la definición misma del concepto se sugiere que el infinito no existe, pues una cantidad que ha de ser mayor que cualquiera que no se contradiga debería ser mayor que sí misma, lo que resulta claramente absurdo (Bolzano, 1991, pp. 49-50)*

Sobre esta definición Bolzano encuentra un significado más para el término asignable, que es "simplemente aquello que, de alguna manera, se presenta ante nosotros; es decir, aquello que puede convertirse en un objeto de nuestra experiencia" (p. 50). El problema se traslada a la naturaleza de la infinitud de un objeto, si se lo considera una característica interna del objeto, entonces no tiene que ver con que sea o no objeto de nuestra experiencia. El infinito entendido en relación a la posibilidad de ser comprendido o conocido resultaría poco provechoso para la ciencia.

La percepción de finitud e infinitud, sin embargo, están presentes en el infinito sociocultural del que hablábamos en (Lestón, 2008). Lo que no logramos enumerar, conocer, determinar el fin, resulta infinito, aún cuando se sepa que no lo es. Fuera de la matemática, la clasificación depende de la sensibilidad, de lo que podemos absorber a través de nuestros sentidos. Igual que encontramos en el extracto de Cantor, Bolzano no nos da una definición para saber si algo es o no

infinito, pero sí nos dice los conflictos que se presentan con las definiciones que se dan habitualmente.

Sobre estas ideas, se preparará para esos capítulos una guía de análisis que será aplicada a alumnos de tercer y cuarto año del Profesorado en Matemática, cuyo objetivo es comenzar a comprender qué es lo que ellos traen de su paso por la escuela media y qué han logrado construir en sus años de formación superior.

Conclusiones

La matemática escolar es, en la mayoría de los casos, producto de la historia y políticas educativas que se ha constituido como cuerpo de saber autónomo (Cantoral, 1995). Sin embargo, este proceso hace que en algunos casos se pierda percepción de lo que se está haciendo o sus razones o motivos. Además, la escuela al constituirse como institución transmisora del saber se ha ido alejando del grupo o comunidad del cual es resultado, perdiendo de vista cómo se construye. Tenemos por lo general, escuelas que niegan y rechazan lo que es construido en escenarios socioculturales no académicos, y eso hace que pierda el lugar que ocupara en el pasado. La pérdida de hegemonía que en algún momento la escuela compartía con la familia en la transmisión de cultura está originada, en parte, "por causa de una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar fuera de ella su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas" (Barbero, 2008, p. 68). Quienes ingresan a la escuela viven en una comunidad de la que heredan cultura y en la que construyen su identidad, y quienes salen de la escuela deben llevar consigo una serie de conocimientos que resulten de utilidad para esa comunidad a la cual se "reinsertan" como personas formadas, ciudadanos racionales que con sus herramientas pueden comprender y modificar la realidad que los rodea. Tenemos entonces que hacer que los futuros docentes vean cómo deben construir un discurso que permita que sus alumnos logren construcciones que sean respetuosas y útiles para sus comunidades.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp. 65 – 99). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* México: Mathema.

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.

Cantoral, R. (1995) Matemática Educativa*. Pedagogía 10 (5),* 4-13

Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra De L´Hopital y María G Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9* (2), 253-265.

Castañeda, A., Buendía G., Crespo, C. Lezama, J., Molina, J., Montiel, G., Martínez, G., Rosas, A. y Sánchez, M. (2008). *Las líneas de investigación en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN.* Documento interno, Prome-Cicata-IPN. México.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1145-1154. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Lestón, P. y Crespo Crespo, C. (2008). El infinito escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1117-1126. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G., Castañeda, A. y Lezama, J. (2007). Investigación e innovación en educación a distancia en línea para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, pp. 581-602.

UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA ESTUDIOS SOCIO HISTÓRICOS: EL CASO DE LA TEORÍA DE FUNCIONES DE LAGRANGE

Lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza
PUCV — Chile
Cinvestav–IPN — México
leanggi@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación da evidencia de como lo sociocultural incide significativamente en la construcción del conocimiento matemático. La Teoría de Funciones Analíticas de Lagrange fue escrita a causa del estallido de la revolución francesa y por cambios en el contrato laboral del autor. Explicaremos cómo la socioepistemología nos brindo una "manera de ver" la problemática de investigación. Explicaremos la metodología construida y utilizada en la investigación. Esta metodología, a la luz de los resultados obtenidos, se muestra como fructífera para estudiar la dimensión sociocultural del conocimiento matemático en estudios de corte socio históricos.*
Palabras clave: Sociocultural, derivada, Lagrange, estudios históricos

Introducción

La socioepistemología ha advertido sobre la necesidad de entender al conocimiento matemático en los escenarios socioculturales en los cuales estos fueron producidos y difundidos (Cantoral y Farfán, 2003) Diversas investigaciones estudian la construcción social del conocimiento destacando su dimensión sociocultural (Cantoral, 2001; Montiel, 2005; Crespo, 2007) En esta investigación reportamos una descripción de la relación de la dimensión sociocultural en la construcción del conocimiento matemático.

¿Tendrá alguna relación la producción de cierta obra matemática con la desigualdad social, con una revolución política o con el cambio de condiciones en el contrato laboral de una persona? Desde una aproximación realista y a-histórica del conocimiento matemático se postularía que no tendrían mucha relación, pues esta mirada supone a los objetos matemáticos preexistentes y separados del humano. Sin embargo, la evidencia histórica muestra lo contrario. A continuación mostraremos como una obra matemática antigua que normó significativamente la enseñanza de la matemática en su época *fue escrita debido al estallido de una revolución política y al cambio en las condiciones de su contrato laboral*. Es muy probable que sin esta revolución y cambio de condiciones laborales esta obra matemática no se hubiera escrito.

A continuación explicaremos cómo la dimensión sociocultural incide significativamente en la construcción social del conocimiento matemático. Esto lo haremos a través del caso de la Teoría de Funciones Analíticas del físico matemático Lagrange (1736-1813). Primero expondremos los datos obtenidos del estudio. Después haremos una descripción de algunos elementos de la aproximación socioepistemológica que se articulan en la investigación. Finalizaremos explicando la metodología construida para desarrollar la investigación.

La obra de Lagrange, escrita a causa de la contingencia sociopolítica y laboral del momento

Publicada en 1797 y reeditada en 1813, la Teoría de las Funciones Analíticas de Lagrange plantea un viraje en el método de trabajo del cálculo infinitesimal de su época. En el prefacio de la obra, el autor plantea que las concepciones utilizadas para fundamentar el análisis en su época eran poco claras e inseguras para fundamentar una ciencia donde la certitud debe ser sustentada en la evidencia (Lagrange, 1813, p.5). Critica a los infinitamente pequeños de Leibnitz por no ofrecer una idea muy precisa al espíritu y a las fluxiones de Newton por su dependencia directa de la noción física de velocidad. En base a estas críticas, el autor propone un nuevo método para el cálculo infinitesimal, llevando a la noción de diferencial a un contexto funcional. Por primera vez estudia las funciones derivadas, con las cuales construye un método para el cálculo y análisis infinitesimal deducible por reglas algebraicas, el que llama método analítico.

En el curso de una investigación que buscó entender una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX (Espinoza, 2009), llegamos a la necesidad de preguntarnos por qué Lagrange escribió su obra. Para responder esto, estudiamos a la obra en conjunto con su época y las condiciones específicas de su producción y difusión. Como mostraremos a continuación, esta obra fue escrita *debido a la contingencia sociopolítica francesa en el siglo XVIII y por los cambios en las condiciones laborales de su autor*.

Lagrange nació el 25 de enero de 1736 en Turín, Francia (actualmente en Italia) Fue Director del área de matemáticas en la Academia de Berlín, en donde trabajó entre 1766 hasta 1786. En 1783 muere su esposa, con quién tenía dieciséis años de casado, muere DÁlambert, su mejor amigo matemático, y Euler, su primer mentor. Esto conllevó a que en los años siguientes no tuviera una

muy agradable estancia en Berlín, lo cual se muestra en la disminución en la cantidad de sus publicaciones, la cual fue muy alta durante los años anteriores (Fraser, 1985, p.26). En este tiempo recibió algunas ofertas para hacer docencia e investigación en Italia, las cuales rechazo. Finalmente aceptó un ofrecimiento para trabajar en la Academia de Ciencias de París. El contrato laboral ofrecido por la Academia de París tenía una cláusula que lo exentaba de dictar cátedra, lo que le permitiría dedicarse tiempo completo a la investigación. Esta cláusula incentivó a Lagrange a aceptar el ofrecimiento de trabajo (O´connor y Robertson, 1999) Lagrange llega a París el año 1787 (Figura 1).

El año 1789 estalla en París la revolución francesa. Después de largos siglos en los que coexistió la opulencia en la calidad de vida de la monarquía con una difícil situación económica del pueblo francés, un grupo de intelectuales franceses organizan una revuelta que logró sacar del poder a la monarquía. Este suceso sociopolítico trajo profundos cambios en las esferas sociales y administrativas francesas de la época, entre estas, la educación. La Academia de Ciencias, encargada de formar a los científicos de la época, fue suspendida por su relación estrecha con la monarquía. La carencia de científicos y técnicos en servicios públicos que pudieran hacer frente a la crisis nacional e internacional producida por la revolución hizo que se creara una nueva institución educativa encargada de formar a la elite intelectual científica de Francia, la École Polytechnique (Figura 1).

Figura 1

Esta escuela abrió sus puertas en diciembre de 1794 y reclutó como maestros a los científicos más destacados de la época. La suspensión de la Academia de Ciencias de París hace que el contrato laboral de Lagrange cambie radicalmente, cambiando la cláusula que lo exentaba de dictar cátedra. Con esto, Lagrange se vuelve profesor de análisis en la escuela. Su rol como profesor fue criticado. Fourier, que fue alumno de Lagrange, comentó sobre esto que "su voz es muy débil, al menos cuando no se acalora […] Los estudiantes, la mayoría de los cuales son incapaz de apreciarlo, le dan poca acogida" (O´connor y Robertson, 1999).

Sintetizando (Figura 1), Lagrange llega a París en 1787 con la intención de dedicarse de manera exclusiva a la investigación. Dos años después estalla la revolución francesa que cambia de manera radical a los sistemas políticos y administrativos del país. La Academia de Ciencias es destituida. Se crea una nueva escuela, dedicada a formar a la elite intelectual del país como futuros ingenieros y técnicos, la École Polytechnique. Las condiciones laborales de Lagrange cambian y comienza a dictar cátedras en esta nueva escuela a comienzos de 1795. Al ser una escuela nueva en su tipo, no existían libros de estudio para los estudiantes. Lagrange y los otros científicos de la época comenzaron a sintetizar la matemática de su tiempo elaborando discursos matemáticos escolares para introducir a los nuevos aprendices al conocimiento de las ciencias. Lagrange comienza a elaborar una obra didáctica con este fin y, he aquí, se publica la Teoría de las Funciones Analíticas de Lagrange.

> sur ce sujet (*), et m'étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l'Analyse, j'ai rappelé mes anciennes idées sur ceux du Calcul différentiel, et j'ai fait de nouvelles réflexions tendant à les confirmer et à les généraliser; c'est ce

(Lagrange, 1813, p.5)

Este extracto del prefacio de la obra da evidencia de lo que afirmamos. El autor afirma que ha escrito esta obra por encontrarse comprometido por circunstancias particulares. En este prefacio también afirma haber publicado su obra al considerar la utilidad que puede tener a los estudiantes que se introducen al estudio del análisis matemático. El autor desarrolló esta obra al retomar ideas sobre el cálculo diferencial había abandonado veinticinco años atrás, las cuales confirmó y generalizó, obteniendo su Teoría de las Funciones Analíticas (Lagrange, 1813, p.5)

El hecho que la obra de Lagrange se escribiera por la contingencia sociopolítica del momento y por los cambios en su contrato laboral nos permite algunos cuestionamientos. Si la revolución francesa no se hubiera llevado a cabo, ¿se hubiera escrito esta obra? Un análisis de esto se puede encontrar en (Espinoza, 2009). Lo que es claro es que una situación de índole sociocultural y circunstancial causo la producción y publicación de esta obra matemática. Lo sociocultural incidió significativamente en la construcción social del conocimiento matemático (Espinoza, 2009)

La socioepistemología y la investigación

La aproximación socioepistemológica considera al conocimiento matemático como un emergente de las dinámicas sociales. Estudia el fenómeno educativo de una manera sistémica considerando lo sociocultural como un articulador de las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica (Cantoral y Farfán, 2003) Propone una descentración de los objetos matemáticos y de su naturaleza epistemológica para privilegiar una epistemología de prácticas asociadas a su construcción (Montiel, 2005) De esta manera hace al conocimiento matemático sensible a las realidades de las personas y a sus diferentes mundos.

Las investigaciones en socioepistemología no se construyen sobre una reflexión intelectual previa al estudio de los datos. Más bien, busca validar y teorizar sobre la base de la evidencia empírica y experimental. Un fin fundamental de esta Teoría es la intervención, considerando para esto los fenómenos de producción, adquisición y difusión del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003). Actualmente estamos desarrollando investigación en diferentes escenarios para estudiar la construcción social del conocimiento matemático y sus mecanismos de difusión institucional, mediante constructos teóricos como la práctica social, prácticas de referencia, contextos de significación y escenarios socioculturales, entre otros.

La socioepistemología nos brindo la idea germinal de nuestra investigación: *no podemos entender a las personas construyendo conocimiento desprendidas de su contexto sociocultural.* ¿Cómo incide su realidad y visión de mundo en el cómo la otra o el otro aprende matemáticas?, es la gran pregunta. Replanteamos esta pregunta para un escenario histórico. ¿Cómo incidió el mundo de Lagrange en su manera de hacer matemáticas?, lo respondimos en esta investigación. ¿Cómo afectó su manera de ver al mundo en su construcción matemática?, lo respondimos en (Espinoza,

2009) Desde las aproximaciones teóricas que se centran en objetos y desligan a las prácticas del conocimiento no hubiéramos logrado nuestros hallazgos. La dimensión sociocultural de la socioepistemología fue la que nos permitió lograr nuestros descubrimientos.

De estas reflexiones postulamos que un marco teórico, además de sustentar la validez de un resultado científico, brindar una manera de abordarlo y situar su impacto, provee *una manera de ver y entender las problemáticas de investigación.* La socioepistemología aspira que la mayoría de las personas puedan entender y disfrutar de la matemática, y no sólo una elite intelectual (Cantoral, 2009) Busca la inclusión de los excluidos de aprenderla, ya sea por su situación económica, racial, cultural, discapacidad física, etc. Esto lleva a considerar la importancia que "el otro" tiene en nuestras investigaciones. Por tanto, la socioepistemología nos brindó una mirada sociocultural para entender nuestra problemática de investigación. También nos permitió resaltar la importancia de las diferentes maneras de entender al mundo y contextos socioculturales de los otros.

Una propuesta metodológica para estudios sociohistóricos

En el curso de nuestra investigación encontramos que los trabajos desarrollados en escenarios históricos en socioepistemología no hacen explícita la metodología de investigación utilizada (Cantoral, 2001; Montiel, 2005; Crespo, 2007) Al considerar los beneficios que pudiera traer esto para futuras investigaciones, nos propusimos hacer explícita la metodología que creamos y utilizamos para nuestra investigación. ¿Cómo estudiar la dimensión sociocultural del conocimiento en investigaciones de corte sociohistóricos? Las ideas germinales y los medios de significación de los matemáticos en siglos pasados son diferentes a los que tenemos en la actualidad. ¿Cómo acercarnos a su manera de ver sus obras matemáticas? El conocimiento es un emergente de las dinámicas sociales. Por esto una obra antigua, más que un libro con contenido matemático, lo entendemos como:

a) Una producción con historia

Aquí buscamos entender las intencionalidades involucradas en la producción de la obra. Nos interesó comprender la mirada de la época, las ideas germinales y los medios de significación

utilizados por el autor para significar el conocimiento matemático (Cantoral, 2001). Para esto estudiamos la vida personal del autor, su familia, su formación y episodios relevantes de su vida. También su vida profesional, su carrera académica, la relación con sus colegas y sus intereses académicos. Además estudiamos su época, el contexto sociopolítico de la producción y los problemas abordados por la ciencia de su época.

b) *Un objeto de difusión*

Toda obra matemática busca difundir algo a alguien. Por tanto tendrá una intencionalidad de difusión intrínseca, la que mediará el pensamiento del autor plasmado en la obra. La obra es por tanto un escrito mediado por esta intencionalidad de difusión. Para hacer una interpretación sociocultural de la obra necesitamos entender esta intencionalidad. Por ejemplo, hay diferencias entre una intención de difusión didáctica con una intencionalidad de difusión científica. Para investigar esto estudiamos al autor y los destinatarios de la obra, el tipo de producción, las condiciones del medio de difusión y la institución publicadora (Figura 2)

Figura 2

c) *Parte de una expresión intelectual más global*

La obra antigua es una expresión intelectual de toda una construcción de significados en los trabajos del autor. Por esto nos interesa saber como se secuencian y evolucionan sus ideas en la

totalidad de sus obras. Para esto estudiamos la obra matemática a investigar, desarrollamos una mirada general de las obras más relevantes del autor y estudiamos más a fondo las obras relacionadas con la obra estudiada. Estudiamos además correspondencias con otros matemáticos y ensayos de corte epistemológico y/o metafísico del autor.

La triangulación de estos elementos nos permitió construir una explicación sociocultural del significado de las obras matemáticas estudiadas. Para profundizar en mayores detalles sobre esta metodología recomendamos estudiar (Espinoza, 2009)

Conclusiones

El considerar al conocimiento como un emergente de las dinámicas sociales nos permitió observar los acontecimientos socioculturales y políticos de la época para entender la obra de Lagrange. De este análisis develamos la estrecha relación que tiene la elaboración y publicación de una obra matemática antigua con estos acontecimientos. La revolución francesa buscó la masificación de la enseñanza de elite científica en la Francia de la época. Esto llevo a la elaboración de discursos matemáticos escolares que normaron la enseñanza del cálculo hasta nuestros tiempos. La Teoría de las Funciones Analíticas de Lagrange fue estudiada por muchos de los grandes científicos franceses de comienzos del siglo XIX. Cauchy, inspirado en una crítica a esta obra de Lagrange desarrolla una nueva obra didáctica que ha normado el discurso matemático escolar del cálculo hasta la actualidad.

La dimensión sociocultural incide significativamente en la construcción social del conocimiento matemático. Por una parte, los acontecimientos sociopolíticos causaron la publicación de la obra didáctica de Lagrange. Por otra, el debate ideológico entre los liberales y conservadores de la época (los partidarios de la ilustración y la monarquía) causó un nuevo discurso matemático escolar que propuso desprender a la matemática de toda relación con el conocimiento sensible del mundo (Espinoza, 2009). Este es el Curso de Análisis de Cauchy. Esta obra es la primera que considera al análisis matemático como una ciencia autónoma de las ciencias exactas de su tiempo.

Lo sociocultural incide significativamente en la construcción social del conocimiento matemático. En las interacciones sociales, parece ser que son pequeños cambios los que generan redes de sucesos que moldean la realidad. Si los acontecimientos sociopolíticos y laborales de Francia en

estos años se hubieran dado de otra manera, quizás el conocimiento matemático que conocemos hoy sería diferente.

La mirada sociocultural que nos proveyó la socioepistemología fue clave para lograr los resultados de esta investigación. Las herramientas metodológicas desarrolladas para esta investigación nos permitieron construir una epistemología de las obras desde la mirada de sus autores y sus épocas (Espinoza, 2009). Estas herramientas metodológicas se muestran fructíferas para estudiar la dimensión sociocultural del conocimiento matemático en escenarios históricos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 6*(1), 27 – 40.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada. México: CICATA-IPN.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. México: CINVESTAV.

Fraser, C. (1985). J L Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations, *Arch. Hist. Exact Sciences 32*(2), 151-191.

Lagrange, J. (1813) Théorie de Fonctions Analytiques. En Gauthier-Villars (Eds.), *Œuvres de Lagrange*, Ed. 1, Vol. 9. (pp.13-413)

Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral. México: Cicata-IPN.

O´Connor, J. J. y Robertson E.F. (1999). *Joseph-Louis Lagrange.* Extraído el día 20 de Agosto de 2008 desde http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lagrange.html

PENSAMIENTO PROPORCIONAL. UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Ivan Castro de Almeida, Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Chile
icabsb@gmail.com, leonoradm@yahoo.es
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Básico, Medio

Resumen. *Se aborda, desde una perspectiva socioepistemológica, la construcción del conocimiento y el desarrollo del pensamiento proporcional buscando generar espacios de reflexión y de interacción con el profesorado y el estudiantado que posibiliten la resignificación del conocimiento institucionalizado. Recurre entre otras fuentes y técnicas, al análisis de textos didácticos clásicos y contemporáneos, con el objeto de visualizar la naturaleza y evolución de los saberes matemáticos y escolares en juego, y, decidir aspectos necesarios a los diseños de secuencias didácticas en orden a favorecer la significación de fracciones, razones y proporciones como conceptos-herramientas en el estudiantado en el ámbito de la proporcionalidad . Tiene el objetivo de comprender de qué manera las prácticas que toman lugar en el aula, contribuyen al desarrollo del pensamiento proporcional de los estudiantes, en los niveles 5º al 10º de la escolaridad obligatoria.*
Palabras clave: Pensamiento proporcional, fracciones, razones, socioepistemología.

Antecedentes

Chile da una gran importancia al estudio de las proporciones en las escuelas básicas y medias, como ocurre en muchos de los países. Lo expresa en su estructura curricular, y en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (MINEDUC, 2002) iniciando su aprendizaje formal en el 7º grado de la educación básica y siguiendo hasta educación media. La propuesta de planes y programas aún privilegia el carácter instrumental y estático de la razón matemática y de las proporciones. Esto se pone en evidencia en los lineamientos de los programas de estudios oficiales del MINEDUC (2004).

David Block (2001) en su tesis de doctorado afirma que el desaparecimiento de la razón matemática del discurso escolar ha sido progresivo, y está relacionado con la tendencia, principalmente, a partir del siglo XIX, de la formalización del álgebra y del análisis ampliando sus dominios hacia nuevos objetos y trivializando los teoremas relativos a razones y proporciones (p. 10). En el sistema escolar, la pérdida de importancia ocurre, según este autor, principalmente, en las décadas de los años 60 y 70, con las reformas curriculares ocurridas en América Latina a través del movimiento de la “matemática moderna”, dirigido hacia al desarrollo de recursos matemáticos

considerados más eficientes, como la función lineal y el formalismo algebraico. El aspecto relacional de la proporcionalidad, su faceta dinámica y funcional no se hace presente, por lo menos explícitamente, como propuesta para el desarrollo del pensamiento proporcional. El tratamiento estático de la proporcionalidad ha conducido a una centración en lo operativo en detrimento de lo funcional, en el resultado en detrimento al proceso, como han mostrado varios estudios realizados por Díaz (1998, 2006, 2008). En Brasil, Carraher, Carraher, Schliemann y Ruiz (1986) y Oliveira y Santos (2000) han mostrado también esta limitación en el estudio de la proporcionalidad en el ciclo básico. La importancia de la proporcionalidad en el desarrollo del pensamiento matemático no es reciente. Piaget (Inhelder y Piaget, 1958) en sus estudios acerca del desarrollo del pensamiento matemático en los niños, mostraron el carácter abstracto y el orden cognitivo superior que exige el aprendizaje de las proporciones. Varios autores consideran al pensamiento proporcional como el fundamento en la construcción de varios conceptos matemáticos avanzados, como por ejemplo la función lineal y la derivada. Para Díaz (2008) constituiría un eje transversal al desarrollo del pensamiento variacional. Behr, Lesh y Post (1988) consideran a este razonamiento como el anclaje de todo pensamiento algebraico y que deviene del aprendizaje de fracciones, cocientes y razones. Malloy, Steinthorsdottir y Ellis (2004) afirman que debe haber acuerdo acerca de la importancia del entendimiento de razones y proporciones como crucial en la enseñanza de la matemática básica. La conceptualización de las proporciones, a su vez, pasa por una multiplicidad de enfoques, que les dan cuerpo y vida en el desarrollo de la matemática elemental. Estos autores testifican la complejidad de su aprendizaje al evidenciar que el pensamiento proporcional no es la suma de sus partes (cómo igualdad de razones) sino una idea mayor. Para ellos, usualmente, hay una tendencia a centrarse apenas en sus componentes, y de ahí establecer la proporcionalidad. Esta complejidad, propia de la episteme del pensamiento proporcional, sugiere la necesidad de desarrollar una diversidad de problemas prácticos que actúen a favor del aprendizaje integral y significativo de los estudiantes. Cada uno de estos conceptos-herramientas comporta en efecto varias propiedades, cuya pertinencia es variable según las situaciones a tratar. Algunas se pueden comprender muy pronto, otras mucho más tarde en el transcurso del aprendizaje. Por ejemplo, la idea de parte-todo es mucho más simple que la idea de equivalencia de fracciones, esta última, depende de la idea de categorización (es decir, cada clase de equivalente, corresponde a una categoría de número racional, o simplemente un número racional). La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego al conjunto

de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, así como al conjunto de los esquemas construidos por los sujetos en estas situaciones.

Marco teórico

Distintas concepciones acerca del desarrollo del aprendizaje matemático tienen distintos efectos en la visión de la relación sujeto-objeto matemático. Una concepción, propia de la psicología cognitiva identifica con la "actividad matemática" a la manipulación de conceptos y teoremas asociados al objeto matemático. Otra concepción identifica a las situaciones y prácticas en que las personas realizan una tarea matemática, con la "actividad humana". En este caso, los conceptos son herramientas para la acción. Situación, en este contexto, se entiende en sentido amplio, considerándola no sólo como una clase de objetos materiales o mentales, sino también, como sucesos o fenómenos, problemas, teoremas, y teorías. Lo que interesa es la funcionalidad de los conceptos, como herramientas en la construcción del conocimiento matemático, con base en prácticas sociales que posibilitan su reconstrucción y resignificación en el seno escolar (Cantoral, 2001). Este acercamiento teórico, de carácter socio-histórico, denominado socioepistemología, considera toda la complejidad del pensamiento matemático, sistémicamente, en sus componentes, didáctica, epistemológica, cognitiva y socio-cultural, normadas por prácticas sociales que les dan cabida. En este contexto, el concepto de resignificación del conocimiento se hace presente como unidad de análisis básico para su comprensión. Se refiere a la idea del conocimiento en evolución, en que el saber matemático determina y cambia el entendimiento del estudiantado según los escenarios o situaciones didácticas en que este saber opera. Es decir, el saber matemático, no es ajeno al proceso de su construcción, de la interacción con el estudiantado y el profesorado. Como ejemplo, se puede citar el trabajo de Montiel (2005) sobre funciones trigonométricas, en que ella muestra que el "seno de algo", asume significaciones distintas según las prácticas históricas de referencia que ella ha identificado: de la matematización de la astronomía (práctica de anticipación) de la física (práctica de predicción) y del calor (práctica de formalización) todas ellas bajo la práctica social de "predicción", analizada, inicialmente, por Cantoral (2001), en su estudio sobre la didáctica y construcción de la noción de predicción. Considerar a la matemática una construcción sociocultural lleva a analizar la evolución socio-histórica de conocimientos matemáticos, para comprender y describir los diversos escenarios

socioculturales en que dicho conocimiento se ha desarrollado. Según Crespo (2007) este análisis tiene por objetivo comprender *cómo*, *para qué* y *por qué* surgió cada concepto, así como *qué* significado tuvo en ese escenario. De esta manera, los componentes epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural, aparecen involucrados de modo sistémico en este tipo de investigación, y, las ideas y pensamientos matemáticos, por este carácter sociocultural, son el reflejo y producto de un escenario específico. Así, el individuo reconstruye los significados a partir de determinadas prácticas desarrolladas intencionalmente para eso, desde una situación didáctica intencional. Los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan, entonces, un papel importante en la explicación del conocimiento desde la matemática educativa (Martínez, 2005). En este contexto, es relevante, la caracterización de los procesos de construcción del conocimiento matemático, y bajo qué condiciones las personas ponen en funcionamiento los conocimientos matemáticos ante las situaciones exigidas. Para Martínez (2005) "*son las circunstancias de construcción de conocimiento las que determinan o condicionan la emergencia de este conocimiento funcional*" (p. 198). En términos de Arrieta (2003) para aprender ciencia, en particular matemática, es necesario aprender cómo se reconstruye esta experiencia en el discurso escolar científico. Reconstruir esta experiencia dialécticamente, situarla en contextos argumentativos, donde las prácticas promueven la construcción del conocimiento científico en el contexto social en que ellos ocurren, son componentes centrales en su acercamiento teórico.

Propósito

Esta investigación aborda, desde la perspectiva antes descrita, la construcción del conocimiento y del desarrollo del pensamiento proporcional, buscando generar espacios de reflexión y de interacción con el profesorado y el estudiantado que posibiliten la resignificación del conocimiento institucionalizado. Recurre entre otras fuentes y técnicas, al análisis de textos didácticos clásicos y contemporáneos, con el objeto de visualizar la naturaleza y evolución de los saberes matemáticos y escolares en juego, y, decidir aspectos necesarios a los diseños de secuencias didácticas en orden a favorecer la significación de fracciones, razones y proporciones como conceptos-herramientas, es decir, la disponibilidad funcional de estos conceptos en el estudiantado. Tiene el objetivo de comprender de qué manera las prácticas de aula, contribuyen al

desarrollo del pensamiento proporcional de estudiantes del 5º al 10º años de la escolaridad obligatoria.

Elementos metodológicos

El estudio cuenta con la participación regular del profesorado de la escuela objeto de la investigación, según la espiral autorreflexiva que incluye la planificación, acción, observación y reflexión, con las cuales se pretende lograr el perfeccionamiento docente en la acción; la mejora de los aprendizajes estudiantiles; y, el diseño de secuencias de enseñanza validadas científicamente. En el estudio, docentes, estudiantes e investigadores interactúan de forma que comparten un conocimiento acerca de los conceptos, permitiendo que se transformen en herramientas matemáticas eficaces en la solución de situaciones problemáticas. Se parte de la idea de que este saber no se limita a un conjunto de procedimientos formales con la pretensión de explicar el fenómeno de la proporcionalidad, tal como se le presenta, sino que busca comprenderlo en profundidad, identificando sus diversas realidades, mismas que se van construyendo históricamente y en el seno escolar, en orden a dotar al estudiante de los recursos necesarios para el uso de estas herramientas matemáticas en el proceso de formación de su pensamiento proporcional. La investigación propone la comprensión de prácticas sociales que concurren a las prácticas escolares, teniendo como fuente primaria los entendimientos de los docentes y del estudiantado. Para eso, se ha trabajado con docentes de la educación básica y con estudiantes de pedagogía en matemáticas, y con sus estudiantes, con quienes ocurre la interacción didáctica en el desarrollo de las diversas facetas del pensamiento proporcional, incluyendo el estudio de las fracciones, razones y proporciones. Se recurre a la Ingeniería Didáctica, instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que permite desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, intentando captar la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje en situación escolar. Sigue un esquema experimental de ocurrencias didácticas en el aula. Se concibe, realiza, observa y analizan secuencias de enseñanza. Su validación es interna con base en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1998; Díaz, 2006). Como metodología de investigación comprende cuatro fases de actividades: análisis preliminares; análisis a priori, que incluye el diseño de secuencias didácticas y la elaboración de conjeturas acerca de estas secuencias didácticas antes de

ponerlas en funcionamiento; experimentación en el aula con el estudiantado; y, análisis a posteriori; este último que confronta las conjeturas establecidas durante el análisis a priori con las producciones estudiantiles y levanta elementos para el rediseño de las secuencias puestas en la escena del aula (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1998). Al recurrir a la Ingeniería Didáctica para develar estos imaginarios, se pretende, a la vez, identificar prácticas sociales que concurren, con las prácticas escolares, al aula en el desarrollo del pensamiento proporcional, y generar transformación en las prácticas didácticas, a través de la actividad reflexiva desde y con el profesorado y el estudiantado en la emergencia de secuencias específicas que potencien el aprendizaje significativo por parte del estudiantado.

Elementos precursores del análisis preliminar ya realizados en el marco de la Ingeniería Didáctica.

El cotidiano es vehiculado por la actividad de medir: estudios (Soto, 1992; Rouche, 2006) muestran que el pensamiento y sistemas de medida son recursos importantes para integrar la matemática cotidiana en la escuela en el desarrollo de la proporcionalidad. Este recurso se muestra aun más importante, dado que nuestras actividades con estudiantes de 6to básico y de pedagogía en matemática, ha mostrado que la *raya* en la representación de las fracciones y de la razón matemática es entendida por la mayoría del estudiantado como una "operación de dividir", limitando de esa manera su uso en otros contextos en que la división no juega un rol central, como en la comparación y relación entre magnitudes, esencial para el desarrollo del pensamiento variacional, desde la proporcionalidad. Eso tiene mucho que ver con la propia práctica docente, que hace de la faceta parte-todo de las fracciones una actividad central y casi única, cuando este saber matemático es puesto en juego en el aula. Así que el funcionamiento del triángulo didáctico en acción en el aula, requiere estudiar las fracciones, razones y proporciones de forma integrada como estrategia para el desarrollo del pensamiento proporcional. En este sentido, es fundamental escuchar las voces del estudiantado y ponerlos en comunicación con las de los docentes (el estudiantado tiene en su mayoría percepción de fracciones, razones y proporciones desde su cotidiano). Cambiar el contracto didáctico (Oliveira y Santos, 2000) – y, portanto, el funcionamiento del triángulo didáctico – ha favorecido la emergencia de otras epistemes de la proporcionalidad en el estudiantado. Reforzar su aspecto cualitativo ha sido fundamental para que

el estudiantado establezca un vínculo adecuado entre la matemática cotidiana, que es fuertemente cualitativa, con la escolar, que tiende a ser naturalizada a través de algoritmos repetitivos que poco contribuyen al desarrollo del pensamiento proporcional. Ruiz y Valdemoros (2006) mostraron la importancia de establecer un vínculo en los aspectos cualitativos y cuantitativos de la proporcionalidad, y de su reconstrucción desde el cotidiano de las personas, para lograr resignificaciones que fortalecen las elaboraciones matemáticas de los sujetos. Es interesante observar como, en muchas situaciones cotidianas, podemos identificar que la "percepción" de proporcionalidad es eminentemente cualitativa. Muchas veces las personas "comparan", por ejemplo, grados de "salinidad" o de "concentración" de una comida o de un jugo, parafraseando a Lamon (2005) por experimentación y aproximaciones sucesivas. En una actividad realizada con docentes de educación básica en el marco del proyecto, les propusimos que analizaran la razón y la proporcionalidad en este contexto. La actividad arrojó evidencias de que efectivamente, antes de cuantificar, la "idea" de la proporcionalidad estaba cualitativamente presente en su discurso. Todavía, el profesorado, mantiene el análisis cualitativo despegado del cuantitativo, como ejes de entendimientos independientes. Nuestra secuencia se desarrolla hacia el reconocimiento de una relación dialéctica entre lo cualitativo y lo cuantitativo en el desarrollo del pensamiento proporcional, mismo que nos parece fundamental tanto para el profesorado como para el estudiantado, en orden a lograr que los aprendizajes sean significativos. El discurso curricular no ha favorecido el desarrollo del pensamiento proporcional. Barbe, Espinoza, Gálvez, Olfos y Ruiz (2006) entre otros, constatan una fragmentación en las propuestas de planes y programas y materializada en los textos escolares, con unidades de enseñanza independientes, con vida propia, sin comunicarse entre ellas, como si cada una fuera ajena a otra, y no parte del mismo proceso para el desarrollo del pensamiento integral de la proporcionalidad. Los textos escolares, base para más de 80% de las escuelas chilenas, privilegian el enfoque estático y su aprendizaje fragmentado. Las razones, por ejemplo, se subordinan al desarrollo de las proporciones, perdiendo visibilidad propia. Cabe señalar que, más tarde, en carreras técnico-profesionales, las razones reasumen su rol específico. Block (2001) ha comprobado también esta tendencia. Esta investigación preliminar, tanto con docentes de la educación básica como con el estudiantado, ha mostrado que el uso de prácticas de medición en el aula, posibilita establecer un diálogo entre las matemáticas cotidianas y las escolares, aportando elementos precursores de un

pensamiento proporcional, como resultado de esas propias prácticas. Afirman los equipos de la experiencia de Díaz (2009) que:

> *La enseñanza de Razones y Proporciones en la escuela es una de las tareas difíciles para los maestros y maestras... se manifiesta en el alto porcentaje de alumnos que presentan problemas al confundir fracciones con razones matemáticas. Uno de los aspectos que determina este problema es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar". Y también que "profesores y estudiantes reconocen acepciones cotidianas de la razón y desconocen la razón matemática (p 22).*

Concluyen que "*existe una deficiencia en el conocimiento general de Razones y Proporciones, no solo por parte de los alumnos, sino también, en alguna medida, por parte de los Profesores, lo cual conlleva a requerir un esfuerzo conjunto para mejorar…*" (p25). El primer equipo diseñó la secuencia didáctica "Desde la Razón Cotidiana a la Razón Matemática" que atiende a las concepciones de la razón cotidiana y procura que los estudiantes se apropien del concepto matemático de razón. El segundo equipo se propuso entender causas que originan la confusión entre la razón y la fracción en el estudiantado. Sus estudiantes distinguieron fracción de razón sobre la base de la medición de longitudes, en un trabajo contextualizado con material concreto.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Cinvestav - IPN, México.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1998). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente. GEI.

Barbe, J., Espinoza, L., Gálvez, G., Olfos, R. y Ruiz, R. (2006). *Análisis didáctico en torno a la proporcionalidad en los distintos niveles de enseñanza del sistema educativo*. Extraído el 20/09/2008 de www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/41.pdf

Behr, M. Lesh, R. & Post, T. (1988) Proportional Reasoning. In Hiebert & Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp 93–118)* L.E. & NCTM, USA.

Block, D. (2001) *La noción de razón en las matemáticas de la Escuela Primaria. Un estudio didáctico*. Tesis Doctoral no publicada, Cinvestav – IPN, México.

Cantoral, R. (2001) *Matemática Educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Carraher, T., Carraher, D. Schliemann y Ruiz, E. (1986) Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões. *RBEP, 67(155), 93-107*

Crespo C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav – IPN, México.

Díaz, L. (1998) *Reflexiones didácticas en torno a fracciones, razones y proporciones*. Módulo de matemáticas, GPT-Mineduc. Publica Programa MECE/Educación Media. Chile.

Díaz, L. (2006) Diálogo de Imaginarios de Estudiantes, Profesores y Saberes matemáticos. Una Línea de Investigación en Matemática Educativa. Artículo extenso en las *Actas Electrónicas de las XIII Jornadas de Educación Matemática.* Viña del Mar, Chile.

Díaz, L. (2009) *Representaciones docentes de la matemática del cambio.* Proyecto de Investigación Diumce 38/06. Extenso en Biblioteca de CPEIP, Lo Barrenechea, Chile.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958) *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books, USA.

Lamon, S. (2006) *Teaching fractions and ratios for understanding*. London: LEA Publishers. Mahwah

Malloy, C., Steinthorsdottir, O. & Ellis, M. (2004) *Middle school students` understanding of proportion*. Paper presented at the Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychologybof Mathematics Education, Toronto, Canada, Oct 21st. Extraído el 20/10/08, desde www.allacademic.com/meta/p117622_index.html

Martínez, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (2), 195-218*.

MINEDUC (2002) *Currículum de la Educación Básica: Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Actualización 2002*, MINEDUC, Chile.

MINEDUC (2004) *Planes y programas de la educación básica.* Mineduc. Chile.

Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis Doctoral no publicada, CICATA – IPN, México.

Oliveira, I. y Santos M. (2000) *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: uma análise das estratégias*. Extraído el 15/09/08, de www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1913T.pdf

Rouche, N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions.* Ed. Ellipses, Paris, France.

Ruíz, E. y Valdemoros, M. (2006) Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (2) ,299-324.*

Soto, I. (1992) *Mathématiques Dans la vie quotidienne de paysans chiliens. Vol I*. Louvain-la-Neuve, Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur Spécial en Pédagogie des Mathématiques. Bélgica.

LA DECONSTRUCCIÓN COMO ESTRATEGIA DE LA MODELACIÓN

José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Nayarit, Universidad Autónoma de Guerrero — México
jtulloa@nayar.uan.mx, jaime.arrieta@gmail.com
Campo de investigación: Modelación matemática — Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo de investigación es parte del trabajo "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico", un estudio que toma como base teórica a la socioepistemología, mismo que se incorpora como un apartado del trabajo global denominado "Las prácticas sociales en la construcción social del conocimiento". En el reporte adoptamos el deconstructivismo como una estrategia para modelar fenómenos biológicos, considerando a la deconstrucción como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando dicho sistema como algo abierto, extenso, desdibujado, equivoco y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004). Asumimos que la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final y su estructura es espiral.*
Palabras clave: Modelación, deconstrucción, prácticas sociales, socioepistemología

Introducción

Las matemáticas están relacionadas con otras materias y es muy importante para ellas. Ciencias como la biología, la fisiología y la medicina en las cuales la matemática no tenía una presencia relevante, están demandando nuevas herramientas matemáticas para poder analizar y explicar muchos problemas sobre los cuales tienen cada vez mas información experimental.

La relación entre la biología y la matemática ha sido fructífera para ambas desde que alguien, por primera vez, se dio cuenta de la posibilidad de modelar los fenómenos biológicos mediante entes matemáticos (Sánchez, Miramontes y Gutiérrez., 2002). Se atribuye a Leonardo de Pisa, *Fibonacci*, ser uno de los precursores de la modelación matemática, en 1219 en el *Liber Abacci* propuso un problema cuya solución se daría en términos de ecuaciones para la dinámica de una población.

La situación particular, en lo que se refiere a la relación entre la Biología y la Matemática ha cambiado mucho en pocos años. Siempre se ha pensado que una básica, aunque adecuada formación matemática, podía ayudar al Biólogo a entender algunas leyes y principios de la Biología. Un curso básico de Matemáticas para Biólogos solía constar de temas como los

siguientes: una introducción elemental a la teoría de conjuntos, las nociones elementales sobre las funciones y trazados de curvas (incluyendo derivación e integración), una introducción a algunos métodos del Álgebra lineal, principalmente en lo referente a sistemas de ecuaciones y, hoy en día, algunos el uso de algunos paquetes computacionales.

Muchos problemas planteados en Biología crean la necesidad de descubrir nuevas teorías matemáticas, o de potenciar y desarrollar las ya existentes. Recíprocamente, el tremendo desarrollo de la investigación básica en Matemáticas hace posible el estudio de problemas cada vez más complejos de la Biología.

El presente trabajo se encuentra en la línea de investigación que intenta dilucidar acerca de la relación entre las prácticas sociales y la construcción de los conocimientos (Arrieta, 2003), una de las tesis centrales de esta línea sostiene que los conocimientos emergen de las prácticas de las comunidades, que viven ligados a dichas prácticas y, en este sentido, ligados a sus intencionalidades. Es parte del proyecto “Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial: en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico”.

La comunidad de estudio, es la conformada por los profesionales de la pesca, en la que se consideran tanto a los biólogos pesqueros como a los ingenieros pesqueros; siendo éstos el punto de partida. Al observar los currículos de las carreras de ingeniería pesquera y las de los biólogos marinos, podemos darnos cuenta que la modelación se estudia en diferentes momentos (Ulloa, Arrieta, 2008) , sin embargo es claro que al igual que en otras comunidades hay una separación de los conocimientos del aula con las prácticas de las comunidades como profesionistas y, por ende, de las intencionalidades, de esta manera ha nacido el mito del conocimiento por el conocimiento, el conocimiento que vale por sí mismo.

Esto no lleva a señalar que, la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio y por otra parte se ha dado poca importancia a la modelación como una asignatura de relevancia en la práctica profesional. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades. La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la

encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

Evolución de las Prácticas Sociales

Las prácticas de modelación que se reportan en el estudio se enfocan en las que emergen en la actividades realizadas en las comunidades de biólogos e ingenieros pesqueros en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. En especial nos centraremos en los fenómenos en los que se trabaja con Modelos Exponenciales. Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, de la misma forma se ejercen en el plano profesional y en los problemas cotidianos actuales.

Las actividades de modelación las distinguimos de quienes la usan con la finalidad de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de ésta. Reproducimos y analizamos prácticas de modelación con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula.

Entenderemos por matematización el proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, debiéndose realizar dicho trabajo en dos direcciones opuestas: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas..., y trabajando entonces matemáticamente hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado (Alsina, 2007).

Nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas bien en los modelos numéricos, bien en modelos gráficos o analíticos (Arrieta, 2003).

Una de las prácticas más usuales de los Ingenieros y Biólogos Pesqueros cuando realizan investigación es la recolección de datos y a partir de estos plantean tesis o las refuerzan empíricamente lo cual se muestra en la figura No. 1.

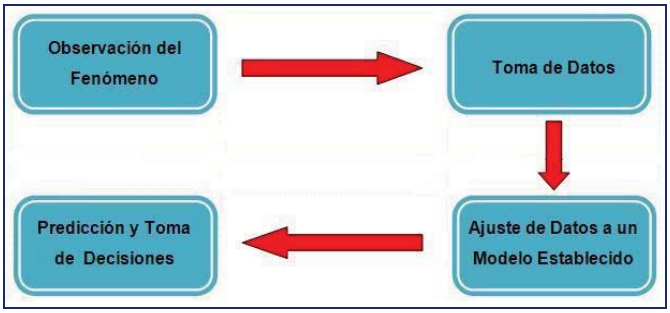


Figura 1. La práctica de modelación en las comunidades de profesionales de la pesca

Una experiencia de modelación

La práctica de la comunidad mostrada en la figura No. 1, en la que se aprecia que los actores ajustan los datos a modelos preestablecidos sin considerar las condiciones propias de los mismos, tales como: especie, edad de la misma, temporada de captura, lugar de captura, etc., ha creado situaciones como el caso que ya se ha descrito y que hemos llamado el caso "Belmont", (Ulloa, Arrieta, 2008).

El caso de estudio, muestra que la utilización de la metodología tradicional conduce a errores cuya magnitud y consecuencias pueden llevar a pérdidas económicas, laborales, etc., esto refleja que la matematización de los fenómenos naturales que ocurren en la producción de microalgas no es la adecuada y es por ello que proponemos una metodología que permita analizar, visualizar y corregir la posibles fallas que existan en un proceso de modelación matemática.

La deconstrucción como estrategia

Adoptamos el deconstructivismo como una estrategia para modelar fenómenos biológicos, considerando a la deconstrucción como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando dicho sistema como algo abierto, extenso, desdibujado, equivoco y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004). La deconstrucción evoca al término creado por Derrida (1985), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender.

Por consiguiente afirmamos que la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final y su estructura es espiral y no lineal. Para su utilización como estrategia de modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo.

Primer momento: reconocimiento de la realidad y definición del aspecto a deconstruir.

> El proceso de deconstrucción - constitución se inicia con el reconocimiento explícito de la realidad profesional y su contexto, de los problemas de la práctica y de los aspectos personales y/o institucionales que pueden determinarlos. Este reconocimiento se plantea como el momento de análisis del contexto teórico, práctico, institucional y personal en el cual estamos inmersos con el fin de ir reconociendo e identificando aquellas lagunas, inconsistencias, falacias y contradicciones en nuestro ejercicio profesional.
>
> A partir de este análisis, emerge la necesidad de deconstruir ciertos aspectos de la práctica, definiendo individual y/o colectivamente (esta identificación es colectiva cuando los miembros del grupo ejercen en una misma institución y desarrollan funciones similares, de lo contrario, es individual) el elemento que se quiere transformar. Este elemento es consecuencia del análisis relacional entre las prácticas profesionales, los saberes que las fundan y los sujetos que las desarrollan.

Segundo momento*:* la identificación de las huellas personales

> El segundo momento de la deconstrucción consiste en una actividad biográfico-reflexiva eminentemente individual y personal. Se trata de reflexionar sobre la experiencia personal (intelectual, práctica, emocional, social) en relación con el elemento que está siendo deconstruido. Esa reflexión retrospectiva tiene como finalidad mostrar la forma sobre cómo se ha ido conformando y construyendo en uno mismo (experiencias formativas, profesionales, etc.) el aspecto a deconstruir.

Tercer momento*:* elaboración del mapa individual y/o colectivo

> Dado que la deconstrucción busca la "transformación" de la teoría, la práctica y los imaginarios colectivos, en este tercer momento deben identificarse los elementos y componentes que conforman el factor que está siendo deconstruido (mapa personal). Estos

elementos deberán ser compartidos entre los integrantes del grupo para elaborar el mapa colectivo.

Cuarto momento: la búsqueda de interpretaciones-comprensiones-acciones alternativas

Este momento del proceso posibilita la confrontación de la práctica personal/institucional, articulada en el mapa individual/colectivo, con otras explicaciones/interpretaciones del tema a deconstruir elaboradas a lo largo de la historia. Se trata de presentar a los miembros del grupo las teorías, enfoques o modelos alternativos que se han ido dando a lo largo de la historia sobre el elemento que está deconstruyendo. La finalidad es conocer otras interpretaciones y examinar su pertinencia y validez para hacer claro el elemento a deconstruir y su relevancia para la práctica profesional. En suma, pensar la práctica a la luz de otras miradas y posibilidades de comprensión que vayan más allá de la ortodoxia dominante.

Quinto momento: la deconstrucción

Una vez elaborada la autobiografía acerca de la temática (huella), identificados los elementos de esa temática que están presentes (en distintas formas) en la práctica profesional y las teorías alternativas, tiene lugar la deconstrucción propiamente dicha. En este momento se desarrolla un análisis colectivo tanto de lo elaborado en el momento tercero (el mapa) como en el cuarto (las alternativas). Se trata de identificar/priorizar (desmantelar) en el mapa aquellos elementos considerados no pertinentes (obsoletos, erróneos, poco útiles) y los que pueden mantenerse; así como los considerados imprescindibles procedentes del análisis realizado en el momento anterior.

Sexto momento*:* planificación de la práctica transformadora; inicio de la reconstrucción

A partir de aquí es necesario concretar en acciones todo lo desaprendido-aprendido (métodos, procesos, protocolos, procedimientos, estrategias, etc.). Se trata de elaborar un plan o agenda de trabajo en las diferentes dimensiones, áreas de intervención u otras identificando responsabilidades y concreciones reales y posibles.

Séptimo momento*:* seguimiento de las acciones

Este momento es importante porque permite modular y contextualizar las acciones previstas en función de las situaciones que vayan surgiendo. Es decir, todo el proceso de deconstruir no

puede quedar en una simple transformación de las comprensiones o en una ganancia cognitiva, sino que debe materializarse en nuevas acciones. Esta nueva práctica deberá ser parte de los nuevos proyectos, de las propuestas y concreciones de las mismas, exigiendo permanentes momentos de evaluación y ajuste para lograr concretar los nuevos aprendizajes y transformaciones.

***Octavo momento**:* retorno a la realidad transformada (Realidad II)

El retorno a la realidad profesional deconstruida se hace ahora desde una posición conceptual y perceptiva cualitativamente diferente a la situación de inicio del proceso. Es importante remarcar que este retorno no debe ser entendido como el final del proceso sino como un momento de un continuo aprendizaje - deconstrucción - aprendizaje, es decir, como una fase de un proceso de cambio y transformación permanente.

***Noveno momento**:* el inicio de una nueva deconstrucción

La deconstrucción y mejora de las prácticas profesionales son, en realidad, procesos inacabados y de búsqueda permanente que afectan constantemente a los saberes y las prácticas sedimentadas y consolidadas. En este sentido, la lógica reflexiva y reconstructiva que la deconstrucción supone, forma ya parte de los modos de percepción, los estilos cognitivos y las formas de trabajo del profesional, convirtiéndose así en un profesional crítico-reflexivo.

Conclusiones

En las investigaciones realizadas por el grupo de la línea llamada las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, se han dado evidencias de la existencia de prácticas del uso de las matemáticas, que no siempre son reconocidas por los actores de la comunidad, además se ha mostrado también que no son las mismas prácticas, por lo que, la hipótesis que gira alrededor de investigaciones desarrolladas a la par de esta es, que la deconstrucción de prácticas, puede ser un vínculo entre las comunidades de profesionales del área y comunidades escolares.

Sostenemos que mediante la deconstrucción de las prácticas se puede encontrar la esencia de las mismas para reconstruirlas mediante diseños de aprendizaje, y así llevarlas al sistema educativo,

esto sería el vínculo entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares de las matemáticas.

Algunas dificultades que se presentan ante este estudio es el hecho de no pertenecer a la comunidad en donde se ejerce la práctica, lo cual provoca dificultades para entender las herramientas usadas en las comunidades, así como para encontrar la intencionalidad de esta práctica.

Sin embargo el caso "Belmont" muestra evidencias claras acerca de esta hipótesis, por lo que podemos afirmar que hemos encontrado una propuesta adecuada para investigar este problema.

Consideramos que para utilizar la deconstrucción como una metodología de la modelación es necesario conocer la intencionalidad de la práctica, ya que esto nos garantiza el poder aportar soluciones específicas a los problemas encontrados.

Con respecto a lo anterior creemos que las prácticas pasan por un ciclo, primero son prácticas sociales por que generan entre otras cosas organización social, luego mediante el ejercicio de ésta, evolucionan de manera que en algún momento llega a su constitución, esto se determina por que durante este proceso de evolución las intenciones de la práctica cambian.

Por lo expuesto anteriormente creemos que la experiencia y la deconstrucción de las prácticas sociales pueden ser un vínculo entre las dos esferas en las cuales se enmarca nuestra problemática.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista iberoamericana de educación 43*, 85-101

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aul*a. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida, *¿Cómo no hablar? Y otros textos.* Suplementos Antrhopos, 13, 86 – 89.

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida (1930-2004). *Anales del Instituto de Investigaciones Estéticas, 84,* 179 – 188.

Sánchez, F.; Miramontes, P.; Gutiérrez, J. (2002). *Clásicos de la Biología Matemática.* México.: Siglo XXI editores.

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2008). Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

LOS PROCESOS DE DIFUSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL COTIDIANO. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Karla Margarita Gómez Osalde, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
kmgomez@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Presentamos una investigación donde, con la teoría Socioepistemológica (TS), la difusión del conocimiento científico es el objeto de estudio. Esta visión implica considerar una construcción social del conocimiento, la cual consiste en cuestionar no la matemática en sí, sino su función social. Se trata de estudiar los procesos de difusión del conocimiento matemático cuando se piensa en el ciudadano que conforma una sociedad no necesariamente científica. Con la TS se problematiza la relación entre el dominio científico y el cotidiano. El análisis mismo de la relación destaca dos aspectos: el estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento en una situación específica y la manifestación de ese conocimiento con una intencionalidad no necesariamente científica: el cotidiano. El resultado del estudio conlleva cuestionar la necesidad de ampliar los episodios de aprendizaje del estudiante en el aula al cotidiano del ciudadano como referente educativo.*
Palabras clave: Socioepistemología, difusión, socialización, cotidiano y funcionalidad

Introducción

El objetivo que este trabajo pretende es estudiar, bajo la Teoría Socioepistemológica (TS), los *procesos de difusión* del conocimiento matemático en una sociedad no necesariamente científica, que por la naturaleza del estudio se le llamará "lo cotidiano". Con esto, se presume proporcionar un nuevo estatus epistemológico a los procesos de difusión del conocimiento, lo que conlleva a problematizar el significado de lo que es la difusión, su problemática fundamental, los elementos que intervienen, entre otros.

Entonces, ¿qué se debe entender como difusión del conocimiento? Conviene para ganar un mejor contexto, abordar sobre tres aspectos indispensables cuando se discute sobre el tema. Así, un primer aspecto a considerar es la relación estrecha entre producción y difusión del conocimiento. Cómo imaginarse un conocimiento socialmente establecido sino es por el resultado de su difusión. En ese sentido la producción y la difusión no pueden estar disociadas, incluso se podría decir que la difusión es un "proceso natural" o 'intrínseco" de la producción del conocimiento. Un segundo aspecto que atañe podría ser la generalización del concepto difusión. Tal vez podríamos decir que toda "acción del conocimiento", a pesar que no se realice con esa intensión, es difusión: extender,

propagar, esparcir, transformar, comunicar, entre otras. Un tercer aspecto es el foco de la difusión del conocimiento, es decir, el lugar de la difusión, en donde se difunde. Esto puede ser dentro del dominio científico o fuera de éste. Así, podríamos pensar que no toda difusión del conocimiento es igual, (Cordero y Gómez, 2009). Ahora bien, si conjuntamos los tres aspectos pudiera surgir otro más: ¿para quién difundir, para la ciencia o para la sociedad? Para ser más precisos: ¿para la sociedad científica o para la sociedad no necesariamente científica?

La ciencia, por su tradición, sabe difundir su conocimiento para la ciencia. Además, tiene instrumentos y métodos propios. Saben medir la difusión y establecer factores de impacto de la misma, pero parece que no es lo mismo para la sociedad no necesariamente científica. Efectivamente, hay una gran diversidad de programas de difusión de la ciencia en el mundo para la sociedad, que suelen llamarse de divulgación. Todos ellos con la noble intención de lograr una divulgación *ad hoc* de la ciencia. Sin embargo, parece ser que éstas han vivido como un servicio del conocimiento científico (Cordero, Albores, Briceño, Cabrera, Canché, Cen, Gómez, Miguel, Silva, Simón, Soto, Viramontes y Zaldívar, 2009). Esto quiere decir, que el campo de conocimiento está en la ciencia, no en la divulgación. La divulgación es el servicio que pudiera expresar la buena voluntad del científico por difundir su saber a los no científicos. Pero a pesar del enorme empeño la difusión de la ciencia no ha sido el objeto de estudio disciplinar.

Si lo convertimos en objeto de estudio, posiblemente podríamos saber cuál es el fenómeno fundamental de la difusión del conocimiento científico para una sociedad no necesariamente científica, cómo sucede la transposición de ese conocimiento en la difusión y cuál es la función de la difusión en ese ámbito. El punto importante es que de no tomar la difusión como el objeto de estudio, se perderían elementos que proporcionan una explicación más robusta, no en sí de la difusión sino del fenómeno de difusión del conocimiento científico.

Ampliación de la Problemática: Del Estudiante al Ciudadano

La problemática fundamental identificada surge al momento de soslayar el conocimiento que se desarrolla en la vida cotidiana en la construcción de nuevo conocimiento. Esto es, aunque la ciencia es creada por la sociedad y comienza con razonamientos basados en la experiencia, posteriormente para su desarrollo construyó formas de pensamiento que le permitieron ir más

allá de lo empírico, lleno de abstracciones y generalidades. Esto da paso a la generación de nuevo conocimiento sin reconocer como legítimo aquel conocimiento del ciudadano no científico. Es importante hacer notar que al hablar del ciudadano no es con intención de hablar de un hombre de la ciudad, sino que, se va a entender por *ciudadano* como aquella persona parte del cotidiano y que, como tal, cuenta con un rol específico dentro de éste de manera que su actividad es afectada y afecta a su cotidiano.

En la educación matemática, lo que esta problemática ocasiona es fomentar la centración en los objetos matemáticos como único referente para la construcción del conocimiento matemático, por tanto, la participación de la labor humana en esta construcción es nula. Es necesario recuperar la parte humana en la construcción del conocimiento y es precisamente el cotidiano lo que permitirá conseguirlo. Por tanto, resulta conveniente ampliar la problemática para lograr que estos elementos tengan cabida. Así, de enfocarse en los estudiantes de matemáticas en el aula, es preciso entender primero el cotidiano de los ciudadanos que se tienen enfrente. Se requiere ver al ciudadano que participa activamente en la vida cotidiana y que la modifica. Es importante que en el aula de matemáticas ya no se piense en el alumno, sino en el ciudadano.

Esta visión implica considerar una construcción social del conocimiento, la cual consiste en cuestionar no la matemática en sí, sino su función social. Por ello se debe considerar los factores históricos y sociales que normaron la construcción de la ciencia. En palabras de Arendt (2005):

> *…Cosas y hombres forman el medio ambiente de cada una de las actividades humanas, que serían inútiles sin esa situación; sin embargo, este medio ambiente, el mundo en que hemos nacido, no existiría sin la actividad humana que lo produjo… (Arendt, 2005, p. 51).*

Al respecto, Berger y Luckmann (2006) expresan una visión acerca del papel del conocimiento en la sociedad. Dejan ver que hablar de la construcción social del conocimiento es algo más que pensar en lo relativo a la sociedad, "… es la sociedad como parte del mundo humano, hecho por hombres, habitado por hombres y que, a su vez, forma hombres en un proceso histórico continuo", (Berger y Luckmann, 2006, p. 231).

La Teoría Socioepistemológica

Partiendo de la hipótesis de que el conocimiento se construye socialmente, se requiere ubicar la atención hacia aquellos aspectos funcionales que promueven el uso del conocimiento matemático, más que centrarse en el conocimiento en sí, en sus definiciones y objetos matemáticos propios. Precisamente, dentro de la TS se ha favorecido al desarrollo de una matemática funcional, es decir, la matemática vista como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano (Cordero y Flores, 2007).

La funcionalidad juega un papel importante ya que permite entender la naturaleza dual de la matemática, permite distinguir que hay ocasiones en que la matemática es un objeto de estudio, pero en otras ocasiones adquiere un carácter de matemática funcional cuando adquiere sentido en prácticas de referencia que no son propiamente matemáticas. Nos encontramos ante la necesidad de fomentar una matemática funcional, aquella matemática que se integra a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente en la vida, (Cordero, 2005).

Para efectos de la investigación, lo que se busca es proporcionar una explicación, bajo la TS, de los fenómenos de difusión matemática en una sociedad no necesariamente científica, esto es, en el cotidiano. Por lo que, la socioepistemología nos brinda resultados de la construcción del conocimiento matemático.

La Socialización de la Ciencia

Berger y Luckmann (2006) afirman que para explicar la construcción social del conocimiento es necesario hablar sobre una relación dialéctica entre el conocimiento y una base social, donde esta última es entendida como aquella estructura social que permite un mundo socialmente construido donde el propio organismo humano se transforma. En esta dialéctica se destaca que el conocimiento es un producto social y un factor de cambio social. En el contexto de esa relación se distinguen, para el análisis de los procesos de difusión, dos grandes dominios: el científico y el cotidiano (ver Figura I). El dominio científico como esta parte crucial donde se genera el conocimiento estructural y el dominio cotidiano como la base social donde se expresa lo funcional. Ambos dominios indispensables para conformar esta dialéctica que permite dar explicaciones de

la construcción de la realidad socialmente compartida y, desde luego, de la construcción del conocimiento.

Cada dominio cuenta con prácticas propias que logran caracterizarlo como tal. Por lo tanto, aparecen prácticas que generan la cientificidad o la no cientificidad, es decir, una persona puede ejercer en dos dominios, el humano y el científico. Así, se distingue que bajo una visión social de la construcción del conocimiento, se tendría que hablar de una relación dialéctica entre el dominio científico y el cotidiano, donde se deja ver la manera en que éstos evolucionan mutuamente, es decir, para que cada dominio evolucione necesita uno del otro. La ciencia transforma el cotidiano, pero a la vez el cotidiano transforma a la ciencia.

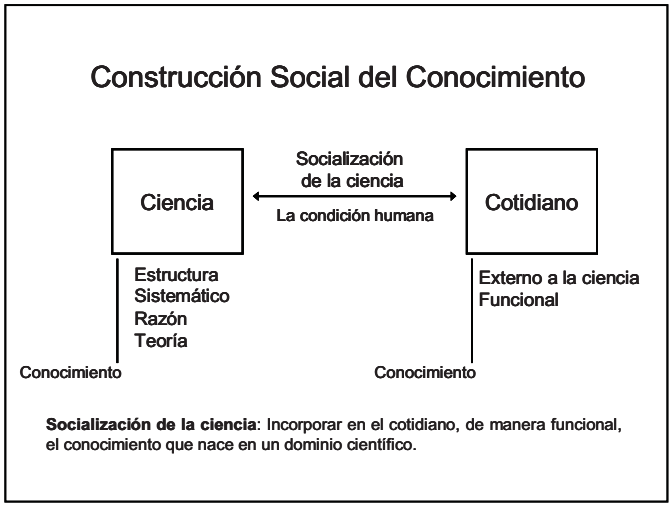


Figura I: Esquema explicativo del fenómeno de Socialización de la Ciencia

El conocimiento entonces, obedece tanto a la ciencia como al cotidiano, esto es, el conocimiento que se genere dependerá del conocimiento ya construido, de los contextos sociales, de los instrumentos existentes, de los ideales predominantes, de los intereses, de los fenómenos sociales, de los requerimientos propios de la época, entre otros. Con base en esto, lo que se tendría que buscar son aquellos elementos que permitan dotar al estudio de una explicación más detallada y robusta de esta relación entre el dominio científico y el dominio cotidiano. Entender cómo vive el conocimiento donde lo que impera es la justificación razonada y cómo vive el

conocimiento donde domina una justificación funcional, así como las relaciones entre ellos, la transposición del conocimiento científico al cotidiano y por el contrario, el cotidiano en la ciencia.

Así, se reconoce indispensable estudiar la manera en que se construye el conocimiento para entender que lo que un individuo realiza para construir el conocimiento es un proceso reconocido como *socialización*. El ciudadano (no necesariamente científico), al pertenecer a la sociedad, tiende a desarrollarse individualmente, para ello, debe mantener su identidad a la par de su realidad. A este proceso es lo que se reconoce como *socialización*, "la inducción amplia y coherente de un individuo en el mundo objetivo de una sociedad o en un sector de él", (Berger y Luckmann, 2006, p. 164). Por tanto, es en la dialéctica entre el dominio científico y el cotidiano donde se encontrará inmersa la socialización del conocimiento científico, como se muestra en la Figura I.

Si el objetivo es lograr una difusión del conocimiento científico, es decir, si se necesita una intencionalidad de ser difundido el conocimiento, se requiere intencionalmente de construir un enlace entre las prácticas que caracterizan cada dominio. Esto obliga a salir del dominio científico, obliga a proporcionar un lugar primordial al tipo de conocimiento generado en el cotidiano para favorecer la socialización.

La manera de distinguir que efectivamente hubo socialización de un determinado conocimiento científico, es cuando se afecta al cotidiano, es decir, cuando se logra incorporar en el cotidiano, de manera funcional, dicho conocimiento que nació en el dominio científico. Esto es, en términos más genéricos se podría entender que si hablamos de difusión hablamos de socialización y que, tal vez, sea un concepto más amplio y conveniente en lugar de establecer la diferencia entre difusión y divulgación.

Con lo discutido anteriormente conviene entender que la función de la difusión del conocimiento científico es lograr la socialización de la ciencia, esto es, afectar el cotidiano de manera funcional.

La Funcionalidad y el Cotidiano en un Escenario de Divulgación

Se realizó un análisis cualitativo de una situación de "difusión" y la cual tiene como base un marco funcional de la matemática para resignificar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales (Zaldívar, 2009). Para ello se pone en juego el estatus epistemológico de la funcionalidad del

conocimiento y su manifestación en el cotidiano a través de evidenciar la compatibilidad de estos dos elementos.

Fueron tres los escenarios de divulgación científica que se analizaron: Cinvesnin@s 1-2008 del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN), XI Semana de la Ciencias y las Humanidades del Colegio Guadalupe en el D.F. y en el programa de La Ciencia en las Calles del ICyT del D.F. Cada uno de ellos se lleva a cabo en instituciones en la Ciudad de México, D.F., con la visión de acercar la sociedad a la ciencia. Por la naturaleza de los escenarios, en general, se obtuvo un público de edades muy diversas, desde niños de educación básica, pasando por los jóvenes, hasta personas de mayor edad.

En esta experiencia lo que se pretende es discutir cómo una situación específica, diseñada bajo el sustento de una categoría de matemática funcional, la categoría del comportamiento tendencial de las funciones *ζ(ctf),* actúa en un cotidiano específico, en este caso, en un ambiente de divulgación científica. El comportamiento tendencial de la función es intrínseco a la gráfica, lo que le permite ser el *argumento* de la situación y con ello, la reconstrucción de significados. Esto es, la resignificación es formulada por la categoría del comportamiento tendencial de las funciones *ζ(ctf),* (Cordero, 2001).

El aspecto relevante consistió en el *uso* sistemático de trayectorias de los participantes, desde su cotidiano, a pesar de las modelaciones gráficas tiempo-distancia, que ofrecían los sensores. Se entiende por trayectoria a aquel "dibujo" (ya sea escrito, expresado, gesticulado o cualquier otra forma) que exprese el comportamiento del fenómeno estudiado (ver Figura II). Mientras que la asintoticidad, matemáticamente hablando, se puede apreciar cuando $x \to \infty$, en el cotidiano se ponen en juego elementos como líneas, rapidez, altura, picos, tamaño, peso, etc., todos diferentes a la asíntota de una función. Así, este cotidiano nos provee de elementos importantes para resignificar la estabilidad. En el cotidiano "lo estable" se refleja en la idea que se tenga de tendencia, cualquiera que ésta sea, no necesariamente asintótica.

Se distingue entonces una categoría, la cual conviene llamarle Comportamiento Tendencial ζ(ct), la cual surge en el cotidiano para discutir sobre lo que sucede en la situación de movimiento y donde no se pretende debatir ninguna función específica, sino que surge cuando se busca dar explicaciones sobre el tipo de movimiento que está en juego (Cordero y Gómez, 2009).

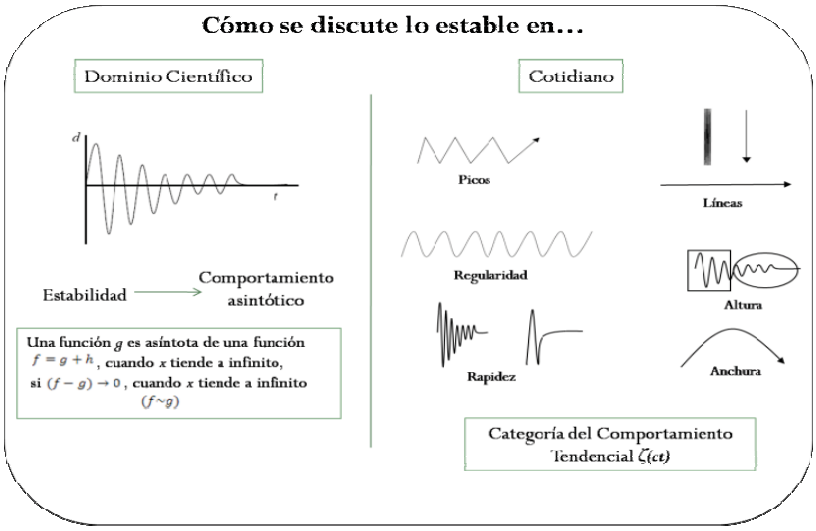


Figura II: "Lo estable" expresado en el Cotidiano

Se distinguen dos elementos insoslayables en los estudios de socialización: la *funcionalidad* y el *cotidiano*, puesto que expresan el conocimiento y el ambiente propio del ciudadano. Se formula así un nuevo estatus epistemológico de los procesos de difusión del conocimiento matemático, donde la intencionalidad radica en que el diseño de situación debe basarse en un *marco de funcionalidad* y con ello afectar al cotidiano. Esta visión pone en el escenario de la Matemática Educativa el rol de la justificación funcional, la cual presume de interactuar, de manera natural, con las realidades que construye el ciudadano.

Referencias bibliográficas

Arendt, H. (2005). *La condición humana*. Madrid: Paidós.

Berger, P. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4* (2), 103-128

Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 477-482. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Albores, A., Briceño E., Cabrera, L., Canché, E., Cen, C., Gómez, K., Miguel, M., Silva, H., Simón, G., Soto, D., Viramontes, I. y Zaldívar, J. (2009). *Cinvesniñ@s. Una experiencia de difusión del conocimiento científico.* Documento presentado para su publicación.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. y Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático: la funcionalidad y el cotidiano*. Documento presentado para su publicación.

Zaldívar, J. (2009). *Una caracterización de la función en un escenario de difusión de la ciencia des de una visión Socioepistemológica. El caso de la resignificación de lo estable.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LOS USOS DE LAS GRÁFICAS EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LO ESTABLE EN UN ESCENARIO DE DIFUSIÓN DE LA CIENCIA

José David Zaldívar Rojas, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
jzaldivar@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta una investigación en la cual reportamos los usos de las gráficas en diferentes escenarios de divulgación de la ciencia cuando se trabajan ideas gráficas relacionadas con la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. En dichos escenarios de difusión se propone una situación de modelación del movimiento (SMM) que, con ayuda de calculadoras y sensores de movimiento, genera discusiones en la que los participantes hacen un uso de las gráficas que se generan con la calculadora o que ellos proponen. Dichos usos tienen un carácter funcional y un sentido específico que no dependen de las propiedades analíticas de la función que ahí interviene. En el desarrollo de dichos "usos" entre los participantes consideraremos la resignificación de lo estable cuando se pone en juego el momento en el que el comportamiento asintótico generado por las calculadoras o propuesto por los participantes alude a la forma de la tendencia dada.*
Palabras clave: Usos de las gráficas, resignificación, cotidiano

Introducción y problemática

Esta investigación surge ante una necesidad de desarrollar una propuesta *ex profeso* para la divulgación de cierto conocimiento matemático dentro de un programa de difusión, cuya intención era integrar a los niños y niñas al desarrollo de la ciencia en el país (Cordero, *et al,* enviado para su publicación).

De acuerdo a lo anterior, se realizó una revisión bibliográfica sobre aspectos de la difusión y de la divulgación de la ciencia y se notaron algunas dificultades y críticas relacionadas a estos aspectos. Entre dichas críticas se encuentra, que la divulgación de la ciencia es considerada como una actividad de servicio, es una opción educativa no formal, donde se trata de hacer del conocimiento algo ameno y *divertido,* utilizando para ello un lenguaje claro y libre de tecnicismos. Las propuestas de divulgación se basan en el sensualismo de sus actores, además de que no se tiene claro el significado, impacto social e ideología de los programas de divulgación (González, 2003).

Bajo las consideraciones anteriores, es que se decidió diseñar el taller "Conozca al Señor Movimiento" (TCSM), cuya intencionalidad era la difusión de conocimiento matemático (Zaldívar,

Briceño y Cordero, 2009). La base del diseño del taller parte de la idea de que "difundir" es integrar un dominio científico en el *cotidiano* del ciudadano, donde la función de la difusión debe ser la de afectar dicho cotidiano (Cordero y Gómez, enviado para su publicación). Es por ello que consideramos como una problemática *la ausencia de un marco de referencia sobre los usos de las gráficas que los participantes realizan en un escenario de difusión de la ciencia cuando se discuten ideas relacionadas con la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes constantes.*

Es así que se decidió realizar varias experiencias del taller, con la finalidad de caracterizar los elementos que ponen en juego participantes del taller cuando se enfrentan a una situación de modelación del movimiento en un escenario de divulgación. A partir de las experiencias creamos un marco de referencia sobre los usos de las gráficas que los participantes manifestaban desde su *cotidiano*. Es decir, nos esforzamos por entenderles no desde su formación escolar "formal", sino desde su "sentido común", sus "creencias", a lo cual nos referiremos como "lo cotidiano".

Metodología

El TCSM se llevó a cabo en diferentes escenarios de difusión realizados por diversas instituciones. Los escenarios en los que estuvimos inmersos fueron: Cinvesniñ@s 1-2008 (Cinvestav-IPN); XVIII Semana de las Ciencias y Humanidades (Colegio de Guadalupe, S.A.), Platicando sobre Ciencia (Instituto de Ciencia y Tecnología D.F. (ICyT DF) y La Ciencia en las Calles (ICyT DF). Los escenarios fueron diferentes entre sí, pues se contaba con un público muy variado en edades y en formaciones escolares, así como también la asistencia al taller. Esto motivaba a que las actividades del mismo fueran evolucionando de manera distinta en cada uno de los escenarios, sin embargo, notamos una participación entusiasta de los asistentes que se sentían atraídos principalmente por la tecnología y la situación de movimiento propuesta. Se realizaron más de 15 experiencias del taller entre los diferentes escenarios anteriormente mencionados, con una participación promedio de 15 personas en cada experiencia. Las edades iban desde niños hasta personas adultas. Justamente al enmarcarnos en escenarios de difusión, esta es una variable no controlada durante todas las experiencias.

El taller se dividió en dos partes, una donde se discutían aspectos de variación del movimiento y otra que trata específicamente de la estabilidad. En este trabajo analizaremos esta segunda parte del taller. El objetivo de esta parte del taller era que los participantes desarrollen ideas relacionadas con *lo estable* en el comportamiento, y no así de la "estabilidad matemática". Lo anterior mediante la discusión y explicación de ciertos comportamientos con tendencia. En este último aspecto radica la epistemología de lo estable. Es de esta forma que nos acercamos más a una matemática funcional, donde los usos que se realicen del conocimiento son cruciales en las explicaciones de los participantes.

En dicho taller, se presenta una situación de modelación del movimiento (SMM), que consiste en un sistema Masa-Resorte-Amortiguamiento (Figura 1). Con el empleo de calculadoras y de sensores de movimiento por parte de los participantes, así como de sus producciones escritas y orales, se dirigen las discusiones hacia la *predicción, anticipación e imitación de comportamientos, los cuales presentan una cierta tendencia.* Los participantes discuten aspectos relacionados con *lo estable*, siendo la ecuación diferencial asociada al fenómeno físico no explícita para ellos, de ahí que el taller persiga desarrollar lo estable en los participantes y no definir la estabilidad.

Figura 1. El instrumento de modelación

Los participantes simulan, observan y explican resultados del movimiento a través de las gráficas que se obtienen con las calculadoras o que algunas veces eran propuestas por los participantes. Justamente en los aspectos anteriores es donde consideramos que los participantes hacen un "uso de las gráficas" para explicar un fenómeno escolarmente enmarcado en el tema de la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales.

La Socioepistemología es la perspectiva teórica que sustenta este trabajo, puesto que proporciona herramientas para formular construcciones de conocimiento, llamadas epistemologías, que

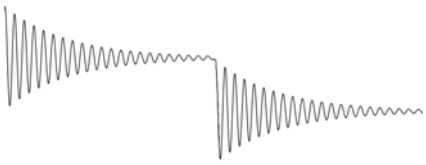
tengan como eje central una situación de uso de las matemáticas en un contexto específico, además de llamar la atención hacia los usos del conocimiento en situaciones específicas. Nuestra SMM está basada en el Binomio Modelación-Graficación (Suárez, 2008), pues tenemos una intencionalidad en el uso de las gráficas de los participantes del taller. Dichas prácticas de modelación y graficación se ven robustecidas gracias a la categoría del Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF), la cual, mediante argumentos gráficos, nos permitió realizar patrones deseables de comportamiento y discutir aspectos sobre ajustes en la estructura de los comportamientos gráficos. Es decir, hay un uso argumentativo ya que la gráfica pasa a ser un elemento central en explicaciones y, con esto, las gráficas adquieren un nuevo significado a la luz de sus usos en la situación.

Presentamos a continuación algunas de las preguntas que dirigían el trabajo de los participantes en el taller:

TCSM

1. ¿Cómo es el dibujo del movimiento de un resorte cuando se le pone una pesa debajo?;
2. ¿Qué forma tendrá la gráfica del movimiento del resorte al paso de 10 minutos?;
3. ¿Cuáles son las diferencias entre estos dos comportamientos (gráficas)? ¿A qué se deben?

4. ¿Qué pasa si al resorte le ponemos dos pesas?, ¿cambiará la gráfica?
5. ¿Qué pasaría con la gráfica si ponemos una pesa y después de cierto tiempo transcurrido ponemos otra?
6. ¿Qué tuvo que pasar para obtener una gráfica como la que se muestra?



Cuadro 1

La primera actividad trata de resaltar los aspectos "naturales" que los participantes poseen sobre el movimiento del resorte. Se les pide que dibujen el movimiento de la situación física. Las producciones de los participantes son principalmente trayectorias, es decir, flechas verticales con dirección y de doble sentido (Figura 2).

En un segundo momento, se continúa con una confrontación cuando se realizan diferentes preguntas sobre los elementos de las propuestas de los participantes, principalmente sobre si el resorte se detiene o no, y si se detiene, dónde se puede observar en el dibujo que proponen en la primera actividad. Esta es la confrontación central de la situación, puesto que en este instante se propone a las calculadoras gráficas y a los sensores de movimiento como los medios con los cuales se puede obtener "la gráfica del movimiento" del fenómeno (Figura 3). La tecnología es usada tanto por los participantes como por los encargados del taller.

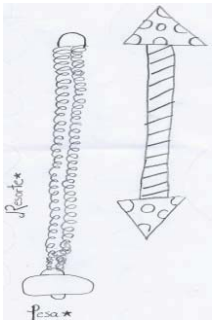


Figura 2. Ejemplo de producción de Trayectorias

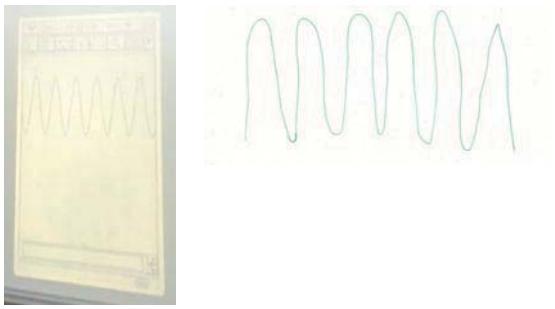


Figura 3. Las curvas con la calculadora o realizadas por los participantes

Posteriormente se pregunta sobre el comportamiento de la gráfica del movimiento del resorte pero cuando hayan transcurrido 10 minutos de haber iniciado el muestreo con la calculadora (Figura 4). Esta es la actividad que comienza a tratar sobre los aspectos de lo estable, pues se trata de que los participantes predigan el comportamiento de la situación y anticipen la forma de la gráfica que representaría lo que se solicita.

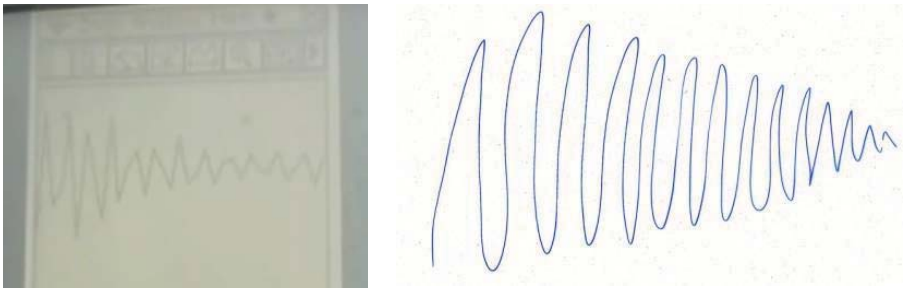


Figura 4. Las curvas después de 10 minutos (con la calculadora y una curva realizada por un participante).

En posteriores actividades se solicitan las diferencias sobre el comportamiento de dos curvas que representan el movimiento de resortes y también sobre los efectos en la curva cuando se realiza alguna alteración en los elementos del fenómeno y viceversa.

Resultados y discusión

Presentaremos una actividad y algunos extractos que se desprenden de las producciones de los participantes. Se consideraron las producciones escritas, las argumentaciones, los comentarios y las gesticulaciones de los participantes como nuestros datos sobre los cuales se realizaron los posteriores análisis a partir de las videograbaciones de las experiencias.

La actividad que se propone es sobre la forma de la curva pero cuando hayan transcurrido 10 minutos (actividad 2, Cuadro 1), de un extracto de la experiencia que se realizó en La Ciencia en las Calles:

EXT-LCC.S2.06.06.09-30:12

D: *¿esto qué es?* (se refiere a la forma de la curva que la participante realiza)

P: *montañitas…*

D: *¿montañitas?... pero usted puso una recta… esto es una recta… ¿por qué una recta?...*(después de las montañitas se encuentra una recta. Figura 5)

P: *porque está parado…*

D: *¿Qué está haciendo allá?*

P: estabilizado *o… la elasticidad que tiene deja al resorte estable… y ya*… (Realiza con las manos un movimiento de arriba para abajo y lo va deteniendo poco a poco.

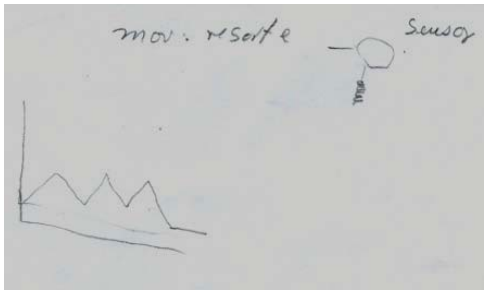


Figura 5. Curva realizada por una participante

A partir de este tipo de intervenciones es que delimitamos un marco de usos de las gráficas poniendo énfasis en los *funcionamientos y formas* de las gráficas (Cordero y Flores, 2007). Para este caso, los participantes realizan un *uso de la curva,* poniendo especial atención en la forma final de la curva propuesta, es decir, desde lo que nosotros admitimos como "lo cotidiano": *lo estable se encuentra en la parte final de la curva que modela el comportamiento del resorte.*

Los usos que reportamos son los siguientes y además se presenta la manera en la que los participantes representaban del fenómeno:

I. El uso de la Trayectoria

I.1. Lo estable está en la dirección de las flechas realizadas por los participantes.

II. El uso de la Curva

II.1. Lo estable está en lo periódico de la curva. En los aspectos regulares de la forma.

II.2. Lo estable se encuentra en la parte final de la curva que modela el comportamiento del resorte.

II.3. Lo estable se encuentra en la amplitud de las ondas de la curva y en los picos.

III. El uso de la curva para analizar comportamientos entre dos curvas propuestas.

IV. El uso de la curva para analizar estructuras a partir de "alteraciones" en el fenómeno físico o en la gráfica que lo representa.

De acuerdo a los usos que reportamos a partir de las experiencias y de lo que los participantes al TCSM exhibieron, podemos afirmar que dichos "usos de las gráficas en lo estable" tienen un sentido específico que no dependía de las propiedades analíticas de la función que intervienen en

la situación, sino que las gráficas, o mejor dicho, las curvas que los participantes proponen o que la tecnología presenta, son los argumentos empleados para explicar los comportamientos. De hecho, nunca se trabaja con una gráfica de una función explícita, sino con comportamientos y curvas normados por el movimiento. De ahí, que concluyamos que hay una clara diferencia entre nuestra propuesta y otras propuestas sobre el uso de las gráficas.

Es así que el paso de la resignificación, o sea, el *uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes* (Cordero, 2008) se presenta cuando el comportamiento asintótico propuesto por los participantes alude a la forma de la tendencia que se les plantea (Figura 7).

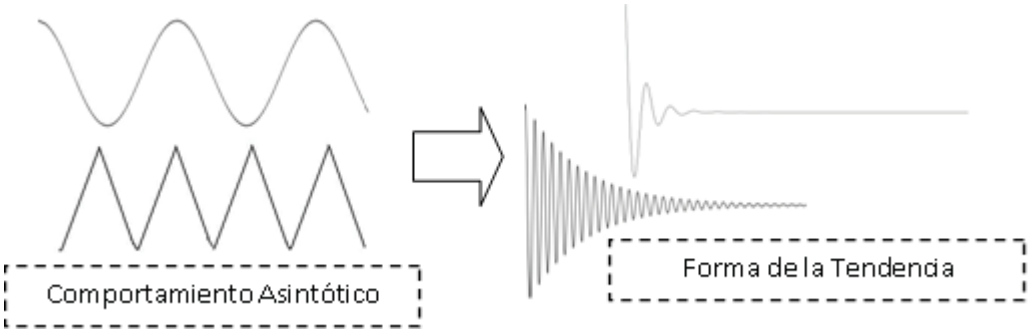


Figura 7. El paso de la resignificación

Conclusiones y reflexiones finales

A partir de nuestro análisis de usos pretendemos entender más a fondo qué significa “afectar un cotidiano” desde nuestra perspectiva de investigación. Así mismo, cómo podemos interpretar ciertas situaciones como *rutinas* y desarrollar otras (Berger y Luckmann, 2006), con el fin de avanzar hacia una caracterización de una construcción de conocimiento en escenarios de difusión, todo motivado por los usos que realizan.

Por otro lado, podemos notar que en el modelo matemático, la estabilidad se expresa por una idea de asintoticidad, es decir, el concepto que rige en la estabilidad de las soluciones es la asintoticidad. Lo anterior significa que la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencia con coeficientes constantes se discute a través de una *x* que tiende al infinito, con una fuerte idea

en el límite. Sin embargo, resulta que en nuestras experiencias vemos que el "cotidiano específico" no usa argumentos de cuando *x* tiende a infinito. La "estabilidad" en dado caso, la expresan en otras cosas: los picos, la amplitud de las curvas, en las rectas.

Con ello queremos decir que es importante dejar de considerar a este tipo de espacios como meras actividades lúdicas, recreativas e informales. Es necesario entender que en estos escenarios de difusión hay inmersos diversos fenómenos cuando se trata de llevar la ciencia a las esferas de la sociedad, pues acarrean sus propias dificultades y problemáticas que, sin duda, son muy diferentes a las que se encuentran en un salón de clases.

Con nuestro diseño de situación y la posterior delimitación de nuestro marco de usos de las gráficas, mostramos una manera de insertarnos en programas de difusión y mirar la producción de un "cotidiano" cuando se enfrentan a actividades diseñadas para la difusión del conocimiento matemático. Es una manera de "desescolarizar el saber" y mirar cómo es usado por los ciudadanos, además de que la socioepistemología nos permite discutir aspectos cuando nos alejamos del salón de clases.

Llamamos la atención con nuestro marco de usos de las gráficas de una categoría más cercana a lo funcional y al cotidiano. A dicha categoría ha convenido llamarle *Categoría del Comportamiento Tendencial*, pues para los participantes la *curva* que formulaban era lo importante a la hora de discutir sobre el movimiento, además de que este normaba dicha "curva". Dicha categoría no está expresada en términos del *infinito*, sino de comportamientos con tendencia.

Referencias bibliográficas

Berger, P. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad.* Madrid: Amorrortu.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 2 (1), 56-74.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*

(pp. 285-309). México, D.F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A.C.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38.

Cordero, F., Albores, A., Briceño, E., Cabrera, L., Canché, E., Cen, C., Gómez, K., Miguel, M., Silva, H., Simón, G., Soto, D., Viramontes, D., Zaldívar, J. Cinvesniñ@s. Una experiencia de difusión del conocimiento científico**.** *Avance y Perspectiva.* (Enviado para su publicación).

Cordero, F. y Gómez, K. Los procesos de difusión del conocimiento matemático: la funcionalidad y el cotidiano. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Enviado para su publicación).

González, M. (2003). *La divulgación de la ciencia en su discurso frente al público.* Tesis de maestría no publicada. Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN, México.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Zaldívar, D., Briceño, E. y Cordero, F. (2009). *Una experiencia de modelación del movimiento en un programa de difusión de la ciencia* [Resumen]. Documento presentado en el XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Matemática Educativa. Toluca, Estado de México.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL SALÓN DE CLASES. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral-Uriza
Universidad Autónoma de Guerrero, Cinvestav-IPN México
gcabanas.sanchez@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado, socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El estudio analiza desde las interacciones en el salón de clases, los usos del área que ponen en funcionamiento estudiantes universitarios, al realizar transformaciones analíticas vinculadas al concepto de área como integral. Asimismo, de cómo las intervenciones del profesor orientan la actividad matemática del salón de clases en diversos momentos: al introducir una situación de enseñanza, durante la actividad independiente de los estudiantes y al trabajar en pequeños grupos. Los resultados indican que aparecen cinco formas de usos del área: se utiliza para comparar, conservar, medir, calcular y representar superficies. Las intervenciones del profesor se orientaron a apoyar la actuación de los estudiantes, y se observaron en tres distintos: al introducir la situación de enseñanza; durante la actividad individual y en equipo. En algunos momentos sus intervenciones actuaron a modo de criterio de autoridad durante la actividad de los estudiantes.*
Palabras clave: Actividad matemática, usos del área, interacciones en el aula

Introducción

La discusión que se presenta en este escrito es parte de una investigación más amplia que estudia cómo se resignifica la integral definida en el salón de clases. La problemática que en ella se asume, es la articulación escasa que se establece —desde el punto de vista de la didáctica— entre el concepto de área como objeto geométrico y como integral definida. Su resignificación se instituye a dos niveles: a) a nivel de una situación de aprendizaje, y; b) a nivel de la puesta en funcionamiento de dicha situación en el aula de matemáticas. La situación de aprendizaje se conformó de actividades, que tomaron como marco de referencia un estudio de usos del área en la matemática en un contexto estático (véase Cabañas y Cantoral, 2008a). Asimismo, los diversos procedimientos que se ponen en juego en el funcionamiento de tales usos. Las actividades se organizaron y desarrollaron en tres etapas: Etapa 1. *Elementos geométricos del área*; Etapa 2. *Aspectos geométricos y analíticos del área (en el proceso de definición del concepto de integral definida)*. Etapa 3: *Aspectos analíticos del área*. La primera se orientó a aproximar a los estudiantes al concepto de área a través transformaciones geométricas, en el que se vincularon diversos usos del área. En la segunda, a que construyesen la definición del concepto de área como integral

definida a partir de los usos del área ya explorados. La última etapa, se orientó a que los estudiantes pusieran en funcionamiento los usos del área mediante transformaciones analíticas. La actividad matemática que aquí se discute, se ubica en la etapa 3. Es así que en este manuscrito se busca dar respuesta a las preguntas siguientes: *¿Qué usos del área ponen en juego los estudiantes al realizar transformaciones analíticas? ¿Qué efectos didácticos producen en los estudiantes las actuaciones del profesor al momento en que decide intervenir durante el desarrollo de la actividad matemática en el salón de clases?*

Visión socioepistemológica en la resignificación del área como integral definida

La investigación de la cual emerge este escrito está basada en la Socioepistemología, marco teórico que se interesa por explicar los fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas, mediante el examen del papel que desempeña la construcción social del conocimiento desde un enfoque sistémico (Cantoral y Farfán, 2003). Incorpora para ello cuatro componentes: la cognitiva, la epistemológica, la didáctica y la social. Las componentes cognitiva, didáctica y epistemológica, contribuyen en la explicación del funcionamiento didáctico, con la componente social se busca afectar el sistema educativo en el rediseño del discurso matemático, al abordar el estudio de prácticas, previo a la construcción de conceptos.

Una resignificación del área como integral desde la Socioepistemología, se sustenta en los usos que le ha dado la humanidad al concepto de área, resultado de un análisis *a priori,* acerca del área como objeto geométrico y como integral, y que fueron reportados en Cabañas y Cantoral (2008a, 2008b). Estos usos se organizaron alrededor de la noción de la conservación del área como una función normativa de la actividad de los estudiantes y un profesor durante la explicación de la integral en situación escolar. Es decir, como una *práctica social* que norma la actividad del salón de clases en un momento específico. Se evidencian en una situación de aprendizaje.

El estudio centrado en los usos se apoya en la tesis de que las entidades matemáticas además de conceptos y afirmaciones tienen usos, mismos que han sido puestos en funcionamiento o utilizados por los grupos humanos en y ante situaciones y contextos diversos (Cabañas y Cantoral, 2009). Del mismo modo, por la importancia que tiene tanto para la didáctica como para nuestra investigación, el atender a una significación de los objetos matemáticos centrados en los usos del

conocimiento matemático de manera funcional. Los usos a su vez, están asociados a contextos situacionales distintos, así como a determinados procedimientos (Cabañas y Cantoral, 2008a, 2008b).

La manera en que se explora la conexión que los estudiantes establecen entre el concepto de área con el de integral definida, se concibe mediante los usos del área que pusieron en juego en ese proceso, así como en las explicaciones escritas, verbales o gestuales. En algunas de sus explicaciones aparecen aspectos como *forma*, *tamaño* y *posición relativa* de las representaciones en el plano involucradas en la actividad. Igualmente, de los procedimientos llevados a cabo para realizar las transformaciones correspondientes.

Métodos y participantes

Desde el punto de vista metodológico es un estudio cualitativo, con carácter interpretativo. El estudio involucró a Martín, un profesor de matemáticas y a sus estudiantes. Los datos son resultado de las observaciones realizadas durante la puesta en funcionamiento de la situación de enseñanza y fueron recolectados a través de videograbaciones.

Los estudiantes

Participaron veintisiete estudiantes de una licenciatura en Matemáticas (21-24 años) durante un curso de Cálculo Diferencial e Integral —al momento en que la integral definida era objeto de enseñanza—, así como el profesor titular de la asignatura, quien se hizo cargo de poner en funcionamiento la situación de aprendizaje bajo la cual se resignificó a la integral definida. Los antecedentes académicos de los estudiantes fueron tópicos relativos a Geometría y Cálculo Integral, particularmente geometría euclidiana e integral definida. Esto nos aseguraba al menos hipotéticamente, que disponían de los conocimientos previos requeridos para llevar a cabo el estudio.

El profesor Martín

Martín es un profesor con una formación en una licenciatura y una maestría en Matemática Educativa. Se ha desempeñado por seis años como profesor de matemáticas en los programas de licenciatura que ofrece la institución en la que labora. Sus actividades están centradas en dictar cursos de Geometría, Cálculo, Variable Compleja y Análisis Matemático, y en proporcionar asesorías a sus estudiantes. Cuando se le invitó a colaborar en el proyecto aceptó con mucho entusiasmo, pues lo consideró como una oportunidad para desarrollar nuevos roles. El rol de Martín en esta actividad, además de poner en funcionamiento la situación de aprendizaje, consistió de organizar y dirigir la actividad matemática. Y aun cuando no será objeto de discusión en este artículo, vale la pena señalar que a Martín se le invitó para que resultado de su actividad en el aula, así como de sus intervenciones, la construcción del concepto de integral se diera por los propios estudiantes.

La situación de enseñanza

El estudio se fundamenta en el análisis de la actividad matemática que se desarrolló en el salón de clases al momento en que los estudiantes trabajaron sobre una situación de enseñanza referida a funciones de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > 0$, $n \in Z$ sobre un intervalo cerrado. La situación que se discute en este reporte es la siguiente:

> Bosqueja las gráficas de las expresiones: $f(x) = 4$, $g(x) = ax$, $h(x) = bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área.

La situación de enseñanza se articula a las transformaciones analíticas. Se discutió una vez que la integral definida fue objeto de estudio. Está centrada en el *uso* explícito o implícito de la conservación del área, como una *norma* de las actividades que llevaron a cabo los estudiantes. A su vez, de conceptos asociados como la comparación, representación y cálculo del área, de las regiones que representan las funciones algebraicas.

Formas de organización e interacción en el salón de clases

La forma de organización de la actividad en el aula se pensó de tal manera, que contribuyera a que los estudiantes interactuasen con la situación en tres momentos diferentes: (a) trabajo individual, (b) trabajo en pequeños grupos y (c) discusión de toda la clase, en la que se esperaba que presentaran y discutieran las actividades que llevaron a cabo en el proceso de solución de la situación. La actividad del salón de clases se describe a partir de las consideraciones siguientes:

I. La actividad del profesor al momento en que introduce la situación. Ello involucró sus explicaciones, las orientaciones o ayudas que ofreció a los estudiantes.

II. Las interacciones del profesor y los estudiantes durante el trabajo individual y durante el trabajo en equipo.

La actividad matemática en el salón de clases

I. La actividad del profesor (P) al introducir la situación

El profesor inicia con una lectura de la situación de enseñanza (primer renglón). Enseguida, para ayudar a los estudiantes a aproximarse a la solución de dicha situación, en su lectura orienta a una reflexión —así lo indica y se exhibe desde sus explicaciones— sobre varios aspectos: a) El grado del exponente de las funciones objeto de estudio; b) la forma de la gráfica de las funciones, según el grado de su exponente, y; c) el intervalo en el que se estudiará a las funciones. Por ejemplo, menciona que la función $g(x)$ es de primer grado y $h(x)$, de segundo grado. A su vez, hace notar que las gráficas de tales funciones pueden aludir ya sea a rectas o a curvas. Al final de su intervención en esta etapa de la actividad matemática, el profesor les recuerda cuál es el intervalo en que se estudiarán dichas representaciones.

Se muestra mediante el párrafo siguiente cómo el profesor introduce la actividad en la clase.

> [58] Profesor: ...Sobre el intervalo cero coma cuatro....que tengan la misma área... empiecen a trabajar la ... la actividad . . .
>
> [...] Se escuchan voces de los estudiantes, quienes intentan involucrarse en la actividad. Sin embargo, el profesor continua con su lectura y explicación.
>
> [59] Profesor: Después de que trabajen con la actividad. . . vamos a conversar sobre la pregunta... se pide que... *en el caso de la función g(x)* ... igual a *ax... equis está elevado al*

> *exponente uno*... ¿no? Entonces pueden ustedes reflexionar acerca de que... *pase lo que pase con los valores de a*... del parámetro *a*... pueden ustedes más o menos... representar gráficamente... cómo es la. . . la curva de esa función... o si no es una curva... o si es una recta. Y en *la tercera función* es $h(x) = bx^2$ ... *fíjense que la variable x está elevada a la dos* ... ustedes *pueden analizar cómo es el comportamiento gráfico... de las funciones de segundo grado*... ¿sale?... para el caso anterior, cómo es el comportamiento de las funciones de primer grado?... *obviamente nos piden representarlas en el intervalo que va de cero a cuatro ... que es donde queremos estudiar ciertas condiciones...*

En su lectura, Martín exhibe implícitamente, qué es lo que los estudiantes deben explorar y analizar de la situación. Se entremezcla a manera de lectura y explicación.

II. Las interacciones del profesor y los estudiantes en la discusión que se presenta durante el primero y segundo momento de interacción con el saber [Discusión individual y la discusión en equipo].

Como resultado de las acciones de los estudiantes sobre la actividad —tanto en el trabajo individual como por equipo—, se observó que un *primer uso del área* que aparece como parte de sus acciones sobre la situación, fue la representación del área de la región (a manera de bosquejo) debajo de las gráficas de las funciones involucradas, en el intervalo [0,4]. Para el caso de la primera, representaron un cuadrado, para la segunda, una recta y exhibieron la porción de área objeto de análisis, que la ubicaron sobre un triángulo. Igualmente para el caso de la tercera, representaron una parábola. Un segundo *uso* que se presentó fue *el cálculo* del área de la región. Aquí aparecieron procedimientos basados en la fórmula para calcular el área de un cuadrado, del triángulo y en la integral definida. Un tercer uso que se exhibe desde las explicaciones de los estudiantes es el *uso de la comparación* de regiones de área, al momento en que se les sitúa a explorar las representaciones de las regiones de área respectivas.

Por otra parte, se observó cómo en algunos momentos de la actividad individual por parte de los estudiantes, el profesor persuade a alguno de ellos para que se apoyen en la integral definida para calcular el área de las regiones involucradas. Comentamos a continuación el caso de María, una chica que para determinar el área de la región que representa de la función $f(x)=4$ en el intervalo [0,4], se apoya en la fórmula para calcular el área de una cuadrado y así se lo hace saber al profesor cuando la cuestiona al respecto.

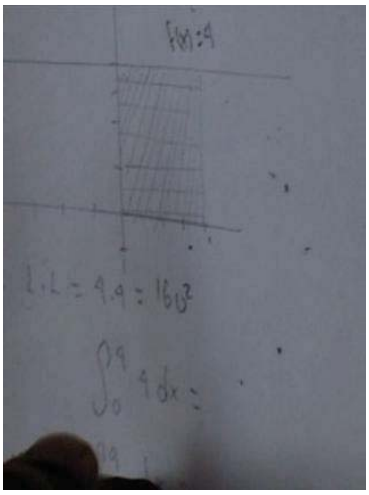


Figura 1. María calcula el área del cuadrado por medio de la integral definida, a partir de la intervención del profesor.

[76] Profesor: Aquí cómo le hiciste para calcular el área de éste (el profesor se refiere a la función $f(x)=4$)
[77] María: Es un cuadrado... usé lado por lado
[78] Profesor: ¿Y si en ese momento no tuvieses presente la fórmula de lado por lado?
[79] María: Pues aplicaría la derivada...
[80] Profesor: ¿Cómo sería la derivada?
[81] María: ¡La integral!
[82] Profesor: ¿De qué función?
[83] María: De cuatro
[...] María se apoya en la integral para calcular el área del cuadrado (ver figura 1)

La intervención del profesor actúa como un criterio de autoridad en María y se refleja al momento en que ella decide calcular el área del cuadrado, apoyándose en la integral definida. Sin embargo, se observó que se le presentan dificultades para trabajar con ese algoritmo y el profesor intervino en diversos momentos, fin de que ella reorientara sus explicaciones.

La discusión de todo el grupo, la originó el profesor a partir de los resultados que mostraron los estudiantes en su trabajo en equipo. El profesor observó por ejemplo, dos formas de trabajar con la actividad: una que se apoyó sólo en la integral definida y otra que usó tanto a la integral definida como las fórmulas para calcular el área del cuadrado y del triángulo (referidas a las regiones de área representadas por las funciones $f(x)=4$ y $g(x)=ax$). Y es que para el caso de la función $h(x)=bx^2$, los estudiantes argumentaron que solo mediante la integral definida podrían determinar el valor del parámetro *b*. La intervención del profesor en esta etapa, fue para invitar a los integrantes de dos equipos, que presentaran y discutieran con sus compañeros, las acciones que realizaron en el proceso de solución de esta actividad. A manera de ejemplo, se

muestra cómo un equipo explica las acciones que llevaron a cabo para trabajar con la actividad (con la función $f(x)=4$), en la que usaron a la integral definida.

> [91] Rubén: Bueno, el primer ejercicio que hicimos fue bosquejar las gráficas de las funciones... esta es la función $f(x)=4$. Nosotros pensamos que la gráfica era así... que va del intervalo 0 a 4... de 0 a 4... y como tiene un valor de 4 pensamos que era un cuadrado... y así nos da... entonces para ... para sacar el área de esta región... 4*x* de 0 a 4..

La primera acción que Rubén lleva a cabo es la representación de la gráfica de la función. Enseguida representa el área correspondiente, se apoya para ello en el intervalo [0,4]. Posteriormente escribe el algoritmo mediante el cual determinará el área de esa región y lo resuelve. Nuevamente aparecen aquí, dos usos del área, su representación en el plano cartesiano y el cálculo del valor correspondiente. La comparación como un uso se presenta durante la discusión de las formas de las representaciones de áreas de cada región. Durante la discusión con todo el grupo, el profesor hace ver a los estudiantes que los procedimientos para determinar el valor de los parámetros no son únicos, y como ejemplo, los remite a las explicaciones que exhibieron los integrantes de los dos equipos que participaron en la discusión en grupo. Interesa señalar aquí, que si bien la actividad requirió determinar el valor de los parámetros *a* y *b*, la discusión tanto por los estudiantes como por el profesor, se dio alrededor del área de las regiones: de cómo se calcula, se conserva y se representa. La comparación se evidencia al momento en que se analizan tanto la medida del área como su respectiva representación.

Discusión final

Se evidenciaron cinco tipos de usos del área desde los procedimientos de los estudiantes: El área es susceptible de ser conservada, comparada, representada, calculada y medida mediante diversos procedimientos. Los procedimientos que pusieron en juego los estudiantes para calcular el área fueron de tipo algorítmico, particularmente fórmulas, en algunos casos, como parte de las intervenciones del profesor. Para representar el área se apoyaron del plano cartesiano. La comparación de áreas se identificó al momento en que visualizaron las regiones de área representadas, así como entre las funciones algebraicas y la medida del área, la cual se conservó.

Las intervenciones del profesor se orientaron a *apoyar* la actividad de los estudiantes, y se observaron en tres etapas distintas: a) al introducir la actividad, b) durante la actividad individual, y; c) durante la actividad en equipo. En la primera etapa por ejemplo, al leer la actividad enfatizó en el grado de las funciones algebraicas involucradas en la situación, a fin de centrar la atención de los estudiantes en ese aspecto —se entremezcla a manera de lectura y explicación—. Durante la segunda y tercera etapa, sus intervenciones se orientaron a persuadir a los estudiantes al uso de determinados algoritmos, tal es el caso de la integral definida, aún cuando no se requería.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. Cantoral, R. (2008a). Estudio socioepistemológico del área y la integral. *Abstracts of the History and Pedagogy of Mathematics, The HPM Satellite Meeting of ICME 11*, p. 29. México, D.F. 14-18 July, 2008.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2008b). Studying arguments in mathematics classroom. A case study. *Topic Study Group 24: Research on Classroom Practice*. México: Icme-11. July, 2008.

Cabañas-Sánchez, G., Cantoral-Uriza, R. (2009). Representación de los conceptos de área e integral definida en la didáctica. En G. Buendía (Ed), *Memoria de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa XII* (pp.314-326).

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27-40.

LOS PROCESOS DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL LÍMITE: UN ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Verónica Molfino, Gabriela Buendía
Instituto de Profesores "Artigas" — Uruguay
Cicata – IPN — México
veromolfino@gmail.com; gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Medio y superior

Resumen. *Se reportan los avances de una investigación sobre los procesos de institucionalización del concepto de límite cuyo objetivo es explicar cómo y por qué vive en la actualidad este concepto en el ámbito escolar. Al momento se ha analizado su desarrollo socio-histórico al interior de la comunidad matemática y algunos aspectos del tratamiento del concepto en el ámbito educativo uruguayo: libros de texto y prácticas educativas concretas, buscando explicitar el vínculo entre ambos contextos. Este análisis se desarrolla desde la aproximación socioepistemológica, permitiendo explicar de qué elementos se nutre la construcción social del conocimiento, específicamente del concepto de límite.*
Palabras clave: procesos de institucionalización, límite

Introducción

Esta investigación busca lograr una explicación acerca de cómo el saber matemático referido al límite de una función se volvió un saber institucionalizado. Para ello debemos considerar concepciones del conocimiento que brinden un marco para cuestionar su actual estado en la enseñanza a partir del análisis de sus procesos de construcción social.

Cordero (2006) distingue en la evolución de la matemática educativa como disciplina dos programas de investigación: los que prestan especial atención a los procesos cognitivos individuales y los que analizan la construcción del conocimiento en los escenarios socioculturales. Sin embargo, plantea que ninguna de estas aproximaciones permite explicar cómo un conocimiento se vuelve institucional -producto material social que debe ser enseñado y aprendido en las instituciones–, cómo los grupos se organizan, de qué se valen y qué métodos utilizan para constituir dicho conocimiento. Y ello porque ambas conciben al conocimiento como preexistente al sujeto que aprende, y descontextualizado de las prácticas de referencia que le dieron origen. Se hace necesaria entonces una concepción que se ocupe de explicar ya no cómo se construye el conocimiento –desde la perspectiva del individuo- sino cómo se constituye socialmente tal construcción, lo que permitiría explicar cómo un conocimiento se vuelve institucional.

Al reconocer la diferencia entre el Cálculo como saber y el Cálculo escolar, con una intencionalidad didáctica específica pero no siempre explícita, surge interés por analizar el estatus del cálculo en las instituciones educativas. Esta perspectiva permite entender la coexistencia en el sistema escolar de por lo menos dos concepciones: una más cercana a lo que es el Cálculo como 'saber' –institucionalizado a través de los libros de texto y de una tradición de enseñanza–, con conceptos y definiciones explícitas y centrada básicamente en los conceptos de función, límite, derivada e integral. Y otra que enfatiza el carácter intencional didáctico, centrada en los significados situacionales de los conceptos del anterior: predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006).

Desde la perspectiva socioepistemológica se ha trabajado para robustecer esta última concepción centrada en las prácticas sociales que generan el conocimiento, especialmente en la rama del Cálculo (Cantoral y Farfán, 1998, 2003; Cordero, 2006; Montiel, 2005). Sin embargo, la presente investigación propone analizar la primera de las concepciones –el Cálculo como saber-, ya que es la más difundida en el ámbito educativo uruguayo al punto de establecerse como un saber institucional ineludible en el diseño curricular de todo curso de Cálculo. Se espera así instaurar un debate sobre la construcción del concepto de límite. Investigar los aspectos que constituyen tal construcción permitirá brindar una explicación acerca de cómo el límite como saber matemático se volvió un saber institucionalizado.

La investigación tiene por objetivo realizar un análisis socioepistemológico de los procesos de institucionalización del concepto de límite, para explicitar las razones por las que se presenta en el ámbito escolar de la manera en que se hace actualmente. Una de las hipótesis que surge de tal análisis, es que la formalización y la generalización operarían como *prácticas sociales* durante el proceso de institucionalización del concepto. Ambas prácticas estarían ejerciendo un rol normativo sobre las decisiones que se han ido tomando en la matemática escolar conduciendo al hecho de que se debía aprender determinado concepto de límite, con determinado papel en la estructura del cálculo y de determinada manera.

Antecedentes y justificación

1. El discurso matemático escolar en Uruguay

En muchos países la concepción subyacente es la de un cálculo escolar estructurado alrededor de los conceptos de función, límite, derivación e integración. Existiría un supuesto implícito según el cual sin el tratamiento formal en la enseñanza de estos conceptos, en particular del de límite, no hay cálculo (Alanís, 2000). El análisis del discurso matemático escolar en Uruguay desarrollado hasta el momento sugiere que no escapa de lo anterior. Se suele favorecer un tratamiento predominantemente algorítmico, sin considerar actividades tendentes a priorizar abordajes más intuitivos. Se suelen también dejar de lado herramientas y argumentos propios de la génesis y evolución del concepto que apunten a su resignificación dentro del escenario sociocultural específico en el que se está re-construyendo.

Para dar cuenta del por qué de ese tratamiento es necesario analizar los procesos de institucionalización que llevaron a que el concepto de límite esté tan arraigado hoy como estructurador de todo curso de cálculo. Esto implica indagar tanto los procesos propios de la estructuración formal de la matemática como aquéllos que se produjeron y producen en el ámbito escolar, entendido en un sentido amplio: las instituciones educativas propiamente dichas, sus actores, los libros de texto, los programas, etc.

2. La noción de límite en la investigación en Matemática Educativa

Las investigaciones alrededor del límite pueden estructurarse en tres grandes grupos según el polo de la tríada didáctica en la cual se centran. Se mencionan aquí algunas de las referencias más significativas: aspectos cognitivos (Tall y Vinner, 1981; Vinner,1991), aspectos epistemológicos (Cornu, 1986; Sierpinska, 1987; Dubinsky, 2000) y aspectos didácticos (Bokhari y Yushau, 2006). En ellas se intenta explicar por qué los estudiantes no aprenden el concepto de límite, cuáles son los procesos cognitivos y didácticos relacionados con su aprendizaje y cuáles son las posibles alternativas de abordaje escolar.

También se analizaron investigaciones que enfatizan los aspectos socio-históricos de la construcción del concepto (Bagni, 2005; Blázquez y Ortega, 2002) para investigar el desarrollo de la construcción social del concepto de límite.

3. El límite como un saber institucionalizado

En las investigaciones señaladas no se reflexiona en forma explícita sobre por qué debe enseñarse el tema, cómo devino en un saber institucional ineludible y cuáles son las características de los escenarios socioculturales en los que se desarrolló que promovieron la necesidad de su formalización hasta la forma que hoy en día conocemos. Ello sugiere que se asume como única a la concepción del Cálculo como saber, que ubica al concepto de límite como el centro de la estructura formal.

Se propone problematizar esta concepción para comenzar a dar cabida, en las prácticas educativas reales, a abordajes del cálculo basados en significados situacionales referidos a las prácticas sociales. Para ello se entiende necesario un análisis del cómo es que esta concepción del Cálculo y del límite en particular está tan arraigada en nuestros sistemas educativos, cómo es que ha llegado a establecerse como un saber institucional ineludible en el diseño curricular de todo curso de Cálculo. Responder el cuestionamiento planteado permitiría explicar a la comunidad cómo se enseña el Cálculo en la actualidad, cómo vive en el contexto escolar y cómo y por qué la matemática escolar llega a decidir que debemos enseñar y aprender *ese* concepto de límite.

Fundamentos teóricos

1. Socioepistemología

Por su carácter sistémico, entendemos que la socioepistemología es un marco adecuado para analizar los aspectos cognitivo, didáctico y epistemológico inherentes a los escenarios socioculturales en los que se produce el conocimiento. Este marco quiere precisamente dar cuenta de la naturaleza social del conocimiento matemático, cómo se produce su construcción social (Cantoral y Farfán, 2003).

La socioepistemología concibe a los saberes matemáticos como un bien cultural producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir la realidad (Martínez, 2005). Se distancia de otras al no concebir al conocimiento matemático como preexistente al sujeto que aprende, sino que analiza las circunstancias sociales, históricas y culturales de los escenarios en los que se produce y difunde. Dicho proceso está normado por *prácticas sociales* inherentes a determinados grupos humanos. Se entiende a las prácticas sociales como “un conglomerado de supuestos

socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad" (Lezama, 2007). Ellas permiten explicar la generación y difusión del conocimiento matemático.

2. Transposición Didáctica

La ***transposición didáctica*** (Chevallard, 1991) se refiere al conjunto de transformaciones adaptativas que sufre un saber desde que es designado como saber a enseñar hasta que se convierte en un objeto de enseñanza. Explica el tránsito del saber sabio al saber susceptible de ser enseñado. Sin embargo, este proceso no parece dar cuenta de cómo y por qué es que ese conocimiento se convirtió en un saber a enseñar, qué es lo que, como en el caso del límite, lo convirtió en un objeto central en la construcción y difusión del Cálculo.

Este proceso se relaciona estrechamente con el de la institucionalización, término que nos remite ineludiblemente a la Teoría de Situaciones Didácticas de Bruosseau (1997). En ella la institucionalización aparece como la etapa en la que el profesor brinda un estatuto cultural a las producciones que los estudiantes elaboraron a partir de una situación adidáctica. Su objetivo es lograr que el estudiante reconozca el conocimiento a aprender como un objeto de saber ya establecido en la estructura matemática. Bajo una visión socioepistemológica, al reconocer el carácter social del conocimiento matemático y tratar de dar cuenta de su socio-epistemología, esta etapa se convierte en todo un proceso, que es al que se refiere la investigación: este proceso trasciende al profesor y a su trabajo en el aula, explica más bien cómo llega ese conocimiento a su aula, a través de qué mecanismos y por qué.

3. Institucionalización al seno de la socioepistemología

Las instituciones se consideran en un sentido dinámico como "entidades que posibilitan la conservación de saberes en las sociedades a través del tiempo" (García-Torres, 2007) y desde esta óptica, se entiende a la construcción de instituciones específicamente vinculada al proceso de instituir prácticas. Las instituciones cumplen pues el rol de preservar el conocimiento. Las prácticas asociadas a ellas cumplen así una función normativa, permitiendo explicar por qué las cosas se hacen de determinada manera.

Desde la aproximación socioepistemológica, resulta interesante desentrañar los *procesos de institucionalización* del conocimiento matemático: cómo se integra un determinado saber al cuerpo socialmente aceptado de conocimientos matemáticos y cómo se desarrolla dicho saber en las instituciones educativas. Esto implica estudiar qué es lo que favorece que se instituya un determinado conocimiento y no otro, qué prácticas norman la decisión de que ese conocimiento se torne central para una determinada teoría y qué factores socioculturales influyen en su difusión. Este análisis no sólo explicaría cómo un conocimiento se preserva en el tiempo, sino también cómo evoluciona e innova (Covián, 2005; Tuyub, 2008).

Podemos reconocer al menos dos aspectos a analizar dentro de los procesos de institucionalización: cómo el conocimiento llega a institucionalizarse, transformándose en saber, dentro de la comunidad matemática, y cómo es el proceso dentro de la matemática escolar, para transformarse en un saber ineludible de ser enseñado y aprendido. Esta investigación se centra principalmente en el segundo.

En particular, se asume que la definición formal de límite (épsilon-delta) fue incluida en los currículos escolares como resultado de un proceso de institucionalización, a través del cual en algún momento y por alguna razón se fue decidiendo que eso era lo que debía enseñarse sobre el límite en los diferentes niveles escolares (último año de Educación Secundaria y primeros universitarios). A su vez, consideramos que esa formalización del conocimiento no necesariamente se produjo como respuesta a una necesidad escolar, sino que podría estar respondiendo a otras demandas sociales, o más específicamente a demandas propias de la comunidad matemática. Es probable que cada etapa en el proceso hacia la formalización haya sido el resultado de una búsqueda hacia la construcción o resignificación de un nuevo conocimiento, que no podía ser edificado con la concepción anterior. Parte de esta investigación se ocupa precisamente de dilucidar cuál es ese conocimiento nuevo que permitió cada paso hacia la formalización del concepto. Se busca dar cuenta de ese proceso, explicitarlo para detectar herramientas que sirvan, por un lado, para aportar elementos a la discusión sobre la pertinencia de la estructuración de los cursos de cálculo en torno a la definición de límite, y por otro, para un robustecimiento de las prácticas educativas en torno al concepto, en caso de que se considere apropiado su tratamiento escolar.

En definitiva se busca dar cuenta de la naturaleza social del proceso de institucionalización escolar del límite. Introducir el debate sobre si es pertinente esta estructuración del cálculo es de suma importancia para discursos matemáticos escolares como el del Uruguay, con una larga tradición formalista.

Avances de la investigación

Hasta el momento se ha avanzado, por un lado, en el *análisis socio-histórico* de la construcción del concepto de límite buscando profundizar en el primero de los aspectos mencionados: cómo el conocimiento llega a institucionalizarse, estructurándose e incorporándose al corpus de conocimiento aceptado por la comunidad matemática. Para los intereses de la investigación, además de identificar las etapas que transitó el concepto de límite hasta su configuración actual dentro de la comunidad matemática y matemática escolar, es importante dar cuenta de las necesidades socioculturales a las que responde cada una de ellas, así como de las prácticas sociales asociadas al tránsito entre las mismas.

Generalmente se ubican los primeros indicios del concepto de límite y consideraciones sobre el infinito en los métodos empleados por los antiguos griegos para calcular áreas (Método de exhaución de Eudoxo y las aplicaciones de Arquímedes y Euclides) así como en las paradojas de Zenón (Blázquez y Ortega, 2002; Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006). Este concepto fue evolucionando, transitando una primer etapa caracterizada por la búsqueda de soluciones a problemas con métodos infinitesimales, otra etapa de transformación de los fundamentos en la que el móvil era la generalización a más funciones y una tercera etapa caracterizada por la aritmetización, y con ello la formalización y la elaboración de la definición formal tal cual la concebimos hoy. Para el tránsito hacia esta etapa fueron factores determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos y la evolución y extensión de la enseñanza de las matemáticas (Blázquez y Ortega, 2002). La difusión a un público creciente estaría promoviendo la clarificación y fundamentación del análisis para apoyarse en bases rigurosas. Formalización y generalización parecen ser móviles que favorecieron la construcción del concepto tal cual hoy lo conocemos.

Por otro lado, se ha analizado el *discurso matemático escolar* buscando respuestas al segundo de los aspectos vinculados a los procesos de institucionalización: cómo y por qué el saber llega a convertirse en ineludible en los programas. Se han considerado tres aristas: programas, libros de texto y cuestionarios a docentes con el fin de analizar las prácticas educativas y cuánto influyen los dos aspectos anteriores en la labor docente. Se ha venido constatando, tanto en libros de texto como en las prácticas educativas, el arraigo de la idea de que el límite es el concepto estructurador del Cálculo. Los profesores coinciden en que es un contenido necesario en todo curso de Cálculo, algunos por convicción personal y otros porque así lo exige el programa o la tradición. Estos comentarios servirán de insumo para robustecer el análisis de la institucionalización del concepto de límite, dando cuenta de cómo es que el concepto se enseña hoy y cuál es el lugar que ocupa en los cursos.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de cálculo. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal*, (pp. 233-246). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bagni, G. (2005) Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5(4), 453-468.

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas* 30, 67-84.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 37(5), 515–526.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield Eds. y Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Chevallard*, Y. (1991). La transposición didáctica: del* saber sabio *al* saber *enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica. En Cantoral et al. (ed.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Cornu, B. (1986). Les principaux obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM – APMEP* 352*,* 55- 63.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investivación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Dubinsky, E. (2000) A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. *Research reports in mathematics education* 1, Umea University, 1-18.

García-Torres, E. y Cantoral, R. (2007). Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. En G. Buendía y G. Montiel (eds.) *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 483 – 494). Mérida, Yucatán: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Lezama, J. (2007). Una mirada a la investigación en el campo académico de la Matemática Educativa en América Latina. Artículo en extenso para la *Conferencia magistral por invitación del Congreso Internacional Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas*. U. de G. y ANPM, México.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 195-218.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65 - 81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

OPTIMIZACIÓN-ESTANDARIZACIÓN UN MECANISMO PARA LA CONSTRUCCIÓN social DEl CONOCIMIENTO. EL CASO DE UNA PRÁCTICA TOXICOLÓGICA

Isabel Tuyub, Ricardo Cantoral, Francisco Cordero
Fmat-UADY. Cinvestav-IPN México
isabel.tuyub@audy.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación surge como resultado de estudiar prácticas científicas tomando como base prácticas sociales, explicando cómo se construye socialmente conocimiento apoyado en la funcionalidad de la matemática, en particular asociado a la noción de función. Para ello, se requirió inferir procesos de construcción de conocimiento de una práctica toxicológica a través de institucionalización de prácticas detectadas. Se identificó que el mecanismo de optimización-estandarización es el que caracteriza la práctica toxicológica debido a que .manifiesta qué es lo que permite hacer lo que hacen, por medio de su toma de decisiones.*
Palabras claves: Mecanismos de construcción, institucionalización, toxicólogos

Introducción

En la actualidad, a pesar de las reformas que se intentan implementar en la educación Mexicana basado en competencias, se sigue contemplando el aprendizaje de nociones matemáticas terminadas, donde pareciese que el papel de las matemáticas es estático; sin embargo, se considera que la importancia de esta ciencia está más en su sentido funcional, de tal forma que se requiere que la gente "viva" la experiencia, afronte la necesidad y así construya su conocimiento.

Estudiar prácticas proporciona una nueva visión sobre las nociones matemáticas, las que son necesarias para el ámbito profesional y para la vida, dotadas no sólo de conocimiento sino también de sentido común, experiencias, representaciones sociales, creencias, concepciones, socialización, entre otros (Tuyub, 2008).

En esta investigación, interesa inferir mecanismos que permitan caracterizar la construcción social de conocimiento a través de procesos de institucionalización de las prácticas; además de analizar qué tipo de matemática está inmersa, qué papel toma y cómo se manifiesta.

Marco teórico

Se eligió como marco teórico la Socioepistemología, caracterizada por el estudio de la construcción social de conocimiento matemático. Este enfoque no sólo estudia problemáticas inmersas en un contexto escolar al estudiar al profesor-alumno-saber, sino también al contexto sociocultural que lo rodea, qué lo afecta, lo que permite dar significado a los conceptos en uso. Investigadores de este programa están interesados por estudios de la construcción social de conocimiento matemático, por medio de la *descentración de conceptos* a través de las *prácticas sociales* que le dan origen (Cantoral y Farfán, 2003). Este enfoque permitió estudiar procesos de dicha construcción a través de inferir prácticas

Investigadores del Cinvestav-IPN, bajo este enfoque, consideran el estudio de *prácticas sociales* como aquellas que regulan y norman un conjunto de *prácticas* asociadas a un saber, que nacen de una necesidad para resolver determinado problema, establecen "lo que hace hacer lo que se hace" (Covián, 2005) y son generadoras de conocimiento matemático entre los grupos humanos; además de tomar en cuenta la matemática funcional a través de los *saberes funcionales* (Cordero y Flores, 2007).

Para ello, se realizó un estudio de una práctica científica que construya conocimiento innovador de gran impacto en su comunidad, a través de la práctica de un científico experto (M) en el área de toxicología (ciencia que estudia los efectos adversos producidos por sustancias químicas en organismos vivos), donde las matemáticas no son el objeto de estudio, antecedente que se encuentra en (Tuyub, 2008).

Problema de la investigación y objetivo

Anteriormente y en nuestros tiempos, se han estudiado nociones matemáticas para determinar cómo ser mejor enseñadas, aunque el foco no debe estar en el enseñar sino en el cómo aprender; además, no basta sólo estudiar cómo aprende alguien algún concepto o que el objetivo de la investigación se centre en encontrar dificultades que se afrontan ante un concepto para subsanar sobre el mismo; sino, estudiar cómo todo ciudadano aprende matemáticas; por lo tanto ¿existirá una manera de pensar la matemática para que pueda ser difundida y compartida socialmente?

¿Cómo se construyen los sistemas conceptuales? ¿Cómo se institucionalizan? En general ¿Cómo se construye el conocimiento?

Estudiar procesos de construcción a través de procesos de institucionalización, ante una situación problema de prácticas científicas, puede permitir mostrar una faceta diferente de las nociones matemáticas. Por ejemplo, cómo se aborda, caracterizar *mecanismos de construcción,* identificarlos, cómo influyen nociones matemáticas en dicha práctica. Todo ello con la intención de aportar y ampliar la visión científica de la Matemática Educativa.

El objetivo de la investigación, consiste en evidenciar cómo la dupla optimización-estandarización inferida de una práctica científica, se puede apreciar como un proceso de construcción de conocimiento, como la dupla mecanismo-intencionalidad, tomando como base las prácticas sociales y la importancia de los saberes funcionales en esa construcción.

Antecedentes

La presente investigación es uno de los resultados del estudio realizado por Tuyub (2008), en el cual enfatiza la función normativa de la práctica social por medio de prácticas, que permiten la construcción de conocimiento matemático con respecto a su *relación funcional,* reflejadas en lo que logra el continuo, por medio de los *procesos de institucionalización* de las mismas, en un contexto científico. Dichos procesos son *mecanismos* que hacen que el conocimiento sea así y no de otra manera (Cordero, 2006). Dichos procesos permitieron identificar los mecanismos de construcción de la investigación, los cuales, en primera instancia, fueron estudiados con el "modelo de permanencia y cambio" de Covián (2005), el cual sugiere estudiar el cambio a través de lo que permanece.

Un estudio que evidencia mecanismos de construcción de conocimiento matemático se localiza en el trabajo de García-Torres (2008); la investigadora comenta que los saberes se institucionalizan por la existencia de mecanismos que lo posibilitan, donde la práctica social aporta su función normativa; esto es, mecanismos propios de la institucionalización, donde la práctica social tiene un carácter normativo, resultado que obtuvo al estudiar una comunidad de ingenieros biomédicos en el hacer de materiales quirúrgicos.

Por ello, para identificar y determinar mecanismos con la intención de explicar cómo se construye conocimiento; se determinó qué es lo que permanece a través de lo que varía, pero a la vez, fue importante cuestionarse por qué varía, en el momento en que se realizó la práctica toxicológica, para el caso de la investigación.

Elementos metodológicos

Para inferir mecanismos de construcción, se utilizó la *observación participante* al momento en que, en una estancia postdoctoral, M realizaba un *protocolo* (conjunto de pasos a seguir que permiten la realización correcta de un experimento) sobre identificación y amplificación de genes que inhiben ciertos cánceres en el aparato reproductor masculino, estudiados en el ADN de cierta población.

La metodología empleada fue la *microetnográfica* (Ogbu et. al, 1988 citado en Moreira, 2002). Se consideró que analizar a profundidad prácticas de una persona situada en contexto permite el estudio de comunidad, pues las prácticas en sí no son exclusivas del experto sino de la comunidad misma, de ahí la pertinencia.

Se grabó en video, de manera constante, el quehacer cotidiano del científico experto; se realizaron registros de sus interacciones en escenas asociadas al *uso* del concepto de *función matemática*, llamada *functilidad*. El análisis de la información se realizó a través de la permanencia y cambio de prácticas de mayor incidencia en situaciones-clave, elegidas por la observación y el contexto de su práctica.

Análisis de los datos

Durante un período de ocho meses, se observó cómo M elaboró un p*rotocolo* para la obtención de los genes T1 y M1 en ADN de personas expuestas a pesticidas, dicha obtención es indispensable para identificar el porcentaje de la población que los poseen. Durante el período, se identificaron dos prácticas clave: obtención de ADN a partir de tejidos y análisis para la identificación de los genes. Dichas prácticas estaban organizadas y permitieron caracterizar la obtención del protocolo. A continuación se presentan los elementos que intervinieron en cada una de ellas:

Para la obtención de ADN, era la primera vez que M la realizaba, se basó en unas notas antiguas, que estipulaban una secuencia de pasos a seguir para una obtención adecuada; a pesar de tener la secuencia de pasos, conforme M realizaba la práctica clave una y otra vez, modificó algunos pasos, debido a que no estaba obteniendo resultados deseados, que es obtener un ADN limpio y puro, como se apreció en el siguiente fragmento:

Fragmento 1

> *E: ¿Por qué lo estás cortando? (Refiriéndose al epidídimo de ratón)*
>
> *M: Porque te acuerdas el otro día, bueno, este es un tejido muy duro y…el otro día no lo recuperé, este, también como que no, hay que romperlo y hacerlo así…entonces para que se disuelva mucho más rápido cuando le ponga el trizol... (Sesión 11. 5'42''-6'17'')*

En este fragmento se identificó que M hizo uso de su conocimiento y sentido común. En el fragmento 2, se observa que utilizó una sustancia llamada "trizol" para homogenizar, en lugar del homogenizador (instrumento que las notas que M seguía, señalaba debía usarse):

Fragmento 2

> *M: Te acuerdas que esto lo hacía yo con el ¡homogenizador! Y, ¿sí?, bueno, ya si te has fijado que esto lo he ido [habla como si se quiere reír] optimizado ¿sí? [Silencio]¡No! y aparte ¡la baba! y cosas así [risas] [silencio], y yo veía que la pastilla era ¡muy poquita! lo que obtenía. (Sesión 11. 6'20''-6'48'')*

En el discurso se pudo identificar que M cambia su práctica, no solo porque no obtenga el resultado que desea sino porque deseaba una optimización, obtener la cantidad de ADN mayor con un ahorro de esfuerzo.

En la figura 1 se esquematizan los cambios que realizó M debido a la toma de decisiones durante la obtención de ADN, apreciadas en las reiteraciones de esta práctica clave.

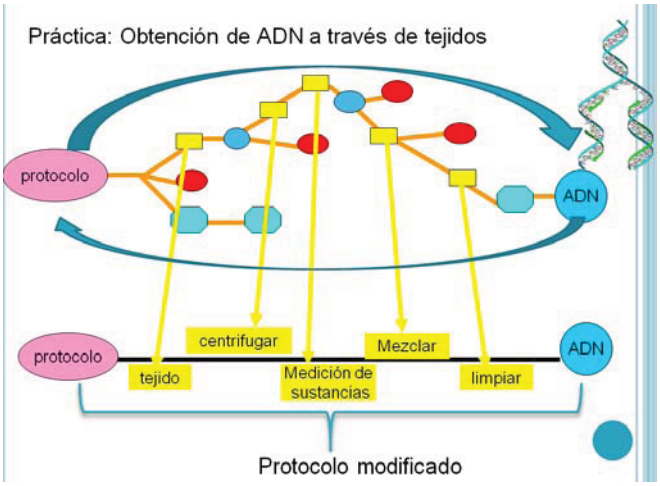


Figura 1. Esquema de la práctica "obtención de ADN a través de tejidos", realizada por un toxicólogo experto

Dentro de la práctica, se infirieron *tomas de decisiones* que dieron "luces" para identificar mecanismos de construcción, tomando en cuenta que identificar un mecanismo de construcción es encontrar los instrumentos y una intencionalidad, obtener un ADN limpio y puro, hace uso de todas las herramientas necesarias una y otra vez hasta obtenerlo de tal forma que siempre pueda alcanzar el mismo resultado con menos material, esfuerzo y tiempo posible, es decir economizar tiempo y esfuerzo es una intención, por tanto, el mecanismo está dado por la optimización-estandarización, como se expresa en el fragmento 3 y se esquematiza en la figura 2.

Fragmento 3

> *M: Si te fijas, o sea, cada vez que estoy haciendo esto, estoy haciendo cosas nuevas, optimizo ¿sí? Antes de, por ejemplo ahorita con este, no le voy a echar todo el trizol porque luego batallo para re suspenderlo, se lo voy a ir poniendo poco a poquito, que, sí viste que ahorita se lo eché todo y estuve batalle y batalle. (Sesión 14. 73' 35''- 74' 02'').*

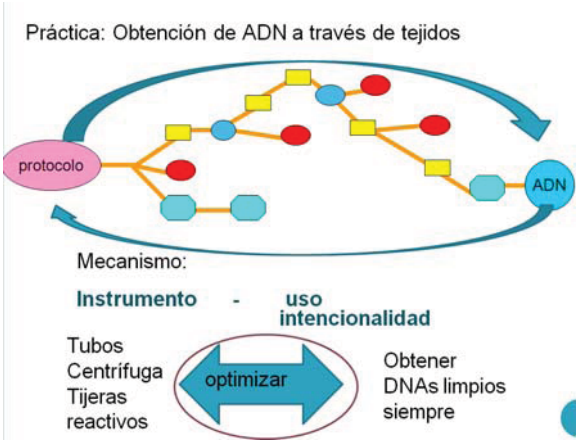


Figura 2. Esquema de la práctica "obtención de ADN a partir de tejidos", en el que se identificaron mecanismos de construcción como la dupla instrumento-intencionalidad

Una vez obtenido el ADN, M lo utiliza para ampliar los genes, al elevarlos a determinadas temperaturas y obtener una "foto" (como la que se aprecia en la figura 3) para ver si las cantidades que colocó son las deseadas. En esta práctica se pudo apreciar que el ADN, las mediciones, los datos sobre las temperaturas tienen una intencionalidad: obtener datos certeros siempre, con el fin de estandarizar logrado por la optimización.

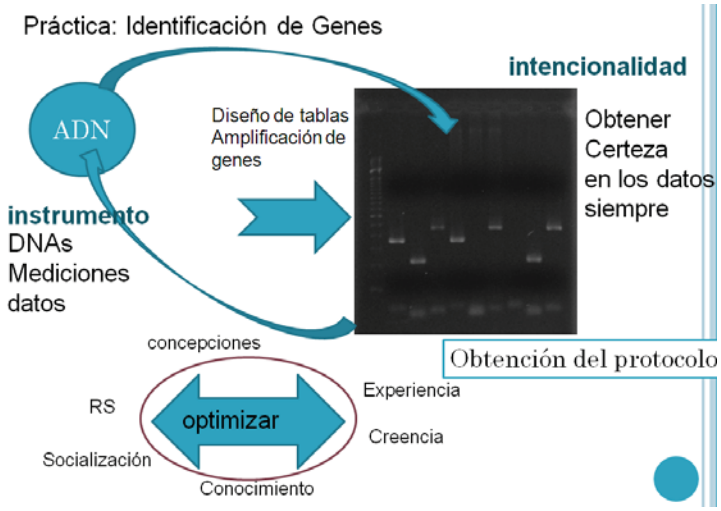


Figura 3. Esquema de la práctica "análisis para la identificación de genes", se apreciaron elementos de instrumento-intencionalidad y la optimización como pieza clave, movido por la socialización, el conocimiento, creencias, experiencia y concepciones.

El análisis de “fotos”, en realidad, es un uso de función reflejada en un análisis de “gráficas” en tres dimensiones: persona, intensidad y peso molecular, obtenidas de forma experimental, la cual, no está asociada a una fórmula. Dicho análisis permitió toma de decisiones, ya que por medio de ellas se determinó si su esfuerzo, en el que intervinieron conocimientos, expectativas, concepciones, creencias, entre otros, fue certero o se requiere modificar, en donde intervendrán nuevamente estos elementos. Es decir, la *functilidad* es importante para la toma de decisiones.

Consideraciones finales

Con base en el análisis se apreció la importancia de la *functilidad* y el mecanismo de construcción *optimización-estandarización*, M optimiza (economiza tiempo, esfuerzo, recursos sin perder la calidad y certeza de sus datos), con la intención de estandarizar. Es la dupla “mecanismo-función (uso)”, base del mecanismo empleado por M: tubos, centrífuga, reactivos (instrumento), los emplea en sus experimentos de forma óptima (mecanismo) con base en su experiencia, conocimientos, creencias, concepciones, representaciones sociales, con la intención de estandarizar (función).

Con base en este análisis se pudo inferir que el científico optimiza (en el sentido de economizar tiempo, esfuerzo, recursos sin perder la calidad y certeza de sus datos), para estandarizar, porque es clave para su comunidad, permitiendo el uso de conocimiento matemático para cumplir sus propios objetivos.

Identificar mecanismos en las prácticas permite inferir procesos que no son visibles, que no se expresan en lengua oral, sino que se infieren por medio de prácticas; permite caracterizar y dar indicios de por qué se hace lo que hace. Por medio de la *toma de decisiones*, se infirieron *procesos de institucionalización* para optimizar con intención de *estandarizar*, que en términos Socioepistemológicos se refiere a la dupla mecanismo-intencionalidad

El inferir mecanismos dentro de prácticas puede dar indicios de aplicación en el aula ya que se están localizando elementos significativos necesarios para el estudiante esté más cercano a la realidad. Además, identificar mecanismos dentro de las prácticas en el aula permite caracterizar elementos no visibles en el diálogo de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Moreira, M. (2002). *Investigación en educación en ciencias: Métodos cualitativos*. Recuperado el 6 de septiembre de 2007, del sitio Web del Programa Internacional de Doctorado en enseñanza de las ciencias de la Universidad de Burgos, España: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/metodoscualitativos.pdf

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LA IDENTIDAD Y LA ADHERENCIA EN LA FORMACIÓN DEL MATEMÁTICO EDUCATIVO EN LATINOAMÉRICA

Héctor Silva Crocci, Francisco Cordero Osorio
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav IPN México
hsilva@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *Latinoamérica por su historia ha sido considerada, en el ámbito científico como un consumidor del conocimiento, no así como un creador del mismo. La identidad latinoamericana surge como un programa de resistencia a tal herencia histórica. En este marco nos preguntamos ¿qué significa el surgimiento de la disciplina Matemática Educativa en el mundo?, ¿cómo se ha puesto en juego la identidad? y ¿cómo la universalidad de las problemáticas educativas y por ende, la ausencia de un marco de referencia educativo regional, conllevan a lo que hemos llamado fenómeno de adherencia?*
Palabras clave: Fenómeno de adherencia, identidad, marco de referencia

Introducción

Este trabajo de investigación nace al seno del quehacer de la disciplina de la Matemática Educativa (ME), en el cual nos hemos peguntado por los significados de los tres ejes que la generan, a saber: la formación de recursos humanos, la producción y la difusión, según las escuelas de pensamiento en cuestión. En ese contexto las reflexiones han girado en torno a por qué un grupo de investigación latinoamericano tuvo la necesidad de desarrollar una teoría diferente a las demás, y ponerla en competencia con teorías construidas en otros continentes. La naturaleza de las reflexiones son intrínsecas a la función de la disciplina, pero no así a su fundamentación. Es por ello que, hablaremos de identidad y adherencia a la luz de por qué se construye socialmente una teoría. Específicamente nos referiremos a la Teoría Socioepistemológica.

La importancia de realizar estudios de este tipo radica en sistematizar ciertos usos y costumbres en la formación de recursos humanos en la ME en Latinoamérica: Cómo el matemático educativo vive los procesos de transculturación cuando se forma en otro continente y cómo se enfrenta a la adherencia del marco teórico en cuestión cuando se tiene que responder a realidades regionales. En todo caso estudios en esta dirección aliviarían tendencias de incertidumbre del desarrollo de la ME en Latinoamérica.

En este sentido, destacamos que el foco de esta investigación no está en criticar la estructura teórica de un modelo educativo, ni en analizar las escuelas de pensamiento, ni los aspectos

filosóficos y de fundamentos de los marcos teóricos de la disciplina, sino más bien en identificar los roles de la identidad y los efectos de las adherencias.

La matemática educativa

Las sociedades a través de sus distintas instituciones, por alguna razón, se han visto en la necesidad de implementar modificaciones educativas en la enseñanza de la matemática. Generalmente estas modificaciones han sido dirigidas a la educación en general. Sin embargo, en la enseñanza de la matemática no se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, como tradicionalmente se le había confiado a la pedagogía y a la psicología, sino de problemas propios de la construcción social de la matemática (Cordero, 2001).

Diversos autores (Cantoral y Farfán, 2003; Cordero, Gómez y Viramontes, 2009; Cordero, 2008) señalan cómo en los años 70's surge un movimiento mundial independiente en el que las comunidades académicas, involucradas en la matemática y su enseñanza, realizan una reflexión profunda y deciden crear una "nueva disciplina" que estudie la construcción del conocimiento matemático y su ingreso a las instituciones educativas para dar respuesta a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Al seno de la disciplina nacen diferentes escuelas de pensamiento que de acuerdo a su ubicación geográfica y su historia reciben un nombre específico. Entre las escuelas más dinámicas, de acuerdo a nuestra experiencia, podemos señalar la escuela francesa, la escuela anglosajona y la escuela latinoamericana, que en cuyo quehacer como grupos de investigación, han tipificado elementos teóricos propios de acuerdo a las problemáticas que buscan atender. Elementos que a través del tiempo, se han consolidado como marcos teóricos (Cordero, Gómez y Viramontes, 2009). En este sentido ciertas visiones teóricas se preguntan por la construcción del individuo de cierto conocimiento especifico que sucede en el aula y otras se preguntan por la constitución social de tal construcción que sucede en las instituciones (Cordero, 2006).

Cordero et al (2009), señalan que los diferentes marcos teóricos correspondientes a la disciplina Matemática Educativa –*"por nuestra ubicación geográfica y escuela de pensamiento que nos cobija nos referiremos a la disciplina en términos genéricos como Matemática Educativa" (Cantoral*

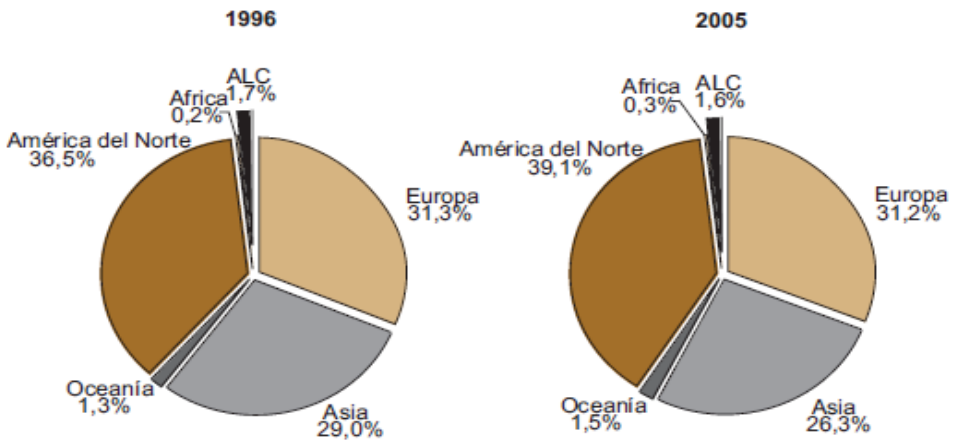
y Farfán, 2003) –, proporcionan una interpretación científica de los fenómenos que tienen que ver con la necesidad de aprender y poner en juego un saber matemático. Interpretación que va a depender de la problemática fundamental que les subyace o que ha declarado cada marco teórico.

Pero, ¿qué tan variados pueden ser los sistemas educativos donde se producen esos fenómenos? Para tener una idea referencial del funcionamiento del sistema educativo latinoamericano en comparación con otras regiones, presentamos, a continuación, algunos indicadores que nos entregan un panorama cuantitativo respecto a temas de inversión en investigación y desarrollo (I+D) y de recursos humanos.

Un marco de referencia latinoamericano y del resto del mundo

Una condición necesaria para el despegue de los países latinoamericanos en ciencia, tecnología e innovación depende de un nivel adecuado de inversión en I+D (RICYT, 2007). Tomando en cuenta esta referencia, en el *gráfico 1* podemos interpretar el estado en que se encuentra Latinoamérica respecto a otras regiones en estos temas.

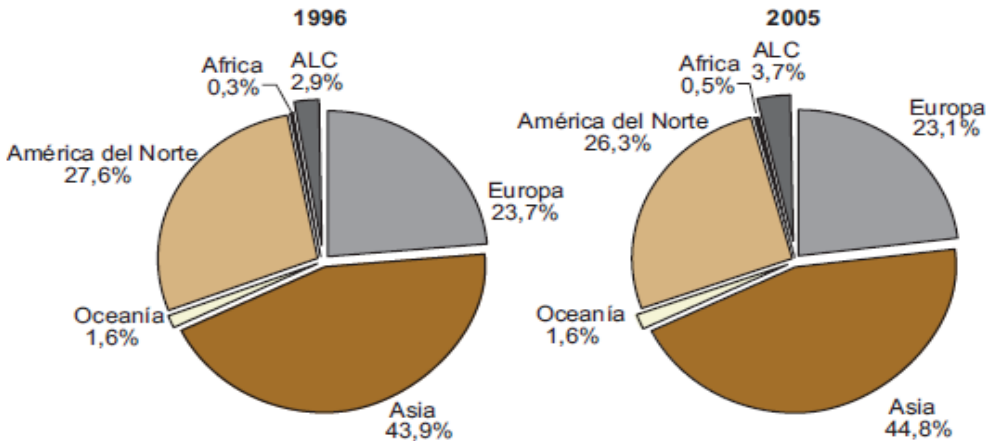
Gráfico 1: Inversión mundial en I+D según bloque geográfico, expresado como % de dólares (1996-2005.) Fuente RICYT (2007).



Según estos datos Latinoamérica está por debajo, en comparación con las regiones de los países llamados de primer mundo, en temas de inversión en I+D, situación que repercute en el desarrollo en ciencias, tecnología e innovación. Por otra parte, la cantidad de recursos humanos dedicados a la I+D en el mundo, medidos en equivalencia de jornada completa (EJC), creció de manera notable y sostenida, alcanzando un incremento neto del 35% al final del 2005 en comparación con 1996 (RICYT, 2007). Sin embargo, la región de Latinoamérica sigue rezagada en esta materia como veremos a continuación.

Los recursos humanos en EJC a nivel mundial están dominados por los países asiáticos 44,8%, seguidos por América del Norte y Europa con un 26,3% y un 23,1% respectivamente. Mientras que América Latina y el Caribe, en cambio, sólo cuenta con el 3,7% de dichos recursos (*Gráfico 2*).

Gráfico 2: Investigadores (EJC: equivalencia a jornada completa) según bloque geográfico (1996 y 2005). Fuente RICYT (2007).



Estos datos de inversión en I+D y de recursos humanos, nos dan una noción respecto al funcionamiento y diferencias que existen entre los sistemas educativos. A partir de ellos, podemos inferir que las problemáticas de las regiones deben ser distintas, situación que incidirá en la manera en que las escuelas de pensamiento enfocan su atención a los problemas de aprendizaje y enseñanza de la matemática.

Universalidad de las problemáticas de los sistemas educativos. Fenómeno de adherencia

Para explicar lo que es en sí el fenómeno de adherencia vamos a partir del siguiente planteamiento.

Los continentes con su historia construyen conocimiento por sus escuelas de pensamiento, de ahí por ejemplo la ME y la Didáctica de la Matemática, ninguna es la traducción de la otra, sino más bien son las expresiones de pensamiento de la disciplina. Han surgido Marcos Teóricos (MT) que permean el desarrollo de la disciplina. Mencionamos algunos a continuación: la teoría antropológica de lo didáctico, teoría de situaciones didácticas, teoría socioepistemológica, teoría ontosemiótica, teoría de representaciones semióticas y la teoría APOE. En cada MT subyace una problemática fundamental según la posición epistemológica de lo que es el conocimiento matemático. Con ello se identifican y estudian fenómenos didácticos que conllevan problemas didácticos o problemáticas. Estas últimas corresponden a las tradiciones, de los continentes, de enseñar y aprender, de sus socioculturas y paradigmas. El asunto aquí es que Latinoamérica por su historia vive una dialéctica de adhesión-identidad obligada ante la construcción de esos MT. Según la fortaleza de su programa de identidad logrará tipificar una problemática propia de Latinoamérica y con ello logrará una variedad de los MT en materia o la construcción de uno nuevo. De lo contrario, es decir, si universaliza la problemática, estará condenada a la importación del conocimiento. A esto último es a lo que hemos llamado fenómeno de adherencia.

El asunto es comprender que existen diferencias entre las regiones donde emerge el conocimiento de la disciplina, hecho no menor al momento de considerar las problemáticas fundamentales que se declaren o que subyacen en los marcos teóricos para efectos de entender, predecir o estudiar fenómenos vinculados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en nuestra región.

Un aspecto teórico-metodológico que hemos convenido es que, por la naturaleza de la pregunta, estudiaremos la función de los marcos teóricos y no así sus fundamentos. El problema no es "lógico" sino "funcional", es el uso de los marcos teóricos de los grupos de investigación de acuerdo a su región. Como señalan Cordero et al (2009), las teorías de la matemática educativa nacen en regiones específicas, para responder a las necesidades educativas de esa región. Así hay que buscar las maneras de tipificar un marco de referencia que nos brinde una visión general del estado de la educación en Latinoamérica. Dicho marco, nos proporcionará algunos elementos que

nos ayudarán a situar, de modo general, la *funcionalidad* de los diferentes marcos teóricos de la disciplina.

Sin embargo, existen grupos de investigación latinoamericanos que no se adhieren a los MT de otras regiones. Por el contrario construyen su propio conocimiento y lo ponen en competencia con los marcos teóricos legitimados por las tradiciones dominantes de otros continentes. En ese sentido ciertos trabajos de investigación hacen referencia a que el programa de Matemática Educativa está fuertemente ligado a la búsqueda o construcción de una identidad que permita favorecer el desarrollo de la región. A continuación, algunos ejemplos:

"Hablar de Matemática Educativa y su incidencia en Latinoamérica significa que como Matemáticos Educativos y socioepistemólogos perseguimos los ideales profundos que permitan crear una identidad latinoamericana" (Cordero, 2008, p.25).

"En el caso de la Matemática Educativa, como disciplina académica construyó una identidad que favoreció al desarrollo regional, permitió integrar comunidades organizadas en la vida académica y en la acción social que se vincularon con la cultura, y apostó por el cambio y la crítica a un orden establecido, ya que planteó el reto de democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre la población" (Cantoral, 2009, p.146).

"Asimismo reiteramos que buscamos pertinencia, coherencia e identidad de nuestra investigación a fin de beneficiar a nuestros sistemas educativos. Por ello la importancia del ejercicio de reflexión, en nuestra comunidad, de nuestros acercamientos teóricos, métodos y resultados, sometidos a una continua y estricta vigilancia epistemológica…" (Farfán, 2003, p. 5).

Sin duda la identidad es el principio que hace que ese grupo construya su propio conocimiento, pero ¿cuál es la acción qué activa ese principio de identidad?

Los sociólogos Berguer y Luckmann (2001) en su libro *Construcción social de la realidad*, señalan que no puede haber identidad si no hay diferencias, por ejemplo, mencionan que la orientación y el comportamiento en la vida cotidiana engendran tipos de *identidad* que pueden observarse en la vida cotidiana. En este sentido, se puede afirmar que el latinoamericano tiene una *identidad* diferente de la del francés, el anglosajón de la del japonés, y así sucesivamente. Entonces, ese grupo que conoce un marco teórico con identidad propia, debe ser capaz de retroalimentarlo a la

luz del mismo principio de identidad del grupo. De esa manera la identidad obliga a la variedad, es decir la acción de la identidad es entender que hay *diferencias*.

Por ejemplo, un docente en Francia lo máximo que trabaja frente a alumnos son dieciocho horas semanales, lo cual implica un reconocimiento social de su labor en la preparación de sus clases, sus evaluaciones y la atención de los alumnos en las veintisiete horas restantes, aparte de recibir una buena remuneración, en relación a ésta. No es necesario especificar las condiciones que viven los profesores en Latinoamérica, conocidas por todos nosotros (Espinoza, 2007). Universalizar las problemáticas o los funcionamientos de los sistemas educativos lleva a una pérdida de la identidad de la región. Las realidades de las regiones son diferentes, por lo tanto los resultados serán diferentes.

La importancia de la identidad en la disciplina radica en que permite tomar decisiones, con base en nuestra realidad cultural y social, respecto al estudio de fenómenos vinculados con la necesidad de aprender y poner en juego un saber matemático, para así democratizar su aprendizaje entre la sociedad, nuestra

Referencias bibliográficas

Berger, P. y Luckmann T. (2001). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Cantoral, R; Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6 (1), 27-42.*

Cantoral, R. (2009). Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(2), 145-150.*

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), 5-21.*

Cordero, F. (2006). *La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del Discurso Matemático Escolar.* En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. (2008). La Matemática Educativa y su incidencia en Latinoamérica. *Matemática Educativa en Chiapas*. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Cordero, F.; Gómez, K.; Viramontes, I. (2009). Elementos de algunas teorías en Matemática Educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencia o nuevas visiones? En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 375-381. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Espinoza, L. (2007). La diversidad de aspectos influyentes en el aprendizaje de la matemática; reflexión causada por la participación en la pasantía Toulouse-Francia en el periodo de febrero a junio de 2007. *Documento Interno*. Manuscrito no publicado, Ministerio de Educación, Chile.

Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: un camino entre filiaciones y rupturas. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(1)*, 5-10. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Red de Indicadores de Ciencia y Tecnología RICYT (2007). El estado de la ciencia 2007. Recuperado el 30 de octubre de 2009 de

http://www.ricyt.org/interior/interior.asp?Nivel1=6&Nivel2=5&IdDifusion=22

SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL: CASO INFILTRACIÓN DE AGUA EN UN SUELO ESPECÍFICO

Hipólito Hernández Pérez, Ruth Rodríguez, Adriana Atenea de la Cruz
Universidad Autónoma de Chiapas, Instituto Tecnológico de Monterrey México
polito_hernandez@hotmail.com, ruthrdz@itesm.mx, ateneadc@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En la presente investigación se abordó el problema de infiltración de agua en un suelo específico, en consecuencia se exploró una situación didáctica, considerando la noción de predicción como práctica social en la modelación matemática de este fenómeno físico. Se parte de la epistemología inicial del binomio de Newton y la serie de Taylor, como marco de referencia para el estudio del diseño de la situación, donde la práctica de predicción es incorporada de forma intencional. A la vez se reporta los resultados y las argumentaciones de los alumnos, las cuales fueron obtenidas a partir de los experimentos realizadas por los estudiantes, éstos resultados es con la finalidad de tener elementos didácticos para resignificar la serie de Taylor en la asignatura de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales.*
Palabras clave: Infiltración, predicción, resignificación, socioepistemología

Problemática

En este trabajo se presenta una problemática en la que enfrentamos con frecuencia en la modelación matemática en Ingeniería civil ¿Cómo obtener un modelo matemático que represente la función de infiltración que estamos estudiando cuando los datos se obtienen experimentalmente? ¿Cómo podemos expresar una curva si no tiene una expresión matemática sencilla? La finalidad es de aproximar el comportamiento de la curva, si la curva es suave y los puntos representativos y hacer una buena aproximación de las partes que faltan a través de la predicción y la interpolación partiendo de un punto localmente conocido. (Villalobos, 2007).

En la revisión del plan de estudios de la carrera de Ingeniería civil, se encuentra que la matemática es para: resolver, modelar, identificar, predecir los problemas y fenómenos que se presentan en el entorno social, mismos que dan una idea de predicción de los fenómenos físicos, pero en los contenidos de cálculo, ecuaciones diferenciales, física y materias aplicada en Ingeniería no están integradas en forma explícita la noción de predicción (Stewart, 2006; Zill, 1993). En la modelación matemática en hidrología existen modelos que intentan simular el fenómeno de infiltración en forma empírica sin alcanzar la certeza necesaria para su predicción. En este trabajo se propone un modelo matemático que sea confiable, retomando principalmente las diferencias divididas de

Newton para obtener un polinomio que se aproxime a los valores experimentales. Por tanto, se plantea la siguiente hipótesis: la variación de la velocidad de infiltración es directamente proporcional a las diferencias de la capacidad de infiltración inicial y la capacidad de infiltración final como es propuesto en (Gardner & Widstoe, 1921; Horton, 1940). En el proceso de infiltración de agua en un suelo específico consideramos para su modelación matemática la práctica social de predicción a través de la exploración de una situación didáctica realizada por los estudiantes, partiendo con el estudio a priori de los datos registrados del experimento a través de un infiltrómetro construido por los estudiantes. La condición inicial y las variaciones de la infiltración la consideramos como patrones de una epistemología inicial del binomio de Newton y la serie de Taylor como marco de referencia para el diseño de la situación donde la práctica de predicción es incorporada intencionalmente, y a la vez reportamos los argumentos de los alumnos con la finalidad de tener elementos de resignificar la serie de Taylor en la modelación del proceso de infiltración y en las ecuaciones diferenciales.

Antecedentes

En las investigaciones de Cantoral (2001) y Hernández (2006) mencionan que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables y el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen, entonces, herencia: el estado ulterior $P+PQ$ del fenómeno de variación $P \rightarrow P+PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto *P* y la evolución de un sistema que está completamente determinado por sus primeras variaciones. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio que hoy en día lleva su nombre desarrollado en un contexto de movimiento de flujo de agua y fue dado como:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc$$

Donde: $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ$, $D = \frac{m-2n}{3n}CD$

Si el exponente $\frac{m}{n}$ es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita, si el exponente es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basándose en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y las diferencias finitas llegó al polinomio que se conoce como el polinomio de interpolación de Newton:

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0$$

En esencia, Taylor consideró el siguiente proceso: $x = x_o + k\Delta x; k = \frac{x - x_o}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña $(\Delta x \to 0)$, *k* muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\dot{y}_0/\dot{x} + (x - x_0)^2\,\ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3\,\ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \ldots.$$

Donde $\dot{y}$, $\dot{x}$ representan diferenciales ésta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

La infiltración de agua a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por las fuerzas gravitacionales y capilares. La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre de pérdidas, debido a la infiltración y vaporización. La infiltración juega un papel importante en la relación lluvia y escurrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas. El sistema de distribución de agua potable de Dijon, proyectado y construido por Darcy a mediados del siglo XIX, el realiza un estudios de infiltración y estable que *"la perdida de carga a*

través de un lecho filtrante es proporcional a la velocidad de la corriente" y no a su raíz cuadrada, como se venía aplicando erróneamente la ley de Torricelli a todo (Levi, 1989).

En el programa de hidrología, de la carrera de Ingeniería civil, se aborda el tema de infiltración y en el texto de Aparicio (1989) trata el fenómeno de infiltración de agua en suelos citando diferentes métodos empíricos, pero el método que citamos en esta investigación y el que pretendemos que los estudiantes reconstruyan a través de una situación didáctica es el de Horton, ver figura 1. El supuso que *el cambio en la capacidad de infiltración puede ser considerada proporcional a la diferencia entre la capacidad de infiltración actual y la capacidad de infiltración final* (Gardner & Widstoe, 1921; Horton, 1940).

$$f_p = f_c + (f_o - f_c)e^{-kt}$$

Donde:

f_p : Capacidad de infiltración (mm/h), k: Factor de proporcionalidad llamado también "parámetro de decrecimiento" f_c: Capacidad de infiltración final, f_0: Capacidad de infiltración inicial ($t = 0$). t es el tiempo transcurrido desde el inicio de la infiltración.

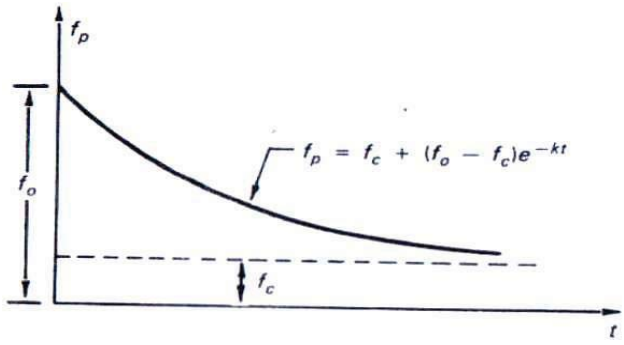


Figura 1. Representacion grafica de la tendencia de la infiltración respecto al tiempo.

Fuente: Aparicio (1989).

Marco teórico

En la investigación de Hernández (2006) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción del objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la

adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, mostramos el papel de la práctica social de la predicción en la modelación del proceso de infiltración de agua en un suelo específico como otra forma de reorganizar el cálculo.

En base a lo anterior se parte con una epistemología como marco de referencia para el diseño de la situación donde la actividad humana es incorporada a la epistemología con intencionalidad, en esta fase se realiza un estudio a *priori* a partir de la hipótesis descriptiva y predictora propuesto con la intención que los estudiantes experimenten y argumenten para la reconstrucción de significados del proceso de infiltración. El diseño de situaciones es planteado en el sentido propuesto por Cordero (1998) $E_0 \rightarrow S_0 \rightarrow E_1 \rightarrow S_1 \rightarrow \ldots$, es decir, una epistemología inicial, situación puesta en escena, modificación de la epistemología inicial, situación puesta en escena, este proceso forma un ciclo, de manera que nuestra investigación robustecerá la epistemología inicial de la cual partimos a través de profundizar en los aspectos socioepistemológicos del fenómeno de infiltración de agua en un suelo específico y responder nuestra pregunta de investigación.

Situación didáctica

La situación didáctica fue diseñar un dispositivo por medio del cual se hizo lectura del tiempo y la variación de la altura de la columna de agua dentro del dispositivo llamado infiltrómetro (ver la figura 2), con la finalidad de medir la infiltración de agua en un suelo específico (arcilla arenosa). Por tanto, el procedimiento es el siguiente:

1) Introducir los cilindros 5 cm en el suelo, comenzando con el más pequeño. Se puede utilizar un martillo para golpear el cilindro contar la superficie.
2) Añadir agua entre los dos cilindros. Mantener aproximadamente igual el nivel del cilindro externo al nivel del cilindro interno. Observar que el nivel de agua en el cilindro exterior baja más rápidamente que el del cilindro interior. Añadir agua al cilindro interno justo por

encima de la línea de referencia superior. Observar que el cilindro del exterior no debe salir agua en la superficie.

3) Cuando el nivel del agua en el cilindro interno alcance la marca superior de referencia, se registra el tiempo que indica el cronómetro en la hoja de datos de infiltración.
4) Mientras se está tomando el tiempo hay que mantener el nivel del agua igual en ambos cilindros, es decir, con tirante constante.
5) Cuando el nivel de agua en el cilindro interno alcanza la marca inferior de referencia, se registra el tiempo. Ese es el tiempo de finalización, obtenga el intervalo de tiempo.
6) Calcule el punto medio del tiempo y la velocidad del flujo con los datos obtenidos
7) Se repiten los pasos 2 al 5.

El dispositivo fue construido por cada equipo de cinco estudiante, las mediciones de la práctica se llevó a cabo de acuerdo al procedimiento anterior, y se en la cual tienen los siguientes registros.

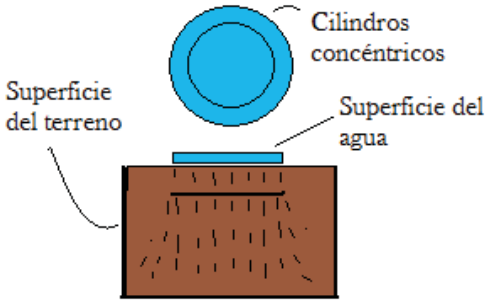


Figura 2. El infiltrómetro es un dispositivo de dos cilindros concéntricos de 20 cm de largo, con 20cm y 40 cm de diámetro respectivamente, este dispositivo es enterrado cinco centímetros en el suelo, manteniendo un tirante constante de agua.

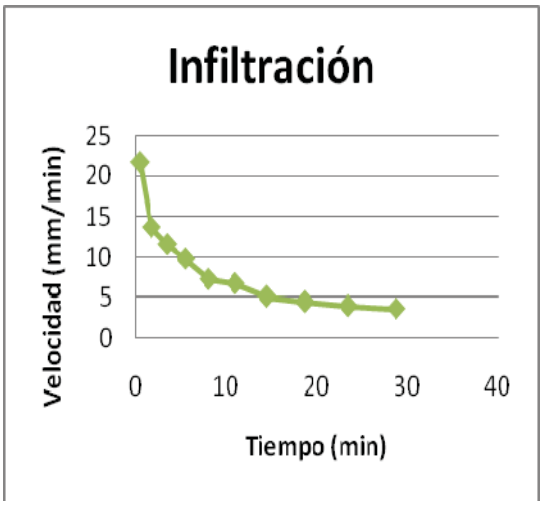
Resultados

El equipo 1, registra las mediciones del tiempo y la variación de la columna de agua y obtiene la velocidad de infiltración, ver la tabla y la gráfica No. 1. Y argumentan “Qué la velocidad de filtración que posee la tierra depende directamente de la cantidad de agua que se encuentre concentrada en esta, lo cual se puede apreciar que al inicio de la práctica la velocidad de filtración

encontrada fue alta, mientras que al transcurrir diferentes intervalos de tiempo, la velocidad de filtración es más lenta"

tiempo Inicio (seg)	tiempo Final (seg)	intervalo (min)	punto Medio (min)	velocidad (mm/min)
0:00	0:55	0:92	0.45833	21.81
0:58	2:25	29/20	1.7333	13.79
2:57	4:20	103/60	3.475	11.65
4:31	6:33	61/30	5.5333	9.83
6:42	9:27	323/40	8.075	7.27
9:32	12:30	89/30	11.0116	6.74
12:34	16:26	58/15	14.5	5.17
16:29	20:55	133/30	18.7	4.51
21:00	26:01	301/60	23.5083	3.98
21:06	31:32	163/30	28.8166	3.68

Tabla 1. Tiempo vs Velocidad de infiltración.

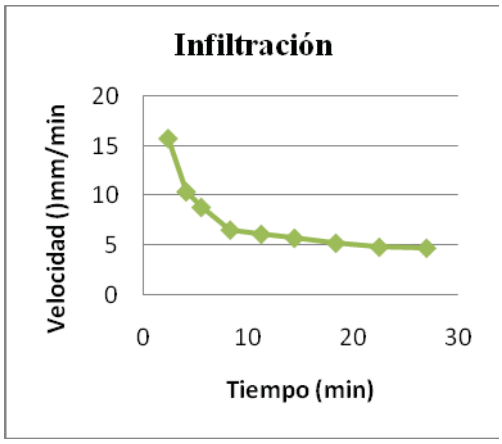


Gráfica 1 tiempo vs Velocidad de infiltración

El equipo 2, registra las siguientes mediciones, ver la tabla y la gráfica No. 2. Y argumentan que "La velocidad de infiltración se determina midiendo el tiempo que tarda el agua depositada en un suelo en recorrer una distancia con un punto inicial y un final. Esta velocidad va cambiando en el tiempo a medida que los poros del suelo se van llenando de agua"

tiempo inicial (seg)	tiempo final (seg)	inter-valos (seg)	punto medio (seg)	Velocidad (mm/min)
1.56	3.23	1.27	2.39	15.74
3.25	4.55	1.30	4.10	10.38
4.56	6.53	2.27	5.54	8.81
6.58	9.24	3.06	8.31	6.53
9.26	12.49	3.23	11.27	6.1
12.50	16.36	3.46	14.43	5.7
16.39	20.37	3.58	18.38	5.2
20.43	24.59	4.16	22.51	4.8
25.00	29.20	4.20	27.03	4.7

Tabla 2. Tiempo vs Velocidad de infiltración



Gráfica 2. Tiempo vs Velocidad de infiltración

Conclusiones

En esta investigación encontramos elementos de análisis del proceso de infiltración de agua en un suelo arcilla-arena a través de los datos de la medición del experimento y la representación gráfica del fenómeno físico. Por lo tanto, con los datos experimentales, representados en las gráficas y los argumentos de los estudiantes se llega a un comportamiento similar en los propuestos por (Gardner & Widstoe, 1921; Horton, 1940). Los resultados indican que la velocidad del flujo en la infiltración es más lenta en el transcurso del tiempo debido a la saturación del suelo. En consecuencia con la situación didáctica se encontró una sólida entidad conceptual que da pie a nuevos acercamientos didácticos y que pueden estar inmersos en los estudiantes en una situación escolar, en este caso la práctica social de predicción. En la segunda etapa, se pretende diseñar una situación que favorezca la construcción del modelo matemático de infiltración a través del binomio de Newton y llegar a comprobar que la solución es una serie de Taylor, éste proceso es con la finalidad de resignificar la serie de Taylor en la modelación matemática a fin de establecer una reorganización del discurso matemático escolar considerando como eje organizador la noción de predicción.

Referencias bibliográficas

Aparicio, F. (1989). *Fundamentos de Hidrología de superficie.* México: Limusa.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa (1). 57-74*.

Edward, H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. U.S.A: Springer–Verlag.

Gardner, W., Widstoe, J. (1921). The movement of soil moisture *Soil Sci*. 11:215-232.

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Horton, R. E. (1940). An approach to the physical interpretetion of infiltration capacity. *Soil Sci. AM. Proc. 5, 399-417.*

Levi, E. (1989).*El agua según la ciencia.* México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Ediciones Castell Mexica, S. A.

Stewart, J. (2006) *Cálculo diferencial e integral*. México: Thomson

Villalobos, C. (2007). *La interpolación en la modelación matemática del proceso de infiltración.* Tesis de Licenciatura, no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

LA JUSTIFICACIÓN FUNCIONAL EN UN MARCO DE DIFUSIÓN DE LA CIENCIA

Irma Daniela Viramontes Acuña, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav, IPN México
iviramontes@cinvestav.mx; fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *El modelo de construcción de conocimiento en el sistema escolar ha estado basado en objetos, empero, el modelo fuera de éste lo constituyen elementos que van más allá de sólo lo razonado. La presente investigación a la luz de la teoría Socioepistemológica, ha tenido la necesidad de asumir este cambio de paradigma de uno centrado en objeto a uno centrado en epistemologías de prácticas, este cambio provoca ampliaciones. La producción ya no se vera como algo acabado, asociado a definiciones, esquemas, estructuras y un lenguaje de objetos, sino por el contrario, ésta alude a una producción abierta, que el alumno es capaz de trastocar a través de aquello que a él le funciona y con un lenguaje de herramientas. La investigación, intenta observar la naturaleza de las justificaciones a la que los participantes de un taller en un escenario de difusión de la ciencia lograron, las cuales se asumen que serán de carácter funcional en contraparte de razonadas.*
Palabras clave: Socioepistemología, justificación funcional, producción de conocimiento

Introducción

La Matemática Educativa como disciplina, tiene la tarea de ofrecer cuadros capaces que cubran las necesidades que la sociedad le demande. Sin embargo, esta tarea resulta difícil si se toma como referente el status utilitario que el sistema le da al conocimiento. Es decir, el estudiante sólo utiliza ese conocimiento para aprobar un examen o la materia, no obstante, fuera de ello, para él no tiene usos. Lo que constituye un parteagüas hacia cuestionamientos y demandas sobre la funcionalidad de éste.

El Sistema Escolar muestra al conocimiento acabado, a través de enunciados perfectamente elaborados. Se crea entonces, la imagen de que las matemáticas son construidas y utilizadas únicamente, para y en la escuela. Esto se ve reflejado en el curriculum, estructurado de conceptos secuenciados de forma lineal. La problemática entonces, se plantea en términos de una selección y secuenciación y no en lograr una resignificación del conocimiento.

El conocimiento concebido como producto únicamente de la razón, promovido como algo puro y sereno dentro de la ciencia, obliga a pensar en él y en la ciencia como ajenos a la sociedad. Empero, no es natural dicha separación, ya que la ciencia misma en una producción humana y por

consiguiente social (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998). Son las necesidades que tiene el hombre de entender, someter y manipular la naturaleza acorde con sus intereses, las que se convierten en el eje para investigar y dar respuestas concretas. Las exigencias prácticas del hombre, por ende, conforman puentes con el nacimiento y evolución de las disciplinas. El origen y desarrollo del conocimiento es un hecho ininteligible, paralelo al mismo progreso humano (Besse, 1969; Rosenthal y Engels, 1967).

La matemática no es la excepción, al igual que todo el conocimiento, surgen como respuesta a ciertas cuestiones problemáticas, emerge de usos que hacen de ella. Aún más, la matemática adquiere sentido en prácticas de referencia asociadas a otras disciplinas (García-Torres, 2008; Tuyub, 2008; Vázquez y Cordero, 2009). A la luz de lo anterior, se torna pertinente cuestionarse qué tan apropiado es tomar y estudiar a los objetos como algo acabado. Al ignorar esa parte humana y social, ¿no se estarán dejando de lado prácticas inmersas en ese saber funcional? Todo lo anterior exhibe la importancia de voltear hacia aspectos que se han dejado de lado: la actividad humana.

Se presenta una investigación que tiene como objetivo caracterizar a la *justificación funcional* en un escenario donde se pueda ver al humano usando al conocimiento. Con ello se atiende a la necesidad de estudios que den evidencia de la naturaleza del conocimiento que se construye. De responder a una sociedad que demanda que el conocimiento sea orgánico al humano, a través de proveer marcos de referencia que den explicaciones por medio del desarrollo del uso del conocimiento.

El marco teórico: la Socioepistemología

Al seno de la Matemática Educativa como disciplina han surgido distintos enfoques, algunos de ellos se cuestionan por la construcción de cierto matemático en especifico, mientras que otros por la constitución social del conocimiento de los grupos humanos (Cordero, 2006b). Donde los primeros tratan de responder a la construcción de objetos, a través de promover "representaciones, "competencias" o "habilidades" y los segundos de ofrecer referentes que resignifiquen el conocimiento matemático por medio de "prácticas" (Gómez, Viramontes y Cordero, 2009).

En la investigación, la necesidad de rescatar elementos inmersos en la producción de conocimiento diferentes de lo razonado, lógico y puro, obligo a cobijarse bajo la Teoría Socioepistemológica (TS). La TS concibe al humano socialmente, de esta manera se produce un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza y lo sitúa. La TS trata de evidenciar que son las *prácticas sociales* de cada grupo las que rigen la creación de conocimiento matemático en una organización social y no de razonamientos individualistas como se promueve.

La práctica social es un elemento teórico de la TS que orienta las epistemologías en cuestión, que permite, describa y explique las circunstancias en las cuales son llevados a cabo los procesos de construcción de conocimiento matemático, es la explicación de cómo construye conocimiento a través de ella.

La producción de conocimiento: productos y argumentos

El haber tomado a la TS como marco teórico, admite un modelo de construcción social del conocimiento donde las prácticas sociales sean el eje rector. En consecuencia, se reconoce que cada grupo humano posee características propias que conforman una *producción* acorde con sus costumbres, creencias, necesidades, modos de construcción, procesos propios de institucionalización, formas y medio de difusión. Donde los significados, procedimiento y argumentos que ellos crean, evidencian un *uso* del conocimiento.

Para ello, la investigación se dio a la tarea de entender la producción de conocimiento del taller "Conozca al Señor Movimiento" que fue diseñado ex profeso para espacios de difusión del conocimiento. En él se abordan aspectos de variación y relacionados con ecuaciones diferenciales. En la investigación se pone el interés, específicamente, sobre las actividades de variación de "Construye la montaña".

El taller se presentó en el marco de dos eventos de difusión: Cinvesniñ@s 1-2008 y la XVII Semana de la Ciencia y Humanidades. El primero, llevado a cabo el 14 y 15 de noviembre de 2008, en las instalaciones del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN), tiene la intención de acercar a la sociedad en general a la ciencia, en especial a los niños. El segundo, desarrollado en la semana del 30 de marzo al 3 de abril de 2009, en las instalaciones del Colegio Guadalupe, tiene la intención de compartir experiencias científicas.

El análisis de la producción se llevó a cabo a través de significados, procedimientos y argumentos. En un espacio, como lo es el de difusión, es aún más visible la diversidad cultural existente, que inducirá a una variedad de *significados*, acordes con aspectos socioculturales. Lo significados llevarán a determinados *procedimientos* y los *argumentos* constituyen el hilo conductor pues no serán otra cosa que la reorganización de los elementos en esquemas explicativos.

Asimismo, el reconocer una producción con un carácter abierto, en el que el participante no tendrá que someterse a ella, sino que tiene la función de trastocarla y la producción trastocarlo a él, se tomo en cuenta que ellos no evocarán productos referidos al conocimiento, es decir, tablas, expresiones, entre otros. Sino a *aquellos* productos que a ellos les funcionen.

Algunos resultados

Se les presenta la siguiente actividad,

A continuación les presento la montaña Negruni, fíjense bien que es diferente a la anterior ¿Qué tipo de movimiento creen que deben de hacer para graficarla, así como está en el dibujo (figura 1)?

Figura 1

Enseguida un participante pasa a realizar, con la ayuda de un sensor y de una calculadora graficadora, el movimiento que considera representa la gráfica.

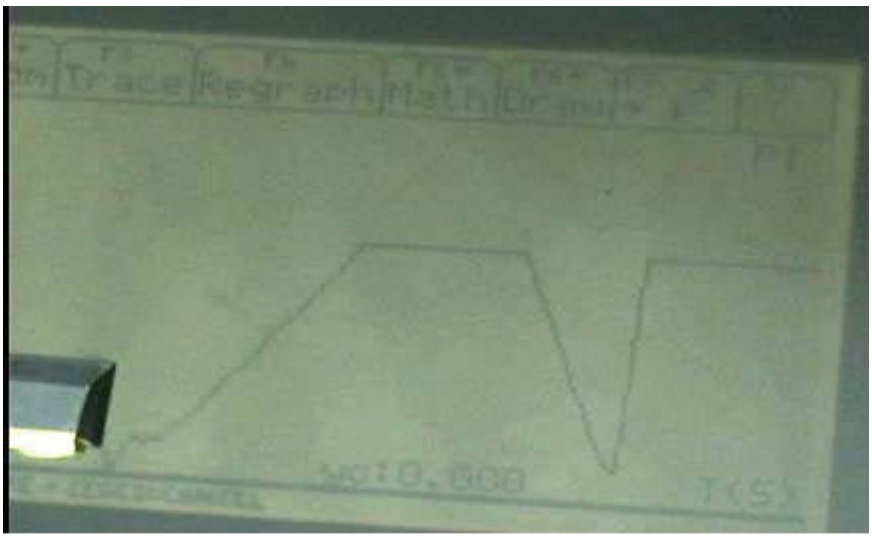
Episodio 2.14-S2-M 1/04/09-CG

E: haber silencio va a ver movimiento

P camina con una velocidad constante en línea recta, sus pasos son normales.

Llega al final del recorrido y da la media vuelta. Regresa corriendo.

Se queda unos segundos frente al sensor y enseguida se retira



Gráfica 4.5. MS2-CG

Producción Expresión oral. Movimiento corporal.
Episodio 2.15-S2-M 1/04/09-CG
324 E: haber fíjense en esta parte de en medio (*señala la parte de la pantalla* 325 *donde se encuentra la gráfica*) ¿si? **¿Dónde empezó a correr?** 326 Todas: ahí. Mmm, **en la última. En la bajada** 327 E: **¿dónde empezó a caminar lento?** 328 Todas: **en la primera** 329 **E: que diferencias hay entre esta** (*señala la recta con* 330 *pendiente positiva*) 331 **E: y esta** (*señala la parte de la recta con pendiente es negativa*) 332 Todas: que una esta así y la otra así 333 **P: que una esta más inclinada.** 334 **P: que una esta así y ésta esta más parada. Ésta esta más parada** 335 P: (***señala la recta con pendiente negativa***) 336 **P: y ésta esta más inclinada** (*señala la parte de la gráfica con* 337 *P: pendiente positiva*) 338 **E: ¿que significa esta línea?** (*Señala el máximo de la gráfica*) 339 Todas: que ahí se detuvo 340 P1: **que ahí se paro, que se paro. Que ahí se detuvo**.

<table>
<tr><td colspan="3">341 P1: Mira, camino se detuvo allá y después corrió
342 (apunta hacia la parte horizontal de la gráfica
343 y enseguida mueve su mano simulando un movimiento rápido)</td></tr>
<tr><td>Significados</td><td>Procedimientos</td><td>Argumentos</td></tr>
<tr><td>1. La cualidad del movimiento determina diferentes inclinaciones.</td><td>1. Comparar la inclinación de las rectas de la gráfica.
2. Relacionar los diferentes momentos del movimiento (ida, regreso y llegada) con la recta que los representa a cada uno (la subida, la punta y la bajada).</td><td rowspan="4">La inclinación de la recta</td></tr>
<tr><td>2. El correr bosqueja rectas más paradas.</td><td>2. Comparar un momento del movimiento (la ida) con una parte de la gráfica (la subida).</td></tr>
<tr><td>3. Caminar lento determina rectas menos paradas.</td><td>3. Comparar un momento del movimiento (la llegada) con una parte de la gráfica (la bajada).</td></tr>
<tr><td>4. Rectas horizontales se producen por que no hay movimiento.</td><td>4. Comparar y relacionar el movimiento que realizó (el regreso en función del tiempo) con la parte de la gráfica que la representa (la punta).</td></tr>
</table>

Tabla 1. Producción del conocimiento

La inclinación de la recta constituye el argumento que posibilita que los participantes den explicaciones de la situación de movimiento. A través de los productos, expresión oral y corporal ellos resignifican la *subida* y la *bajada* como dos componentes de la gráfica referidos a la situación y cualidad del movimiento.

La comparación que se establece entre la subida y la bajada conduce a entenderlos como elementos variantes respecto al movimiento: caminar, correr o detenerse.

Consideraciones finales

El haber realizado una investigación a la luz de la Teoría Socioepistemológica permitió a la misma, entender a una producción en un escenario como es el de difusión, en el que en un *a priori* no está presente un contrato didáctico que determine ciertas maneras de actuar y comportarse por parte de los participantes al taller.

El haber expresado la producción a través de los productos y argumentos que emergieron, permitió mostrar y entender mejor a lo funcional, pues con ello se evidencio que las justificaciones

de las que se hecha mano están referidas a *aquello* que les funciono para dar y darse explicaciones acerca de la situación de movimiento.

El considerar a una producción abierta admite el tomar en cuenta otros productos como lo son los encontrados en el escenario de estudio, *la expresión pictográfica, expresión oral, expresión escrita, expresión gestual, gráficas* y movimiento corporales.

Los argumentos, por su parte, soportaron el uso del conocimiento aludido a aspectos variacionales y conceden un desarrollo del mismo. Desde concebir a la situación de movimiento como *un ciclo*, como dos momentos: la *ida* y el *regreso* hasta considerar a la *línea recta* y *curva* como cualidad y cantidad del movimiento, el *regreso* (como un momento del movimiento), el *regreso* (como un momento dependiente del tiempo) y a la *inclinación de la recta*.

Referencias bibliográficas

Besse, G. (1969). *Práctica social y teoría*. México: Grijalbo.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: SEP/CE/Horsori.

Cordero F. (2006b). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gómez, K., Viramontes, I. y Cordero F. (2009). Elementos de algunas teorías en matemática educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencias o nuevas visiones? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 375-382. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rosenthal, M. y Engels, F. (1967). *Qué es la teoría marxista del conocimiento/ Estudio sobre la historia del cristianismo primitivo.* Zacatecas, México: Quinto Sol.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vázquez, E. y Cordero, F. (2009). Caracterización del uso de la estabilidad en el dominio de la biología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1333-1342. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

UNA CARACTERIZACIÓN DEL TALENTO INFANTIL EN FÍSICA, QUÍMICA Y BIOLOGÍA: PARTICIPANTES DEL PROGRAMA NIÑ@S TALENTO-DF

Erika Marlene Canché Góngora; Rosa María Farfán Márquez
Cinvestav, IPN México
emcanche@cinvestav.mx; rfarfan@cinvestav.mx
Campo de investigación: Estudio del talento Nivel: Básico

Resumen. *Al interior del proyecto implementado actualmente en el Distrito Federal llamado Niñ@s Talento, realizamos una investigación sobre el talento infantil en ciencias situándolo como un primer acercamiento hacia la caracterización, tratamiento y estudio didáctico del talento infantil en ciencias en niñas y niños mexicanos. Tomando como marco teórico a la Socioepistemología resaltamos aspectos del tipo cognitivo, didáctico y social como parte-aguas para la creación de una metodología sistémica que se aleje de los test psicométricos restrictivos que miran aspectos innatos al individuo, y no desarrollados a lo largo de su vida.*
Palabras clave: Talento, identificación, socioepistemología

Introducción

El sistema educativo mexicano reconoce la diversidad escolar y, sin embargo, siguen dando respuestas homogéneas a estudiantes con necesidades específicas. Han permitido que aquellas personas con capacidades, tanto inferiores como superiores, sean excluidas del panorama educativo.

El Diario Oficial de la Federación establece en su acuerdo número 422 que un alumno o alumna con necesidades educativas especiales, "es aquel o aquella que presenta un ritmo de aprendizaje significativamente distinto en relación con sus compañeros de grupo y que requiere apoyos extras y/o diferentes en su proceso educativo" (SEP, 2007, p. 4). Como un subgrupo de personas con Necesidades Educativas Especiales están aquellos estudiantes con capacidades superiores. Para hacer referencia de esta población no existe una diferenciación de términos adecuada, ya que se utilizan indistintamente unos y otros. En nuestro país se usa el término *aptitudes sobresalientes* para "aquel o aquella persona que presenta un conjunto de características que le permiten destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenece en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social y artístico y/o acción motriz" (SEP, 2007, p.3).

El lenguaje coloquial utilizado en Iberoamérica, con frecuencia no precisa ni distingue entre el *talento, la superdotación, la alta habilidad, la talentosidad y la excepcionalidad*; todos estos términos hacen referencia a características que tienen las personas en ámbitos de conocimientos (Benavides, Martínez y Villarraga, 2004). Los términos más utilizados son los de talento y superdotado. El desarrollo conceptual de estos términos parte del intento por comprender la inteligencia. A partir del estudio de las capacidades intelectuales surgen ciertas *concepciones explicativas del proceso psicológico* (Bedia, sf, p.2), las cuales son: la concepción monolítica, la factorial y la jerárquica. Cada una de ellas enmarca corrientes relativas al surgimiento de los diferentes modelos de inteligencia. Se parte desde una postura en la cual el rendimiento académico es una expresión directa de la inteligencia, después se cambia el paradigma hacia una visión propia de las actividades, es decir, que la inteligencia estaba en relación directa con la actividad que se llevara a cabo, que es donde se enmarca la diferencia entre talento y superdotación. Posteriormente esta corriente se vuelve aún más nítida, cuando se empieza a entender a la inteligencia dentro de un contexto más dinámico, es decir, desarrollable a lo largo de la vida y ya no innato a la persona por nacimiento. En la actualidad, el término talento se refiere a una actitud destacada en una materia determinada.

Estamos bajo la postura de que hablar de talento, y no de sobredotación, se hace pertinente por la característica esencial de ser desarrollable en todas las personas, alejándonos de las condiciones innatas asociadas a los individuos por nacimiento.

En materia de políticas educativas o de tratamiento educativo hacia esta población, en México las acciones han sido limitadas. Podemos mencionar que la historia comienza desde la creación del programa CAS en 1985, el cual ha desaparecido poco a poco, hasta la consideración de la atención a la diversidad en distintos Planes Nacionales de Educación (2000- 2006 y 2006-2012) de los sexenios contemporáneos. También tenemos evidencia de la existencia de instituciones de iniciativa privada, las cuales han sentado bases de atención a esta población pero en cantidades mínimas de participantes. En este sentido, el gobierno del Distrito Federal está implementando un programa llamado Niñ@s Talento, con el objetivo general de lograr que todos los niños sobresalientes tengan acceso a una formación integral, a través del desarrollo o perfeccionamiento de sus habilidades artísticas, culturales, intelectuales y deportivas (DIF-DF, 2007, p.1). Lo anterior mediante actividades extracurriculares desarrolladas en centros

pertenecientes al Sistema para el Desarrollo Integral de la Familia (DIF) en distintas delegaciones de esta entidad.

Con todo lo anterior, coincidimos con Betancourt y Valadez (2004), al afirmar que hasta este momento en nuestro país no existe un consenso conceptual respecto a la población con capacidades y aptitudes sobresalientes, y se usan indistintamente términos para referirse a esta población. Mediante el análisis de un estado del arte del tratamiento educativo y gubernamental mexicano reconocemos una complejidad epistemológica del desarrollo conceptual del término talento, separándolo de su sinónimo más arraigado, el término superdotado. Es de esta forma que tomamos como problemática de investigación conocer y caracterizar una población de niñas y niños pertenecientes al programa Niñ@s Talento que el gobierno del Distrito Federal está implementando desde 2007. De esta forma pretendemos entender las manifestaciones conductuales que corresponderían a un primer acercamiento para describir el talento en ciencias de las niñas y niños mexicanos, dentro de una mirada sistémica y situada, tomando como sustento teórico a la Socioepistemología. Esta teoría propone como componentes escenciales de estudio el aspecto epistemológico, cognitivo, didáctico y social, en este trabajo partimos de la tesis socioepistemológicas que considera que la construcción del conocimiento es del tipo social y esto ha sido reconocido partiendo de estudios epistemológicos sobre el saber científico, por tanto entendemos que el saber puesto en juego en las sesiones no proviene más que de la práctica social de los individuos en determinadas etapas de la historia, los cuales permitieron su consolidación y posterior estudio. El aspecto cognitivo, el didático y social fueron resaltados en este estudio, precisamente como las manifestaciones conductuales que nos permitieron caracterizar a la población de estudio, pero siempre entendiendo que no podemos mirar un aspecto sin la intervención de los otros tres.

Metodología

Durante 3 meses realizamos un estudio etnográfico acerca del proceder de alrededor de 200 niñas y niños al enfrentarse con actividades correspondientes a física, química y biología, es decir, al área de ciencias del programa. Las actividades se construyeron bajo la teoría de las situaciones didácticas y tratan sobre temas o fenómenos de la vida cotidiana. En el trabajo documentamos situaciones que tratan temas como la presión atmosférica, las reacciones químicas, la vida de los

reptiles, la Ley de Bernoulli, la densidad y la resistencia de materiales. Cabe mencionar el formato lúdico en el cual cada una de ellas se presenta.

Como hemos mencionado, mediante la adopción del enfoque etnográfico realizamos la toma de datos en 10 diferentes centros DIF (Tabla 1), en los cuales se reúnen semanalmente las niñas y niños del programa para desarrollar sus actividades. Se documentaron 27 situaciones, de las cuales reportamos 8 en este trabajo, mediante la videograbación, fotografías y la toma de notas correspondientes a cada situación. Los datos obtenidos se analizaron bajo una mirada sistémica y situada, por lo cual adoptamos como marco de referencia la aproximación Socioepistemológica. Este enfoque intenta explicar la construcción social del conocimiento en los seres humanos, y es de esa forma que nos proporciona una pauta para la visión y para la interpretación de los datos obtenidos. A través de tres aspectos, el *cognitivo,* el *didáctico* y el *social,* poniendo énfasis en el social, el cual según la revisión bibliográfica, es soslayado en la identificación de las capacidades superiores y, por consiguiente, aún no se muestra evidencia de cómo mirarlo. El aspecto *cognitivo* lo miramos en la exteriorización de conocimientos, experiencias y algún otro tipo sobre algún área específica o sobre su entorno. Rescatamos también, sus formas de argumentar, de recopilar información y de razonar. El aspecto didáctico lo abordamos dentro de las secuencias de actividades a las cuales son enfrentados dentro del programa, es decir, cuando tienen que realizar actividades de su preferencia (o no) manifiestan ciertas formas de actuar (*alternativas de resolución*) ante el problema. Así como también los materiales de preferencia para ellos. Y el aspecto social lo encontramos manifiesto directamente del comportamiento y de las actitudes presentadas por los niños, aunado con el rol que juegan en su familia y en las interacciones con sus compañeros exteriorizadas en las sesiones del programa.

Con la información anterior y la implementación de 2 encuestas, una para padres de familia y otra para el tutor, encontramos evidencia específica de ciertas características particulares y generales que las niñas y niños manifiestan y que son de tal peculiaridad que pueden considerarse como un primer acercamiento hacia la caracterización del talento en ciencias en el contexto mexicano. La información obtenida de las encuestas nos proporciona una descripción puntual de un grupo de niñas y niños destacados, analizando algunos elementos de su contexto familiar, con el fin de reflexionar sobre la influencia de los factores sociales en cada uno de ellos, así como de sus interacciones con los tutores, sus compañeros y con las situaciones, esto mediante la información

de la encuesta realizada a los tutores de cada uno de las niñas y niños. Estas encuestas fueron aplicadas a 17 niñas y 16 niños de cuatro centros DIF (Argentina, Ajusco, Zacatenco y José Ma. Mata).

SITUACIÓN DIDÁCTICA	CENTRO DIF
1. El submarino 2. Un salvavidas para mi limón	C.B.S.U. Argentina Del. Miguel Hidalgo
3. Capas misteriosas 4. Formando capas saladas	C.B.S.U. Ajusco Del. Coyoacán
5. Vinagre infla globos 6. Insectos	Zacatenco Del. Gustavo A. Madero
7. El soporte 8. Construyendo el ala de un avión	José Ma. Mata Del. Azcapotzalco

Tabla 1. Lugares de toma de datos

Resultados y discusión

Es de esta forma y tras la revisión documentada de 8 situaciones didácticas que presentamos la siguiente tabla con las características observadas, las cuales corresponden a nuestras hipótesis sobre el talento infantil en ciencias mexicano.

Identificación de factores importantes	En ciertas situaciones encuentran variables, relaciones, o simplemente detalles no especificados en la actividad y que les permiten realizar observaciones más detalladas.
Establecimiento de conclusiones para el tema(Tesis o teoría científica)	La mayoría de las veces establecen explicaciones sobre lo que ocurre o ocurrirá. Muchas veces recurren a conocimientos previos para establecer estas conclusiones.
Necesidad de crear	Manifiestan el deseo por realizar construcciones por sí mismos y además les nace la inquietud de realizar algo novedoso y creativo para ellos.
Necesidad de trabajar en equipo	Cuando la actividad es planeada para llevarse a cabo de manera individual, las niñas y los niños acuden sin dudar a interacciones con sus compañeros y a socializar lo que observan, lo que opinan o lo que les recuerda la actividad.
Auto organización	Resuelven cualquier duda sobre las instrucciones o los materiales antes de comenzar a trabajar.
Construcción de hipótesis iniciales	Posterior a la comunicación de las instrucciones, las niñas y los niños comienzan a construir posibles soluciones o explicaciones sobre la actividad.
Recopilación de la información	Escuchan ideas, conocimientos previos o cualquier comentario del tutor (a) o de alguno de sus compañeros o el saber con qué materiales cuentan, con la intención de obtener alguna pauta que guiará su proceder.

Prueba de hipótesis	No dudan en validar las decisiones, conclusiones o estrategias planteadas para la actividad que desarrollan.
Empleo de conocimientos previos	Relacionan cualquier información que recuerdan que tiene conexión directa con lo que realizan. Muchas veces las fuentes principales de estos conocimientos son la escuela o la familia.
Expresión de ideas	Son niñas y niños que siempre tienen algo que comentar. Explican, analizan y preguntan cualquier tipo de información que les pudiera ayudar en la resolución de su actividad.
Sentido crítico	Escuchan, observan y analizan cualquier comentario, idea e incluso dibujo de sus compañeros con el fin de debatir o contrastar algún conocimiento suyo.
*Formulación de **nuevas** preguntas/hipótesis*	Muchas veces van más allá de la actividad, se formulan nuevas situaciones que no son propias de las situaciones didácticas.
Identificación de variables	Perciben relaciones existentes en los materiales que manipulan que les permite nutrir la generación de hipótesis.
Observación de relaciones	Son observadores. Lo cual les permite encontrar relaciones o variables influyentes.
Defensa de ideas	Debaten sus ideas y conjeturas.
Extrapolación de hipótesis o conclusiones	La actividad les permite establecer hipótesis o conclusiones y ellos tienen la capacidad de relacionarlos con otros materiales no vistos esa sesión.
Liderazgo	La mayoría manifiesta esta característica, sin embargo no en todas las situaciones.
Iniciativa	Tienen facilidad por hacer menciones novedosas que le permiten tomar la batuta en la actividad.
Comunicación de experiencias pertinentes	Revelaron una marcada capacidad para expresar lo que pensaban. En muchas cosas se trataban de experiencias con su familia o de la escuela que estaba directamente relacionada con la actividad.
Trabajo en equipo	Realmente compartieron la experiencia de manipular materiales, de comentar ideas o vivencias, con sus equipos de trabajo.
Establecimiento de analogías	Muchas de las situaciones nos permitieron observar esta característica. Expresaban fenómenos que ocurrían en la sesión en términos de hechos cotidianos para ellos.
Manifiestan un amplio vocabulario	Mencionaron palabras que muchas veces no corresponden con un bagaje, en cuanto a vocabulario se trata, de una niña o niño "promedio".

Tabla 2. Características observadas

En las encuestas realizadas a los padres de familia y al tutor correspondiente de cada niña o niño determinada, encontramos correspondencias que nos permiten confirmar de una a otra forma una manera de validar la caracterización. La encuesta de los padres nos arrojó datos correspondientes a su entorno familiar, refiriéndonos con esto a las influencias familiares. Muchos padres manifestaron la participación de toda la familia en actividades deportivas e incluso la pertenencia de sus hijos en centros deportivos. Seguidamente, se presenta el hábito de lectura como preferido, valdría la pena conocer y reflexionar sobre el tipo de textos que prefieren. La percepción que tienen de sus hijos corresponde a su comportamiento familiar, sin embargo

muchas veces no corresponde con su comportamiento escolar. Notamos niñas y niños extrovertidos, en su mayoría, con la tenacidad para resolver dudas y problemas y esta situación fue difícil de creer para sus padres, debido a cómo ellos se comportan con sus familiares. Vale la pena mencionar la variedad de opciones mencionadas. Si bien estas respuestas pueden estar condicionadas a preferencias de los padres, muchos nos comentaron que fueron manifestadas por sus hijos. Otro de los de la encuesta fue conocer cómo los padres veían a sus hijos a futuro. De manera determinante, todos los padres conciben a sus hijos como futuros profesionistas en diversas áreas de su agrado.

Conclusiones

El desarrollo de esta investigación nos permitió entender este tipo de problemáticas y reflexionar hacia la pertinencia de trabajos de esta naturaleza, donde buscamos llamar la atención sobre la necesidad del tratamiento educativo de la población excluida del sistema.

Privilegiamos ciertos comportamientos, preguntas, expresiones e incluso dudas que las niñas y niños manifestaron. El marco Socioepistemológico nos dio la pauta para mirar los aspectos sociales inmersos en todo proceso de enseñanza, nos permitió entender y problematizar una población desconocida resaltando y mirando siempre tres aspectos: lo social, lo didáctico y lo cognitivo. Esto de manera sistémica, lo cual es novedoso, ya que al menos en otros países el primer acercamiento hacia estos niños es primordialmente cognitivo. En el desarrollo de las teorías extranjeras sobre el tratamiento de la sobredotación y el talento, se evaluó y se encontró pertinente la inclusión del contexto social de los individuos, sin embargo, no hay nada concreto al respecto ni mucho menos un acercamiento sobre cómo mirar a una población y específicamente a una con capacidades sobresalientes.

Este trabajo proporciona una forma de acercarnos y problematizar en esta población. Se parte de la premisa de que es importante conocer a estas niñas y niños. Es indispensable saber cómo son, qué dicen, qué piensan, qué hacen, cómo lo hacen y por qué lo hacen. Privilegiamos cualquier tipo de comentario realizado y sus interacciones con sus pares y el tutor(a). Creemos que es una buena opción de identificación y seguimiento sin tener un test psicométrico de por medio, o una calificación en un examen de conocimientos, es decir, como un proceso. Resaltamos el hecho de

realizar investigación de esta naturaleza, ya que el estado del arte nos muestra de que en nuestro país muy pocas veces se ha problematizado sobre esta población, y cuando se han realizado trabajos, los resultados son desconocidos y se pierden ante la falta de difusión.

Referencias bibliográficas

Bedia, L. (sf). La superdotación y el talento: una aproximación a su desarrollo conceptual. Recuperado en enero de 2009 de: http://www.monografias.com/trabajo13/articom/articom.shtml

Benavides, M., Martínez, P., Villarraga, M. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. En Benavides, M., Blanco, R., Castro, E., Maz, A. (Eds.) UNESCO. *Hacia la definición del término talento* (pp. 25-35). Santiago, Chile: Trineo S.A.

Betancourt, J., Valadez, M. (2004). La educación de niños con talento en México. En Benavides, M., Blanco, R., Castro, E., Maz, A. UNESCO. *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 129-142) Santiago, Chile: Trineo, S.A.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270.

DIF –DF (2007) Lineamientos y mecanismos de operación del programa Niñ@s Talento. *Gaceta oficial del distrito federal*, publicado el 24 de octubre de 2007, recuperado en febrero de 2009 de http://www.dif.df.gob.mx/transparencia/FI/lineamientoninostalento.pdf

SEP (2007). Las reglas de operación del programa de fortalecimiento de la educación especial y de la integración educativa. Diario oficial, acuerdo número 422. México. Recuperado en marzo de 2009 de: http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/programas/educacionespecial/materiales/RO/ROIn2008.pdf

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL CON EL USO TECNOLOGICO EN UN AMBIENTE DE DIFUSION DEL CONOCIMIENTO

Eduardo Briceño, Francisco Cordero
CINVESTAV, IPN México
ebriceno@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Básico

Resumen. *El estudio de procesos de aprendizaje en el "aula tradicional" tiene que cambiar si queremos evidenciar otras formas de construcción del conocimiento matemático, por ello es necesario considerar otros escenarios donde la matemática no es objeto de estudio pero que sin embargo el conocimiento matemático subyace. Un ejemplo de esto es el conocimiento cotidiano en un escenario de difusión, característico de ideas, intuiciones o sentido común donde subyace una matemática. Con lo anterior se hace un estudio bajo la teoría socioepistemológica, tratando de caracterizar este conocimiento hacia su uso mediante ideas variacionales con tecnología. Con el estudio del uso del conocimiento, se intenta desarrollar un pensamiento variacional característico del escenario a través del constructo "uso de la gráfica", donde además se intenta encontrar alguna evidencia de nociones de integración tecnológica al conocimiento del participante.*
Palabras clave: Integración tecnológica, uso de la gráfica, cotidiano

Introducción

La Matemática Educativa en términos genéricos, ancló su discusión y problemática en el dominio matemático, es decir, sólo tenía sentido entender los cuestionamientos de su aprendizaje, enseñanza y construcción solo dentro de este dominio. Sin embargo, creemos en la importancia de ampliar esta problemática hacia otros dominios con la convicción de entender otras formas de construcción del conocimiento matemático. La Teoría Socioepistemológica (TS) apunta a esta dirección, ya que ha logrado formular que la matemática escolar es de naturaleza dual (Cordero, 2008; Lara, 2007; Parra, 2008). Con dualidad nos referimos al estudio de otros dominios científicos, en donde existen profesionistas usuarios del conocimiento matemático que no son matemáticos pero que usan la matemática, no siendo este su objeto de estudio. En tales dominios impera el conocimiento y la justificación funcional, es decir, el uso del conocimiento matemático normado por las prácticas del trabajo de un profesionista no matemático (Tuyub, 2008; García-, 2008). De igual forma el presente proyecto de investigación se ubica en el dominio de un escenario de difusión del conocimiento científico, donde se aplicó un diseño de actividades, con la intención de externar el conocimiento cotidiano con relación a la variación. En el mismo diseño se

ubican tres elementos importantes de estudio a considerar: *el escenario, la matemática y la tecnología*. A continuación describimos en qué sentido nos referimos a estos tres elementos.

1) *La matemática.* En este primer rubro se intenta que los participantes desarrollen una matemática de tipo variacional por conducto de la modelación. Por ello optamos por analizar la actividad humana y ver su desarrollo mediante un pensamiento reflexivo de sus prácticas, es decir, el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional (PyLV) que se integro y funcional a su conocimiento (Cantoral, 1998).
2) *La tecnología.* Un segundo elemento de estudio es la tecnología hacia procesos de construcción del conocimiento matemático. Para que la tecnología sea un factor en el conocimiento matemático se debe "*integrar"* al sujeto por un proceso de instrumentalización e instrumentación, de tal forma que entienda dicha tecnología y genere algún conocimiento matemático específico. Lo anterior responde a un marco denominado Génesis Instrumental.
3) *El escenario.* Nos referimos al dominio de un escenario de difusión del conocimiento científico. El interés por este escenario es por la libertad del contrato didactico, por ello creemos que es un ambiente propicio para que los participantes expresen sus conocimiento de sentido común hacia ideas variacionales. El poner atención en el sentido común se dirige, además, a señalar la importancia de estudiar formas de pensar conocimientos que se construyen en una relidad de la vida cotidiana (Berger y Luckmann, 2006).

Estos son tres elementos que forman parte de nuestra investigación en el marco de la teoría socioepistemológica. Se presentan evidencias de un primer diseño de actividades aplicado en distintos escenarios de difusión del conocimiento, donde los participantes hacen uso de sus conocimientos cotidianos para construir ideas variacionales. Las evidencias de dicho conocimiento se resignifican en dicho escenario y a su vez la existencia por parte de los participantes de ciertas nociones de integración de la tecnología normada por la práctica social que ahí emerge. A continuación presentamos nuestra problemática, marcos teóricos, aspectos metodológicos, algunos resultados y conclusiones.

Problemática

El estudio de la variación en el discurso matemático escolar es casi nulo o podríamos decir que no existe en su enseñanza, ya que se privilegia el estudio de los conceptos como: límite, derivada,

funciones entre otros que deben de estar fuertemente estructurado al conocimiento del estudiante. Esto hace que se privilegie una actividad matemática de algoritmos y procedimientos que oscurecen el pensamiento de lo que cambia. Esto ha restringido el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional, y por lo tanto que muchos estudiantes no posean las estructuras y códigos variacionales para desarrollar dicho pensamiento. Un ejemplo de lo anterior es presentado en Cantoral (1998), donde se evidencia la falta de argumentos por estudiantes para explicar que dada una gráfica de una función (solo la gráfica) se les pide responder ¿dónde la tercera derivada es positiva ($f'''(x)>0$)? Como tal pregunta no forma parte de su conocimiento aprendido por el discurso matemático escolar (libros de texto, algoritmos o procedimiento), no permitió crear en estudiantes las suficientes estructuras variacionales para responder a la pregunta y por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar). Por otra parte existe un interés por estudiar la tecnología y su contribución al conocimiento del usuario, ya que se han encontrado ciertas problemáticas inesperadas (Artigue, 2002). Una de ellas es que el trabajo con la tecnología obedece a otro tipo de organización matemática a la acostumbrada sin ella, lo que obstaculiza en muchos casos al entendimiento matemático del estudiante, al extrapolar sus técnicas a papel y lápiz en un ambiente tecnológico (Artigue, 2002). Otra es considerar a la tecnología como una herramienta externa al conocimiento que solo sirve para representar el objeto y no logrando su integración al conocimiento mismo de quien lo usa (Briceño, 2008). La atención hacia estos aspectos, se puede encontrar en diversa literatura y en propuestas donde han obtenido ciertos avances (Artigue, 2002; Trouche, 2004). Al revisar esta literatura pudimos observar que sus estudios en cuanto al uso de la tecnológica en el aprendizaje de las matemáticas se orientan en el trabajo con objetos matemáticos y sus distintas representaciones, es decir estudian el uso tecnológico con el objeto preexistente. Una perspectiva como la teoría socioepistemológica su foco no es el trabajo con los objetos si no el uso que se hace de ellos, es decir esas prácticas sociales que norman ese objeto. Esto nos origino una pregunta de investigación ¿Qué sucede si estudiamos el uso de la tecnología con base a diseños que obedecen hacia las prácticas? y si es así *¿Qué es lo que norma una integración tecnológica en dicho diseño?* Para responder a tales preguntas, se estudia el uso de una tecnología en un escenario específico en actividades intencionadas el desarrollo Pylvar y para ello nos situamos en dos marcos teóricos que a continuación presentamos.

El marco teórico

La tecnología lleva a acciones que a su vez se convierten en técnicas que se establecen para resolver una actividad matemática. Estas técnicas realizan una economía de procedimientos sin poder ir observando el proceso de cada procedimiento como se haría a lápiz y papel. Tal potencial tecnológico es una inquietud por saber de qué forma esta economía afecta la parte conceptual del usuario, es decir, se aprenden técnicas con el uso tecnológico, pero cómo estas nuevas técnicas que reducen procedimientos de cálculo matemático a lo que uno acostumbrado hace a papel y lápiz, afectan el conocimiento matemático del estudiante. Si se logra que las nuevas técnicas y el conocimiento se desarrollen a la par se podría decir que la tecnología se *integra* al conocimiento de quien lo usa. La palabra *integración* en nuestra investigación tiene un significado más profundo y un respaldo teórico complejo, no significa llevar la tecnología al aula para resolver actividades matemáticas sino que hay que transformarla y hacerla un instrumento por el proceso de *instrumentalización* e *instrumentación*. El desarrollo de dicho proceso construye una *Génesis instrumental* (GI). *La instrumentalización* son las acciones que hace el usuario para ir reconociendo las funciones de la tecnología, es decir, va caracterizando sus acciones hacia lo que puede y no hacer. Estas acciones se consolidan en esquemas de uso que se establecen en la mente para una tarea específica, en ese sentido el usuario transforma el artefacto (Trouche, 2004). Pero la *instrumentalización* alimenta a otro tipo de esquema, es decir los esquemas de uso evolucionan y se consolidan en un *esquema de acción instrumentada* (Artigue, 2002), como una técnica para la resolución de la actividad. A este último proceso se le denomina *instrumentación* donde la técnica es una construcción del usuario para desarrollar y entender su actividad matemática (Trouche ,2004). De esta forma el usuario transforma la tecnología pero a su vez es transformado por ésta en situaciones específicas.

La teoría socioepistemológica

En la Teoría Socioepistemológica (TS), se considera a la práctica social como un concepto que se está construyendo y que reivindica el trabajo del humano en las explicaciones de la construcción del conocimiento. Esta constituye un medio para estudiar el conocimiento matemático, ya que señala otras dimensiones que no son explícitas de la actividad matemática anclada a los conceptos, como son las prácticas en lo social y las argumentaciones en lo situacional (Cordero y

Buendía, 2005). Bajo la Teoría se toma a la graficación como una práctica social a través del *uso de la gráfica*, donde ya se tiene un estatus considerable como un constructo que lleva a argumentaciones del cálculo en situaciones específicas (Domínguez, 2003; Rosado, 2004). Estas argumentaciones del *uso de la gráfica* se han encontrado en otros dominios científicos donde adquiere significado como en la ingeniería (Lara, 2007; Parra, 2008), la Biología (Vázquez y Cordero, 2008) o por medio de los recursos tecnológicos (Suarez, 2008; Torres, 2004; Briceño, 2008). Esto ha brindado ciertas categorías de uso de la gráfica que se resignifica a través de su funcionamiento y forma en su vivencia escolar y que no se aprecian por la centración de ver la gráfica como algo que se usa para rendir cuenta del concepto de función. Así tal estatus del *uso de la gráfica* formula epistemologías donde la graficación es significada como una *práctica social,* ya que lleva a hacer múltiples realizaciones y ajustes en su estructura para producir un patrón deseable, donde es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación para construir conocimiento del Cálculo (Cordero, 2008). Así la investigación propone estudiar el uso de la tecnología escolar con la conveniencia de caracterizarlo a través del *uso de la gráfica* en una situación de modelación del movimiento. Con este respaldo se intenta responder a la pregunta de investigación y la hipótesis de que el "*uso de las gráficas"* norma una integración tecnológica en una situación específica.

El Diseño

En el diseño se creó un conjunto de actividades dirigida a personas de distintas edades para su aplicación en un escenario de difusión del conocimiento científico (El escenario fue el programa ciencia en las calles de Instituto de ciencia y tecnología del D.F.). Los participantes fueron variados desde nivel básico, bachillerato hasta uno que otro adulto. La tecnología que se utilizó fueron calculadoras graficadoras y sensores de movimiento. En este escenario se intenta caracterizar el conocimiento cotidiano resignificándolo hacia una matemática que sea funcional. Para ello se toma cuidado en estudiar las rutinas que los participantes generen (Berger y Luckmann, 2006) y ver como estas evolucionan al enfrentar una crisis (rompimiento de la rutina) por lo que tiene que haber un rediseño de la rutina anterior para el surgimiento de una nueva motivadas por la crisis que lo genera. De esta forma las actividades están intencionadas para explorar las rutinas de los

participantes acerca de ideas variacionales. A continuación se describen las escenas de las actividades:

Escena 1. Interpretación acerca del movimiento. En una primera escena se solicita a los participantes (dibujo a papel y lápiz) su interpretación acerca del movimiento de tres personajes con características particulares de movimiento como se muestra en figura 1: *Actividad 1. ¿Dibuja el movimiento de Luis, Alex y David, si se mueven hacia un mismo punto, y al llegar se detiene 2 segundos para luego regresar?* Posteriormente se realiza una discusión grupal de los dibujos que realizaron.

Escena 2: Modelación de movimiento. Se presenta la tecnología a trabajar (calculadora gráfica y sensor de movimiento) y se explica su funcionamiento, posteriormente se escoge un niño al azar y se le indica hacer el movimiento de un punto P_1 a P_2 como se muestra en la figura 2. Se les indica a los participantes que deben de estar en una posición de espalda al sensor y caminar en línea recta.

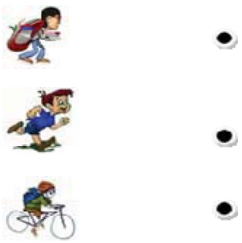


Figura 1. Escena 1. Interpretación acerca del movimiento

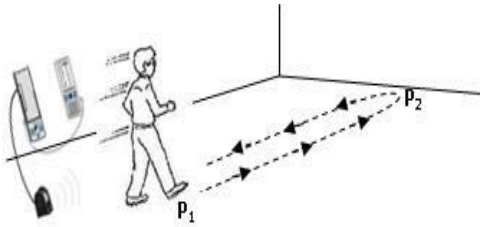


Figura 2. Indicación del movimiento con la tecnología

Después de la simulación del movimiento se les hace ver que la gráfica del movimiento que se obtuvo tiene el parecido a una montaña (ver figura 3a). Entonces se les pregunta ¿cómo se tendrían que mover ahora para que con el uso tecnológico dibuje una montaña más alta? (ver figura 3b).

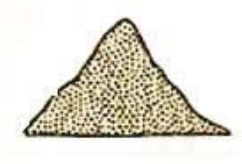


Figura 3a. Montaña generada por la primera modelación

Figura 3b. Reto de generar está Montaña con el movimiento

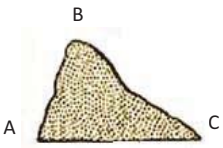


Figura 3c tercera modelación de la montaña

Escena 3. Con base a las respuestas anteriores de la escena 2, se propone al participante, modelar una montaña de la figura 3c, preguntando antes el tipo de movimiento que se debería hacer de A a B y de B a C (figura 3c).

Algunos resultados

La actividad de la escena 1 tiene la intención de apreciar la interpretación de los participantes acerca de la variación del movimiento. La rutina que prevalece en el cotidiano acerca del cambio de movimiento son las gráficas de trayectorias. Uno de los argumentos de estas trayectorias en cuanto al cambio se aprecia a que mayor velocidad, menos líneas discontinuas y más largas (Columna A), u otra afirmación que mientras se reduzca la intensidad de ondulaciones se tiene mayor velocidad (columna B de la tabla)

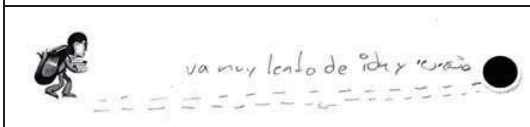
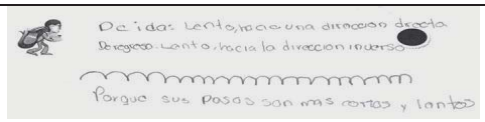
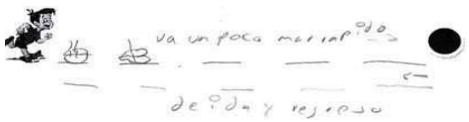
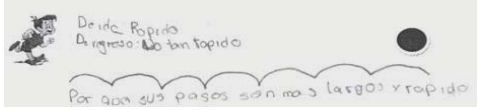
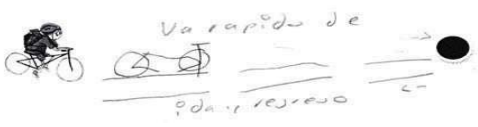
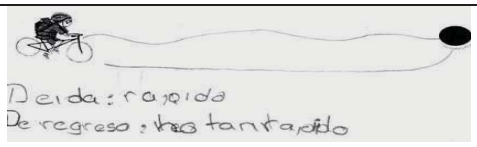
A	B
	
	
	

Tabla1. Algunas interpretaciones de niño(a)s de la variación del movimiento

Escena 2. Se modela el movimiento de los personajes para ir discutiendo ideas variacionales con los participantes de las gráficas que vayan generando. Se aprecia en su lenguaje coloquial, el tipo de movimiento para generar la montaña de la figura 3b como: *caminar más rápido, correr más fuerte, corro rápido para que la montaña sea más alta, muy rápido en poco tiempo, movimiento recto una mayor distancia a mayor velocidad.* Pero después cuando se les pregunto el tipo de movimiento para generar la gráfica de la figura 3c, encontramos los siguientes argumentos:

De A a B	**De B a C:**
- aumento la velocidad constante *- Muy rápido* *- Mayor velocidad* *- Movimiento del cuerpo debe ser rápido* *- Un movimiento rápido en poco tiempo*	*- Disminuir la velocidad, Lento* *- El movimiento del cuerpo debe de ir disminuir poco a poco y* ***en un punto intermedio un poco más lento*** *-Caminar muy lento en mucho tiempo* *-Caminar lento* ***pero en algún punto más lento***

Nos llama la atención los argumentos de B a C en negrita donde se refiere a un punto en medio del trayecto de B a C justamente por la inclinación de la montaña, es decir, está usando la gráfica para argumentar aspectos variacionales.

Conclusiones

Las evidencias que se obtuvieron con la modelación, se aprecian que los estudiantes *usan la gráfica* para sus argumentos hacia aspectos variacionales, donde los niños por la forma de la curva en su lenguaje coloquial identifican aspectos del movimiento de ida, regreso, el cambio (rápido, lento) y el no cambio (ahí no hay movimiento está parado o no tardo nada). Se robustecieron mas ideas variacionales en la escena 3, ya que identifican un cambio en el trayecto de B a C (figura 3c). La rutina acerca de la variación en el cotidiano se identificó por conducto de las gráficas de trayectorias, dicha rutina se pone en crisis con el uso tecnológico al confrontarse con las gráficas cartesianas, en donde los niños en la situación iban modificando su interpretación de la trayectoria a un sistema cartesiano. El movimiento fue la pauta para ir modificando esta rutina e irlo variando para producir un comportamiento grafico deseable. Se encontró que los niños pudieron aprender algunas acciones con relación de la tecnología al ir entendiendo su funcionamiento y construir esquemas de uso, como por ejemplo: entienden que el quedarse quieto genera una línea

horizontal, o el no salirse del rango del sensor o qué movimiento debe de hacer para que el sensor produzca una curva deseada. Entonces se podría decir que hay síntomas de un primer proceso de de instrumentalización de la tecnología, donde los niños entienden la tecnología y técnicas para desarrollar un conocimiento variacional. El diseño se descentraliza de los conceptos hacia las prácticas que rindan cuenta, hacia comportamientos que modelan las gráficas. Los datos nos proveen ideas a llevar a cabo más adelante en la investigación para estudiar las trayectorias y resignificarlas hacia las gráficas cartesianas y al desarrollo de Pylvar, pero también ir construyendo esquemas de uso tecnológico específicos para la instrumentación siendo el constructo *uso de la gráfica* como lo que norma dicha instrumentación, es decir, su integración tecnológica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002).Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Berger, P. y Luckman, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemológica study. *Educational Studies in Mathematics*. 58, 299-333.

Briceño, E. (2008) *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN,D.F., México.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Oncovían, Ol.; Farfán, R.M., Lezama, J., Romo. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cantoral, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42, 14(3),* 353 – 369.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F., México.

García, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F., México.

Lara, M. (2007). *Categorías de Uso de Gráficas en libros de texto de Mecánica de Fluidos*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F, México.

Parra, T. (2008). *El uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F., México.

Suarez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, D.F., México.

Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process Through Instrumental Orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, CICATA-IPN, México.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, D.F, México.

Vázquez, E. y Cordero, F. (2008). Caracterización de una Matemática funcional en el dominio de la Biología. Un estudio Socioepistemológico. *Resúmenes de la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* México. p. 79.

PREDICIENDO CON LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Ricardo A. Cantoral Uriza, Marcela Ferrari Escolá y Diana R. Lluck Soberanis
Cinvestav-IPN, UAGro, CBTis 14 México
rcantor@cinvestav.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx, dianalluck@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio

Resumen. *En este reporte se discute, desde la socioepistemología, una experiencia realizada con estudiantes de bachillerato respecto de la Regla de los signos de Descartes, aquella que permite determinar el número de raíces positivas que una función polinómica podría presentar. El diseño de la secuencia de aprendizaje requirió el uso de la Ingeniería Didáctica como metodología, aunque no buscábamos validar la actividad de aprendizaje, sino analizar las herramientas que los estudiantes evocaran o construyeran en la experiencia.*
Palabras clave: Socioepistemología, predicción, raíces, función polinómica

Introducción

La Regla de los signos de Descartes (Descartes, 1637), aquella que se utiliza para determinar el número de raíces de una función polinomial analizando el cambio de signo de sus coeficientes, se encuentra a la baja en el terreno educativo. En general, reflexiones alrededor de la regla de signos se hallan en libros utilizados en Álgebra Superior, en el apartado de ecuaciones (Hall y Knight, 1980) y con menor proporción en algunos libros para Precálculo (Sullivan, 1989) así como en algunos de Álgebra Básica (Uspensky, 1995), todos aún en uso. Efectivamente, la búsqueda y localización de raíces así como su cálculo aproximado, va perdiendo terreno ante la irrupción de la tecnología, invitándonos a reflexionar sobre los argumentos que van quedando atrás, así como la evolución de las herramientas matemáticas que los sustentan.

Realizar un estudio socioepistemológico nos permite profundizar sobre el origen de estas nociones al rastrear las prácticas sociales que sustentan su emergencia, adosadas a las herramientas y argumentos que se transforman a la par, afectándose y evolucionando indefectiblemente. Analizar el caso de la regla de los signos (ver Cantoral y Ferrari, 2004), es particularmente interesante pues nos restringimos a estudios intramatemáticos, es decir, aquellos argumentos y herramientas sumergidos en la práctica social de la predicción, pero dentro del mundo matemático, en búsqueda de un lenguaje algebraico conciso.

La búsqueda de raíces de ciertas funciones, aquellas entendidas hoy como el lugar donde una curva cruza el eje de las abscisas, se percibe desde los primeros esbozos del álgebra donde "la cosa" fuera reemplazada con el tiempo por "la incógnita", en esa época donde, según investigadores como Youschkevitech (1995), lo variable todavía no había aflorado y donde se deseaba determinar un valor específico, argumentos regidos por una manipulación geométrica de magnitudes distantes aún de una manipulación algebraica de números que requeriría quiebres particulares en el discurso matemático. Siglos después, el acercamiento entre geometría y álgebra, planteado y desarrollado por varios matemáticos, confluyen en una obra especial como *Geometrie* de Descartes (1637) con ideas que denotan una evolución de argumentos al distanciarse de las magnitudes y priorizar lo algebraico, por tanto, de lo simbólico que aún se estaba consolidando. Hallamos así, en esa obra una interesante manera de determinar el número de raíces de un polinomio, que sólo fuera enunciada y sustentada con ejemplos bajo el supuesto que la sencillez del argumento no ameritaba una demostración formal pues en palabras de Descartes, era suficiente hacer varios ejemplos para convencerse de su veracidad. Sin embargo, la demostración de la regla de los signos se convirtió en un desafío para los matemáticos de la época, encontrándose varios acercamientos a la misma, incluso evidencias de los límites que el primer enunciado presentaba (ver Bartolozzi y Franci, 1993).

Efectivamente, Descartes establece que: …*podemos determinar el número de raíces verdaderas que cualquier ecuación pueda tener, como sigue: una de + a – o de – a +; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentran en sucesión dos signos + o dos* - (Descartes, 1637 p. 373). Siendo el ejemplo con el que explica sus ideas el siguiente: $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ donde {+ **-** - + **-**} es la combinación de signos que denota que existen tres cambios de signos y una permanencia y por tanto de las cuatro raíces de esta ecuación una o tres podrían ser "verdaderas" es decir "positivas" en la terminología actual. En realidad, Descartes construye el ejemplo desde las raíces pues multiplica los siguientes factores (x-2)(x-3)(x-4)(x+5).

Recién en 1828 aparece una demostración robusta de la mano de Gauss al agregar una raíz para desequilibrar la sucesión de signos, idea ya explorada por Segner en 1756. Luego de esta demostración, se desarrollan otras ideas, incluso se muestra la fragilidad de la primera definición de esta regla pues se daba por transparente que se trata de que la expresión polinomial esté

ordenada, así como que es extendible a las raíces negativas en cuanto a permanencias, la cual sería falsa sino estuviera completa (Ver Cantoral y Ferrari, 2009).

Una actividad para visualizar la regla de Descartes

Luego de reflexionar sobre los significados alrededor de raíces y funciones que podrían haber construido estudiantes de bachillerato en cursos de Álgebra y Geometría Analítica en los cuales han sido instruidos respecto a funciones lineales y cuadráticas fundamentalmente, diseñamos una actividad donde buscamos enriquecer estos argumentos desde el estudio de derivadas sucesivas, que calculadas en el cero particularmente, nos permite reescribir las funciones utilizando el polinomio de Taylor como interesante herramienta para la predicción.

En general, en los programas de Bachillerato, encontramos que se trabaja con las expresiones algebraicas: $y = mx + b$ así como $y = ax^2 + bx + c$ con mayor detalle que otras polinomiales. Con estas expresiones se les presenta, en general, el término libre "*b*" de la expresión analítica de una función lineal como la ordenada al origen, así como la pendiente "*m*" de esa recta como la inclinación. En cambio, en la función cuadrática generalmente tratada como "parábola" se les reafirma el papel que juega la ordenada al origen, introduciéndolos también en el estudio del signo del parámetro correspondiente al término cuadrático, informando sobre si la curva abre hacia arriba o hacia abajo, pero sin trabajar con el parámetro "*b*" del término lineal.

En el diseño respetamos este orden iniciando entonces las tres actividades de aprendizaje con la correspondiente a la función lineal $y = mx + b$ y la posibilidad de reescribirla como $y = f'(0)x + f(0)$, expresión que describirá en toda función polinomial, a la recta tangente a la curva en el punto $(0, f(0))$ y que nos permite visualizar algunas características de las mismas. Sin embargo, la atención se desvía a los cambios de signo que presentan estas constantes de la función lineal, y por ende de la posibilidad o no de tener una raíz positiva. Todos estos, argumentos muy trabajados en clases de matemáticas desde la secundaria.

En la segunda actividad se les invita a reflexionar sobre la función cuadrática, donde aparece ahora la segunda derivada. Por tanto, además de conocer la recta tangente en $(0, f(0))$, emerge la concavidad de la misma ya que $f''(0) > 0$ indica que la parábola se abre hacia arriba, en caso

contrario, hacia abajo. En la tercera y última actividad de aprendizaje, se les propone analizar las funciones cúbicas, presentando en la tabla sólo las gráficas correspondientes a $f'''(0)>0$. Esta información nos permite asegurar que la curva recorre el plano cartesiano desde $-\infty$ dirigiéndose hacia $+\infty$ a medida que *x* tiende a $+\infty$, en tanto que las demás derivadas de orden menor anunciarán las "jorobas" que posee o su ausencia. Cerramos esta actividad, preguntándoles sobre qué habría que hacer para agregar una raíz positiva; lo cual los llevaría a reflexionar sobre funciones de mayor orden desde el argumento de que la sucesión de signos presente cuatro cambios, pudiendo ser uno del tipo $\{+,-,+,-,+\}$.

Intentamos entonces que los estudiantes resignifiquen las funciones polinomiales utilizando la Regla de los signos de Descartes para determinar el número de raíces positivas utilizando como herramienta al polinomio de Taylor. Esto conlleva trabajar con las derivadas sucesivas de una función para reescribirla. Por tanto, nos interesa enriquecer el universo gráfico de los estudiantes, particularmente en las funciones polinomiales, propiciar la emergencia de la Regla de los signos de Descartes y utilizar los significados construidos para cada derivada sucesiva, calculadas en el cero, para determinar el mayor número de raíces positivas de la función polinomial.

Discutiendo los resultados de la actividad

En búsqueda de evidencias sobre cómo propiciar el desarrollo de una red de argumentos, en estudiantes de bachillerato, alrededor de predecir el número de raíces positivas de los polinomios desde sus derivadas sucesivas, invitamos a seis muchachos de 16 años a interactuar con nosotros en tres sesiones. Se presentaron siete y se conformaron dos equipos de trabajo: uno, al que llamaremos Equipo 1, compuesto por cuatro compañeras del área de alimentos y el otro, Equipo 2, compuesto por una muchacha de informática, otra de electrónica y un estudiante del área de contabilidad. El Equipo 1 había trabajado sobre funciones y sus derivadas así como la interpretación gráfica de las mismas en su curso de Cálculo. Los integrantes del Equipo 2 en cambio, no se conocían entre sí y sólo habían trabajado ciertos elementos respecto a la derivación de funciones de manera mecánica y sin apoyo gráfico lo que marcó una gran diferencia entre los argumentos de unos y otros.

Sesión 1: Prediciendo raíces de funciones lineales

Se inicia la sesión con la pregunta: *¿reconocen esta expresión?*, *¿qué tendríamos que graficar para representarla?,* luego de haber escrito $y = ax + b$ en la pizarra. Se percibe cierto desconcierto pues contestan: *Pero… no tiene valores…* proponiendo graficar entonces: *f*(*x*)=*x+1* desde una tabla eligiendo 3, 2, 1, 0, -1, -2 y -3 para las abscisas, generando una lectura de la gráfica de derecha a izquierda, elemento que genera incertidumbre a la hora de conversar sobre si la función crece o decrece al estudiar el signo de la primera derivada. Continúa la discusión solicitándole que verifiquen que *f*(*x*)=a*x*+b puede reescribirse como: *f*(*x*) = *f'*(*0*) *x* + *f*(*0*). La primera respuesta que escuchamos en la discusión general fue: *f*(*0*)=*x*, y ante la pregunta ¿por qué?, no logran articular un argumento ya que alguien comenta: "*no… es igual a b… ya está arriba ¿no?*", utilizando así lo que se quería discutir. Se observa que pese a que habían determinado varias ordenadas de una función "con valores" al construir una tabla minutos antes, no extrapolan las ideas a esta expresión general. Recordarles esa instancia permitió arribar a *f*(0) = *b*, sin antes dejar de pasar por *f*(0) = *a* en su particular manera de "tantear" respuestas.

Para derivar, se desconciertan. Intentan recordar lo trabajado en clases, esbozando por ejemplo "*u*(*v*)=*v*(*u*) *era algo así ¿no?"…* por lo que se les guía desde el pizarrón recordando algunas de las fórmulas que evidenciaban haber conocido como recetario. El Equipo 1 recupera lo discutido con la pizarra en su informe de clase como se puede observar en la Figura 1, donde asocian el "cambio" de signos con la posibilidad de encontrar una raíz.

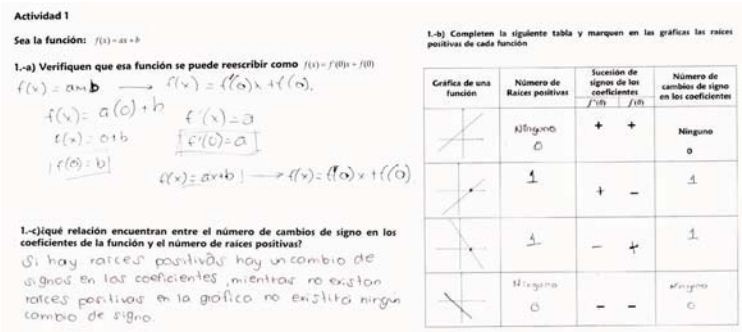


Figura 1: Reporte de primera sesión del Equipo 1

A diferencia del Equipo 1, el Equipo 2 muestra cierta debilidad de leer las gráficas dependiendo su análisis de asignarle una expresión algebraica a cada recta para asegurar la cantidad de raíces y su signo, demostrando no haber desarrollado una mirada global. Sin embargo, fijan la raíz (x=2) para las ecuaciones del tipo $2x+3=k$ y, asignando signos al 2 y 3 calculan el valor de k, punto que dibujan en el eje de las ordenadas y que utilizan para graficar las funciones implicadas, observándose así que no asocian los signos con la pendiente y la ordenada al origen (ver Figura 2).

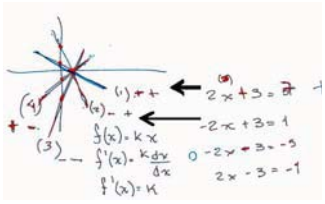


Figura 2: Confusión entre pendiente y raíz (Equipo 2)

Sesión 2: Prediciendo raíces de funciones cuadráticas

Constatar, en la sesión anterior, que sólo habían trabajado con la idea de derivar desde "la regla de los cuatro pasos", provoca que se inicie discutiendo con el grupo el significado de las derivadas sucesivas convocadas en la actividad. Se conversa entonces sobre que $f(0)$ indica la intersección de la función con el eje de ordenadas, que $f'(0)$ nos anuncia el tipo de crecimiento así como que $f''(0)$ se vincula con la concavidad.

Luego de explorar las gráficas presentadas en el diseño, similar al utilizado en la primera sesión, se discute sobre el número de raíces al observar que: *¿Aquí hay tres? O Aquí "cero"… "una"… "dos"… ¿qué ponemos?* Dudas que aparecen al haberse graficado tres funciones (una con dos raíces distintas, una con una raíz de multiplicidad 2 y una sin raíces reales) y que las lleva a discutir en grupo el sentido de cada derivada, ideas que aplican para determinar los signos correspondientes solicitados en la tabla.

Equipo 1	Equipo 2
En una gráfica de funciones (parábolas en este caso) el número de raíces positivas (+), encontradas, va a ser igual al número de cambios de signos en los coeficientes	
Es decir, si no hay raíces positivas (+) no hay cambios de signos;	*Cuando no hay cambio de signo en los coeficientes no hay ninguna raíz positiva en las funciones graficadas;*
Si hay una raíz positiva (+), hay un cambio de signo;	*Cuando existe un cambio de signo, hay una raíz positiva:*
Si hay dos raíces positivas (+) hay dos cambios de signos. Con esta conclusión, deducimos que tanto en las funciones lineales como en las funciones cuadráticas se cumple con este argumento	*Cuando existen dos cambios de signo en los coeficientes, existe la posibilidad de obtener dos raíces o ninguna dependiendo del origen de las gráficas.*

Tabla 1: Conclusiones de la segunda sesión

Se observa que el Equipo 1 presta atención al número de raíces para determinar el cambio de signo (ver Tabla 1) siguiendo el orden de la tabla que deben completar, en tanto que el Equipo 2 reflexiona más cercano al enunciado de la regla de Descartes, al centrar su conclusión al número de cambios de signos para predecir raíces.

Sesión 3: Prediciendo raíces de funciones cúbicas

En la tercera sesión se les deja trabajar solos sin gran apoyo ante una de las funciones menos trabajadas por ellos en la escuela. Sin embargo, demuestran no tener problemas para rellenar las dos últimas columnas ($f'(0)$ y $f(0)$) utilizando los argumentos ya utilizados en las anteriores sesiones. Como se esperaba, se desconciertan con las dos primeras columnas ($f''(0)$ y $f'''(0)$). Luego de discutir sobre cómo asignar "+" o "-" a las derivadas argumentando desde el comportamiento de las "jorobas", observan el número de raíces positivas para determinar el número de cambios, utilizando así la regla de los signos de Descartes, para encontrar la combinación de los signos y por tanto, el signo de las derivadas en cero. El Equipo 1, nos sorprende con la interpretación que le dan a la tercera derivada al observar la variación de las concavidades.

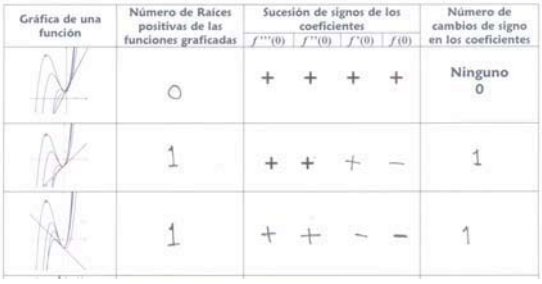


Figura 4: Parte de la tabla completada por el Equipo 1

Conclusiones

Ante un grupo de estudiantes especiales, logramos enriquecer su universo gráfico, así como su red de significados alrededor de las derivadas sucesivas. Aferrarse a tablas y valores para decidir los signos de las derivadas, desequilibró a uno de los grupos, asociaban inicialmente los puntos de corte con los ejes para determinar si la pendiente de la recta tangente era positiva o negativa, empantanándose un poco en lo algebraico. En tanto que el Equipo 1 acepta rápidamente el desafío de "leer" gráficas y por tanto hablar de "*variaciones*"… "*crece… decrece*"… hay un "*valle*"… acercándose a lo analítico.

En lugar de utilizar estos elementos para "predecir" raíces, y así "mostrar" la veracidad de la Regla de los signos de Descartes, emerge su uso para establecer el signo de las derivadas sucesivas en x=0 y explicarse así la forma de la curva, que parecía no haber estudiado con anterioridad. Efectivamente, la conclusión a la que arriba el Equipo 1 es: "*nos dimos cuenta que podíamos completar la tabla basándonos en nuestro argumento presentado en las funciones lineales, cuadráticas en nuestra teoría de que el número de cambios de números* (se refieren a signos) *habrá el mismo número de raíces. Nos basamos en la lógica y en la información ya dada en el ejercicio. De esta forma, posteriormente pudimos lograr saber, que nos indicaba cada uno de las derivadas con más facilidad*".

Referencias bibliográficos

Bartolozzi, M. y Franci, R. (1993). La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828). *Archive for History of Exact Sciences 45*(4), 335 – 374.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica 2* , 33–70.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2009). La predicción y la regla de lo signos de Descartes. Primera parte: Argumentos y demostraciones. *Revista Premisa 11*(41), 3-20.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Francia: Ediciones J. Gabay.

Hall, H. S. y Knight, S. R. (1980). *Álgebra Superior*. México: Unión tipográfica editorial hispano americano.

Sullivan, M. (1989). *Precalculus*. México: Maxwell Macmillan International Editions.

Uspensky, J. V. (1995). *Teoría de las ecuaciones*. México: Limusa.

Youschkevitech, S. (1995). The concept of function up to the midde of the 19th century. (R. Farfán, trad.). En: R. M. Farfán (Ed.), *Antologías 1* (pp. 81-185). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México. (Reimpreso del *Arch. Hist. Exact. Sci. 16*, pp. 37-85, 1976)

EN BUSCA DE UNA CARACTERIZACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

Liliana Homilka, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
lhomilka@yahoo.com.ar , crccrespo@gmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *A partir de observaciones de clases de estudiantes de profesorado de matemática y entrevistas realizadas a los mismos, se indagó acerca de la visión que poseen de la actividad docente. Los resultados que se reportan forman parte de una investigación realizada desde el marco socioepistemológico en la que se buscó inicialmente caracterizar las primeras prácticas docentes que llevan a cabo los estudiantes de profesorado de matemática (Homilka, 2008) y que ahora se orienta a la caracterización del profesor de matemática. En esta etapa de la investigación fue posible detectar un paralelismo entre los enfoques de la investigación en la matemática educativa (Cantoral y Farfán, 2003) y la manera en que los docentes de matemática encaran su labor. En este proceso, no son tenidos en cuenta los cambios que está sufriendo la escuela actual, mediante la generación de una sociedad educativa (Barbero, 2008), ni el diálogo necesario entre escuela y sociedad (Tenti Fanfani, 2008; Crespo Crespo, 2009). Consideramos que su reconocimiento es fundamental para lograr una reconstrucción del discurso matemático escolar.*
Palabras clave: Profesor, práctica docente

Introducción

Esta investigación, realizada desde el marco socioepistemológico, tiene como antecedente un estudio en el que se buscó inicialmente caracterizar las primeras prácticas docentes que llevan a cabo los estudiantes de profesorado de matemática (Homilka, 2008) y que ahora se orienta a la caracterización del profesor de matemática. A partir de observaciones de clases de estudiantes de profesorado de matemática y entrevistas realizadas a los mismos, se indagó acerca de la visión que poseen de la actividad docente.

En sus primeras clases, los futuros profesores utilizan saberes que fueron construidos en distintos escenarios socioculturales a lo largo de su vida escolar y social. Estos saberes son resistentes al cambio ya que han sido construidos de manera vivencial, sin reflexión profunda y en muchos casos sustentadas en ideas didácticas, pedagógicas relacionadas con una escuela con características muy rígidas, pero es necesario tenerlos presentes en un escenario de formación y acción profesional. Es decir que se acercan a la escuela con una visión de la actividad docente producto de la práctica del profesor. En muchos casos, esas prácticas se basan en un enfoque didáctico en el que la

escuela y la sociedad son percibidas como dos mundos opuestos, en el que todos, los docentes, alumnos, padres y demás grupos sociales se deben adaptar a las reglas escolares. Esto ha tendido a reforzar la realidad del aula. En la actualidad, es necesario que el profesor y los futuros profesores reflexionen acerca del discurso matemático escolar que hemos heredado y que aún en muchos casos se sigue practicando. Requiere por parte del profesor de matemática, un convencimiento de que para entender y explicar las problemáticas que se presentan en la clase ya no alcanza con "la mera reflexión entre los docentes, esta no conduce necesariamente a un cambio si no se tiene ayuda de alguien que aporte teorías y nuevas visiones" (Homilka, 2008, p. 45).

Los aportes de la matemática educativa son fundamentales en la formación del formador. Los conocimientos que produce brindan elementos para comprender la realidad del aula y actuar sobre ella.

La formación docente en una sociedad educativa

El aula de hoy demanda otras necesidades, presenta al docente de matemática desafíos diferentes por lo que se requieren nuevas miradas sobre ella. La investigación, desde la socioepistemología intenta dar respuesta a las problemáticas que el docente debe afrontar en el aula. Presenta características muy distintas a la de épocas pasadas, porque, como lo ha planteado Crespo Crespo (2008), el salón de clases está afectado por la crisis que atraviesan los centros educativos, el sistema escolar, en los que aún se intenta mantener su organización y racionalidad propios de las instituciones de la modernidad en tiempos de la posmodernidad.

En la actualidad, la formación docente se da en una sociedad educativa, en la que el profesorado y la escuela se encuentran atravesando momentos de crisis. La sociedad reclama un cambio en la escuela (Barbero, 2008; Tenti Fanfani, 2008). Por lo que ya no es pensable una formación matemática rígida. Ambas instituciones necesitan replantear sus actividades y roles. Es por eso que se debe "buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y tratar de identificar la manera en la que se los construyen. La escuela pasa a ser, una instancia mas de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento"

(Crespo Crespo, 2009, p.1147). Es momento que estas instituciones se replanteen sus actividades y roles, se hace necesario mantener un diálogo permanente entre la escuela y la sociedad.

La escuela de hoy intenta ignorar el modelo de comunicación escolar, en la actualidad es distinto de las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, no reconociendo que el escenario en el que los estudiantes se desenvuelven es distinto del escolar. Ellos actúan simultáneamente en escenarios académicos y no académicos. Los estudiantes no pueden separar ambos escenarios, para ellos su vida se desarrolla entre ambos, en ambos aprenden, en ambos transfieren conocimiento. Nuestra sociedad ya no construye conocimiento sólo en las instituciones educativas y lo transfiere fuera de ellas. Sin embargo la no comprensión de ese "ida y vuelta" del conocimiento entre escenarios académicos y no académicos hace que la escuela siga con un discurso unidireccional y no comprenda el origen de algunas dificultades que aparecen en el aula.

Dichos escenarios están estrechamente vinculados a la construcción de las ideas que caracterizan los diferentes significados que se otorgan a lo que es ser docente de matemática y que condicionan sus actividades y roles (Homilka 2008).

La formación docente no surge aislada de la sociedad, es producto de las necesidades educativas de la misma, se da en su seno; recibe influencias de los diferentes grupos sociales. Todos los aspectos de la vida social interactúan permanentemente con los de la vida escolar, esta interacción se da en ambos sentidos y ha cambiando la experiencia escolar de profesores y alumnos. Los lleva a reflexionar acerca de dispositivos, metodologías, relaciones, etc. La formación de formadores se desarrolla en un escenario específico pero diferente al de épocas pasadas. Esto requiere ampliar la mirada, el profesorado debe ser visto desde afuera y desde adentro simultáneamente, para que pueda lograr sus funciones y objetivos.

La matemática educativa es conciente cada vez más de la necesidad de modificar, reorganizar y fortalecer el discurso matemático escolar. Cada vez es más indispensable la comprensión de la necesidad de la formación integral de los docentes de los distintos niveles educativos, dispuestos a profundizar, observar, comprender; y la apertura a reconocer y aprovechar la coexistencia de ideas que vienen de fuera de la escuela. A partir de esta conceptualización, el profesor debe permitir la construcción de ideas matemáticas. Para ello es importante considerar la comunicación en el aula de matemática, la que lleve a la reconstrucción de sentidos y significados de conceptos matemáticos como productos de la actividad humana. Se trata entonces de favorecer en el futuro

profesor el desarrollo de una practica social que le permita generar actividades que tienen una dirección, un para qué además de un cómo.

Dos practicantes que tratan en su clase el concepto de función

A continuación se presentan descripciones de observaciones de clases realizadas a diferentes practicantes, quienes en sus primeras clases debían introducir el concepto de función a través de ejemplos no matemáticos. Cabe aclarar, que cada una conocía las características del curso, dado que allí habían realizado previamente observaciones de clases. Además, tenían libertad para planificar y luego, establecer consensos con la profesora del curso y con la docente de práctica.

Caso A

Llevado a cabo en un curso de cuarto año de la escuela media, con la presencia de 26 alumnos que estaban acostumbrados a hacer una matemática algorítmica. La practicante Claudia introduce el tema a través del ejemplo que se muestra en la figura 1.

Los teléfonos actuales tienen asignados a sus teclas letras y números, por lo que muchas empresas que controlan el servicio de 0800 les asignan números fáciles de memorizar para sus clientes. Así, por ejemplo, una escuela podría tener el 08003728352, que corresponde con el 0800ESCUELA.

a) ¿Qué número habrá que marcar para comunicarse con el 0800HELADOS?
b) ¿A qué palabra corresponde el 08001843367?

Figura 1: Ejemplo para la introducción del concepto de función

A partir del mismo, pasa a analizar las condiciones para que se trate de una función, y propone identificar los elementos del dominio e imagen de la función y la necesidad de establecer restricciones para que la relación sea funcional. Luego, pasa a llamar a letras con el nombre de variable dependiente y a los números con el de variable independiente.

A partir de preguntas, induce a analizar las relaciones que vinculan todos y cada uno de los valores de la variable independiente a un único valor de la variable dependiente. Para culminar con la definición que se muestra en la figura 2

Una relación entre dos variables es FUNCIÓN si a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Figura 2: Propuesta de definición del concepto de función

La clase continua con la elaboración de tablas y con la representación grafica de ambas relaciones para pasar luego a compararlas y sacar entre todos algunas conclusiones.

Finalmente, la practicante propone trabajar con ejemplos numéricos con la finalidad de que se analicen las ideas trabajadas anteriormente. Un ejemplo de lo que presenta se muestra en la figura 3.

¿Cuáles de las siguientes tablas corresponden a funciones y por qué?

Talle	2	4	6	8	10	12
Precio ($)	9	9	10	10	11	11

Contenido en gramos	100	200	400
Precio ($)	2,45	4,50	8

x	5	10	15	15	20	25
y	2	4	6	8	10	12

Figura 3: Propuesta de ejercicios

Lo planificado excede el tiempo de la clase, y propone como tarea la resolución del último grupo de ejercicios en los cuales los alumnos debían contestar ¿Cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones y por qué?

Caso B

Llevado a cabo en un curso de Matemática 1, de la carrera de Profesorado de Informática. Este era un curso de 76 alumnos, muchos de ellos recursantes, que se caracterizaban por no poseer bases sólidas de conocimientos matemáticos.

La practicante María introduce el tema a través del ejemplo que se muestra en la figura 4

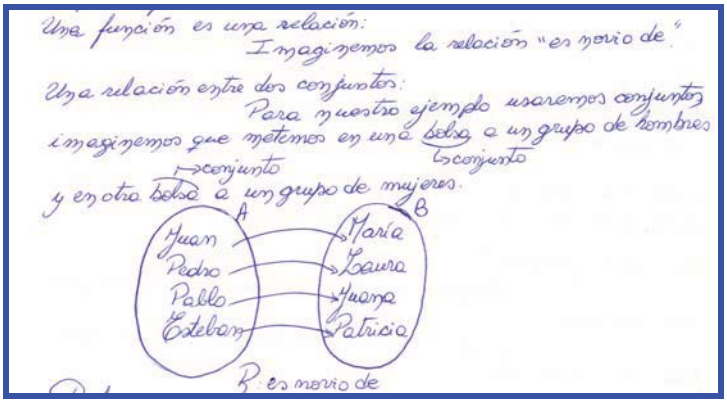


Figura 4: Ejemplo para la introducción del concepto de función

A partir de dicho ejemplo, pasa a analizar las condiciones para que se trate de una función, y propone identificar los elementos del dominio e imagen de la función (Figura 5).

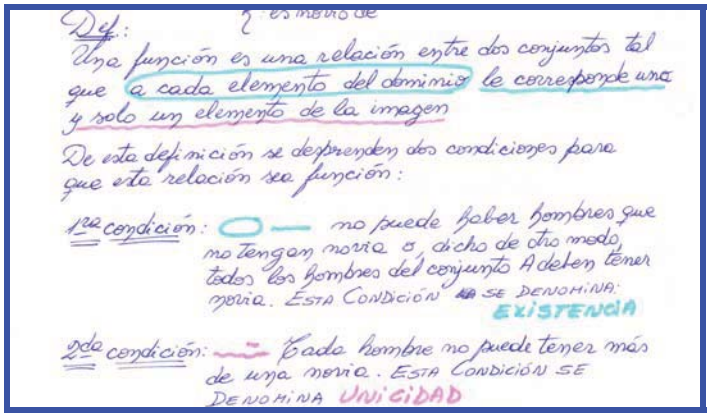


Figura 5: Propuesta de definición del concepto de función

Luego, al retomar el ejemplo inicial y de analizar sobre él casos particulares en los que se visualizara la posibilidad de obtener distintas funciones a partir de la misma expresión, pero cambiando los conjuntos de partida y de llegada. Esto le permitiría hacer comprender a los alumnos que no es suficiente explicitar la expresión algebraica o coloquial de una función, sino también los conjuntos de partida y llegada para poder analizar una función.

A continuación, pasa a plasmar la definición formal de función, sabiendo lo que la profesora del curso le había manifestado luego del análisis de su planificación que *"no llegar a una formulación*

simbólica, debido a las características del curso, en el que no se hace hincapié en la formalización, sino en la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos". Finalmente, la practicante proponía en su planificación la presentación de ejemplos numéricos en los que se analizarían las ideas trabajadas anteriormente.

Algunos comentarios acerca de las clases observadas

En ambos casos respetaron lo que se había planificado. Despertaron el interés de los alumnos y lograron la motivación y participación de los mismos a través de las preguntas y ejemplos concretos y reales que fueron presentados. Se utilizaron en las clases distintos registros de representación (tablas, escritura simbólica, diagramas de Venn, gráficos cartesianos). En algunos momentos de la clase, las situaciones trabajadas fueron significativas para los estudiantes, ya que las mismas forman parte de su vida no escolar.

En el caso de Claudia, cumple con lo que se le ha pedido, pero tiende a reproducir en el aula ideas en el mismo orden en que ella las aprendió (definición, enunciado en forma coloquial para pasar luego al tratamiento de elaborar varios tipos de tablas y gráficos). Implícitamente se manifiesta lo vivido en su biografía escolar. En la clase de matemática debe haber ejemplos matemáticos para que en el aula se haga matemática.

En muchas oportunidades, el hecho de reproducir el concepto de función tal cual como ha sido aprendido al momento de abordarlo y tratarlo en el aula, refleja la resistencia al cambio desarrollada por ellos (Lezama, 2005). Por lo que, la matemática que se construye en la clase se expresa por medio de un discurso rígido y formal. Esa resistencia desarrollada por los profesores al cambio (Lezama, 2005) se manifiesta en intentar reproducir en las clases formas de construcción que coinciden con las que se utilizaron en la propia edad escolar y es propio de los practicantes que encaran sus primeras prácticas docentes (Homilka, 2008); en muchas oportunidades se tiende a repetir la manera en que cada uno ha aprendido un tema al tener que abordarlo.

En el caso de María, quien realizó un interesante tratamiento de las distintas posibilidades en el ejemplo de relación *"es novio de"*, mostrando cuáles eran casos permitidos y cuales no para que se tratase de ejemplos de funciones. Su intención era que el alumno viviera con gusto las matemáticas, a partir de su propuesta logró que la cultura y el lenguaje de los estudiantes

coincidiera con el de la escuela (Tenti Fanfani, 2008), de allí la empatía que se puso en evidencia en el aula. Pero, su práctica ha puesto de manifiesto su formación conjuntista recibida por ella en su formación básica y que es una señal muy fuerte de su historia escolar. En el momento de la clase en que expresa formalmente la definición de función, llega a utilizar cuantificadores, lo que fue copiado por los estudiantes, aunque sin que lograran comprender plenamente tal notación. Aún cuando se le sugirió durante la clase que presentara una interpretación coloquial de las definiciones escritas, no le fue posible alejarse de lo que había escrito y su explicación se limitó a una traducción casi textual de las mismas. Este hecho trasluce la existencia en el contrato didáctico de creencias de que la matemática debe unirse a la formalización simbólica (D´Amore, 2005). Esto se manifiesta no sólo en la formalización de definiciones, sino en la manera de expresar demostraciones (Crespo Crespo, 2007) que en muchas oportunidades no son aceptadas por los estudiantes si no se encuentran escritas de manera formal.

A modo de reflexión

En cada caso presentado se resaltaron los aspectos positivos y negativos que influyen en la construcción de conceptos matemáticos. El análisis de los mismos nos permiten reflexionar acerca del modo en que encaran las primeras prácticas docentes los estudiantes de profesorado (Homilka, 2008). Como algo beneficioso se destaca el hecho de que los alumnos encontraron en la clase de matemática ejemplos que forman parte de su vida cotidiana, los que contribuyen a alcanzar la significatividad del conocimiento escolar que estaban construyendo; evidenciando así, la riqueza que tiene la construcción de la cultura matemática escolar cuando se conjugan las ideas que provienen del adentro y del fuera del aula.

Actualmente, la escuela forma parte de una sociedad educativa, en la que el profesor debe partir de la cultura de sus alumnos para integrarla a la cultura matemática escolar con la finalidad de posibilitar construcciones significativas. (Tenti Fanfani, 2008; Crespo Crespo, 2009). Como docentes debemos reflexionar acerca de las ideas arraigadas que manifiestan de forma natural nuestros practicantes, sean estas referidas al uso de los diagramas de Venn o a la rigurosidad con que se utiliza el lenguaje simbólico formal en las definiciones u otras que se puedan presentar. Porque ellas nos están indicando que son ideas que como estudiantes no han sido firmemente

construidas, las que luego, como docentes pueden llegar a constituirse en obstáculos que lleven a construcciones no sólidas o no intencionadas.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6 (1)*, 27-40.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1145-1154. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de maestría no publicada. Cicata-IPN, México.

Homilka, L., Crespo Crespo, C. y Lezama, J. (2009). Primeras prácticas docentes de los estudiantes: necesidad de resignificar la formación del profesorado. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1553-1561. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lezama. J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 8 (3), 339-362.

Tenti Fanfani, (2008). Mirar la escuela desde fuera En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

UNA VINCULACIÓN ENTRE LA PROBABILIDAD Y LAS PRIMERAS NOCIONES DE TOPOLOGÍA: LOS TRABAJOS DE GAUSS Y WEIERSTRASS

lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza
PUCV — Chile
Cinvestav–IPN — México
leanggi@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología — Nivel: Superior

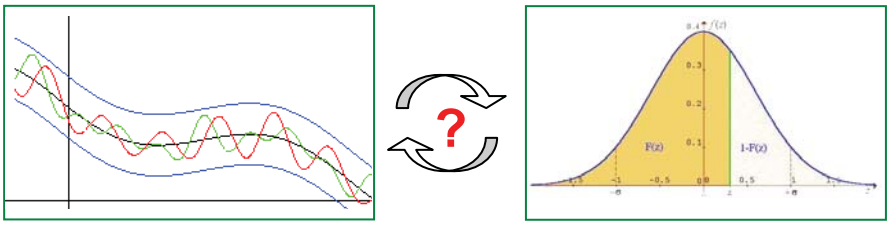
Resumen. *El discurso matemático escolar ha hecho que el conocimiento matemático se divida en diversos compartimientos de saberes. Mostraremos en esta investigación cómo dos áreas de la matemática, que viven sin aparente vinculación entre ellas en el sistema escolar actual, están significativamente relacionadas en su contexto de origen. Al confrontar la significación histórica con la escolar, evidenciamos las diferentes significaciones que tiene el conocimiento en cada uno de estos escenarios. Con esto identificamos conflictos epistemológicos existentes en la enseñanza de la convergencia uniforme. Concluimos que el rediseño del discurso matemático escolar debe considerar las diferentes "maneras de ver" al conocimiento matemático en los diferentes escenarios, ya que esto nos brindará una mirada más profunda de la dimensión sociocultural.*
Palabras Clave: Discurso matemático escolar, Significación, construcción social

INTRODUCCIÓN

La socioepistemología ha sostenido por años que el principal problema del aprendizaje de las matemáticas no está en las formas de enseñanza ni en las metodologías de organización curricular, sino está en la forma en que se entiende y presenta a la matemática en el ambiente escolar. Esta ideología compartida por los actores del sistema educativo se ha denominado en este marco como discurso matemático escolar (Cantoral, 2001b) El discurso matemático escolar actual divide en diversos compartimientos de conocimientos a la matemática escolar, lo reorganiza en un conjunto de temas y lo secuencia de lo más fácil a lo más complejo. De esta manera segrega cada área del saber, las cuales viven desvinculadas entre sí en el sistema escolar.

Este discurso asume que si un individuo se incorpora a un sistema de difusión institucional y estudia al conocimiento matemático compartamentalizado y secuenciado, logrará después de años de reorganizar estos conocimientos en un todo coherente que pueda utilizarlo dentro y fuera de la escuela. ¿Pero en realidad lo logran? La mayoría de los estudiantes no aprenden conocimiento matemático; este es sólo accesible para una élite intelectual. Aparentemente el causante de este problema es en gran parte esta ideología, el discurso matemático escolar. (Cantoral, 2001b)

¿Tendrá alguna relación la teoría de aproximación de funciones arbitrarias mediante polinomios con la probabilidad de espacios muestrales no finitos? (Figura 1)



Aproximación mediante convergencia uniforme

Distribución de probabilidad Normal

Figura 1

Desde la mirada del discurso matemático escolar actual diríamos que el primer problema pertenece al cálculo y el segundo a la estadística, las cuales son áreas del conocimiento diferentes. De hecho, estás áreas del conocimiento se estudian de manera separada en muchas instituciones educativas de nivel superior. Pero si miramos desde la mirada de los autores llegaremos a una conclusión diferente.

Weierstrass demuestra en 1885 la posibilidad de representar mediante series de funciones polinómicas cualquier función continua de variable real. Éste fue uno de los resultados más importantes de su época en el área del análisis matemático, al punto que se desarrollaron numerosas pruebas y generalizaciones al teorema (Pinkus, 2000). Es más, su teorema marca el inicio de una nueva disciplina matemática, la topología.

Al estudiar la versión original del teorema nos preguntamos sobre cómo entendió Weierstrass su teorema. Hoy lo significamos a través de la convergencia uniforme de funciones, argumento muy utilizado en los cursos de análisis matemático. Pero Weierstrass no tenía estos recursos visuales y tecnológicos. ¿Cuáles fueron las ideas germinales del teorema? ¿Qué medios utilizó el autor para darle significado? Fuimos a estudiar la publicación original (Weierstrass, 1886) y encontramos lo siguiente:

EL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass, matemático alemán, publica en 1885 en los informes de las reuniones de la academia de ciencias de Berlín un artículo titulado "Sobre la posibilidad de una representación analítica de funciones arbitrarias de una variable real". Para demostrar esto comienza considerando una función f(x) uniformemente real y continua, tal que su valor absoluto tenga límite superior finito. Enuncia la siguiente ecuación

$$\lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

El autor *considera esta igualdad como verdadera sin dar mayor explicación al respecto*. Generaliza esta expresión de la siguiente manera:

$$\mathrm{F}(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

Esto lo hace considerando a $\psi(x)$ como una función par ($\psi(-x)=\psi(x)$), en donde la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx$ conserve un valor finito w.

Después de esto demuestra que el límite de la función $F(x,k)$ cuando k tiende a cero es $f(x)$. De esta manera, el autor consigue, para cualquier función $f(x)$ continua, una representación $F(x)$ que es una función analítica por las condiciones de la función $\psi(x)$ (Espinoza, 2009). Al ser $F(x)$ una función analítica, construye una función polinomial $G(x)$ tal que $|G(x)-F(x)|<\varepsilon$

utilizando el desarrollo de funciones en series de Taylor en un intervalo cerrado. Con esto logra una representación polinomial $G(x)$ de la función arbitraria $f(x)$.

Al comienzo fue difícil entender cómo estaba entendiendo el autor a su teorema. Nos interesó el *por qué Weierstrass asumió la primera ecuación como verdadera.* Al estudiar la ecuación en detalle, nos dimos cuenta que era un resultado conocido de la época.

LA TEORÍA DE PROBABILIDAD DE GAUSS

La ecuación es la esperanza de una distribución normal. ¿Estaría pensando Weierstrass en distribuciones de probabilidad cuando veía su teorema? Para responder esto estudiamos la publicación original de este tema, la cual encontramos en (Gauss, 1823) en su obra titulada "*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*". Descubrimos una relación significativa entre la teorización del error que hace Gauss con las ecuaciones utilizadas por Weierstrass para demostrar su teorema.

Gauss modela funcionalmente el error. Para esto representa mediante una función $\varphi(x)$ a una clase fija de observaciones. Considera la probabilidad del error entre los límites infinitésimos x y $x+dx$ como $\varphi(x)dx$. Después caracteriza el comportamiento del error, encontrando condiciones para $\varphi(x)$:

- La función fuera de los límites posibles del error será cero
- Se podrá asumir que los errores positivos y negativos son de igual magnitud, por lo que considera $\psi(-x)=\psi(x)$
- Un pequeño error es más probable a ocurrir en cantidades grandes, por tanto $\varphi(x)$ tendrá su valor máximo en mayor en $x=0$ y decrecerá continuamente cuando x crezca (Gauss, 1823, p.4).

Después concluye que el valor de la integral $\int \varphi x.dx$ entre $x=-\infty$ y $x=\infty$ representará la probabilidad total del error, cuyo valor será siempre (Gauss, 1823, p.7).

Como se puede observar, existen muchas similitudes entre las matematizaciones de (Gauss, 1823) y (Weierstrass, 1885) (Figura 2).

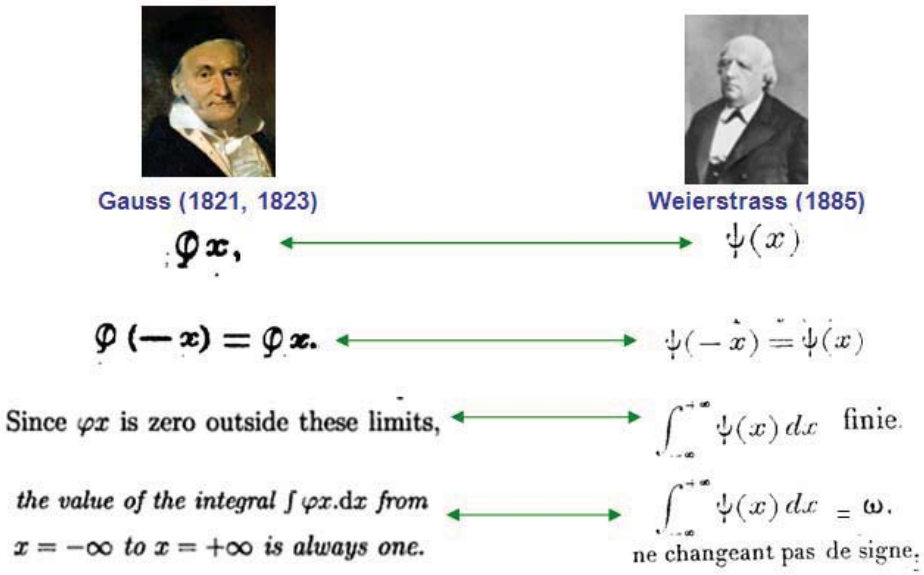


Figura 2

Notemos que incluso el orden de redacción de las ideas es el mismo. Weierstrass estudió la obra de Gauss. La relación académica es significativa. Al estudiar la época nos dimos cuenta que Gauss fue maestro de Gudermann (1798-1852), el cual a su vez lo fue de Weierstrass. Weierstrass utilizó la esperanza de una distribución normal de Gauss para demostrar su teorema. Con esto, postulamos que la interpretación que le dio Weierstrass a su teorema es la siguiente:

$$\mathrm{F}(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

(Weierstrass, 1886, p.105)

El autor generaliza la expresión de la esperanza de una distribución de probabilidad de Gauss. La saca de su contexto probabilístico, pero mantiene la significación de aproximación. La función $\psi(x)$ es una abstracción de una distribución de probabilidad. Ésta conserva una propiedad

importante de las distribuciones de probabilidad: cuando la desviación estándar (k en la ecuación de Weierstrass) tiende a cero, todos los valores de la distribución se acumulan en la media aritmética x. Ésta es una idea central en el estudio de la probabilidad. Si esta igualdad se cumple para todo x, se concluye que $F(x,k)$ será igual a $f(x)$ cuando k tienda a cero. El medio de significación utilizado por Weierstrass es el estudio de la probabilidad.

LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN

Esta significación probabilística no es sólo de Weierstrass, es de su época. Bernstein desarrolla una demostración alternativa del teorema de Weierstrass en 1913 en un breve artículo titulado *"Démostration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités"* (Bernstein, 1913). Aquí utiliza la misma idea de Weierstrass pero utilizando una distribución de probabilidad binomial. Considera una función arbitraria que es igual a la esperanza matemática de un experimento para todos los valores de x.

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right) . C_n^m x^m (1-x)^{n-m} .$$

(Bernstein, 1913, p.1)

Bernstein, además de demostrar de una manera más sencilla el teorema, brinda una manera de encontrar los polinomios. Éste es el motivo por el cual su trabajo es conocido actualmente en física.

CONFRONTACIÓN ENTRE LAS SIGNIFICACIONES HISTÓRICA Y ESCOLAR

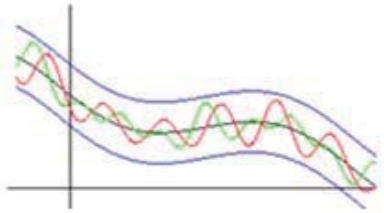
Hasta este momento hemos dado un ejemplo de la significativa relación en sus contextos de origen de conocimientos matemáticos que en la actualidad aparentan no tener vinculación. Investigaciones han brindado ejemplos que permiten ver como el conocimiento matemático no es compartamentalizado en el momento de su producción (Cantoral, 2001ª; Montiel, 2005). El caso presentado en esta investigación se encuentra, a diferencia de los citados, en una época en donde la matemática se constituyó como ciencia autónoma. Aún en las matematizaciones más rígidas del

siglo XIX, el conocimiento matemático no se compartamentaliza. Fue utilizado por los matemáticos de la época como un todo integrado y relacionado.

Ante nuestra crítica al discurso matemático escolar, proponemos un rediseño de éste. ¿Cómo hacerlo? Con base en (Espinoza, 2009) planteamos lo siguiente: para desarrollar un rediseño del discurso matemático escolar, es necesario entender las diversas significaciones del conocimiento matemático en los diferentes escenarios en que vive. Estos contextos pueden ser: su origen histórico, el escolar, el uso de este conocimiento en las ciencias y en el cotidiano. Presentaremos aportaciones considerando los dos primeros.

El teorema de aproximación de Weierstrass es un resultado matemático muy importante, tanto en el momento de su producción como en la matemática de frontera de nuestros días. Provee una vinculación interesante entre el cálculo, el análisis matemático y la topología matemática. ¿Por qué un resultado matemático tan importante aparece en el discurso matemático escolar actual como un simple ejemplo o ejercicio en medio de muchos otros teoremas, o incluso es inexistente? Para entender esto entendamos la significación que tiene este conocimiento en el discurso escolar.

El teorema de aproximación de Weierstrass aparece en el discurso escolar en la teoría de aproximación y en las introducciones a la topología matemática. Su significación se centra en la idea de la aproximación polinomial mediante la convergencia uniforme (Figura 3). La atención se centra en la función que se desea aproximar o representar mediante polinomios, y en la serie de funciones polinómicas que converge a tal función.



Significación escolar del teorema

Figura 3

Sin embargo, la significación que encontramos en su producción histórica es diferente. Como mostramos, la idea de la época se sustenta en la esperanza matemática. La significación basada en la aproximación polinomial apareció recién en 1885 con su teorema. Ésta es la última de una cadena de significaciones relativas al problema de la analiticidad de las funciones (Espinoza, 2009). La probabilidad fue un recurso metodológico que utilizó Weierstrass para demostrar su teorema.

Sin embargo, la significación del problema se encuentra en una peculiar manera de mirar su producción que plasmó en su obra.

El problema de la analiticidad consistió en saber cuáles eran las funciones que podían ser estudiadas por las reglas del análisis matemático. Euler (1707-1783), Lagrange, Fourier, Cauchy, Dirichlet y muchos otros, abordaron el problema. Weierstrass aborda este problema y le pone un punto final, al afirmar que todas las funciones continuas son susceptibles a ser estudiadas por las reglas del análisis. En otras palabras, existe la posibilidad de representar analíticamente cualquier función continua.

Para demostrar esto Weierstrass dejó de mirar a la función como el objeto de estudio y miró al conjunto de todas las funciones. Su intención fue caracterizar a todas. Cambió la manera de ver el problema, de mirar a la función como el objeto de estudio a utilizarla como un medio que le permitió describir la naturaleza topológica del espacio de funciones continuas.

Aquí identificamos una confrontación entre la significación escolar y la de la producción histórica. La significación escolar, centrada en la función y la serie convergente, o en la función y la existencia de un polinomio en una vecindad de la función, no permite observar que el gran resultado de este teorema es la descripción de la naturaleza topológica del espacio de funciones continuas, y no meramente la aproximación de una función arbitraria. Por otra parte, la significación histórica no centra la atención en la aproximación polinomial, sino en la representación analítica (mediante una función infinitamente diferenciable en todos sus puntos). No se busca una aproximación polinomial, sino la representación de una función por otra que sea susceptible a ser estudiada por las reglas del análisis matemático. Esta confrontación puede permitirnos explicar las dificultades de los estudiantes al estudiar estos temas.

CONCLUSIONES

La socioepistemología ha detectado al discurso matemático escolar en gran parte como el causante de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas (Cantoral, 2001b). De aquí que nuestras aportaciones no se limitan a proveer mejores métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, sino que se amplían a estudiar el estatus epistemológico del conocimiento

matemático escolar. Para esto estudiamos las diversas significaciones que tiene el conocimiento matemático en los diversos escenarios en los que vive.

De aquí que nos interesamos en la dimensión sociocultural del conocimiento matemático, la cual nos permite estudiar los procesos de construcción del significado. Este proceso está situado a las condiciones contextuales y a los escenarios socioculturales en los que el conocimiento está inmerso. Nuestro estudio en el escenario histórico nos proveyó información relevante sobre el estatus epistemológico de los conocimientos matemáticos. Desviando nuestra atención de los objetos matemáticos, ponemos atención a las prácticas asociadas a la construcción social del conocimiento. Con éstas aportamos epistemologías alternativas a las del discurso matemático escolar que buscan democratizar el aprendizaje de las matemáticas.

Situamos la aportación de esta investigación en este nivel. Brindamos elementos epistemológicos que aspiramos puedan ser utilizados para un rediseño del discurso matemático escolar. Este rediseño no deberá limitarse a un cambio de contenidos, sino deberá incluir el cambio de mirada que le dio Weierstrass a la matemática. Con base a la evidencia histórica y a la epistemología desarrollada en (Espinoza, 2009), consideramos que este cambio de mirada es fundamental para entender la naturaleza epistemológica del cálculo y el análisis matemático y las vinculaciones que tienen las diversas áreas del conocimiento matemático que el discurso matemático escolar actual ha segmentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernstein, S. (1913) “Démostration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités" Comm. Soc. Math. Khauhov., 13, 1-2.

Cantoral, R. (2001a). Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. (2001b). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitia (Ed.), Universidad de Panamá, Ciudad de Panamá, Panamá: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14(1), 64 – 75.

Espinoza, L. (2009). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada. México: CINVESTAV.

Gauss, C. (1823). Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Carl Friedrich Gauss Werke 4 3-93.

Montiel, G. (2005) Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral. México: Cicata-IPN.

Pinkus, A. (2000) Weierstrass and approximation theory. J. Approx. Theory. 107, 1-66.

Weierstrass, K. (1886) Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions d

ites arbitraires d'une variable réelle, J. Math. Pure et Appl. 2, 105-113.

TENDENCIAS DE LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: DEL ESTUDIO CENTRADO EN EL OBJETO A LAS PRÁCTICAS

Ricardo Cantoral – Uriza
Cinvestav, IPN México
rcantor@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *La Matemática Educativa se asume en este escrito como una disciplina académica que busca democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre los ciudadanos. Los estudios de exclusión muestran algunas de las tendencias actuales en la investigación en ciencias sociales y muy recientemente en la propia Matemática Educativa, pues las condiciones de desarrollo social inducen las características de logro educativo. Es la educación un reto a la vez que un desafío y un medio para encarar las desigualdades sociales. En este sentido, una tendencia contemporánea de la investigación en nuestro campo señala que no es posible estudiar la formación de conceptos y el desarrollo de hábitos entre los estudiantes ignorando a la vez, las condiciones sociales en la que se lleva a cabo el acto educativo. La Socioepistemología, en tanto aproximación teórica emergente en la Matemática Educativa, da explicaciones incorporando la dimensión social sobre cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático situado, poniendo en primer plano la idea de práctica social como norma de la construcción de saber.*

En este enfoque se han desarrollado estudios muy variados e interesantes que ponen en el centro del debate el papel de las prácticas y cómo éstas son normadas por la práctica social. Se han estudiado procesos basados en la demostración, el infinito, lo periódico, lo trigonométrico, el hábitat, la toxicología, la bioelectrónica, la investigación de mercados, la construcción de la vivienda, el tratamiento de aguas entre otras con resultados altamente prometedores.

Palabras clave: Expulsión, logro, Matemática Educativa, Matemática Escolar

Cuando recibí la invitación para dictar una de las conferencias plenarias de la vigésima tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – Relme 23, que organiza el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Clame, pensé en un tema amplio que fuese a la vez que incluyente, particular y preciso. Al momento de ofrecer la charla en el espacio que generosamente brindó la Universidad Autónoma de Santo Domingo en República Dominicana, tuve la necesidad de acotar en demasía mis pretensiones de partida, pues habría de centrarme en aquellos asuntos que dieran a la disciplina Matemática Educativa, una visión evolutiva para un público amplio y diverso.

Las “relmes” se han constituido en referente obligado para la comunidad académica de nuestro campo y el nombre de Matemática Educativa ha adquirido en la región un considerable estatus de

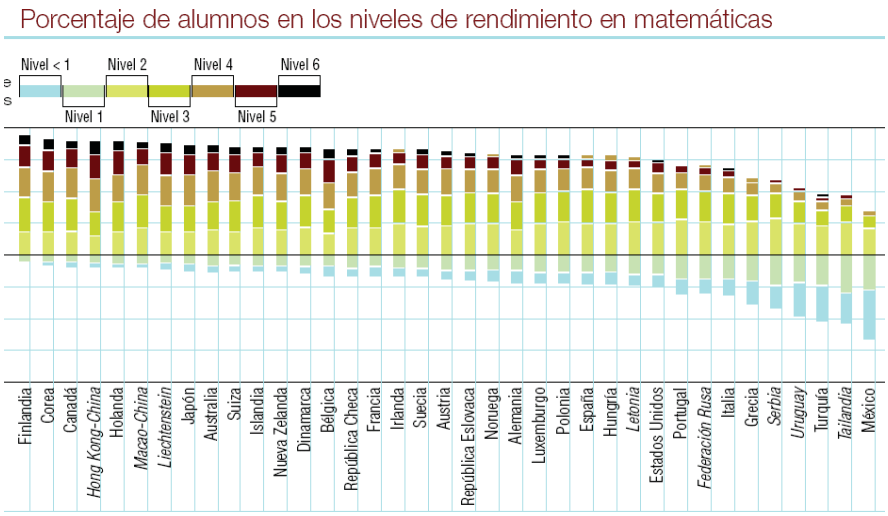
cuerpo teórico – práctico. En este sentido, asumo en este escrito a la Matemática Educativa como una *disciplina académica* que busca *democratizar el aprendizaje* de las matemáticas entre los ciudadanos, y me propuse durante la conferencia abordar cuestiones fundamentales: ¿Cómo lograr que disfruten y entiendan a las matemáticas la mayoría de los estudiantes de una clase? y ¿cómo hacerlo al nivel de la ciudadanía?

Estas cuestiones deben abordarse mediante estudios serios y sistemáticos sobre el problema de la exclusión en la sociedad y en los procesos educativos en particular, más específicamente debemos desarrollar estudios sobre el papel de la matemática escolar en los fenómenos de exclusión (Cantoral, 1995). El medio educativo suele disfrazar como fracaso escolar, culpando a su vez a alumnos y profesores, a la exclusión social que produce la organización de la matemática escolar contemporánea, esta idea está siendo desarrollada por Daniela Soto en su tesis de grado. Los estudios de exclusión muestran algunas de las tendencias actuales en la investigación en ciencias sociales y muy recientemente en la propia Matemática Educativa, pues las condiciones de desarrollo social inducen las características de logro educativo.

Se sabe que en América Latina viven cerca de 213 millones de personas en condición de pobreza extrema, la educación en general, y de la ciencia y las matemáticas en particular pueden, y deben, jugar un papel protagónico en el desarrollo social y en la elevación de los niveles educativos y de bienestar de la población. Es la educación un reto a la vez que un desafío y un medio para encarar las desigualdades sociales. En este sentido, una tendencia contemporánea de la investigación en nuestro campo señala que no es posible estudiar la formación de conceptos y el desarrollo de hábitos entre los estudiantes ignorando a la vez, las condiciones sociales en la que se lleva a cabo el acto educativo.

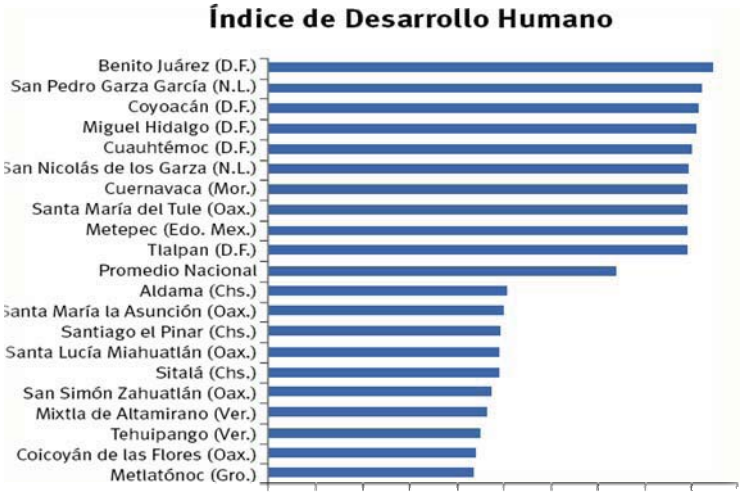
Datos recientes de la Organización para el Desarrollo Económico muestran que el rendimiento en matemáticas es bajo en nuestra región, sobre todo cuando se compara con los resultados alcanzados en otras latitudes. Es importante aclarar, sin embargo, que dicha ubicación en la tabla, no muestra el nivel de comprensión en matemáticas de las y los alumnos o de los ciudadanos, ni tampoco el desempeño profesional de los docentes en matemáticas. Se trata más bien de un indicador del desempeño del sistema. Una lectura superficial de esta información produce deslices conceptuales que pueden llevar a un gobierno a tomar acciones de políticas públicas desastrosas. Los investigadores tenemos la obligación de producir explicaciones sensatas, basadas en evidencia

científica, que muestren que el resultado en matemáticas no es independiente de otras variables de contexto social, ideológico o estructural. De este modo, es importante entender que una tendencia fundamental en los estudios de Matemática Educativa es lo que llamaré la "tendencia social" o la "cuarta dimensión" como explicamos en (Cantoral y Farfán, 2003).

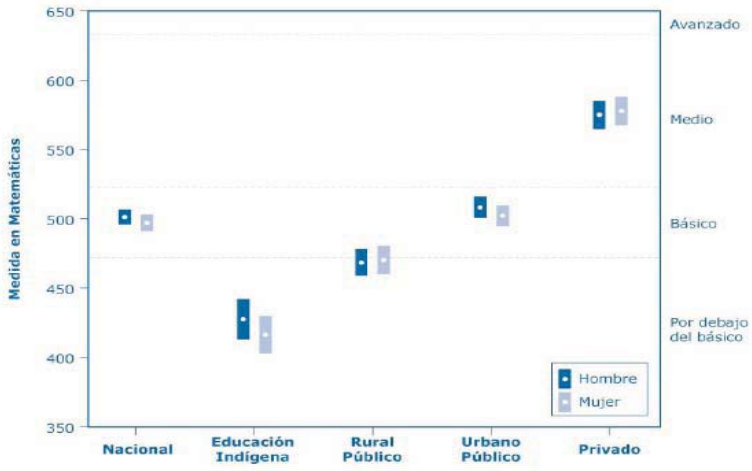


Los países están en orden descendente según el porcentaje de alumnos de 15 años en los niveles 2, 3, 4, 5 y 6.
Fuente: *Base de datos OCDE PISA 2003. Tabla 2.5a*

Las variables sociales aludidas pueden ser tan amplias como la siguiente. Tomemos por ejemplo, el índice de desarrollo humano (IDH) en diferentes municipios de México. La desigualdad regional es brutal, mientras que tenemos municipios como el de la Delegación Benito Juárez en la Ciudad de México, Distrito Federal con un IDH tan alto como zonas de Dinamarca o Alemana, en cambio, en el municipio de Metlatonoc en el estado de Guerrero, México, se tiene uno de los índices más bajos del mundo. En unas cuantas horas de viaje, se habrán recorrido, metafóricamente hablando, siglos de diferencia.

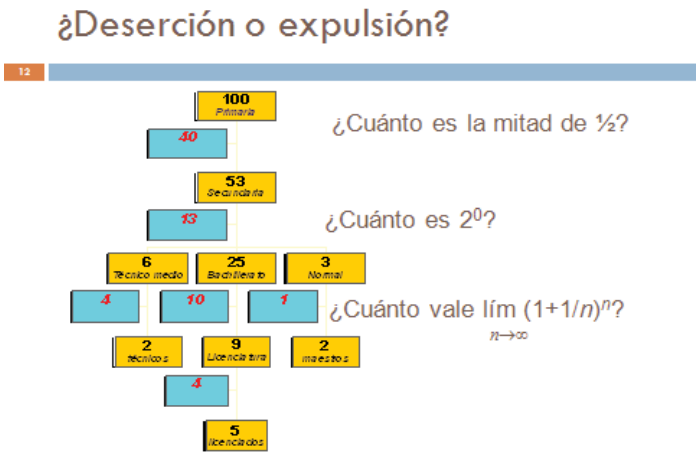


Datos recientes muestran que el fenómeno de exclusión al que nos hemos referido, afecta a todos los sectores de la población, pero es mucho más acucioso entre los grupos más vulnerables, en pobreza extrema, en condición de discriminación o simplemente por ubicación geográfica. Por ejemplo, de los resultados de matemáticas en el tercer grado de escuela básica mexicana a través de un examen nacional de naturaleza censal, se diferencian los resultados en función del tipo de escuela, la etnia y de su ubicación geográfica. Los puntajes más bajos los tiene la educación indígena, le sigue la escuela pública en un medio rural, la urbana pública y los más altos resultados los obtiene la escuela privada. En este sentido, la tendencia social a la que me he referido, debe poner su atención en estos asuntos.



Es así que los niveles de logro matemático muestran índices más bajos al nivel de la educación indígena y más altos en la urbana pública y en la privada. Es evidente que estos diferenciales de logro no radican en los contenidos matemáticos tratados, sino que reposan en una profunda brecha social que la escuela no logra sino reproducir.

Hemos documentado en otros trabajos sobre el proceso de "expulsión que produce la escuela y sobre el papel que juega la matemática en él", el diagrama siguiente muestra cómo a lo largo del camino, una gran cantidad de estudiantes no concluye con los ciclos obligatorios. De cada 100 alumnos que ingresan a la escuela primaria (7 – 12 años de edad) sólo nueve alcanzan una habilidad terminal, dos maestros, dos técnicos medios y cinco licenciados.



Estos datos muestran un problema mayor que la tendencia social de la investigación en Matemática Educativa se propuso estudiar a fin de afectar benéficamente al sistema educativo. Otras tendencias, han querido obviar este hecho y asumen que las dificultades del aprendizaje son universales y por tanto, pueden ser estudiadas obviando el contexto de producción del conocimiento. Nos planteamos en consecuencia una pregunta que hoy día considero fundamental: ¿Existe una manera matemática de pensar que pueda ser difundida socialmente? … ¿cómo? Esta pregunta ha sido abordada desde diferentes perspectivas teóricas y diversos enfoques metodológicos.

Ante la pregunta: ¿Cómo aprenden las personas?, la Matemática Educativa responde con base en la experiencia. Veamos algunos ejemplos. Se pide a un grupo de alumnos que corrija la siguiente afirmación: "**7 + 8 = 14**", invariablemente los jóvenes contestan: "**7 + 8 = 15**". Una pregunta pertinente sería, por qué corrigen el lado derecho y no del izquierdo, pues otras posibilidades adecuadas de corrección serían:

$$6 + 8 = 14,\ 7 + 7 = 14,\ 7 + 8 = 15,\ 7 + 8 \neq 14$$

La razón que explica lo anterior es que el pensamiento del estudiante opera bajo la instrucción de que el signo "=" se lee como "da" … o "el resultado es". No la interpreta como una relación de equivalencia en la que es posible modificar los términos de maneras diversas como se mostró anteriormente.

Muchas veces se piensa que este es un problema sólo del alumno, para mostrar que ello no es así, los matemáticos educativos exploran cómo encaran ciertas tareas los docentes de matemáticas, así por ejemplo ante las preguntas, encontramos situaciones similares a las reportadas entre los alumnos:

a. Encuentra una función cuya gráfica tenga a los puntos (1, 0) y (2, 1).
b. Construye una función que contenga los puntos (0, 0), (1, 2) y (4, 0).
c. Encuentra **otra** función con esos puntos.

La estrategia que siguieron los docentes para la primera pregunta fue la de trazar una línea recta por esos puntos y con los datos determinan su ecuación. Encuentran la ecuación de la parábola para los puntos dados en la segunda pregunta utilizando varios métodos, sistemas de ecuaciones o la completación de cuadrados. Sin embargo, el inciso c) sólo fue respondido por 1 de los 50 profesores participantes. ¿Cómo opera entonces el pensamiento humano?

Los estudios empíricos de la psicología experimental, según expuso el profesor Xiang Wang en una conferencia sobre transversalidad curricular de las matemáticas en Cinvestav, señalan que es cuestionable el concepto tradicional de la *racionalidad*, según el cual, ser *racional* reside únicamente en pensar y actuar de acuerdo con reglas abstractas y universalmente aplicables, como las reglas lógicas, probabilísticas, matemáticas, ... En su lugar, una alternativa para entender la *racionalidad*, ha sido sugerida por muchos filósofos y psicólogos. Ésta insiste en que debemos entender los principios normativos del razonamiento dentro de los contextos específicos bajo los que se realiza una inferencia. “La imagen estándar de la racionalidad”: ser racional consiste en razonar de acuerdo con los principios normativos del razonamiento, cuya legitimación se funda en las reglas de la lógica, de la teoría de la probabilidad, etc.

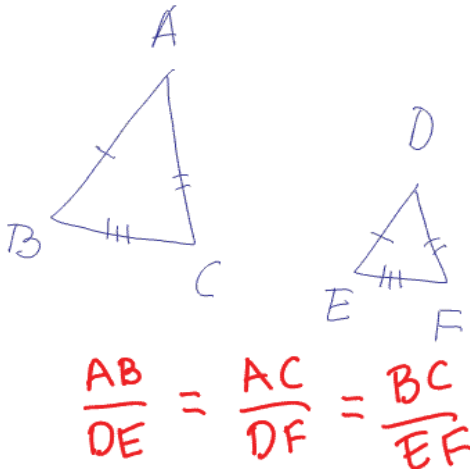
De este modo, El ser **racional** se identifica con la capacidad de realizar procesos *inferenciales* cuyo funcionamiento se realiza con base en principios normativos abstractos, tales como las reglas de la lógica, la teoría de la probabilidad, los cálculos matemáticos, las reglas gramaticales ...

Veamos el siguiente ejemplo, la tarea de selección de las cartas: El experimento presenta cuatro cartas marcadas como se muestra a continuación:

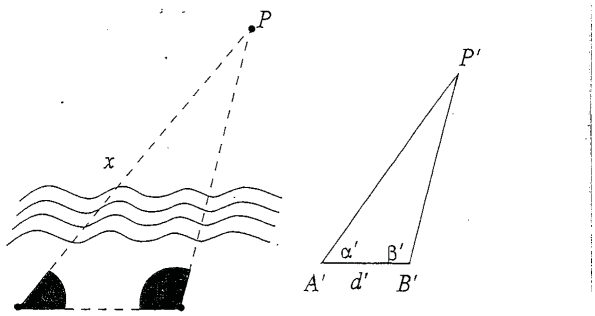
La primera con una E, la segunda con una C, la tercera con un 5 y la cuarta con un 4. Posteriormente se les explica que **cada una de las cartas tiene de un lado un número y del otro una letra.**

Su tarea es determinar cuáles cartas tienen que voltear para probar la verdad de la frase: "Si hay una vocal en un lado de la carta, entonces hay un número par en su otro lado". Las respuestas obtenidas se observan cosas interesantes: sólo el 5% obtiene la respuesta correcta al voltear las cartas E y 5. El 33% voltea sólo la carta marcada con la letra E, el 46% voltea las cartas E y 4.

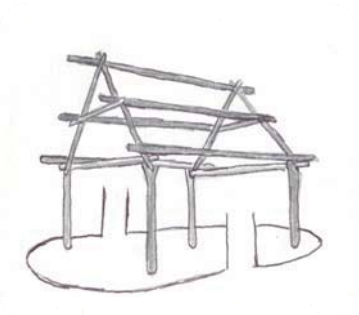
Este mismo fenómeno se presenta en el aula de matemáticas. Veamos el ejemplo de la enseñanza de la proposición "p entonces q" en el caso de la semejanza de triángulos. Se parte de la premisa *p* : △ABC ~ △DEF y se busca llegar a la tesis *q* : AB : DE : : AC : DF : : BC : EF. Se realizan operaciones básicas de la geometría del tema de Semejanza de Triángulos, donde se afirma que triángulos semejantes tienen lados (correspondientes) proporcionales. Semejanza implica proporcionalidad. Esto se suele plasmar en textos e imágenes en la pizarra como el siguiente



En los textos escolares y en los salones de clase, esta actividad se justifica o se introduce bajo el argumento de que el cálculo de distancias inaccesibles se puede realizar con la semejanza de triángulos. Aunque la afirmación es cierta, la verdad es que en la vida práctica casi nunca hacemos esos cálculos.



En la vida cotidiana, la proporción aparece más bien ligada a las necesidades inmediatas como las medidas del cuerpo y su relación con la casa. Así en un poblado yucateco, del sureste mexicano, al construir la choza se usa la proporción (Covián, 2005).



Su constructor utiliza la medida de su cuerpo, "la vara" la longitud que va del ombligo del que mide al piso, es usada para determinar, en proporción, las dimensiones de la casa… en varas – no en metros.

Es decir, el pensamiento humano funciona de manera contextual, no sigue reglas de inferencia preestablecidas, … es más contextual de lo que en ocasiones pensamos. A pesar de ello, domina en la enseñanza un enfoque que, aun siendo constructivista, se apoya en el tratamiento de objetos y propiedades matemáticos y dejan de lados las prácticas mediante la cuales se usa el conocimiento. Este cambio de centración, de los objetos a las prácticas es en mi opinión la tendencia mayor en estos años.

La Socioepistemología, en tanto aproximación teórica emergente en la Matemática Educativa, da explicaciones incorporando la dimensión social sobre cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático situado, poniendo en primer plano la idea de práctica social como

norma de la construcción de saber. Dentro de esta disciplina la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos, poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento (Cantoral, 1990; López, 2005).

En este enfoque se han desarrollado estudios muy variados e interesantes que ponen en el centro del debate el papel de las prácticas y cómo éstas son normadas por la práctica social. Se han estudiado procesos basados en la demostración, el infinito, lo periódico, lo trigonométrico, el hábitat, la toxicología, la bioelectrónica, la investigación de mercados, la construcción de la vivienda, el tratamiento de aguas entre otras con resultados altamente prometedores.

En este sentido, la tendencia fundamental a la que he querido referirme en esta charla es la de haber roto la centración en conceptos y en individuos que aprenden, por otra que pone el énfasis en las prácticas y en las comunidades. Ello exige de marcos teóricos adecuados a los tiempos. Un reto para la generación del bicentenario.

Bibliografía

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* R. Farfán (Ed.), Ediciones de la UNAM, Vol. 1, Cap. Plenarias, 1 – 10. Ministerio de Educación, La Habana: Cuba.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

López, I. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

CAPITULO 4

El pensamiento del docente, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Introducción al Capítulo 4: El pensamiento del docente, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Yolanda Serres Voisin

La formación profesional de los docentes, en particular de los docentes en ejercicio, se basa en dos elementos fundamentales: la investigación educativa, en nuestro caso en matemática educativa, y la sistematización de las prácticas docentes para contextualizar los problemas educativos abordados a la realidad de su contexto: la escuela.

De aquí que un programa de formación de docentes tenga por objetivo la sistematización de las prácticas docentes; esté organizado con los propios docentes en su escuela, e incluya las fases de la planificación escolar, de la puesta en práctica de la planificación en el aula y de la evaluación de la misma, es decir, incluya tres momentos: antes, durante y después del trabajo en aula.

Las prácticas docentes son las acciones orientadas que lleva a cabo el docente producto de la reflexión, la explicación y la discusión de su experiencia educativa en una escuela particular, la cual le da contexto y sentido a su quehacer. El docente transforma su experiencia en conocimientos a través del análisis y la sistematización de la misma, y estos conocimientos orientan sus acciones convirtiéndose en prácticas; este análisis se hace en contexto con los colegas de la escuela, con los productos de los aprendizajes estudiantiles y se sistematiza en un proceso recursivo de análisis, explicación y discusión constante con los colegas. Las prácticas docentes producen nuevas experiencias y estos nuevos conocimientos, en un proceso continuo de experiencias-conocimientos-prácticas.

Las nuevas experiencias y los nuevos conocimientos buscan desarrollar nuevas prácticas que mejoren tanto el aprendizaje de los y las docentes como el aprendizaje de las y los estudiantes. Los docentes a través de sus experiencias construyen conocimientos acerca de cómo aprenden sus estudiantes, de qué estrategias utilizan, sobre si las actividades y evaluaciones que diseña logran que los estudiantes aprendan, si los recursos que utilizó fueron los adecuados, etc. La sistematización de las experiencias, la construcción de conocimientos y las nuevas prácticas docentes también ayudan a mejorar el proyecto educativo de la escuela, a través del conocimiento

de los estudiantes, de la identificación de necesidades y productos curriculares, y de los conocimientos que generan los propios docentes.

Las prácticas docentes tienen tres características fundamentales:

1. Son contextualizadas, su espacio es la escuela, los aprendizajes docentes se dan en el contexto del proyecto educativo de una escuela particular.
2. Son temporales, su momento de referencia es la clase, se dan antes, durante y después de la clase, además son cíclicas y progresivas. Y el progreso proviene de su evaluación, constante mejora o adecuación al contexto.
3. Son intencionadas, su meta es que el docente construya conocimientos que lo desarrollen como profesional, a través de la reflexión, la explicación y la discusión de sus propias experiencias.

La reflexión analítica de situaciones reales, del trabajo real del docente, es la primera actividad para que los docentes construyan sus conocimientos. En lugar de aprender teorías y aplicarlas a su trabajo, la formación profesional del docente en ejercicio se caracteriza por sistematizar las experiencias y los conocimientos producto de las prácticas docentes.

Un programa de formación de docentes de matemática tiene entonces tres fases:

1. Sistematización de experiencias, donde los docentes centrados en un tema específico de la matemática, describen y explican sus prácticas, desde la contextualización en su escuela, con el currículum y los materiales curriculares, pasando por la planificación de actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza y llegando hasta el momento de la clase, donde le dan sentido a su plan.
2. Categorización de conocimientos, a través de la reflexión, explicación y discusión de las experiencias donde surgen conocimientos de distinta naturaleza que permiten construir una base conceptual de las acciones docentes y que sirven de guía a las prácticas.
3. Transformación y producción de nuevas prácticas, basadas en la sistematización anterior se planifican nuevas actividades de aprendizaje y estrategias de enseñanza, se buscan significados en el aula y se evalúa. El trabajo docente siempre es mejorable, y sus mejoras

dependen de la capacidad de reflexión crítica de los propios docentes y de su actitud de compromiso con su desarrollo profesional y con su escuela.

Un recurso para documentar el proceso de reflexión, son los portafolios, pues estos respaldan el desarrollo profesional en muchos aspectos significativos. Al usar los portafolios los docentes tienen la oportunidad de reflexionar y explicar sus expectativas sobre los objetivos de aprendizaje que esperan logren sus estudiantes, además que al hacer explícitas sus ideas pueden compartirlas más fácilmente con sus colegas y promover discusiones que fortalezcan el trabajo del equipo escolar y del proyecto educativo de la escuela. En cuanto al trabajo en aula el uso del portafolio puede usarse para documentar una amplia gama de actividades de aprendizaje, las cuales pueden variarse lo suficiente para generar un mayor desempeño estudiantil.

Los portafolios son un instrumento para explorar ideas, compartir progresos y planificar en conjunto con los colegas; este trabajo requiere tiempo y compromiso, por ello si hay capacidad para trabajar en conjunto, el esfuerzo individual será menor y las recompensas mucho mayores.

El uso de portafolios hace que los docentes entren en un proceso de reflexión que les permite clarificar y explicar sus expectativas sobre los objetivos de la educación y también sobre sus conocimientos acerca del tema que enseñan, de la didáctica específica, de la pedagogía en general, de sus estudiantes y del currículo. Los docentes pasan de la reflexión a la explicación. En el proceso de documentación las explicaciones utilizan un vocabulario conciso y analizan sistemáticamente los hechos educativos. El portafolio puede usarse desde la etapa de planificación de las clases, para la planificación de las actividades de aprendizaje; durante la clase con las ideas que vayan surgiendo en el momento, sobre estrategias, dinámicas, nuevos temas que pueden integrarse; y después de la clase, con los resultados de las estrategias desarrolladas y de los logros obtenidos con los estudiantes; puede contener también trabajos de los y las estudiantes.

EL ECLECTICISMO EPISTEMOLÓGICO DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Evangelina López, Ysabel Camacho, Martha Chairez, María de Jesús Gallegos
Universidad Autónoma de Baja México
evangelina.lopez@educacionbc.edu.mx, ysabel_camacho@yahoo.com.mx,
marthachairez4@yahoo.com.mx, mjgallegos1@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Formación de Profesores Nivel: Medio

Resumen. *Los profesores de educación secundaria en el área de Matemáticas viven la transición del paradigma de enseñanza al del aprendizaje imbuidos en una condición de facto que los lleva a establecer una integración selectiva de rasgos compatibles sacados de teorías y puntos de vista incompatibles en otros aspectos, para formar un sistema total que resuelve los problemas emergentes de la enseñanza vividos día a día. De ahí que el objeto de esta reflexión que se centre en elucidar cómo se plantean estas mezclas paradigmáticas que se instalan en el quehacer de los docentes de matemáticas. Ciertamente, para sobrellevar las nuevas condiciones educativas que se le plantean al profesor, no puede asumir automáticamente una óptica filosófica que excluya al eclecticismo. No es adecuado asumir rígidamente tal cuestión filosófica, pues el proceso de cambio de paradigma no es lineal sino iterativo y multidimensional, es decir, no solo presenta un estímulo sino muchos, diferentes y a veces contradictorios. Cada uno de estos estímulos provoca, desencadena o estalla en su propia dimensión.*
Palabras clave: paradigma, eclecticismo, transición, cambio, enseñanza

Introducción

Las reformas educativas que se han implementado recientemente en México y en el resto de América Latina, han inducido nuevas dinámicas en el quehacer de los docentes de Matemáticas. Dados los resultados de pruebas estandarizadas aplicadas a los jóvenes de educación secundaria que resultan ser en México, sumamente deficientes, pudiese pensarse que simplemente los profesores hacen caso omiso de los nuevos modelos metodológicos y teóricos establecidos para direccionar el proceso enseñanza aprendizaje. Estos modelos funcionan como representaciones de la realidad que suponen un alejamiento o distanciamiento de la misma. Estos modelos son una representación conceptual simbólica y por lo tanto indirecta y al ser necesariamente esquemática, se convierten en una representación parcial y selectiva de aspectos de esa realidad, focalizando la atención en lo que considera importante y relegando aquello que no lo es son (Sacristán, 1989).

Por ello podemos considerar que la situación que viven los profesores va más allá de la simple omisión. La realidad que vivimos en los sistemas educativos, se caracteriza por una condición en la que se prefiere obviar discusiones por verse mal filosóficamente, pero que de facto suceden en la

cotidianidad del quehacer de los profesores de Matemáticas: y eso es precisamente la integración selectiva de rasgos compatibles sacados de teorías y puntos de vista incompatibles en otros aspectos, para formar un sistema total que resuelve los problemas emergentes vividos día a día.

Es así que en los procesos de construcción del conocimiento siempre aparecen por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones pues, en efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que en el espíritu mismo obstaculiza a la espiritualización (Bachelard,1976).

Procesos de cambio en educación

Al inicio de este tercer milenio, se mantiene en la agenda de los países (Mungaray, 1999), la reflexión sistemática sobre los retos que implica la construcción de futuros deseables y de cómo desarrollar una mayor capacidad para responder a tales retos basándose en la reflexión sobre la realidad social, el entorno cultural, socioeconómico y político y en el aprovechamiento de las oportunidades que brindan los recientes y continuos adelantos de la ciencia y la tecnología.

Tedesco destacaba en la 45ª Conferencia Internacional de Educación (1996) que lo anterior representa tanto un desafío como una oportunidad del Sistema Educativo para redefinirse y promover un nuevo profesor-mediador del aprendizaje con nuevas visiones receptivas respecto de los cambios sociales que de una u otra forma afectan la vida de la escuela.

En atención a este referente, los profesores de Matemáticas se encuentran viviendo un proceso en el cual convergen mínimamente dos paradigmas el de la enseñanza y el del aprendizaje.

El paradigma de enseñanza se basa en el modelo educare ya que su interés recae en la intervención del docente, porque en la tarea del maestro quedaba cimentado el éxito de la educación puesto que él era quien debía organizar el conocimiento, preparar y dirigir los ejercicios, distribuirlos de manera fija, tomar la iniciativa y desdeñar las acciones centrales para evitar la pérdida del tiempo y el malgasto de esfuerzos (Castillejo, 1994). Este paradigma, que corresponde al enfoque tradicional, relega la importancia que tiene para un verdadero aprendizaje el interés y disposición del alumno.

En consecuencia el aprendizaje obtiene su fundamento en el modelo educere donde la acción recae en el protagonismo del que aprende, en su desarrollo, en sacar de sí su potencialidad; la acción educativa se centra en el interés y necesidades del sujeto, en su espontaneidad, en su capacidad para ser el protagonista del aprendizaje, se le otorga confianza, respeto y libertad para que emprenda sus propias investigaciones (Castillejo, 1994). En este paradigma se le da importancia reducida a la intervención y dirección del maestro, a sus intenciones educativas que ayudan al estudiante a darle mayor sentido a su aprendizaje.

El paso del paradigma enseñanza al del aprendizaje no es un proceso inocuo ni automático, sino que se genera un espacio de transición que implica como en cualquier otra situación de esta naturaleza, la presencia de interrelaciones viejas y nuevas, con efectos de retroalimentación positiva y negativa entre la multitud de cambios vividos. Asimismo instala una condición emergente e inerciada que induce de hecho una crisis en los profesores, que desafortunadamente puede instalarse como una verdadera crisis de incompetencia.

Ciertamente los profesores de Matemáticas ante la invasión de nuevos conocimientos, modelos, tecnologías, etc., aparecen confundidos, mezclando referentes y buscando soluciones sencillas a los problemas cada vez más complejos que plantea precisamente el transitar de un paradigma caracterizado por la demostración del conocimiento matemático al que se centra en el pensamiento del alumno mismo que se considera como un constructor de significados (Porlán, 1997). La enseñanza no es una simple transmisión de conocimientos; es en cambio la organización de métodos de apoyo que permitan a los alumnos construir su propio saber. No se aprende solo registrando en nuestro cerebro; se aprende construyendo nuestra propia estructura cognitiva (Resnick y Ford, 1998).

Tomando en consideración las concepciones epistemológicas del conocimiento y los aspectos básicos del desarrollo intelectual humano planteados por el paradigma constructivista, el aprendizaje adquiere las dimensiones de un proceso activo y significativo cuyo propósito es lograr la comprensión del conocimiento a través del descubrimiento, la reflexión y la experimentación; así, la reflexión y la investigación serán los procedimientos más seguros para lograrlo.

Eclecticismo: paradigma de transición

No obstante que el profesor pueda reconocer la vigencia de los distintos modelos educativos, es preciso delimitar el nacimiento de uno nuevo que ha acarreado, con su desarrollo, un panorama transitorio en el que prevalecen elementos o criterios del modelo anterior con elementos o criterios de un modelo en construcción. El profesorado de matemáticas está inmerso plenamente en un proceso de transición. La transformación radical del sentido común que conlleva este cambio de paradigma supone grandes transformaciones en la transición.

Este tránsito entre paradigmas genera un eclecticismo. Para este fenómeno es evidente que no existe una interpretación unitaria, pues hay autores que lo consideran como un problema para el desarrollo de las ciencias y otros como un logro porque asume lo mejor de cada teoría. Desde una óptica filosófica es considerado el eclecticismo como el intento infructuoso de conciliar elementos excluyentes entre sí, por ser incapaz de delimitar sus nexos esenciales en relación con la situación en que se aplica, de tomar de cualquier parte por conveniencia y elegir categorías muy diversas (Foulquié, 1967), es decir, aquella mezcla que no obedece a principios determinados, distintos y hasta contrapuestos. Su principal defecto metodológico radica en su incapacidad para delimitar, en la suma de nexos y relaciones los lazos fundamentales del objeto, del fenómeno respecto al medio que lo circunda, lo cual le impide hallar el eslabón principal en la cadena de acontecimientos (Rosental y Iudin, 1981).

Sin embargo, desde la ciencia psicológica es diferente el enfoque del eclecticismo, ya que se le considera como la selección y organización de rasgos compatibles sacados de teorías y puntos de vista incompatibles en otros aspectos, para formar un sistema total. Y lo diferencia del sincretismo, mismo que se concibe como el intento acrítico de combinar sistemas incompatibles. Esto nos refiere a no seguir ningún sistema sino seleccionar y usar cualquiera considerado como el mejor de ellos, desde la perspectiva psicológica se precisa considerar que un enfoque ecléctico tiende a ser más bien informal y no aplicable universalmente; su valor radica en el intento de coordinar y reconciliar diferencias entre distintas posiciones teóricas en la búsqueda de la armonía, de la síntesis (Rico, 2002). En general, desde este referente, el eclecticismo es saludable, especialmente en campos como la Psicología y la Psicopedagogía por ser todavía disciplinas inmaduras que no permite a sus teorías y procedimientos ser universalmente aplicables.

Desde el punto de vista filosófico o pedagógico, el eclecticismo se plantea como el intento de conciliar puntos de vista discordantes por medio de la adopción selectiva de elementos que los componen, y construir con estos un sistema más o menos consistente (Merani, 1983).

Para sobrellevar los cambios y demandas de las condiciones educativas que le plantean al profesor, ciertamente muy complejas, no puede asumir automáticamente una óptica filosófica que excluye el eclecticismo. Es importante que no se asuma rígidamente tal cuestión filosófica pues el proceso de cambio de paradigma no es lineal sino iterativo y multidimensional, es decir, no solo presenta un estímulo sino muchos, diferentes y a veces contradictorios (Khun, 1971). Cada uno de estos estímulos provoca, desencadena o estalla en su propia dimensión. Es así que la vida real le provoca al profesor la necesidad de considerar todas sus iteraciones y todas sus dimensiones.

De ahí que desde la circunscripción de la psicología y la pedagogía, se pueda afirmar que el eclecticismo es el intento de compatibilizar elementos de diferentes enfoques teóricos con la aspiración de buscar lo mejor de cada uno en un nuevo enfoque, pretendiendo resolver las contradicciones y superar las insuficiencias existentes en los anteriores. Por ello podría decirse que el eclecticismo constituye algo favorable, beneficioso en el desarrollo de la resolución de las problemáticas educativas y la denominación de ecléctico a un profesor sería una cualidad positiva por su afán de perfeccionar su acción pedagógica.

Por ello es importante asumir que "[…] los intentos eclécticos de conjugar elementos heterogéneos, de distinta naturaleza y de distintos orígenes científicos, carecen de ese carácter sistemático, de esa sensación de estilo, de esa conexión entre nexos que proporciona el sometimiento de las tesis particulares a una sola idea que ocupa un lugar central en el sistema del que forma parte: la unión acrítica de lo uno y lo otro conduce a una brusca deformación de toda la cuestión" (Vygostky, 1991, p. 305).

Estos referentes nos indican que el problema del eclecticismo en el campo psicopedagógico, tiene una larga historia y no aparece apenas en la época actual, aunque, obviamente, es en el presente, donde adquiere gran intensidad precisamente por los procesos de cambios contextuales y estructurales que se viven en la educación.

Conclusión

La tonalidad con que se plantean las políticas educativas y sus respectivos discursos a nivel mundial apuntan hacia una nueva demanda; incursionar positivamente en una plataforma de cambios y transiciones turbulentas y plenas de incertidumbre, motivadas en la mayoría de los casos por la falta de respuesta de los sistemas económicos, políticos, culturales y sociales que hasta hace algún tiempo se percibían propulsores de progreso y a veces hasta de desarrollo. El panorama de vulnerabilidad que se presenta ante ello y su consecuente sustitución de los factores tradicionales de la producción industrial (tierra, mano de obra y capital) exigen la creación de marcos de proyección mundial y nacional modificados o reestructurados en relación a conocimientos científicos cada vez más refinados.

La invitación a este futuro se convierte en obligatoria y amerita de renovados personajes, agentes, seres humanos etc., que viven la combinación de decadencia, innovación y experimento, al paso que las instituciones se vuelven disfuncionales y la gente ensaya nuevas formas de vida, nuevos valores, nuevas estructuras familiares, nuevas formas políticas, nuevos tipos de arte y nuevas relaciones entre sexos (Toffler, 2006).

Por una parte, de manera directa, hay una transformación en la sociedad que tiene el reto de formar una generación de estudiantes competentes que favorezca su participación activa en el mundo de la globalización, pues, si no, su perspectiva de participación en el concurso mundial es sumamente desventajosa.

Pero también cambian profundamente las condiciones y las oportunidades para el desarrollo personal. Ya no se puede aplicar mecánicamente la política que fue efectiva en la época de la masificación matricular con un esquema instruccional pues es definitivamente reduccionista. Las nuevas tendencias educativas concentran su foco en aprovechar las potencialidades plenas de los estudiantes, por lo tanto no es limitativo a lo que pueda o no manejar un profesor.

Cada época presenta oportunidades distintas y las políticas de desarrollo, para tener éxito, tienen que adecuarse a las posibilidades concretas de su tiempo. El espectro de opciones es muy amplio y se puede aprovechar de mil maneras. Lo que no es viable es continuar por los caminos que ya demostraron ser inviables.

Ahora tenemos otro paradigma en construcción lo cual nos induce a inventar responsablemente, no uno sino distintos modelos congruentes con él.

Es necesario asumir con los profesores, el pensar de una nueva manera y entender, adoptar y adaptar los nuevos principios de práctica óptima. Porque el poder transformador, el poder orientador, de ese nuevo potencial está en la comprensión del nuevo paradigma. Sólo comprendiendo en qué consiste, cuál es su lógica, vamos a poder moldearlo, utilizarlo y aprovecharlo en función de nuestros objetivos como sociedad. Debe reconocerse que la lógica del viejo paradigma sigue viva entre nosotros en la práctica cotidiana y que sus formas organizativas piramidales y rígidas continúan resistiendo a las nuevas formas organizativas abiertas y en red.

El cambio es profundo, complejo y difícil y la única manera de llevarlo a cabo es con plena conciencia y conocimiento. Ciertamente la historia no está escrita con una sola pluma; dejemos pensar a quienes tienen en su mano la acción (Pérez, 2000).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI Editores.

Castillejo, J. L. (1994). La educación como fenómeno, proceso y resultado. En Castillejo, J. L. (Comp) *Teoría de la Educación*. Madrid: Taurus.

Foulquié, P. (1967). *Diccionario del Lenguaje Filosófico*. Madrid: Labor.

Khun, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Merani, A. (1983), *Diccionario de Pedagogía*. (2a ed.). Barcelona: Grijalbo.

Millán, J., Alonso, A. (2000). *México 2030; nuevo siglo nuevo país*. México: Fondo de Cultura Económica.

Pérez, C. (2000). *Cambio de paradigma y rol de la tecnología en el desarrollo*. Charla en el Foro de apertura del ciclo “La ciencia y la tecnología en la construcción del futuro del país” organizado por el MCT, Caracas, Venezuela.

Porlán, R. (1997). *Constructivismo y escuela*. España: Díada Editora, S.L

Resnick, L. y Ford, W. (1998). *Enseñanza de la matemática y sus fundamentos*. España: Paidós.

Rico, P. (2002). *La dialéctica materialista en investigación*. *Vademécum del educador*, Unidad 164 de la Universidad Pedagógica Nacional, Zitácuaro, Michoacán, 293-298. México

Rosental, M., Iudin, P. (1981) *Diccionario Filosófico*. La Habana: Editora Política.

Sacristán, G. (1989). *La enseñanza: su teoría y su práctica*. España: Editorial Akal.

Toffler, A., Toffler, H. (2006). *La revolución de la riqueza*. Barcelona: Random House Mondadori, S.A.

Vygotsky, L. S. (1991). El significado histórico de la crisis de la Psicología. En A. Álvarez y P. del Rio (Eds.) *Obras Escogidas (de Lev S. Vygotsky) Vol. I*, 259-407. Madrid: Visor

CONFIGURACIONES COGNITIVAS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA MEDIA ARITMÉTICA

Juan Jesús Ortiz, Vicenç Font, Silvia Mayén
Universidad de Granada — España
Universidad de Barcelona — España
Instituto Politécnico Nacional — México
jortiz@ugr.es

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística — Nivel: Superior

Resumen. *Un factor fundamental para realizar el cambio propuesto en la enseñanza de la estadística y la probabilidad por los actuales currículos, es la formación estadística de los futuros profesores. El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado del objeto matemático "media aritmética" de los profesores en formación de Educación primaria. La herramienta configuración cognitiva propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto y algunas de sus propiedades. Finalizamos con algunas implicaciones educativas para la formación de profesores en el campo de la estadística*

Palabras clave: probabilidad, formación de profesores, educación estadística

Introducción

El interés de la enseñanza de la estadística se ha visto reforzado en el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (MEC, 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre Tratamiento de la información, azar y probabilidad desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos estadísticos y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, incidiendo en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006). Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevarla a cabo (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que podrían transmitir a sus estudiantes como se ha comprobado en el caso de la probabilidad (Ortiz et al., 2006). Para conocer si los maestros en formación están debidamente preparados, hemos realizado un amplio estudio de evaluación inicial de la competencia de los futuros profesores de Educación primaria para resolver

problemas elementales de estadística. En este trabajo presentamos solo una pequeña parte de los resultados relacionada con el significado personal de los maestros en formación sobre el objeto matemático media aritmética.

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década apenas se refleja para el caso de la estadística, como se observa al analizar los contenidos de la revista Journal of Mathematics Teacher Education, o en el survey de Shaugnessy (2007). A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de dificultades en este colectivo en el uso de los promedios, que permanecen incluso después de haber recibido enseñanza específica (ver por ejemplo, la investigación de Batanero, Godino & Navas (1997)) o los errores que cometen en la construcción de ciertas gráficas y las dificultades que muestran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos (Espinel, 2007). En un estudio para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico y del contenido estadístico de los futuros profesores de primaria, Godino et al. (2008) observaron que aunque muchos tienen una buena intuición sobre la equiprobabilidad, minusvaloran la variabilidad, y en cuanto al análisis didáctico muchos de ellos tuvieron dificultades en juzgar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción. Los resultados de los trabajos de Garrett (2008) y de García Cruz & Garrett (2008), con alumnos de secundaria y universitarios, algunos de éstos últimos estudiantes para profesor de matemáticas en educación primaria y secundaria, revelaron que el alumnado muestra distintos tipos de razonamiento sobre la media aritmética y sus respuestas se pueden asociar a cinco niveles de comprensión según la taxonomía SOLO de Biggs & Collis (1991) así como que no hubo diferencias significativas entre los estudiantes universitarios y de secundaria en cuanto a los niveles de interpretación observados. En estudiantes universitarios también se han descrito errores de cálculo de la media simple y ponderada (Pollatsek, Lima & Well, 1981) o en la aplicación incorrecta de algunas propiedades de la misma (Mevarech, 1983). Por todo ello consideramos de interés seguir esta línea de investigación ya que, como vemos, la media aritmética es un concepto fundamental en estadística, del que hay pocas investigaciones sobre profesores en formación. A continuación describimos el marco teórico, los objetivos y los resultados obtenidos.

Marco teórico, objetivos y metodología

De los constructos propuestos en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero & Font, 2007), en esta investigación se utilizaron fundamentalmente tres: los significados de los objetos personales (del profesorado en formación) y las configuraciones epistémicas/cognitivas. De acuerdo con ello proponemos el par (sistema de prácticas, configuración de objetos) como la herramienta que nos permite caracterizar el significado del objeto "media aritmética". Los sistemas de prácticas se pueden parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas, posibilitadas por una determinada configuración de objetos, permitiendo la distinción entre significado y sentido (Font & Ramos, 2005): los sentidos pueden ser interpretados como significados parciales. En consecuencia, en esta investigación se ha entendido el significado personal de dicho objeto como el conjunto de prácticas que puede realizar el futuro profesor en las que la media es fundamental (o no) para su realización y como las configuraciones cognitivas que el alumno activa para realizar dichas prácticas. Las prácticas que realiza el futuro profesor, en este caso, son la lectura del texto de cada uno de los problemas y la producción de un texto como respuesta.

El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado del objeto matemático "media aritmética" de los futuros profesores de Educación primaria de la Facultad de Educación de Melilla, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su didáctica (4,5 créditos). Como objetivos específicos se pretenden los siguientes: 1. Determinar tipologías de significados parciales personales declarados de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas (es decir, según la presencia o ausencia de determinados conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguaje y argumentos) y 2. Determinar los errores y dificultades de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas.

Para evaluar el significado personal declarado de los futuros profesores, hemos utilizado el cuestionario propuesto en Batanero (2000), donde también se determina el significado de referencia del objeto matemático "media aritmética" y al que consideramos idóneo desde el punto de vista del contenido, ya que es representativo de dicho significado de referencia. Consta de cinco problemas, siendo el tercero del cuestionario el que analizamos en este trabajo (Anexo I).

Es un ejemplo particular de una clase de problemas donde se trata de reconocer que la media aritmética es el parámetro más adecuado para comparar estas dos distribuciones. En el EOS para analizar las producciones matemáticas de los alumnos se analizan primero las prácticas matemáticas y después los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. En este estudio, tal como ya se ha dicho, las prácticas que realiza el alumno son la lectura del texto de cada uno de los problemas y la producción de un texto como respuesta, las configuraciones de objetos se analizan a continuación (por cuestiones de espacio no se hace el análisis de procesos). La muestra participante estuvo integrada por 40 futuros profesores de Educación primaria de diferentes especialidades, con escasa formación matemática y en particular estadística.

Resultados

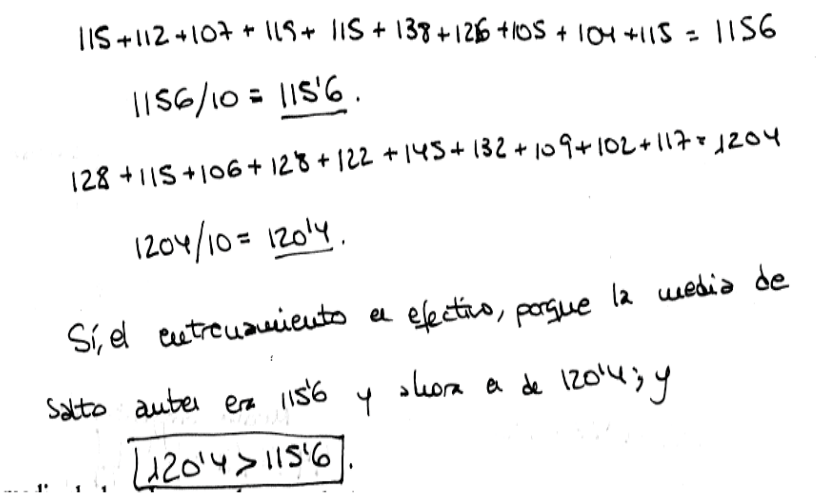
En base a la configuración cognitiva de las soluciones de los futuros profesores, hemos obtenido tres categorías de significados personales declarados de los alumnos:

Categoría 1: Alumnos que utilizan la media aritmética para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son ocho futuros profesores que interpretan de forma correcta que la media aritmética es el mejor parámetro para la comparación de las dos distribuciones propuestas.

Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los siete alumnos que en su práctica utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta sería la siguiente:

Utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 24
Situación problema	*Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos (Al medir la altura…)*
Lenguaje - Verbal relacionados con el contexto: entrenamiento, salto. - Simbólico: números enteros y decimales, suma (horizontal), división, fracción	



Conceptos	Media aritmética: $\bar{x} = \sum x_i/n = (x1 + x2 + ... + xn)/n$) Comparación de medias Suma División
Proposiciones	El entrenamiento es efectivo
Procedimientos	Cálculo de la media aritmética Comparación de las dos medias
Argumento	Tesis: El entrenamiento es efectivo Argumento: porque la media de salto antes era 115,6 y ahora es de 120,4; y 120,4 >115,6

Figura 1. Configuración cognitiva alumno 24

Categoría 2: Alumnos que analizan los casos de forma aislada para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son veintisiete futuros profesores que para comparar las dos distribuciones propuestas analizan el comportamiento de los casos aislados en cada una de ellas.

Entre ellos podemos distinguir tres grupos, según el procedimiento utilizado: El grupo 1, con siete futuros profesores que en su práctica calculan el porcentaje de alumnas que han mejorado sus resultados, argumentan y su respuesta es incorrecta; el grupo 2, con dieciséis futuros profesores que en su práctica calculan el número de alumnas que han mejorado sus resultados, argumentan y sus respuestas son incorrectas y el grupo 3, con tres futuros profesores que en su práctica calculan

la suma de las desviaciones entre el valor obtenido después y antes del entrenamiento para cada una de las alumnas, argumentan y sus respuestas son incorrectas. Por último, hay un alumno que calcula la media de dichas desviaciones y aunque comete errores en la suma y en alguna diferencia, considera que el entrenamiento si es efectivo "*puesto que los chavales ganan de media 4,3 cm después del entrenamiento*".

Categoría 3: Alumnos que no utilizan ningún cálculo para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: Son dos futuros profesores que para comparar las dos distribuciones no utilizan ningún cálculo y aportan otro tipo de argumentos.

Uno de ellos considera que el entrenamiento sí es efectivo "*ya que al entrenar el cuerpo queda predispuesto para avanzar en los resultados iniciales*" y el otro argumenta que "*en algunos casos sí y en otros no es tan efectivo puesto que no dan más de lo que dieron al principio*". Por último, hay tres futuros profesores que no contestan.

En la Tabla 1 quedan recogidas las tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores y la frecuencia de cada una de ellas, indicando si son correctas, incorrectas y si argumentan o no su respuesta. En ella observamos que, siendo la media aritmética de las alturas de cada una de las dos distribuciones propuestas el mejor parámetro para realizar la comparación de las mismas, hay 32 futuros profesores (80 %) que no la utilizan.

	Correcta		Incorrecta		No contesta	Total
	Argumenta	No argumenta	Argumenta	No argumenta		
Media	7	0	1	0		8
Casos aislados	0	0	27	0		27
Otras	0	0	2	0		2
No contesta					3	3
	7	0	30	0		
Total	7		30		3	40

Tabla 1. Frecuencia de tipologías de significados personales declarados

Han obtenido el resultado correcto solo 7 futuros profesores (17,5 %), donde todos han aportado el argumento correcto. Han respondido de forma incorrecta 30 (75 %), que han cometido los siguientes errores: 27 de ellos han analizado los casos de forma aislada, y aunque afirman que el entrenamiento es efectivo, sus argumentos están basados en procedimientos que no siempre proporcionan la solución correcta; 1 aunque utiliza la media no la interpreta bien, respondiendo que el entrenamiento no es efectivo, y 2 no han utilizado ningún cálculo argumentando de forma errónea. Estos errores son similares a los descritos en Batanero, Godino & Navas (1997), aunque en este caso las tareas eran de respuesta múltiple y el porcentaje de respuestas incorrectas más bajo (49,1%). Por último, hay 3 futuros profesores (7,5%) que no contestan.

Conclusiones

La herramienta configuración cognitiva propuesta por el EOS ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores en formación cuando resuelven un problema de comparación de dos distribuciones, donde hemos identificado tres categorías y en la segunda de ellas distinguimos tres grupos según el procedimiento utilizado. Destacan el alto porcentaje de profesores en formación que no tiene en cuenta la media aritmética para la comparación de estas dos distribuciones (80%) y que en su práctica activa otras configuraciones cognitivas incorrectas o no contestan e incluso cometen errores de cálculo en las operaciones y el alto porcentaje que si aporta argumentos pero de forma incorrecta (75 %), lo que puede ser debido a su escasa formación en estadística.

Nuestros resultados, coincidentes con investigaciones anteriores, en el sentido de que muchos de los errores continúan hasta la universidad, apuntan la necesidad de reforzar la formación estadística elemental de los futuros profesores de Educación primaria que difícilmente podrán enseñar un tema en el que muestran dificultades tan notables. Como consecuencia, el formador de profesores debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento estadístico, al abordar la enseñanza de la estadística en las Facultades de Educación, cambiando no solo los contenidos sino la metodología. Para ello, debemos proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la media

aritmética, y prepararlos en la componente didáctica, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía y ha sido cofinanciada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 25, 41-58.

Batanero, C. Godino, J. & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Granada, España: Universidad de Granada.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, 57-76. Erlbaum: Hillsdale, NJ.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores & P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119).Tenerife, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Font, V. & Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-346.

García Cruz, J. A. & Garrett, A. J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Corea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 12 (1), 49-66.

Garrett, A. J. (2008). *La media aritmética: Aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de La Laguna. Tenerife, España.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. & Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading &A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, México.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González & M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 268-276). Huesca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Pollatsek, A. Lima, S. & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Shaugnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 957-1008. NCTM. Greenwich, CT.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* Dodrecht: Kluwer.

Anexo I: Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos

Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Altura saltada en cm.

Alumno	*Ana*	*Bea*	*Carol*	*Diana*	*Elena*	*Fanny*	*Gia*	*Hilda*	*Ines*	*Juana*
Antes del entrenamiento	*115*	*112*	*107*	*119*	*115*	*138*	*126*	*105*	*104*	*115*
Después del entrenamiento	*128*	*115*	*106*	*128*	*122*	*145*	*132*	*109*	*102*	*117*

FORMADORES DE FORMADORES: ¿CÓMO ENSEÑAN A ENSEÑAR GEOMETRÍA DEL ESPACIO?

Natalia Sgreccia, Tulio Amaya de Armas, Marta Massa
Fac. de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Univ. Nacional de Rosario — Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas — Argentina
Facultad Educación y Ciencias - Universidad de Sucre — Colombia
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, tulio031964@yahoo.es, mmassa@fceia.unr.edu.ar
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *Los docentes tienden a no enseñar los contenidos geométricos establecidos en los programas, por desconocimiento de sus aspectos conceptuales y de su importancia, a pesar que se declara la importancia formativa de la geometría. De hecho estas posturas y las concepciones que las fundamentan pueden, en parte, derivarse de las experiencias personales de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la etapa de formación como estudiantes de Profesorado. Este trabajo comunica resultados de la prueba piloto de un cuestionario, con que se indagaron, en entrevistas semi-estructuradas, las opiniones de ocho formadores de futuros educadores, colombianos y argentinos, sobre la geometría del espacio y su didáctica. Se caracterizaron sus valoraciones y creencias. Los resultados han permitido identificar aspectos sobre los que se debe hacer ajustes si se lo desea emplear como instrumento para una indagación sobre una muestra más amplia de profesores.*
Palabras clave: geometría del espacio, enseñanza de geometría, representaciones docentes, formación de profesores

Introducción

La formación de profesores es una de las temáticas de mayor relevancia en la actualidad, particularmente en la Educación Matemática y en los países latinoamericanos (Borba, 2006). En este proceso de formación se construyen representaciones sobre el campo de conocimientos abordados y se reconstruyen o fortalecen aquellas organizadas en la escolaridad previa. Los significados disciplinares que los acompañan y el sentido que se les otorga como contenido a ser enseñado (perspectiva didáctica) define la posición del futuro profesor de Matemática como docente.

Varios estudios evidencian que los docentes tienden a no enseñar contenidos geométricos, a pesar de figurar en los programas, por desconocimiento tanto de sus aspectos disciplinares como de su importancia (Báez e Iglesias, 2007). Barrantes & Blanco (2006) advierten sobre la pobre formación en geometría que ha tenido la mayoría de los docentes jóvenes, tanto en la escolaridad primaria y secundaria como en el Profesorado. En los reducidos casos en los que se aborda la enseñanza de la

geometría, hay un fuerte predominio, casi exclusivo, de lo bidimensional, restringiéndose el trabajo con objetos tridimensionales, en el mejor de los casos, a un mero reconocimiento de nombres (Tavío y Méndez, 2006). Esta situación, observada en las aulas de las escuelas medias, da indicios de una posición sesgada del profesor ante el significado educativo de la geometría del espacio. Santaló (1999) advierte que las asignaturas de los Profesorados en Matemática suelen clasificarse, por separado, en Matemática ("qué" enseñar) y en Didáctica ("cómo" enseñar). Entiende que se trata de una división que debería transformarse para ganar en eficacia y tiempo. Ejemplifica estas ideas con la geometría, la cual puede mostrarse en su forma intuitiva, como fue su primera formulación histórica, para llegar a la geometría en coordenadas y a la introducción de las estructuras algebraicas. Sugiere que estas comparaciones y variedad de posibilidades sean mostradas por el profesor de Matemática y no esperar a que se las indique el profesor de Didáctica.

De allí que sea de interés indagar en profundidad las representaciones que subyacen en estas actuaciones docentes y cuáles son los factores que intervienen en su construcción, en sus aspectos disciplinares y didácticos, durante la formación de profesores en Matemática.

Marco teórico

Loewenberg Ball, Hoover Thames y Phelps (2008), siguiendo las ideas de Shulman (1986), postulan que el conocimiento matemático para enseñar comprende seis dominios, según se sintetizan a continuación y se ejemplifican para el caso de la geometría:

a. *común del contenido*: comprendiendo los conocimientos y procedimientos matemáticos generales para ser usados en diversos ámbitos, por ejemplo, las teorías geométricas;

b. *del horizonte matemático*: involucrando el conocimiento sobre la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan a través del currículum. Por ejemplo, este dominio considera la relación de los contenidos geométricos con otros en la articulación vertical y horizontal del diseño curricular;

c. *especializado del contenido*: está asociado con el conocimiento didáctico y las habilidades matemáticas para enseñar. Por ejemplo, comprende distintas fases o etapas para la enseñanza de la geometría;

d. *del contenido y de los estudiantes*: vinculado con el conocimiento sobre los procesos cognitivos requeridos en el aprendizaje de la Matemática. Por ejemplo, interesa identificar cierto nivel de aprendizaje geométrico en los alumnos;

e. *del contenido y de la enseñanza*: integra el conocimiento sobre la enseñanza y sobre la Matemática. Por ejemplo, atiende a la selección de las secuencias de enseñanza de la geometría pertinentes para ayudar a los alumno a superar etapas en su aprendizaje;

f. *del contenido y del currículum*: comprende el rango completo de programas, con todos sus componentes, diseñados para enseñar Matemática en un nivel dado. Por ejemplo, los contenidos de geometría establecidos en el diseño curricular.

Kunter et al. (2007) consideran que el profesor, además de ser portador de estos dominios de conocimientos, dispone también de un conjunto de creencias y valoraciones sobre la disciplina, su enseñanza, su aprendizaje y las finalidades educativas. Acordamos con Parra (2005) que ellas se expresan en las prácticas pedagógicas que lleva a cabo.

Metodología de la investigación

La investigación se centró, en la etapa que se comunica, a indagar representaciones docentes vinculadas con los dominios b, c, d y e de Loewenberg Ball et al. (2008) e identificar creencias y valoraciones que las complementen según lo sugieren Kunter et al. (2007). Con un enfoque cualitativo, se recurrió a entrevistas semiestructuradas (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003), con la intención de caracterizar las valoraciones y creencias de los docentes responsables de la formación de profesores en relación a la asignatura que imparten y vinculada con geometría o su didáctica. Se realizaron a cuatro formadores de Argentina y cuatro de Colombia, analizando su contenido por medio de ocho categorías -se explicitan en el apartado *Resultados* - que toman en consideración: la vinculación docente con la geometría (categorías 1 y 2), el lugar otorgado a la geometría tridimensional la asignatura a cargo (categoría 3), la relación entre la geometría y su didáctica (categoría 4), la importancia atribuida a su asignatura en la formación del profesor (categoría 5) y las fortalezas y debilidades en su práctica pedagógica en la asignatura (categorías 6 y 7).

Resultados

Las respuestas de los entrevistados, para cada una de las categorías de análisis, se indican con la codificación A seguida de un número (de 1 a 4) para los docentes argentinos, y con C para los colombianos.

Categorías 1 y 2: Asignaturas que enseñan en la formación de profesores y Antigüedad

A1: Tópicos de Geometría (1 año); A2: Geometría euclidiana y Taller de docencia IV (5 años); A3: Taller de docencia IV (5 años); A4: Geometría analítica, Taller de docencia III y Didáctica de la Matemática (14 años); C1: Didáctica de la Matemática (5 meses); C2: Geometría elemental (1 año); C3: Recursos didácticos (6 años); C4: Geometría analítica (11 años).

Categoría 3: Relaciones con la enseñanza de la geometría del espacio en su asignatura

A1 y C2 señalan *no tener establecidas relaciones con la geometría del espacio*, a semejanza de A3, que desde una perspectiva didáctica, lo delega en quien aborda los aspectos disciplinares. C1 considera que *la geometría del espacio tiene un rol mediador* en el aprendizaje, posición que comparte también C3 remarcando la importancia que cobran en la enseñanza los recursos didácticos para trabajar la tridimensionalidad.

A2 menciona desarrollar la geometría sintética, del plano y el espacio, sobre la base de los contenidos mínimos exigidos por el currículum que considera imprescindibles en la formación de un docente en Matemática.

A4 establece relaciones con la geometría del espacio *como aplicación de contenidos* desarrollados en geometría analítica: al abordar rectas y planos en el espacio, cálculo de volúmenes de paralelepípedos con producto mixto; representaciones gráficas y sus interpretaciones. Estos criterios son semejantes a los formulados por C4.

Categoría 4: Relación entre la geometría y su didáctica - Trabajo sobre particularidades didácticas (geométricas) en sus clases de geometría (didáctica)

Los profesores A1, A2, A4, C2 y C4 trabajan contenidos geométricos específicos en las asignaturas que tienen a su cargo. Sin embargo son diferentes la manera en que trabajan los aspectos didácticos: A1 lo hace con algunos contenidos de geometría plana ya que considera su importancia para su práctica docente; A2 ha comenzado a hacerlo recientemente con algún tema en particular

para mostrar la elaboración de una situación didáctica y utilizando algún recurso específico; A4 afirma hacerlo en su asignatura y enfatiza que cuando se abordan tanto los contenidos conceptuales como los procedimentales, se contempla a la geometría como una rama sumamente interesante, amplia, motivadora y flexible, que posibilita la integración de conceptos y procedimientos así como la construcción del conocimiento; C2 asume hacerlo como principio de trabajo "el descubrir para conceptualizar", con actividades que se desarrollan con la secuencia: razonamiento visual, razonamiento informal y razonamiento formal y aborda la de demostración como un medio de: explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación; y, finalmente, C4 lo aborda considerando las particularidades didácticas que orientan las temáticas específicas, sin profundizar en los detalles. Observándose en ellos por lo menos un intento por integrar lo disciplinar y lo didáctico (Santaló, 1999).

Los restantes entrevistados, si bien no trabajan contenidos de geometría, consideran la importancia de un buen tratamiento didáctico mientras se desarrollan los contenidos disciplinares, a fin de contribuir al desarrollo del pensamiento matemático para su uso posterior en el proceso de aprendizaje. En particular, C3 remarca que trata de hacer entender a los alumnos que los recursos didácticos son sólo un apoyo para la comprensión y, en particular, algunos recursos tecnológicos como los softwares utilizados en Matemática son útiles para graficar y resolver ecuaciones.

Categoría 5: Importancia atribuida a su asignatura en la formación del profesor en Matemática

Las respuestas son diversas, dando cuenta de las diferencias existentes entre los docentes en relación con el dominio del horizonte matemático. A1 considera que su asignatura es específica del Profesorado en Matemática y no puede ser compartida con otra carrera.

Para A2 la Geometría Analítica no es un área privativa del Profesorado en Matemática. Entiende que otras carreras tales como el Profesorado de Tecnología, o el de Química, el destinado a profesores para el nivel primario podría compartir la asignatura, ya que entiende que la geometría euclidiana es parte de la realidad en la que todas las personas están inmersas, ayuda a interpretar el entorno, desarrolla el razonamiento creando conectivos lógicos y necesarios en la resolución de problemas, además de contribuir al desarrollo de la visualización y de la representatividad. Esta idea también la manifiestan C2 y A4. Éste último además sostiene que las asignaturas a su cargo 'hacen al futuro profesor', los contenidos son estrictamente necesarios para impartir una buena

enseñanza, así como los procedimientos y actitudes con que debe contar. C4 considera que su asignatura constituye un reto para el futuro profesor: comprender los temas que se trabajan y puedan aplicarlos en contexto, en particular, adaptarlo a la singularidad de los estudiantes de escuela secundaria, en función de sus características y niveles cognitivos. En este caso se registra una clara referencia al dominio "d" de Loewenberg Ball et al. (2008).

Los profesores que se desempeñan en asignaturas del campo didáctico enfatizan aspectos del dominio "e" de Loewenberg Ball et al. (2008), como es el caso de A3, considera la inconveniencia de compartir el cursado con otras carreras ya que los alumnos tienen características y procesos de pensamiento diferentes a los que pudieron haber logrado estudiantes de otras carreras. En particular, el Taller de Docencia lo piensa como un espacio curricular que habilita la posibilidad de pensar la práctica de manera reflexiva generando un proceso permanente de revisión de la misma. C1 destaca que para él un buen docente debe tener tres saberes: saber la asignatura que enseña, saber cómo enseñarla y saber cómo se aprende dicha asignatura, siendo la didáctica la que provee los elementos indispensables para los dos últimos saberes, orienta la conformación de sus propios métodos de enseñanza, mostrándole las distintas teorías y procedimientos, así como las tendencias actuales. Señala que es importante indicar que no todo está dicho y que el mundo de la enseñanza es un campo en el que todo docente debe aportar cotidianamente, pues los espacios de aprendizajes son muy variados y cambiantes y depende de la intención de cada docente. La función didáctica del profesor se considera básica por C3 que hace referencias a colegas universitarios con dominio conceptual de un tema, pero que no lo saben transmitir a los estudiantes, sólo los confunden y los vuelven inseguros. Sostiene que la pedagogía, en su desarrollo histórico, ha logrado construir un espacio de teoría y práctica que orienta el quehacer de los maestros en las instituciones.

Categoría 6: Aspectos poco logrados en su asignatura

Las respuestas, diferentes por su especificidad ya que remite a la reflexión sobre su campo de desempeño profesional, se agrupan según los dominios a los que aluden.

- *Dominio b*: La axiomatización de la geometría, "quizás se deba a que a mí no me gusta demasiado y de alguna manera transmito esto". Hacer una Matemática más real, revisando muy bien contenidos prioritarios de la escuela media para reforzar a los alumnos en ellos (A2).

- *Dominio c*: Mayor manipulación por parte de los docentes en formación con algunos recursos informáticos indispensables para la enseñanza de la Matemática, geometría, cálculo, estadística, etc. (C3).
- *Dominio d*: Trabajar de manera que sus alumnos no se apeguen mucho al libreto en los ejercicios que plantea en clase. Esto inhibe que el futuro profesor piense que puede innovar. Considera que debe orientar más hacia el enunciado de ejercicios y planteamientos nuevos (C1); La capacidad demostrativa en los estudiantes desde razonamientos formales, diversificando las propuestas ofrecidas al futuro docente (C2); El trabajo con situaciones que resulten de interés para los estudiantes, para despertar su motivación (C4).
- *Dominio e*: La vinculación entre los trayectos de práctica y las asignaturas específicas (A1); La introducción de la geometría como campo disciplinar en las prácticas de residencia ya que la geometría no está incluida demasiado en el secundario. Falta formular una propuesta didáctica creativa en las clases que van a desarrollar en las escuelas destino y no sumarse a las propuestas didácticas que realizan los docentes a quienes observan y con quienes practican (A3); Destinar más tiempo al uso de materiales didácticos, que incluyen softwares educativos y abordar, por otro lado, trabajos prácticos orales como así también trabajos en colaboración que les exijan a los futuros profesores el debate, el intercambio y puesta en común de ideas (A4).

Categoría 7: Anécdota significativa vinculada

A1, A2 y C4 no recuerdan anécdotas en particular. A3 no comunica ninguna anécdota, sólo destaca una situación que se reitera en sus alumnos, en cuanto a la falta de articulación con temas anteriores.

De los restantes, 2 profesores señalan una situación correspondiente a geometría, recordando: Acciones de varios estudiantes que logran descubrir propiedades geométricas con la ayuda de herramientas computacionales (C2); A un estudiante creativo, que ante las exigencias de evaluación por querer sobresalir, diseña un recurso didáctico práctico, útil y económico para la enseñanza de la geometría (C3).

Los otros recuerdos se refirieron a: Una práctica de ensayo, entre compañeros en el aula, donde los docentes hacían de alumnos y ante una pregunta, la practicante se larga a llorar y le dice al docente que no la quiere (A4); Una situación como alumno de quinto grado de primaria donde le enseñaron a despejar una ecuación partiendo de las leyes del despeje antes que de las propiedades de la igualdad "porque no quería perder tiempo con eso" (C1).

Categoría 8: Lo que le hubiese gustado que le pregunten sobre su asignatura

A4, C1y C3 aluden a cuestiones sobre su gusto por la asignatura valorando fuertemente el aspecto afectivo propio. Mientras que C4 señala como importante el grado de satisfacción de los estudiantes luego de haber cursado una asignatura como geometría analítica. C2 hace referencias a cuestiones vinculadas con la gestión del aula: ¿Cómo desarrolla su clase? ¿Qué aspectos deben privilegiarse en el curso? ¿Cuál es el papel del profesor y los estudiantes en las clases?

Conclusiones

Los resultados han permitido tener los primeros indicios acerca de la reducida importancia que se le asigna a la geometría del espacio como contenido frente a enfoques más centrados en lo analítico. Se valora su interés para la motivación o la aplicación.

En general, se observa acuerdo sobre las particularidades que asocian a la asignatura a su cargo para la formación de un Profesor en Matemática. Tanto con la mirada puesta en los aspectos disciplinares específicos como en los didácticos, los formadores de formadores consideran relevante el desarrollo de los dominios de conocimientos que se han indagado en este trabajo. Sin embargo, sorprende la ausencia de relatos de situaciones anecdóticas surgidas en el aula, dando la sensación de prácticas que se repiten con cierta monotonía, donde hay tácitos acuerdos de actuación frente a las tareas tanto de profesores como de alumnos. La pasividad pareciera ser una actitud típica en los formadores de formadores, si bien se resalta la potencialidad formativa de las asignaturas que cada uno de los entrevistados tiene a su cargo. Aquellas anécdotas que hacen referencia a la geometría se remiten básicamente al uso de recursos, no así a cuestiones relacionadas con procesos cognitivos, a pesar que se declama la importancia del desarrollo del razonamiento.

Entre los aspectos poco logrados en la asignatura, mencionaron: manipulación de recursos didácticos, uso de estrategias innovadoras, relaciones de la asignatura con la geometría del espacio y con el contexto a través de la resolución de problemas. Propusieron alternativas para mejorar: perder cuidado de la presión por el desarrollo de contenidos y dedicar más tiempo a cuestiones estructurales del programa.

Las referencias a las vinculaciones entre lo disciplinar y lo didáctico muestra diferencias frente a lo que se prioriza y en la forma de articularse, independientemente del país de referencia, no correspondiéndose con las sugerencias que, al respecto, realizara Santaló (1999). Este constituye un aspecto importante para avanzar en la indagación buscando, en las respuestas de muestras significativas de profesores egresados y de estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática, indicadores de lo que Loewenberg Ball et al. (2008) identifican como distintos dominios de conocimiento matemático para enseñar.

Referencias bibliográficas

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática 12 al 16*, 67-88.

Barrantes, M. & Blanco, L. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school Geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education 9*, 411-436.

Borba, M. (2006). Diversidade de questões em formacao de professores de matemática. En M. Borba (org.). *Tendencias Internacionais em Formaçao de Professores de Matemática* (pp. 9-26). Belo Horizonte: Autentica.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª. ed.). México DF: Mc Graw Hill.

Kunter, M., Klusmann, U., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Neubrand, M. & Tsai, Y. (2007). Linking aspects of teacher competence to their instruction. Results from the COACTIV Project. In M. Prenzel (Ed.). *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme* (pp. 39-59). Münster: Waxmann.

Loewenberg Ball, D., Hoover Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59* (5), 389-407.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 8* (1), 69-90.

Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En L. Santaló (y cols.). *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática.* Buenos Aires: Troquel.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15* (2), 4-14.

Tavío, C. y Méndez, J. (2006). La democratización del conocimiento matemático: popularizando la geometría. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO 12* (42), 61-70.

SENTIDO DE REALIDAD EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Jhony Alexander Villa–Ochoa, Carlos A. Bustamante, Mario Berrio Arboleda
Grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) Colombia
Grupo FORDAD (CIEP-ASDEM)
Red colombiana de modelación en Educación Matemática
javo@une.net.co; bustamantequintero@gmail.com; marioberrio7@hotmail.com
Campo de investigación: Educación continua Nivel: Superior
Modelación matemática

Resumen. *Nos proponemos en este artículo aportar a la discusión sobre la noción de sentido de realidad. Particularmente observamos, a través de un estudio de casos, cómo esta noción se relaciona tanto con la experiencia académica del profesor como de su interacción con los contextos socioculturales en los cuales se desenvuelve. Finalmente observamos como dicho sentido de realidad parece estar influenciado por las relaciones académicas vividas entre el sujeto y las matemáticas.*
Palabras clave: modelación matemática, sentido de realidad

Los modelos y la modelación matemática. Algunos elementos teóricos

Los términos modelo y modelación tienen en la actualidad múltiples interpretaciones las cuales emergen desde diferentes perspectivas. Blum, Galbraith, Henn, y Niss (2007) establecen una diferencia de estos conceptos en el campo de la Educación Matemática de otros campos, por ejemplo, de la educación en general en donde se encuentran frecuentemente “modelación de una buena práctica de enseñanza”, modelación de la comprensión de los estudiantes, modelos de objetos físicos o modelos mentales, etc.

En el campo de la Educación Matemática, el concepto de modelación por su parte está anclado al concepto de modelo, describiéndose de modo general, como el proceso involucrado en la obtención de modelos. Para Blum et al. (2007), la modelación puede considerarse como un proceso que tiene génesis en la conceptualización de una situación o problema de la realidad. Por tal razón, consideramos que la noción de modelación está matizada por la noción de realidad asumida.

La discusión actual muestra que no existe una comprensión homogénea del término *realidad* al interior de la modelación matemática; por ejemplo, Blum y Borromeo-Ferri (2009) citando a Pollak (1979) asumumen la noción de realidad como todo aquello externo a la matemática, es decir, al "resto del mundo", lo cual incluye la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas

científicas. Contrariamente, otros autores discuten dicha noción de realidad separada de las matemáticas, según Barbosa (2009) la noción de realidad externa a las matemáticas sustenta una visión del modelo matemático como un retrato aproximado de la realidad lo cual ha sido desafiado por muchos investigadores que argumentan que la matemática hace parte de la realidad y que los modelos matemáticos son necesariamente sesgados o parciales. Sea cual sea la noción de realidad adoptada, ésta presupone concepciones ontológicas cuya discusión escapa al objetivo de este articulo, sin embargo, es claro que ninguna de estas nociones objeta la importancia de la implementación de la modelación como un recurso en el aula de clase.

Para la implementación de la modelación como un recurso en el aula de matemáticas, algunos autores han sugerido una serie de momentos, fases o etapas (Bassanezi, 2002; Villa-Ochoa, 2007; Blum et al, 2007). De modo general, la modelación puede surgir de un problema o situación del mundo real lo cual demanda actividades de simplificación y estructuración buscando una delimitación y precisión de la situación o problema. Con la recolección de datos, se provee más información sobre la situación y se sugiere el tipo de modelo matemático que puede ser apropiado para direccionar el problema del mundo real. A través de un proceso de matematización, los objetos relevantes, los datos, las relaciones, condiciones e hipótesis de la situación o problema en cuestión se trasladan hacia las matemáticas resultando así un modelo matemático a través del cual se direcciona el problema identificado. Para Blum y sus colaboradores, el proceso de modelación no finaliza con la obtención del modelo sino que, por el contrario, se hace necesario usar algunos métodos y procedimientos matemáticos (hipótesis matemáticas, resultados teóricos, solución de ecuaciones, estimaciones numéricas, pruebas estadísticas, simulaciones, etc.) para obtener resultados matemáticos pertinentes con las preguntas derivadas de la traslación del problema del mundo real. Blum et al. (2007) establecen que dichos resultados matemáticos deben ser traducidos nuevamente al contexto de donde fueron derivados para realizar un proceso de interpretación. Finalmente el "*solucionador de problemas*", valida el modelo mediante la comprobación de los resultados matemáticos y su interpretación como razonables y compatibles en términos de la información dada en el problema original. Cuando el proceso de validación arroje resultados no satisfactorios todo el proceso debe repetirse con una modificación o un modelo totalmente diferente. Por último (si se logra), la solución del problema original del mundo real, y cuando proceda, se comunicará a los demás. En la

Ilustración 1, se presenta de forma diagramática una manera cómo el proceso de modelación podría desarrollarse.

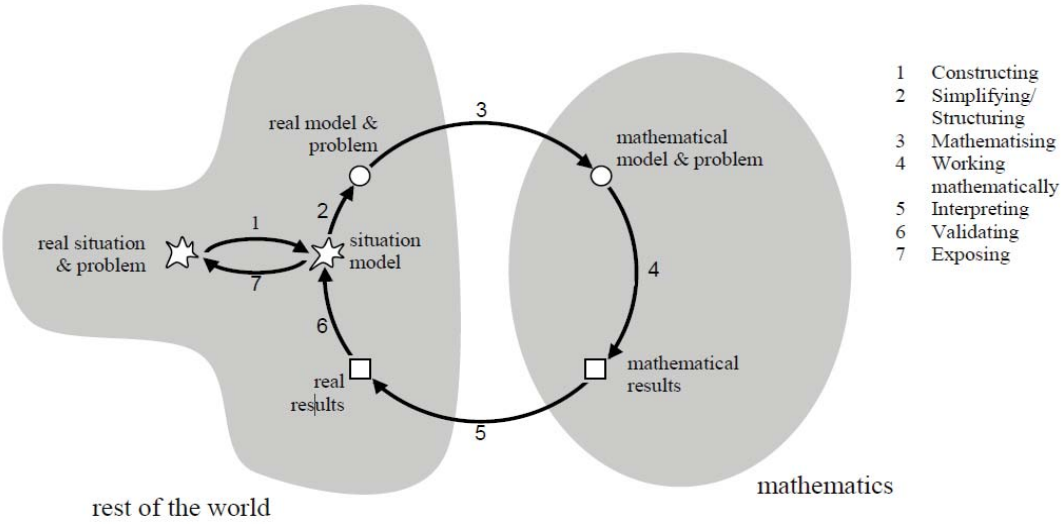


Ilustración 1. Ciclo de la modelación retomado por Blum y Borromeo-Ferri (2009)

En nuestra investigación asumimos como punto de partida del proceso de modelación, a un conjunto de situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela. Dichas situaciones en adelante las llamaremos *situaciones reales;* sin embargo, no pretendemos que este tipo de *situaciones reales* agoten nuestra noción de realidad como un sistema compuesto por fenómenos o hechos que pueden observarse desde múltiples dimensiones.

Aunque consideramos que existen muchos otros tipos de situaciones que pueden denominarse reales (al interior de las demás ciencias y de las matemáticas mismas, etc.) no las incluiremos dentro de este conjunto inicial de situaciones, no porque carecen de importancia al interior de las matemáticas escolares, sino porque nuestra atención ha estado focalizada en algunas funciones sociales de las matemáticas y, por tanto, consideramos que las *situaciones reales*, asociadas a los contextos anteriormente mencionados, nos permitirán una discusión más directa de este asunto.

Consideramos al diagrama de la ilustración anterior desde una visión flexible, es decir, no como una *estructura rígida* que debe ser reproducida de manera lineal en el aula de clase por todos los estudiantes, sino como un conjunto de "momentos globales", que sugiere de alguna manera, ciertos elementos sobre cómo podría orientarse la modelación matemática como un proceso en

las matemáticas escolares y que no limita el surgimiento de otros procesos propios de la complejidad del aula de clase.

Todas las consideraciones anteriores, así como los elementos que reportaremos en este articulo son producto de una investigación desarrollada en la Universidad de Antioquia (Colombia) en el cual se indagó por el papel que tiene la modelación de *situaciones reales* al interior de las aulas escolares de matemáticas.

El estudio

La investigación tuvo como propósito general indagar por el papel que tiene la modelación en las aulas escolares de una subregión antioqueña en Colombia. En la investigación, se comprometieron cuatro profesores durante más de un año. Dichos profesores manifestaron su disposición para participar de la investigación y nos autorizaron para observarlos en el ejercicio de su práctica al interior de sus aulas de clase durante dos meses. Adicional a las observaciones en el aula de clase, usamos el estudio de episodios, las entrevistas y los cuestionarios para recolectar la información suficiente que nos permitiera dar cuenta de nuestro propósito general. Las observaciones fueron registradas en diarios de campo, el estudio de episodio y las entrevistas grabadas en video y los cuestionarios registrados por escrito. Posteriormente estos registros fueron transcritos y analizados por el grupo de investigadores.

Dado que en la investigación pusimos especial atención a las maneras en que los profesores reconocen la importancia de la modelación matemática en el aula de clase, adoptamos el *estudio de casos* como método de investigación (Yin, 2009) y, así mismo, usamos los registros de los datos para realizar una línea convergente de indagación la cual, según Yin (2009) se desarrolla mediante la triangulación y corroboración usando múltiples fuentes de evidencia.

Algunos hallazgos y discusión

A través de esta investigación pudimos observar que, a pesar que desde hace más de diez años el Ministerio de Educación Nacional-MEN a través el documento *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998) recomendó la implementación de la modelación matemática como un proceso en las aulas

escolares, algunos profesores no habían logrado aproximarse a dicha implementación. Las causas de este hecho son múltiples y de diversa naturaleza, una de ellas, radica en las exiguas relaciones que tales profesores han alcanzado a establecer entre las matemáticas y los contextos reales. En este sentido introducimos la noción de *Sentido de realidad* la cual identificamos a través del estudio de episodios y la reportamos en Villa-Ochoa et al. (2009a) como:

[…] la sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, que además incluye la intuición y la capacidad de detectar las situaciones y oportunidades del contexto sociocultural frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes, dicho sentido incluye una buena dosis de imaginación y creatividad (p. 169).

En otras publicaciones hemos formulado algunas preguntas sobre las características del *sentido de realidad*, la forma cómo se desarrolla, su incorporación en los programas de formación inicial y continuada de profesores, su relación con el conocimiento matemático y didáctico del profesor, etc. (Villa-Ochoa, 2009, Villa-Ochoa et al. 2009a, 2009b).

En este artículo discutimos sobre un fragmento de la investigación en donde encontramos una posible relación entre conocimiento construido en otras disciplinas académicas y el desarrollo de aquello que hemos denominado “sentido de realidad”. Así mismo, discutimos frente algunas implicaciones que dicho *sentido de realidad* tendría con respecto a la implementación de la modelación matemática apuntando a algunas de las funciones sociales de las matemáticas escolares, ya que según el MEN las matemáticas escolares en Colombia,

[…] debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos (MEN, 2006, p. 46).

En uno de los episodios presentados en la investigación (ver Villa-Ochoa et al., 2009a, p.175) se presentó a manera de historieta, una situación que parece estar presente en la cotidianidad de las aulas de clase. Se trata de las respuesta que comúnmente un profesor ofrece a sus estudiantes cuando se le hace la pregunta ¿Para qué sirven las matemáticas? Se muestra cómo el profesor de la historieta se limita a listar un conjunto de “contextos” en los cuales las matemáticas tienen aplicación, sin que ello implique una descripción de los contextos que le permita a los estudiantes

interpretar su realidad y abordar problemas a través de la modelación. A partir de este episodio, se observó cómo los profesores reportados en este documento, se identificaron con la situación de la historieta, aceptando que sus respuestas a la pregunta anterior, poco promueve en los estudiantes la interpretación, el análisis y la modelación la realidad inmersa en sus respuestas. En los siguientes cometarios pretendemos mostrar algunas ideas que los profesores expresaron frente a la pregunta ¿Para qué sirven las matemáticas?

Alberto: *Yo digo que eso depende del grado para el que uno va, yo digo, ¡si!, sextico, y yo pienso que,…, ¡si!, sin las matemáticas no tendrían ropa. […] pero de todas maneras, me quedo cortico [sin argumentos claros]. Para qué sirven? […] es que en la universidad papito lo van a necesitar, los van a levantar [van a tener dificultades] pero sé que es una respuesta que surge por mi incapacidad de decirle: uh que las identidades trigonométricas, uh, yo no sé, claro que yo he dicho cuando no sé, que no sé, pero en este caso no he sido capaz. […] Toca decirle al estudiante: no sé! Le toca decirle. ¡Hay que verlo, porque hay que verlo!*

Alexander: *Respecto a ese tema, uno dice, "si no existiera el sistema binario, el avión no volaría" cómo lo saca* [argumenta] *con electrónica?* [este profesor es licenciado en Matemáticas y técnico en electrónica]*. Pero cómo llevar al muchacho, si usted está viendo por ejemplo sistema binario, fuera del sistema binario, ese problema* [cómo vuelan los aviones] *tiene una gran cantidad de matemática ahí. Entonces, uno le muestra una partecita mínima y el muchacho se queda corto, pues el muchacho le está diciendo, "démelo todo".*

Se observa en el diálogo como Alberto reconoce que sus respuestas a la pregunta en cuestión son insuficientes para develar las relaciones existentes entre las matemáticas y el "mundo real". De igual manera, su relación con el mundo, no ha sido suficiente para que él mismo desarrolle un *sentido de realidad* que le posibilite identificar dichas relaciones y diseñar situaciones que le permitan plasmarlas en el aula de clase. Por su parte, el conocimiento que tiene Alexander frente a temas de la Electrónica, le han permitido "mencionar" las aplicaciones de las matemáticas al interior de esta área. Alexander argumenta que "los problemas de aplicación" de las matemáticas son complejos y requieren de muchas más matemáticas de las que se encuentran al alcance de los estudiantes. Este tipo de percepciones del profesor, le han imposibilitado diseñar e implementar situaciones en las cuales los estudiantes puedan abordar serios procesos de modelación que posibiliten la experimentación, búsqueda de datos, identificación de variables, regularidades, abstracciones y simplificaciones, elementos propios de la modelación como proceso en el aula. Se observa entonces, como la experiencia de Alexander en contextos académicos de la electrónica, le

ha posibilitado ampliar su sistema de relaciones entre las matemáticas y el "mundo real", sin embargo, no ha sido suficiente para desarrollar un *sentido de realidad* que le permita materializar estas relaciones al interior de la escuela.

Con base en los elementos anteriormente presentados, notamos cómo la percepción que cada profesor tiene de las matemáticas y su relación con la realidad difiere, y depende por una parte de las experiencias que los profesores hayan tenido en su formación académica, y por otra, de las experiencias y del contacto que cada sujeto ha tenido con los contextos socioculturales en los cuales se desenvuelve.

El desarrollo de un *sentido de realidad* le permitirá al profesor determinar contextos en los cuales se presentan algunas *situaciones reales* (situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela) que serían pertinentes a sus estudiantes y tomar las decisiones frente a su abordaje en las aulas de clase; de esta manera, el *sentido de realidad* actuaría [metafóricamente] *"como una lupa con la cual el mismo profesor observa una realidad objetiva y le posibilita la (re)significación de dicha realidad a sus alumnos, a través de un proceso de modelación matemática*" (Villa-Ochoa et al; 2009a, p. 169-170).

Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, llamamos la atención particularmente sobre el conjunto de *situaciones reales* que denominamos anteriormente, pues consideramos que son estas situaciones quienes aunadas con los contextos institucional y escolar pueden condicionar, de alguna manera, los procesos en cómo se desarrollan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así, defendemos la idea que es el profesor quien debe tener en cuenta los intereses, conocimientos y capacidades de sus estudiantes y reconocer las diferencias entre ellos, sin embargo, también debe determinar los significados que los estudiantes atribuyen a las matemáticas escolares y negociarlos frente a las *situaciones reales* inmersas en contextos socioculturales le proporcionan, para lo cual el profesor requiere también desarrollar así mismo, esos significados y por tanto un *sentido de realidad*. De esta forma, el profesor promoverá en los estudiantes maneras que les posibiliten asumir a las matemáticas como un área que les permite reflexionar y posicionarse de manera crítica frente a algunas de las demandas sociales que sus contextos le imponen. Así mismo, la modelación se convierte en una herramienta que, más allá de su función didáctica, permite interpretar y (re)significar los contextos, acercándose cada vez más

hacia una de las funciones sociales de las matemáticas escolares declarada por el MEN y que mencionamos anteriormente.

Conclusiones

Los casos reportados en este artículo, evidencian que los profesores han aprendido que las matemáticas están en toda la naturaleza, en las demás ciencias, y en el contexto; pero aún no han aprendido a develarla. El *sentido de realidad* a través de la modelación matemática, apunta hacia esa necesidad de develar las matemáticas de los contextos socioculturales. De acuerdo con Skovsmose (1994), la modelación matemática siempre activa una comprensión sobre el fenómeno de estudio; en su trabajo, Skovsmose establece que un modelo matemático está siempre basado sobre una interpretación específica de la realidad, otra posibilidad no existe, no podemos entrar en contacto con la realidad sin estructurarla. Sin embargo, consideramos que dicha interpretación debe trascender las concepciones de realidad como algo artificial, inventado o revestido para ubicarse en realidades más cercanas a las necesidades a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela. En este sentido, la comprensión de los conceptos matemáticos y por tanto, los modelos matemáticos, ocurren en términos de los contextos en los que se desenvuelve el estudiante en el aula de clase, en este caso, apoyamos la idea que adicionalmente sean contextos de índole social y cultural.

El caso de Alexander pone de relieve el hecho de que el *sentido de realidad* está fuertemente influenciado por las relaciones académicas vividas entre el sujeto y las matemáticas, aunque en este caso, se observa un conocimiento "técnico" sobre la mismas, sin embargo, el contacto con situaciones de modelación propias de los contextos sociocultural, parece propiciar cierto grado de familiarización y una nueva mirada a la realidad extraescolar promoviendo alternativas para la búsqueda de nuevos contextos para el trabajo de la modelación en el aula.

Finalmente, consideramos que una investigación en modelación matemática que pretenda desarrollarse para alcanzar las funciones sociales de las matemáticas escolares, debe incorporar elementos que reflexionen en torno a cuestiones como:

- Cuando hablamos de modelación matemática ¿De cuál realidad estamos hablando?

- ¿Cuáles son las limitaciones y posibilidades de la modelación matemática con respecto a un acercamiento al conocimiento de la "realidad"?

De esta forma, tal y como afirma Villa-Ochoa, Rojas y Cuartas (2010) es importante considerar que el papel de la modelación en el aula de clase debe permear la visión que los profesores tienen de la realidad social y cultural de su entorno; hecho que depende, en gran medida, de la capacidad de los docentes para la identificación de contextos reales para su abordaje, es decir, de su *sentido de realidad*.

Agradecimientos

La investigación fue financiada por la Dirección de Regionalización y el Comité para el Desarrollo de la de Investigación de la Universidad de Antioquia mediante acta Nº 559. Al grupo FORDAD del CIEP-ASDEM por su apoyo al desarrollo de esta investigación, y a los miembros de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (www.recomem.com).

Referencias bibliográficas

Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 69-85.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1* (1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematics education.The 14th ICMI Study.* New York: Springer.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Skovsmose, O. (1994) Towards a philosophy of critical mathematics education. Dordrecht: Kluwer.

Villa-Ochoa, J. A. (2009). Presente y futuro de la investigación en Educación Matemática en Colombia. En H. Blanco (Org.), *Memorias del décimo encuentro colombiano de Matemática Educativa.* San Juan de Pasto: Asocolme

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas,19*, 51-81.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., Berrio, M., Osorio, J. A., & Ocampo, D. A. (2009a). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. *ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2* (2), 159-180.

Villa-Ochoa, J. A., Berrio, M., Bustamante, C., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009b). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del maestro. En: P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22*, pp. 1443-1452. Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A., Rojas, C., & Cuartas, C. M. (2010). ¿Realidad en las matemáticas escolares?: Reflexiones acerca de la "realidad" en modelación en educación matemática. *Revista Virtual Universidad Catílica del Norte* (29), 1-17.

Yin, R. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

LA FORMACIÓN DOCENTE EN LA LEBEM: UN CURRÍCULO HACIA LA FORMACIÓN IDEAL

Tulio Amaya de Armas, Natalia Sgreccia, Marta Mass, Iván Núñez, Jairo Escorcia
Facultad de Educación y Cs. de la Universidad de Sucre — Colombia
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario — Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas — Argentina
tulio031964@yahoo.es, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mmassa@fceia.unr.edu.ar, ivann312@yahoo.es, escorcimercado@yahoo.es
Campo de investigación: Programas de formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se comunican los resultados de un primer instrumento aplicado a ocho estudiantes del Programa Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática (LEBEM) de la Universidad de Sucre, Colombia, como inicio de una indagación a todos los estamentos involucrados en dicho programa. Para cada una de las preguntas de la encuesta aplicada se presentan los agrupamientos conceptuales realizados, según aspectos comunes caracterizados, con algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes. Se concluye con algunas evidencias que justifican la revisión del programa de referencia por parte de los formadores de formadores y los administrativos de turno.*
Palabras clave: educación matemática, programa, formación de profesores

Introducción

Varias inquietudes relativas al desarrollo del Programa Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática (LEBEM) han surgido con sus primeros egresados. Se ha vislumbrado la necesidad de realizar ajustes al curriculum según las tendencias actuales en el ámbito nacional e internacional de los programas de esta naturaleza y a las necesidades socioculturales. En este sentido se ha investigado la satisfacción con la formación ofrecida de una muestra de estudiantes y profesores de profesorado en matemáticas de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina) y de la LEBEM en la Universidad de Sucre (Colombia) (Amaya y Sgreccia, 2008; Sgreccia, Amaya y Massa, 2009). Se encontró preocupación entre los profesores en formación por la repetición en los contenidos del pensum que se desarrolla, tanto en las componentes de pedagogía y didáctica como de la parte disciplinar. Asimismo existe un consenso tanto internacional como nacional sobre la necesidad de replantear el ejercicio del maestro, sus roles y sus funciones, lo cual obliga a revisar continuamente las implicaciones que tales replanteamientos tienen en el campo de la formación (ICFES, 2009). La formación de profesores es, en el presente, uno de los temas de especial actualidad, y requiere la adaptación al medio cambiante y de continua reforma a la que nos enfrentamos. Por ello, el diseño y desarrollo de procesos de formación, inicial y continua, es

un objeto de investigación significativo (Azcárate, 2005). Aquí presentamos los resultados de una primera indagación a estudiantes del programa LEBEM.

Marco teórico

En la actualidad, Colombia cuenta con 43 programas dirigidos a formar maestros cuyo lugar de desempeño es la enseñanza de las matemáticas en la educación básica (García, 2008). Una revisión de éstos muestra que su estructura obedece a principios y núcleos básicos y comunes: la educabilidad del ser humano; la enseñabilidad de las disciplinas; la estructura epistemológica de la pedagogía, las realidades y tendencias sociales y educativas institucionales, nacionales e internacionales; y la dimensión ética, cultural y política de la profesión educativa (CNA, 1998). Dichos programas, a pesar de tener un mismo objetivo: la formación de profesores, presentan diferencias sustanciales, sobre todo en lo relacionado con las prácticas profesionales pre-graduales.

En las últimas dos décadas, ha crecido la preocupación entre las comunidades de profesores por establecer las competencias profesionales de los futuros profesores. Bromme (1994) identifica tres componentes del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido temático a enseñar, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico. Entre las comunidades de educadores matemáticos, también se vive la misma situación. Así, Niss (2003, citado en Gómez, 2008) define al buen profesor de matemáticas como aquél que puede inducir y promover el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes. Esto implica que el profesor mismo debe poseer esas competencias matemáticas. También identifica y caracteriza unas competencias didácticas y pedagógicas específicas a las matemáticas, que organiza en seis categorías: la gestión del currículo, la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación, la colaboración y el desarrollo profesional.

En el período de formación existe una marcada preocupación por establecer las competencias que debería desarrollar un futuro profesor de matemáticas para el ejercicio de su actividad docente en la escuela secundaria. Esto involucra potencialidades individuales, conocimientos adquiridos o información, gustos o preferencias, valores, actitudes y creencias como futuros docentes (Lupiañez y Rico, 2008). Para investigadores como Gómez (2006), si se espera que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, con conocimiento

profesional, entonces ellos deben conocer y utilizar principios, procedimientos, herramientas y técnicas fundamentados en la didáctica de las matemáticas, que les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que puedan conformar su planificación de clase. Según Flórez (2000), el profesor de matemáticas está en contacto con personas en formación y no puede conformarse con dominar unas técnicas y ponerlas en juego, sino que tiene que tratar de comprender la situación que afronta y adaptarse a las circunstancias cambiantes del grupo humano al que se dirige con actitud abierta y reflexiva.

Para Villella (2001), las tendencias formativas del futuro profesor de matemáticas corresponden principalmente a tres enfoques: *tradicional*: íntimamente ligada a la adquisición del dominio de la disciplina; d*e racionalidad técnica:* vinculada al dominio de destrezas didácticas relacionadas con las matemáticas, como base de su competencia profesional; d*e progresión continua:* comienza en la formación inicial y continúa desde la interacción práctica-teoría y el análisis de los referentes en los que se ejercerá la profesión, investigando su propia práctica.

Gascón (2001) muestra que muchas decisiones y actuaciones docentes se corresponden con los modelos epistemológicos generales desarrollados a lo largo de la historia de las matemáticas. Cada modelo condiciona la forma de organizar y planificar el proceso de enseñanza de las matemáticas del profesor, incidiendo sobre su práctica áulica.

Robert y Pouyanne (2005) piensan que para hacer evolucionar la formación del profesor de matemáticas no basta con formar enseñando (“haz como yo”) o diciendo (“haz lo que yo hago”) a partir de la experiencia personal. En el acto pedagógico el intercambio gira no sólo alrededor del contenido temático, sino que hay cuestiones actitudinales que también “se transmiten”, muchas veces inconscientemente o sin planificar pero que suelen ser las marcas, huellas, recuerdos que más les quedan a los alumnos. Jackson (1999) lo considera un aprendizaje adicional, que no se lo puede caracterizar del mismo modo que al aprendizaje matemático involucrado.

En el marco de este trabajo, la valoración de los estudiantes sobre el proceso de enseñanza y de aprendizaje, así como sobre el cumplimiento de los objetivos académicos en su formación como futuros profesionales cobra mayor validez debido a que todos los profesores, antes de serlo, han transitado experiencias de aprendizaje y formación que conforman una biografía con gran peso en su desarrollo profesional.

En este sentido, Celman (1998) plantea que la evaluación, si se la organiza con continuidad, se constituye en fuente de conocimiento y lugar de gestación de mejoras educativas. La reflexión sobre las problematizaciones, las propuestas iniciales, los procesos realizados, los aspectos incompletos, los logros alcanzados, facilita la tarea de descubrir relaciones y fundamentar decisiones.

Para Cabo (2006), los profesores, cuando finalizan su carrera, creen que salen formados, con un bagaje listo para aplicar. No obstante ellos siguen siendo sujetos en formación continua dado que sus alumnos se renuevan asiduamente con contenidos que no son neutrales.

Metodología de la investigación

Se desarrolló con un enfoque empírico, descriptivo y correlacional, utilizando como instrumento un cuestionario, aplicado a ocho estudiantes del programa LEBEM. Las preguntas estaban orientadas a indagar: las características atribuidas a un profesor ideal de matemáticas; lo que el estudiante espera del programa y lo que el programa efectivamente le ofrece; la forma en que se articulan los diferentes subproyectos del LEBEM, las diferencias y/o dificultades observadas entre ellos y el tiempo específico que se les destina. También se interrogó acerca de las fortalezas y debilidades que cada uno reconocía en relación con la Educación Matemática y, en relación con ellas, aspectos indispensables para la formación y que considera que no contempla el LEBEM. El cuestionario fue respondido en forma individual y presencial, destinándole aproximadamente una hora reloj a la tarea. El confrontar las expectativas de los estudiantes, la realidad del programa y los referentes, en relación con el ideal de profesor de matemáticas, podría desembocar, a futuro, en una propuesta de reforma curricular al programa LEBEM (Fig.1).

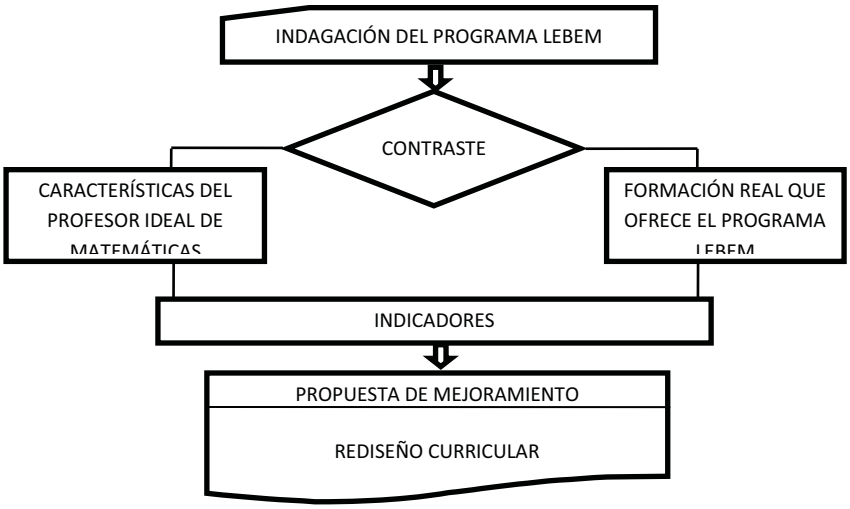


Figura 1: Estructura metodológica de la investigación

Resultados

Los futuros docentes consideran que son características de un profesor ideal de matemáticas: conocer bien la disciplina, tener un buen manejo didáctico, ser un formador integral. También mencionan, en menor medida, ser creativo e innovador, tener intención investigativa y preocuparse por la condición social de sus estudiantes.

Consideran que el programa ofrece una buena formación disciplinar con docentes de alto bagaje conceptual y muy buen manejo didáctico, donde se dan muchas pautas de cómo enseñar matemáticas, favoreciendo la creación de estrategias para llevar al aula; mencionan subproyectos -como tecnología I y II, trabajo de aula y recursos didácticos- que están encaminados a proveer herramientas que permitan a los docentes en formación mejorar las prácticas de aula. Consideran que esto se puede lograr mediante las prácticas pedagógica investigativas si se utilizan como enlace para articular los subproyectos de la componente disciplinar con los de la componente pedagógica y didáctica. Reconocen, además, que han podido entender conceptos como competencias y estándares. En relación a los subproyectos y los docentes que los desarrollan, consideran que metodológicamente algunos profesores le dan el enfoque investigativo y lo comparten desde su experiencia; por lo general, éstos son los que tienen formación en educación matemática o los que vienen trabajando continuamente un subproyecto. Manifiestan poseer

algunas fortalezas en lo disciplinar, lo pedagógico y didáctico, lo investigativo y en la resolución de problemas. Esto lo atribuyen a la buena formación conceptual de los docentes, su buena relación con ellos, su dedicación al estudio, su gusto por la enseñanza, la facilidad para relacionar la Matemática con los contextos, de crear situaciones problema contextualizadas, así como por el buen manejo de teorías de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar por facilitar la transposición didáctica. Sólo un estudiante, en particular, se considera con buena formación en investigación: a través de las prácticas pedagógicas y los subproyectos del saber pedagógico encarados.

Asimismo consideran que hay cuestiones por mejorar en el programa LEBEM, la mayoría relacionadas con los procesos administrativos, entre los que mencionan: la falta de articulación entre los subproyectos, debilidades en la parte investigativa, la repetición en los temas entre los subproyectos tanto de la componente disciplinar como pedagógica y didáctica, mientras que otros que son necesarios e importantes para su formación quedan por fuera, falta de lineamientos en los programas de los subproyectos ya que cada uno es desarrollado según la visión del docente encargado para ese semestre. Mencionan, además, que hay una mala ubicación de los ciclos según los cuales se desarrolla el programa, manifestando que esto puede afectar la claridad de cómo se debe favorecer el conocimiento en los alumnos, cuando no se conjuga el conocimiento disciplinar y el pedagógico y didáctico a través de las prácticas pedagógica investigativa, comentan que “el problema radica en que en la actualidad no se tiene pleno dominio de lo disciplinar y por el otro lado se lee y se reflexiona pero todavía estas reflexiones no convencen para lograr el cambio que se quiere en educación matemática”. Esto lo sustentan argumentando que hay fallas en los procesos evaluativos, donde ya no se hacen parciales “el trabajo es de puros trabajos y exposiciones”. También consideran que se debe hacer una mejor articulación entre los subproyectos de la componente disciplinar entre sí y entre los de didáctica entre sí y entre ellos a través de la práctica pedagógica investigativa.

Para mejorar esto sugieren una reestructuración del plan de estudio, perfeccionamiento en el proceso de selección de los docentes que llegan al programa, el análisis de problemas educativos, la investigación en educación matemática, el uso de las nuevas tecnologías, el intercambio con pares a través de participación en foros, encuentros y congresos de educación matemática y en el trabajo por competencias. Uno considera que “se está cayendo un poco en superficialidades, pues

en apariencia se ve mucha pedagogía que es tomada poco en serio por la mayoría de los estudiantes que sólo la consideran de relleno". Otro dice "aunque siempre se ha hablado de articularlos a partir de la práctica pedagógica investigativa, lo cierto es que esta articulación no se ve, lo que hacen es repetir temáticas entre uno y otro, por ejemplo, subproyectos como la práctica pedagógica investigativa, práctica docente y trabajo de grado que deberían abordarse mancomunadamente no lo hacen, dificultando el proceso".

También consideran que les faltan algunas cuestiones importantes para formarse con ese ideal que describieron, y lo muestran como debilidades: en el trabajo en equipo, en el análisis de ambientes escolares, en la realización de demostraciones, en trabajo de aula con situaciones problema, en el dominio de temas fundamentales de la matemática escolar. Atribuyen las debilidades a: falta de oportunidad para investigar, sus propios vacíos conceptuales, falta de trabajo en equipo, poca fundamentación sobre resolución de problemas, falta de profundidad en los temas de la componente disciplinar en el LEBEM y escasa solución de problemas didácticos en el programa en cuanto a contenidos específicos.

Entre las cuestiones que los futuros docentes consideran indispensables para su formación es analizar si el programa de la carrera que se está desarrollando actualmente es el mismo que se propuso inicialmente para su aprobación ante el Comité Nacional de Acreditación (CNA), si se están dando las cosas como están planeadas, "porque parece que se propuso una cosa y se está desarrollando otra". Esto está relacionado tanto con los contenidos de los subproyectos, como con las prácticas docentes y el trabajo de grado, y lo conveniente de esto en su formación. En sus respuestas introdujeron nuevos interrogantes, tales como: ¿Cuál debe ser el verdadero rol de un docente de matemáticas, tanto en el aula como fuera de ella? ¿Cuál es la labor desempeñada por los docentes asignados para cada subproyecto? ¿Qué competencias matemáticas se deben desarrollar en el futuro docente?

Conclusiones

En relación a lo que requiere un "ideal" de profesor de matemáticas, las expectativas de los estudiantes del programa LEBEM son similares a los acuerdos entre las comunidades de educadores matemáticos, es decir, con conocimientos disciplinares, didáctico y pedagógico,

investigativo, creativo e innovador e interesado en las condiciones sociales de los estudiantes. Este hecho permite inferir que, aunque algunos estudiantes se muestran inconformes con el desarrollo del programa, hay cuestiones básicas de éste que están cumpliendo su función.

Con respecto a lo que los estudiantes sienten que les está aportando el programa para aproximarse a lo que consideran como ideal de profesor de matemáticas, hay tres tópicos puntuales a los que hacen referencia: lo disciplinar, lo didáctico y el trabajo por competencias. Muestran preocupación por el desarrollo de algunos procesos administrativos, en especial la articulación entre los subproyectos, así como el no aprovechamiento del potencial de las prácticas pedagógicas investigativas para articularlos. Esto puede estar generando la preocupación entre los estudiantes en relación con el pensum que se desarrolla, por cuanto se viene presentando repitencia de los temas tanto en las componentes de pedagogía y didáctica, como de la matemática como disciplina (Amaya y Sgreccia, 2008).

Resulta llamativo el carácter de "relleno" que los estudiantes atribuyen a los subproyectos del contenido pedagógico. Tal expresión pareciera ser un término habitual que usan entre ellos, transmitiéndose "de boca en boca", formando parte de la cultura institucional y constituyéndose en ejemplos de "enseñanzas implícitas" de las que nos habla Jackson (1999).

Para finalizar, cabe observar que si los estudiantes no hubiesen señalado aspectos para mejorar en la carrera no hubiese implicado la conclusión de que no son necesarias reflexiones en vías de mejoras, lo cual evidentemente conllevaría una visión simplista y descontextualizada en cuanto a los tiempos actuales de constantes cambios y reformas curriculares. Incluso tal apreciación de "aparente tranquilidad" podría deberse a que se los educó tan acríticos que ni siquiera pueden cuestionar lo que conocen.

De hecho, consideramos que ninguna formación, por buena y/o completa que sea, puede hoy en día formar a un profesional en su totalidad, si pretende ir más allá de una mera enumeración de contenidos. Como dice la teoría de Darwin "Todo está en permanente cambio" y es en este sentido que el conocimiento profesional docente se recrea constantemente, lo que a su vez obliga a estar haciendo constantes reformas para estar acorde con este mundo cambiante.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. y Sgreccia, N. (2008). *La educación matemática desde los formadores en formación*. Actas del Noveno encuentro colombiano de matemática educativa. Valledupar.

Azcárate, P. (2005). *Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos.* Cádiz: Universidad de Cádiz.

Bromme, R. (1994). *Conocimientos profesionales de los profesores. Investigación y experiencias didácticas.* Bielefeld: Universitat Bielefeld.

Cabo, C. (2006). Pensar y pensarse: un deber para mejorar la práctica. *Revista Iberoamericana de Educación 39*(2). 1-8

Celman, S. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Paidós.

CNA (Consejo Nacional de Acreditación). (1998). *Criterios y procedimientos para la acreditación previa de los programas académicos de pregrado y de especialización en educación*. Santa Fé de Bogotá, Colombia.

Flórez, P. (2000). *El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. Investigación en el aula de matemáticas. La tarea docente*. Madrid: Síntesis.

García, G. (2008). Marco de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas. Extraído el 26 de Junio de 2009 desde

http://web.icfes.gov.co/web/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=730

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4*(2), 129-159.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Huesca.

Gómez, P. (2008). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática 10*(1).

ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior). (2009). *Exámenes de calidad de la educación superior en licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas: guía de orientación*. Extraído el 19 de Marzo de 2010 desde http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-09089_recurso_1.pdf

Jackson, P. (1999). *Enseñanzas Implícitas.* Buenos Aires: Amorrortu.

Lupiáñez, J. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática 3*(1), 35-48.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media. ¿Por qué y cómo? *Revista Educación Matemática 17*(2), 35-58.

Sgreccia, N., Amaya, T. y Massa, M. (2009). *Educadores matemáticos. Recuerdos sobre su formación inicial y vivencias actuales en relación a didáctica de la geometría*. Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Puerto Mont.

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.

LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EL AULA: IDEAS FUNDAMENTALES COMO BASE DE UN PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Teresa Carballo Riva Palacio; Ana María Ojeda Salazar
DME, Cinvestav del IPN México
carivpa@yahoo.com.mx; amojeda@cinvestav.mx
Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística
Formación de profesores
Nivel: Básico

Resumen. *El presente documento reporta los resultados de un estudio dirigido realizado con docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de estocásticos en primaria, con base a once sesiones de investigación para estudiar y reconocer los elementos de estocásticos implicados en la propuesta institucional, y algunas maneras en que la docencia los lleva al aula. Advirtiendo las nociones e ideas que sobre probabilidad y azar refieren los profesores al poner en juego los contenidos del eje La predicción y el azar del Plan y programas de estudio (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993) y las sugerencias dadas en guías y libros de texto para su planteamiento y comprensión de sus elementos constitutivos en la propuesta de enseñanza.*

Palabras clave: estocásticos; epistemología; docencia; primaria

Introducción

El estudio partió del reconocimiento del perfil del docente en cuanto a su propuesta de enseñanza de los contenidos programáticos asignados al eje de *La predicción y el azar* de la *propuesta institucional* (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1993) y a los argumentos otorgados a los términos: azar, aleatorio, probabilidad, posibilidad, en los que se hallaron sesgos del pensamiento para referirse a ellos como: indiferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; su enjuiciamiento de las actividades propuestas en este eje temático como de "pasatiempo y recreación", y del alumno como incapaz de estudiar estos contenidos programáticos, entre otros. La información sugirió la necesidad de investigar sobre la experiencia directa del docente en el *aula,* después de las de *estudio dirigido*, en cuanto a cómo interpretan la *propuesta institucional* en acciones deliberadas de su enseñanza en diferentes escuelas del Distrito Federal, en las modalidades de escuela regular pública y de educación especial privada, a fin de confrontar si el perfil de formación les permitía dar respuestas basadas en un pensamiento probabilístico cuando el azar interviene.

Referentes sobre la constitución de la idea de azar

De acuerdo al estudio epistemológico "La génesis de la idea de azar en el niño" (Piaget & Inhelder, 1951), el proceso intelectual del individuo para la constitución de la idea de azar parte de la diferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible; lo imprevisto proviene de la incertidumbre, como incomprensión de lo *posible* a falta de un sistema operatorio que dé cuenta de él. Lo imprevisible resulta de la distinción entre lo observado y lo *necesario*, por medio de operaciones de *clasificación* y *seriación* que permiten describir y ordenar las cualidades y propiedades de lo indeterminado, al advertir las disyunciones concretas que implican lo *posible* de un cierto resultado en relación a otros.

El ordenamiento de estas cualidades se rige por la propiedad de *transitividad*, en la cual el sujeto establece relaciones entre los elementos que tienen diferencias en algún aspecto para ordenar esas diferencias al relacionar un elemento de la serie con el siguiente, y éste con el posterior, de tal manera que se puede deducir la relación entre el primer y el último elemento de esa serie.

Concerniente a la *reciprocidad*, se considera a cada elemento, salvo el primero y el último de una serie ordenada de manera creciente o decreciente, como menor que el anterior y mayor que el siguiente. Esto es, partiendo de las relaciones de *inclusión* y *pertenencia*, relativas a la *clasificación*, "puede comprender que un elemento ***x*** puede estar en cualquiera de los agrupamientos aditivos que conforman un todo **B**, esto es, **B** = **A** + **A´**, aún de manera inversa **A** = **B** – **A´** y **A´** = **B** – **A**, pero para que identifique que **B** está en **A** o en **A´,** y la consecuente indeterminación, es necesario que establezca la relación de *disyunción concreta* entre estos elementos, distinguiendo, así, lo *posible* y lo *necesario*, es decir, comprender que si ***x*** está en **B,** puede estar en **A** o en **A´ "**(Piaget, Inhelder 1951, pp. 217, 218). Se desarrolla, entonces, una *lógica de clases*, porque se reúnen las cualidades de los objetos o de los conjuntos en *clases* o *subclase*s para relacionarlos entre ellos, al combinarlos, según sus diferentes características bajo una *lógica de relaciones*.

Las operaciones lógicas resultan espontáneas cuando se trata de elaborar la comprensión de situaciones determinadas o lógico causales, pero no cuando se trata de situaciones indeterminadas o aleatorias, es decir, el sujeto comprende de manera natural que a una causa corresponde un solo resultado, pero no que a una causa pueden corresponder dos o más posibles resultados y que esos resultados posibles también se pueden clasificar y ordenar por medio de operaciones de *combinatoria*. Los autores señalan que para constituir la idea de lo fortuito o de

mezcla aleatoria es necesaria la reversibilidad de las operaciones lógicas, a fin de contar con lo *necesario* para advertir la irreversibilidad de lo aleatorio, pues dado que las situaciones aleatorias se hacen evidentes en el terreno de lo *real*, la predicción de algún posible resultado requiere la advertencia de la irreversibilidad del azar y del desarrollo de estructuras deductivas que den cuenta de lo *posible*: "con la constitución del azar lógico aritmético, el sujeto puede comprender el azar físico" (Piaget, Inhelder 1951, p. 205) y establecer un juicio de probabilidad. Así, la falta de estructuras lógicas, de conjunciones y disyunciones, primero concretas y luego abstractas, para ordenar los posibles en una relación parte–parte y parte–todo, impide estructurar operaciones de *combinatoria*, pues la ausencia de operaciones lógicas "trae como consecuencia la falta de una síntesis entre el azar y los mecanismos operatorios en forma de un sistema de composición probabilística" (Piaget, Inhelder, 1951, p. 209). Este ordenamiento, primero del enlistado de los posibles resultados, luego de sus relaciones parte-todo, en eventos equiprobables e inequiprobables y, posteriormente, del desarrollo de operaciones de proporcionalidad para identificar esas relaciones con grandes números, es un proceso que puede darse de manera simple en niños pequeños, incluso de edades a 6–12 años. Para ello, según Fischbein (1975), se parte de un pensamiento intuitivo primario que se puede ver asistido por una enseñanza de estocásticos desde los 4 ó 5 años de edad. Esta asistencia toma el papel de andamiaje que tiene la intuición para la constitución de nuevas adquisiciones cognitivas; y asume el papel que juega la enseñanza en el desarrollo de intuiciones secundarias correctas, que apunten hacia un desarrollo del pensamiento de lo probable, "bajo un currículum apropiado al aprendizaje de la probabilidad que considere un sustrato intuitivo primario en la formación de nuevas intuiciones" (Fischbein, 1975, p. 131). Este andamiaje intuitivo secundario deberá constituirse con base en *ideas fundamentales* que, según Heitele (1975), orienten su formación bajo un currículo en espiral, a fin de desarrollar y superar, progresivamente, intuiciones primarias basadas en explicaciones "mágicas" o relativas a la "suerte", y que consideren situaciones de análisis probabilístico en la enseñanza para advertir que la probabilidad se mide en el intervalo 0-1, con base en el inventario del *espacio muestral* (formalmente, el σ- *campo* de probabilidades) e identificando las relaciones *aditivas* o *multiplicativas* entre sus elementos, con base en el desarrollo de operaciones de *combinatoria* para posibilitar el ordenamiento cuantitativo de los posibles resultados en sus relaciones de *equidistribución*. La constitución de la idea de *independencia* entre los eventos, la idea de *muestra*, de *variable estocástica* y su *simetría* estocástica en relación a la *ley de los grandes números*, con

base en un modelo de *urnas* y *simulación* "que acerque al sujeto a la comprensión de una situación aleatoria específica" (Heitele, 1975, pp. 198-199). La puesta en el aula de este currículum en espiral requiere de un profesor con una formación sólida en estocásticos. Al respecto, Steinbring (1991) analiza el papel de su enseñanza en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el *aula*; afirma que la constitución progresiva del conocimiento estocástico requiere de la observancia del *triángulo epistemológico* (ver *Figura 1*), es decir, la constitución del concepto resulta de un balance en la relación entre los tres vértices, por ejemplo, al observar sistemáticamente la frecuencia relativa de una secuencia de eventos, como la manera natural del pensamiento de registrar los datos, luego, de organizar los resultados en una relación parte–parte y parte–todo, al asignarle una probabilidad y tomar conciencia de la experiencia al diferenciar la *variable aleatoria* y las frecuencias relativas de sus valores posibles.

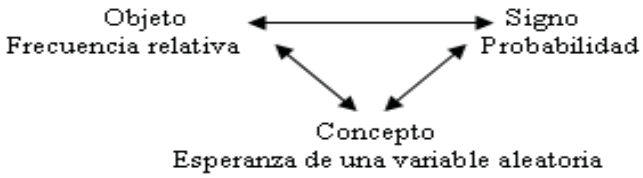


Figura 1. Forma relacional en la constitución del conocimiento, en particular, del concepto de probabilidad, según Steinbring (1991, p. 507).

Según el autor, la comprensión social común y el desarrollo del conocimiento requieren la estructura [de] "retroalimentación interactiva explícita para verificar, mejorar y modificar la comprensión que uno tiene de los conceptos matemáticos" (Steinbring, 1991, p. 519).

Proceso de investigación para el estudio

Con carácter cualitativo (Eisner, 1998, p. 52), el objetivo de la investigación fue identificar los elementos de probabilidad y de azar que requiere la docencia para orientar su enseñanza hacia la formación de modelos explicativos sobre "el pensamiento de lo posible" (Piaget, Inhelder, 1951). El estudio estuvo constituido en tres fases: la primera, documental, examinó la *propuesta institucional* (SEP, 1993); la segunda, la que ocupa la redacción de este documento, consistió en indagaciones en *estudio dirigido* a docentes sobre estrategias y experiencias de enseñanza de

estocásticos en primaria, con base a once sesiones de investigación destinadas a estudiar y a reconocer los elementos de estocásticos implicados en la *propuesta institucional* (Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. 1997; 2000 Matemáticas. Tercero y Cuarto grado. México: SEP), y algunas de las maneras en que la docencia los lleva al *aula*. La tercera fase tuvo en foco la *enseñanza* en el *aula* de contenidos de estocásticos planteados en los libros de texto respectivos a cada grado escolar Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. (1997; 2000). Matemáticas. Tercer y Cuarto grado. México: SEP, en condiciones reales de enseñanza.

Espacios metodológicos

La función metodológica del *estudio dirigido* se basó en la interacción entre investigador y docente, a fin de estudiar cómo se ponen en juego las ideas de azar y de probabilidad en el *aula* del segundo ciclo escolar primario y observar, de manera directa, los cambios en las ideas de probabilidad y de azar manifestadas tanto en estas sesiones, como en las de su enseñanza en el *aula.* Esta interacción permitió precisar lo *necesario* para comprender progresivamente los elementos de formación ausentes al interpretar y poner en juego las lecciones del libro de texto para su enseñanza. Las carencias en la formación incidieron en el diseño, estructura y número de estas sesiones. Los espacios de interacción indagatoria se realizaron en sesiones de Consejo Técnico en tres escuelas primarias regulares oficiales y una escuela de educación especial privada, así como en un curso de verano realizado en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Criterios de análisis

La perspectiva teórica permitió examinar la *propuesta institucional* y la información recopilada en sesiones de *aula* y de *estudio dirigido*, bajo cinco criterios de análisis, a saber: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975); la distinción de éstas de otros conceptos matemáticos, tales como el de número y el producto cartesiano; recursos semióticos gráficos para organizar y tratar los datos, como símbolos matemáticos, figuras, diagramas y gráficas, lengua natural escrita (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991); términos empleados en referencia a estocásticos (Steinbring,

1991); y la estrategia de presentación en *la propuesta institucional* o de enseñanza en *estudio dirigido* y *aula* (Heitele, 1975).

Instrumentos utilizados

Con base en un enfoque cualitativo (Eisner, 1998), se acometió la tarea del acopio de datos mediante guiones de observación. La información recopilada en cada uno de los escenarios fue producto de guiones específicos, de acuerdo a lo indicado por los elementos teóricos en la sección *2*:

- Guión, según los criterios de análisis (ver 3.2), para examinar la *propuesta institucional*.
- Guión para el planteamiento y desarrollo del *estudio dirigido* a docentes, regido por los resultados del análisis de la *propuesta institucional*.
- Guión para la indagación en el *aula*, dictado por los resultados de sesiones de *estudio dirigido* y del análisis del eje *La predicción y el azar*, en los programas de estudio y en las lecciones correspondientes de los libros de texto (Carballo, 2004).

Técnicas. En todas las sesiones de *interacción indagatoria en el aula* y de *estudio dirigido*, se recurrió a la video grabación para el registro de datos, ya que esta técnica permite sus revisiones recurrentes y la transcripción de pasajes específicos video grabados proporcionó anclajes para el análisis de la información vertida en diálogos y sus referentes (Carballo, 2004).

La probabilidad y el azar en sesiones de estudio dirigido

Se constató una indiferenciación entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real*, ya que no se distinguió entre el azar físico y el lógico matemático (Piaget, Inhelder, 1951). Fueron recurrentes efectos de recencia (Fischbein, 1975a) y argumentos referidos a la “suerte”, “magia”, “adivinanza”, “lo que no se sabe”, “lo incierto”, “inseguro”, que expresan “la indiferenciación entre la necesidad deductiva y la posibilidad” (Piaget, Inhelder, 1951, p.200). Esta indiferenciación orientó hacia una propensión al uso del número para cálculos, pero sin advertir la necesidad de describir ni enlistar el espacio muestra correspondiente, con base en relaciones de combinatoria (Heitele, 1975), como es el caso para el lanzamiento de dos dados ordinarios en el que reiteradamente se presentaron juicios de

probabilidad basados únicamente en uniones aditivas, con la advertencia de doce posibles resultados y no de treinta y seis.

La docencia y la idea de azar

En este escenario fueron motivo de estudio las revelaciones sobre las idea de *azar* y de probabilidad dadas por los docentes. Se plantearon diferentes situaciones para identificar argumentaciones que aludieran al *azar*; por ejemplo, explicaciones que implicaran el uso de términos como "posibilidad" y "probable" o "no probable" ó "algo que no es seguro", con "algo incierto", pero ni en un caso ni en otro se pudo evidenciar una distinción clara entre lo *necesario* y lo *posible*. El uso de términos o expresiones como "inseguro", "no se puede controlar" o "incierto", reflejan la advertencia de cierta indeterminación, pero no se podría asegurar la comprensión de la irreversibilidad en la ruptura del orden de una situación aleatoria, sino sólo de lo imprevisto en los resultados. La distinción entre lo *posible*, lo *necesario* y lo *real* no se evidencia, debido a la determinación operatoria con lo *real*, dado "que no hay diferenciación entre la noción de probabilidad y el simple conocimiento de lo fortuito o indeterminable" (Piaget, 1982, p. 11).

La docencia y las ideas fundamentales de estocásticos: algunas consideraciones

La revisión de la primera lección del eje *La predicción y el azar* para tercer grado, con profesores de escuela regular, evidenció la interpretación que se hace de los contenidos planteados en ella, advirtiéndose la no diferenciación entre la situación determinista, de la indeterminista; la dificultad para clasificar y ordenar las diferencias entre los posibles resultados al lanzar un dado ordinario y al lanzar dos dados de manera simultánea; confundir el algoritmo planteado al final de esta lección como la parte que "formaliza" ambas situaciones, y no como una confrontación con la idea de azar. El uso indistinto del término *adivina* provocó confusión al referirlo a una situación de azar, pues al interpretarlo no se logró distinguir entre "magia", "suerte" y "azar". Se examinó el espacio muestra asociado al lanzamiento de dos dados (propuesto en la segunda parte de esta lección), con el fin de que identificaran, para distintos eventos, las proporciones entre sus posibles resultados y advirtieran su distribución, con base en el trazo del diagrama de árbol para identificar

el espacio muestra correspondiente, pero como se observa en la *Figura 2*, los profesores se vieron imposibilitados a trazarlo.

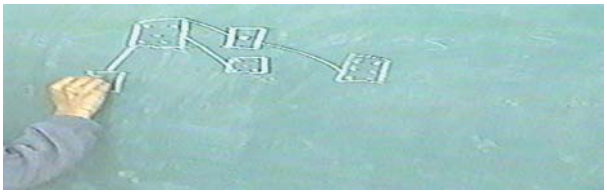


Figura 2. Trazo del diagrama de árbol para obtener el total de posibles, al lanzar dos dados ordinarios.

El nivel de complejidad manifestado se debió a que no están constituidas nociones de *transitividad* que ordenen las relaciones de los elementos de los conjuntos en juego, para que con base en estos *principios organizativos* se constituyan operaciones de *combinatoria* para identificar el total de posibles resultados. Esta manifestación incipiente determina la imposibilidad para identificar la *idea de medida de probabilidad*, *espacio muestra* y *suma de probabilidades*. Para los arreglos resultantes de la organización de los posibles resultados se identificó la equidistribución de cada par posible, pero al distinguir el máximo de probabilidad para la suma siete, se evidenciaron algunas dificultades respecto a la comprensión de la equidistribución de los posibles resultados, pues la distribución simétrica de las probabilidades de las sumas se confundió con la equiprobabilidad de las distintas parejas. A partir del reconocimiento del espacio muestra, de identificar las combinaciones posibles mediante el establecimiento de relaciones multiplicativas entre los espacios muestra respectivos, y de la probabilidad correspondiente a cada combinación para constatar que la suma de las probabilidades es igual a 1, al lanzar dos dados, se les propuso otra situación, como el cálculo de probabilidad para obtener “a lo más dos soles” en diez volados. Algunas maneras para dar respuesta fueron: establecer la fracción 2/10 como la probabilidad de dos “soles” en diez volados, al poner en juego relaciones aditivas y no multiplicativas Otro docente aludió a la simetría de los eventos para señalar que era la misma probabilidad de ocurrencia para “soles” o para “águilas”, pues correspondía ½ para el “águila” y ½ para el “sol”, pero no lo relacionó con la probabilidad de obtener dos soles en dos volados. Finalmente, otro docente logró la identificación de los posibles resultados al construir el diagrama de árbol correspondiente, pero sólo lo trazó para 136 posibilidades, pues advirtió el comportamiento de la situación en juego, determinando la probabilidad de obtener dos soles en diez volados, con base en un cálculo

abstracto. Sin embargo, pasó inadvertido lo incompleto del espacio muestra, pues los eventos de "ninguna águila" y "ningún sol" no se consideraron.

Resultados del estudio dirigido

Se constató que los aspectos de diferenciación entre situaciones deterministas y aleatorias, de lo *más probable*, *menos probable* e *igualmente probable*, con situaciones inequiprobables y equiprobables, se manifiestan de manera insuficiente, dadas las experiencias propuestas para avizorar la relación entre casos favorables y el total de casos posibles, pues los elementos combinatorios y las nociones de proporcionalidad utilizadas para esta advertencia no están constituidas ni las relaciones de proporcionalidad se identifican, por lo que los "juicios de probabilidad sólo están basados en relaciones aditivas y no multiplicativas" (Piaget, Inhelder, 1951, p. 216). La equivalencia entre fracciones fue una dificultad para decidir de cuál urna era más probable extraer una canica, y favoreció la expresión decimal y el uso de porcentajes para interpretar las proporciones de canicas en cada urna. Se manifestó la inconsistencia en la relación entre los tres vértices del triángulo epistemológico del conocimiento, en particular la desvinculación entre *objeto* y *signo* (Steinbring, 1991), dando prioridad al *signo*, sin la respectiva comprensión del *objeto*, al no tener constituidas *ideas fundamentales* como guías en la constitución de la idea de azar, pues se carece de sistemas operatorios que conduzcan a la formación de modelos explicativos relativos al azar desde lo deducible, es decir, con base en su comprensión probabilística (Heitele, 1975). Así mismo, se manifestaron efectos de *recencia negativa* o *positiva* al efectuar extracciones sin reemplazo y anticipar el siguiente resultado (Fischbein, 1975, p. 123), sin poder consolidar, al menos, un andamiaje intuitivo secundario que orientara hacia la constitución de un pensamiento probabilístico, basado en la formación de *ideas fundamentales* (Heitele, 1975) para su enseñanza.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P., Castrejón, J. (1997; 2000). Matemáticas. Tercer grado.

México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollas, P. (1994; 1997). Matemáticas. Cuarto grado. México: SEP.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la educación primaria: Determinismo y azar*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, IPN.

Eisner, E. (1998). *El ojo Ilustrado.* Barcelona: Paidós.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205. Netherlands: Reidel

Piaget, J. Inhelder, B. (1951). *La Génese de l´idée de Hasard Chez l'Enfant*. Paris : PUF

Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire*. Vol. 2. Paris: PUF

SEP (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación Primaria*. México.

Steinbring, H. (1991). *The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social*

Epistemology of Mathematical Knowledge. Educational Studies in Mathematics 22.

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE REFERENCIA, PLANEADOS E IMPLEMENTADOS DE OPTIMIZACIÓN EN UN CURSO DE CÁLCULO PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Ramiro Ávila Godoy, J. Alvaro Encinas Bringas, Ruth E. Rivera Castellón, Víctor Amaro Hernández
Universidad de Sonora México
Universidad Autónoma de Baja California
aencinasb1834@gmail.com, aencinasb@uabc.mx
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta parte de una investigación sobre la comprensión y competencia (Font, 2007; Godino, 2002) que estudiantes de ingeniería muestran al abordar problemas de optimización (Malaspina, 2007). Se basa en la Teoría Ontosemiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). El objetivo del presente trabajo es estudiar la relación entre los significados institucionales de referencia, planeados e implementados del objeto matemático optimización en un curso de cálculo para ingeniería. Para ello se analizó (Font y Godino, 2006) el libro de texto (Leithold, 1998) utilizado por un docente. Este profesor, fue interrogado sobre la planeación de su clase, mediante un cuestionario y entrevista aclaratoria posterior. Finalmente, se grabó en el aula, su actividad como docente. El estudio mostró una fuerte influencia del texto en la planeación y ejecución de la práctica del profesor.*
Palabras clave: significados institucionales, significados de referencia, significados implementados

Introducción

El presente documento refiere sobre una parte de la investigación denominada “Comprensión y competencia sobre optimización en estudiantes de ingeniería”. En ella se pretende describir y explicar la relación que existe entre la comprensión que tienen los alumnos de los conceptos y procedimientos que se utilizan en la resolución de problemas (rutinarios) de optimización y su competencia (eficacia) en el abordaje y resolución de problemas más complejos (no rutinarios) del mismo tema.

El sustento de la investigación es la Teoría Ontológica Semiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; y Godino, Batanero y Font, 2007). Este enfoque pretende explicar la relación del conocimiento matemático con su instrucción. Considera que un Objeto Matemático (OM) (Institucional o personal) es un emergente del sistema de prácticas (sociales o personales) asociadas a un campo de problemas. El Significado Institucional (SI) o el Significado Personal (SP) de un OM corresponde al sistema de prácticas discursivas u

operatorias asociadas al campo de problemas. El SI se puede descomponer en de referencia, planeado e implementado. Mientras los SP, en globales, declarados y logrados.

Los SI de referencia, se pueden encontrar en los documentos curriculares y en libros de texto y en sujetos tales como el profesor, el coordinador de área, autoridades, etc. El SI planeado es lo pretendido por el profesor para su clase y el SI implementado es lo realmente efectuado en ella.

Los OM se clasifican en: Lenguaje, Problemas, Conceptos, Procedimientos, Proposiciones y Argumentos. (Godino y Batanero, 1994; Godino et al.2007).

Godino, Contreras y Font (2006) han construido nociones teóricas para el análisis del proceso de la instrucción matemática, modelándola en base a seis configuraciones y trayectorias: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional. La noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio busca valorar las distintas trayectorias implementadas del mismo en contraste con un proceso potencial.

En este trabajo se estudia la relación que existe entre los significados institucionales de referencia en un libro de texto, planeados e implementados por un profesor relativos al objeto matemático *optimización* en un curso de Cálculo para estudiantes de ingeniería**.**

Materiales y métodos

El método utilizado en la toma de datos para alcanzar el objetivo planteado, fue primeramente seleccionar a un profesor de Cálculo representativo de las prácticas docentes en matemáticas en la Facultad de Ingeniería Unidad Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), y que estuviera de acuerdo en participar en la investigación. El profesor H, aceptó y contestó un cuestionario previamente elaborado sobre su actividad de planeación con preguntas tanto cerradas como abiertas y posteriormente se le entrevistó para la aclaración de dudas sobre algunas de sus respuestas (SI planeados). El profesor H utiliza como libro de texto *El Cálculo* de Louis Leithold (1998), el cual fue sometido a un análisis de tipo semiótico (Font y Godino, 2006) que corresponde a un (SI) de referencia. La actividad instruccional en el aula del tema de optimización fue grabada en video y transcrita para su análisis (SI implementados). Posteriormente se compararon los tres tipos de significados.

El cuestionario

El propósito de este cuestionario es el de identificar los significados pretendidos o planeados por el profesor H para su clase de optimización. Consta de seis partes con un total de 50 reactivos. Hay preguntas de opción SI o No, solicitando que toda respuesta fuera argumentada. Otras, son de respuesta abierta. Los componentes son:

- Datos del profesor: preguntas que indagan sobre la escolaridad y experiencia docente.
- Planeación de la clase: cuestionamientos sobre la planeación semestral, temática y diaria de la clase, y sobre los elementos en los que se basan sus decisiones.
- El contenido de la materia: Se pretende conocer la concepción del docente sobre el contenido, para de allí elaborar posibles explicaciones en sus decisiones de planeación.
- El libro de texto: las preguntas buscan encontrar el motivo de la selección del autor tanto de temas como problemas o ejercicios.
- La enseñanza y aprendizaje de la matemática: El objetivo de las preguntas es hurgar en los significados del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje (creencias y concepciones).

El libro de texto

El libro de texto utilizado por el profesor H se denomina *El Cálculo* de Louis Leithold, séptima edición, 1998, conocido por EC7. Se revisó su contenido genérico, su prólogo, la secuencia de temas y su discurso explicativo. Se analizaron las secciones correspondientes a *optimización* mediante la tipología de la teoría onto-semiótica de los objetos matemáticos.

2.3 La clase

Se grabaron en video las sesiones de clase en el aula del profesor H y sus 35 alumnos sobre el tema de optimización. Posteriormente, se transcribió la grabación y se analizó considerándose la noción de trayectoria epistémica, docente y la idoneidad del proceso. Finalmente se compararon los datos obtenidos de las tres fuentes.

Resultados

Respuestas al cuestionario

El profesor H tiene 34 años de experiencia docente y ha impartido Cálculo durante 30 semestres. Cuenta con una licenciatura y una maestría en ingeniería. Es profesor de tiempo completo. Planea su clase semestralmente basándose en la carta descriptiva del curso, en el libro de texto y en preparaciones de clases anteriores. En menor medida, aportes de colegas, academia y coordinador de área. Usa la computadora e internet para planear su clase y darle seguimiento. La percepción que tiene el profesor es que finalmente él decide que y como impartirá su clase.

Las respuestas al cuestionario fueron organizadas en términos de los seis tipos de objetos matemáticos mencionados anteriormente. Por razones de espacio sólo se transcriben algunas respuestas particularmente en *situaciones problemáticas*.

P: ¿Cómo selecciona del texto los ejemplos de problemas a usar en clase?

R: "Pues los que parezcan mas accesibles al estudiante, que los puedan entender, que los puedan visualizar, para que mas fácil se le quede grabado…la aplicación del conocimiento"

P: Los problemas, ya sea ilustrativos o comunes que presenta el libro, ¿Son los adecuados?

R: Si, yo creo que es una de las fortalezas del libro ¿no? los problemas propuestos que son para que el alumno los desarrolle… son una muy buena cantidad, y diversos… es lo mas importante del libro…

P: Respecto al manejo de teoremas y argumentos, ¿acostumbra a demostrar los teoremas propuestos por Leithold?

R: No, las demostraciones las evito porque el trabajo está orientado hacia lo que es el trabajo de ingeniería…entonces lo que más me interesa a mi, yo como soy ingeniero es el que los muchachos entiendan el concepto y sobre todo entiendan como lo van a aplicar en problemas de la vida real…

P: ¿Por qué seleccionó el libro de Leithold respecto a los otros textos?

R: Por qué tiene una muy buena variedad de problemas… y están seleccionados de tal manera que van aumentando el grado de dificultad de los problemas… lo que es bueno para el estudiante

P. ¿Para Usted qué son las matemáticas?

R: Son herramientas que se utilizan para ayudar a la solución de problemas de la vida real….

El libro de texto

"Las explicaciones, los abundantes ejemplos desarrollados así como la gran variedad de ejercicios, continúan siendo las características distintivas del texto". Leithold escribe que esto es lo que lo

distingue respecto a otros textos. Afirma que entre la sexta y la presente edición ha habido como nunca cambios tanto en la irrupción en el uso de la tecnología como la aparición del movimiento de la reforma del cálculo. Para esta última edición, se guía con siete puntos, se rescatan tres de ellos: "Punto 1. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, *no* para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas teóricos." Punto 2. Las definiciones y teoremas deben establecerse formalmente, *no* informalmente. Punto 6. Debe darse importancia a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida real.

En el punto uno, el autor declara que las matemáticas corresponden a lo analítico-algebraico. En el dos, define lo que para él es verdaderamente importante: definiciones y teoremas y el formalismo. En el sexto asegura que en su libro se da importancia a la modelación matemática de la vida real, aunque a lo largo del texto no se aprecia haberlo logrado.

Después de revisar el prólogo, en la primera página del texto y que marca el inicio del tema de funciones, le dedica el autor un párrafo de 10 renglones para presentar el concepto de función, no se presenta ninguna situación problemática introductoria pasando directamente a su definición. Mostrando con ello su interés por lo estrictamente matemático.

Al inicio del tema de máximos y mínimos, sección 3.1 el autor hace una introducción de un párrafo de cinco renglones antes de entrar a la definición del concepto mostrando la secuencia que se observa a lo largo de todo el texto: Definición del concepto→ teorema →demostración →ejemplo ilustrativo →ejemplo.

La sección 3.2 estudia las aplicaciones de máximos y mínimos a problemas con enunciado. Al inicio L. Leithold escribe "Ahora se aplicará el teorema del valor extremo a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado". El autor escribe que un teorema se emplea para resolver ejemplos de aplicaciones en este caso de extremos absolutos.

Los llamados *ejemplos ilustrativos* son realizados en un tono descriptivo mientras que los *ejemplos* son lo que normalmente se llaman ejercicios.

En las secciones correspondientes a optimización en el texto se encontraron los siguientes tipos de problemas: Sección 3.1: Problemas en un ambiente algebraico- gráfico en contexto matemático sobre determinación de extremos absolutos y relativos. Sección 3.2: Problemas en contextos

evocados de aplicación extra-matemáticos sobre determinación de extremos absolutos: problemas de volumen de cuerpos, distancias o áreas mínimas y ganancias.

Sección 3.2 y final del capítulo: Se encuentran algunos problemas propuestos de contexto evocado de tipo de consolidación-más complejos que los problemas de aplicación.

Por otra parte no se encontró algún problema escolar de contexto evocado de introducción y tampoco se detectó ningún problema en contexto real.

Ejecución de la práctica docente

De la trascripción de la clase de Cálculo sobre extremos, se puede observar un desempeño centrado en la actuación del docente, no encontrándose a lo largo de todas las sesiones de clase de optimización ninguna situación problemática evocada introductoria ni de contexto real sobre el tema.

En la siguiente tabla 1 se concentra una descripción de la clase organizada por la clasificación de los objetos matemáticos propuesta en Godino et al. (2007) particularmente en lo referente a lo epistémico, correspondiente al grado de representatividad de los SI implementados, respecto a los de referencia.

Componentes	Descriptores
Sits-problema	• Predominio de problemas evocados de aplicación • Ninguno de problemas de introducción • Ninguno de problemas de consolidación o de la vida real
Lenguaje	• Uso de expresiones verbales, graficas, simbólicas • Escasa actividad de traducción y conversión entre ellos • Nivel adecuado de lenguaje al estudiante
Definiciones Proposiciones Procedimientos	• Las definiciones y procedimientos no son claramente enunciados y precisados
Argumentos	• Escaso uso de explicaciones y comprobaciones • No demuestra teoremas, solo ilustra algunos

Tabla 1. Componente epistémico de la clase.

Discusión

El profesor planea e imparte su clase primordialmente con la carta descriptiva de la materia y su libro de texto. Su práctica docente es de corte formal, primeramente define el concepto y lo ilustra, no creyendo necesario inducirlo mediante una situación-problemática. En este aspecto su actividad docente sigue un orden semejante al libro de texto. Posteriormente presenta teoremas pero sin demostrarlos, argumentando que son estudiantes de ingeniería y que lo importante es resolver problemas de la vida real. Pero en la ejecución de la clase estos problemas de contexto real no son considerados.

En su planeación y ejecución selecciona los ejercicios "sencillos" o "fáciles" pretendiendo con ello simplificar la actividad de enseñanza.

Los problemas con enunciado en lenguaje natural, solamente son leídos y trata de enseñarles a traducir.

El autor del libro de texto, en el prólogo menciona en diversos puntos lo que para él son las matemáticas: definiciones y teoremas. Siendo congruente le asigna gran importancia a la presentación de teoremas y su demostración. La representación analítica es la única valedera cuando lo declara en este mismo prólogo. Las otras representaciones graficas y numéricas están a su creencia en un status inferior a lo analítico. Su secuencia de enseñanza está basada en la cadena concepto-teorema-ejemplo prestando escasa atención a la problemática real lo cual obedece a su concepción formalista de la matemática. El profesor planea y desarrolla en clase un proceso similar. El objetivo del autor del texto es aplicar teoremas en resolución de problemas, misma actitud del profesor.

Al contrastar lo encontrado en el libro de texto con la planeación y ejecución de la clase se puede observar la fuerte influencia de la concepción sobre la matemática y su forma de enseñanza sobre el profesor usuario de ese libro. Particularmente en la secuencia de enseñanza del contenido, en la asignación relativa de importancia de problemas, conceptos, teoremas, procedimientos y el status inferior del trabajo gráfico y numérico.

La tendencia mundial a enseñar considerando problemas de la vida real no es fomentada por las prácticas del profesor ni por el libro de texto (OECD, 2003; Rico, 2006; Font, 2007).

Reflexiones

Para este ejercicio se ha exhibido la influencia determinante del libro de texto en la planeación y en la ejecución de la práctica docente de un profesor de cálculo de la Facultad de Ingeniería de la UABC. Esto sugiere dos recomendaciones a esta institución escolar en la pretensión de mejorar los resultados del aprendizaje de las matemáticas en sus estudiantes:

- Por una parte la selección y elaboración de materiales consistentes con las tendencias de la enseñanza centradas en la resolución de problemas y,
- Por otra, la formación, capacitación y actualización de sus profesores.

Referencias bibliográficas

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 419-434.

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Godino, J.D. (2002). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. *La Matematica e la sua didattica,* 4,434-450. Versión en español recuperada en abril de 2007 de URL:http//www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. R*echerches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to researh in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education,*39 (1-2),127-135.Versión ampliada en español, recuperado el 9 de marzo de 2008 de http//www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J.D, Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 26(1),39-88.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Mata, F., Trad.) México, D.F., México: Oxford University Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (3), 365- 399.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge And Skills*. Paris: OECD.

Rico, L. (2006).Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación,* extraordinario, 275-294.

LA RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior
Formación de profesores

Resumen. *Se trabajó sobre una propuesta de investigación y experimentación que se está llevando a cabo en la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la Universidad Tecnológica nacional (UTN), enmarcado en un Proyecto sobre Resolución de Problemas en las asignaturas de Cálculo. La población estuvo formada por 4 grupos de 30 alumnos aproximadamente, pertenecientes a las cohortes 2005, 2006, 2007 y 2008, de la carrera Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM).*
Con el actual trabajo se pretende contribuir al desarrollo de una línea de investigación orientada hacia la elaboración de un cuerpo coherente de conocimientos, una de cuyas prioridades es conseguir en nuestros alumnos un aprendizaje significativo basado en un cambio metodológico y de actitudes.
Palabras clave: resolución de problemas, aprendizaje significativo, estrategias de resolución, heurística

Introducción

La resolución de problemas constituye una de las actividades más frecuentes en los contextos educativos científicos desde el inicio de la escolarización. Esto es lógico si se tiene presente que la Ciencia, como actividad humana, está dirigida fundamentalmente a resolver problemas. Estas circunstancias, también, se reflejan en el interés existente en el campo de la investigación educativa por esta actividad escolar. En este sentido, se han realizado en los últimos veinte años un gran número de trabajos sobre el tema con distintas orientaciones. Por un lado, se han descrito modelos sobre cómo los sujetos resuelven problemas, denominados: estudios experto-novato (López-Rupérez, 1991 y Glaser, 1992). Por otro, se han desarrollado propuestas metodológicas, diseñadas explícitamente para enseñar a los alumnos a resolver problemas, con la característica común de haber evaluado su nivel de eficacia dentro del aula (Caillot y Dumas, 1987; Selveratnam, 1990; Gil y Martínez Torregrosa, 1983; Taconis, Ferguson-Hessler y Broekkamp, 2001).

Esta última orientación constituye el encuadre de nuestra línea de investigación sobre la Resolución de problemas, si bien ambas perspectivas tienen elementos en común y se nutren mutuamente.

La instrumentación en el contexto áulico, que tiene lugar a partir de los años 80, se basa fundamentalmente en las etapas del proceso de resolución de problemas de George Polya (1945 y 1966). El National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) recomendó, en esos momentos, que la resolución de problemas debía ser el centro de la atención de las matemáticas escolares. En algunos países estas recomendaciones tuvieron repercusiones favorables; tal es el caso de Cuba dónde actualmente las Licenciaturas en Matemática que se dictan en Universidades Pedagógicas de ese país tienen implementada una disciplina de Resolución de problemas que se desarrolla a lo largo de los cinco años de la carrera y que se propone integrar los conocimientos y habilidades que en cada año académico van adquiriendo los estudiantes en las restantes asignaturas del currículo y, además, toma en cuanta los de años anteriores. (Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaíza, 1998)

La situación en nuestro país es bastante diferente. Quienes trabajamos en investigación en Didáctica de la Matemática todavía seguimos indagando sobre el problema inicial que habitualmente planteamos a través de tres preguntas:

¿Están los estudiantes preparados para enfrentar los retos del futuro?,

¿Son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas con eficacia?,

¿Tienen la capacidad de continuar aprendiendo a lo largo de sus vidas?.

Justificación

Nuestros trabajos previos con estudiantes de la LEM (Milevicich y Lois, 2008 y 2009) nos han permitido observar algunas características de la práctica profesional de estos docentes. En ese sentido, hemos categorizado el modo en que se aborda la resolución de problemas del siguiente modo: algunos docentes inician el estudio de determinado contenido a través de la resolución de algún problema como modo de justificar la necesidad de estudiar tal contenido matemático; otros, lo ubican como un apartado al final de la unidad y frecuentemente, por razones de escasez de tiempo, no lo abordan; otros, presentan los contenidos teóricos en primer lugar y luego un problema a modo de aplicación, con el propósito de resolverlo grupalmente, y generalmente, utilizando alguna heurística propuesta por el profesor; finalmente, un último grupo, dónde a partir de la propuesta de un conjunto de problemas, se promueve la discusión, conjeturación, uso de

ejemplos y contraejemplos y propuesta de diversos métodos para encontrar la solución. Por cierto, este último grupo es muy escaso y, a partir de los resultados de nuestros estudios, nunca representa más de un 5 % de los docentes.

Sobre las base de las ideas de Schoenfeld (1989) y Romberg (1992) consideramos importante propiciar una metodología dónde los alumnos se pudieran desenvolver en un medio similar al de los matemáticos cuando trabajan, ambiente propicio para que desarrollen estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. Desde esta perspectiva, aprender matemáticas está asociado a la identificación, selección, uso de estrategias y habilidades, por parte del alumno, utilizadas por los matemáticos al resolver problemas.

Desarrollo

Características de la investigación: Se trabajó sobre una propuesta de investigación y experimentación que se está llevando a cabo en la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la UTN, enmarcado en un Proyecto sobre Resolución de Problemas en las asignaturas de Cálculo.

Metodología: Investigación-acción pedagógica aplicada a la resolución de problemas

Población: Formada por 4 grupos de 30 alumnos aproximadamente, pertenecientes a las cohortes 2005, 2006, 2007 y 2008, de la LEM de la UTN

Propósitos: Con el actual trabajo se pretende contribuir al desarrollo de una línea de investigación orientada hacia la elaboración de un cuerpo coherente de conocimientos enmarcados en la Didáctica de la Matemática, una de cuyas prioridades es conseguir en nuestros alumnos un aprendizaje significativo basado en un cambio metodológico y de actitudes.

En ese contexto, se pretende que los estudiantes de la LEM comiencen a construir un conocimiento profesional fundamentado a partir de su propia práctica.

Etapas de la experiencia

1. Exploración inicial sobre la forma en que los alumnos de la LEM resuelven problemas a partir del planteo de situaciones vinculadas a conceptos propios de la escuela secundaria.

2. Análisis de la filosofía PISA (Proyecto PISA 2003, 2005) y de varios problemas planteados en la evaluación sobre Matemática
3. Experimentación en el aula.
4. Resolución de problemas referidos a las unidades didácticas de Análisis Real (números reales, aplicaciones de la derivada, aplicaciones de la integral, sucesiones, series numéricas, series de potencias).
5. Propuesta, solución y presentación de un problema integrador.

La experimentación en el aula estuvo asociada a la resolución de problemas referidos a las unidades didácticas enumeradas previamente. Nos hemos basado en la propuesta Krulik y Rudnick (1982), para lo cual tuvimos en cuenta los siguientes aspectos:

a) Crear un ambiente apropiado para la resolución de problemas. Los problemas referidos a cálculo diferencial e integral resultan, al principio, bastante engorrosos a los alumnos de la LEM. Si bien todos ellos son profesores de Matemática, les resulta difícil reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio. Parafraseando a Dolores, es llamativo que esto ocurra cuando, justamente, en los problemas de este tipo se encuentra la esencia del concepto de derivada. (Dolores, 1999). El mismo tipo de dificultades aparecen al abordar problemas referidos al cambio total y asociados a procesos de integración (Milevicich y Lois, 2007).

b) Ofrecer un repertorio amplio y variado de problemas que generen una práctica intensiva y extensiva, además de que representen un reto para los aprendices. Se trabajó sobre la resolución de problemas de cálculo diferencial e integral, sucesiones y series (numéricas y de potencias). (Stewart, 2003 y 2007); Larson, Edwards y Hostetler (2005); Rivera Figueroa (2006)

c) Enseñar a los alumnos a desarrollar estrategias que les permitan leer los problemas en forma analítica. Se trabajó sobre la propuesta de Resolución de problemas de Polya (1995) En primer lugar se hizo hincapié en que los alumnos se apropiaran de la filosofía de la resolución de problemas, en términos de Polya, y lograran identificar los tres componentes fundamentales de un problema: estar consciente de la dificultad, tener deseos de resolverlo (aquello que habitualmente denominamos motivación intrínseca), la inexistencia de un camino inmediato para resolverlo.

Luego, en el mismo sentido, debieron atender preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad:

- ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?
- Distinguir las diversas partes de la condición.
- Encontrar la relación entre los datos y la incógnita.
- Tratar de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- ¿Puede deducir de los datos algún elemento útil? ¿Podría pensar en otros datos que le permitieses determinar la incógnita?, ¿Podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha utilizado la condición por completo?

d) Pedir a los alumnos que inventen sus propios problemas.

e) Favorecer el trabajo en parejas o en pequeños grupos.

f) Promover el uso de estrategias alternativas: reconocer patrones de problemas, confeccionar gráficos, trabajar en sentido inverso, predecir y probar, simular, experimentar, reducir los datos, deducir, etc. En esta etapa la visualización del problema juega un papel decisivo.

"...en la visualización matemática lo que nosotros estamos interesados es precisamente en la habilidad de los estudiantes en dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o con ordenador) /para representar un concepto o problema matemático y utilizar el diagrama para alcanzar la comprensión, y como una ayuda en la resolución del problema ... Visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnología) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la compresión matemática" (Zimmermann y Cunningham, 1991, p.3).

g) Formular preguntas mientras los alumnos están en el proceso de discusión de los procedimientos para resolver problemas.

h) Fomentar la retroalimentación

i) Utilizar estrategias que permitan el desarrollo de procesos del pensamiento.

j) Solicitar que los alumnos representen, mediante un diagrama de flujo, sus propios procedimientos para resolver problemas.

Resultados

En relación con los instrumentos y técnicas de recogida de datos, se pautaron cuatro etapas distribuidas a lo largo del cuatrimestre, que comprende el cursado de la material Análisis Real, para los alumnos de la LEM.

En cuanto a la primera etapa, la exploración inicial versó sobre la forma en que los alumnos resuelven problemas a partir del planteo de situaciones vinculadas a conceptos propios de la escuela secundaria. Se ejemplifican algunos de los problemas propuestos:

> *Problema 1: Un hombre de 1,82 m de altura desea averiguar la altura de un edificio de 4 pisos. La sombra del edificio es de 896 cm y su propia sombra 112 cm. ¿Es posible resolver el problema con los datos disponibles? En tal caso, resuélvelo o bien explique las razones por las cuales no es posible hacerlo.*
>
> *Problema 2: ¿Cómo puede evaluar mentalmente 122^2 -120^2 ?*
>
> *Problema 3: Pepe y José comparten una ruta de entrega de periódicos. Pepe tarda 70 min en entregar todos los periódicos y José tarda 80 min. en completar su trabajo. ¿Cuánto tardan los dos cuando trabajan en forma conjunta?*
>
> *Problema 4: Un alambre de 9 m de longitud se corta en dos partes. Con una parte se forma un cuadrado y con la otra un círculo. Si las dos figuras deben tener la misma área, ¿cuántos cm debe medir cada trozo de alambre?*

Se observó que todas las cohortes han presentado dificultades similares, a saber:

a) Escaso dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.

b) Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: representación gráfica del enunciado del problema, exploración gráfica y/o numérica, aislamiento de la información

relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados.

c) Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.

d) Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.

e) Desconocimiento de las etapas y de los pasos generales que se pueden seguir para resolver un problema.

La cuarta etapa, última del proceso pautado, es decisiva en cuanto a la obtención de resultados. Cada alumno, al finalizar el cursado de la asignatura, debe presentar la propuesta de resolución de un Proyecto de descubrimiento o de aplicación. Si el problema involucrado, a criterio del docente del curso, resulta pertinente, el alumno debe resolverlo, y luego presentar, en forma escrita y oral un trabajo sobre la heurística implicada en la resolución, las estrategias utilizadas, las dificultades encontradas, una visión retrospectiva del mismo y, en algunos casos, si correspondiese, posibles aplicaciones.

Cabe mencionar que por diferentes razones, que escapan a los propósitos de este trabajo, sólo una parte de los alumnos iniciales completan el cursado de la materia. Los porcentajes, entre los años 2005 y 2008 estuvieron entre 50% y 60 %, con lo cual aproximadamente 15 alumnos, en cada una de las comisiones, estuvieron en condiciones de seleccionar un Proyecto final. La tabla 1 resume el análisis porcentual de los Proyectos presentados y sus características más relevantes.

Comisión	Total de alumnos al finalizar el curso	Proyecto aceptado			Explicó claramente las estrategias utilizadas	Explicó las dificultades encontradas durante el proceso de resolución	Realizó una visión retrospectiva del problema	Propuso nuevos problemas asociados al actual
		En 1ra instancia	En 2da instancia	En 3ra instancia				
2005	11	30 %	45 %	25 %	85 %	65 %	65 %	25 %
2006	16	48 %	25 %	27 %	100 %	70 %	70 %	20 %
2007	14	46 %	36 %	18 %	90 %	85 %	80 %	30 %
2008	18	48 %	30 %	22 %	100%	80 %	70 %	25 %

Tabla 1

Conclusiones

La forma en que los alumnos resuelven el problema que forma parte de su Proyecto resulta muy promisorio. En general, utilizan diferentes estrategias en la resolución: aislamiento y posterior organización de la información relevante, exploración gráfica y/o numérica. Hemos observado que todos los alumnos invierten bastante tiempo en la planificación de las estrategias de resolución, una o dos semanas desde que tienen el Proyecto aprobado. Nos parece muy saludable el modo en que planifican una y otra vez el modo de resolución y la selección de procedimientos, que no siempre son los más adecuados. En varias oportunidades la solución no verifica el modelo propuesto, con lo cual el proceso de revisión es de vital importancia.

Consideramos que el modelo de enseñanza aprendizaje planteado, esto es: la aplicación de la metodología de resolución de problemas, resulta especialmente valioso para los alumnos, pues colabora claramente en su desarrollo profesional a partir de su experiencia como aprendices. Por otra parte, la solución de un problema en el campo de las Ciencias, abre caminos hacia la aparición de nuevos problemas.

Referencias bibliográficas

Caillot, M. y Dumas Carrè, A. (1987). Prophy: Un enseignement de une méthodologie de résolution de problèmes. *Rapports de Recherches*, 12, 199-224. Paris: INPR.

Dolores, C (1999) *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gil, D y Martínez Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.

Glaser, R. (1992). Expert knowledge and processes of thinking. En D.F. Halpern (Eds.) *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics*. Nueva Jersey: Hillsdale.

Hernández Fernández, H, Delgado Rubí, J , y Fernández de Alaíza, B. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimientos en la Educación Polimodal y Superior.* Argentina: Homo Sapiens Ediciones

Krulik, S. y Rudnick, J.A. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. Arithmetic Teacher, 2, 42-49.

Larson R., Edwards B. y Hostetler R. (2005) Cálculo diferencial . México, Mcgraw-HillLopez Ruperez, F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en Física*. Madrid: MEC.

Milevicich, L y Lois, A. (2007). La resolución de problemas de cálculo integral en un entorno informático. En: *Workshop, 11th International Congress of Math Education*, Monterrey, Mexico.

Milevicich, L y Lois, A. (2008) Estrategias de aprendizaje significativo en matemática**.** En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, pp. 659-664*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, Ly Lois, A, (2009) ¿Función derivada o función pendiente de una curva?. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 913-923. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Polya, G. (1945) *How to solve it*. USA: Princenton University Press

Polya, G. (1966) *Matemática y razonamiento Plausible*. Madrid: Tecnos

Polya, George (1995) *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Proyecto PISA 2003 (2005). Bilbao, España: Instituto Vasco de Evaluación e Investigación EducativaRivera Figueroa, A (2006). *Calculo y sus fundamentos para Ingeniería y Ciencias*. Madrid, España**:** C.E.C.S.A.

Romberg, T. (1992). Mathematics learning and teaching: What we have learned in ten years. En C. Collins and J. Mangieri (Eds.). *Teaching thinking: an agenda for the twenty-first century* (43-64). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A (1989). Exploration of students´mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-350.

Stewart; J (2003) *Cálculo, conceptos y contextos.* México: Thomson

Stewart, J (2007) *Intrducción al cálculo*. Buenos Aires: Thomson Learning Argentina

Selveratnam, M. (1990). Problem-Solving, a model approach. *Education in Chemistry* 27(6), pp 163-165.

Taconis, R., Ferguson-Hessler, M. y Broekkamp, H. (2001). Teaching science problem solving: An overview of experimental work. *Journal of Research in Science Teaching*, 38, (4), 442-468.

Zimmermann y Cunningham (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics, *MAA notes*, 19, Washington, Mathematical Association of America.

LA DEMOSTRACIÓN EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Malva Alberto, Gabriela Roldán
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
mtoso@frsf.utn.edu.ar, gabrielaroldan@arnet.com.ar
Campo de investigación: Educación continua Nivel: Medio

Resumen. *La formación continua, la formación permanente o formación a lo largo de la vida es un aspecto fundamental de la relación entre la Universidad y el medio social y productivo en el que está inserta. Las formas de gestión se diversifican y la sociedad demanda compromisos de participación, haciéndose particularmente enfática la relación entre los docentes universitarios y los educadores que de alguna manera contribuyen en la formación matemática del joven ingresante. En este trabajo exponemos las ideas consensuadas sobre la necesidad de formación; señalamos una de las debilidades detectadas respecto de la formación de los jóvenes ingresantes en cuanto al logro de habilidades para la demostración y el uso del razonamiento; justificamos nuestro compromiso como universitarios con la continuidad de formación de los docentes de pregrado y hacemos aportes para el aula, mediante la socialización de secuencias didácticas que a priori pueden conducir al logro de pensamientos reflexivos, inductivos, deductivos y argumentativos en las aulas de matemática.*
Palabras clave: universidad, formación, matemática, demostración

Justificación: Necesidad de formación a lo largo de la vida

Entendemos por formación a lo largo de la vida toda actividad de aprendizaje llevada a cabo en cualquier momento de la vida, con el propósito de mejorar tanto los accesos al conocimiento como las habilidades y competencias que se requieren para tener buenos desempeños, desde una perspectiva personal, cívica o ligada a las actividades profesionales o de empleo. Este tipo de formación puede realizarse desde diferentes ámbitos y los agentes sociales juegan un papel muy importante, pero las Universidades no pueden quedar al margen de esta importante función social.

La formación es una necesidad permanente a lo largo de la vida profesional, social y laboral; es un espacio de negociación y diálogo social; la formación es un compromiso y un valor estratégico prioritario ante una posible adecuación frente a los disímiles procesos de cambios, sean éstos económicos, tecnológicos, productivos o sociales; el futuro de la sociedad depende, en gran medida, de la preparación de la población activa, por lo que la formación a lo largo de la vida constituye una auténtica inversión.

Los cambios que han experimentado el mercado laboral y las profesiones, referido al concepto de formación permanente tienen implicaciones en el sistema educativo. Cabe a las Universidades la responsabilidad de atender la implementación de una política integrada y sistémica de formación reclamada desde los más diversos sectores, y en particular, generar conocimientos, retos e ideas que coadyuven con la formación del profesorado en servicio.

La educación continua para el profesorado es un proceso que trasciende la propia disciplina del docente para orientarse hacia una formación integral, que no se limita a un espacio o edad determinada; que debe ser accesible para todos y que debe estar comprometida con el adecuado desarrollo de cada individuo.

La mejora de la calidad educativa del cuerpo docente se vislumbra como el instrumento básico para elevar el nivel de aprendizaje de los alumnos en las escuelas e institutos de formación docentes. Hoy, la sociedad reclama buenos profesores; capaces de señalar con claridad qué es lo básico imprescindible y lo básico deseable en la educación de los que aprenden; profesionales permeables a distintas ofertas educativas; se espera que los docentes tengan capacidad para el liderazgo en la toma de decisiones, la comunicación y el autocontrol y que tengan cualidades tales como: impacto y presencia personales, capacidad de adaptación a las circunstancias y a las nuevas ideas; energía y perseverancia con la educación de los jóvenes; confianza en sí mismos; entusiasmo; capacidad intelectual; integridad y solidez; compromiso, buenas competencias profesionales y un sólido compromiso social.

La formación continua, la formación permanente o formación a lo largo de la vida es un aspecto fundamental de la relación entre la Universidad y el medio; la sociedad demanda, particularmente de la Universidad, compromisos de participación de sus docentes y autoridades educativas, haciéndose particularmente enfática la relación con los educadores que de alguna manera contribuyeron en la formación de sus alumnos ingresantes. Coincidimos con Huberman (1992, p. 17) cuando expresa que “la educación permanente sostiene como principal objetivo el de mejorar la calidad de vida humana atendiendo a una visión del ser humano concebido como un todo”. Por otro lado la Universidad muestra su propio interés en enfatizar la relación con los educadores generando programas de extensión destinado a satisfacer las demandas de formación y actualización del profesorado en servicio porque puede garantizar que este tipo de formación sea académicamente válida, profesionalmente útil y personalmente enriquecedora.

Antecedentes: La indagación con el profesorado en ejercicio

A través de la participación en numerosos proyectos de extensión hemos asumido la importancia que deviene cuando se genera un ambiente adecuado para la interacción Universidad y Escuela Media propiciando y fortaleciendo el compromiso social de compartir y retroalimentar el capital educativo producido desde la cátedra y la investigación universitarias. Creemos que es insoslayable interactuar con los docentes que han participado, de algún modo, en la formación matemática de nuestros alumnos universitarios.

Por otro lado, la integración de proyectos de investigación en el ámbito de la matemática educativa nos dio el soporte adecuado para la presentación, diseño, implementación y socialización de secuencias didácticas que a priori pueden generar nuevas oportunidades para enriquecer el currículum de grado de los docentes en ejercicio.

En interacción con el profesorado hemos registrado debilidades relacionadas con el escaso uso de habilidades cognitivas relacionadas con la justificación de argumentos; la validación; la justificación de procedimientos; la argumentación y la precisión de los razonamientos matemáticos durante la formación de grado. La propia experiencia parece reflejarse en el ejercicio profesional y uno de los objetivos de este trabajo es ayudar a romper el paradigma que predominó durante la propia formación; aquel que se sustancia en la reproducción de lo vivido en términos de la formación. Por ello, nos propusimos compartir los resultados que seguramente iremos obteniendo y propiciar la instalación de la presente problemática en el ámbito de la extensión.

Durante el desarrollo de instancias de actualización para atender a la formación continua de los docentes en ejercicio realizadas en el año 2008, hemos consultado a 95 docentes de la escuela media sobre la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones. Las preguntas realizadas han sido básicamente las siguientes: ¿qué recuerdos tienen sobre el aprendizaje de demostraciones?; ¿cómo aprendió a hacerlo?; ¿cómo juzgar cuándo una demostración es correcta?; ¿cuándo aprendió a demostrar?; ¿colabora el currículum de grado en la adquisición de habilidades para la demostración?; ¿ha demostrado alguna vez la irracionalidad de $\sqrt{2}$? O el teorema de Pitágoras? comente algún momento en que enseñó una demostración matemática; haga cualquier otro comentario que crea que puede ser útil acerca de enseñar a demostrar. Entre las respuestas

encontramos que el 82% de ellos no hace demostraciones la irracionalidad de $\sqrt{2}$; un 70% respondió que hacía más de 10 años que no intentaba tal demostración; un 54% de los docentes encuestados manifestó que no hace demostración alguna sobre el teorema de Pitágoras; el 63% no deduce la expresión que permite calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética, entre otros ejemplos. En algunos pocos casos se muestran desarrollos algebraicos y construcciones geométricas, por ejemplo, el caso del cuadrado del binomio, construcciones con regla y compás, etc. Pero en términos cuantitativos son muy escasas las experiencias en el aula. Muchos de ellos dijeron que durante las clases de matemática, los alumnos resuelven ejercicios que generalmente están formulados en guías de ejercicios y que las únicas interacciones que se propician se limitan a corregir los resultados. La falta de discusión, de debate, empobrece la actividad del aula. La explicitación hace posible tomar conciencia del conocimiento, permite nombrarlo, hacerlo público y hablar de él. En general existen pocas situaciones que comprometen al estudiante en la producción de respuestas argumentativas. Consultados los docentes acerca de la disponibilidad de material curricular que justifique la enseñanza de la demostración, el 80% respondió que muy poco es lo que se encuentra, poco se sabe sobre cómo y cuándo hacerlo y lo más grave aún, es que en los libros de textos para los estudiantes de la educación secundaria, las justificaciones y deducciones son escasas o no existen. Los docentes también señalan que la actitud negativa que tienen los estudiantes hacia el aprendizaje de las demostraciones no es una situación menor: el problema es mayor aun cuando el alumno debe demostrar resultados que ya sabe y ha usado con anterioridad, por ejemplo, en demostraciones del tipo: demuestra que para todo entero a, se verifica que 0a = a0 = 0 o bien cuando se pide que se demuestre que 2 es un número primo (Roldán, Rogiano, Alberto, Banchik, 2008).

Necesidad de incluir la demostración en la currícula de formación

Ya en la década del 60, autores como Burton, Kimball, Wing, (1969, p.9) señalan que “enseñar a pensar a los estudiantes” es uno de los propósitos que más se menciona en educación. Ellos toman como una definición aceptable para el pensamiento aquella que dice: “el pensamiento tiene lugar cuando existe un esfuerzo persistente para examinar las pruebas en las que se apoya cualquier creencia, solución o conclusión cuya aceptación haya sido sugerida, y para analizar la

implicaciones y posteriores conclusiones de dichas pruebas" (Burton, et al, 1969, p.10). Desde hace más de cuarenta años, enseñar a pensar implica reconocer la existencia de un problema, o de una situación no demasiado clara o situación incierta, proponer hipótesis y elaborar respuestas que sirven de guía para el acopio y análisis de datos y hechos, y emitir juicios basados en relaciones lógicas desarrollando conclusiones que finalmente se pondrán a prueba en la acción. Los contenidos disciplinares de la lógica matemática brindan elementos para adquirir un pensamiento crítico y eficaz, más preciso y científico y da herramientas para argumentar situaciones diversas, evitando las ambigüedades. Los razonamientos matemáticos enfatizan algunos elementos del análisis de tipo lógico que son necesarios para comprender el lenguaje de la matemática y la estructura propia de sus demostraciones.

En la década de los 90, las reformas educativas de la mayoría de los países latinoamericanos (CBC RA Educación Polimodal, 1995; Barriga, Espinosa, 2001) indican la necesidad de rescatar el uso y explicación del valor del contraejemplo para rebatir generalizaciones e hipótesis, la utilización e interpretación correctas de los términos relacionales tales como: "si ... entonces", "y", "o", "suficiente", "necesario", "algunos", "todos", "no correlacionado con", "a causa de", "si y sólo si...". La enumeración continúa con la elaboración de proposiciones condicionales distinguiendo hipótesis de conclusiones, discriminación entre razonamientos inductivos y deductivos, realización de demostraciones matemáticas sencillas, etc. (Saiz, 1994; Santaló, 1997)

En los últimos años, el significado de las demostraciones para la educación matemática ha tomado un interés creciente por sus importantes perspectivas en el desarrollo de habilidades cognitivas tales como la verificación, la exploración, la sistematización y la deducción, el descubrimiento y la comunicación, capacidades que posibilitan la construcción del conocimiento. Bravo y Arrieta (2003) afirman que las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar y que el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones tiene una poderosa influencia sobre el desarrollo de capacidades para argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir. Otras investigaciones recientes dan cuenta sobre dificultades encontradas en los estudiantes al realizar una demostración. Antonini y Mariotti (2008) proponen un modelo para analizar demostraciones y argumentaciones indirectas. Este modelo revela su eficiencia para identificar, analizar e interpretar las dificultades de los estudiantes en este tipo de método de

demostración. Durand-Guerrier (2008) proporciona argumentos epistemológicos y didácticos que justifican la necesidad de distinguir, para la educación matemática, el sentido común y la lógica matemática, teniendo en cuenta para ello la distinción y relación hecha en lógica entre verdad y validación por un lado, y sintaxis y semántica por otro.

El uso de la demostración estrictamente deductiva en el marco escolar ha sido ampliamente tratado por Godino y Recio (2001). La demostración aparece como un objeto de estudio complejo, estrechamente relacionado con otros elementos de validación como pueden ser los de explicación, comprobación, argumentación y prueba, teniendo un significado más flexible e incluyendo otros modos de validación como las que se derivan del uso de recursos tecnológicos; la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, las pruebas de existencia. La clase debe familiarizarse con vocablos tan emparentados como demostrar, validar, justificar, explicar, argumentar, mostrar; es posible el acercamiento desde el uso de implicaciones, disyunciones y conjunciones; el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones tienen importantes funciones para anclar el desarrollo de capacidades generales para fundamentar, inferir, refutar y deducir; las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como comunicar, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar, destacándose la importancia del proceso seguido para la construcción por encima del resultado, ya que más allá del conocimiento teórico alcanzado, la habilidad para demostrar seguirá siendo usada en otras demostraciones.

Por último, nuestra indagación al momento del ingreso a la universidad, sobre los conocimientos previos en demostraciones matemáticas indican una base inexistente y un seguimiento posterior durante el primer cuatrimestre en la universidad, marcan una dependencia lineal del alumno hacia el docente (Roldán, et al, 2008); el alumno es repetidor o reproductor y poco se observa la relación dialéctica entre la teoría y la práctica; es entonces muy comúnmente observable un alumno que no está entrenado para investigar, analizar y descubrir, construir o reconstruir. Prueba de ello lo tenemos cuando, después de haber demostrado que 3 es un número primo, solicitamos a nuestros alumnos que demuestren que dados a, b enteros positivos tales que 3 = a b entonces a = 3 o b = 3. Resultado análogo obtuvimos cuando solicitamos que demuestren que dados a, b enteros positivos tales que 2 = a b entonces a = 1 o b = 1 (Roldán, et al, 2008).

Estamos requiriendo en los alumnos universitarios la necesidad de justificar procedimientos, de mostrar deducciones, argumentar hechos y precisar razonamientos matemáticos; pero somos conscientes que estas habilidades deben enseñarse desde épocas más tempranas incentivando la tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para poder lograr independencia en el momentos en que las demostraciones se conviertan en formas usuales de trabajo y desarrollo del pensamiento.

¿Cómo motivar en el aprendizaje de las demostraciones en matemática?

Desde la educación primaria y secundaria se pueden fomentar, con distintos niveles de concretización, generalización o abstracción, actividades favorecedoras de buenas situaciones de aprendizaje para el anclaje de habilidades para demostrar, probar, argumentar, verificar, etc. Algunas herramientas útiles pueden ser los acertijos, las paradojas, los problemas abiertos, la búsqueda de patrones, la inducción y deducción de propiedades; los sistemas formales sencillos; etc. Entre otros ejemplos disponibles, socializamos los siguientes:

Ejemplo 1: Se dan pares de afirmaciones. Justifica si tales afirmaciones son equivalentes:

1.1) Afirmación A: “Los autos se detienen si el semáforo tiene la señal en rojo”

Afirmación B: “Los autos se detienen sólo si el semáforo tiene la señal en rojo”

1.2) En el lenguaje comercial se utilizan frases como por ejemplo:

“Si el consumidor paga con tarjeta de crédito entonces el precio aumenta en un 2%”.

“El consumidor paga con tarjeta de crédito sólo sí el precio aumenta en un 2%”.

¿Tienen los mismos valores de verdad?

Ejemplo 2: el uso de la verdad de la disyunción se pone en práctica en la siguiente demostración sobre la existencia de números irracionales a y b tales que a^b es racional. En efecto, sea b = $\sqrt{2}$, que es irracional; el número $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ puede ser racional o irracional.

Si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ es racional ya está probado tomando a = $\sqrt{2}$ y b = $\sqrt{2}$.

Si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ es irracional entonces a = $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ y b = $\sqrt{2}$ y se verifica que

$a^b = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ que es racional.

Ejemplo 3: ¿Contradices o demuestras la proposición? La expresión $p(n) = n^2 - n + 41$ es número primo para todo n entero no negativo.

Ejemplo 4: Critica la siguiente demostración en Z.

TEOREMA: $\forall$ a $\in$ Z, a = 0.

Demostración: Se verifica que $a^2 = a^2$. Luego $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$.

Es decir: (a – a) (a + a) = a (a – a) y cancelando a + a = a. Sumando a ambos lados de la igualdad, el opuesto de a, (–a), obtenemos a = 0.

Reflexiones

Durante muchos años, durante la década de los 60, la enseñanza de la matemática se centró en sus aspectos deductivos. Décadas más tarde se desechó el método axiomático y las demostraciones y pruebas formales desaparecieron de los libros de texto, dando lugar exclusivamente al método heurístico, la experimentación, el descubrimiento, la analogía y la comparación, con el propósito de guiar al estudiante para que pueda descubrir por sí mismo los procedimientos y los principios que debe aprender. Éstos, y otros métodos pueden convivir en verdadera armonía y todos constituyen importantes entradas al conocimiento. Polya (1954, p. vi), citado en Burton, et al (1969, p. 525) nos dice “el resultado de la labor creadora de los matemáticos consiste en razonamientos deductivos, en demostraciones; pero las demostraciones se descubren por medio del razonamiento plausible, de las conjeturas. Si se quiere que el aprendizaje de la matemática refleje en alguna medida el carácter inventivo que ésta posee debe haber lugar en él para las conjeturas y las inferencias plausibles”.

El aprendizaje debe venir guiado por la búsqueda de respuestas a problemas, primero a nivel intuitivo y empírico; más tarde generalizado y finalmente justificando, demostrando. Un buen diagnóstico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemática debe incluir no

sólo los déficit tal cual los señalamos, sino también las fortalezas en las cuales el profesorado puede ayudarse para enfrentar los problemas planteados: en los últimos años se ha observado un cultura pro científica que ha permitido la divulgación y difusión masiva de los avances de las distintas investigaciones sobre el tema (Pedemonte, 2008); existen experiencias innovadoras pero que hasta el momento representan experiencias piloto y esto conlleva un nuevo problema, ya que al implementarlas a nivel micro pueden perder su potencialidad a nivel macro (Nápoles, Macías, Caputo, Espinoza, (2008). Sin embargo, recuperar los distintos métodos de la demostración desde la formación inicial del profesorado contribuirá a una mejor educación matemática para nuestros jóvenes.

Referencias bibliográficas

Antonini, S. y Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving?, *ZDM Mathematics Education*, 40, 401-412.

Bravo, M. L. y Arrieta, J. J. (2003). *Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas*. Recuperado el 10 de mayo de 2009 de http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF

Burton, W., Kimball, R.y Wing, R. (1969). *Hacia un pensamiento eficaz.* Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Diaz, A. e Inclán C. (2001). *El docente en las reformas educativas: Sujeto o ejecutor de proyectos ajenos*. Recuperado el 2 de mayo de 2009 de http://www.rieoei.org/rie25a01.htm

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Eds.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. (pp. 125-133). Barcelona: Graó.

Durand-Guerrier, V. (2008): Truth versus validity in mathematical proof. En *ZDM Mathematics Education* 40, 373-384.

Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. En *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), 405-414.

Huberman, S. (1992). *Cómo aprenden los que enseñan*. Buenos Aires: Editorial Aique.

Nápoles Valdés, J., Macías, D., Caputo, S.y Espinoza, R. (2008). *La enseñanza de la demostración matemática.* Recuperado el 25 de junio de 2009 en http://www1.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-020.pdf

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. En *ZDM Mathematics Education* 40, 385-400.

Roldán, G., Rogiano, C., Alberto, M. y Banchik, M. (2008). *Habilidades cognitivas en Matemática*. *Propuestas para atender a su fortalecimiento*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Saiz, I. (1994). *Propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la EGB*, Ministerio de Cultura y Educación. Argentina.

Santaló, L. A. (1997): Matemática para no matemáticos. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*.(pp.12-34). Buenos Aires: Editorial Paidós.

CBC Educación Polimodal (1995) Recuperado el 20 agosto de 2009 de http://www.me.gov.ar/consejo/documentos/cf_documentos.html

CAPITULO 5

Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Mauricio Herrera

El debate sobre el papel de las tecnologías electrónicas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática no debe estar centrado en si debemos usarlas o no. Estas tecnologías llegaron para quedarse y más bien debemos enfocarnos en cómo implementarlas para que nuestros estudiantes aprendan más matemática y no menos. Nuestros estudiantes están permanentemente rodeados por estímulos tecnológicos que reclaman su atención con imágenes y sonidos atractivos y seguramente les resultará bastante abrumador estar en una clase de matemática tradicional con tiza y pizarrón, a pesar de las dotes histriónicas que el profesor pudiera poseer. Si el estudiante no aprende cómo usar de manera apropiada la tecnología en la escuela, seguramente encontrará formas inapropiadas de usarla fuera de ella. Más allá de este necesario y legítimo debate, las tecnologías electrónicas ya se han convertido en herramientas esenciales para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en muchas partes del mundo.

La implementación de estas "nuevas" tecnologías afecta la educación matemática de manera profunda y multilateral, por ejemplo el **currículo** matemático debe ser modificado en al menos tres puntos importantes: El primero de ellos puede causar cierta controversia y es que *algunos tópicos de matemática dejan de ser importantes*. En efecto, probablemente hacer largas divisiones, calcular raíces de grandes números o logaritmos empleando tablas, eran tareas importantes de la enseñanza de la matemática hace unos años atrás, sin embargo, estas actividades han perdido su valor didáctico y práctico en la actualidad con el uso de las calculadoras. La inteligencia humana evoluciona convirtiendo en rutina aquellas operaciones que en un principio eran desafiantes y entregando estas rutinas a las máquinas. Sigue siendo importante que los estudiantes sepan cómo sumar, multiplicar y dividir mentalmente o con ayuda de un lápiz y papel, sin embargo debemos determinar cuáles actividades consideramos rutinas en matemática y dejárselas a la tecnología disponible, para poder dedicar el tiempo y las capacidades de nuestros estudiantes a nuevos y actuales desafíos. El segundo punto es que *ciertos tópicos de matemática adquieren renovada relevancia*, fundamentalmente aquellos relacionados con el

diseño y aplicación de la propia tecnología. Por ejemplo, tópicos de matemática discreta, matrices, programación, algoritmos, entre otros, toman nueva importancia debido a su uso en problemas de optimización, organización y generación de datos. La habilidad de trasladar estos datos de una representación a otra, desde números y símbolos a gráficos y tablas o de gráficos a tablas, es ahora más importante con el uso de la tecnología. El tercero y quizás el más importante de los efectos sobre el currículo matemático, es que *usando tecnología los estudiantes de todos los niveles pueden manejar problemas reales y complejos que de otra manera serían imposibles de abordar*. Por ejemplo, usando calculadoras gráficas, los estudiantes de enseñanza secundaria pueden analizar datos relacionados con problemas reales empleando un amplio rango de herramientas estadísticas y desarrollando de esta manera, razonamientos cuantitativos, además de la capacidad de interpretar las representaciones visuales y simbólicas de los datos.

El uso de la tecnología conlleva a nuevas demandas sobre la **metodología**, favoreciendo el estudio de casos y la experimentación. Utilizando herramientas tecnológicas, los estudiantes a partir de los datos obtenidos, formulan conjeturas y las validan, descubren patrones, exploran y sintetizan resultados computacionales reuniendo evidencias matemáticas en concordancia. Por ejemplo, a la pregunta ¿Converge una sucesión?, el estudiante con la calculadora puede responder escribiendo la fórmula y calculando unos cuantos valores significativos que le permitirán conjeturar a que número converge. Por otra parte, la gráfica le ayudará a reforzar o desechar la conjetura. Una conjetura correcta facilitará la solución del problema y permitirá por un lado, mostrar la necesidad de las demostraciones matemáticas de teoremas y por otro lado, sugerir vías para estas demostraciones. La posibilidad de hacer cálculos y procedimientos rutinarios de manera rápida, libera el tiempo para elaborar conceptos y modelos matemáticos a partir de problemas reales, favoreciendo la asimilación de las ideas matemáticas abstractas. Los modelos basados en geometría dinámica, en gráficos animados o hojas de cálculo que se se actualizan al cambiar las fórmulas son herramientas que el profesor puede usar para fomentar la observación, la discusión y el pensamiento crítico en sus estudiantes.

La implementación inteligente de tecnología en la educación matemática, impone grandes e importantes desafíos a todos los actores del proceso educativo. Enseñar matemática con tecnología, no sólo demanda que los profesores tengan un sólido conocimiento en matemática, sino que también, posean un dominio aceptable de la tecnología. No hay nada de malo que

algunos estudiantes sepan más que el profesor en el uso de ciertas funcionalidades de la calculadora o de cierto software. En definitiva, el profesor es el que pone en el contexto adecuado los problemas a resolver y toma la decisión de cuándo usar o no la tecnología en la sala de clases. Los estudiantes necesitan aprender cuándo usar la tecnología, cuándo el papel y lápiz y cuándo hacer algo con sus propias mentes. Usar bien la tecnología debe tomarse, como un desafío más de una instrucción matemática actual.

La excelencia en la educación matemática requiere **equidad**, expectativas altas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes. Proveer de un apropiado acceso a la tecnología tiene que ser responsabilidad del colegio y del estado y no debe dejarse esta carga al estudiante y a su familia. Si se descuida este aspecto, la sociedad se enfrentará con una brecha digital más grave y peligrosa, que las diferencias económicas que ya hemos visto en nuestros colegios. Desafortunadamente esto significa, que la matemática no será más la asignatura más barata del presupuesto del colegio. Lo que se hacía antes con poco más que una tiza y pizarrón ahora reclama por una inversión en tecnología. Queda entonces un pregunta abierta a este respecto ¿Cómo resolverá usted el problema del financiamiento neseario para proveer a sus alumnos de la tecnología necesaria?

La implementación de tecnología para aprender y enseñar matemática ha abierto una línea de investigación compleja, rica y desafiante para los investigadores de la educación matemática. Numerosas preguntas permanecen sin responder en forma adecuada, algunas de ellas son: ¿La tecnología expande en algún sentido fundamental nuestras capacidades cognitivas?, ¿Cuáles son las habilidades de “lápiz y papel”que debemos conservar y cuáles dejar a la tecnología?, ¿Cuál es el impacto del uso de la tecnología en las habilidades matemáticas del estudiante?, ¿Qué conocimiento previo deberán tener los estudiantes para interpretar de manera correcta los resultados entregados por la herramienta tecnológica?, ¿Qué modificaciones hay que hacer al currículo matemático para incorporar de manera eficiente el uso de la tecnología?, ¿Cómo construir evaluaciones adecuadas con el uso de tecnología?, etc.

EMPLEO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

José Guadalupe Torres Morales, Rosario del Pilar Gibert Delgado
Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica, ESIME-IPN México
jgtorresmo@gmail.com, jgtorresm@hotmail.com, giberty42@hotmail.com
Campo de investigación: Matemáticas en la enseñanza universitaria Nivel: Superior

Resumen. *La enseñanza de las matemáticas, en especial el álgebra hoy en día, es un problema real que requiere de soluciones adecuadas al nivel del conocimiento humano de nuestra sociedad. Pero también debe estar a la par de la tecnología con la que se cuenta, buscando no solamente facilitar el proceso de aprendizaje, sino también, generar nuevas expectativas y estrategias dentro de la enseñanza ya que ésta puede ser útil como un simplificador del conocimiento, pero no hay que abusar de ella ya que existen conceptos que resultan mejor explicarlos a lápiz y papel, o en el caso del pizarrón, plumón y borrador. El uso de esta tecnología en el aula requiere fundamentalmente que el estudiante tenga una buena base conceptual sobre el tema de estudio, para poder analizar con criterio su retroalimentación.*
Palabras clave: enseñanza, tecnología, algebra, estrategia

Introducción

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación, las TIC´s, son vistas como una poderosa herramienta para las representaciones matemáticas. Estas apoyan a la comunicación y al razonamiento, mejoran la comprensión de los conceptos, promueven la participación individual o colectiva y hacen más eficiente y flexible los métodos de enseñanza, entre otros.

Lo anterior generó conflictos con el paradigma de la enseñanza tradicional: Si las computadoras (tecnología) pueden realizar todos los cálculos, ¿Qué les queda a las matemáticas? La respuesta es casi todo. Porque las máquinas no argumentan, no razonan, ni hacen conjeturas, entre algunas otras. Esto sin lugar a duda ha provocado la necesidad de una nueva infraestructura intelectual. Asimismo la tecnología ha permitido a los estudiantes explorar el lenguaje simbólico con una herramienta computacional.

El álgebra, por ejemplo, enlaza de manera poderosa los contextos gráficos, geométricos y tabulares, haciendo del lápiz y papel una actividad estática y no como se haría con el uso de las TIC's que lo hace más dinámico.

En ese orden de ideas para la enseñanza del cálculo, los conceptos de límite, derivada e integral han sido beneficiadas, por citar algún otro caso. También se podría mencionar en lo general que el proceso de enseñanza de las matemáticas tienden a ser más eficiente en lo relativo a su

comprensión con el apoyo de las distintas herramientas de software especializado en mejora del proceso de aprendizaje, ya que cuentan con herramientas de visualización que le dan el sentido de representación dinámica, además de permitir experiencias interactivas con otros campos de la ciencia matemática aplicada.

El usar la tecnología es inevitable, así que su uso en la resolución de problemas debe ser considerado para simplificar las actividades de solución o verificación.

Por ejemplo Hershkowitz y Kieran (2002, p. 215) han señalado que: El diseño de la actividad de aprendizaje de un salón, así como de un ambiente de aprendizaje matemático computarizado, debe considerar factores contextuales que tienen varios orígenes:

El contenido matemático debe ser aprendido con su estructura epistemológica.

1. Los estudiantes, su cultura, conocimiento matemático y su historia con la cual ellos inician sus actividades de investigación.
2. La cultura del salón y sus normas, el rol del maestro, y la organización del aprendizaje.
3. La contribución potencial de la herramienta de cómputo.

Por citar algún dato más tenemos a Shuterland (1987) que remarca que hay que integrar diferentes medios de aprendizajes (papel, lápiz, tecnología) desde luego sin dar preferencia a alguno.

Estructuras en expresiones y ecuaciones

Muchos de los errores en la manipulación de expresiones algebraicas parecen ser la causa de que los estudiantes no prestan atención a la expresión de la estructura (Thompson, 1981). Para reducir esto y apoyar al estudiante, se tienen algunos programas que les brindan mayor flexibilidad para su instrucción entre los que se encuentra Matlab, Maple, Mathematics y algunos en la red como el Descartes, haciendo más asertivo su aprendizaje.

De igual forma Kaput (1987) menciona que el álgebra es compleja tanto en sus estructuras y en la multiplicidad de sus representaciones. Por ello es muy importante determinar cómo estas formas de escrituras o caracteres son aprendidas y aplicadas por los individuos en representaciones

mentales usuales. Existen investigaciones, en la que los jóvenes usan sistemas de escritura para estructurar la creación y elaboración de su propia representación mental. Siendo esta una de las razones por la cual el concepto de variable es difícil de aprender y esto se ha debido a la naturaleza estática del medio en el cual todo el mundo ha sido históricamente forzado a representarlo.

Enfoque dinámico del álgebra

De lo anteriormente expuesto, entonces se dice que los alumnos deben de conocer y comprender los conceptos matemáticos de tal forma que puedan modelar situaciones y/o resolver problemas en contextos nuevos y retadores. Debido a ello, se han diseñado un sinnúmero de software y juegos con el fin de facilitar el aprendizaje, con un enfoque más dinámico, esto es *"Aprender haciendo".* O como dice un proverbio chino: Oigo y me olvido. Veo y me acuerdo. Hago y entiendo.

La forma en la que se han desarrollado las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación, la han cuidado, para que su enfoque sea más dinámico tanto para la enseñanza como para su aprendizaje, siendo esta su principal característica. Kaput (1992, p. 118) señala: "Un importante aspecto del pensamiento matemático es la abstracción del invariante, pero para reconocer la invariancia se debe tener variación". Por ello el hablar del álgebra como un sistema simbólico implica variables, incógnitas y parámetros en las fórmulas que se tienen.

Algunos investigadores dicen que el rol del maestro se vuelve determinante en un proceso de contextualización, esto es, que tan relevante es el conocimiento situacional para su aplicación en la solución de problemas.

Adicional a ello existen algunos comentarios sobre expresiones y variable que dan énfasis en el aprendizaje del estudiante y sus múltiples puntos de vista de los conceptos a través de las sus representaciones.

Es claro que el introducir cualquier clase de tecnología en la escuela, afecta no sólo el proceso de aprendizaje sino la concepción y el control de la situación de la enseñanza por el maestro, (Guin y Trouche, 2000).

Preguntas

Siempre es necesario antes de seguir, expresar ciertos cuestionamientos, que a continuación se plantean:

- ¿De qué manera el uso de la tecnología tiende a rediseñar los objetivos de la enseñanza?
- ¿El cambio de la currícula será un detonante elemental para la impartición de las matemáticas con el uso de las nuevas tecnologías?

Tecnología en la enseñanza y aprendizaje de funciones

En el currículum convencional, el álgebra se enfoca en la caracterización de un sistema lineal de ecuaciones en la cual, la variable desconocida es dada por una representación simbólica.

Sin embargo, se llega a un conjunto de valores en un dominio o contra dominio, lo cual genera una función, donde el estudiante de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica a lo largo de su carrera observa que esas funciones cambian para ser llamadas señales.

Las funciones se pueden ver a través de cuatro representaciones dinámicas:

1. Simbólica $y= 3x^2 + 2x – 5$
2. Gráfica
3. Tabular
4. Lenguaje de programación.

Y por supuesto una quinta que sería la verbal la que hemos mencionado como una estática, muy a menudo asociada con viejas tecnologías: lápiz y papel.

Desde luego el uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC) han ayudado a simplificar dichas barreras de aprendizaje que están ligadas a la estructura mental del ser humano. Desde luego con el apoyo de ellas se reduce la manipulación de operaciones numéricas, que lamentablemente solo se usan así para verificar operaciones, en lugar de usarlas para hacer conjeturas y probarlas. También facilita la eliminación del uso de símbolos,

prescindiendo entonces el lenguaje simbólico. Los datos los obtiene de manera directa en el punto donde se generan, gracias a dispositivos de captura.

La NTIC nos permite tener un medio integrador, debido a que a menudo no existe la dificultad para transferir una representación gráfica a una algebraica, lo cual hace que se pueda incrementar la fluidez entre sistemas. Con ella el alumno construye nuevos conocimientos, los consolida y le permite manipular gráficas de funciones.

Confrey y Smith (1992) consideraron que es importante construir un entendimiento del concepto de función a través de representaciones múltiples (numérica, gráfica, simbólica) y contextualizar el problema a un medio real antes de dar un concepto estático (verbal). También concluyeron que no hay mucha dificultad para transferir una función algebraica a una representación gráfica, pero no es fácil hacerlo a la inversa, con el uso de las TIC´s se facilita. Sin embargo la tecnología puede incrementar la fluidez entre los dos escenarios. Finalmente la tecnología nos permite manipular gráficas de funciones, entre otras cosas más.

Adicionando un comentario más, la tecnología permite explorar ciertos tipos de representaciones sobre otras, enfocándose en aspectos de la función. Los alumnos comprenden más el concepto cuando lo experimentan, lo viven y lo perciben (Visual-Auditivo-Kinestésico). El empleo de las herramientas tecnológicas permite la transición de un sistema gráfico a simbólico o de otro tipo, que podremos interpretar de igual forma con el uso de software como Maple, Matlab u otro distinto de dominio público o por medio de licencia.

Implicaciones para la enseñanza y el currículum

Para que la tecnología pueda ser empleada como un soporte para el estudiante, intervienen varias variables:

1. El estudiante en sí.
2. Sus conocimientos previos.
3. La tarea a desarrollar.
4. El contexto matemático.

5. El tipo de contexto.
6. La clase de tecnología usada.
7. La preparación del docente en el uso de las NTIC.

De esto sabemos que en ocasiones el estudiante usa la tecnología de acuerdo a las creencias del maestro y de lo que éste opine acerca de ellas para la enseñanza y desde luego pueden generar ciertas complejidades, lo cual no permiten patrones a seguir.

El poder de las NTIC nos llevan a un mundo sin precedentes a uno más interactivo y desde luego a un plano en donde el aprendizaje dinámico es una realidad y en donde las cosas se aprenden haciéndolas, lo cual debe ser explotado de forma tal que les facilite el manejo de sistemas tradicionales simbólicos (algebraicos, numéricos y gráficos) los que son experimentados de manera real por los estudiantes, alcanzando un objetivo adicional dentro de las matemáticas como lo es el know-how que adquiere el alumno con vistas a un futuro, al momento de ser contratado en un empleo.

Conclusiones

Tenemos entonces a manera de reflexión, cómo el empleo de las tecnologías se integraría en la impartición de las clases de matemáticas:

- Por sí solas no logran el cambio, ni en el proceso de enseñanza ni en el de aprendizaje.
- La enseñanza y el aprendizaje, deben permitir aproximaciones dinámicas, que contrasta con el tradicional uso de papel y lápiz, (pero no eliminándolo).
- No sustituye al docente, ni lo hace obsoleto y esto depende mucho de las creencias, la experiencia y el conocimiento del docente.
- Su éxito, va de la mano con la estrategia de las actividades que tienen que ver con su razonamiento y con el argumento que se le dé a los resultados obtenidos en la resolución de un problema.
- Necesario modificar la currícula para adecuarla a su empleo de manera más organizada y exitosa en los cursos de matemáticas, incluyendo el uso de laboratorios.

- No hay que abusar de ella pero si se usa es importante introducir al alumno en su empleo, ya que si no se hace los resultados esperados son frustrantes.

Referencias bibliográficas

Confrey, J. (1992). Using Computers to Promote Students' Inventions on the Function Concept. *American Assoc. for the Advancement of Science,* p. 131 - 161.

Díaz-Barriga, A.(2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México D.F, México: Mc Graw Hill, 2da edición.

Guin, D., & Trouche, L. (2000). Thinking of new devices to make viable symbolic calculators in the classroom. *Proceedings of the 24th PME International*, p. 101 - 125.

Hershkowitz, R., & Kieran, C. (2002). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: An experience with graphing calculators. *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 1, 96–107.

Kaput, JJ (1992). Technology and mathematics education. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York, USA: Macmillan.

Stanley, I. (2007). *Álgebra Lineal*. México D.F, México: Mc Graw Hill, 6ta edición.

Sutherland, R. (2007). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. *Algebra in the early grades. Mahwah* (pp. 215–256), NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Todd, R. (2005). *Aprendizaje Dinámico Con PNL*. Madrid, España: Ediciones Mundo Urano

Thompson, S. C. (1981). A complex answer to a simple question: Will it hurt less if I can controlit? *Psychological Bulletin*, 90, 89-101.

Smith, E. & Dennis, D. & Confrey, J. (1992). Rethinking Functions, Cartesian Constructions. In The History and Philosophy of Science in Science Education, *Proceedings of the Second International Conference on the History and Philosophy of Science and Science Education*, vol. 2 pp. 449 – 466.

Torres, J. y Gibert, R. (2006, julio). La enseñanza de la probabilidad y estadística usando Statgraphics. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 689-694. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y DE LA COMUNICACIÓN EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA EN UNIVERSIDADES PÚBLICAS COSTARRICENSES

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edefaria@emate.ucr.ac.cr, edefaria@gmail.com
Campo de investigación: Formación de profesores Nivel: Superior

Resumen. *El propósito de este reporte de investigación es compartir algunos resultados parciales del proyecto de investigación "las tecnologías digitales y la educación matemática en Costa Rica". El objetivo general del proyecto consiste en analizar el rol de las tecnologías de la información y de la comunicación en los programas de formación de profesores de matemática para la enseñanza secundaria, en universidades públicas costarricenses*
Palabras clave: tecnologías digitales, formación de profesores

Introducción

El gobierno de Costa Rica y algunas educativas públicas están realizando ciertos esfuerzos para introducir el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación en el ámbito educativo con el fin de fortalecer los procesos de innovación para la transformación y desarrollo de la sociedad del conocimiento (De Faria y Castro, 2003, De Faria, 2006). El Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, en colaboración con otras instituciones, está realizando esfuerzos para incorporar tecnologías digitales en la enseñanza primaria y secundaria en Costa Rica.

Las universidades públicas están dando importantes pasos dirigidos hacia la utilización de tecnologías digitales con fines educativos para responder a demandas de la sociedad, y las carreras encargadas de formar a los futuros docentes de matemática para la enseñanza secundaria están pasando por procesos de autoevaluación y autorregulación con el fin de, entre otros, potenciar la incorporación de tecnologías digitales como recursos didácticos.

Demandas nacionales

En los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública, para el tercer ciclo (Ministerio de Educación Pública, 2005a) y para el ciclo diversificado (Ministerio de Educación Pública, 2005b), encontramos algunas demandas que deberían ser contempladas en los planes de

estudios de las carreras formadoras de docentes para la enseñanza secundaria: Habilidades para tratar con los temas transversales de los programas; competencias en resolución de problemas; adaptación y adecuación curricular para necesidades educativas especiales; actualización de teorías en Educación Matemática y competencias tecnológicas.

En el documento Política Nacional en aplicación de las TICs a la Educación (Ministerio de Educación Pública, 2009a) se destacan como objetivos: Promover la transformación del sistema educativo costarricense, de forma que se desarrolle la utilización de las tecnologías digitales al servicio de la educación nacional, como estrategia para propiciar el desarrollo y el enriquecimiento de la enseñanza, el aprendizaje y la gestión educativa; y promover el desarrollo en el estudiantado de competencias cognitivas, éticas y sociales basadas en la apropiación de las tecnologías digitales.

En particular, la necesidad de que el futuro profesional en educación matemática desarrolle competencias tecnológicas concuerda con la investigación sobre las necesidades de desarrollo profesional del personal docente, técnico docente y administrativo del MEP (Ministerio de Educación Pública, 2009b), realizado por la institución responsable por la capacitación y actualización del personal en servicio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, el Instituto de Desarrollo Profesional Uladislao Gámez Solano. En sus conclusiones encontramos:

> Con respecto a las principales situaciones problemáticas del contexto (…) que más inciden en los procesos de enseñanza y aprendizaje, según el criterio del personal encuestado, se destacan las siguientes: limitaciones en el uso de herramientas tecnológicas, utilización de metodologías tradicionales, (…) escasa formación en investigación educativa de aula, limitaciones en la mediación pedagógica y limitaciones en el proceso evaluativo (pp. 9, 10).

En un estudio de empleadores de los profesores de educación secundaria organizado por el Consejo Nacional de Rectores (CONARE, 2005) también se recomienda capacitar a los profesores de enseñanza secundaria en el uso de nuevas tecnologías de enseñanza.

Las necesidades nacionales de inclusión de tecnologías de la información y comunicación en los programas de formación de profesores de matemática también están acordes con demandas internacionales orientadas al desarrollo de planes de estudio basados en competencias, entre ellas las competencias tecnológicas: Proyectos como Tunning-Europa (González y Wagenaar, 2006),

Tunning-América Latina (Beneitone P.; Esquetine C.; González J.; Maletá M.; Siufi G.; Wagenaar R., 2007) y 6x4 UEALC (Burbano, 2008).

Marco teórico

La formación inicial de los profesores de matemática es un proceso que requiere de planificación y estructuración que, según Rico (2004), debe atender a los siguientes cuatro criterios:

1. No se puede separar la formación teórica de la práctica educativa.
2. Debe existir una didáctica específica para cada una de las materias escolares.
3. Las competencias profesionales deben acuñar un papel central en la definición del plan de formación.
4. El trabajo en equipo es indispensable dentro de la formación profesional.

La formación inicial del profesorado debe tomar en cuenta las recientes investigaciones sobre el currículo de matemáticas, la incorporación de nuevas tecnologías y los procesos de aprendizaje basados en competencias, importantes elementos dentro del contexto social en el que se desarrolla la educación matemática. Por lo tanto es fundamental analizar y evaluar las competencias, particularmente las competencias tecnológicas, presentes en el desarrollo de los planes de estudio de la carrera de Enseñanza de la Matemática en las instituciones de educación superior.

Cabe aclarar que consideramos competencia matemática como “la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (Rico, 2005)”, y que la incorporación de las nuevas tecnologías en el currículo de los futuros educadores de matemática debe coadyuvar en el desarrollo de las competencias matemáticas.

Metodología utilizada

En esta etapa de la investigación, la metodología de recolección y análisis de información fue el

análisis documental. Consultamos y analizamos los Programas del Plan de Estudios de las Carreras de Formación de los futuros docentes de matemática para la enseñanza secundaria, de las Universidades Públicas de Costa Rica, las políticas de las Universidades, los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (Tercer ciclo y Educación diversificada), y las investigaciones mencionadas en la introducción relacionadas con el uso de las TICs en la educación.

En las siguientes etapas diseñaremos y aplicaremos instrumentos a profesores en servicio, estudiantes de la carrera y estudiantes graduados, empleadores, entrevistaremos a coordinadores de las carreras de formación de docentes de matemática de las universidades públicas,

En la siguiente sección describo los resultados del análisis documental.

Resultados

La Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), fundamenta su Plan de Estudios de Enseñanza de la Matemática en cinco ejes curriculares: Desarrollo del pensamiento lógico-matemático; enfoque investigativo; aplicaciones matemáticas; historia de la matemática y tecnología como recurso didáctico (Fundamentos de la Carrera de Enseñanza de la Matemática).

Acerca del eje curricular “tecnología como recurso didáctico”, menciona que “se refiere al uso de la tecnología, como recurso didáctico que facilite el aprendizaje matemático, en los diferentes cursos del plan de estudios. Este eje no es sólo importante en el aprendizaje sino para el desarrollo cultural y social del futuro Profesional”.

Actualmente se desarrollan investigaciones para determinar estrategias eficientes para incorporar la tecnología como eje curricular en la mayoría de los cursos de matemática de la carrera en sus distintas salidas profesionales: profesorado, bachillerato y licenciatura.

Algunos de los proyectos en este sentido son:

- Uso de la tecnología en la Carrera de Enseñanza de la Matemática en la Escuela de Matemática de la UNA, cuyo objetivo general es el de incorporar las nuevas tecnologías en

varias dimensiones en la Enseñanza de la Matemática en la Escuela de la UNA, con especial relieve en el currículo de la carrera de Enseñanza de la Matemática.

- La tecnología digital en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en el tercer ciclo de la educación general básica. Su objetivo general consiste en incorporar las nuevas tecnologías digitales (calculadoras, computadoras e Internet) en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el Tercer Ciclo de la Educación General Básica y estudiar la percepción de los profesores y estudiantes en el Tercer Ciclo de la Educación General Básica sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría y sobre el uso de las tecnologías digitales en dicho tema del currículo.

Las modificaciones en los programas de estudio se orientan a una mayor incorporación de la tecnología como recurso didáctico en todo el currículo, pero el proceso es bastante lento y hace falta capacitar a los profesores de la carrera en el uso de las tecnologías de la información y comunicación como recurso didáctico.

Entre los objetivos de la carrera destacamos: Brindar una formación básica en el campo de la Computación, con el fin de que el futuro educador esté en capacidad de desarrollar procesos didácticos utilizando la computadora, así como utilizar esta herramienta tecnológica para su uso personal; capacitar al futuro educador en la utilización de herramientas computacionales genéricas en procesos de enseñanza-aprendizaje; recomendar los programas computacionales en el campo de la matemática que mejor permita el trabajo creativo y exploratorio de los estudiantes, bajo guías apropiadas y elaboradas en la mayoría de los casos por los propios docentes; utilizar herramientas de desarrollo y lenguajes de programación de alto nivel para generar software en el campo de la Matemática, con fines didácticos, y analizar la potencialidad de Internet, como una herramienta de apoyo en el proceso didáctico.

El Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) es el que contempla un uso bastante amplio de las TICs en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. En el Plan de Estudios de la carrera de enseñanza de la matemática asistida por computador se encuentran dos cursos de programación que son dados por la Escuela de Computación, y talleres de software con aplicaciones, de multimedios en la educación y de software didáctico.

Algunos docentes de la carrera procuran actualizarse en el uso de tecnologías digitales, desarrollan algunos cursos de servicio en línea y publican en forma digital la Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, dirección electrónica (http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/), con sugerencias metodológicas acerca de la incorporación de las TICs en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Otros recursos importantes son (http://www.cidse.itcr.ac.cr/):

- El Congreso Internacional de Educación Matemática Asistida por Computador (CIEMAC) que se lleva a cabo cada dos años.
- El proyecto Centro de Recursos Virtuales que desarrolla la Escuela de Matemática del ITCR con el apoyo de la Fundación Costa Rica – Estados Unidos (CR-USA) que busca integrar y desarrollar alternativas para apoyar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

En la revisión de los programas de los cursos de la carrera no encontramos evidencias acerca de cómo articular los cursos de matemática y los cursos de pedagogía con las TICs de forma integral.

El Plan de Estudios de la Universidad Estatal a Distancia (UNED) especifica como una de las características del futuro graduado en enseñanza de la matemática, "conocer al menos dos lenguajes de computación y utilizarlos para lograr una mayor eficiencia en la labor docente", pero al revisar dicho plan no encontramos evidencias que confirmen este propósito. El Plan no contempla cursos de computación y los programas de cursos no contienen menciones explicitas referentes al uso de las TICS, pero la carrera está utilizando plataforma de aprendizaje a distancia basada en el software Moodle para algunos de los cursos de matemática de la carrera.

Finalmente, encontramos en el Plan de Estudios de la carrera de bachillerato en enseñanza de la matemática de la Universidad de Costa Rica pocas evidencias sobre el uso de TICs como recurso didáctico. La carrera ofrece dos cursos de laboratorio: Laboratorio de Matemática I y II, en el primer año de la carrera, cuyo objetivo es que el estudiante reconozca las posibilidades y recursos de las tecnologías digitales que favorezcan la enseñanza de la matemática en la educación secundaria. En el curso Fundamentos de Didáctica encontramos entre sus contenidos "las nuevas tecnologías y su incorporación didáctica". Uno de los objetivos generales del Plan de Estudios

vigente es la introducción de la computación y de los métodos numéricos en los primeros niveles de la carrera.

A pesar de la escasa evidencia encontrada en los programas de estudio, la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica se encuentra en un proceso de autoevaluación, y está tomando muy en cuenta las necesidades nacionales relacionadas con la incorporación de las TICs en el Plan de Estudios de la carrera de enseñanza de la matemática.

Conclusiones

Exceptuando la carrera de enseñanza de la matemática asistida por computador del Instituto Tecnológico de Costa Rica, encontramos escasas evidencias acerca del uso de tecnologías de la información y de la comunicación en los planes de estudios de las carreras encargadas de formar a los futuros docentes de matemática para la enseñanza secundaria.

Es importante destacar los esfuerzos que se están realizando para corregir estas deficiencias y para responder a las necesidades nacionales de un mayor desarrollo de competencias tecnológicas en la etapa de formación de los profesionales en educación matemática, para atender los complejos desafíos del mundo de hoy.

Referencias bibliográficas

Beneitone P.; Esquetine C.; González J.; Maletá M.; Siufi G.; Wagenaar R., eds. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final – Proyecto Tunning – America Latina 2004-2007* España: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen.

Burbano. L. (2008). Relevancia del Proyecto 6x4 para América Latina. En *Propuestas y acciones universitarias para la transformación de la educación superior en América Latina*. *Informe final del proyecto 6x4 UEALC*. Bogotá, Asociación Colombiana de Universidades. Recuperado el 05 de Julio de 2009 de http://www.6x4uealc.org/site2008/indice.htm.

González J.; Wagenaar R., eds. (2006). *Tuning Educational Structures in Europe II. La contribución de las universidades al Proceso de Bolonia.* Bilbao, España: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen.

De Faria, E., Castro, A. (2003). Algunas experiencias en el uso de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Costa Rica. *Revista Uniciencia* 20(2), 213-224.

De Faria, E. (2006). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.). *Matemática y nuevas tecnologías en Costa Rica* (pp. 709-732). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CONARE (2005). Informe Final: Estudio de empleadores de los profesores de educación secundaria de Ciencias, Español, Estudios Sociales, Inglés y Matemática en Costa Rica (Consejo Nacional de Rectores. Oficina de Planificación de la Educación Superior).

Ministerio de Educación Pública. (2005a). Programas de Estudio 2005. Matemática III Ciclo. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2005b). Programas de Estudio 2005. Matemática Educación Diversificada. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública. (2009a). Política Nacional en aplicación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación a la Educación. Recuperado el 10 de octubre de 2009 de http://www.mep.go.cr/Centro DeInformacion/ Reglamentos.aspx

Ministerio de Educación Pública (2009b). Diagnóstico de necesidades de desarrollo profesional del personal docente, técnico docente y administrativo del Ministerio de Educación Pública. Instituto de Desarrollo Profesional Uladislao Gámez Solano. San José, Costa Rica.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8 (1). Universidad de Granada, España.

Rico, L. (2005). La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA. *En Fundación Santillana: La competencia matemática en PISA*. Madrid.

ASPECTOS COGNITIVOS Y ACTITUDINALES MOSTRADOS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AL RESOLVER UNA SITUACIÓN SOBRE VARIACIÓN: UN ANÁLISIS CUANTITATIVO

Elena Fabiola Ruiz Ledesma Ángel Salvador Montiel Sánchez
Escuela Superior de Cómputo. Instituto Politécnico Nacional México
efruiz@ipn.mx, chavamontiel@hotmail.com
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *En este documento se muestran los resultados del análisis cuantitativo de las respuestas de estudiantes que cursan el 1º y el 3er semestre de ingeniería en sistemas computacionales, ante un problema sobre el concepto de variación en el contexto de la física, en donde se pretenden revisar los conocimientos y actitudes que muestran los estudiantes para identificar oportunidades de aprendizaje cercanos a su futura práctica profesional. Esta situación en contexto se presentó en una página web, a través de la cual se pudieron revisar las respuestas dadas por los alumnos, mediante su clasificación en categorías y la elaboración de gráficas. Los resultados del análisis de los datos muestran que para los alumnos, el contexto de la ciencia representa un obstáculo en la resolución de problemas y al mismo tiempo una oportunidad de aprendizaje.*
Palabras clave: aprendizaje, variación, análisis cuantitativo

Introducción

El antecedente inmediato del presente trabajo se ubica en un estudio realizado por González, Ruiz, y Flores, (2008), sobre la detección de obstáculos que dificultan el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería del Instituto Politécnico Nacional en el **tema variación**, en donde se encontró que los profesores utilizan un tipo único de estrategias de enseñanza para el concepto de variación, lo que consideramos como un obstáculo, debido a que se atiende un número reducido de elementos que se requieren incluir en la educación matemática y no promueve la atención a la diversidad de formas de aprendizaje ni de nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Por otro lado, y que es fundamental señalar, el Modelo educativo del IPN, (2006), finca la labor docente en tener al estudiante como centro del proceso enseñanza-aprendizaje, así el profesor debe interactuar entre el conocimiento (saber) y el alumno, a través de estrategias que le permitan a este último apropiarse del saber matemático, por lo que uno de los roles del profesor es el de planear las estrategias didácticas y ambientes de aprendizaje adecuados para que en forma co-responsable con el estudiante, éste aprehenda a ser, aprehenda a hacer y aprehenda a "saber", es decir, se deberán desarrollar competencias profesionales y laborales en los

estudiantes, para incrementar la calidad de la ingeniería. De esta forma, el profesor está consciente que un alumno no sólo requiere aprender la disciplina sino también vincularla con las demás áreas del conocimiento y potenciar las habilidades del pensamiento como son la abstracción, el razonamiento lógico-matemático, el análisis de situaciones para una efectiva toma de decisiones, como lo señalan De Faria, (2006) y Delors, (1996).

También, el profesor debe tomar en cuenta el aspecto de la metacognición, como lo señalan Flórez, Torrado, Mondragón, y Pérez, (2003), lo que se incluyó en el cuestionario que se aplicó a los estudiantes y que es reportado en este artículo.

Es por lo anterior que nos planteamos la siguiente pregunta.

¿La integración entre conocimientos y desarrollo de actitudes ayuda a que el estudiante de sentido a un problema de física, en este caso sobre variación?

Metodología

Para poder responder a la pregunta planteada se empleó un instrumento que consistió en un problema con preguntas cuya formulación iba encaminada a revisar aspectos tanto de conocimiento como valorales del estudiante. El contexto de aprendizaje en el que se emplearon estas preguntas fue cuando se trabajaron problemas de Cálculo, como razón de cambio y optimización, de ahí que la forma en que fue implementado consistió en la aplicación de problemas con preguntas. Se hizo un análisis de tipo cuantitativo, debido a que la muestra de participantes permitió tener una variedad de repuestas representativas de la población. Para realizar el análisis, se contabilizaron dichas respuestas para la elaboración de gráficas de barras.

Muestra

El problema planteado fue resuelto por estudiantes tanto de 1er semestre como de 3er semestre de ingeniería. La muestra estuvo constituida por 78 estudiantes del tronco común de una carrera de ingeniería, equivale al 17.3% de la población, que es de 450 estudiantes.

Cabe hacer el señalamiento en que no se analizaron las diferencias entre las respuestas dadas por los alumnos del primer y tercer semestre.

Cuestionario

Se desarrolló un entorno visual o mejor conocido como página WEB que resultara agradable para que los alumnos pudieran contestar las preguntas que se realizaron sobre el concepto de variación. Al visitar la página http://escom.ipn.mx:82/efruizl/ hay una entrada amigable y fácil de utilizar, para dar paso a contestar el cuestionario, así pues contemplamos la captura de datos que nos permitían evaluar los conocimientos a través de los semestres.

También se cuenta con el cuestionario en papel para que el estudiante pueda dar la respuesta sin tener que recurrir al sitio WEB.

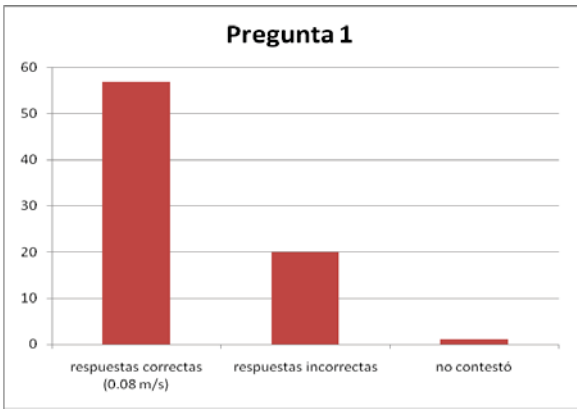
Análisis de datos y discusión de resultados

Las respuestas a las 6 preguntas formuladas al estudiante se clasificaron en categorías, las cuales se encuentran en el eje horizontal de cada gráfica y la frecuencia con la que fueron dadas se ubican en el eje vertical.

Pregunta 1: ¿Cuánto cambia la velocidad del aire, cuando la temperatura se eleva de 22 a 24ºC?

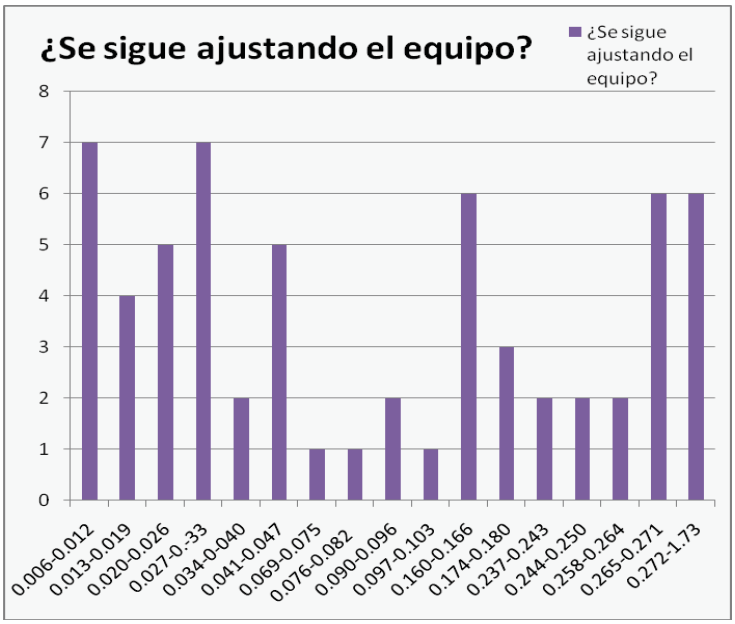
Tabla 1. Categorías de las respuestas a la pregunta 1

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Respuesta Correcta	57	73.07%
Respuestas Incorrectas	20	25.64%
No respondió	1	1.28%
Total	78	



La mayor parte de nuestra muestra (73%) respondió de forma correcta a la pregunta número uno, lo que muestra que fueron capaces de obtener el incremento mediante una traducción de representación gráfica a simbólica.

Pregunta 2 ¿Si se está ajustando el equipo, qué tan rápido ha de cambiar el valor de velocidad del aire, cuando la temperatura es de 22º C, para seguir cumpliendo con la norma marcada por la gráfica?



Media: 0.188443548

Desviación estándar: 0.318807327

Figura 2.Gráfica que presenta Categorías respuestas a la Pregunta 2

El valor correcto es 0.030, tomamos en cuenta como válido al intervalo 0.027- 0.033. La dispersión en los valores es muy grande, por lo que podemos afirmar que los alumnos no lograron interpretar la razón de cambio en la gráfica.

Pregunta 3: Si tienes que decidir entre salirte de la norma para que el equipo dure más o respetar la norma para que las condiciones del ambiente sean más propicias para las personas ¿qué harías? Toma en cuenta que el equipo es muy costoso. Argumenta tu respuesta y participa en el debate grupal.

Tabla 2. Categorías respuestas pregunta 3

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Salirse de la norma	19	24.36%
Respetar la norma	44	56.41%
No pudo tomar una decisión	15	19.23%
Total	78	

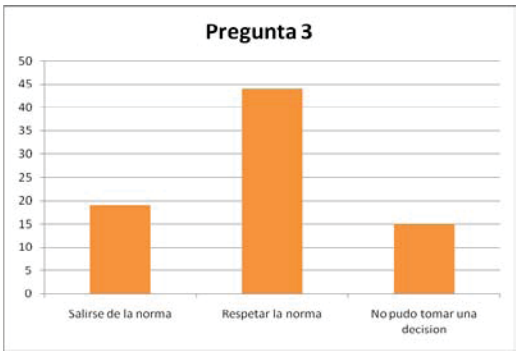


Figura 3

En la tabla 2 y figura 3, se puede observar que sólo un poco más de la mitad de la muestra (56%) está dispuesta a respetar la norma, por lo cual se puede afirmar que hace falta hacer conciencia acerca de las condiciones humanas para la realización de un trabajo, de manera que se respete el derecho a cuidar la salud.

Pregunta 4: ¿Qué aprendiste?

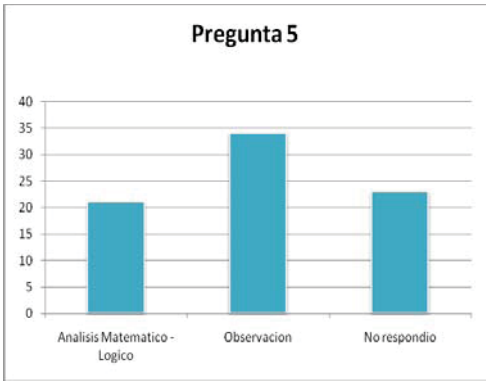
Tabla 3. Categorías respuestas Pregunta 4

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
No Contestó	21	26.92%
Análisis de Gráfica	11	14.10%
Incrementos, Relación Vel-Temp	14	17.95%
Aprendió Nada	14	14%
Observar Variable	5	5%
Análisis del Caso Real	13	13%
Total	78	

Se puede observar que solamente el 27% de la muestra identificó un aprendizaje obtenido al responder el problema, los demás mencionan conocimientos que utilizaron en el proceso. Es importante hacer notar que alrededor del 27% de la muestra no respondió a esta pregunta.

Pregunta 5: ¿Cómo resolviste el problema?

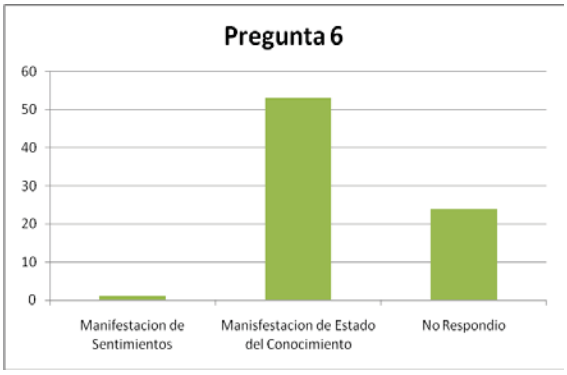
Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Análisis Matemático - Lógico	21	26.92%
Observación	34	43.59%
No respondió	23	29.49%
Total	78	



De acuerdo con los porcentajes mostrados en la tabla y la gráfica, se puede afirmar que alrededor del 70% de la muestra logró identificar si utilizó principalmente la representación gráfica (observación) o la simbólica (análisis matemático-lógico), pero no existe evidencia de quesean capaces de identificar el plan utilizado para resolver el problema. Esto conduce a señalar que no muestran contar con habilidades metacgnitivas.

Pregunta 6: ¿Cómo te sentiste en cada etapa de tu respuesta?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Manifestación de Sentimientos	1	1.28%
Manifestación de Estado del Conocimiento	53	67.95%
No Respondió	24	30.77%
Total	78	



De los resultados se puede afirmar que la muestra no identificó las emociones que presentó en la resolución del problema, puesto que poco más del 1% manifestó sentimientos, el resto lo interpretó como estado de conocimiento, de lo que se puede inferir que confundieron emociones con metacognición.

Conclusiones

A partir de los resultados se puede afirmar que los estudiantes de la muestra fueron capaces de:

- Traducir de una representación gráfica a simbólica para obtener el incremento de una variable (73%)
- Identificar si utilizó una estrategia gráfica o simbólica (70%).
- Identificar los aprendizajes logrados (27%)

Y se puede afirmar que se presentaron obstáculos en los estudiantes de la muestra para:

- Proponer procedimientos para calcular una rapidez de cambio instantánea, a partir de una gráfica (9%)
- Valorar la salud del personal por encima de los recursos materiales (44%)
- Identificar el plan utilizado para resolver el problema (100%)
- Identificar emociones (99%)
- Analizar la situación en todos los aspectos que implica el problema, por su contexto (100%).

En resumen, al resolver una situación en el contexto, se presentan obtáculos para los alumnos, que impiden identificar procedimientos conocidos por ellos, además no se involucran con los aspectos que son fundamentales en la vida real. Aunque nos damos cuenta que aquellos alumnos que reflexionan acerca de las condiciones humanas de los trabajadores, son concientes de la situación y no atacan de manera directa un problema de forma analítica. Este problema les sirvió para recapacitar acerca de las condiciones humanas relacionadas con la variación.

Lo importante de desarrollar ejemplos de este tipo es que despiertan el interés del estudiante, y tanto el buen planteamiento de un problema tanto como la buena lectura y comprensión del mismo pueden facilitar los cálculos.

A partir de los resultados se puede concluir que para que se cumpla con el objetivo de que la educación sea integral, se pueden utilizar instrumentos de evaluación que les brinden a los estudiantes la oportunidad de aproximarse a situaciones reales, similares a las que tendrán que enfrentar cuando se integren a la actividad productiva, lo cual se favorece mediante el uso de un contexto de ciencia y tecnología.

Referencias bibliográficas

De Faria, E. (2006). *Control en la resolución de problemas*. Recuperado el 07 de octubre de 2008 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria

Delors, J. (1996). *La Educación encierra un tesoro*. Madrid: UNESCO/ Santillana Madrid.

Flórez, R., Torrado, M. C., Mondragón, S. P. y Pérez, C. (2003). Explorando la metacognición: Evidencia en actividades de lectura y escritura en niños y niñas de 5 a 10 años de edad. *Revista Colombiana de Psicología 12*, 85-98.

González, L. M., Ruiz, E. F. y Flores, E. (2008). Detección de obstáculos en el aprendizaje del concepto de variación en estudiantes de ingeniería. *5º. Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de sistemas*.

Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN. (sf). Recuperado el 12 de septiembre de 2006 de http://www.comunidades.ipn.mx/riieeme/Languages/Espa%C3%B1ol/UploadFiles/Documents/20ModeloEducativoVersion27julio2003Resumen.pdf

Cuestionario. (sf). Recuperado el 5 de abril de 2009 de http://escom.ipn.mx:82/efruizl/

EL USO DE LA TECNOLOGÍA COMO INSTRUMENTO FACILITADOR EN EL DESARROLLO DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Javier Barrera Ángeles; Tulio Rafael Amaya de Armas; Petra Téllez Reyes
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
Institución Educativa Madre Amalia. Sincelejo Colombia
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 8 México
jbarrera12@hotmail.com, tuama1@hotmail.com, ptr405@hotmail.com
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo muestra resultados de la investigación cuyo objetivo fue estudiar y documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior, en un contexto de resolución de problemas con estudiantes de nivel superior (18-20años). Considerando el uso de la tecnología como la herramienta que permite el desarrollo de habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos.*
Palabras clave: representación, visualización, estrategias, resolución de problemas, procesos matemáticos

Introducción

La incorporación de los recursos tecnológicos a la enseñanza de las matemáticas fortalece la investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas. En este sentido, esta investigación plantea estudiar y documentar de qué manera el uso de estos recursos facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior en un contexto de resolución de problemas. Se cree que el uso de la tecnología permite desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes cuando estos manipulan objetos matemáticos. Es tal su aceptación que instituciones educativas de diversos países promueven su uso. Además, instituciones no gubernamentales como el NCTM (Nacional of Council of Teachers of Mathematics) promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos. Existen investigaciones que abordan el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Viveros y Sacristán (2002) usan la tecnología para comparar el concepto de continuidad y diferenciabilidad. En este sentido se plantean tres problemas al estudiante, los cuales debe resolver primero de manera tradicional y después usando la tecnología. El análisis de los resultados muestra que cuando se resuelven problemas con lápiz y papel, no siempre se reflexiona sobre los procedimientos efectuados al momento de resolver problemas. Sin embargo, existen algunos casos en los cuales si se reflexiona sobre las respuestas a través de la visualización y la

interrelación de los conceptos u objetos matemáticos. Por ultimo, es evidente que el uso de las herramientas tecnológicas si favorece en buena medida el desarrollo de habilidades en estudiantes al momento de resolver problemas. Además de potencializar la generalización.

Presentación del tema y objetivos

Esta investigación se enmarca dentro del contexto etnográfico, es decir, en él se intenta descubrir y describir las acciones de los estudiantes dentro de la interacción con la resolución de problemas, con y sin el uso de la tecnología. Así, el objetivo de esta investigación es estudiar y documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior.

Marco teórico

Reconocemos la importancia para esta investigación, de los recursos tecnológicos como las TIC´s (tecnologías de la información) o tecnología CAS (Computer Algebra Systema); por su incidencia en el aprendizaje, en forma individual de los alumnos, además, que la tecnología, no sólo ha revolucionado el conocimiento matemático, abriendo caminos a la investigación matemática, por la importancia de sus aplicaciones al desarrollo científico, sino que los estudios adelantados hasta el momento muestran evidencias de su impacto cognitivo en el aprendizaje, dado el poder expresivo que las herramientas computacionales poseen, que “las sociedades contemporáneas dependen, para su desarrollo, de sus capacidades para producir, aplicar y transmitir el conocimiento científico y tecnológico” (MEN, 2002, 12), y que a pesar de los esfuerzos que se han hecho por diversas instituciones de muchos países, sigue habiendo dificultad para la enseñanza de conceptos básicos del cálculo, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones estarían muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (Godino, et al., 2005). De esta forma, la disponibilidad de los recursos tecnológicos, destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es abundante; así, lo demuestran investigaciones recientes, además, instituciones no gubernamentales como el NCTM (Nacional of Council of Teachers of

Mathematics) promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos; esta situación plantea un reto a profesores e investigadores en educación matemática ya que la incorporación de estos recursos en el estudio de las matemáticas no es inmediata y requiere del manejo de situaciones con el uso de los recursos tecnológicos para desarrollar al máximo las capacidades y habilidades de pensamiento matemático. Por otra parte, Kieran (2006) menciona que la disponibilidad de la tecnología CAS (Computer Algebra Systems) en la escuela, vendrá con el desarrollo de la estructura teórica para interpretar cómo la tecnología media como un instrumento en el desarrollo del pensamiento matemático. Ambos tienen que contribuir a un reciente incremento de atención para la interacción entre la tecnología y la teoría. En la actualidad, pueden usarse herramientas tecnológicas para resolver problemas que en otros tiempos sólo quedaban en la imaginación. En este sentido, las herramientas tecnológicas han servido para mejorar el aprendizaje y apoyar la enseñanza de las matemáticas. Esta práctica es cada vez más común en instituciones de educación superior (Figueras, 2005).

Viveros y Sacristán (2002), estudiaron la relación entre el concepto de continuidad y diferenciabilidad, cuyo objetivo principal se centró en analizar la influencia y el uso de los diferentes registros de representación durante el proceso de determinación de la continuad y diferenciabilidad de una función a través del álgebra o aproximación gráfica. Encontraron que los estudiantes usan ambos registros, el visual y el algebraico, pero predomina más el algebraico, y las respuestas de los estudiantes se enfocaron sobre el análisis de las características de solamente uno de los registros. Además, cuando determinaron la diferenciabilidad de una función, se encontró que los estudiantes no usaron el registro gráfico, aún así, la función fue dada a través de su gráfica. También observaron que existe una falta de entendimiento de las características visuales que ayuden a determinar la diferenciabilidad de una función, y un exceso de confianza sobre la continuidad o no continuidad de la función para determinar la diferenciabilidad.

Contreras, et al., (2007) encontraron que los estudiantes cometen errores importantes en sus respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación sobre límites, continuidad y derivadas. Este hecho, nos lleva a firmar que el uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. Por otra parte, estos resultados apoyan la conjetura de

que determinados usos del ordenador aportan muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario.

Sánchez, Butto, Orendain y Ursini (2004), investigaron sobre el comportamiento de los estudiantes cuando se usa la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas. Los resultados muestran que, desde la perspectiva de los docentes, el uso de la tecnología en la clase de matemáticas modifica la mayoría de estos aspectos y estos cambios son distintos en varones y en mujeres. Por otra parte, la importancia del uso de herramientas tecnológicas es la interactividad dada por la relación sujeto-herramienta tecnológica. Esta relación permite observar ciertos patrones de conducta en el sujeto cuando interactúa con la herramienta tecnológica. En este sentido pueden apreciarse dos situaciones: la primera tiene que ver con las representaciones estáticas o inertes; una característica esencial de este punto, es que las acciones de los estudiantes no reaccionan con las representaciones de los objetos matemáticos. La segunda situación tiene que ver con un medio interactivo, en el cual los estudiantes reciben respuesta a sus acciones (Estrada, 2002).

La visualización de los registros de representación juega un rol muy importante en el estudio de los procesos matemáticos. En este sentido, la visualización es definida como una relación entre imágenes (Solano y Presmeg, 1995), estos autores mencionan que para poder visualizar hay necesidad de crear muchas imágenes; de esta manera, los estudiantes deben crear muchas imágenes para después usarlas en los procesos matemáticos para dar sentido a las situaciones geométricas. Además, la visualización y la imaginación juegan un papel importante en los procesos usados en la resolución de problemas matemáticos.

Metodología

Se trabajo con 30 es estudiantes de nivel superior (18-20), el trabajo fue dividido en tres actividades básicas: 1) se preparo durante 4 meses a los estudiantes en un curso tradicional de cálculo diferencial (límites, funciones, continuidad, derivada, etc.); 2) se adiestro a los estudiantes en el manejo de la herramienta tecnológica para cálculo (calculadoras TI-85) durante un periodo de un mes. En esta parte se priorizaron actividades sobre limites y funciones con el uso de la herramienta tecnológica; 3) finalmente se diseñaron las actividades a través de la Academia. La

puesta en escena de las actividades fue desarrollada en tres momentos, en primer lugar se aplico a los estudiantes las actividades diseñadas, mismas que resolvieron a lápiz y papel; en segundo lugar se aplico la misma actividad pero con el uso de la herramienta tecnológica y por ultimo, se hizo una selección de respuestas para el análisis de resultados.

Análisis de resultados

Análisis de la actividad 1.

En la primera actividad se les pidió a los estudiantes trazar la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, indicando las asíntotas horizontales y verticales si existen, e indicar el dominio, rango y el tipo de discontinuidad especificando los valores de "x" en donde hay dicha discontinuidad. Al respecto, existe una variedad de argumentos en cada una de las respuestas, por ejemplo, un estudiante describió lo siguiente: "el primer paso a simple vista me di cuenta de que es una función cuadrática, por lo que llego a mi mente la representación de esa grafica, y por ser cuadrática pueden existir términos positivos y negativos que al sustituir hagan una indeterminación". Otro estudiante usa el registro de tabulación como estrategia, y comenta, "luego después de conocer el dominio, tabulo asignándole valores validos a "x" para trazar la grafica"; este caso ilustra muchas de las respuestas de los estudiantes quienes no reflexionan sobre los resultados obtenidos, ya que al trazar la grafica solo se limitan a dibujar puntos y unirlos con segmentos de recta, dando como resultado gráficos completamente diferentes a los que corresponde la respuesta correcta. Por otra parte, existen respuestas que consideran como estrategia el uso reflexivo de los conceptos de cálculo, por ejemplo, un estudiante establece la siguiente estrategia: equivalencia $\frac{x^2}{x^2-4}$ $\frac{P}{Q}$, $D=\Re-\{2,2\}$, la parte P puede tomar todos los valores $\Re$ pero la Q no, así que definimos el dominio donde Q≠0. Y como f (-x)=f(x) la función es par y por lo tanto es simétrica al eje de las "y". Para hallar las raíces se hace $\frac{x^2}{x^2-4}$ =0, por obvias razones las asintotas verticales están en 2 y -2. Ahora se calcula las asintotas horizontales $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{\infty}=0$, Por ultimo tomamos todos los elementos encontrados y graficamos. Hasta aquí hemos ilustrado tres casos

representativos sobre las respuestas más comunes que los estudiantes ofrecen al intentar resolver el problema planteado.

Análisis de las actividades 2a y 2b.

En esta actividad se les pidió a los estudiantes calcular los siguientes límites, 2a. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{sen2x}{x}}$, 2b. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\right)$. Para el desarrollo de Esta actividad, los estudiantes utilizaron diferentes estrategias, por ejemplo, un estudiante escribió $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{sen2x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen2x} = \lim_{x\to 0} x\csc 2x$; esta respuesta muestra una simple operación algebraica sobre la cual el estudiante no reflexiona en cuanto a cual debe ser el resultado correcto, ya que solo se queda planteado y sin resolver. Algunos otros intentos para resolver este problema tienen que ver con el uso de las identidades trigonométricas. Por ejemplo, $\frac{1}{\frac{sen2A}{x}} = \frac{x}{sen2A} = \frac{x}{2senx\cos x} = \frac{0}{0}$". Esta segunda respuesta da evidencia de que el estudiante carece de una actitud reflexiva en cuanto a los resultados que obtiene al intentar resolver ciertos problemas matemáticos. Por ultimo, en la actividad 2b, algunas de las respuestas correctas están basadas en la estrategia de la racionalización (procedimientos algebraicos), y al igual que en los casos anteriores, los resultados no muestran un entendimiento de los procesos matemáticos desarrollados, tan es así que solo se dejan guiar por los resultados, ya sean numéricos o algebraicos que obtienen, sin importar si estos son correctas.

Análisis de las actividades con uso de tecnología.

En la actividad 1, podemos decir que las respuestas de los estudiantes fueron de manera inmediata, debido a la visualización de la grafica y las aproximaciones que el equipo les permitía hacer. Un aspecto importante en las respuestas de los estudiantes tiene que ver con las distintas relaciones que hicieron a través de la visualización grafica, es decir, lograron entender que conceptos como el dominio, rango, continuidad, asintotas verticales y horizontales y limites guardan una relación estrecha en la construcción de una grafica y que a su vez, esta grafica

describe un problema. Algunos de los comentarios fueron “es mas fácil debido a que el SUM por nos permite precisar sobre la respuesta”. Otro aspecto importante que se observo fue el hecho de que lograron visualizar a través de varios ejemplos que se puede generalizar a otro tipo de funciones. En segundo lugar (2a, 2b), los estudiantes introdujeron las funciones a la calculadora y mediante la manipulación de esta y la visualización grafica, fue como lograron dar respuesta a la pregunta planteada de manera correcta, aunque cabe decir que en algunos casos no hubo una visualización adecuada, lo cual les llevo a dar respuestas incorrectas.

Conclusiones

Es conveniente mencionar tres aspectos importantes de esta investigación, en primer lugar los estudiantes no reflexionan sobre los procesos que realizan en la solución de los problemas cuando trabajan a lápiz y papel. Es decir, realizan operaciones numéricas y algebraicas sin analizar si lo que hacen es correcto o no; en segundo lugar existen algunos casos en que los estudiantes analizan y reflexiona sobre el desarrollo de los procesos a través de la relación de los conceptos. Por ultimo, el uso de la tecnología facilita el desarrollo de habilidades tales como la visualización y la relación.

Referencias bibliográficas

Contreras, E. (2007). Aplicación del programa matemática a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. México: Dirección General de Investigación.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos en la formación del profesorado. Recuperado el 20 de octubre del sitio web: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.estrada.pdf

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación, Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación, Matemática SEIEM, p. 6-16 Universidad de Córdoba (España).

Godino, et al. (2005). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. IX Simposio de la SEIEM, Córdoba (España).

Kieran, K. (2006). Reconciling factorizations made whit CAS and with paper-and-pencil: the power of confronting two media, Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2), 473-480. Prague, Czech Republic

MEN (Ministerio de Educación Nacional). (2002). Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas. Proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media de Colombia. Bogotá, Colombia.

Sánchez, G. Butto, C. Orendain, M & Ursini, S. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 22(3), 409-424

Solano A. & Presmeg C. (1995).Visualization as a relation of images, Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 3(19), 66-71. Universidad Federal de Pernambuco, Brazil

Viveros, K. & Sacristán, A. (2002) "College Students' Conceptual Links between the Continuity and the Differentiability of a Function." En Mewborn, D.S et al. (eds) Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp.353-363). Athens, Georgia: ERIC Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education

DESARROLLO DE APLICACIONES INFORMÁTICAS CON MODELACIÓN MATEMÁTICA ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL A NIVEL LICENCIATURA

Víctor Guevara Basaldúa, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
victorguevara21@hotmail.com, vil@uaq.mx
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Superior

Resumen. *En este documento presentamos una manera de trabajar con la definición del Cálculo Integral, definición a través de Sumas de Riemann en la cual se utilizan, por ejemplo, Límites y Sumatorias. Lo que pretendemos con esta forma de ver el Cálculo Infinitesimal, es diseñar algunas actividades dentro de un software interactivo (que también diseñaremos) que contenga los elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia tan importante a nivel licenciatura. La modelación matemática y la visualización son algunos de esos elementos y, la intención con el software, es incrementar la aplicabilidad de éstos, logrando así un mejor entendimiento de los conceptos inmersos en dicha definición. Mostramos aquí un acercamiento de lo que con el software los alumnos llegar podrían llegar a realizar una vez que éste estuviese debidamente terminado. Dicho trabajo es un proyecto de maestría que se encuentra a la mitad de su desarrollo, pero que deseamos terminar y aplicar para el siguiente ciclo escolar.*
Palabras clave: cálculo integral, modelación matemática, matemática educativa, visualización, software

Introducción

Es bien sabido que en la vida escolar preuniversitaria o universitaria un buen número de dificultades en los estudiantes están asociadas al manejo de los conceptos básicos y no tan básicos del Cálculo diferencial e integral. Se ha probado inclusive que aún aquellos estudiantes que ya han llevado uno o dos cursos de Cálculo muestran serias deficiencias al momento de trabajar con los conceptos inmersos en esta materia: Aparicio (2006 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). Por supuesto que esto trae consigo las consecuencias más lamentables para los estudiantes que intentan un desarrollo personal y profesional dentro de una preparación científica y social importante para su vida. Una de estas consecuencias es la deserción escolar que finalmente termina por cobrar costosas facturas a la sociedad. Por ejemplo, en la UNAM desertan el 30% de los 35, 000 alumnos que ingresan a alguna de las licenciaturas, y por tal motivo la sociedad mexicana pierde 262 millones 500 mil pesos anuales en alumnos que no concluyen su carrera profesional como lo señala Rodríguez (2000 citado en García, 2006). Cabe señalar también que un 25% de alumnos que abandonan la licenciatura, lo hacen por reprobar materias de matemáticas

(principalmente Cálculo Diferencial e Integral) en los dos primeros semestres (Aparicio y Ordaz, 2006).

Es claro que existe un problema con la enseñanza de las matemáticas en general, puesto que las estadísticas señalan altos porcentajes del disgusto que esta disciplina causa en la mayoría de los estudiantes. Particularmente en el área del Cálculo a nivel licenciatura los métodos convencionales de enseñanza llevan a los profesores a teñir de algoritmos sus cursos obteniendo poca ganancia cognitiva y repercutiendo directamente en el currículo: Cantoral (1993 citado en Zaldívar, 2006). Además de que el estudio del Cálculo tiende a centrarse en una práctica algorítmica, se intenta desde los inicios, aplicar los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática: Moreno (2005 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). No se reconocen los mecanismos de producción de los conocimientos ni la organización social en el aula, que en conjunto hacen posible tal construcción; es decir, podemos decir que existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar: Cordero (2001 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). Por otra parte, muchas veces la enseñanza del Cálculo es presentada en los salones alejada del mundo en que se desenvuelven o se podrían desenvolver los alumnos.

Consideraciones sobre visualización y modelación matemática

Con el propósito de subsanar los problemas que hemos mencionado anteriormente sobre el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo, intentaremos dar una idea general en este apartado sobre lo que deseamos haga nuestro software. Creemos que el trabajo algebraico, algorítmico y operatorio es importante para enseñar Cálculo Integral, sin embargo aquí haremos hincapié en el trabajo con modelación matemática, así como también con la visualización, ya que son elementos que se pueden incluir de manera más sencilla al estar trabajando con el software. De la misma manera que lo señalan Cantoral y Montiel (2001) entendemos a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. Por otro lado, sabemos que la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Mientras tanto, un modelo matemático de un fenómeno o de una situación es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. Tal y como

se señala en Salett y Hein (2004), "el modelo matemático no sólo permite obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías".

Como podemos ver, el significado de estos dos conceptos es muy importante y si se lograsen aplicar tal y como se dice en su definición, sería una gran ganancia, puesto que prácticamente se aprendería muy bien la matemática al mismo tiempo en que ésta se aplicaría para resolver problemas interesantes y más cercanos a la realidad. Precisamente intentaremos plantear algunas actividades en las cuales, con ayuda del software, se puedan resolver situaciones que ayuden al estudiante a comprender nociones sobre las Sumas de Riemann que se ven en la definición de la Integral, todo esto utilizando la visualización y la modelación como herramientas para el aprendizaje.

Algunos ejemplos

Para acercarnos un poco en esto de la modelación matemática veamos los siguientes ejemplos tomados de (Guevara, 2008), los cuales nos indican que cada pregunta sobre un tema o situación puesta en escena es fundamental para llegar a la construcción de un concepto más grande que puede formar parte del aprendizaje significativo sobre la situación señalada.

1. *Determinar la presión sobre una placa triangular sumergida verticalmente en agua y en tal forma que una base del triángulo está al nivel de la superficie del líquido.*

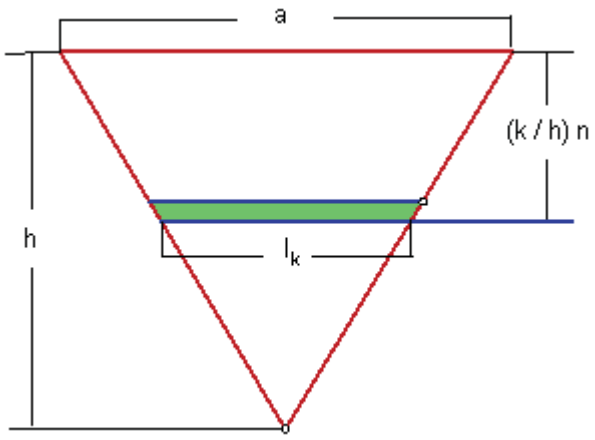


Figura 1

En la figura anterior se muestra una representación de dicha placa y la idea es analizar a lápiz y papel cómo es que se puede encontrar la presión que el agua provoca sobre la placa. Algunos de los pasos que se piden contestar a los alumnos son:

a) Si divides la placa en *n* franjas horizontales de igual ancho. ¿Cuál es el ancho en términos de la altura h y el número de franjas? ¿Podrías plantear alguna expresión para el ancho? ¿Cuál es?

b) Tomando en cuenta que la presión es igual al área de la superficie sumergida por la profundidad de sumergimiento y pensando que las franjas forman rectángulos y no trapecios (como en la Figura 1), encontrar el valor para l_k (la longitud de la franja *k*-ésima.) ¿Qué tienen qué ver para esta encomienda los triángulos ABC y PBQ?

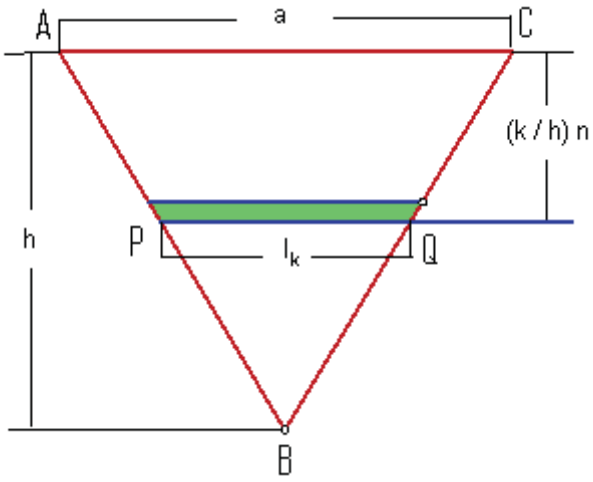


Figura 2

c) ¿Cuánto es el área de la figura "rectangular" sombreada?

d) ¿Cuánto es la presión sobre dicha franja?

La presión total sobre la placa triangular se encuentra sumando las presiones sobre las franjas particulares:

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}(1-\frac{k}{n})k$$

O bien

$$P \approx \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

e) ¿Qué significados tienen las expresiones anteriores?

f) Utilizar los resultados de límites y sumatorias necesarios para concluir que la presión total sobre la placa es

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{3}$$ O bien $$P = \frac{ah^2}{6}$$

2**.** *Encontrar el ritmo al que fluye la sangre a través de una arteria.*

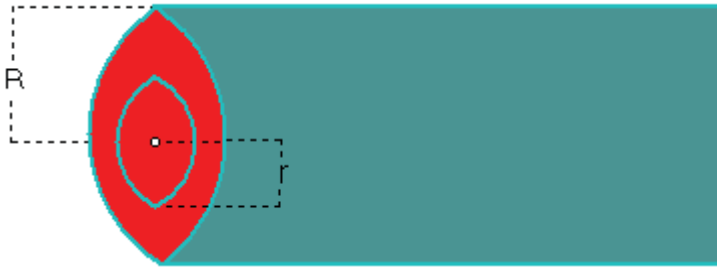


Figura 3

La velocidad de la sangre en una arteria es función de la distancia al eje central de la arteria, es decir, la velocidad de la sangre $(\frac{cm}{s})$ *que está a r cm. del eje central de la arteria es* $S(r) = k(R^2 - r^2)$*, donde R es el radio de la arteria y k es una constante. Ver la siguiente figura (Ley de Poiseville).*

La pregunta que resolveremos paso por paso es ¿con qué ritmo $(\frac{cm^3}{s})$ fluye la sangre a través de la arteria?

a) Si divides el intervalo [0, *R*] en *n* sub-intervalos de igual longitud Δr y te fijas en el sub-intervalo $[r_j, r_{j+1}]$, ¿cuál es el área del anillo comprendido en dicho intervalo? A dicho anillo llámale anillo r_j (Figura 4).

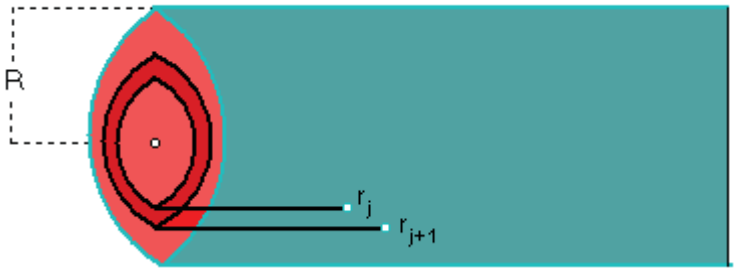


Figura 4

b) ¿Cuál es la velocidad de la sangre en ese anillo, según la Ley de Poiseville?

c) Al multiplicar el área del anillo y la velocidad, encuentras su ritmo, ¿cuánto es el ritmo?

d) Si haces más fina tu partición de [0, *R*], más cerca estás de encontrar el ritmo total en la arteria, esto porque los resultados anteriores son aproximaciones, ¿porqué? Si sumas ahora todos los ritmos de flujo encontrarás el ritmo total de manera exacta. ¿Cuánto es entonces, el ritmo en la arteria?

Cabe notar que estas son algunas de las actividades que forman parte de la tesis de Guevara (2008) y fueron diseñadas para aplicarlas, en un principio, a un grupo de profesores de nivel medio como parte de un diplomado sobre modelación.

Metodología

La manera como se puede trabajar con el software utilizando la modelación y la visualización, por ejemplo para el tema de volúmenes en sólidos de revolución y Sumas de Riemann, la podemos ejemplificar con una actividad como la que sigue.

Se tiene la función $f(x) = \sqrt{x}$ ¿Cuál será el volumen del sólido obtenido al girar la función sobre el eje de las abscisas en el intervalo [1, 3.5]?

Como esta es la pregunta a resolver por el método de Sumas de Riemann y con la ayuda del software, podemos pensar que, cuando se plantea la situación de encontrar el volumen, aún no se han visto con anterioridad los conceptos ni las herramientas necesarias para poder responder la pregunta con más facilidad (podríamos pensar en una clase de introducción en el salón de clase). Por tanto, cada actividad consecuente deberá seguir, cuánto más sea posible, los principios de la

modelación y de la visualización para que pueda surgir la construcción del conocimiento sobre el tema de Sumas de Riemann y la Integral Definida de manera más o menos guiada. Algunas de las situaciones siguientes pueden ser: si consideras una partición del intervalo [1, 3.5] en 10 sub-intervalos de la misma longitud, ¿cuáles son los puntos que delimitan a cada uno de los 10 sub-intervalos? ¿Cuál es la distancia entre cada par de puntos (el ancho de cada sub-intervalo)?

¿Cuál es la forma del sólido del cuál debes encontrar el volumen? ¿Podrías hacer un bosquejo? ¿Conoces alguna fórmula para encontrar el volumen de formas como la que se está analizando en esta ocasión?

Si contestaste que no a esta última pregunta, entonces puedes recurrir a las situaciones siguientes:

Elige alguno de los sub-intervalos construidos y construye un cilindro que tenga de altura al ancho de dicho sub-intervalo y que sea parte del volumen que se desea encontrar. ¿Cómo tendrías qué utilizar la función para saber el volumen del cilindro que has de calcular?

Si haces lo mismo (construyes un cilindro) con los demás sub-intervalos, ¿Qué tan cercano estás del volumen que se te pidió calcular?

Estas actividades, las podemos resumir con un algoritmo sencillo que debe seguirse al trabajar con el software. De esta forma el software se apega mucho a las características que debe tener un "bue software", señaladas por Mochón (2006). El algoritmo dice que el estudiante:

1. Decide un intervalo adecuado para encontrar el volumen del sólido.
2. Elige la partición adecuada para dividir uniformemente su intervalo elegido.
3. Calcula el ancho de cada intervalo.
4. Calcula el radio de los discos formados.
5. Calcula el volumen de los cilindros formados.
6. Calcula el volumen aproximado del sólido que construyó.

La interfaz con la que trabajaría el alumno tiene una cara como la siguiente:

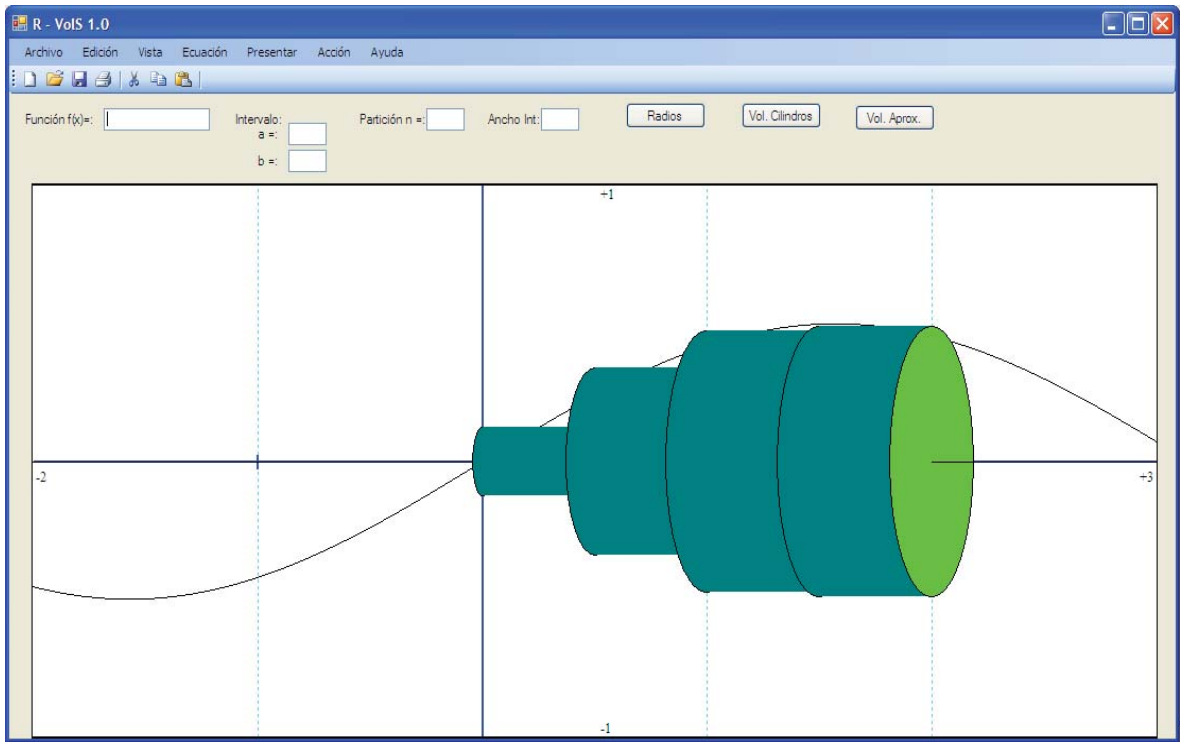


Figura 4

Observamos que con la manipulación tanto de la función como de los mismos cilindros el alumno se percata más fácilmente de los conceptos involucrados en la definición de Riemann, lo cual ayuda enormemente a reducir los problemas concernientes al aprendizaje de los elementos indispensables en esta disciplina.

El procedimiento que un alumno sigue dentro del salón de clases para aprender sobre sólidos de revolución se ve ahora reforzado y más agilizado con la ayuda del software porque le permite visualizar las regiones que forman el volumen, además de que también ayuda a construir cilindros que aproximan al volumen de la región.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., y Ordaz, G. (2006). *Estudio Cualitativo sobre la Reprobación del Cálculo en el área de Ciencia Computacionales y Matemáticas*. X Escuela de Invierno en Matemática Educativa pp. 22-30. Sta. Cruz Tlaxcala (2006)..

Cabrera, L., y Zaldívar, J. (2007). *Formación Didáctica en Cálculo Universitario. Una Propuesta Basada en el Diseño de Actividades como Eje Rector.* XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa pp. 396-407. Mérida, Yucatán

Cantoral, R., y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Pearson.

García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago del Cálculo.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán.México.

Guevara, B. V. (2008). *La Modelación Matemática en la Formación de Profesores de Bachillerato*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

Mochón, S. (2006). Avances y hallazgos en la implementación de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. En Filloy, E (Comp), *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 101 – 121), México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN y Santillana.

Salett, B. M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16 (2)*, 105-125.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE TRIÁNGULOS USANDO HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Liliana Tapia, Héctor Tarifa
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy Argentina
tresm@imagine.com.ar, clarisah@arnet.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Básico, Medio
Tecnología avanzada

Resumen. *La propuesta se sostiene en un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. Se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo. Pretende brindar al profesor un material estructurado en forma clara, precisa y amena, elaborado con todos los elementos que consideramos necesarios para ser un instrumento eficaz para la enseñanza de Triángulo. Fue diseñado, no como algo prescriptivo sino, como una reflexión sobre la "buena receta", es decir, para que oriente el análisis y los criterios de acción, discuta y exprese los supuestos y permita al docente decidir entre alternativas y comprobar resultados. A través de esta secuencia el alumno investiga si es posible construir triángulos que cumplan determinadas condiciones, puede explorar de forma interactiva y conjeturar las propiedades de los ángulos interiores y exteriores, la propiedad correspondiente a los lados y las rectas y puntos notables de un triángulo.*
Palabras clave: secuencia didáctica, triángulos, software educativo, Cabri

Introducción

Al encontrarnos insertos en un mundo de calculadoras, microcomputadoras y computadoras es preciso que profesionales, empresarios, docentes, estudiantes, entre otros, desarrollen otras aptitudes acordes con esta nueva forma de vida que, sin duda, los llevará a tener nuevos enfoques para sus actividades diarias. En particular en la educación, este hecho implica una apropiación de herramientas y el despliegue de capacidades nuevas no sólo al alumno sino también para el docente que es el motor del proceso educativo y gestor de la innovación educativa.

El uso de software con capacidad gráfica está dirigido a lograr un mejor y más significativo aprendizaje por parte del alumno, ya que posibilita reducir el tiempo de cálculo, permitiendo disponer de más tiempo para encarar los aspectos conceptuales y cualitativos de un problema o experimento.

El alumno puede adquirir destrezas en el manejo de modelos descriptivos, probar hipótesis o conjeturas más rápidamente adquiriendo así habilidades específicas en resolución de problemas y en toma de decisiones.

Al encarar el proceso de aprendizaje de un contenido de geometría plana, mediante el uso de software específico para tal fin, intentamos que el educando mediante el manejo de modelos sencillos, previamente analizados y concebidos para ese fin, experimenten distintas situaciones que lo lleven al descubrimiento de leyes, relaciones y comportamientos de los objetos geométricos. Él puede introducir nuevas conjeturas sobre los modelos experimentados, para preguntarse, por ejemplo, "¿qué pasaría si…" llegando así a confirmar o descartar esas conjeturas, proponer otros modelos, demostrar una propiedad o generalizar una idea.

Convencidos que los medios informáticos con capacidad gráfica son un instrumento poderoso con el cual puede contar el profesor en el aula, hemos diseñado una secuencia didáctica para el aprendizaje de triángulos utilizando Cabri realizando la experiencia en el aula con alumnos del nivel medio de la Escuela Agrotécnica N° 4 de Libertador General San Martín de la Provincia de Jujuy.

Marco teórico

Intentar cambios en los modelos tradicionales de la enseñanza, en este caso específico en la enseñanza de la Matemática y en particular de la Geometría, es una tarea compleja. Si estamos dispuestos a construir una didáctica transformadora de tradiciones pedagógicas rutinarias, necesariamente hay que admitir que el docente debe reflexionar sobre sus prácticas, interiorizarse sobre los resultados de las nuevas investigaciones educativas, analizar y debatir sus resultados, cotejar lo viejo y lo nuevo para hacer las rupturas necesarias y obtener nuevas conclusiones, rescatando lo positivo de cada una de ellas. Pero este es un camino que no es fácil de andar, por eso se justifica crear modalidades que nos posibiliten acompañarnos entre los docentes, intercambiando nuestras experiencias y propuestas didácticas. Por ello, esta secuencia está dirigida al docente de matemática que cotidianamente está en la búsqueda de actividades y estrategias diferentes, para que los alumnos se sitúen activamente frente a los problemas de la matemática, pongan en juego sus estrategias personales y discutan, analicen, comparen, etc., actividades mentales que los ayudarán a construir nuevos conceptos, aprehenderlos, y finalmente aplicarlos.

Esta propuesta didáctica se sostiene en un proyecto de investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. El proyecto se nutre teóricamente de las contribuciones de la Psicología del aprendizaje y de la Didáctica. Desde estos marcos se toman aportes relevantes, que se presentan sintéticamente a continuación.

De la fuente psicológica tomamos en especial los aportes de las teorías cognitivas (Constructivismo psicogenético, Teoría Socio–Histórica vigotskyana y la teoría del Aprendizaje Significativo), las que en general entienden que el aprendizaje efectivo requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento y que aquel es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Tenemos entonces que la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje en tanto que la acción del docente es intervenir aportando las ayudas necesarias, estableciendo los esquemas básicos sobre los cuales éstos pueden explorar, observar y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

De esta misma fuente se toma el concepto de Interacción Socio–Cognitiva, entendiendo que la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. De allí sostenemos que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo en ellos se hace necesaria una intervención muy cuidadosa del docente tendiente a optimizar las actividades, supervisando cada grupo, facilitando los intercambios de tipo cognitivo, recuperando oportunamente lo producido en cada uno y logrando una reorganización final de los conocimientos trabajados.

Por otra parte, de la fuente didáctica tomamos en primer lugar el concepto de estrategia didáctica de Bixio (1998) que designa al conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y explícita intencionalidad pedagógica. Algunas de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y

con la carga horaria destinada.

En segundo lugar, la propuesta se apoya en una ingeniería didáctica, por lo que se elaboró un conjunto de actividades concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje sobre el tema mencionado.

En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta: las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales de los docentes para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

En este marco teórico general, la inclusión del Software Cabri para la enseñanza es pertinente, en tanto posibilita: la participación activa del alumno, el descubrimiento de propiedades del objeto de aprendizaje o sus relaciones (en este caso los triángulos), la re conceptualización significativa de saberes, el intercambio socio-cognitivo entre pares, entre otros aspectos.

El porqué de la propuesta

La confluencia de varios factores hizo nacer la propuesta de estudiar los triángulos con el software Cabri:

- La poca motivación por las matemáticas que encontramos en el grupo de alumnos. Teníamos que idear estrategias válidas para motivar al grupo-clase.
- El auge de la informática, la moda del ordenador, el desarrollo de las nuevas tecnologías.
- El convencimiento, tal como decía Luis Santaló, de que para aprender matemática hay que usarla “como una manera de conocer, más que de hacer”, y esto implica pensar u organizar secuencias didácticas donde el eje sea la resolución de problemas.

Propósitos que perseguimos

Entre los propósitos que perseguimos con la implementación de esta propuesta podemos mencionar los siguientes:

- Que los alumnos aprendan de una manera significativa desde lo psicológico, descubriendo por ellos mismos las propiedades de los ángulos de un triangulo, propiedad triangular y los puntos notables, re conceptualizando saberes abordados en la escuela primaria.
- Introducir a los alumnos en el uso del ordenador con propósitos de aprendizaje en Matemática.
- Dar oportunidades para expresar la creatividad.
- Fomentar el trabajo cooperativo y el trabajo en grupo. Resolver un problema en grupo implica muchas ventajas: escuchar, explicar, descubrir, razonar, compartir, intercomunicar, aprender, enseñar, descubriendo la matemática como una actividad interactiva y comunicativa.

Descripción, objetivos y análisis de las actividades

Realizaremos el análisis de la primera actividad y, a modo de ejemplo, presentaremos otra actividad de la secuencia, elaborada para que el alumno construya el concepto de mediatriz e investigue la propiedad del circuncentro.

Clasificación de triángulos

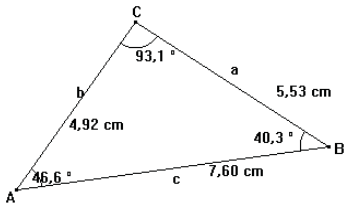
Descripción de la actividad.

I. Modifica el triángulo escaleno ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos.

a) acutángulo

b) rectángulo

c) obtusángulo

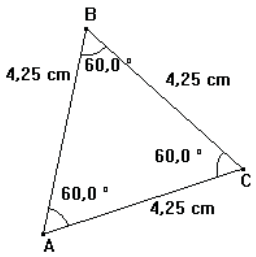


II. Modifica el triángulo isósceles ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos.

a) acutángulo

b) rectángulo

c) obtusángulo

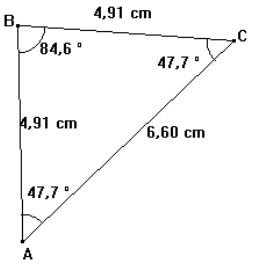


III. Modifica el triángulo equilátero ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos.

a) acutángulo

b) rectángulo

c) obtusángulo



Objetivos de esta actividad

Que el alumno sea capaz de lograr

- Relacionar las clasificaciones de los triángulos: según sus lados y según sus ángulos.
- Conjeturar acerca del comportamiento geométrico de los triángulos
- Confrontar sus conjeturas con las de sus compañeros y con el resultado de las construcciones o transformaciones según los gráficos obtenidos a través del software

Análisis de la actividad

Una de las intenciones de esta primera actividad fue recordar la clasificación de los triángulos según sus lados, según sus ángulos, los elementos de un triángulo y ver como en determinadas situaciones hay problemas que pueden tener varias soluciones (por ejemplo: escaleno acutángulo) o bien no tener solución (equilátero rectángulo).

Destacamos que respecto de esta última posibilidad se generó, en la clase correspondiente, un ameno debate entre los educandos, para justificar la imposibilidad de lo solicitado.

Con la participación de los distintos grupos formados y la guía del docente se logró llegar a la conclusión de que estas situaciones se generan cuando se solicita que propongan un triángulo con

dos condiciones contradictorias, por ejemplo que un triángulo sea simultáneamente equilátero y obtusángulo.

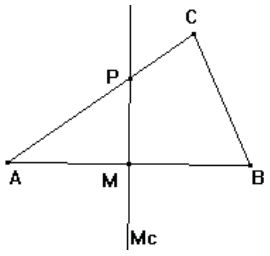
Concepto de mediatriz y propiedad del circuncentro

Descripción de la actividad.

I. En el triángulo dado se dibujó la mediatriz (Mc) correspondiente al lado c. Para determinar qué propiedades cumple ésta recta halla:

a) Distancia (A, M), distancia (B, M) y compara los valores obtenidos

b) El valor de los ángulos AMP y BMP



II. Contesta las siguientes preguntas

a) Qué es el punto M respecto del segmento AB (lado c)?

b) Cómo es la recta Mc con respecto a lado c?

c) Modifica el triángulo y observa si se sigue cumpliendo lo indicado en los ítems a) y b)

d) En base a las propiedades que cumple la mediatriz (Mc) correspondiente al lado c del triángulo intenta dar una definición de mediatriz de un triángulo.

III. Traza las mediatrices correspondientes a los otros lados del triángulo y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Las mediatrices se intersecan o no?

b) Si la respuesta anterior sea afirmativa, ¿ en cuántos puntos se intersecan?

c) Valdrá la misma respuesta para cualquier otro triángulo (rectángulo, obtusángulo, acutángulo, escaleno, isósceles y equilátero)?.

El punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo se llama CIRCUNCENTRO

IV. En la figura que obtuviste llama R al circuncentro y contesta**:**

a) ¿El circuncentro puede estar fuera del triángulo?

b) ¿El circuncentro puede ser un vértice?

c) ¿El circuncentro puede estar dentro del triángulo?

d) Teniendo en cuenta la clasificación de un triángulo según sus ángulos, donde se sitúa el circuncentro?

V. Calcula la medida de los segmentos AR, BR y CR e indica cómo son éstas medidas.

a) Si modificas el triángulo sigue valiendo lo observado en a)

b) Indica qué propiedad tiene el circuncentro

c) Traza la circunferencia que tiene como centro el punto R y como radio la medida del segmento AR

d) ¿Por qué crees que el punto R recibe el nombre de circuncentro

Organización del taller

En el taller participaron aproximadamente 84 alumnos de 1° año 3ª y 4ª división, los que tienen una edad aproximada de 13 a 14 años. Los estudiantes provenían de la escuela Agrotécnica Nº4, de Libertador General San Martín de la Provincia de Jujuy.

Se los distribuyó en tres grupos de 28 alumnos cada uno, trabajando dos alumnos por ordenador. La duración de cada encuentro fue de 80 minutos, una vez por semana.

Resultados de la experiencia

Entre los aspectos relevantes de esta experiencia podemos remarcar los siguientes:

- Relacionar la clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos entre sí, fue una de las actividades que más le costó a los alumnos. Consideramos que esta dificultad se debe a que en la primaria se trabajan ambas clasificaciones por separado, y no hay un análisis de la interrelación de ellas. Les sorprendía que les propusiéramos situaciones imposibles como, por ejemplo, la de un triángulo equilátero rectángulo.
- Los procesos de generalizar y simbolizar, fueron otras de las grandes dificultades que tuvieron los estudiantes. Con las herramientas del software Cabri, ellos observaban las regularidades, pero extender esas regularidades a todos los triángulos les parecía algo muy apresurado. Esta primera apreciación se fue superando a medida que se analizaba el

alcance, hecho que se vio favorecido por la potencia que nos daba el software, para ver en cuestión de minutos lo que con las herramientas tradicionales nos llevaría más tiempo.

- Expresar sus conclusiones utilizando el lenguaje matemático fue todo un desafío. Después de superada la dificultad de generalizar, el otro inconveniente fue cómo expresar los resultados a los que habían arribado: los alumnos utilizaron sus propios códigos y estilos de lenguaje. Tomando como punto de partida sus conclusiones, se analizó su pertinencia y de ello surgió la necesidad de aunar criterios de notación, utilizando, para que podamos entendernos, un mismo lenguaje

Conclusión

El carácter interactivo del programa fue muy valioso porque posibilitó al alumno contrastar la realidad con las respuestas dadas en un comienzo, lo que generó un debate de gran riqueza en las distintas instancias de la secuencia, y su participación activa en el propio aprendizaje.

Así mismo les ayudó a mirar la propuesta haciendo una lectura crítica, valorando la necesidad de la coexistencia de ambas herramienta: papel y lápiz por un lado y recursos informáticos por otro.

Los alumnos estuvieron motivados y comprometidos con la tarea, entre otras cosas, porque era una de las primeras veces que utilizaban la computadora en la clase de matemática.

Se pudo observar que por las actividades propuestas y el medio utilizado, los educandos vieron la necesidad de tener una mayor precisión y comprensión del lenguaje, debido a que el manejo del software lo requiere.

Reflexión final

Utilizar como metodología de enseñanza la dialéctica instrumento-objeto, implica re conceptualizar nuestras ideas de lo que significa enseñar y aprender matemática. Es una forma de trabajo que requiere pensar no sólo cómo se va a enseñar sino también cuáles serán las distintas estrategias que utilizará el alumno. Implica todo un cuestionamiento previo, acompañado de una posible propuesta, que se termina configurando en la implementación.

Referencias bibliográficas

Abdala, C. y Real, M. (2001). *Carpeta de matemática 1*. Buenos Aires: Aique.

Ausubel, D., Novack, J. y Hanesian, H. (1988) *Psicología Educativa*. México: Ed. Trillas

Berté, A. (1993). *Matemática dinámica.* Buenos Aires: A-Z Editora.

Berté, A. (1996). *Matemática de EGB 3 al Polimodal*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Bixio, Cecila. (1998). *Enseñar y aprender*. Buenos Aires: Homo Sapiens,

Castorina, J. A., Ferreiro, E., Lerner, D y Kohl de Oliveira, M. (1997) *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Paidós Educador

Casávola, H., Castorina, J. A., Fernández, S , Kaufman, A. Ma. Lenzi, A , Palau, G . (1984) *Psicología Genética aspectos metodológicos e implicancias pedagógicas*. Buenos Aires: Miño y Dávila

Chemello, G. y Díaz, A. (1997). *Matemática, metodología de la enseñanza*. Buenos Aires: Prociencia.

Douady, R., Artigue, M., Moreno, L. y Gómez, P.(1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Iberoamericana.

Flavel, John. (1974). *La Psicología Evolutiva de Jean Piaget*. Buenos Aires: Paidós.

Garaventa, L. y Rodas, P. (2002). *Carpeta de matemática 7.* Buenos Aires: Aique.

Garton, A. y Pratt, C. (1991) *Aprendizaje y proceso de alfabetización*. Buenos Aires: Paidós.

Giménez, J., Santos, L., da Ponte, J. P (coords) (2002). *La actividad matemática en el aula*. Barcelona: Grao.

Kaczor, P., y Machiunas, V. (2002). *Matemática EGB 8.* Buenos Aires: Santillana.

Piaget, Jean. (1972) *Psicología y Epistemología*. Buenos Aires: EMECE

Piaget (1947/1975). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psiqué

Ponce, Héctor. (2000) *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo*. Buenos Aires: Editorial Novedades Educativas.

Rey Genicio, M., Lazarte, G., Forcinito, S. y Hernández, C. (2001) Volumen I: *"Fundamentos teóricos para innovar en la enseñanza de la matemática"* –Jujuy, Argentina: Editado por Facultad de Ingeniería – UNJu.-

Villella, José.(2002). *Didáctica de la matemática*. *Diálogo entre profesionales de la enseñanza*. Buenos Aires: Jorge Baudino Ediciones. UNSAM.

Vygotsky, Lev. (1988) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Buenos Aires: Grijalbo.

PERFECCIONAMIENTO DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CON EL EMPLEO DE LOS ASISTENTES MATEMÁTICOS

Ileana Miyar Fernández, María de los Ángeles Legañoa Ferrá, Ramón Blanco Sánchez
Universidad APEC República Dominicana
Universidad de Camagüey Cuba
imiyar@adm.unapec.edu.do, maria.leganoa@reduc.edu.cu, ramon.blanco@reduc.edu.cu
Campo de investigación: Visualización y pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *La presente investigación está orientada al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios a partir de un modelo semiótico informático y de una metodología como instrumento para su implementación. Tres subsistemas componen el modelo: elicitación de preconceptos, apropiación-generalización y aplicación, los que se dinamizan por la contradicción existente entre el objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para materializarlo. La novedad científica está en revelar la lógica didáctica del perfeccionamiento conceptual a través de la consolidación del nexo símbolo-objeto matemático y la generalización teórica tomando como base la mediación semiótica y la interpretación del carácter singular-general del objeto algebraico, así como de las relaciones dialécticas objeto-proceso y variable-parámetro, con el empleo de los asistentes matemáticos. Para valorar los resultados científicos alcanzados se empleó el método de criterio de expertos y se realizó un preexperimento pedagógico.*
Palabras clave: mediación semiótica, asistentes matemáticos, formación de conceptos, pensamiento algebraico,

Introducción

Enseñar Matemática es una problemática importante y actual en todos los países. A su vez el impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación sobre la enseñanza, unido a la necesidad del desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonamiento y la comprensión dinámica y cambiante de la realidad objetiva en los estudiantes, obligan a perfeccionar cada vez más los métodos y procedimientos de la enseñanza de la Matemática.

La apropiación de los conceptos por los estudiantes, es uno de los aspectos donde se manifiestan deficiencias notables en el aprendizaje de la Matemática. Se aprecia en la literatura científica especializada, que dicha problemática ha sido tratada desde la perspectiva de la mediación semiótica a través de registros de representación semiótica (RRS), sin embargo aún no se han resuelto los problemas relativos a la formación conceptual. (Duval, 2006; Radford, 2006; Godino, 2002; D'Amore, 2006). En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra las investigaciones (Bartlo, Saldanha, Kieran, 2007; Drijvers, 2003) revelan dificultades. Dentro de

estas se pueden destacar el hecho de que los estudiantes cometen a menudo errores mientras ejecutan operaciones algebraicas, los cuales les resulta difícil detectarlos y corregirlos.

En la Universidad APEC se presenta la problemática de que los estudiantes tienen dificultades con el aprendizaje del Álgebra básica que se imparte. Para profundizar en dicha situación e indagar en sus posibles causas, se realizó un diagnóstico causal en estudiantes de las carreras de negocios, consistente en encuestas a estudiantes, la observación de clases, la revisión de exámenes, entrevistas a profesores, análisis de documentos y pruebas pedagógicas. El diagnóstico causal apuntó a que una de las causas fundamentales de tales insuficiencias estaba en que el proceso de enseñanza-aprendizaje no contribuye a la correcta formación de los conceptos del Álgebra básica, dada por la limitada consolidación del nexo símbolo-objeto matemático debido a las insuficiencias existentes en la materialización de los conceptos. Por ende la investigación se propuso como objetivo elaborar una metodología sustentada en un modelo semiótico informático que contribuyera al perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios.

Marco teórico contextual del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior

La caracterización epistemológica-didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica en la educación superior develó que la no integración del pensamiento algebraico y su razonamiento a los cursos de Matemática desde edades tempranas provoca deficiencias en la formación base de los estudiantes al llegar al nivel superior, de ahí la necesidad de que en la enseñanza superior dominicana se impartan cursos propedéuticos de Álgebra básica para preparar a los estudiantes con vista a los cursos de Matemática que van a recibir en este nivel.

También en la enseñanza del Álgebra tiene importancia el lenguaje utilizado para expresar los conceptos. El lenguaje simbólico se ha transformado con la aparición de las computadoras, de manera que el pensamiento algebraico se ha potenciado por la aparición de los nuevos sistemas de representación propios de las tecnologías de la información y la comunicación. La caracterización arrojó la existencia de un conjunto de contradicciones que emanan de la comprensión del Álgebra, dentro de las cuales los autores destaca como las más significativas para

la formación conceptual: la concreto-abstracto, la singular-general, la variable-parámetro y la objeto-proceso, dado que el pensamiento algebraico supone la representación de modelos, las relaciones entre variables y su generalización teórica.

En cuanto a la caracterización desde el punto de vista sicológico se destaca la importancia del símbolo en el desarrollo intelectual del hombre (Vigotsky, 1987), y la necesidad de la consolidación del nexo símbolo-objeto si se aspira a desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra desde una perspectiva conceptual.

Desde la perspectiva didáctica las concepciones vigotskianas relativas a que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe dirigirse a un uso apropiado del concepto junto con las intervenciones sociales, para provocar que el pseudoconcepto sea trasformado en concepto científico. Además se hace necesario utilizar múltiples formas de representación y la transferencia entre estos registros para la enseñanza de la formación de los conceptos algebraicos, así como los errores que se provocan cuando se trabajan estos desde un solo registro de representación y por eso se considera importante enseñar los procesos de conversión entre registros (Duval, 2006).

Como resultado del estudio realizado los autores consideran que para lograr la formación conceptual y el desarrollo de la generalización teórica del mismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se hace necesario desarrollar la actividad del estudiante en interacción social mediada por instrumentos semióticos orientada a la consolidación del nexo símbolo-objeto a través de la materialización y recodificación semiótica. Además, dado el carácter histórico del aprendizaje del estudiante se hace necesario tener en cuenta los preconceptos con los que arriba a la universidad y en qué forma estos preconceptos evolucionan en conceptos científicos.

Así mismo los autores reconocen que en el caso particular del Álgebra, la materialización semiótica se relaciona con la elaboración y manipulación de gráficas; que con los asistentes matemáticos esto se puede hacer de forma rápida, flexible y dinámica; que estos ofrecen oportunidades para hacer transferencias entre diferentes registros semióticos de una relación, y en particular, para vincular entre sí representaciones gráficas y algebraicas; y por último, que estas transferencias pueden estimular la percepción de los diferentes registros semióticos como diferentes visiones de un mismo objeto matemático, y pueden vincular las propiedades visuales y algebraicas de la función estudiada.

Modelo semiótico informático y metodología para el perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios

Para el perfeccionamiento de la formación conceptual se requiere superar la contradicción externa que se da entre, las exigencias en el desempeño profesional relacionadas con el empleo del Álgebra básica como herramienta de la Matemática y la apropiación de conceptos algebraicos. Esta contradicción se encuentra relacionada con otra contradicción, que se da en el proceso de formación conceptual, y que es inherente al concepto matemático. El concepto matemático siempre hace referencia a un objeto que no existe como objeto real, dado que los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción. Por ende la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación. Sin embargo, cada representación semiótica pone de relieve diferentes aspectos del objeto que representa, por lo que es necesario que el estudiante utilice diferentes representaciones para la formación del concepto y realizar la conversión entre estas representaciones.

La conceptualización, como actividad cognitiva del aprendizaje matemático, requiere de la utilización de múltiples registros de representación. A su vez es imprescindible distinguir entre el objeto matemático y su representación semiótica, dado que toda confusión entre el objeto y su representación provoca una conceptualización inadecuada, limitando el uso del mismo como herramienta matemática. El objeto matemático y la multiplicidad de representaciones semióticas que sirven para revelar el conjunto de rasgos esenciales que lo caracterizan, constituyen una expresión de la contradicción dialéctica entre esencia y fenómeno.

El modelo semiótico informático del perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios está compuesto por tres componentes principales que son: elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización de los conceptos y aplicación de los conceptos.

Elicitación de los preconceptos: Es el proceso de poner de manifiesto los preconceptos de los estudiantes. Se produce en la actividad matemática realizada por los estudiantes con los asistentes matemáticos en la cual identifican los rasgos esenciales de los conceptos científicos a través de la representación en los diferentes registros semióticos y concientizan los rasgos que les atribuyen a los pseudoconceptos.

Apropiación–generalización del concepto algebraico: La formación de conceptos algebraicos es una actividad intelectual dinámica e iterativa que se da en el curso de complejas operaciones en la actividad matemática y su resultado se va perfeccionando a través de la misma. Para su consecución se aborda desde una posición epistemológica y ontológica.

La posición epistemológica se fundamenta en que la formación conceptual se desarrolla a través de los procesos de internalización y generalización teórica, los cuales se encuentran estrechamente vinculados. Estos procesos se dan en el plano interno mediado y materializado por el símbolo, pero requieren desarrollarse de forma consciente e intencionada. Los mismos se viabilizan con el empleo de los asistentes matemáticos, los cuales son instrumentos de mediación por excelencia debido a que son herramientas que su uso proporciona sistemas de signos, que posibilitan fortalecer el nexo símbolo-objeto.

La realización de una actividad matemática centrada en la representación y tratamiento del objeto en una diversidad de registros utilizando los asistentes matemáticos, la conversión entre registros algebraicos y gráficos, en la cual se comparan y hacen corresponder las unidades significantes del objeto algebraico expresadas en cada registro, la interpretación de sus conversiones mutuas, posibilita que el estudiante establezca la coordinación entre los registros semióticos, desarrollando así el proceso de recodificación semiótica. Este proceso actúa como dinamizador de la independencia del concepto de una representación semiótica, contribuyendo a la objetivación del concepto. Es importante destacar que este tipo de actividad matemática potencia el aprendizaje de los conceptos, dada su contribución a la interpretación a partir de movilizar las analogías presentes en cada forma de representación. La actividad de decodificación de un registro semiótico particular para hacer la codificación en otro registro semiótico, determinando los atributos esenciales del objeto que se manifiestan en cada forma de representación, y la coordinación entre estos posibilita elaborar el concepto científico y comprender su carácter general, en cuanto se toma en cuenta una mayor compresión de los atributos esenciales. Esta elaboración posibilita articular y sintetizar estas propiedades del concepto, independizando esta construcción de un registro semiótico particular, lo que le confiere un mayor grado de abstracción.

La mediación semiótica que ofrece la actividad matemática soportada por los asistentes matemáticos y la interacción social que en ella se da, contribuye a la consolidación del nexo

símbolo-objeto. A través de este nexo se posibilita la identificación del concepto en diferentes registros semióticos y se promueve su independencia de un registro en particular.

La posición ontológica precisa que los estudiantes se apropien de las relaciones dialécticas que superan las contradicciones fundamentales que emanan de la comprensión del Álgebra. Estas son: el carácter singular- general del objeto algebraico, la relación dialéctica variable-parámetro y la relación dialéctica objeto-proceso. El *carácter singular- general* del objeto algebraico está dado porque el objeto algebraico es singular respecto al objeto que representa en un problema particular; puede ser particular cuando represente un modelo con determinadas características, así mismo puede ser general pues representa otros objetos que lo tienen como modelo. Esta dualidad dialéctica no resulta inmediata para el estudiante. La *relación dialéctica variable-parámetro* es otra manifestación de esta relación dual. El parámetro es un medio de generalización su uso hace explícito los diferentes roles que el símbolo puede jugar, por lo que finalmente el parámetro contribuye al uso del símbolo con un mayor grado de generalidad. La *relación dialéctica objeto-proceso* se da en el hecho de que un concepto matemático tiene dos dimensiones: una como proceso operacional y otra como objeto matemático. Inicialmente, para el estudiante el aspecto operacional predomina sobre el objetal, por lo cual se requiere desarrollar en el estudiante la habilidad para cambiar de uno a otro (operacional-objetal) cada vez que sea necesario.

La realización de la actividad matemática del estudiante sobre los objetos algebraicos en la cual se utilizan los asistentes matemáticos para la mediación semiótica con la inclusión de acciones sobre las relaciones esenciales del conocimiento algebraico es un modo de alcanzar las generalizaciones teóricas e internalizar los conceptos algebraicos.

Aplicación de conceptos. El proceso de apropiación de un concepto debe realizarse inseparablemente unido con el proceso de su aplicación práctica. Es imprescindible que el estudiante desarrolle diferentes tipos de actividades matemáticas: de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos a la par que está desarrollando el proceso de formación del concepto.

Las relaciones que se derivan del modelo semiótico informático determinan la lógica didáctica del perfeccionamiento de la formación conceptual, la que presupone la existencia de tres fases: elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación del concepto, las que son

expresión de los procesos requeridos según el modelo para tal fin. El desarrollo de estas fases está contenido en la metodología que se propone, instrumentando su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra básica.

Los tipos de clase donde se van a realizar las situaciones de aprendizaje se determinaron que fueran conferencias interactivas, talleres y clases prácticas. La conferencia interactiva tiene como objetivo que los estudiantes develen los preconceptos que poseen sobre los conceptos fundamentales de la unidad. Este proceso se da a través de la interacción entre las explicaciones del profesor, las tareas que desarrollan con los asistentes matemáticos y el diálogo entre los estudiantes. El taller tiene como objetivo la formación de los conceptos algebraicos a partir de la actividad matemática que los estudiantes realizan con los asistentes matemáticos interactuando entre sí. En este tipo de clase se promoverá entre los estudiantes, y entre estos y el profesor, la confrontación, discusión y colaboración al realizar tareas de apropiación-generalización y de aplicación del concepto, con el empleo de los asistentes matemáticos. Entre las tareas a desarrollar están las de materialización y recodificación en diferentes registros semióticos, de apropiación de las relaciones del Álgebra, de categorización, de sistematización y de aplicación en nuevos contextos. Las clases prácticas tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades operacionales algebraicas. Estas se desarrollarán con o sin el empleo de los asistentes matemáticos y en las mismas se promoverá la interacción social. Las actividades docentes se desarrollarán en condiciones que garanticen que los estudiantes puedan trabajar con el asistente matemático cuando así se requiera en pequeños grupos.

Valoración de los resultados científicos alcanzados

La valoración se hizo a través de la aplicación del método de criterio de expertos y la realización de un pre-experimento pedagógico formativo en la asignatura Álgebra Universitaria que se imparte en la Universidad APEC.

La aplicación del método de criterio de expertos a 30 especialistas de diferentes países arrojó como resultados que los mismos la consideraron como muy adecuada. Como la aplicación de la encuesta a expertos también se obtuvieron una serie de recomendaciones y criterios que permitieron perfeccionar los resultados de la investigación.

La comprobación parcial de la efectividad de la metodología se concretó en la asignatura Álgebra Universitaria en el 2008 en un grupo de 36 estudiantes de las carreras de negocios. Esta comprobación parcial constituyó un pre-experimento dado que se llevó a cabo en un solo grupo. Para su aplicación se seleccionó la unidad "Funciones y ecuaciones algebraicas lineales".

A través de la aplicación parcial de la metodología, se evidenció la efectividad de los resultados obtenidos en la investigación. Los estudiantes demostraron una mejoría en la formación de los conceptos tratados en la unidad, identificando y representando los conceptos en varios registros semióticos. La decodificación entre registros semióticos demostró que esta era una vía para la coordinación entre estos, lo cual coadyuvó a la objetivación de los conceptos. La orientación de la actividad matemática dirigida a desarrollar el grado de generalidad con que se apropian los estudiantes del conocimiento algebraico resultó ser muy adecuada, aunque debe ser sistemática en el curso para lograr los objetivos deseados.

Conclusiones

El modelo semiótico informático para el perfeccionamiento conceptual sintetiza la mediación semiótica y la interpretación de las relaciones esenciales del Álgebra (singular-general, objeto–proceso, variable-parámetro) para la apropiación-generalización en coordinación con la aplicación de conceptos, con el empleo de los asistentes matemáticos en interacción social.

La lógica integradora entre las fases elicitación de los preconceptos, apropiación-generalización y aplicación de conceptos que se viabiliza a través de una metodología para el perfeccionamiento conceptual, propicia en mejor desempeño de los estudiantes en la utilización del Álgebra básica como herramienta de trabajo en aplicaciones matemáticas.

La utilización del método de criterio de expertos y la valoración de los resultados alcanzados en el pre-experimento, posibilitó la constatación de la factibilidad y la pertinencia del modelo y la metodología, lo que contribuye a ofrecer una alternativa de solución para la investigación científica en la didáctica del Álgebra en la formación conceptual.

Referencias bibliográficas

Bartlo, J., Saldanha, l. Kieran, C.(2007). Attending to structure and form in algebra: challenges in designing CAS-centered instruction that supports construing patterns and relationships among algebraic expressions *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline* (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática:La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 9 (1), 143-168.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103-129.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 22 (2/3), 237-284.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 177-196.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra enviroment*. CD-B Press, Center for science and Mathematics education.

Vigotsky, L. (1987). Thinking and speech. *The collected works of L.S. Vygotsky. Problems of General Psychology* 1, 37-285.

EL TRABAJO INDEPENDIENTE DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA CON EL USO DE CALCULADORAS GRAFICADORAS

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Olga Lidia Pérez
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echevarria, Universidad de Cuba Camagüey
esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *El trabajo presenta tres experiencias de orientación del trabajo independiente en la Matemática, con énfasis en la Matemática Numérica, donde la calculadora es la mediación instrumental de apoyo al proceso de interiorización de los conocimientos, a través de la consulta de las llamadas e-activities en calculadoras graficadoras. En el proceso de enseñanza aprendizaje, se resaltan dos tipos de mediación: mediación social y mediación instrumental y la interiorización, como proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se realiza en un plano externo, pasan a ejecutarse en un plano interno, diferenciando la actividad externa en términos de procesos sociales mediatizados (Vigotsky, 1985). En este caso se concibe la calculadora como principal mediador instrumental. Con el objetivo de analizar la efectividad de la aplicación práctica de la propuesta se aplicó una encuesta que midiera las diferencias con el método tradicional, el desarrollo de habilidades derivadas del uso de la calculadora y el nivel de satisfacción con el uso de la misma.*
Palabras clave: e-activities, trabajo independiente, calculadora

Introducción

Hoy no se puede pensar en un país moderno con un sistema universitario excluyente, por más que éste brinde una preparación “de excelencia” (Zito, 2006).

Los modelos pedagógicos se refieren a la forma en que se planifican, desarrollan, implementan y evalúan los procesos de enseñanza aprendizaje. Las características fundamentales son: flexibilidad, centrado en el estudiante, para que asuma de un modo activo su propio proceso de formación. Autoaprendizaje de los estudiantes, mayor nivel de esencialidad, centrado en la formación de valores, menor presencialidad, desarrollo y utilización de medios de enseñanza y una amplia aplicación de las tecnologías.

Los modelos de enseñanza actuales, en el entorno universitario, están concebidos para que el proceso de enseñanza aprendizaje se desarrolle de forma semipresencial y por ello constan de dos fases: la fase no presencial y la fase presencial.

La fase presencial se utiliza fundamentalmente para garantizar la retroalimentación de este proceso y su regulación, así como la atención individualizada a los estudiantes en cada asignatura.

La fase no presencial garantiza la parte informativa del curso, basada en el aseguramiento de materiales didácticos, soporte técnico y la actividad independiente de los estudiantes que tendrá un gran peso en el sistema de formación

Estos modelos están compuestos por tres subsistemas: estudiantes, medios y profesor / tutor. Los estudiantes deben apropiarse de los conocimientos a través del autoaprendizaje asumiendo activamente su propio proceso de formación apoyándose adecuadamente en los medios de enseñanza, lo cual le permitirá desarrollar habilidades prácticas en la solución de problemas evidenciando independencia cognoscitiva, elevada competencia profesional, rigor científico, formas del pensamiento lógico y capacidad para diseñar y realizar experimentos y buscar información.

Los medios constituyen el sistema de materiales docentes y de recursos tecnológicos destinados a posibilitar la autopreparación de los profesores y estudiantes. Estos pueden ser impresos **(**textos, guías de estudio, etc.) o audiovisuales e informáticos (calculadoras, softwares, laboratorios virtuales, etc.)

Estos medios deben resultar atractivos para facilitar el autoaprendizaje de las complejas materias que se imparten en una carrera de Ciencias Técnicas. Uno de los mas utilizados es la calculadora, la misma ofrece un sistema de actividades, las cuales se diseñan como medio de enseñanza, herramienta que remodela el contenido y como medio de intercambio académico. Los modos de utilización ó aplicación de las tareas propuestas son variados, según el momento de enseñanza en que se utilicen, ellas podrán ser utilizadas como modo tutorial, modo ejercicio, como adiestramiento o para realizar una simulación, además, podrán concebirse para el trabajo directo en la clase, para la orientación del estudio independiente y para la evaluación.

Las actividades de trabajo independiente están dirigidas a desarrollar el aprendizaje de los alumnos, por lo que exigen un control reflexivo, abierto en el curso de su ejecución. (Cáceres, García y Sánchez 2002)

El aprendizaje y el trabajo independiente.

En las obras de Vigotsky se encuentran ideas muy importantes y sugerentes relacionadas con su concepción de aprendizaje. Este autor fundamenta su concepción de aprendizaje y señala:

> El aprendizaje es una actividad social, y no sólo un proceso de realización individual, una actividad de producción y reproducción del conocimiento mediante la cual el niño asimila los modos sociales de actividad y de interacción, y más tarde en la escuela, además, los fundamentos del conocimiento científico, bajo condiciones de orientación e interacción social. (Vigotsky, 1985, p.89)

Este concepto coloca en el centro al estudiante, como sujeto activo y conciente con un objetivo determinado y en interacción constante con el profesor y otros estudiantes utilizando diversos medios a su disposición, que es lo que la teoría de Vigotsky asume como mediadores.

En el marco del trabajo independiente, el aprendizaje es un proceso guiado, apoyado por el adulto, donde se crean espacios de diálogos de significados compartidos, a través de procesos de negociación, de construcción de perspectivas ínter subjetivas (Cáceres et al, 2002).

Según esta propuesta de Vigotsky (1985), en el proceso de enseñanza aprendizaje, se resaltan dos tipos de mediación: mediación social y mediación instrumental: los adultos y los instrumentos, actúan como mediadores del proceso de conocimiento.

Cuando se trata de mediación social se refiere a la utilización de otra persona como instrumento de mediación para la acción sobre el ambiente, papel de los grupos sociales en la integración del sujeto a las prácticas sociales, papel del otro en la formación de la conciencia individual. En este caso, el presente trabajo concibe las actividades en grupos con el uso de la calculadora.

En el caso de mediación instrumental, según la concepción vigotskiana, se trata de la utilización por los hombres en las acciones de transformación de la realidad de los instrumentos creados por la cultura, en el contexto del presente trabajo, la mediación instrumental será concebida, a través del uso de la calculadora.

Sustentado en estos postulados, se asume que los instrumentos provocan modificaciones en el objeto de la realidad, es el medio de la actividad externa del hombre para conquistar la naturaleza, por tanto los instrumentos actúan en el plano externo, propiciando la interiorización de los conocimientos.

En este sentido Vigotsky concibe la interiorización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno, diferenciando la actividad externa en términos de procesos sociales mediatizados y

argumentando que las propiedades de estos procesos proporcionaban la clave para entender el funcionamiento interno (Vigotsky, 1985).

A partir de este postulado, se asume que el maestro, orienta el trabajo independiente, con el uso de las calculadoras, como principales mediadores en el proceso de conocimiento de los alumnos, sin minimizar el papel que juega el trabajo en grupo, los cuales encaminan o facilitan la solución de las tareas; orientan, instruyen, corrigen o demuestran cómo proceder; además de que refuerzan, apoyan y estimulan, permitiendo una mejor interiorización del aprendizaje.

Experiencias con la ClassPad 300 y sus potencialidades

Las experiencias realizadas formaron parte de una investigación de tipo cuantitativa, partiendo con problemas claramente definidos y utilizando instrumentos de recolección de información que garantizaran la confiabilidad y validez de los datos (López, E. y López, F. J., 2008).

Teniendo en cuenta lo expuesto, se realizaron diferentes experiencias, donde la calculadora es la mediación instrumental en el proceso de interiorización de los conocimientos y el estudiante hace uso de ella en la fase no presencial para la consulta de las e-activities, teniendo en cuenta que la efectividad de los procesos de educación virtual no dependen exclusivamente de las técnicas que utilicemos, y que todo proceso de educación requiere introducir visiones, paradigmas y mecanismos innovadores en su diseño (Gómez, 2003).

Aunque Trouche (2005) plantea que, según estudios realizados, los estudiantes utilizan la calculadora, fundamentalmente, para graficar funciones, calcular y estudiar la variación de funciones, en las experiencias realizadas ern este trabajo los estudiantes no sólo utilizaron la calculadora para estos fines, sino que además, aprovecharon otras potenciales de la misma tales como: la elaboración de e-activities y la programación para el desarrollo de algoritmos de Matemática Numérica. También como señala Trouche (2005) los resultados de estas experiencias dependieron en gran medida del rol del profesor, el cual integró la calculadora al proceso de enseñanza aprendizaje como un elemento fundamental.

Las e-activities consisten en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, etc., que permite solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado (Ansola y Carlos 2006; Moya y Novoa, 2005). Las e-activities utilizadas tienen la

siguiente estructura: objetivos, bibliografía y ejercicios propuestos del texto, desarrollo del tema, programación de métodos, ejemplos, tareas y conclusiones.

Una correcta concepción del trabajo independiente en la educación superior presupone:

1. La existencia de un problema profesional, planteado por el profesor o por iniciativa del alumno, cuya solución se convierta en una necesidad interiorizada.
2. Una plataforma teórico - práctica en el estudiante que le permita comprender el problema planteado y encaminarse a la solución.
3. Un esfuerzo intelectual del alumno de modo que la realización del problema lo conduzca a un nivel superior de conocimiento. (Torricella, 2007, p.3)

Tomando como referencia lo expuesto se realizaron tres experiencias diferentes con el uso de la calculadora ClassPad 300:

1. Actividad con un grupo de 25 estudiantes de segundo año de Ingeniería Informática que ya habían recibido parte de la asignatura Métodos Numéricos en la forma tradicional, es decir, conferencia-clase práctica.
2. Curso de preparación matemática de un grupo de 20 estudiantes de nivel medio, para abordar Temas Selectos de Matemática Elemental (cálculos, demostraciones y construcciones geométricas).
3. Curso facultativo a un grupo de 30 estudiantes de primer año de ingeniería en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología.

En todos los casos los objetivos fueron:

- Consolidar los contenidos de Matemática Numérica y comparar resultados entre la forma tradicional de impartí los temas y el uso de la calculadora para aprender estos.
- Desarrollar en los estudiantes habilidades de cálculo y para la solución de problemas así como desarrollar habilidades en la construcción de figuras geométricas utilizando lugares geométricos conocidos, siempre con el uso de calculadoras.
- Consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica, así como mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante

aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica, también con el uso de la calculadora.

En todas las experiencias, antes de comenzar el curso, se llevaron a cabo varias sesiones de trabajo en las cuales se les explicó a los estudiantes la utilización de la calculadora y la elaboración de e-activities.

En la primera experiencia se desarrolló un curso que constó de tres actividades presenciales, la primera se dedicó a las orientaciones generales del curso y a los temas de Separación de Raíces, Bisección y Regula Falsi. En la segunda se revisó lo orientado en la primera actividad y se orientaron los temas de Newton-Raphson y Secantes. En la tercera actividad se revisaron los últimos temas orientados.

En la segunda experiencia el trabajo consistió en desarrollar encuentros sobre construcciones geométricas haciendo uso de la tecnología, con estudiantes que aspiran a matricular carreras con amplia base matemática.

En la tercera experiencia se retomó el cálculo de integrales definidas utilizando la tecnología, con el propósito de consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica y de mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica. En estos encuentros se abordaron dos componentes, uno directamente relacionado con el manejo de tecnología y otro de índole matemático, ambos factores necesarios para el estudio actual de las Matemáticas de la Enseñanza Superior.

El primer componente, de índole tecnológica, se alcanza mediante la utilización de la calculadora graficadora Casio ClassPad 300. La calculadora, como herramienta tecnológica, nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su comprensión. El segundo componente, de índole matemática, es emprendido a través de actividades que apuntan al esfuerzo lógico, analítico y/o crítico, abordando temas básicos de la matemática y la geometría que son primordiales para el estudiante, a la hora de enfrentar con éxito sus exámenes de ingreso así como el primer semestre de la Universidad.

El ambiente dinámico de la calculadora les permite descubrir que hay problemas que tienen soluciones sujetas a determinadas condiciones. Por lo que no nos cabe duda que las posibilidades

de éxito, ante un problema, de un estudiante que haya sido preparado con el uso de la tecnología son mayores, aun no disponiendo en ese momento de la calculadora o computadora, ya que lo importante no es el uso de la tecnología para resolver el problema, sino todos los análisis, reflexiones que nos permite hacer la tecnología para reforzar las estrategia a la hora de resolverlo. (Hernández, Ansola y Carlos, 2009)

En todas las actividades realizadas utilizando la calculadora se orientó a los estudiantes la solución de problemas, ya fueran de cálculos, programación, construcciones, etc., que complementaran la teoría recibida permitiéndole desarrollar habilidades prácticas y el pensamiento lógico así como demostrar la independencia cognoscitiva alcanzada.

Resultados

Con el objetivo de analizar la efectividad del curso se diseñó una encuesta que midiera las diferencias con el método tradicional, el desarrollo de habilidades derivadas del uso de la calculadora, el nivel de satisfacción con el uso de la misma así como los aspectos positivos y negativos del curso. La encuesta se aplicó al 100% de la población disponible, o sea, a todos los estudiantes que participaron en las actividades y se obtuvieron los resultados siguientes:

- Más del 80 % de los estudiantes considera que la utilización de la calculadora es organizada, dinámica, buena, moderna, precisa, novedosa, activa y deseada.
- Solamente en claridad y comprensión los porcientos son por debajo de 80
- Los estudiantes opinaron que las mayores habilidades adquiridas habían sido en la programación (60%), la realización de gráficos (50%), los cálculos matemáticos y la independencia (50%).
- En más del 90% de los estudiantes aumentó la motivación al abordar los problemas, conjeturar resultados y demostrar los mismos.

Conclusiones

En este trabajo se abordó el tema del trabajo independiente de los estudiantes y se presentaron tres experiencias en el desarrollo de cursos en los que se utilizó como soporte tecnológico una calculadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma para facilitar el auto aprendizaje de los estudiantes, mediante las llamadas e-activities. La calculadora se muestra como una herramienta útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente y que permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa.

La calculadora se utiliza en este caso como un recurso didáctico, como medio de enseñanza-aprendizaje, no como una simple herramienta de cálculo. Los estudiantes consideran que la calculadora es una herramienta útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente, ya que permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa, lo cual aumenta la motivación en la realización de su trabajo independiente. Se comprobó que los estudiantes que asistieron a estos cursos obtuvieron mejores resultados en las evaluaciones realizadas en su curso académico.

Referencias bibliográficas.

Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica. En G. Martinez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 930-935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cáceres, M., García, R. y Sánchez, L. R. (2002). El trabajo independiente de los estudiantes en el ámbito del currículum, *Revista Espacio 127(7), versión digital.*

Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. *Resúmenes de la Séptima Escuela de invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Chilpancingo, Guerrero, México.

Gómez, H. (2003). ¿Cómo estructurar un plan efectivo de e-learning? En M. Fontela, N. Hellers, A. Mann, C. Podlesker y S. Subotovsky (Eds.), *E-learning. Mejores prácticas y recomendaciones para organizaciones iberoamericanas*. Buenos Aires: Ediciones Tecnonexo.

Hernández, N., Ansola, E. y Carlos, E. (2008). Construcciones geométricas con calculadoras graficadoras. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 1109-1117. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López, E. y López, F. J. (2008) *La investigación científica del proceso pedagógico*. Recuperado el 15 de febrero de 2008 de www.monografías.com.

Moya L. M. y Novoa J. F (2005). Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana 10*.

Torricella, R. (2007). El trabajo independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje universitario. *Revista Pedagogía Universitaria 9 (5),* 1-5.

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. New York: Springer.

Vigotsky, L. S. (1985). *Interacción entre enseñanza y desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.

Zito, S. (2006). *El Aprendizaje de la Matemática y el Acceso a Estudios Superiores*. Recuperado el 21 de mayo de 2008 de Portal Educativo de las Américas, http://www.educoas.org/portal/es/ tema/editorial /nov04.

ARGUMENTOS DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE UN CIRCUITO ELECTRICO A TRAVES DE SU CAMPO DE PENDIENTES

Edgar Javier Morales Velasco, Hipólito Hernández Pérez
Cimate de la Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Chiapas México
emv_dj@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se realiza una revisión a los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica en donde se observa que privilegian resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos y la gráfica de la solución analítica, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En este trabajo se exploró los campos de pendientes mediante el uso del software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva. En la investigación se diseñaron dos situaciones didácticas para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación basados en la aproximación socioepistemológica.*
Palabras clave: situación didáctica, prácticas sociales, socioepistemología

Problemática

La génesis de este trabajo es en base a la revisión de los textos y programas de estudio de ecuaciones diferenciales usados en los cursos de ingeniería electrónica, donde encontramos que se privilegia resolver las ecuaciones diferenciales de un circuito eléctrico por medio de métodos cuantitativos, es decir por métodos algebraicos, dejando a un lado el uso de los campos de pendientes que le permita al alumno identificar el comportamiento gráfico de dichas ecuaciones diferenciales. En los cursos y textos de ecuaciones diferenciales ha predominado el enfoque de la solución analítica, pero también existen textos que le dan un enfoque gráfico y visual como los textos de (Lomen y Lovelock, 2000; Stewart, 2002). Respecto a este contexto que se da en la ingeniería electrónica, Cordero (2000) menciona que las soluciones de las ecuaciones diferenciales se han privilegiado en el contexto algebraico donde las soluciones de las distintas clases de ecuaciones diferenciales son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en series, expresiones integrales, entre otras. El sólo uso del contexto algebraico deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales. También, él indica que desde un punto de vista epistemológico se encuentra el

desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y por otro se encuentra el desarrollo de la tecnología (calculadoras, computadora y graficadores). El objetivo de nuestro trabajo fue diseñar situaciones didácticas en el contexto de los circuitos electrónicos a través del uso de tecnología, para generar por medio de los estudiantes argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial, con la finalidad de reconstruir los significados de los campos de pendientes de una ecuación diferencial en un marco de prácticas sociales de la graficación y modelación. En las revisiones hechas en los libros de texto de análisis de circuitos eléctricos usados en electrónica, por ejemplo, tenemos a Bobrow (1993), Conejo (2004), Hayt y Kemmerly (1990). Ellos presentan el análisis de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo orden con constantes agrupadas. Los autores mencionan que los resultados de estas ecuaciones diferenciales también pueden ser utilizados por otros contextos, por ejemplo, en el desplazamiento de una masa soportada por un resorte y sometida a un amortiguamiento viscoso, y también en el comportamiento de un péndulo simple. Los autores muestran el siguiente ejercicio:

Suponga que tenemos el circuito resistor-inductor (RL) en serie que se muestra en la figura1. La red se excita por una tensión escalón unidad, donde R = 4 Ω, L = 2 H, V(s) = 3U(t) y suponemos un valor inicial de la corriente (en t = 0) de 5 amperios.

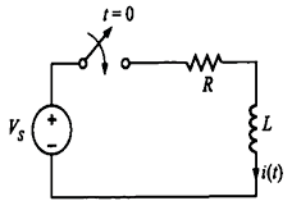


Figura 1. Circuito resistor-inductor (RL).

La solución que proponen es la siguiente: por la segunda ley de Kirchhoff se escribe la ecuación de malla en el dominio del tiempo, $2\frac{di}{dt}+4i=3u(t);$ se convierte al dominio de la frecuencia tomando la transformada de Laplace de cada término, $2\left[sI(s)-i(0)\right]+4I(s)=3/s$, y luego de una serie de procedimientos algebraicos presenta la respuesta de la ecuación diferencial $I(t)=0.75u(t)+4.25e^{-2t}u(t).$

Observando el privilegio de la solución analítica de las ecuaciones diferenciales, creemos que el uso de los campos de pendientes en el análisis de las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos podría permitir al alumno un mejor entendimiento respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales. Encontramos en Larios (2006) que los conocimientos que se aprenden

están influenciados por los medios y las herramientas utilizadas para el aprendizaje y la enseñanza. En el caso particular de la Matemática esto no deja de ser cierto y la incorporación de herramientas computacionales a los procesos educativos influye indiscutiblemente en los significados que se le otorgan a los objetos matemáticos, fenómeno que siempre ha sucedido con otros tipos de tecnologías utilizadas. En este trabajo particular el software que se considera es el que se inscriben dentro de la categoría de *software para Geometría Dinámica*. Las características principales que diferencian una aproximación utilizando este software con respecto a una que considera la tecnología papel-y-lápiz, además del hecho evidente y simplista de estar utilizando computadoras son: (1)_ Los macros que posibilitan definir rutinas o cadenas, (2)_ La de construir lugares geométricos, (3)_ La transformación continua en tiempo real llamada comúnmente "arrastre", la cual permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Para nuestro trabajo, empleamos el software Cabri Geometry II como herramienta de geometría interactiva, el cual brinda la oportunidad de que la adaptemos al tema de campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales. La ventaja de Cabri es que existe un procedimiento de construcción que ayuda a la comprensión del tema y a recordar algunos conceptos de cálculo (Buendía, Cruz, Poirier, Hernández, Velasco, y Megchún, 2006).

Marco Teórico

En la presente investigación nos apoyamos en teorías como la de Cantoral (1996), donde menciona que la matemática educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero sí existen fuertes vínculos entre sí. No constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la matemática educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. En Cordero y Flores (2007) mencionan que la aproximación socioepistemológica nos ha señalado que las prácticas sociales con referencia al conocimiento matemático son un elemento insoslayable en las explicaciones de los fenómenos didácticos. Lo anterior integra componentes para tratar a las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales como prácticas en lugar de representaciones. El conocimiento

matemático escolar en la aproximación socioepistemologíca se concibe como un conocimiento que se resignifica al paso de la vivencia institucional, lo que hace que la actividad humana o las prácticas sociales sean las generadoras de tal conocimiento. También, Buendía (2004) indica que la socioepistemología se refiere al análisis de las relaciones epistemológicas entre prácticas sociales y el conocimiento matemático. La socioepistemología es una línea de investigación que brinda elementos para caracterizar una epistemología, distinta a las epistemologías basadas en los conceptos, que se base en elementos organizadores llamados categorías. Existe actualmente un consenso en identificar estas categorías con prácticas sociales sustentado en análisis de enfoque histórico epistemológico realizados para diferentes cortes de conocimiento matemático (Suárez, 2006). La socioepistemología debe significar el reflejo de cualquier individuo al hacer matemáticas, y en segundo lugar, considerar que el funcionamiento mental debe estar en correspondencia con el lenguaje de herramientas que resulta de esta actividad. En este trabajo pretendemos mostrar la resignificación de las gráficas de los campos de pendientes de las ecuaciones diferenciales en los circuitos eléctricos como práctica social y tratamos de hacer epistemología de prácticas sociales que cumpla con la intencionalidad que demanda el ingreso de un saber al sistema didáctico, ya que debe ser consistente con las formas de organización de los grupos humanos.

Diseño de la situación didáctica

La metodología seguida en esta investigación fue la que proporciona un mecanismo de validación interna, como la ingeniería didáctica. Su esquema experimental está basado en las realizaciones didácticas en clase, la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Lezama y Farfán, 2001). Lo expuesto anteriormente ayudó a diseñar situaciones didácticas en el área de ingeniería en electrónica resignificando los campos de pendientes en las ecuaciones diferenciales, es decir, que los alumnos aprendan el comportamiento de las ecuaciones diferenciales por medio de sus campos de pendientes de forma cualitativa. La utilidad que presentan los campos dependientes, es que sin necesidad de resolver a la ecuación diferencial de forma algebraica, solo con el trazo de dichos campos de pendientes de la ecuación diferencial del circuito eléctrico se conoce el comportamiento del circuito eléctrico, además de que se aprenden otros conceptos acerca de las ecuaciones diferenciales. Para llevar a cabo nuestra investigación, primeramente se

trabajó con dos diseños de situaciones didácticas, donde hacemos uso de herramientas tecnológicas como la de papel y lápiz y posteriormente con el software Cabri. En el diseño de las situaciones didácticas, nos dimos la tarea de hacerlas de manera que el alumno a través de la ecuación diferencial de un circuito eléctrico, bosqueje a través de su campo de pendientes información del comportamiento de dicha ecuación diferencial y a la vez del circuito eléctrico.

Situación didáctica uno:

La dinámica que se llevó para la situación didáctica 1 fue en un salón de la facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas, la cual consistió en agrupar a los 31 participantes en equipos de tres alumnos, se les proporcionó la situación didáctica 1 para resolverlo en una hora treinta minutos. Para los estudiantes de Posgrado la situación didáctica 1 la resolvieron de forma individual con una duración de una hora treinta minutos. Se les solicitó que explicaran qué es una "pendiente"; lo que ellos respondieron fue:

Argumento a: es la inclinación α de dicha recta con respecto a un eje de referencia, se obtiene mediante la función tangente $m = tg\alpha$.

Argumento b: es la inclinación que existe si se trazara una línea entre dos puntos en el plano cartesiano.

Argumento c: La derivada de la función en un punto.

Luego mediante una gráfica se les pide que encuentren una relación geométrica de la inclinación de los segmentos con los signos de las pendientes y que la explicaran; en esta parte lo que se busca es que los alumnos relacionen la inclinación de las rectas con el signo de la pendiente, por lo que la mayoría de los equipos sí lograron hacer esta relación; cabe mencionar que los equipos para establecer su respuesta dialogaban acerca de los términos de la inclinación de la recta, de máximos y mínimos.

Argumento d: cuando el signo de la magnitud de la pendiente es positivo indica que la pendiente se inclina hacia la derecha eje (+ *x*), cuando el signo es negativo indica que la pendiente es constante y se inclina sobre la izquierda (- *x*).

Argumento e: cuando 0 < *α* < 90º el signo de la pendiente es positivo si sólo si el eje de referencia es el eje *x*, el signo de la pendiente es negativo si sólo si 180º < *α* < 90º, cuando el eje de referencia es el eje *x*.

Posteriormente los alumnos calcularon una serie de pendientes con la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ que sirve para construir el campo de pendientes; todos los equipos lograron obtener las pendientes, excepto que al dibujarlas ninguno de los equipos dibujó completo el campo de pendientes; argumentaban que eran muchos y se volvía un tanto tedioso dibujarlas a mano, ver figura 2; es en esta parte donde el software Cabri Geometry II nos es de utilidad ya que facilita el trazado de las pendientes en menos tiempo y menos tedioso, como argumentaron los alumnos. Posteriormente se les pide que encuentren la antiderivada de la expresión que utilizaron para crear el campo de pendientes; en esta parte también los alumnos muestran la respuesta que se esperaba: $y = x^2 + c$. Al final de la situación se les preguntó a los estudiantes si el campo de pendientes trazado genera las familias de curvas de la solución de la antiderivada; ellos responden:

Argumento f: sí la genera porque al trazar el campo de pendientes se interceptan las pendientes positivas y negativas que generará familias de parábolas, es decir $y = x^2 + C$.

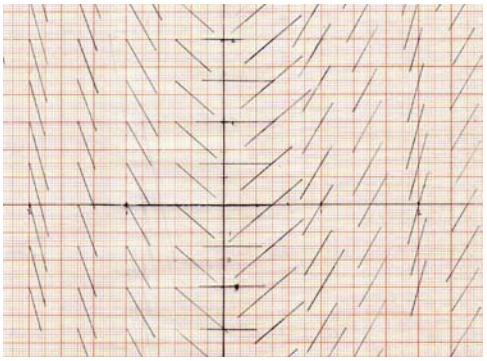


Fig. 2. Campo de pendientes de la secuencia 1 hecho por los equipos; la mayoría de los equipos coinciden como el que se muestra en la figura.

Fig. 3. Los alumnos argumentando la secuencia

Situación didáctica dos:

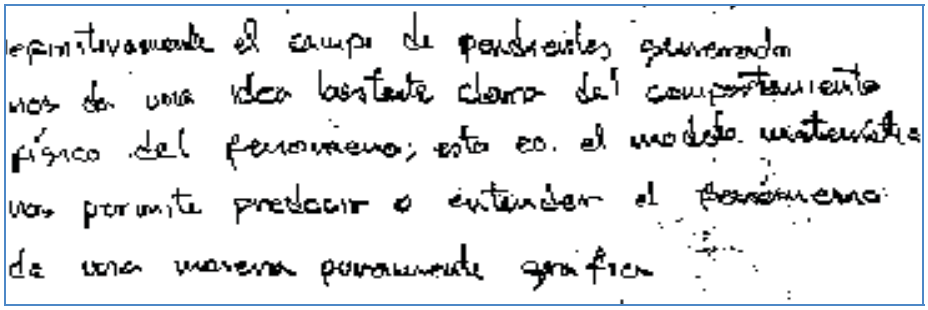
Para la segunda situación didáctica se seleccionó a tres grupos de los estudiantes de ingeniería civil, en la cual se les realizó una grabación de video digital y de voz para registrar las argumentaciones de los estudiantes en la situación didáctica. Esta misma situación didáctica fue aplicada a estudiantes de posgrado. A los estudiantes de Posgrado se les aplicó la misma situación didáctica resolviéndola en una hora y media. Posteriormente esta situación didáctica fue aplicada a un segundo grupo de 36 estudiantes de ingeniería civil donde se formaron equipos de tres integrantes. Primero se les proporcionó las actividades 1 y 2, posteriormente las actividades 3 y 4; la duración de la situación didáctica fue de 2 horas. La secuencia dos consistía principalmente en resolver un circuito resistor-inductor (RL) como el que se muestra en la figura 1, donde R = 2Ω, L = 1H, V_s = 8V y cuya ecuación diferencial esta definida por $\frac{dI}{dt} = 8 - 2I$ con la condición inicial de *t* = 0. De los tres equipos sólo dos equipos dibujaron bien el campo de pendientes; al concluir la situación didáctica los equipos dan una explicación haciendo un análisis del campo de pendientes:

Argumento del equipo A: No concluyeron bien, les faltó dibujar más el campo de pendientes.

Argumento del equipo B: Vemos que la ecuación diferencial tiene un comportamiento exponencial, llegando a cierto valor para *(I)*, la familia de curvas que podemos ver se vuelven constantes.

Argumento del equipo C: Para nosotros vemos también, que la familia de curvas tiene un comportamiento exponencial, conforme crece el tiempo *t* la familia de curvas tiende a un valor constante por lo que el valor de las pendientes comienza a disminuir, se hacen cero, es decir, la corriente *(I)* al llegar a este valor permanece constante sin variación aunque el tiempo aumente.

A continuación se muestra un argumento de los participantes de posgrado.



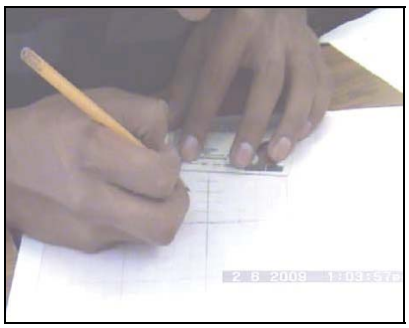


Fig. 4. Uso de la tecnología de papel y lápiz

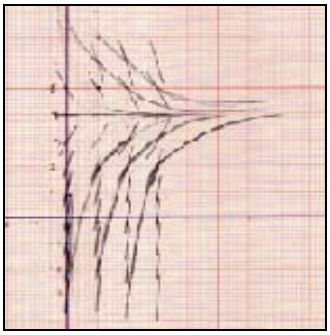


Fig. 5. Campo de pendientes de los alumnos de Ingeniería civil

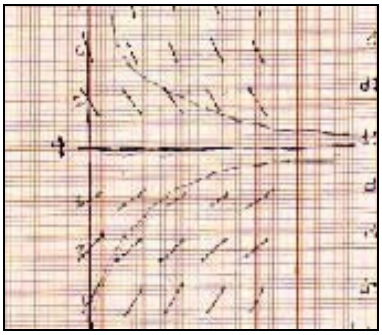


Fig. 6. Campo de pendientes de alumnos de Posgrado.

En nuestra fase de validación observamos que el propósito de la situación didáctica si cumplió con nuestro objetivo; los equipos argumentaban observando los campos de pendientes, pero cabe mencionar que en la segunda situación didáctica el equipo C de los alumnos de la carrera de ingeniería civil nos muestra un argumento más detallado del comportamiento del circuito eléctrico sólo con el análisis del campo de pendientes.

Conclusiones

Podemos concluir en este trabajo que abordar a las ecuaciones diferenciales de forma cualitativa con ayuda de tecnologías como el de papel y lápiz o software como el Cabri es interesante, más este último, porque facilita el trazo de las pendientes en menor tiempo que la de tecnología de papel y lápiz, al trazar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales nos muestra conceptos de cálculo, además de que aprendemos mayor información de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la rapidez de crecimiento o decrecimiento de las pendientes, su comportamiento en el tiempo, todo de forma visual. En cambio, resolver una ecuación de forma algebraica nos deja una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales como argumentan Cordero (2000) y Artigue (1999) en sus investigaciones. Por tanto, los argumentos vertidos por los estudiantes proporcionan elementos para resignificar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales. Además, al establecer situaciones didácticas de este tipo, vemos que el alumno se enfrenta a una situación de análisis tipo cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Este tipo de análisis cualitativo, debido a su forma visual, aporta un valor enriquecedor en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, ya que muestra de forma gráfica el comportamiento y características de las ecuaciones diferenciales sin ser resueltas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1999). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bobrow, L. (1993). *Análisis de Circuitos Eléctricos*. México: McGraw Hill Interamericana.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G., Cruz, C., Poirier, P., Hernández, H., Velasco, E., y Megchún, J. (2006). *La tecnología en el aula de Matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales.* Talleres gráficos de la Universidad Autónoma de Chiapas.

Cantoral, R. (1996). *Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Conejo, A. (2004). *Circuitos Eléctricos para la ingeniería*. Madrid: McGraw Hill

Cordero, F. (2000). *Un acercamiento gráfico a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38

Hayt, W. y Kemmerly, J. (1990). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: McGraw Hill.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (3), 361-381.

Lezama, J. y Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. *4 (2),* 161-193

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México. CECSA.

Stewart, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México: Thomson

Suárez, L. (2006). *El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico.* Memoria predoctoral no publicada. Cinvestav-IPN. México.

E-MULTIMEDIA COMO RECURSO DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Alejandro Lois, Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
alelois@ciudad.com.ar, lmilevicich@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. Con el propósito de identificar las condiciones iniciales y de obtener información, más allá de las competencias que los alumnos pudieran poseer, diseñamos e implementamos una evaluación diagnóstica al inicio del 2º curso de Cálculo, que ofrece la posibilidad de añadir algunos elementos típicos de los tests dinámicos. Para ello optamos por la utilización de Hot Potatoes, que es una aplicación con la que se pueden desarrollar hasta seis tipos distintos de ejercicios educativos para una página Web y que permite elaborar evaluaciones de modalidad interactiva como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Los resultados, a la luz de los objetivos propuestos, fueron muy promisorios.
Palabras clave: evaluación diagnóstica, evaluación interactiva, test dinámico, Jquiz

Introducción

La delimitación y secuenciación del contenido de enseñanza es sin duda una tarea clave para abordar el diseño de la enseñanza. Nosotros pensamos que en esta tarea se debe prestar atención al análisis del contenido disciplinar y a las dificultades de su aprendizaje, en función de las características de los alumnos. También se pueden pensar como dos tareas interdependientes, por una parte la reflexión previa para la toma de decisiones en torno a la concreción no sólo de los objetivos y contenidos educativos, y por la otra la elección de las estrategias didácticas y de evaluación necesarias para el desarrollo y evaluación de las unidades didácticas (Sánchez Blanco y Valcárcel Pérez, 2000).

Los resultados de las investigaciones sobre el proceso de planificación ponen de manifiesto

que la atención del profesor se dirige principalmente hacia el contenido disciplinar. Esta característica es muy marcada en la universidad, dónde habitualmente se coloca en un segundo plano las experiencias previas de los alumnos.

Para diagnosticar el nivel de los alumnos o sus conocimientos previos generales, los profesores recurren a dos vías: la realización de una prueba escrita al inicio del curso o la propia experiencia, vía ésta que consideran más que suficiente, sobre todo cuando conocen la trayectoria del grupo. La vía de la experiencia parece ser la forma natural de tener en cuenta el nivel y los conocimientos

de los alumnos: los profesores no manifiestan dificultades para incorporar en su práctica las implicaciones que se derivan de considerar la importancia de las ideas previas de los alumnos en el aprendizaje y, por consiguiente, aceptan el papel determinante que deben tener para la selección y secuenciación del contenido, sin embargo no se indaga en profundidad sobre estas ideas.

Si bien parece natural que las ideas, experiencias, capacidades y actitudes de los alumnos condicionen las decisiones de los profesores en sus tareas docentes, planificación y trabajo en el aula, la forma y el grado en que se lleva a cabo depende de las concepciones y estilos docentes de cada profesor.

En relación con ello, compartimos con Coll (1986) que la capacidad cognitiva del alumno es un factor determinante de lo que es capaz de hacer y aprender en cualquier situación, así como que ésta depende tanto de los conocimientos previos que tenga el alumno sobre el contenido de enseñanza en cuestión (Ausubel, 1976; Novak y Gowin, 1988) como de que tenga las habilidades que se requieren para su comprensión; es decir, que las demandas cognitivas de las tareas que se plantean al estudiante estén en consonancia con su capacidad para resolverlas, no ya por sí mismo sino en las condiciones más favorables de aprendizaje.

En los términos de Novak y Gowin: "...no hay un alumno igual a otro, no hay un curso igual al otro. ¿Pero cómo conocerlos y cómo utilizar esta información en beneficio del proceso de enseñanza aprendizaje? La clave puede estar en la evaluación inicial".(Novak et al, 1988, 34)

Algunos investigadores incluyen a la evaluación diagnóstica dentro de la evaluación formativa, es decir, como un dispositivo de aprendizaje, donde a través de instrumentos que reflejan lo más fielmente posible la situación inicial, es posible obtener información del proceso de aprendizaje y a partir de ello, mejorarlo.

Justificación

En las estrategias tradicionales de evaluación no hay informatización porque la presentación de las preguntas y la elaboración de respuestas son en soporte papel, la corrección es manual, con o sin plantilla, se distribuyen las calificaciones en papel, y el profesor hace la interpretación y el análisis del examen, habitualmente, sin ayuda del ordenador.(Milevicich y Lois, 2008)

La utilización de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el ámbito de la educación superior plantea cambios significativos y nuevas opciones en la búsqueda de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular, el uso de las tecnologías en la evaluación pretende optimizar la elaboración de los exámenes, su corrección y análisis. Algunas universidades han creado diferentes herramientas de evaluación, denominadas: WEB-BASED ASSESSMENT (WBA), las cuales emplean técnicas diferentes a las escritas: visuales, auditivas y multimedias, y añaden herramientas de intercomunicación tanto sincrónicas (*chats*, pantallas compartidas y videoconferencias) como asincrónicas (correo electrónico y foro de discusión). (Lara, 2001)

Un listado de algunas de tales herramientas y su dirección WEB se exhibe en la tabla 1.

Herramienta	Procedencia	URL internet
Castle	Leicester University	le.ac.uk/cc/ltg/castle
Cvu	Strathclyde University	cvu.strath.ac.uk/assessment/idex.html
Geodata	Southhamptom University	geodata.soton.ac,uk/elecpub/quiz. html
Webtest	Edimburg University	flex-learn.ma.hw.ac.uk
Wamcq	Dundee University	dundee.ac.uk/meded/mcq/
Netquest	Bristol University	iltr.bris.ac.uk/ netquest/about/general/
Quizwizard	Pennsylvania University	cac.psu.edu/ets/wizard/overview. html
Quizmaker	Hawaii University	notted.hawaii.edu
Nettest	Utah State University	ntserver.cs.usu.edu/nettst

Tabla 1. Herramientas Web-Based Assessment

Inicialmente, al planificar un curso, el profesor se debería cuestionar no sólo el modelo y el sentido de la evaluación sino también la utilidad de la inserción de los ordenadores en esa práctica. Para ello, es importante que pueda disponer de formación didáctica en evaluación y unos mínimos conocimientos técnicos en TIC que le permitan clarificar y desmitificar su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Creemos que la concepción teórica y práctica que el profesor tenga de la evaluación será determinante para mejorar el diseño y la calidad de las evaluaciones con TIC. La evaluación siempre implica un juicio de valor sobre las cualidades que tiene algo o sobre su valor, de ahí que se deba abordar desde su carácter formativo, es decir, como instrumento para el perfeccionamiento del proceso didáctico y de cada uno de sus componentes curriculares. Ello

permite, por tanto, las posibles medidas de mejora, no sólo del aprendizaje del alumno sino de las tareas docentes implicadas en el diseño y desarrollo curricular.

La evaluación diagnóstica debiera pensarse y planificarse desde esta perspectiva, de tal modo que sus resultados permitan realizar un análisis profundo de las características del grupo.(Milevicich et al, 2008)

Desarrollo de la experiencia

Características de la investigación: Se trabajó sobre una propuesta de investigación y experimentación que se está llevando a cabo en la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), enmarcado en un proyecto de innovación del proceso educativo con la aplicación de medios multimedia didácticos, en este caso aplicados a la evaluación.

Metodología: Investigación-acción pedagógica.

Población: 2 comisiones de aproximadamente 30 alumnos cada una, correspondientes al segundo año de las carreras de Ingeniería de la FRGP

Características de la evaluación: diagnóstica, al inicio del curso de cálculo multivariable. Se pretendía evaluar los siguientes conceptos previos: funciones, cálculo diferencial e integral, geometría analítica, vectores, coordenadas polares.

Objetivos:

- *que se tuviera en cuenta que la información obtenida es valiosa para quien administra y planea el curso, pero también para el alumno;*
- *que permitiera al alumno autoevaluarse;*
- *que permitiera trabajar con preguntas de opción múltiple;*
- *que facilitara la obtención de datos estadísticos sobre el desempeño individual, grupal, por pregunta o por tema, y permitiera el almacenamiento de los resultados para su posterior tratamiento;*

- que supusiera un cierto dinamismo en el orden de presentación de las preguntas, pues creemos que, al mostrar el cuestionario con un orden aleatorio de preguntas y de respuestas, se puede evitar un aprendizaje mecánico de las mismas, y
- que ofreciera la posibilidad de añadir algunos elementos típicos de los tests dinámicos, como incluir una devolución en cada pregunta, imágenes, tablas o ecuaciones.*Características de la herramienta tecnológica adoptada:*

Para elaborar el cuestionario se seleccionó HOT POTATOES (HP), aplicación de libre distribución (freeware), desarrollada por el equipo de Victoria University y Half-Baked Software. Los profesores pueden utilizar las herramientas de Hot Potatoes para crear materiales educativos, principalmente evaluaciones. La aplicación cuenta con seis diferentes utilidades, con lo cual la posibilidad de elaborar evaluaciones de modalidad interactiva como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, es muy amplia. La interactividad de los ejercicios se consigue mediante el lenguaje JavaScript (JS), que permite personalizar casi todas las características de la página, aun cuando no se necesita saber nada sobre este lenguaje para poder utilizar estas aplicaciones. Todo lo que se necesita es introducir los datos (textos, preguntas, respuestas etc.) y el programa se encargará de generar las páginas Web.

La utilidad JQUIZ permite desarrollar cuestionarios con ejercicios o preguntas con un número variable de respuestas correctas. Se pueden incluir preguntas con multirespuesta, las cuales requieren la selección de todas las respuestas correctas; o bien preguntas de respuestas múltiples con valoración única o diferenciada. La valoración única solo admite una respuesta correcta con la asignación de la totalidad del puntaje, en cambio la valoración diferenciada permite jerarquizar la puntuación a otorgar.

Una vez desarrollado el cuestionario, se incorpora el mismo a la plataforma Moodle, con la que se complementa el desarrollo del curso

A modo de ejemplo se exhibe una pregunta con valoración diferenciada:

"El teorema del valor medio establece que:

a. *Si f es una función derivable sobre el intervalo [a,b], entonces existe c, entre a y b tal que f(b)/b-f(a)/a = f´(c) (b-a)*

b. *Existe por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la de la recta secante.*

c. *Si un objeto se mueve en una línea recta con una función de posición f(t), entonces la velocidad promedio entre t=a y t=b es f(b)-f(a)/(b-a)"*

d. *Si f es una función derivable sobre el intervalo [a,b], entonces existe c, entre a y b tal que f(b)-f(a) = f´(c) (b-a)"*

Es importante observar que si bien la opción "d" es la que se espera que seleccionen los evaluados, y en ese sentido es la que recibe el máximo puntaje, también las opciones "b" y "c" merecen la asignación de puntaje. En ambos casos, si bien el alumno no conoce o no recuerda el enunciado de la propiedad o teorema tiene la idea geométrica, en el caso de la opción "b", o bien tiene idea física, en el caso de la opción "c".

La Imagen 1 muestra la disposición de la pantalla en la formulación de una pregunta (en este caso referida al teorema del valor medio).

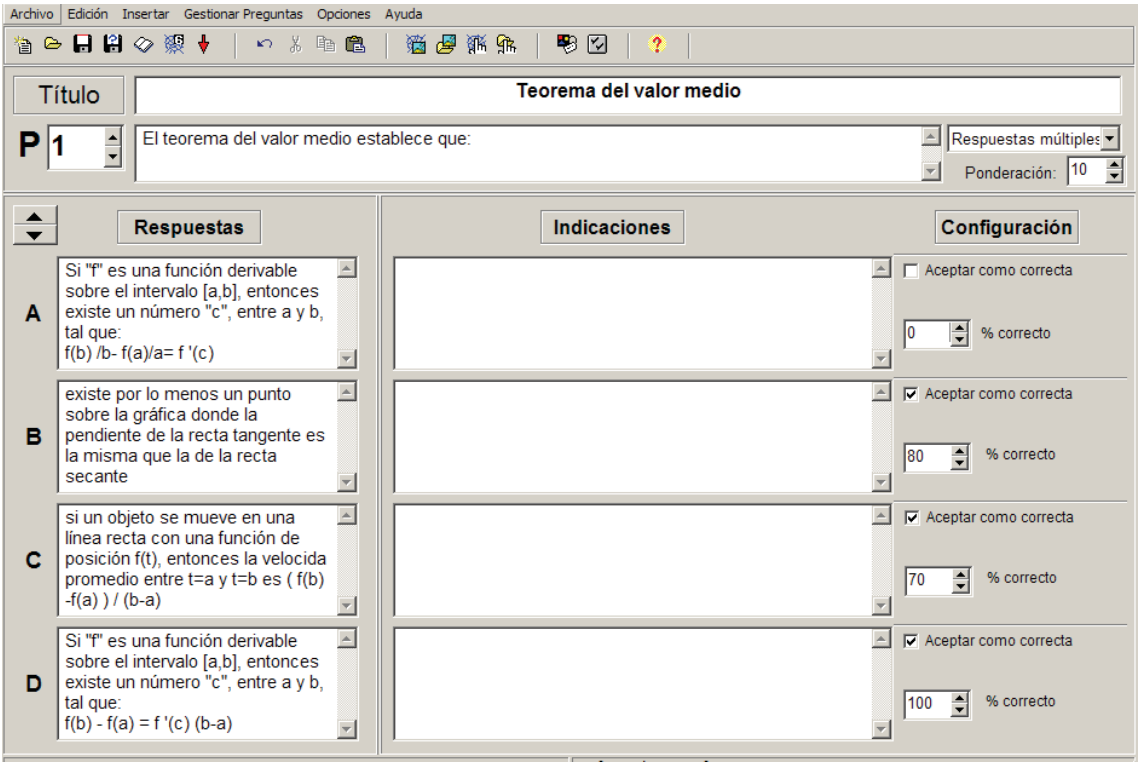


Imagen 1

Otras características relevantes sobre este tipo de evaluaciones son:

- Cada alumno debe ingresar a la red con su nombre y contraseña. Una vez iniciada la evaluación, debe responder necesariamente a todas las preguntas, aunque puede hacerlo en cualquier orden. Dado que el docente o responsable de la implementación de la evaluación, puede monitorear su desarrollo desde cualquier PC conectada a la red, puede también verificar a cada momento el estado de cada examen.
- Las preguntas aparecen en orden aleatorio, y las respuestas de una pregunta otro tanto, con lo cual se evita un aprendizaje mecánico de las mismas.
- Es posible añadir en cada pregunta: imágenes, ecuaciones, gráficos, archivos de video o sonido.
- A medida que el alumno va respondiendo al cuestionario, se actualiza su porcentaje de logros y toma conocimiento de él. Es posible configurar las respuestas con retroalimentación, esto es, cada respuesta incorrecta puede estar vinculada a un texto, fórmula o imagen con una explicación adecuada sobre el error cometido.
- El sistema registra los resultados por alumno y por pregunta, el tiempo invertido por cada alumno (ver Imagen 2), así como diferentes análisis estadísticos: por pregunta y por alumno.

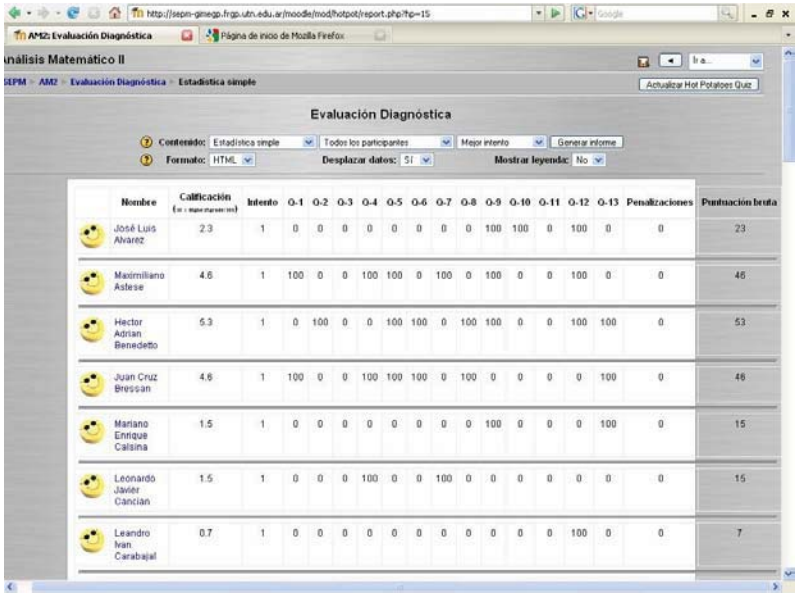


Imagen 2

Resultados

La totalidad de los alumnos, en cada comisión completó la evaluación.

Se obtuvieron datos estadísticos valiosos sobre el desempeño individual, grupal y en cada pregunta. Por ejemplo, una de las preguntas de respuestas múltiples con valoración única, mostraba el gráfico de una elipse en un sistema cartesiano ortogonal y preguntaba cual era su ecuación. La selección de determinada respuesta por parte del 63 % de los alumnos evaluados, permitió detectar que ellos confunden los desplazamientos sobre el eje horizontal. Otra pregunta, que indagaba sobre la ecuación del círculo con centro en (1; 0) y radio 1 en coordenadas polares, permitió detectar que el 96% de los alumnos no conoce la conversión a este tipo de coordenadas. Por último, una pregunta referida al volumen de revolución obtenido al girar la región sombreada alrededor del eje de abscisas (ver Figura 1), permitió descubrir que el 55 % de los alumnos recuerda el concepto y lo aplica correctamente y que un 30 % , si bien conoce el concepto, selecciona la variable incorrecta.

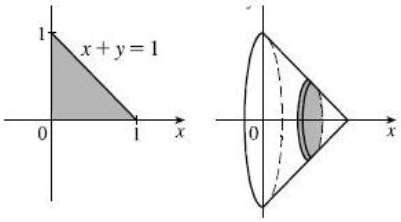


Figura 1

Conclusiones

- La motivación es una variable relevante en cualquier proceso de aprendizaje, por lo tanto, los materiales formativos y la acción del docente tienen que involucrar elementos y situaciones que motiven a los alumnos, facilitando el logro de los objetivos. En ese sentido, el indicador sobre su progreso, que aparece cada vez que se responde una pregunta, se convierte en motivador.
- También incide favorablemente la identificación del alumno a través de legajo y contraseña. Es habitual, en las evaluaciones diagnósticas anónimas, que los alumnos no

pongan su mejor esfuerzo. También, colabora con esto, el que toda pregunta del cuestionario deba ser contestada; esto obliga al alumno a realizar un esfuerzo adicional.

La retroalimentación durante el desarrollo del examen también favorece la motivación.

La obtención de datos estadísticos, así como gráficos comparativos es inmediata. Su almacenamiento en el servidor, permite su posterior tratamiento.

Nuestra propuesta, en un futuro próximo, consiste en poder generalizar esta forma de evaluación para cada una de las unidades de Análisis Matemático II.

Referencias bibliográficas

Andrés, J (2000) *La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas.* Barcelona: Ice-Horsori.

Ausubel, D. (1976). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Coll, C. (1986). Bases psicológicas. *Cuadernos de Pedagogía*, 139, 12-16.

Lara, S. (2001): *La evaluación formativa en la Universidad a través de Internet*. Pamplona: EUNSA.

Milevicich, L y Lois, A (2008). E-multimedia test to explore the backgroud of students, *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Recuperado el 02/01/2009 de: http:// educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/wg7-c.pdf

Novak, J. D. y Gowin, D.B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Sánchez Blanco, G. y Valcárcel Pérez, M. V. (2000) ¿Qué tienen en cuenta los profesores cuando seleccionan el contenido de enseñanza? Cambios y dificultades tras un programa de formación. *Enseñanza de las ciencias*, *18 (3)*

UN ESTUDIO DE LA COVARIACIÓN CON PROFESORES UNIVERSITARIOS USANDO TECNOLOGÍA

María del Socorro Valero Cázarez, Ma. Guadalupe Barba Sandoval, María Paulina Ventura Regalado, Alejandro Del Castillo Escobedo, María José Torres Jaramillo
CBTIS 164 México
paraklet@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En el presente estudio se analizaron las producciones de 13 profesores universitarios relacionadas con 4 enunciados verbales referidos a la rapidez de variación, antes y después de que desarrollaran actividades de laboratorio usando tecnología de calculadoras graficadoras y sensores de parámetros físicos diversos para obtener y analizar, gráficas cartesianas generadas en tiempo real, durante un curso de 30 horas. El objetivo de esta experiencia fue dotar a los docentes universitarios de elementos que les permitieran resignificar los contenidos asociados al análisis gráfico de funciones, en términos del cambio y la variación tomando en cuenta que, al estudiar diferentes fenómenos físicos, se confrontan relaciones entre los sentidos corporales y los sistemas de representación. Buscamos, bajo un acercamiento fenomenológico del cálculo, aproximarnos a las intuiciones y vivencias cotidianas de los participantes.*
Palabras clave: funciones, tecnología digital, corporización, razonamiento covariacional

Introducción

La llegada de un desarrollo tecnológico no sólo provoca expectativas o miedos desmedidos; sobre todo, plantea retos al maestro, a la escuela y al sistema educativo para su efectiva incorporación al aula porque, por más benéfica que sea esta nueva tecnología para la enseñanza, esencialmente implica una transformación de la práctica docente, de la organización escolar e incluso de las políticas educativas (Bonilla, 2006).

Sobre la incidencia de las llamadas tecnologías de la información, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) declara que el currículo de matemáticas debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y el desarrollo de habilidades por parte del estudiante. Sin embargo, los problemas que genera el uso creativo de la tecnología en la enseñanza de la matemática son diversos. Guin y Trouche (1998) mencionan que, a pesar de que una gran mayoría de estudiantes del ciclo secundario en Francia (edades entre 14 y 17 años) cuentan con una calculadora graficadora, solamente alrededor del 15% de los profesores de enseñanza media la utilizan en el salón de clases. Los mismos autores señalan que en Francia, la

actividad de aprender a leer gráficas no está en el currículum y que los alumnos deben adquirir esa habilidad fuera del aula de matemáticas.

Por otra parte, también se han reportado algunas dificultades que los profesores de matemáticas tienen respecto del análisis de funciones. Hitt (1996) da cuenta de los resultados de una investigación realizada con 30 profesores de matemáticas de enseñanza media a quienes se les aplicaron 14 cuestionarios, que tenía como objetivo identificar las dificultades que presentaban en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función y para identificar los errores en el uso de tales sistemas y las repercusiones en la enseñanza. En los resultados obtenidos, el autor identificó la presencia de una concepción alternativa en los profesores, denominada *traslación icónica* (Monk, 1992) que les llevó a relacionar la forma continua del trazo de la gráfica con la forma de un recipiente, encontrando que la forma de la gráfica y no el estudio analítico de la información contenida en ella, determinó la forma del recipiente.

En el presente estudio damos a conocer los resultados que obtuvimos con un grupo de 13 profesores universitarios después de que ellos desarrollaron algunas actividades relativas al estudio del concepto de función usando calculadoras graficadoras y sensores digitales de diferentes parámetros físicos y en donde la atención se centró en las relaciones de covariación presentes en las gráficas de funciones.

Referentes del estudio

De acuerdo a Moreno y Waldegg (2005) aunque son las capacidades cognitivas superiores (modelar, interpretar, etc.) todavía privativas del ser humano las que valoramos en las instituciones escolares, seguimos enfatizando las destrezas computacionales sin reconocer que esas destrezas son propias de una “tecnología invisible” y no características de un pensamiento matemático profundo. De allí que las nuevas tecnologías, que todavía no se han vuelto invisibles y que permiten que ciertos cálculos se realicen pulsando una tecla, desafían nuestras concepciones tradicionales sobre lo que constituye el aprendizaje matemático.

Para Tall (2002), corporizar se refiere a construir conocimiento fundamentalmente sobre la percepción sensorial, en oposición a la operación simbólica y a la deducción lógica. Una

aproximación corporizada del cálculo, se centra en las ideas perceptuales, previo a la introducción del simbolismo. Este investigador categoriza los modos de representación en tres formas distintas de operación:

- Corporizado. Basado en las percepciones humanas y en acciones, en un contexto del mundo real incluyendo, pero no limitado, a aspectos visuales y representacionales.
- Simbólico-Proceptual. Combinación del rol de los símbolos en aritmética, álgebra y cálculo simbólico, basado en la teoría de que estos símbolos actúan dualmente como proceso y como concepto (procepto).
- Formal-Axiomático. Un acercamiento formal que parte de axiomas y hace deducciones lógicas para probar teoremas.

El mundo corporizado es el modo humano fundamental de operación basado en la percepción y en la acción. El mundo simbólico-proceptual es un mundo de procesamiento simbólico matemático, y el mundo formal-axiomático implica el cambio adicional al interior del formalismo que ha probado ser tan difícil para muchos de nuestros estudiantes. Con relación al uso de las herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática, Balacheff y Kaput (1996) han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho de que estas herramientas han generado un nuevo realismo matemático.

Otro elemento fundamental de nuestro trabajo se relaciona con el desarrollo de razonamiento covariacional, denominación de las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002). Estos autores asumen que las imágenes de la covariación son desarrollables en el sentido piagetiano es decir, las imágenes de la covariación pueden ser definidas por nivel y los niveles emergen en una sucesión ordenada: nivel 1, coordinación; nivel 2, dirección; nivel 3, coordinación cuantitativa; nivel 4, razón promedio; nivel 5, razón instantánea.

Actividades de aprendizaje con calculadora graficadora y sensores

Las 11 actividades puestas en escena en este proyecto, están referidas al tema del Análisis de Funciones, cuyo estudio se aborda en un curso de Cálculo tradicional, el cual es trabajado

principalmente en el registro algebraico. En contraste, a través de nuestra propuesta buscamos resignificar el análisis de funciones a través del desarrollo de experimentos de la física utilizando la calculadora graficadora TI-84 plus, el sensor CBR2, el sensor de fuerza Vernier Dual Force, y el sensor de sonido Microphone Vernier destacando, principalmente en las gráficas, los elementos del cambio y la variación presentes en cada una de ellas buscando desarrollar ideas variacionales en los participantes tomando en cuenta que esta estrategia ofrece ricas oportunidades pedagógicas para el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes (Carlson, 2002). El trabajo en general, se basó en las intuiciones y vivencias de los participantes mediante un acercamiento fenomenológico por lo que se atendió más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se.

Elementos metodológicos

La presente investigación corresponde a un estudio pre–post, predominantemente cualitativo con un componente cuantitativo (Hernández, Fernández, Baptista, 1995) en razón de que nuestra atención se dirigió hacia aspectos cualitativos de las producciones de los profesores. El curso de 30 horas se llevó a cabo en enero de 2009 y se impartió a 13 profesores del Instituto Tecnológico de Reynosa perteneciente a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica de la SEP ubicado al oriente de la zona fronteriza México-Estados Unidos del estado de Tamaulipas y estuvo dirigido por tres de los investigadores.

Instrumento diagnóstico

Fue aplicado antes y después de poner en escena las actividades. Este instrumento de diagnóstico consistió de una colección de 4 enunciados verbales acerca de la rapidez de variación (Dolores, 2007) que requirió poner en juego los cuatro niveles de razonamiento covariacional: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa y razón promedio (Carlson, 2002).

1. *Desde una misma posición de una pista olímpica, inician su carrera los atletas A y B. Después de un tiempo determinado el atleta A alcanza una rapidez de 2m/s y el atleta B de 5 m/s. Así se mantiene durante una vuelta entera a la pista. Represente esta situación gráficamente.*

2. *Una niña crece más rápidamente que un niño durante cierto tiempo. Después la rapidez de crecimiento se invierte, es decir, el niño crece más rápido que la niña, en un periodo subsiguiente. Dibuje una gráfica que represente tal situación.*
3. *Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de 100 km/h en 20 segundos. Haga una representación gráfica de esta situación.*
4. *Dos recipientes que contienen igual cantidad de agua y aceite respectivamente, se calientan por un periodo determinado de tiempo hasta alcanzar su punto de ebullición. El agua hirvió más rápidamente que el aceite. Construye la o las gráficas que representen esta descripción.*

La valoración de las producciones de los profesores fue analizada bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendió indagar aspectos relativos a las concepciones de los participantes respecto de la representación gráfica de la rapidez de variación.

Discusión de los resultados

Tabla 1. Resultados ejercicio 1

Desde una misma posición …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó				
2	Representación pictórica (dibujo)	6	46.2		
3	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano	1	7.7		
4	Construyeron una gráfica de barras				
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	4	30.8	6	46.2
7	Construyeron dos curvas crecientes	1	7.7	1	7.7
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	1	7.7	6	46.2

Los tipos de gráficas del 1 al 5 indican que los profesores no se encontraban ni en el nivel de coordinación de la clasificación de Carlson de desarrollo de razonamiento covariacional y aquí observamos que más de un 50% de los profesores evidenciaron esta situación en el pretest. En el postest ya no se identificó caso alguno en esta condición. El tipo 6 corresponde al nivel 2, de dirección, es decir, alcanzaron a identificar que, cuando crece, la posición de los corredores también aumenta la posición, aunque con razón de cambio constante. Aquí ubicamos en el pretest a la tercera parte de la población; en el postest, observamos un cambio importante en la dirección deseada. El tipo de gráfica 7, denota que el estudiante se ubica en el nivel de coordinación cuantitativa, pues hay conciencia de que, a medida que el tiempo aumenta, la posición, va aumentando la razón de cambio promedio. En este nivel no se observó cambio. Por último, en el pretest solo uno de los participantes fue capaz de construir una gráfica que correspondiera al enunciado del problema, en tanto que en el postest casi el 50% de los participantes construyeron una gráfica que denota el nivel de razón instantánea de cambio, es decir, en su gráfica se puede observar que existe conciencia de que, a medida que el tiempo aumenta, la posición de ambos atletas también va aumentando respecto del punto de referencia con una razón de cambio instantánea variable.

Tabla 2. Resultados ejercicio 2

Una niña crece más rápidamente que …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	**7.7**		
2	Representación pictórica (dibujo)	1	7.7		
3	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano	1	7.7		
4	Construyeron una gráfica de barras	2	15.4		
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	1	7.7	1	7.7
7	Construyeron dos curvas crecientes				
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	7	53.8	12	92.3

En las gráficas que los profesores construyeron en este problema, encontramos que en el pretest, cerca de un 40% denota que no existe razonamiento covariacional y más de la mitad construyeron gráficas que corresponde en la totalidad a lo esperado. Estos números se modifican en el postest de modo que casi el 100% de la población, construyó gráficas que incluyen elementos que corresponden al más alto nivel de razonamiento covariacional.

Tabla 3. Resultados ejercicio 3

Un automóvil parte del reposo y …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	7.7		
2	Representación pictórica (dibujo)	5	38.5		
3	Localiza un punto en el plano cartesiano				
4	Construyeron una gráfica de barras				
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron un segmentos de recta con pendiente aceptable	1	7.7	4	30.8
7	Construyeron una curva creciente	1	7.7		
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	5	38.5	9	69.2

En este ejercicio casi la mitad de los participantes en el pretest, construyen gráficas en donde no hay indicios de razonamiento covariacional. En proporción menor identificamos profesores cuyas construcciones corresponden a lo esperado. En contraste, en el postest, un 30% construyen gráficas cuyos elementos denotan avance en su nivel de R. C. y un 70% construyen gráficas que corresponden completamente a lo esperado.

Tabla 4. Resultados ejercicio 4

Dos recipientes que contienen igual …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	7.7	1	7.7
2	Dos curvas decrecientes Volumen vs. Tiempo			1	7.7

3	Representación pictórica (dibujo)	3	23.1		
4	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano				
5	Construyeron una gráfica de barras				
6	Construyeron una gráfica de pastel				
7	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	4	30.8	4	30.8
8	Construyeron dos curvas crecientes	5	38.5	7	53.8
9	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)				

Por último, los resultados del ejercicio 4, muestran que éste supuso un reto mayor para los participantes pues, si bien en el pretest más de un 30% de ellos construyeron gráficas que denotan un 0% de razonamiento covariacional, y en el postest solo uno de ellos se sigue manteniendo en este nivel, solo uno de los profesores realizó una construcción que coincidió completamente con lo esperado. Más de un 80% de la población construyeron gráficos que evidencian la existencia de razonamiento covariacional en los niveles de dirección y coordinación.

Conclusiones

Tomando en cuenta que el profesor universitario tradicional del sistema educativo público mexicano es proclive a desarrollar en los estudiantes mecanizaciones usando excesivamente el método expositivo y poco métodos participativos, omitiendo prácticamente el uso de los medios electrónicos, basándose en programas de estudios en donde predomina un enfoque abstracto con escasa relación con los fenómenos de la variación física (Dolores, 2000), consideramos fundamental la realización de cursos-taller como el que aquí se reporta en donde, aprovechando los recursos expresivos que las tecnologías digitales ofrecen, el profesor pueda establecer el vínculo, entre nociones fundamentales del cálculo y algunos fenómenos físicos en donde se encuentran presentes los elementos que dieron origen a los mismos y que posibiliten el desarrollo de ideas variacionales.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. y Kaput J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics, in: A. Bishop et al. (eds.) *International Handbook in Mathematics Education* (pp.469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bonilla, E. (2006). Tecnología y Cognición. Prefacio del Libro: *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. Ma. Teresa Rojano Ceballos (coord.). Dirección General de Materiales de la Subsecretaría de Educación Básica, de la SEP.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa

Dolores, C. (2007). Tipos de representaciones gráficas sobre la rapidez de la variación en *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática* Educativa, 359-371

Guin, D. y Trouche L. (1998). Environments "Calculatrice symbolique": Necessité d'une socialization des processus d'instrumentation. Evolution des comportements d'eleves au cours de ces processu. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Montpellier, France.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1997). Metodología de la investigación. México: Mc Graw-Hill. (pág. 20)

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas, epistemológicos y didácticos; Ed. Fernando Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 175–193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2006). Tecnología y Cognición, Postcriptum. Capítulo IX. En: Rojano, T. (Ed.). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con tecnología*. SEP-OCDE, México.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). The Use of Technology in the Learning and Teaching of Mathematics. Disponible en: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id_6 [2006, 11 de febrero]

Tall, D. (2002). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. En L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *Historia e Tecnologia no Ensino da Matemática*, Vol. 1, pp. 1 – 28, Rio de Janeiro, Brasil.

APREHENSIÓN DE PROPIEDADES Y USO DE JUSTIFICACIONES GEOMÉTRICAS EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Noraísa González González, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
norai11@yahoo.com, vil@uaq.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Medio

Resumen. *Este trabajo presenta una propuesta para enseñar la Geometría del Triángulo en el nivel medio utilizando Software para Geometría Dinámica. En particular se pretende con la propuesta desarrollar la capacidad de los alumnos para observar propiedades geométricas y justificarlas de manera deductiva a fin de trabajar en la construcción de la demostración. Este diseño está basado en la Teoría de los Conceptos Figurales de Fischbein (1993), la noción de Unidad Cognitiva de los Teoremas (Boero, Garuti y Mariotti, 1996) y la necesidad de definir el sentido de la demostración en la escuela desde un punto de vista pragmático a partir de la noción de institución (Godino y Batanero, 1994).*
Palabras clave: geometría dinámica, enseñanza de la geometría, representaciones gráficas

Introducción

El Software para Geometría Dinámica (SGD) actúa como un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el alumno, influyendo así en el aprendizaje de la Geometría y generando fenómenos cognitivos. En el nivel medio esta herramienta puede resultar útil para el aprendizaje de la Geometría y la observación de propiedades para llevar a cabo la construcción de justificaciones que tiendan a ser demostraciones dentro de Ambientes de Geometría Dinámica. Estos ambientes no sólo incluyen el uso del SGD, sino el diseño de actividades orientadas específicamente para lograr un objetivo didáctico.

Bajo esta consideración se presenta una propuesta de actividades para estudiar la Geometría del Triángulo en el nivel medio, con alumnos de secundaria o de 14-15 años. Esta propuesta está estructurada considerando como marco teórico la «Teoría de los Conceptos Figurales» (Fischbein, 1993) y la noción de «Unidad Cognitiva de Teoremas» (Boero, Garuti y Mariotti, 1996) para estudiar propiedades de los puntos y rectas notables del triángulo.

Los objetos geométricos y el software para geometría dinámica

Los objetos geométricos son entes teóricos que como humanos no podemos asirlos y manipularlos si no es a través de representaciones, que comúnmente son gráficas. Las representaciones gráficas de los objetos geométricos nos permiten otorgarle un significado, pero éste a veces está vinculado fuertemente con las representaciones y no con las propiedades con las que se rigen los objetos geométricos.

Para el alumno que es novato en el aprendizaje de la Geometría puede ser normal confundir estos dos objetos: el geométrico y su representación. Puede llegar a creer que ésta última es aquél y viceversa. Laborde y Capponi (1994) hacen la distinción entre los términos *dibujo*, *figura* y *objeto*. El *objeto* se refiere al objeto geométrico, el *dibujo* es la representación del objeto (o varios objetos) geométrico y la *figura* es "el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan; el segundo término es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (pág. 168). Esta distinción permite distinguir entre la información que pertenece únicamente a la representación y la información proporcionada por el objeto geométrico (propiedades). Una falla en tal distinción puede llevar a darle una importancia excesiva a información inútil y observar propiedades falsas o erróneas o inútiles, no pudiendo observar las propiedades invariantes que se buscan en el estudio de la Geometría.

Fischbein (1993), con su *Teoría de los Conceptos Figurales*, establece la noción de *concepto figural* que permite explicar el proceso del manejo de las representaciones y de las propiedades geométricas: "los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros *conceptos figurales*, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales –como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (pág. 143). A las primeras se encuadran en el aspecto *figural* y las últimas en el *conceptual*.

El Software para Geometría Dinámica, con su capacidad de herramienta para manipular "directamente" (a través del ratón) las representaciones gráficas a través del *arrastre*, permite construir significados de los objetos geométricos a través de la posibilidad de la transformación continua de los dibujos que son diferentes a los significados construidos al utilizar la tecnología de

papel y lápiz, convirtiéndose así en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Además, la característica dinámica del software hace necesaria que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están construidas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas. Esto permite que al momento de hacer una transformación de una construcción por medio del arrastre las propiedades geométricas (más que la información figural) se mantengan invariantes. Es por esto que el uso de este tipo de herramienta para el diseño de ambientes se puede convertir en un medio que propicie la exploración de la Geometría, abriéndole la posibilidad al alumno de generalizar situaciones y buscar casos particulares para construcciones realizadas.

Actividades para observar y justificar propiedades

Con la intención de que los alumnos observen propiedades geométricas y propongan justificaciones deductivas (demostraciones) dentro de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) se diseñaron actividades orientadas al estudio de la Geometría del Triángulo en el nivel secundaria.

El diseño realizado tomó en cuenta dos cosas relacionadas con la demostración:

1. Una definición pragmática de la demostración basada en la noción de *institución* planteada por Godino y Batanero (1994).
2. La noción de *Unidad Cognitiva de Teoremas* propuesta por Boero, Garuti y Mariotti (1996).

La demostración, como medio para validar el conocimiento matemático, es una parte importante de la ciencia matemática, pero en la escuela del nivel medio no es posible manejarla en los mismos términos o los mismos requerimientos que en la Matemática en sí. Es por ello que al tomar en cuenta la noción de institución, como comunidad de personas dedicadas a resolver problemas comunes por medio de métodos comunes, nos permite pensar en la comunidad escolar (la institución de los enseñantes de la Matemática) y en la comunidad matemática (la institución de los matemáticos profesionales), y así otorgarle un significado al término *demostración* en la

escuela teniendo siempre como referencia el significado que se le otorga en la institución matemática y los diversos usos que puede llegar a tener.

Así pues, el sentido que se le puede dar a la demostración en la escuela no es arbitrario, sino que requiere ser caracterizado, por lo que se ha tomado en cuenta lo propuesto por Larios y Acuña (2009):

1. "Es una justificación implícitamente rigurosa de un hecho matemático
2. "Está basado en argumentos que tienen como principal función convencer (al interlocutor y a los que le rodean)
3. "Explica dicho hecho rigurosa y explícitamente.
4. "Y su estructura se organiza con base en inferencias de argumentos deductivos."

Con estas características se ha considerado la Unidad Cognitiva de Teoremas como herramienta para el diseño de actividades, en la cual se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal. Estas etapas comienzan con una exploración de una situación dada, tras la cual se genera una conjetura o el planteamiento de una propiedad, para después buscar una justificación al respecto realizando otra exploración y así se encadenan argumentos que permitan demostrar (validar o justificar) la propiedad observada.

Esto no quiere decir que aquella persona que realice una exploración sobre un hecho geométrico (o matemático) y que incluso llegue a proporcionar algunos argumentos que lo justifiquen logre desarrollar una demostración, pues el proceso de construirla es gradual y complejo.

Por otro lado, tampoco es innegable que los dos procesos de argumentar y de demostrar están diferenciados claramente a pesar de esta continuidad cognitiva y de una continuidad en términos semánticos, pues en términos estructurales y epistemológicos existen rupturas que pueden ser difíciles de salvar, pero que quizá con actividades específicamente diseñadas puedan serlo.

En términos particulares de este trabajo, las actividades que se ha propuesto no apuntan como fin último la validación o justificación de propiedades en todas ellas, pero como esto es una parte central de muchas de ellas entonces se ha decidido considerar esta propuesta de los investigadores italianos para estructurarlas. Esta estructura es la siguiente:

1. *Planteamiento de una situación* a través de una consigna en texto para que los alumnos realicen la construcción con el software.
2. *Construcción de la situación*. Se les pide a los alumnos que realicen la construcción con el software. Hay que considerar que si no se hace bien la construcción no se podrán observar muchas cosas, pero es necesario un proceso no lineal para lograr la internalización de la herramienta.
3. *Exploración de la situación*. En esta parte de las actividades se realiza una exploración dirigida de la situación, donde se deja a los alumnos parcialmente libres y porque está documentado en investigaciones que dejar a los alumnos "jugar libremente" con el software no produce resultados adecuados en términos del ambiente y la dinámica escolar.
4. *Explicitación de propiedades observadas*. Después de la construcción y de la exploración, se les pide a los alumnos que expliciten las propiedades que hayan observado, describiendo en ocasiones las acciones realizadas para la exploración.
5. *Justificación de las propiedades*. En algunas de las actividades se les pide a los alumnos que justifiquen las propiedades que hayan observado. En estos casos se busca que las justificaciones avancen hacia una estructura deductiva, para lo cual se hacen pausas en las hojas de trabajo para realizar un proceso de interacción con los alumnos a nivel grupal y se permite el trabajo en parejas.
6. *Conclusión*. En la última parte de la mayoría de las actividades se proporcionan en las hojas de trabajo una breve conclusión de las propiedades que se pretenden estudiar. Esta conclusión en términos docentes no queda ahí, pues en la clase se propone que sea más amplia y que sirva como momento en el cual se lleva a cabo el proceso de institucionalización del conocimiento matemático que se fue desarrollando a trabajos del trabajo y las prácticas en el salón de clase.

Es importante señalar que en ocasiones las etapas de *exploración*, *explicitación de propiedades* y *justificación* se repiten en una sola actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas. Generalmente esto ocurre cuando se propone la exploración de varias propiedades relacionadas en una misma actividad o la exploración de una propiedad que no resulta evidente y que necesita de un proceso progresivo de acercamiento.

Las actividades pensadas han sido 18 y se interrelacionan entre sí como se muestra en la ilustración de la siguiente página. Como ya se mencionó, en ellas se aborda la Geometría del Triángulo y se consideran temas relacionados con el estudio de las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas. Además, se ha considerado por lo pronto el uso del software *Cabri-Géomètre*, pero en general pueden ser abordadas con casi cualquier SGD.

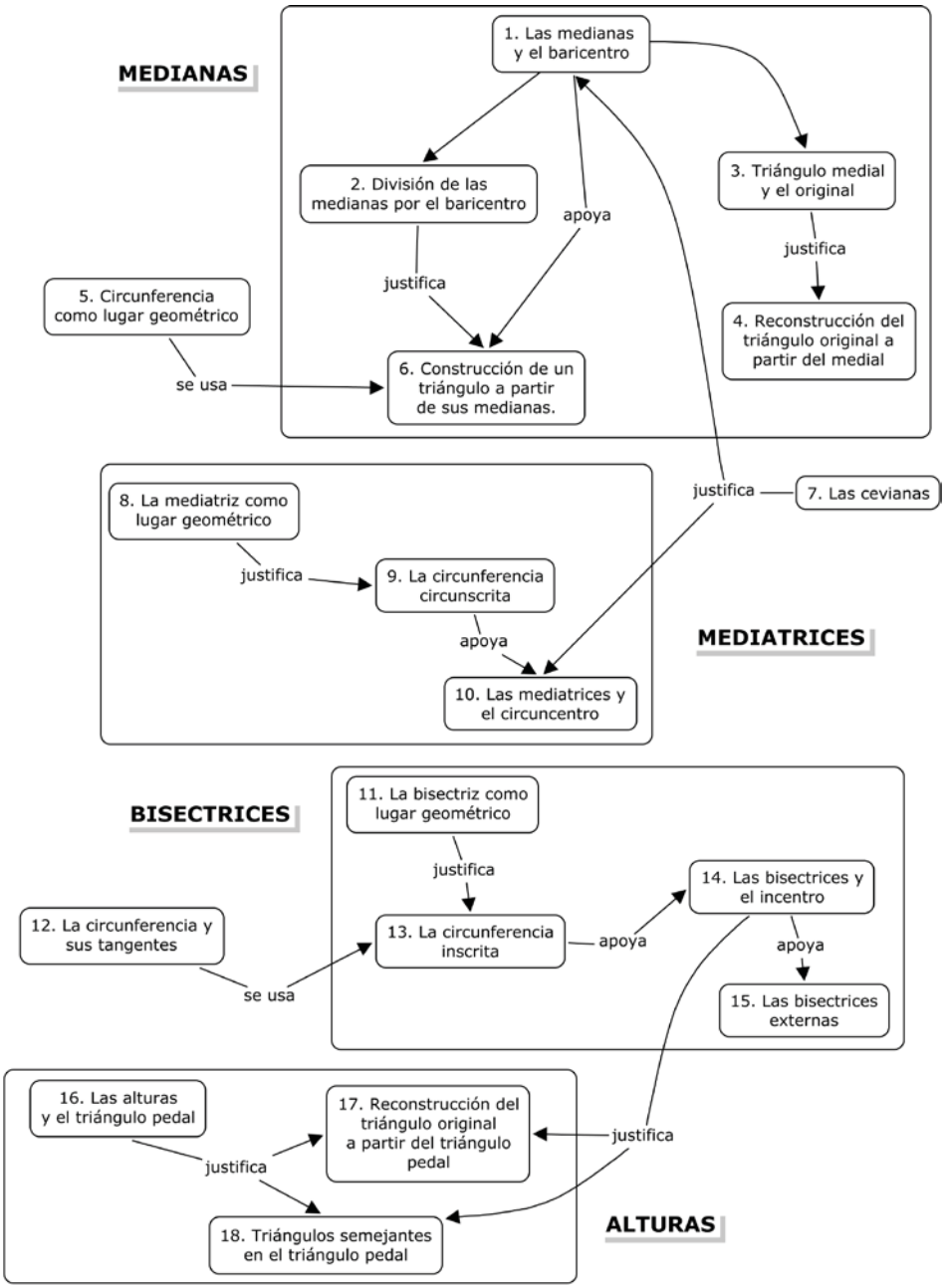
La descripción general de las actividades es la siguiente:

A. Medianas:

1. Construcción de las medianas y del baricentro, observando sus propiedades básicas y justificando la concurrencia.
2. Observación y justificación de la propiedad de que el baricentro corta a cada mediana en una razón dada (1:2).
3. Construcción del triángulo medial y estudio de las propiedades que tiene y las relaciones geométricas que tiene con el triángulo original.
4. Reconstrucción del triángulo original a partir de un triángulo medial dado utilizando las propiedades geométricas observadas en la actividad anterior.
5. Construcción de la circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes a un punto fijo.
6. Construcción de un triángulo a partir de uno de sus lados y de dos de sus medianas, justificando el procedimiento con las actividades 2 y 5.
7. Construcción de cevianas y exploración del teorema de Ceva.

B. Mediatrices:

8. Construcción de la mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de puntos equidistantes a los extremos de un segmento.
9. Circunferencia que pasa por tres puntos no colineales utilizando la propiedad de equidistancia de las mediatrices de la actividad anterior.
10. Construcción de las mediatrices de los lados de un triángulo y de su concurrencia para el centro de la circunferencia circunscrita.



Construcción del triángulo órtico del triángulo.

C. Bisectrices:

11. Construcción de la bisectriz de un ángulo como el lugar geométrico de puntos equidistantes a los lados del mismo.
12. Construcción de las tangentes a una circunferencia observando la perpendicularidad entre aquéllas y los radios correspondientes.

13. Circunferencia inscrita de un triángulo utilizando la propiedad de equidistancia de la actividad 11 y de perpendicularidad de la 12.
14. Construcción de las bisectrices de los ángulos de un triángulo y observación de su concurrencia.
15. Construcción de las bisectrices externas a los ángulos de un triángulo, observando la perpendicularidad entre las bisectrices internas y las externas.
16. Construcción de las alturas de un triángulo y observación de su concurrencia.

D. Alturas:

17. Reconstrucción de un triángulo a partir de un triángulo órtico dado utilizando las propiedades observadas en la actividad anterior y en la actividad 14.
18. Observación de los triángulos semejantes que se obtienen al construir un triángulo órtico de uno dado.

Comentarios finales

Estas actividades están siendo aplicadas en una escuela con alumnos de tercero de secundaria (14-15 años) en una escuela pública cercana a la ciudad de Querétaro (centro de México). Se han observado la aparición de algunos fenómenos relacionados con el uso del SGD, pero también con relación a la misma construcción de la demostración y de justificaciones deductivas.

Algunos de estos fenómenos están relacionados con la visualización y que ya han sido reportados en la literatura, como es el caso de la *rigidez geométrica* y el uso de *prototipos* (Larios, 2005; Acuña y Larios, 2008), que en un ambiente dinámico puede afectar la percepción de dinamicidad proporcionada por el *arrastre*, entorpeciendo el estudio de objetos y propiedades, disminuyendo las posibilidades cuando se hacen exploraciones.

Existe también un cambio en el discurso de los alumnos, ya que los términos utilizados por los alumnos hacen referencia al movimiento y la dinamicidad del software. En la aplicación actual un alumno expresó la relación entre un triángulo y su triángulo medial (actividad 3) utilizando

términos similares: “Que conforme el triángulo (sic) grande se mueve el chico también y toma la forma del triángulo (sic) grande.”

Aunque los resultados son parciales aún, consideramos que es necesario tomar en cuenta resultados de investigación para poder avanzar más eficazmente en la enseñanza de la Geometría.

Referencias bibliográficas

Acuña Soto, C. M., y Larios Osorio, V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. En A. Arcavi y N. Presmeg (Edits.), *Proceedings of TSG 20 of ICME-11*. http://tsg.icme11.org/document/get/193

Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* vol. 2, (pp. 121-128). Valencia, España.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Godino, J. D., y Batanero Bernabeu, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Larios Osorio, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* México: Cinvestav-DME.

Larios Osorio, V., y Acuña Soto, C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics* (págs. 59-63). Taipei, Taiwán: NTNU.

TUTORES INTELIGENTES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN SECUNDARIA

Ismael Morales Garay, Maynor Jiménez Castro
Universidad Estatal a Distancia, Universidad de Costa Rica Costa Rica
ismorales@gmail.com, maynorj@gmail.com
Campo de investigación: Educación a distancia
Tecnología avanzada
Nivel: Medio

Resumen. *En este artículo se presentan las características de los Sistemas Tutores Inteligentes, su definición, los distintos componentes que lo integran y sus interrelaciones entre sí. Igualmente, se alude a las características y ventajas de este tipo de herramienta para la enseñanza de la matemática a distancia por medio de la Web y al final se presenta el caso de un Tutor Cognitivo, basado en inteligencia artificial, para la enseñanza de la Matemática en secundaria (versión en inglés), el cual se utiliza con gran éxito en los EEUU y presenta características muy importantes que pueden ser ajustadas a las necesidades de un proyecto que se desea implementar en Costa Rica, para la realización del Bachillerato de Matemática en Línea.*
Palabras clave: tutores inteligentes, enseñanza de la matemática, tutor cognitivo, aprendizaje en línea, tecnología avanzada

Introducción

El desarrollo de la tecnología hoy día ha permitido que el proceso enseñanza-aprendizaje se haya diversificado sobre todo en la forma en cómo aprendemos. La incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza asistida, se ha ido incrementando, sobre todo en campos como la medicina, ingeniería, el modelaje matemático entre otros. Las historia nos dice que en la década de los 70's los investigadores hicieron sus primeros aportes en modelos de enseñanza asistida, y como fruto de esa investigación surgió la llamada (IAC) Instrucción Asistida por Computador, que presentaba grandes limitaciones en el campo pedagógico, como por ejemplo: incapacidad para aceptar preguntas no anticipadas, falta de comprensión de los errores de los estudiantes, incapacidad de aprendizaje, entre otras. Sin embargo, para la década de los 90's e inicios de la actual década los avances en materia de inteligencia artificial aplicada a la enseñanza ha dado pasos esperanzadores. Básicamente, estas tecnologías se apoyan en estudios profundos y de varias décadas en temas como: *teorías del aprendizaje, agentes inteligentes, interfaces humano-computadora, modelos cognitivos* entre otros grandes tópicos.

Desde el año 2006 hemos venido investigando la temática de los tutores inteligentes con el propósito de formular un proyecto, para crear un sistema tutor inteligente, que ayude a las

poblaciones estudiantiles de secundaria que tienen pendiente la aprobación del examen de bachillerato en Matemática. En Costa Rica, cerca de 33 531 jóvenes han quedado fuera del sistema de educación formal y están a la espera de aprobar el examen de bachillerato en matemática, según los últimos datos del Ministerio de Educación, brindados a finales del año 2008. Aunado a esto, los estudiantes que han logrado aprobar el examen de bachillerato están poco preparados para enfrentar los primeros cursos de matemática en la universidad. Es por ello que en las universidades del Estado, se han adecuado cursos especiales para los estudiantes de primer ingreso, de forma que puedan subsanar la baja preparación matemática y la incursión en los cursos universitarios de matemática no sea tan desalentadora.

Un aspecto notable en el aprendizaje de la matemática, es que los estudiantes en general, no son sólidamente preparados para la resolución de problemas, sino que su preparación se fundamenta en el aprendizaje de procedimientos mecánicos que muchas veces no saben por qué se realizan. Esta situación también ha incidido en el comportamiento del estudiante, el cual prefiere aprender a resolver los exámenes de bachillerato con la ayuda de la calculadora, a base de estrategias de prueba y error y sin conocer y entender el concepto matemático que le es evaluado. Por otro lado, la incorporación de las tecnologías de información y comunicación en la educación costarricense, se ha venido incrementando desde sus inicios en el año 1988. Según el informe UCR (2007), su cobertura en la educación secundaria ronda el 70% de la población estudiantil. Aunado a este proceso, otras universidades y organizaciones públicas han instalado en muchos centros de población, laboratorios de cómputo a disposición de los ciudadanos.

Todo este escenario, nos ha llevado a plantear el uso de un Sistema Tutor Inteligente (STI), como la herramienta que mejor se ajusta a la propuesta que hemos diseñado, puesto que incorpora técnicas de inteligencia artificial y acceso vía web. Estas características propias de los STI permitirán una adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje basado en las debilidades y necesidades detectadas en cada estudiante.

Proyecto Bachillerato en Línea

Bajo este paradigma, se ha propuesto una alternativa para facilitar los procesos de enseñanza - aprendizaje a distancia en un tema que ha sido controversial en los cinco últimos años de la

educación costarricense: la *enseñanza de la matemática* y específicamente los *procesos implementados para la consecución del bachillerato en secundaria*. Se propone así, la utilización de técnicas de inteligencia artificial para desarrollar una herramienta capaz de dar seguimiento e instrucción individual a cada estudiante, utilizando para ello un Sistema Tutor Inteligente (STI) y *Agentes Inteligentes*. Este es un proyecto que se ha retomado desde mediados del año 2008 dentro de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Estatal a Distancia y que tiene por objetivo la investigación y desarrollo de una aplicación informática que permita mejorar la atención, seguimiento y retroalimentación de los estudiantes que tienen pendiente la aprobación del examen de bachillerato en el área de matemática. Además esta aplicación se utilizaría con aquellos estudiantes de primer ingreso en la Universidad que tengan un rendimiento bajo en matemática o como requisito de ingreso.

Con el desarrollo del proyecto, no solo se propone una mejora en el rendimiento académico de las y los estudiantes, sino que se busca una transformación global en la dinámica de vida de los núcleos familiares, pues las posibilidades de mejores condiciones laborales se determinan en gran medida por las facilidades en el acceso a la educación y la conclusión de los estudios secundarios.

El proyecto permitiría en una etapa madura, que el estudiante se presente a centros especializados donde podría realizar su prueba oficial de bachillerato. Sin embargo, en primera instancia se pretende que el *tutor inteligente* sea la herramienta que coadyuve al estudiante a tener éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es importante indicar que se pretende construir una herramienta que sea complemento del trabajo del educador; no es el propósito sustituir al docente en su labor, ni concentrar al 100% la actividad del estudiante en un ambiente virtual de aprendizaje.

La investigación se centra en este momento, en la observancia de las experiencias a nivel internacional en herramientas de este tipo, e indagar qué tan significativo ha sido el uso en el ambiente educativo, especialmente en el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemática. Bajo esta concepción, y tomando en cuenta que el eje central de la investigación se centra en un STI se describen los elementos fundamentales que los caracterizan.

Modelo de un sistema Tutor Inteligente

Los STI tienen como objetivo emular la función de un tutor humano por lo que este tipo de sistemas tienen características particulares que le permiten realizar el proceso pedagógico de forma más "natural" que los antiguos sistemas desarrollados bajo el paradigma de la Instrucción Asistida por Computadora Aguilar y De Antonio, (2003).

La arquitectura tradicional que presentan los STI está integrada por cuatro módulos: el *módulo experto* o del dominio, el módulo o *modelo del estudiante*, el *módulo de tutoría* o pedagógico, y el *módulo de comunicación* o interface (ver Figura No.1).

Además de los módulos mencionados, según Sklar y Richards (2006), los STI requieren del componente "Docente" (persona física) para que los sistemas se puedan clasificar en lo que se denomina un *Sistema de Aprendizaje Interactivo.*

Módulo dominio o experto

En estos sistemas de comunicación del conocimiento, el módulo experto contiene la representación del conocimiento por ser comunicado. En muchos casos, esta representación de la materia no solo es una descripción de conceptos y habilidades que el estudiante debe adquirir como parte de un currículo, sino que además, el modelo actual puede generarse en el dominio, dando así una forma dinámica de experticia al sistema.

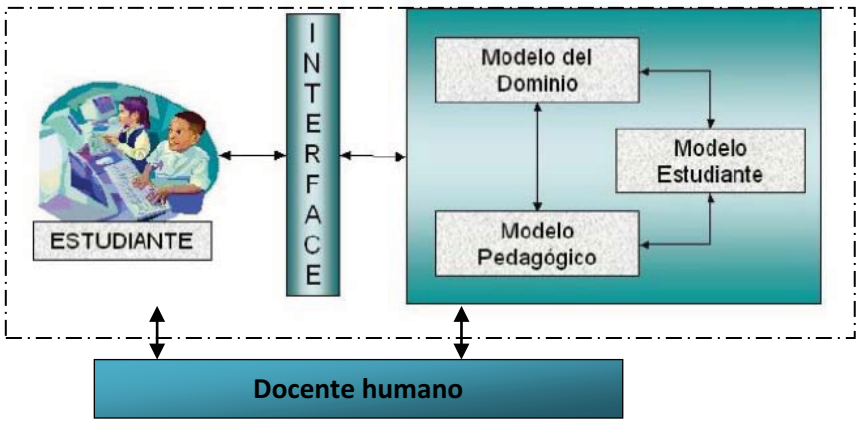


Figura 1: Modelo Interactivo de un STI en proceso E-A

Módulo estudiante

Lo ideal es que este módulo agrupe todos los aspectos del comportamiento y del conocimiento del estudiante que tiene repercusiones en su desempeño y aprendizaje. Cognitivamente hablando, se modela al estudiante para brindarle una situación de aprendizaje que le resulte más productiva. Sin embargo, la tarea de la construcción de tal modelo, no es una tarea sencilla de llevar a un computador. Afortunadamente, un modelo perfectamente preciso del estudiante en todas dimensiones no es condición esencial para decisiones pedagógicas razonables.

Módulo tutor o de instrucción

Henry Halff describe cómo el módulo instruccional y curricular da forma y significado a la investigación de STI's y los desarrolla como sistemas instruccionales. Un STI debe tener tres características de tutor:

1. Control sobre la representación del conocimiento instruccional por selección y secuencia de los temas del dominio.
2. Capacidad para responder las preguntas de los estudiantes sobre los objetivos y contenidos instruccionales.
3. Establecer estrategias para determinar cuando un estudiante necesita ayuda.

El objetivo del módulo instruccional es circunscribir la forma de ser del docente e implementarlo como una solución al problema de comunicación en la enseñanza.

Interfaces humano-computador

Los estudiantes que trabajan con STI´s, generalmente tienen dos problemas:

1. El estudiante debe aprender conceptos de la materia que podrían no entender.
2. El aprendiz debe usar la tecnología para aprender y no es un experto en ella.

Si la interacción humano-computador está pobremente diseñada, la sesión de entrenamiento será, probablemente, ineficiente. Si el estudiante debe gastar enormes cantidades de energía en el

manejo de la computadora, tendrá poca energía emocional e intelectual para aprender. El objetivo del diseño de interfaces, es hacer la interfaz transparente para el usuario.

Adicional a los componentes de los STI descritos con anterioridad, hoy en día los STI están siendo apoyados por otros elementos de software, que han venido a darle mayor potencial y capacidad, como los son los *Agentes Inteligentes*.

Agentes Inteligentes

Estos son programas que aplican un cierto grado de inteligencia y que son capaces de llevar a cabo tareas de forma independiente, sin ningún tipo de supervisión. La inteligencia necesaria puede ser trivial, pero se requiere un grado de aprendizaje de las experiencias pasadas. Por ejemplo, según Rakesn Agarwal y Deo Amrita (2004), un agente que hace las búsquedas por Internet, puede decidir por el usuario en cuestión, si el material es útil o no y de esta manera ser entrenados para futuras búsquedas.

Una de las características que diferencia a los agentes inteligentes del software tradicional, es su capacidad de ser autónomos; o sea que el agente va más allá de un simple software donde se considera su funcionalidad y grado de control sobre sus acciones; el agente no tiene que esperar órdenes ya que puede tomar decisiones en forma independiente. Dentro de las características más sobresalientes de los agentes están: persistencia, reactividad, proactividad, personalización y el comportamiento social.

Existen tres tipos de agentes especializados en medios de aprendizaje para seres humanos. El primero es el *agente pedagógico*, el *agente de aprendizaje* y el *agente demostrativo*. Para profundizar en esto, puede leer Sklar y Richards (2006).

Las caracterizaciones anteriores son importantes, y aunque no son exhaustivas, pueden dejar claro al lector el alcance y futuro de estas tecnologías de información aplicadas al campo educativo. En este sentido y dado nuestro trabajo de investigación en el área de la inteligencia artificial y su aplicación al campo educativo, queremos compartir la descripción de una herramienta que corresponde a un tipo de STI y que se ha venido desarrollando por muchos años en la Universidad Carnegie Mellon y el Carnegie Learning : el Tutor Cognitivo (TC).

Tutor cognitivo

Esta herramienta está siendo utilizada en los Estados Unidos en cerca de 2 500 escuelas con aproximadamente, 500 000 estudiantes. Según estudios realizados por Carnegie Learning y la información del Departamento de Educación de los Estados Unidos, se ha reconocido una gran efectividad del sistema comparado con otros enfoques de instrucción matemática. Los resultados han sido muy satisfactorios y se ha logrado incrementar el rendimiento académico en más de un 85%. De acuerdo con Ritter, S y John R, Anderson (2007), dos grupos de estudiantes fueron evaluados en pruebas estandarizadas y pruebas basadas en resolución de problemas, un grupo utilizaba el TC y otro no. Los resultados indicaron que en las pruebas estandarizadas los estudiantes que utilizaron el TC sobrepasaron a los estudiantes sin TC en aproximadamente 0.3 desviaciones estándar. La diferencia en el rendimiento en pruebas de resolución de problemas y representación múltiples, indicó una marcada diferencia de entre 0.7 y 1.2 desviaciones estándar. El TC se basa en el enfoque de resolución de problemas como recurso principal en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Este paradigma permite que el estudiante pueda reconocer en su medio, aplicaciones de la matemática que le sean más familiares y por ende su aprendizaje le resulta más efectivo.

El TC se basa en una teoría cognitiva desarrollada por John Robert Anderson de la Universidad Carnegie Mellon, llamada ACT-R (Adaptive Control of Thought—Rational) en español *Control Adaptativo de Pensamiento Racional*. ACT-R es una arquitectura que analiza la cognición en partes mínimas o atómicas que luego integra para modelar los procesos más complejos.

En términos sencillos el TC se basa en la frase de *divide y vencerás,* ya que cada problema presentado en el tutor está debidamente subdividido en pequeñas tareas que permiten ser evaluadas dentro del tutor. En el momento en que estas pequeñas tareas son dominadas, con base en ese conocimiento atómico, se puede construir la solución del problema en cuestión. Sin embargo, no es suficiente conocer los componentes de conocimiento sino que se necesita saber de los métodos que utilizan los estudiantes para completar una tarea. Este conocimiento fáctico está debidamente estudiado por los creadores del TC a través de un sinnúmero de registros y estadísticas recogidas en muchas instituciones educativas donde se trabaja con el TC.

El TC no solo es un Sistema Tutor Inteligente que se aplica en algunas instituciones del EEUU; es un paradigma integral de aprendizaje, en donde el 60% del tiempo se trabaja en el salón de clases con materiales escritos y dirigidos por el profesor, mientras que el 40% del tiempo, se dedica al trabajo e interacción con el TC versión electrónica.

Conclusiones

Los STI por su naturaleza, constituyen un medio importante de enseñanza asistida que permite no solo la atención personalizada, sino la colaboración real para solventar las deficiencias encontradas en el estudiante sobre todo en el área de la matemática.

En el caso particular del TC desarrollado por Carnegie Learning, ha quedado demostrado su efectividad en el mejoramiento del aprendizaje de la matemática y ha incrementado el índice de rendimiento académico en matemática, lo cual constituye un importante resultado para sectores educativos en cuenten con la infraestructura tecnológica adecuada para su implementación.

La propuesta de desarrollo del Bachillerato en Línea, puede ofrecer una novedosa oportunidad de aprendizaje en entornos virtuales bimodales, a todas las personas que por razones socioeconómicas, geográficas o de algún tipo de discapacidad, no han logrado concluir con su bachillerato en secundaria, siendo la educación a distancia, por sus características, un escenario fundamental para implementar y llevar a cabo una innovación educativa, en donde la aplicación de un STI pueda estar a disposición de una población muy necesitada de medios y recursos para superarse académica y socialmente.

Referencias bibliográficas

Aguilar, R y De Antonio, A (2003). *Agentes Pedagógicos Virtuales Inteligentes*. Universidad Autónoma de Yucatán. Universidad Politécnica de Madrid.

Baylor, A. (2003). *The Impact of Three Pedagogical Agent Roles*, Consultado en julio de 2008 en http://mailer.fsu.edu/~abaylor/PDF/baylor_aamas.pdf

CIA World Factbook. (Mayo, 2008). *Costa Rica Tasa de alfabetización.* (Publicación del 16 de mayo del 2008). Revisado el 08 de octubre del 2009 en http://www.indexmundi.com/es/costa_rica/tasa_de_alfabetizacion.html

Duffy, T. y Jonassen, D (1992). *Constructivism and the Technology of Instruction.* Hillsdale, Ney Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Rakesn A. y Deo A. (2004). Intelligent Agents in E-learning. *Software Engineering Notes*, 29 (2), 1-3.

Ritter, S y Anderson, J. (2007). Cognitive Tutor: Applied research in mathematics education. *Psychonomic Bulletin & Review* 14(2), 249-255.

Sklar, E. & Richards, D. (2006). *The use of Agents in Human Learning System. Brooklyn College*, New York, USA.

UCR. (2007). *E-Educación en Costa Rica.* Informe Prosic. Revisado el 07 de Octubre del 2009 en http://www.prosic.ucr.ac.cr/images/pdf/informe_2007/cap6.pdf.

VALIDAÇÃO DE UMA ESCALA DE AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA: UM ESTUDO COM UNIVERSITÁRIOS DE CURSOS TECNOLÓGICOS DE SÃO PAULO

Maria Helena Palma de Oliveira, Cláudia Borim da Silva,Verônica Yumi Kataoka, Claudette Maria Medeiros Vendramini
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
Universidade São Judas Tadeu
Universidade São Francisco
moliveira@uniban.br, dasilvm@uol.com.br, veronicayumi@terra.com.br, cvendramini@uol.com.br
Campo de investigación: Metacognición Nivel: Superior

Resumen. *O estudo buscou evidências de validade de uma escala que avalia o uso intencional de estratégias e de técnicas de atenção e interação na autorregulação da aprendizagem de Estatística em 236 universitários de seis cursos tecnológicos de 2008, recém concluintes da disciplina Estatística que responderam um questionário de perfil, um teste estatístico e uma escala com 16 itens. A análise fatorial indicou uma estrutura de quatro dimensões correlacionadas entre si, o que indica que existe uma dimensão maior subjacente a todas elas, portanto pode ser assumido que a escala é predominantemente unidimensional resultado esse coerente com a proposta inicial da escala. As propriedades psicométricas dos itens e do teste, indicam evidências de validade da escala. A Teoria de Resposta ao Item (TRI) mostrou que o item 14 é ineficaz para obtenção de informação sobre autorregulação, se excluído resulta numa escala com evidências de validade de construto, apresentando consistência interna satisfatória e valores de infit e outfit adequados ao ajuste do modelo politômico de Rasch.*
Palabras clave: autorregulação, aprendizagem estatística, validade

Introdução

A aprendizagem de estatística é fundamental para o exercício crítico da cidadania, na medida em que permite o entendimento de fenômenos e tendências de relevância social e pessoal, taxas de criminalidade, crescimento populacional, produção industrial, aproveitamento educacional (Gal, 2002). Além disso, no contexto deste estudo destaca-se sua importância na formação e atuação profissional.

O nível universitário exige o desenvolvimento da autonomia do aluno e reforça a necessidade de utilização deliberada de estratégias ativas de aprendizagem, ou seja, de autorregulação (Almeida, 2001).

A autorregulação da aprendizagem na perspectiva histórico-cultural é entendida como função metacognitiva, autoconsciente, socialmente construída e dependente do domínio pelo aluno de instrumentos culturais específicos. Nesse estudo, concretiza-se pelo uso intencional de estratégias

de domínio de funções mentais como atenção e de interação. Os processos metacognitivos desenvolvem-se de modo relacional com os processos afetivos: a motivação (desejos, interesses e necessidades) gera o pensamento, porque subjacente a cada pensamento há uma tendência afetivo-volitiva (Vigotsky, 1995).

A proposição de uma escala que seja capaz de medir as diversas dimensões de atenção e de interação, de forma válida e fidedigna, pode ser importante para o aluno conscientizar-se de suas estratégias de aprendizagem, e no caso do professor, pode levar a uma revisão de suas práticas pedagógicas para fomentar a autorregulação da aprendizagem dos alunos. De acordo com Ribeiro (2007), a atividade consciente permite que o aluno autorregulado controle seu próprio processo de aprendizagem; demonstre autoeficácia na seleção de métodos e estratégias; identifique situações para as quais precisa de ajuda; seja capaz de adaptar as estratégias de aprendizagem aos seus objetivos de estudo; seja capaz de organizar e estruturar o seu contexto de estudo.

A validade pode ser compreendida como uma verificação direta da possibilidade do instrumento satisfazer o seu objetivo (Pasquali, 2003). São diversas as técnicas empregadas para a determinação do índice de validade de um instrumento, porém, neste estudo terá como base a evidência de validade de construto. Segundo Anastasi e Urbina (apud Dias e Vendramini, 2008) a validade de construto de um teste é a extensão em que se pode dizer que o teste mede um construto teórico ou um traço.

Para verificar se existem evidências de validade de escalas psicométricas uma das técnicas de estatística multivariada que pode ser utilizada é a Teoria de Resposta ao Item (TRI), que se baseia em modelos matemáticos nos quais as estimativas dos traços dependem das respostas dos sujeitos e das propriedades dos itens, avaliados em uma mesma escala métrica (Embretson & Reise, 2000) Uma das vantagens dessa técnica é a possibilidade de equalização de traços de indivíduos, pertencentes ou não à mesma população e submetidos a diferentes instrumentos de medida, o que permite a comparação de seus desempenhos.

Esta pesquisa teve como objetivo buscar evidências de validade de construto de uma escala de estratégias de atenção e de interação no processo da autorregulação da aprendizagem de Estatística de universitários, por meio da Teoria de Resposta ao Item (TRI).

Autorregulação de estratégias de atenção e de interação na aprendizagem

Vigotsky (1978) aponta três condições críticas necessárias para o desenvolvimento de comportamento autorregulado: uma orientação do plano intersubjetivo (social) para o plano intrassubjetivo (individual); o domínio de ferramentas culturais específicas que permitem ao aluno a utilização de comportamentos de autorregulação de modo independente e o envolvimento socioemocional do aluno em relação à tarefa. Boruchovitch (1999) destaca que os educadores tem reconhecido cada vez mais a importância das estratégias de aprendizagem tanto para a uma aprendizagem efetiva quanto para o desenvolvimento da autorregulação.

O desenvolvimento histórico-cultural permitiu que o ser humano avançasse de capacidades naturais de atenção para capacidades historicamente construídas no uso dessa função mental. O desenvolvimento ontogenético também modifica as características do uso da atenção. Der Veer e Valsiner (1996) destacam que até a idade adulta as pessoas aprendem a fazer uso de meios externos para direcionar a atenção, finalmente esses instrumentos culturais se internalizam e permitem que a atenção humana selecione a informação necessária, assessore os programas seletivos de ação e mantenha controle permanente sobre eles. “A atenção arbitrária é inerente ao homem” (Luria, 1979, p.11).

A interação na aprendizagem é a base do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vigotsky (1998), uma vez que o nível de desenvolvimento potencial tem caráter interativo e social e suas propriedades não são intrínsecas aos indivíduos que aprendem, mas se concretizam no transcurso da aprendizagem que ocorre na ZDP (Salvador, 1999). Segundo Bilimória e Almeida (2008), essa interação é descrita como partilha, cooperação e confronto de informação, conhecimentos e posicionamentos que dinamizam a representação mental das tarefas, bem como repercutem no controle das atividades cognitivas e metacognitivas. Para Radford (2006, p.113) a interação na sala de aula é consubstancial à aprendizagem. “As ações que os indivíduos realizam estão submersas em modos culturais de atividade”. E por isso, não estão presas somente ao contexto de sala de aula, mas refletem toda a história cultural que envolve o espaço social.

Método

Participaram da pesquisa 236 alunos de graduação de seis cursos tecnológicos de uma universidade particular instalada na Grande São Paulo, que concluíram uma disciplina de

Estatística em 2007. A coleta dos dados aconteceu no primeiro semestre de 2008. A média (M) de idade dos participantes era de 28,50 anos e o desvio padrão (DP) igual a 7,21.

Os alunos responderam a dois instrumentos do tipo lápis e papel: um questionário e uma escala de atenção e interação (criada pela primeira autora). O questionário continha 18 perguntas que traçavam o perfil do aluno, abordando sua trajetória escolar, sua opinião sobre a importância, o sentimento e a idéia da Estatística bem como sua experiência com esta disciplina.

A escala foi desenvolvida por Oliveira (2006) a partir de uma pesquisa qualitativa estruturada em questões abertas sobre hábitos de estudo de alunos universitários de instituição privada. A partir das respostas dos alunos, a primeira autora elaborou a escala utilizada neste estudo, contendo 16 afirmativas, sendo 6 afirmativas sobre atenção e 10 afirmativas sobre interação. Na subescala de atenção, quatro afirmativas são positivas e duas negativas e na subescala de interação, sete afirmativas são positivas e três são negativas. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta eram: *sempre*, *quase sempre*, *quase nunca* e *nunca*, pontuadas de 4 até 1 para as afirmativas positivas e de 1 até 4 para as afirmativas negativas. Dessa maneira, a pontuação total variou de 16 a 64.

A estrutura de dependência dos itens da escala (identificação das dimensões) foi determinada pela técnica multivariada de análise fatorial (Oliveira, Kataoka e Silva, 2009). Neste artigo apresenta-se apenas uma síntese da composição dos fatores identificados.

Para a análise das propriedades psicométricas dos itens e da escala foi utilizada a Teoria de Resposta ao Item (TRI), sendo esta uma metodologia de análise que permite investigar as propriedades de cada um dos itens da escala, o nível do traço latente (autorregulação de aprendizagem em Estatística) que é medido pelos itens (parâmetro de locação do item na escala de autorregulação) e quanto cada item está relacionado ao construto subjacente medido pelo instrumento (coeficiente de discriminação do item). O conhecimento das propriedades dos itens pela TRI permite remover itens do instrumento que não estão correlacionados com o traço latente ou incluir itens que meçam traços latentes não considerados no instrumento. O modelo de Rasch (1980) ou modelo de um parâmetro da TRI restringe o poder de discriminação dos itens como sendo todos equivalentes e estima a locação dos itens sobre o traço latente θ.

Resultados

Relacionando alguns itens do questionário de perfil com a pontuação da escala, foi possível observar que não houve diferença significativa na pontuação média da escala quando comparada por curso [F(5, 216) = 2,19; p = 0,056], gênero [t(219) = 1,77; p = 0,078], sentimento em relação à Estatística: positivo, indiferença, negativo e respostas não sentimentais [F(3, 209) = 2,48; p = 0,062]. A pontuação média foi significativamente menor nos alunos que atribuíram pouca importância à Estatística [F(3, 209) = 3,64; p = 0,014]. Este resultado pode ser explicado: pela dificuldade de atribuir sentido para os que aprendem; pelo menor contato com conteúdos relacionados à aprendizagem de Estatística; pelo menor nível de adesão, inclusive afetiva, ao curso; pela pouca valorização do conteúdo da Estatística.

Pela análise fatorial tradicional foram definidos quatro fatores para a escala: interação aluno-aluno (itens 11, 12, 13, 15 e 16), interação aluno-professor (itens 7, 8 e 10), atenção (itens 1, 2, 3 e 4) e imediatismo/isolamento (itens 5, 6, 9 e 14). Esses fatores estão correlacionados entre si, indicando que existe uma dimensão maior subjacente a eles, portanto pode ser assumido que a escala é predominantemente unidimensional. Os dois primeiros fatores dizem respeito a diferentes tipos de interação em sala de aula, ambas necessárias na consolidação das aprendizagens significativas no espaço relativo à zona de desenvolvimento proximal. O fator atenção composto pelas afirmativas a respeito de estratégias de atenção tais como buscar textos, informações e explicações adicionais para a aprendizagem. O quarto fator composto por quatro afirmativas negativas, marcadas pelas estratégias imediatistas de atenção e de comportamentos de isolamento tanto na interação com o professor com os colegas de classe. O coeficiente alfa de Cronbach foi de 0,723, indicando uma consistência interna razoável.

Os resultados da análise de itens pela TRI estão apresentados na Figura 1 (mapa de itens) para o traço autorregulação de aprendizagem de Estatística.

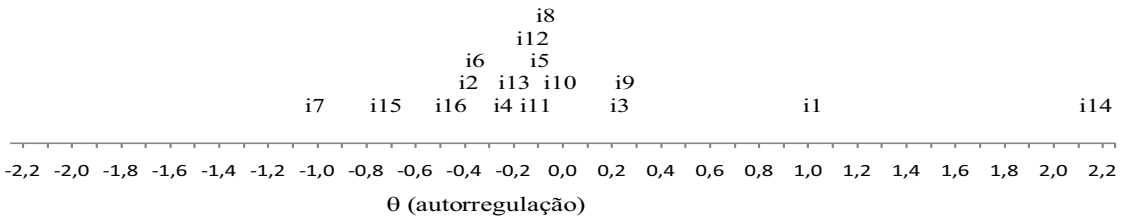


Figura 1. Mapa dos itens da escala de autorregulação da aprendizagem de Estatística

Na Figura 1 é possível observar que os índices de locação dos itens variaram de -1,00 a 1,12, com exceção do item 14, que se localiza no extremo superior da escala com valor igual a 2,15. Esse mesmo item apresenta o menor coeficiente de correlação item-medida de Rasch (r = 0,13), indicando sua ineficácia para obtenção de informação sobre autorregulação. Alguns dos itens, como 3 e 9; 8 e 10; 5, 11 e 12; 4 e 13; 2 e 6; apresentam índices de locação semelhantes na escala de autorregulação, sugerindo que um ou mais itens possam ser removidos numa nova formatação da escala, caso pertençam a um mesmo fator (dimensão) identificado na análise fatorial ou na correlação de resíduos da TRI.

Eliminando-se o item 14 (Eu evito relacionamentos com colegas nas aulas de Estatística, apenas cumprimento os colegas) os índices locação dos itens na escala de autorregulação passam a variar de -0,91 a 1,35 (M = 0,00; DP= 0,50) e a consistência interna da escala aumenta, $\alpha_{Cronbach}$=0,85 (Tabela 1).

O nível de autorregulação das 232 pessoas, eliminando 4 pessoas com valores fora dos padrões esperados, variou de -2,37 a 3,26 (M = 0,77; DP = 0,88) indicando que o nível de autorregulação das pessoas está acima do nível de locação dos itens.

Tabela 1. Propriedades psicométricas dos itens da escala de autorregulação de aprendizagem de Estatística por ordem decrescente de locação dos itens

Item	Índice de locação	*Infit**	*Outfit***	Correlação item-medida de Rasch
1	1,35	0,84	0,88	0,50
9	0,44	1,29	1,29	0,36
3	0,39	0,77	0,76	0,63
8	0,13	0,87	0,87	0,59
10	0,12	0,80	0,80	0,59
12	0,05	1,28	1,24	0,57
5	0,04	0,86	0,87	0,60
11	-0,02	1,37	1,33	0,55
13	-0,06	1,13	1,12	0,54
4	-0,09	0,77	0,77	0,57
6	-0,21	1,18	1,19	0,45
2	-0,22	0,76	0,79	0,52
16	-0,36	1,12	1,06	0,58
15	-0,65	1,11	1,14	0,46
7	-0,91	0,87	0,85	0,60

* O índice *infit* informa sobre discrepâncias do dado teórico esperado e empírico em regiões centrais da Curva Característica do Item (CCI), indica padrões de respostas inesperados para pessoas com níveis de habilidades próximos à dificuldade do item.

** O índice *outfit* informa sobre esse tipo de diferença nas extremidades da CCI, acusa a presença de padrões inesperados de respostas de pessoas com níveis de habilidade muito diferentes da dificuldade do item.

Todos os índices de ajuste dos itens ao modelo de Rasch, observados na Tabela 1, apresentam valores considerados aceitáveis. Os valores de *infit* estão adequados, variando de 0,76 a 1,37 (M = 1,00; DP = 0,21), bem como os de *outfit*, com valores variando de 0,76 a 1,29 (M = 1,00; DP = 0,20). Além dessas propriedades foram analisados também os resultados da análise dos componentes principais baseada no resíduo do modelo de Rasch, retirado o 14º item. Para um bom ajuste do modelo de Rasch espera-se encontrar uma variância explicada pelo modelo acima de 60%, e variâncias não explicadas pelos contrastes inferiores a 5% (equivalente a autovalores inferiores a aproximadamente 2,0).

Os resultados indicaram que a dimensão de Rasch explica 43,6 % da variância dos dados; e, cada um dos cinco contrastes de resíduos explica de 4,4% a 8,9% da variância, sendo os três primeiros com variância não explicada acima de 5% e autovalores correspondentes variando de 1,8 a 2,4. Os itens 8 (Eu sempre expresso minha opinião para o professor(a) de Estatística, inclusive faço perguntas) e 10 (Eu faço perguntas para o professor(a) de Estatística) apresentam uma forte correlação positiva, indicando que um dos itens deverá ser eliminado ou readaptado, pois medem a mesma coisa. O mesmo ocorre com as questões 5 (Eu providencio os textos/materiais de estatística e a leitura/estudo dos mesmos nos dias que antecedem a prova ou no mesmo dia) e 6 (Para as demais disciplinas do curso, eu providencio os textos/materiais e a leitura/estudo dos mesmos nos dias que antecedem a prova ou no mesmo dia).

Considerações finais

A escala apresentou evidências de validade (consistência interna satisfatória e valores de *infit* e *outfit* adequados) e os resultados de cada um dos contrastes confirmaram a estrutura da análise fatorial tradicional. Entretanto, como a variância explicada ficou abaixo de 60% (indicando não ser um bom ajuste dos dados ao modelo de Rasch) novos estudos devem ser realizados visando uma revisão dos itens, a busca por outras evidências de validade, e, por conseguinte, o

aperfeiçoamento desse instrumento psicométrico; que pode auxiliar os estudantes universitários a diagnosticar a autorregulação do seu processo de aprendizagem de Estatística.

Referências bibliográficas

Almeida, L. (2001). Acesso, integração e sucesso acadêmico: uma análise reportada aos estudantes do 1º ano. R. Sousa; E. Sousa; F. Lemos e C. Januário (Org.), *Pedagogia na Universidade: Simpósio da Universidade Técnica de Lisboa* (pp. 223-240). Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa.

Anastasi, A., & Urbina, S. (2000). *Testagem psicológica*. (7ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Bilimória, H. e Almeida, L.S. (2008) Aprendizagem auto-regulada: fundamentos e organização do Programa SABER**.** *Psicologia Escolar e Educacional. 12*(1)*,* 13-22. Recuperado em 12 Maio 2009 de http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-55720080001000002&lng=pt&nrm=iso

Boruchovith, E. (1999) Estratégias de aprendizagem e desempenho escolar: considerações para a prática educacional. *Psicologia Reflexão e Crítica, .12*(2), 361-376.

Der Veer, R., Valsiner (1996) J. *Vygotsky: uma síntese*. São Paulo: Loyola.

Dias, A.S.; Vendramini, C.M.M.(2008). Análise Fatorial com informação completa de uma prova de Compreensão em Leitura em Estatística. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE), 12*(2), 357-367.

Embretson, S. E., & Reise, S. P. (2000). *Item response theory for psychologists.* Mahwath, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gal, I. (2002) Adult's statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Luria, A. R. (1979). *Curso de psicologia geral, vol. 3*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Oliveira, M. H. P. (2006). Estratégias de aprendizagem de estudantes universitários paulistanos. *Anais XV Encontro Internacional de Educação e Mercosul/Conesul e Países Associados*. Universidad Del Mar, Chile.

Oliveira, M.H.P., Kataoka, V.Y., Silva, C.B, (2009) Estratégias de atenção e de interação no processo de autorregulação da aprendizagem de estatística: validação de uma escala. In: *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação*.

Pasquali, L. (2003). *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação*. Petrópolis: Vozes.

Rasch, G. (1980). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* (Copenhagen, Danish Institute for Educational Research), expanded edition (1980) with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press.

Radford, L. (2006) Elementos de uma teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial,* 113-139

Ribeiro, Y.S. (2007) Auto-regulação: diferenças em função do ano e área em alunos universitários. *Psicologia: teoria e Pesquisa*. *23*(4), 443-448.

Salvador, C.C. et al (1999). *Psicologia da educação.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Vigotsky, L. S. (1978) *Mind in society: the development of higher mental processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vigotsky, L.S. (1998) *A formação social da mente*. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L.S. (1995). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

MULTIMEDIA PARA EL APRENDIZAJE DEL TEMA ESPACIOS VECTORIALES CON ALTA COMPONENTE GEOMÉTRICA

Walter Carballosa Torres, Yadira Torres Nuñez, Yunier Martínez Ramírez, Carlos Mario Aquino Ponce
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
walter@uci.cu, ytorresn@uci.cu
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Superior

Resumen. *El presente trabajo aborda los principales aspectos desarrollados con el fin de realizar una aplicación multimedia que se utilizará como material de apoyo a la docencia en la asignatura de Algebra Lineal para ingenieros informáticos en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI). La aplicación tiene como pilar fundamental la recopilación y centralización de la información necesaria para complementar la teoría asociada al tema espacios vectoriales, enfatizando fundamentalmente en su componente geométrica, en aras de facilitar una mejor asimilación y entendimiento de la asignatura por parte de los estudiantes a partir de un estudio más ameno e interactivo. Para lograr la realización del diseño se enfatizó en los cambios que ha sufrido el sistema educativo en los últimos años, a raíz del surgimiento de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC).*
Palabras clave: espacio vectorial, aplicación multimedia, algebra lineal

Introducción

En los últimos años, el auge alcanzado por las TIC, ha revolucionado el sistema de enseñanza y aprendizaje a nivel mundial, producto de la gran variedad de recursos que aporta a la labor del maestro y de las facilidades que brinda para alcanzar una mayor instrucción.

> …la llegada de las denominadas TIC a los distintos ámbitos de nuestra sociedad, y de la educación en particular, puede representar […] una renovación sustantiva o transformación de los fines y métodos tanto de las formas organizativas como de los procesos de enseñanza en la educación superior. (Moreira, 2000, p. 129)

Las TIC han transformado el modelo tradicional de la clase, propiciando así la posibilidad de mejorar la comprensión de los estudiantes y un mayor enriquecimiento intelectual a través de su uso adecuado.

El Algebra Lineal es una de las primeras materias de carácter formal a las que se enfrenta un estudiante en la educación superior de ciencias técnicas, y algunos temas resultan difíciles de comprender. La Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), con pocos años de experiencia, se empeña en mejorar cada vez más su proceso de enseñanza- aprendizaje (PEA) en cada una de las

materias a impartir. En apoyo a esto se han desarrollado aplicaciones educativas como por ejemplo la multimedia de Algebra Lineal la cual sujeta todo el contenido del curso académico del plan de estudio UCI y algunos objetos de aprendizajes de facturación propia.

La aplicación multimedia del presente trabajo no pretende por si sola desarrollar las habilidades necesarias para dominar los temas del Álgebra Lineal tras el cumplimiento de los objetivos declarado por las asignaturas en especialidades de ingeniería sino que facilita, con su uso adecuado, la asimilación del tema espacio vectorial apoyado en la visión geométrica, dimensiones 2 y 3, y así contribuir a la comprensión de los conceptos con auxilio de imágenes, audio y video. La utilización de esta multimedia concibe el desarrollo total de la teoría asociada al Álgebra Lineal por libros clásicos del Álgebra o materiales confeccionados con tal finalidad y emplear esta aplicación como apoyo adicional al estudio.

Álgebra lineal para la formación de ingenieros

Esta asignatura entre otros objetivos generales de la disciplina Matemáticas persigue contribuir a la formación de la concepción científica del mundo mediante la comprensión de las relaciones entre los modelos matemáticos, los conceptos y resultados de la ciencia matemática y la realidad material existente. Hecho declarado en varios de los objetivos educativos de la asignatura ver (Universidad de las Ciencias Informáticas, 2008)

Esta asignatura deberá lograr que los estudiantes creen ciertas habilidades necesarias para enfrentar la continuidad de sus estudios y su formación profesional en mejor condición intelectual y humana. El Algebra Lineal como conocimiento abstracto se puede percibir ejemplificada o basada en entes geométricos visibles, para complementar su comprensión, de ahí su componente geométrica resaltada en la multimedia y declarada para la formación de ingenieros en ciencias informáticas, como se expone en varios de sus objetivos instructivos.

> Interpreten los conceptos, teoremas y métodos de trabajo de Álgebra Lineal y comprendan como reflejan relaciones cuantitativas y espaciales. En particular deberá lograrse la interpretación geométrica de diversos conceptos y procedimientos de Álgebra Lineal.

> Utilicen los conceptos y procedimientos del Álgebra Lineal para resolver problemas matemáticos y prácticos modelados con estos conceptos y en ciertos casos emplear la base conceptual para crear el modelo matemático correspondiente. En particular deberá lograrse la aplicación de los conceptos del Álgebra Lineal a la modelación y solución de problemas de geometría analítica y de problemas discretos. (Universidad de las Ciencias Informáticas, 2008)

La aplicación multimedia está encaminada a favorecer en la UCI: la docencia de la asignatura Álgebra Lineal, el PEA de los estudiantes y la educación semipresencial.

Temas desarrollados

Los temas que se despliegan en el Software Educativo (aplicación multimedia) son los siguientes:

Vectores en R^2 y R^3: Se mostrará la representación gráfica de los vectores de R^2 y R^3, por su representación algebraica v=(a, b, c) partiendo de un sistema cartesiano rectangular y por su representación vectorial v=a**i** + b**j** + c**k** partiendo del sistema de vectores canónicos de R^3, la longitud de un vector como magnitud de vector, la dirección del vector y su invarianza por la traslación en el sistema de coordenadas, sentido u orientación del vector y el significado del signo negativo que acompaña a un vector.

Operaciones con vectores: Se mostrará la operación suma de dos vectores de R^2 o de R^3 y el significado gráfico de la resta, multiplicación de un escalar por un vector y su significado gráfico, el producto escalar de dos vectores de R^2 o de R^3 y la relación del ángulo entre ellos con el resultado del producto, ortogonalidad de dos vectores R^2 o de R^3 y su significado gráfico.

Elementos de geometría: Tomando como base el trabajo vectorial se obtienen las ecuaciones y relaciones de rectas y planos, según el espacio cartesiano, entes fundamentales en la visión geométrica del Algebra Lineal particularmente en los espacios vectoriales.

Linealidad de un sistema de vectores: Se mostrará la dependencia lineal de un sistema de vectores de R^2 o de R^3 y consecuencia gráfica de este hecho, la independencia lineal de un sistema de vectores de R^2 o de R^3 y consecuencia gráfica de este hecho, el conjunto de los vectores generado

por un sistema de vectores de R^2 o de R^3 y su tipicidad según la cantidad de vectores en su base o su dimensión.

Subespacio vectorial. Operaciones con subespacios: Se mostrarán los subespacios vectoriales de R^3 con su tipicidad según la dimensión del mismo y sus representaciones geométricas, la intersección de dos subespacio vectoriales de R^2 o de R^3 y su sentido geométrico, suma de dos subespacios vectoriales de R^2 o de R^3 y su sentido geométrico, el subespacio complemento de un subespacio dado de R^2 o de R^3 y su sentido geométrico.

Aplicaciones lineales: Se mostrarán casos particulares de aplicación lineal como la proyección ortogonal sobre un subespacio de R^2 o de R^3 y su sentido geométrico, el caso particular de la rotación de vectores como aplicación lineal, algunos subespacios invariantes por una aplicación lineal apoyado en su representación geométrica, la consecuencia geométrica de la representación diagonal de un endomorfismo (diagonalización).

Aplicación Multimedia

El Software Educativo confeccionado cuenta con cinco módulos los cuales se describen a continuación:

Módulo Presentación: Es el módulo inicial al que el usuario se va a enfrentar, en el mismo se muestra una animación basada en secuencias de los materiales audio visuales que se tienen, se explica el alcance que se pretende lograr con el desarrollo de este trabajo, luego de mencionar los temas desarrollados se hace la recomendación de usar esta multimedia como apoyo adicional al estudio guiado por un especialista o bibliografía especializada para el tema, sugerencia que constituye una premisa.

Módulo Contenido: El módulo de Contenido es donde el usuario podrá ver un extracto de la información teórica de cada uno de los temas, en el módulo se describen un total de seis temas con sus particularidades, en el caso de que algún tema tenga información visual se podrá acceder al video o la imagen a través de lo botones correspondientes a los mismos situados en la parte inferior de la pantalla que muestra el contenido.

Módulo Examen: En el módulo de Examen es donde el usuario podrá medir sus conocimientos, al mismo se accede a través del botón "Realizar examen" situado en la parte superior de la interfaz, en este módulo se cuenta con un total de 4 exámenes de 5 preguntas cada uno, al realizar cada pregunta el usuario podrá ver los resultados obtenidos a través del botón " Comprobar respuestas" situado en la parte inferior de la pantalla donde se muestran las preguntas, una vez realizada una pregunta el usuario podrá ir a la siguiente pregunta o a la pregunta anterior mediante los botones "Ir a la siguiente pregunta" e "Ir a la pregunta anterior" respectivamente. La realización de un examen es de manera selectiva.

Módulo Galería de Videos: El módulo de Galería de Videos es donde el usuario podrá acceder de una manera más rápida a todos los videos existentes en la multimedia, al mismo se accede a través del botón "Galería de Videos" situado en la parte superior de la interfaz, este módulo cuenta con 23 materiales audio visuales donde se ejemplifican varios de los temas desarrollados.

Glosario de Términos: El módulo de Glosario de Términos es donde el usuario podrá consultar el significado de palabras de difícil comprensión, así como algunas siglas que se usan en el contenido, para acceder a este módulo se hará a través del botón "Glosario de Términos" situado en la parte superior de la pantalla, una vez que se está en la pantalla del glosario de términos el cliente tendrá la posibilidad de seleccionar una letra y así el sistema muestra los vocablos que comienzan por dicha letra.

La aplicación multimedia propuesta está actualmente en su versión alfa con los módulos declarados anteriormente a la cual se deben agregar objetos de aprendizajes en los temas desarrollados que se encuentran en su etapa de diseño para así tener otros instrumentos interactivo para que el estudiante se desarrolle activamente e influya en su PEA, basado en un modelo docente centrado en el aprendizaje que se implementa en la UCI. De modo similar el módulo glosario de términos debe enriquecerse para las futuras versiones de la aplicación multimedia.

Solución técnica

La solución del sistema que se desarrolla centrándose en el Proceso Unificado de Desarrollo de Software, haciendo uso del Lenguaje Unificado de Modelado (UML Unified Model Language)

extendido con el Lenguaje de Modelado Orientado a Objetos de Aplicaciones Multimedia (OMMMA-L). Las herramientas de desarrollo de la aplicación fueron Macromedia Flash 8 y 3D Max para la confección de los videos.

Conclusiones

La aplicación multimedia en cuestión pretende, con su uso recomendado, facilitar la asimilación del tema Espacio Vectorial apoyado en la visión geométrica ilustrada en dimensiones 2 y 3, y así contribuye a la comprensión de los conceptos asociados al tema en la asignatura Álgebra Lineal de las especialidades de ingeniería. Construido con esquema de trabajo semipresencial que complementa y completa al lector los conocimientos del Álgebra Lineal adquiridos por textos clásicos de la asignatura y materiales confeccionados con fines docentes.

Referencias bibliográficas

M. Krasnov, A. K. (2005). *Curso de Matemática Superior para ingenieros.* Habana: Félix Varela.

Marcelo, M. V., Gandolff, L. S., García, M. C., & Peña, G. B. (2002). *Álgebra Lineal.* Habana: Osvaldo Sánchez.

Moreira, M. A. (2000). ¿Qué aporta internet al cambio pedagógico en la educación superior? *Actas del III Congreso Internacional de Comunicación, Tecnología y Educación,* (págs. 128-135). Universidad de Oviedo.

Universidad de las Ciencias Informáticas. (2008). *Plan de estudio de ingeniería informática.* La Habana, Cuba.

EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA CON TECNOLOGÍA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Eugenio Carlos Rodríguez, Esther Ansola Hazday
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Cuba
ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, esther@ind.cujae.edu.cu
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior
Diseño curricular

Resumen. *En este trabajo se muestra un proyecto de investigación que trata el problema de la falta de coherencia entre el diseño de los currículos de Matemática en las carreras de ingeniería y el uso que se hace de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia. Las bases teóricas de la investigación se sustentan fundamentalmente en el aprendizaje desarrollador (Zilberstein, 2006a; Zilberstein, 2006b; Zilberstein y Portela, 2002), y en el uso de estrategias metacognitivas (Labarrere, 1994) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática sustentadas en el uso de tecnologías. Un currículo diseñado con el uso explícito de las tecnologías, deberá contribuir al desarrollo tanto del alcance del contenido matemático como del rango de situaciones problemáticas o tipos de problemas al que pueden enfrentarse los estudiantes (Guerrero, Laffita y Chávez, 2002).*
Palabras clave: tecnología, currículo

Introducción

El desarrollo de las TIC ha traído aparejado importantes cambios sociales y culturales y tiene particular relevancia en el ámbito educativo. En especial en las Matemáticas, la introducción de las tecnologías hace que los conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental y actitudes que se desea formar en el proceso de enseñanza – aprendizaje, se desarrollen de forma tal que los alumnos se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas.

Las tecnologías, ayudan en la recolección, grabación, organización y análisis de datos. Aumentan además la capacidad de hacer cálculos y ofrecen herramientas convenientes, precisas y dinámicas que dibujan, grafican y calculan. Con estas ayudas, los estudiantes pueden extender el rango y la calidad de sus investigaciones matemáticas y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas. Sin embargo, en las carreras de ingeniería, estos resultados no siempre se alcanzan.

Los obstáculos

Entre los obstáculos que impiden el logro de estos propósitos se pueden mencionar los siguientes:

- Los profesores no siempre tienen la preparación adecuada para enfrentar el reto que significa aplicar las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.
- Los estudiantes no siempre tienen los conocimientos y habilidades necesarias en el uso de las tecnologías para enfrentar el aprendizaje de las Matemáticas haciendo uso de ellas.
- El diseño de los currículos de Matemática no poseen la coherencia necesaria para lograr desarrollar habilidades en el uso de las potencialidades que brindan las tecnologías.

Como resultado, el estudiante transita por las asignaturas de Matemática y no logra desarrollar las habilidades necesarias para aprovechar las potencialidades de las tecnologías. Para lograr lo anterior se hace imprescindible realizar cambios en los currículos, así como en los métodos y estilos de trabajo y en los enfoques de las tareas que se les presentarán a los alumnos.

Un primer acercamiento a la solución de esta problemática se encuentra en (Durán, 2001), donde se plantea que, a pesar de que a primera vista se aprecian como componentes del proceso docente educativo el aprendizaje, la enseñanza y la materia de estudio, el resultado de un análisis más profundo de este proceso permite distinguir como componentes fundamentales del proceso los siguientes: objetivos, conocimientos, habilidades, métodos, formas de enseñanza, entre los más importantes.

Objetivos, conocimientos y habilidades

En base a lo reportado en Durán (2001) se considera que el uso de distintas tecnologías, permite ahondar en la formación del pensamiento matemático de los estudiantes y en consecuencia, plantearse objetivos de mayor alcance e importancia imposibles en épocas pretéritas.

Esa influencia de las tecnologías sobre los objetivos se refleja de forma directa sobre los contenidos, y no solamente sobre los contenidos específicos, por la relación que existe entre ambas categorías. El uso de las tecnologías tiene una incidencia directa en el tratamiento de los contenidos específicos pues permite abordar ejercicios de mayor complejidad y que pueden producir un mayor acercamiento a los problemas reales de la ciencia y la técnica.

Los métodos

> Otra de las categorías didácticas que reciben la influencia de los medios son los métodos, considerados como una serie de pasos u operaciones estructuradas lógicamente, con las que se ejecutan distintas acciones encaminadas a lograr un objetivo determinado. En el proceso docente educativo el método es la principal vía que toman el profesor y el estudiante para lograr los objetivos fijados en el plan de enseñanza, para impartir y asimilar el contenido de ese plan (Durán, 2001)

Las formas de enseñanza

Según Durán (2001) se considera que las formas de enseñanza varían considerablemente si se utilizan las tecnologías, pues la forma de desarrollar la clase adquiere nuevos matices, así como la consulta y la autopreparación del estudiante alcanzan otras dimensiones.

La evaluación

De acuerdo a Durán (2001) la utilización de la tecnología brinda la posibilidad de ampliar la concepción de la evaluación del aprendizaje. La evaluación se modifica sustancialmente al utilizar estas herramientas ya que la posibilidad de cumplimiento de las funciones de la evaluación aumenta, en particular la función educativa, motivadora pues, favorece que el alumno defienda y argumente sus explicaciones contribuyendo a la formación de convicciones, formación de hábitos de estudio, el desarrollo del sentido de la responsabilidad y la autoevaluación.

El currículo de matemática

Un programa de Matemáticas diseñado con el uso explícito de las tecnologías (Rico, 1998), deberá contribuir al desarrollo tanto del alcance del contenido matemático como del rango de situaciones problemáticas o tipos de problemas al que pueden enfrentarse los estudiantes (Guerrero et al., 2002). El uso de herramientas de cálculo poderosas, así como las construcciones y representaciones visuales ofrecen a los estudiantes acceso a contenidos matemáticos y a contextos que de otro modo serían para ellos muy difíciles de explorar. El uso de herramientas

tecnológicas para trabajar en contextos de problemas interesantes puede facilitar el logro de los estudiantes en una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior tales como reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones.

La falta de coherencia entre el diseño de los currículos de Matemática en las carreras de ingeniería y el uso que se hace de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas materias, limita el uso de las potencialidades que brindan las herramientas tecnológicas de que se dispone.

La investigación

La investigación en Didáctica de la Matemática cubre desde los fundamentos teóricos del desarrollo cognitivo y las diferencias individuales entre los estudiantes hasta los problemas de toma de decisiones en el aula y la escuela y los programas de formación de maestros y profesores (Begle y Gibb, 1980). Un análisis a los distintos paradigmas de investigación en Didáctica de la Matemática, así como de sus principales problemas de investigación (Godino, 2001) nos llevan a una gran variedad de temas, entre ellos (Kilpatrick, 1995): los cambios curriculares, el proceso de aprendizaje, las prácticas de evaluación, el desarrollo profesional, el contexto social y el empleo de la tecnología, entre los más importantes.

Se requiere entonces una investigación seria que, como resultado, muestre importantes transformaciones en el diseño de los currículos de Matemática (Guerrero et al., 2002) en las carreras de ingeniería, en los cuales, la contradicción que requiere ser transformada se manifiesta en:

1. Los sistemas de objetivos y habilidades de los Programas de Disciplinas y asignaturas.
2. Los sistemas de evaluación de las asignaturas y el diseño de las evaluaciones.
3. Los tipos de clases que se utilizan para impartir las asignaturas.
4. El diseño de los ejercicios, problemas y tareas.

Una investigación de este tipo debe dar como resultado un Sistema Didáctico para la Disciplina Matemática para carreras de ingeniería, que contribuya al desarrollo de habilidades en el uso de herramientas tecnológicas específicas para aprovechar las potencialidades de su utilización, a partir de un programa curricular diseñado con el uso explícito de la tecnología.

Las bases teóricas de la investigación se sustentan fundamentalmente en el aprendizaje desarrollador (Zilberstein, 2006a; Zilberstein, 2006b; Zilberstein y Portela, 2002), y en el uso de estrategias metacognitivas (Labarrere, 1994) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática sustentadas en el uso de tecnologías.

> Asumimos una concepción desarrolladora que se ha ido conformando y sistematizando en los últimos años a la luz de diferentes investigaciones pedagógicas realizadas, enriquecida con la práctica docente en Cuba […] La Didáctica debe ser desarrolladora, es decir, conducir al desarrollo integral de la personalidad del estudiante, siendo esto el resultado de un proceso activo de apropiación de la experiencia histórica acumulada por la humanidad El proceso de enseñanza-aprendizaje, no puede realizarse teniendo en cuenta solo lo heredado por el alumno, debe considerar que es decisiva la interacción socio-cultural, lo que existe en la sociedad, la actividad, la socialización, la comunicación. (Zilberstein, 2006a, p. 33)

Uno de los problemas esenciales de la enseñanza de la Matemática consiste en la utilización de métodos y medios de enseñanza-aprendizaje que propicien en los alumnos la formación de un conocimiento científico. Cuando el conocimiento que se quiere formar es científico, tiene que crear una actividad cognoscitiva nueva (Labarrere, 1994), lo que hace que la enseñanza y los medios de enseñaza que utilicemos sean diferentes, particularmente por el lenguaje que tiene la Matemática, que ha de ser el lenguaje científico donde, además del habitual, se da el simbólico.

Pertinencia de la investigación

Se considera que la investigación es beneficiosa por el hecho de que como resultado de la misma se obtendrá un currículo de Matemática, para carreras de ingeniería, diseñado con el uso explícito de herramientas tecnológicas específicas, de manera que, en su tránsito por las asignaturas de Matemática, los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para aprovechar las potencialidades de estas herramientas.

Relevancia social e implicaciones prácticas

Los resultados de la investigación beneficiarán tanto a estudiantes como profesores. Los profesores porque, habiendo recibido el entrenamiento necesario, estarán preparados para enfrentar el reto de aplicar las herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Los estudiantes porque, el desarrollo de estas habilidades hará que sus conocimientos y modos de actividad mental se desarrollen de forma tal que se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas.

Esta investigación no solamente tiene su impacto en las transformaciones de las personas y en un proceso social interpersonal de gran repercusión, como es el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que, por tratarse del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en carreras de ingeniería, su impacto se verá reflejado en el desarrollo de egresados con mayores capacidades para enfrentar situaciones nuevas con herramientas tecnológicas, y a mayor plazo, en el desarrollo de la Ciencia y la tecnología.

Valor teórico y metodológico

Los posibles usuarios de los resultados de la investigación serán todos aquellos que se dediquen a enseñar Matemática en carreras de ingeniería, tanto en las universidades que participen en el proyecto como en otras universidades y otros países.

Los métodos que se emplearán en la investigación para resolver el problema del diseño del currículo de Matemática en carreras de ingeniería, con el uso de herramientas tecnológicas específicas, pueden sugerir ideas o recomendaciones para ser aplicados en otros niveles de educación, en otras carreras universitarias, con el uso de otras tecnologías, e incluso con otras materias como Física, Química u otras que puedan hacer uso de estas herramientas en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Objetivos específicos

Se recomienda un conjunto de principios para una enseñanza y un aprendizaje desarrolladores:

- Diagnóstico integral de la preparación del alumno para las exigencias del proceso de enseñanza aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido de aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo.
- Estructurar el proceso de enseñanza aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno, teniendo en cuenta las acciones a realizar por este en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad.
- Concebir un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento por el alumno desde posiciones reflexivas, el cual estimule y propicie el desarrollo del pensamiento y la independencia en el escolar.
- Orientar la motivación hacia el objeto de la actividad de estudio y mantener su constancia. Desarrollar la necesidad de aprender y de entrenarse en cómo hacerlo
- Estimular la formación de conceptos y el desarrollo de los procesos lógicos de pensamiento, y el alcance del nivel teórico, en la medida que se produce la apropiación de los conocimientos y se eleva la capacidad de resolver problemas.
- Desarrollar formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan el desarrollo intelectual, al lograr la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje.
- Atender las diferencias individuales en el desarrollo de los escolares, en el tránsito del nivel logrado hacia el que se aspira.
- Vincular el contenido de aprendizaje con la práctica social, estimular la valoración por el alumno en el plano educativo. (Zilberstein, 2006b, p. 19)

Para llevar a cabo la investigación será necesario identificar las habilidades que poseen los alumnos de los primeros años de las carreras de ingeniería para resolver problemas que requieren de la Matemática, utilizando herramientas tecnológicas, así como la preparación que poseen los profesores de Matemática en carreras de ingeniería, para utilizar herramientas tecnológicas específicas en el proceso de enseñanza aprendizaje. En este último sentido se plantea fundamentar el diseño de un sistema de entrenamiento para profesores de Matemática en carreras de ingeniería, para utilizar herramientas tecnológicas específicas en el proceso de

enseñanza-aprendizaje, de manera que propicien el desarrollo de habilidades mediante el uso de la tecnología que aprovechen las potencialidades de estas.

Para el diseño del currículo, con las exigencias que plantea la investigación es imprescindible determinar los elementos que deben caracterizar el diseño de los Programas de la Disciplina Matemática para carreras de ingeniería, y las asignaturas que la componen, de manera que, mediante el uso de herramientas tecnológicas específicas, contribuyan al desarrollo de habilidades que potencien el uso de la tecnología.

Un objetivo importante será identificar las situaciones prácticas y conceptuales pertinentes para el diseño de materiales didácticos y bibliografía complementaria a los libros de texto, que contengan un sistema de ejercicios y problemas que contribuyan al desarrollo de habilidades mediante el uso de tecnologías, aprovechando sus potencialidades.

Conclusiones

Las TIC pueden llegar a transformar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, pero las computadoras por sí solas no transformarán este proceso. Los maestros y profesores juegan el papel decisivo en esta transformación. La clave está en la investigación profunda en estos temas: la Didáctica de la Matemática cuando se utilizan las nuevas tecnologías y el diseño de currículos de Matemática con el uso explícito de las tecnologías.

Se considera que investigaciones de este tipo serán beneficiosas tanto desde el punto de vista de la Didáctica como por el hecho de que como resultado de la misma se obtendrá un currículo de Matemática, diseñado con el uso explícito de herramientas tecnológicas específicas, de manera que, en su tránsito por las asignaturas de Matemática, los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para aprovechar las potencialidades de estas herramientas.

Referencias bibliográfícas

Begle, E.G. y Gibb, E.G. (1980). Why Do Research. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 3-19), USA: National Council of Teachers of Mathematics Professional Reference Series.

Durán, M. (2001). *La introducción de algunas herramientas de la tecnología informática en Algebra Lineal para Ingeniería Informática. Su impacto en la Didáctica.* Tesis de Maestría no publicada. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.

Godino, J.D. (2001). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de la Matemática. En *Teoría y métodos de investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 15 de enero de 2005 de http://www.ugr.es.

Guerrero, Eloy., Laffita, P. O. y Chávez, M. (2002). Transformaciones en el currículo matemático de la enseñanza superior por el uso de las Tecnologías de la información y las Comunicaciones. *PRIMER CONGRESO VIRTUAL DE APRENDIZAJE CON TECNOLOGÍA, Facultad Agroforestal del Centro Universitario de Guantánamo. Cuba.* Recuperado el 13 de marzo de 2009 de http://www.universia.pr/ congreso/75/75.doc.

Kilpatrick, J. (1995). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En *Educación Matemática*. Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Labarrere, A. (1994). *Pensamiento. Análisis y Autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. México: Ángeles Editores.

Rico, L. (1998) Complejidad del currículo de Matemática como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1 (1)*, 22-39.

Zilberstein, J. (2006). Categorías de una Didáctica Desarrolladora. Posición desde el enfoque Histórico-Cultural. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales* (pp. 33-43), La Habana: Editorial Felix Varela.

Zilberstein, J. (2006). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza-Aprendizaje que Instruya y Eduque. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales* (pp. 19-31), La Habana: Editorial Felix Varela.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una Concepción Desarrolladora de la Motivación y el Aprendizaje de las Ciencias*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

EL CÁLCULO Y LAS NTIC EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR. CASO: UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL CARMEN

Santa Herrera Sánchez, Cristina Lagunes Huerta, Juan José Díaz Perera
Universidad Autónoma del Carmen México
sherrera@pampano.unacar.mx, herrersanta@hotmail.com
Campo de investigación: Uso de la tecnología en la Enseñanza de la Matemática Nivel: Superior

Resumen. *El desarrollo de la Educación Matemática ante el nuevo siglo, propone para lograr un acercamiento a los conceptos matemáticos el uso de la tecnología. El presente trabajo es una descripción del proceso de inclusión del uso de las NTIC en los cursos de cálculo. La experiencia generada durante los últimos años, ha permitido la descripción de diferentes estrategias didácticas donde se incluya el uso de la hoja de cálculo, paquetería matemática como Derive y Wiris, y el uso de la plataforma Dokeos, como un sitio donde el alumno tiene acceso a documentos, ejercicios, enlaces y evaluaciones en línea, como apoyo al curso presencial.*

El cambio en el modelo educativo nos llevó a enfrentarnos a nuestros propios prejuicios y tabúes con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje, abandonando nuestro rol tradicional de docente a un facilitador, nada fácil.

Palabras clave: aprendizaje, matemáticas, Tic's, didáctica

Introducción

El desarrollo de la Educación Matemática propone el uso de tecnologías como una herramienta para lograr un mejor acercamiento de los conceptos matemáticos. Lo cual conlleva a considerar las características del entorno, así como a la movilidad en lo referente a los avances tecnológicos, difíciles de prever, sin embargo en inminente que el nuevo siglo demanda profesionistas capaces de adaptarse a los cambios sociales, incluido el mercado laboral. Aquí es donde la formación universitaria debe proporcionar herramientas que le permitan el uso de las NTIC, en primer lugar como coadyuvante de su aprendizaje, permitiéndole acceder a los contenidos matemáticos y en segundo lugar ser más competentes en el ámbito profesional.

El uso de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas

Ante un escenario cambiante, dinámico, complejo e inmerso en el uso de la tecnología, exige estar atentos para dar respuesta a los nuevos retos que marca el siglo XXI, es así como las

computadoras toman terreno en el proceso enseñanza aprendizaje, donde cada vez menos se utiliza el lápiz y papel (Guzmán, 1994), indiscutiblemente estos últimos insustituibles.

Así, el salón de una clase de Cálculo, es un escenario que puede ir de lo pasivo a lo activo, de lo repetitivo al debate de conceptos, de la búsqueda de información a la discusión de hechos cotidianos desde la perspectiva matemática.

Ponte *et al* (1997) señalan que se pueden tener básicamente dos tipos de clases de matemáticas; aquellas donde el profesor introduce los conceptos matemáticos y los alumnos tienen un papel pasivo de receptores de la información. Otra busca que el alumno construya su propio conocimiento matemático dada la participación activa del alumno y el profesor tiene un rol de organizador y dinamizador del aprendizaje.

En tal sentido, las experiencias con el uso de manipuladores simbólicos en los cursos de cálculo diferencial e integral (Dubinky y Tall, 1991; Guzmán 1994), indican que son herramientas que facilitan el aprendizaje de conceptos, presentando diferentes formas de de trabajo, permitiendo una mayor interacción entre maestros y alumnos.

Todo apunta hacia que el alumno pueda abordar una situación o problema matemático, de manera diferente haciendo uso de la computadora, desarrollando habilidades en la utilización de los recursos y propiedades matemáticas que permitan seleccionar comandos y distintas formas de representación, lo que implica lograr la motivación y el intercambio de ideas propiciando el estudio de los conceptos matemáticos (Santos, 1996; Torres y Hing, 2002).

Los programas de uso común como la hoja de cálculo, permite explorar recursos en la construcción de conocimientos matemáticos; Santendreu (2004) los considera como programas de aplicación instructiva que inicialmente no fueron diseñados para la enseñanza.

El uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, no es la solución a los problemas en el aprendizaje pero pueden ser considerados como un agente catalizador del proceso de cambio en la didáctica de las matemáticas (Gómez, 1997; Gómez 1998).

El incluir a las NTIC en los programas educativos conlleva a la modificación en el proceso de evaluación de los estudiantes en todos niveles educativos, incluyendo la etapa universitaria, modificando las estrategias para su realización, buscando además se conviertan en un aliado en dicho proceso.

La hoja electrónica de cálculo y el aula de matemáticas

La hoja electrónica de cálculo es una herramienta de apoyo en las materias como matemáticas en las que se usan datos numéricos, por la velocidad y manejo de grandes cantidades de datos. Según apunta Beare (1993), presenta dos desventajas notables: primero, debe emplearse mucho tiempo para familiarizarse con su uso, antes de poder llevarse a cabo acciones útiles en el salón de ciencias. Los reportes de Vega (1993) sugieren lo contrario; ya que los tipos de gráficos que pueden generar con el uso de la hoja electrónica de cálculo están orientados para el mercado de negocios, y presentan cierta dificultad para ser adaptados a los requerimientos de las gráficas en las clases de ciencias. También en esto, se puede contradecir a Beare, pues las actuales versiones de ese software permiten formatos apropiados para trabajar con matemáticas.

Una de las ventajas de la hoja de cálculo es que a través de la construcción de tablas y gráficas se pueden representar cambios y hacer variar algunas de las magnitudes del problema, permitiendo otra forma de abordar lo estudiado (Vega, 1999).

Por lo anterior, la hoja electrónica de cálculo facilita el proceso y la resolución de problemas de cálculo, aunque no de todos, es por ello que el profesor debe de proporcionar a sus alumnos una amplia gama de recursos para solucionar problemas de cálculo con y sin la tecnología.

Con el uso y manejo de la hoja de cálculo, los alumnos se convierten en activos constructores del conocimiento, y trabajan con las opciones para las que fueron construidas las actividades del curso usando tecnología..

Los textos como “Álgebra con hojas electrónicas de Cálculo” y “El cálculo desde una perspectiva visual y dinámica con actividades en la computadora” dieron elementos adicionales para tomar ejercicios complementarios para el desarrollo de los cursos. (Rojano, 1998; Mochón, 2004).

Software libre vs software propietario

La incorporación de las NTIC en educación representa en primer término la selección del software adecuado a los contenidos matemáticos y en segundo lugar su adquisición, lo que representa un problema para los docentes en lo referente a contar con el equipo de cómputo y los software.

La utilización de un software propietario significa desembolsar una gran cantidad de dinero, o en su caso, ingresar a internet para obtener una versión gratuita de un software libre que presente características similares, (Verduzco, 2008). En el caso especifico de software para matemáticas el software libre representa una buena alternativa didáctica, así como aquellos software propietario que se distribuye en versiones de prueba, con esa desventaja son utilizables por un corto periodo de prueba.

Lo que marca la diferencia es la inversión que desee hacer una institución educativa en la adquisición del software propietario, justificado en la calidad de sus egresados y su competitividad en el manejo de las NTIC.

En la búsqueda de alternativas viables para el docente, se encontró Wiris como una buena alternativa de software libre (Ruiz et al, 2007) y Derive como software propietario, ya que ofrece sus versiones de prueba.

Apoyos en línea

Otra opción en el uso de la tecnología es el empleo de herramientas de Internet, que han resulto en gran medida los problemas de distribución de tareas y documentos para revisión y análisis, mismas que proveen acceder a clases virtuales, la creación de ambientes de aprendizaje colaborativo y las de educación a distancia, (Santandreu, 2004). En tal sentido las plataformas de Dokeos y Moodle, por mencionar algunas representan buenas alternativas, adicionalmente los Grupos en sitios como Yahoo, ofrecen ventajas para distribución de información entre los alumnos inscritos en un curso presencial.

Si bien dichos recursos no son propiamente un curso a distancia, toma los beneficios de dichas plataformas para insertarlas como apoyo a los cursos “en situ”.

La experiencia en la Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR)

En 1996, se inician los trabajos encaminados a la revisión curricular de los programas educativos existentes, además de establecer un plan maestro que permitiera *Fortalecer y Modernizar la Universidad*, con el lema: *“Ser mejores para servir mejor*”.

En el Modelo Educativo centrado en el aprendizaje, se describe el papel que juega el profesor y los alumnos, entendiendo que estos últimos son una parte esencial en el proceso educativo, se definen las disposiciones deseables, como *"el conjunto de atributos: conocimientos, destrezas, actitudes y relaciones, que de manera intencional, sistemática, explícita o tácita, la institución, considera que deben desarrollarse en el alumno, a su paso por sus programas educativos, organizando para lograrlo experiencias de aprendizaje significativas*" (Plan Faro U 2010).

El Comité Institucional de Diseño Curricular, se dio a la tarea de definir las estrategias para que el alumno alcance las disposiciones deseables, así como los cursos específicos que podrían contribuir a su logro, denominándolos en su conjunto: "cursos sello", con la premisa de que todo estudiante de nuestra universidad debe acreditarlos, razón por la cual aparecen en todos los mapas curriculares de los programas educativos que se ofrecen. (Salazar, 2006).

En agosto de 2002 se implementó el nuevo modelo educativo centrado en el aprendizaje, con todos los cambios e implicaciones que ello conllevaba, concientes de los riesgos, y del rechazo al cambio tanto por parte de profesores como de alumnos, aunados los cambios administrativos y de organización académica.

El abandonar los esquemas educativos tradicionales era un gran reto por sí mismo, pero el cambio de protagonista en el Modelo Educativo propuesto lo hizo más complejo. Más aún cuando hablamos de asignaturas como matemáticas.

El cuerpo Académico de Matemática Educativa se dio a la tarea de realizar el análisis y consideraciones pertinentes para proponer los cursos de Matemáticas II (en este curso lo que se enseña es cálculo aplicado a la administración y a la economía, pero en el programa educativo de la DES de Sociales recibe el nombre de matemáticas II) y Cálculo para la DES de Computación e Informática.

Los cursos de cálculo

La experiencia generada en el curso de Matemáticas I, nos permitió al los profesores del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la Unacar, tomar la decisión de incluir el uso de las NTIC en los cursos de Matemáticas II y de Cálculo Diferencial e Integral que se ofrecen en la DES de Ciencias Económico Administrativas y en la DES de Computación e Informática, permitiendo

realizar actividades con el uso de tecnología como pare del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

El los cursos de Matemáticas II y cálculo Diferencial, se diseñaron tres experiencias de aprendizaje: "La cuesta de enero", "Hasta el Límite" y "No pierdas la razón", cada una de ellas en el formato analítico (formato para los programas de cursos en la Unacar)..

Las primeras experiencias con el uso de las NTIC, fueron aisladas sin estar debidamente insertadas como actividades dentro de cada experiencia, poco a poco y tras la revisión bibliográfica se diseñó un manual de prácticas guiadas con un esquema similar a EMAT, basándose en el trabajo colaborativo. Recientemente se han desarrollado actividades con Derive y Wiris.

Con estas actividades, el alumno no sólo resuelve problemas sino que también se busca la interpretación de los resultados, al realizar los cálculos y gráficos trabajando con la calculadora, y con el uso de la computadora como herramienta para fomentar la creatividad matemática de los alumnos.

En los últimos años se ha usado los apoyos en línea primero con un grupo en Yahoo, seguidamente de el uso de la plataforma Dokeos, que ha demostrado sus bondades en la administración de la información, representando una ventaja al docente ya que una vez de "montado" las actualizaciones son más sencillas, adicionalmente se va creando un banco de reactivos que permite ir realizando ejercicios diferentes en cada curso. La plataforma Dokeos, facilita la interacción entre los alumnos. Además de que permite que los alumnos se autoevalúen, en esta modalidad el alumno es el protagonista de la evaluación. Por otra parte permite que reflexione sobre los métodos, conocimientos y limitaciones del software.

Conclusiones

Tras el uso de las NTIC a los largo de 6 años en los cursos nos permiten emitir las siguientes conclusiones:

1. El uso de la NTIC deben estar insertadas dentro de las estrategias didácticas de cada programa de curso.

2. Las actividades con hoja de cálculo bajo el esquema presentado en EMAT, dan mejores resultados, primero en la interacción con las NTIC y segundo lugar con el aprendizaje de los contenidos matemáticos.
3. El uso de software como Derive y Wiris resultan muy convenientes cuando se trata de graficar y comprobar los procedimientos algebraicos y de cálculo, buscando sea una herramienta de autocorrección.
4. El empleo de las plataformas educativas para subir los cursos en línea representan un apoyo para los docentes, si bien no como cursos a distancia, son de apoyo a los cursos "en situ".
5. Para finalizar, el trabajo del Cuerpo Académico de Matemática Educativa, hace énfasis en:
    - Las experiencias acumuladas revelan que los paquetes y programas son herramientas informáticas de fácil manejo y útiles para su integración en las clases de Matemáticas.
    - Se deben modificar los usos tradicionales en la enseñanza del cálculo para maximizar las oportunidades que ofrece la tecnología.
    - La optimización se debe orientar hacia la mejora de la motivación, la autonomía y el aprendizaje basado en la implicación del alumno en el proceso.
    - Se ha comprobado los efectos positivos del desarrollo de una metodología didáctica mixta que incluye el uso del Derive y la hoja Electrónica sobre el aprendizaje.
    - Los apoyos en línea si bien son nuevas en el grupo de trabajo, ofrecen un campo de experimentación demostrando sus amplios beneficios en el manejo de los cursos donde los grupos son numerosos.

Referencias bibliográficas

Beare, R. (1993). *A spreadsheet System for Educational Use Based on Microsoft Excel*. Paper presented to the Australian Computers in Education Conference. Department of Science Education, University of Warwick, Coventry, UK

Dubinsky E., Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In Tall D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* (pp. 231-298). Holland: Klewer

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa 10 (1)*, 93-111.

Gómez, P. (1998). Computadores y calculadoras en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. In: Universidad Autónoma de Manizales y RIBIE-COL (Ed.), *CD-Rom del IV Congreso Colombiano de Informática Educativa*. Manizales

Guzmán, M. de. (1994). Programas de ordenador en la educación matemática. *Revista de Anaya Educación 3*, 33-40

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto.* México: Pearson

Mochón, S (2004). *El cálculo desde una perspectiva visula y dinámica con actividades en la Computadora*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. y Abrantes, P. (1997) *Funcionamiento de la clase de matemáticas*. Lisboa: Didáctica da Matemática Ministerio da Educaçao, PRODEP, 71-95.

Rojano, T y Ursini, S (1998). *Algebra con Hojas Electrónicas de Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoaméricano.

Ruíz, N., Bosh, Marinna y Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. *Memorias del 1 Congreso Internacional Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*. (pp. 677-704). Baeza, España.

Salazar, A (2006). *El modelo educativo de la Universidad Autónoma del Carmen. Una experiencia de aprendizaje institucional*. México: Universidad Autónoma del Carmen.

Santandreu, M. (2004). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas. *Comunicación y Pedagogía 200*, 65-70.

Santos, L. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV–IPN.

Torres, A y R. Hing. (2002). La enseñanza a través de la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento en los estudiantes universitarios. *Memorias de la 3ra Convención Internacional de Educación Superior.* La Habana Cuba.

Universidad Autónoma del Carmen (2006). *Plan Faro U 2010*. México: Universidad Autónoma del Carmen.

Vega, E. (1993). *Competencias en el Uso del Lenguaje Algebraico. Evolución en alumnos de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, Morelos

Vega, E. (1999). *Procesos de Modelación en Biología y Química. El papel de la hoja electrónica de Cálculo. Estudio experimental con alumnos de Nivel Medio Superior*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, Morelos.

Verduzco, G (2008). Software libre o Software propietario ¿Quién ganará la batalla? *Acalán, 54,* 18-20.

EXPLORANDO A FUNÇÃO POLINOMIAL QUADRÁTICA COM WINPLOT

Victor Marcelo R. Santander, Sérgio Destácio Faro, Marcelo Rodrigues de Souza
UNIBAN Brasil
vsantander@ig.com.br, srfaro@ig.com.br, mack777@terra.com.br
Campo de investigación: Pensamento algébrico Nivel: Meio Básico

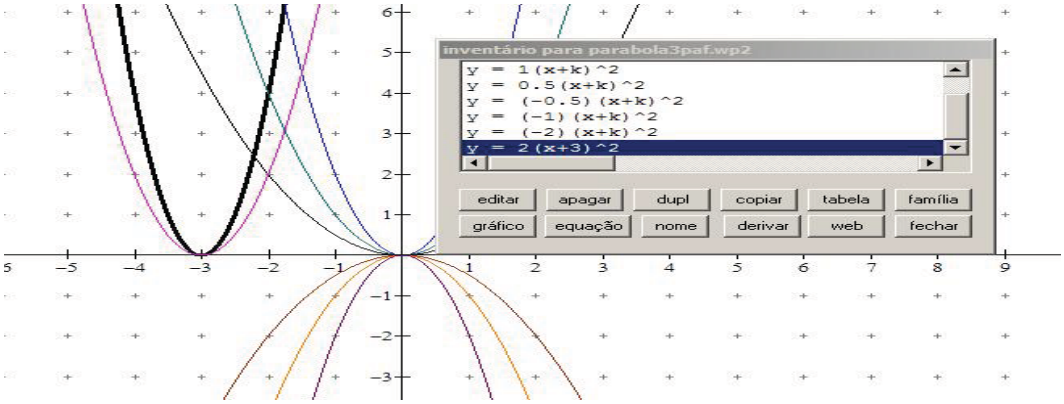
Resumen. *O uso da tecnologia tem tomado, cada vez mais, uma posição de relevância no cenário educacional. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a utilização de recursos tecnológicos traz significativas contribuições a fim de repensar o processo de ensino e aprendizagem. Para melhor compreender o papel da tecnologia no desenvolvimento dos estudantes construímos uma tarefa piloto que foi aplicada em duas instituições escolares das redes pública e privada. Para analisar essa atividade escolhemos as abordagens teóricas em termos de quadros de Douady (1984) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997). Os estudantes que participaram da atividade já eram capazes de mobilizar conhecimentos sobre equações do segundo grau e representação gráfica de uma função, o que facilitou a interpretação e o estudo da função quadrática. O trabalho com o software permitiu revisitar conhecimentos supostos disponíveis ou pelo menos mobilizáveis ao se introduzir a nova noção.*
Palabras clave: função polinomial. tecnologia. representações.

Introdução

A tarefa escolhida para ser desenvolvida com estudantes do ensino médio de uma escola privada e de uma escola da rede pública estadual tem como objetivo que os alunos possam comparar o estudo das funções polinomiais do 2º grau com e sem o uso da tecnologia, que para o segundo utilizamos o software de construção de gráficos Winplot. Optamos, especificamente, por alguns aspectos da função quadrática. Esses aspectos abordados fizeram com que os estudantes mobilizassem determinados conhecimentos, para os quais analisamos qual o nível necessário para a solução das atividades propostas em função dos quadros em jogo.

Na escola pública participaram 4 estudantes e a atividade foi realizada em duas sessões de 90 minutos cada uma, sendo que a 1ª sessão visou buscar uma familiarização no manuseio do software "Winplot" e na 2ª sessão foi aplicada a tarefa. Na turma, da escola privada, participaram 6 estudantes, que apresentavam bom desempenho na disciplina. O conteúdo "função de 2º grau" havia sido ministrado, anteriormente, desta forma, a atividade foi realizada em uma sessão de 90 minutos.

Observamos o trabalho dos estudantes em ambas as escolas e utilizamos nossos microcomputadores para dinamizar o desenvolvimento da tarefa e evitar qualquer tipo de dependência. Usamos, também, um software de rastreamento denominado de "auto screen recorder", para gravar os procedimentos de tela das atividades. Dispusemos de recursos de gravação em vídeo e registros fotográficos. Salvamos todos os arquivos das atividades feitas no Winplot.



Elaboração da atividade

A partir das ações citadas e considerando o tempo disponível para aplicação, optamos por desconsiderar as atividades que não estivessem atreladas exclusivamente às funções quadráticas.

Buscamos inicialmente ter clareza sobre os objetivos de cada atividade, que para esse estudo, com o auxílio dos softwares educacionais, é de compreender a translação vertical e horizontal, e de estudar a concavidade.

A tarefa é composta de três partes bem definidas em quatro atividades: 1ª parte - translação vertical; 2ª - translação horizontal e 3ª - concavidade voltada para cima e para baixo. As representações da função utilizadas nas atividades são as seguintes: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x) = (x + k)^2$ e $f(x) = a(x + k)^2$.

Somente para a translação vertical aplicamos duas atividades, por serem as introdutórias, entendemos que didaticamente seria melhor separar as representações gráficas para evidenciar a translação ao longo do eixo "y". Para as outras duas partes os valores positivos e negativos foram

misturados, mas de forma seqüencial, e esta diferenciação deveria ser identificada pelos estudantes uma vez que era uma das propriedades a ser avaliada.

Na translação vertical criamos um arquivo protótipo "parábola1" com a representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a = 1$; $b = 0$ e $c = 0$, i.e., $f(x) = x^2$. A partir desta situação solicitamos as alterações do parâmetro "c".

Na translação horizontal criamos um arquivo protótipo "parábola2" com a representação gráfica da função $f(x) = (x + k)^2$, sendo $k = -3$, i.e., $f(x) = (x - 3)^2$. A partir desta situação solicitamos as alterações do parâmetro "k".

Na variação da concavidade criamos um arquivo protótipo "parábola3" com a representação gráfica da função $f(x) = a(x + k)^2 = 4(x + 3)^2$, onde solicitamos modificar e/ou inserir o valor de "a" e deixar fixo o valor de "k".

Os significados ou os porquês de outras propriedades da função polinomial do 2º grau, tais como:

- cruzamento com o eixo "x" com duas, uma ou nenhuma raiz real;
- cruzamento com eixo "y"; -vértice e suas coordenadas;
- eixo de simetria;
- deslocamento diagonal ou parabólico quando da mudança dos parâmetros "a" e "b" da fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- desenvolvimento do trinômio do quadrado perfeito.

Essas propriedades foram avaliadas ou registradas de forma individualizada e em separado da atividade do grupo.

Aproveitando as simulações das funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(x) = a(x - u)^2 + v$, visualizamos de forma dinâmica e gradual as mudanças ocorridas com as alterações dos parâmetros, finalizamos a atividade com o intuito de apresentar outra ferramenta educacional para fins ilustrativo.

Outra consideração importante é o fato dos alunos das duas turmas não tinham nenhuma experiência com softwares de representação gráfica, motivo pelo qual facilitamos a inserção das

fórmulas com figuras ilustrativas no texto da tarefa.. É importante salientar que buscamos facilitar tudo que dizia respeito ao manuseio do software durante a execução das atividades.

O fato de facilitar o manuseio do software nos responsabiliza no sentido de saber distinguir entre a dificuldade com a representação matemática e a peculiaridade do software, quando se fez necessário, solicitamos a escrita na folha das atividades para separar o aspecto conceitual matemático da complexidade que poderia advir do "Winplot".

Análise à priori

Havíamos feito uma análise à priori, buscando nos cercar das inúmeras situações envolvidas na aplicação desta atividade. Levantamos as dificuldades conceituais em torno da noção de funções que podiam aflorar, pois teoricamente o contato com funções quadráticas se dá no final do ciclo do ensino fundamental no atual 9º ano, antiga 8ª série e no início do ensino médio no 1º ano, além de ser tema recorrente em avaliações externa prova Brasil, SAEB e SARESP.

Outra possível dificuldade a ser encontrada, dizia respeito às variáveis envolvidas e suas relações de dependência, assim como suas representações gráficas.

Pretendíamos, também, apresentar a forma semi canônica do tipo $f(x) = a(x+k)^2$ e assim gerar conflitos com a representação usual, i.e., $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a ≠ 0.

Os aspectos norteadores da nossa análise do objeto matemático função quadrática foram:

- Observar e caracterizar cada uma das famílias de funções quadráticas;
- Escrever a expressão algébrica de cada atividade, não tendo preocupação com o software, por isso a digitação no "Winplot" foi facilitada;
- O protótipo fornecido em cada atividade devia servir de referência, para isto foi fornecido uma representação característica em cada arquivo utilizado;
- A interpretação do parâmetro "a" nas concavidades voltadas para cima e para baixo.
- A interpretação do parâmetro "k" na translação horizontal e seu sinal, para isto a parábola foi transladada no eixo das abscissas.

Esperávamos que os alunos encontrassem sérias dificuldades na interpretação de valores, tanto para não inteiros especificamente entre o intervalo de 0 a 1, como para valores positivos e negativos. Desta forma, deixamos por último a atividade com mudança gradual de valores do coeficiente "a".

Breve relato do desenvolvimento das atividades

Escola privada

Com o intuito de fazermos um aquecimento, antes da aplicação das atividades, promovemos um diálogo sobre os conteúdos trabalhados no 1º semestre, as dificuldades encontradas, aquilo que mais marcou e assim começamos a fazer uma sondagem e obviamente nos interessava uma discussão sobre as funções e especialmente as funções quadráticas, que era o foco do nosso trabalho. Deixamos claro que não era nosso objetivo a aprendizagem do manuseio do software educacional Winplot como um todo e sim aquilo que poderíamos prescindir dele para realizarmos nossas atividades.

Estruturamos a tarefa de tal forma que os dois grupos, cada um deles formados com três estudantes do 9º ano (8ª série) do ensino fundamental, deveriam seguir o rodízio abaixo.

Num primeiro momento, em cada grupo, duas delas permaneciam sentadas, uma delas digitava enquanto outra fazia as anotações, e a terceira em pé fazia registros escritos de tudo que percebia de relevante; com o rodízio, todas puderam experimentar as diversas funções.

A tarefa propiciou uma série de discussões e comentários sobre cada atividade; desta forma acabou sendo também um convite para *conjecturarem* a respeito de cada etapa. As discussões foram muito pertinentes. Tivemos o cuidado de convidar a direção e coordenação para verificarem a aplicação da tarefa; a diretora gostou muito e propôs uma divulgação da atividade realizada, com o Winplot, no Portal Educacional utilizado nesta instituição de ensino, e desta forma teria certa visibilidade do trabalho e ficou um interesse do uso desta ferramenta computacional para o próximo ano.

Outro aspecto importante é que nestes grupos, o conteúdo trabalhado não era novo, pois os estudantes já haviam estudado no 1º semestre deste ano, portanto foi possível *revisitar* esse conteúdo, *revendo* os elementos essenciais para a sua compreensão.

A comparação e a diferenciação dos processos com e sem a "ferramenta winplot" foram inevitáveis.

Os estudantes mobilizaram conhecimentos, tais como: funções do 1º e 2º graus (comparando-as nas preliminares da aplicação das atividades), simetria, zeros da função, ponto de vértice, concavidade e principalmente usaram a translação como um recurso na interpretação e esboço de funções quadráticas.

Facilidades e Dificuldades

Os estudantes registraram por escrito algumas de suas facilidades e dificuldades na realização das atividades. Os estudantes tiveram facilidade em fazer os gráficos, digitar os valores, em perceber a simetria da parábola e analisar as mudanças no gráfico e suas causas. As dificuldades encontradas estão mais relacionadas à utilização do software foram as seguintes: dificuldade em abrir os arquivos, aplicar os resultados no gráfico, usar o programa e o teclado (adaptação) e gravar as atividades (esquecimento).

Escola pública

A tarefa piloto foi realizada em uma escola estadual com a participação de 4(quatro) estudantes do 3º ano do Ensino Médio divididos em duas duplas, onde cada uma operou um micro computador do tipo Móvel/Portátil (Notebook), ambos equipados com sistema operacional Windows Vista Home Premium, o programa Winplot, o programa Auto Screen Record, para serem desenvolvidas as atividades.

É importante observar que o objeto matemático "função quadrática" faz parte do currículo da disciplina Matemática para alunos do 1º. Ano do Ensino Médio. Logo, este grupo já deveria ter conhecimentos prévios sobre essa função e suas propriedades. Foi uma oportunidade de revisitar uma noção recorrentemente os estudantes do ensino médio, em geral, apresentam dificuldades.

A dinâmica do piloto, por se tratar de um conteúdo matemático que os estudantes supostamente poderiam, pelo menos, foi disponibilizar uma ficha contendo os enunciados das atividades. Mas,

antes de digitar os dados na linha de equação e verificar o gráfico, pedimos aos estudantes que descrevessem como seria a representação da curva na tela do computador, essa dinâmica foi seguida para todas as atividades propostas na tarefa. Após a descrição do que seria representado na tela do computados os estudantes utilizavam o software para validar suas conjecturas e novamente pedíamos a eles descreverem na ficha o que aconteceu, i.e, tínhamos na ficha a descrição sem utilização do software e sua validação pelo mesmo.

As duas formas de tratar a tarefa estão associadas ao fato que supúnhamos que os estudantes pudessem pelo menos mobilizar os conhecimentos associados à noção de função quadrática, mas para os estudantes do 3º ano as atividades poderiam ser consideradas mais simples uma vez que devem ter revisitado essa noção nas séries anteriores o que não ocorre com os estudantes do 1º ano.

Referencial Teórico

A abordagem teórica de Robert (1997) em termos dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, ou seja, os níveis:: técnico, mobilizável e disponível.

- *Nível Técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa.
- *Nível Mobilizável* corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo quadro, podendo até corresponder a uma organização. O caráter *ferramenta e objeto* do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido.
- *Nível Disponível* corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contra-exemplos (encontrar ou criar), mudar de *quadro* (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Nesse nível o estudante dispõe de situações de referência que servem de terreno de experimentação.

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz à noção de quadro de Douady (1992). A seguir apresentamos a definição da noção de quadro.

> [...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais

> associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (Douady, 1992, p.135, apud Andrade, 2006, p. 14).

Considerações finais

Através da aplicação da atividade podemos dizer que o uso de tecnologia, como o software educacional "winplot", é bastante interessante no processo de ensino e aprendizagem, não apenas para a introdução de novas noções matemáticas, mas inclusive no que se refere à possibilidade de revisitar conceitos já estudados.

A tarefa proposta permitiu constatar que o uso de tecnologia, como o software educacional "winplot", torna mais eficaz o processo de ensino e aprendizagem, pois:

- Permite que o estudante tenha uma visualização das translações horizontal e vertical, das concavidades para cima e para baixo, atrelada à modificação do parâmetro correspondente da função quadrática;
- Aumenta a capacidade de análise do estudante, fato observado em decorrência de que com poucas inserções no software, para modificar um parâmetro específico, que provoca a mudança da representação gráfica da parábola, o mesmo já predizia a alteração de forma correta.
- Fomenta a discussão entre os estudantes, especialmente quando as predições eram discordantes, nesse instante, o argumento utilizado pelo estudante caracterizava-se pela forma sistemática de expressar-se dentro de uma linha de raciocínio lógica.
- Permitiu observar o rigor matemático praticado pelos estudantes de uma mesma escola, forçando a multiplicação do parâmetro por "zero" quando da inexistência do mesmo, em contraposição aos estudantes da outra escola que simplesmente o desprezavam.
- Observamos também, a desenvoltura que o estudante vai adquirindo no decorrer da atividade, fato confirmado pela medição dos tempos para atingir uma inserção, obtidas das gravações das telas de toda a tarefa.

- A mudança de postura do professor é um aspecto que tem que ser ressaltado, pois não precisa fazer as representações no quadro trocando essa atividade pelo dialogo com os estudantes podendo por meio de questionamentos de ambos os lados obter uma melhor compreensão do objeto de estudo.

Referências bibliográficas

Andrade, S. N. (2006) *Possibilidade de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: A noção de função afim.* Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNICSUL.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. (PCN)*: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC.

Douady, R. (1984) *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.*Thèse de Doctorat, Paris: Université de Paris VII.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158.

Robert, A. (1997) Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université*. Actes de la IXième école d'été de Didactique des Mathématiques de Houlgate*, 192 – 211.

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN JAVA PARA LA REPRESENTACIÓN Y MANIPULACIÓN DE POLIEDROS EN EL ESPACIO

Salvador Lacaba Domínguez, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
salvador_lacaba@hotmail.com, vil@uaq.mx
Campo de investigación: Pensamiento geométrico Nivel: Medio

Resumen. *Una idea muy antigua, la de los cuerpos platónicos, ha sido trascendental en la historia de la ciencia y hoy en nuestros días se sigue utilizando por lo que no podemos dejar de presentarla a las nuevas generaciones. Sin embargo, en la actualidad en los colegios ante la Geometría hay una apatía y desgano en los alumnos, debido a la dificultad que se presenta en todos los niveles de la educación particularmente por la visualización que tienen que hacer sobre objetos y/o símbolos que éstos representan. Razón por la que es necesario abordar la enseñanza de la Geometría desde otras perspectivas, especialmente la referente al estudio de los cuerpos geométricos. Una opción es el desarrollo de aplicaciones informáticas (software) dirigidas al estudio de la Geometría del espacio de manera dinámica. Este software permite la ver en la pantalla de la computadora de los "objetos geométricos", como también permite manipularlos sin que éstos pierdan sus propiedades geométricas.*
Palabras clave: manipulación de poliedros, espacio, Java

Marco teórico

Desde su inicio, el hombre ha hecho uso de las figuras para representar su conocimiento. Así es como una idea muy antigua, de más de cuatro mil años, la de los Cuerpos Platónicos llega hasta nuestros días, recibiendo este nombre porque Platón en su diálogo "Timeo", explica la construcción del universo, estableciendo una asociación entre los poliedros regulares y los elementos fundamentales que ellos reconocían; tierra con el hexaedro (cubo), aire con el octaedro, fuego con el tetraedro, agua con el icosaedro y éter con el dodecaedro. (Platón, 1989, págs. 663 a 720)

También es el caso de Leonhard Euler que en 1750 publicó su teorema de poliedros, el cual indica la relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro, en caso de los conocidos como poliedros simples. En este teorema, concluye que sólo pueden ser cinco los sólidos regulares.

En 1596 Kepler publica un artículo titulado "El misterio Cósmico", donde creó un modelo del universo, en él muestra un cubo que tiene inscrito un tetraedro, que tiene inscrito un dodecaedro y este tiene inscrito un icosaedro y finalmente un octaedro inscrito en el icosaedro; todos estos

separados por esferas. Este modelo explicaba su teoría cosmológica, que procedía de la teoría de Copérnico de las órbitas circulares. (Extremiana, Hernández y Rivas, 2004)

Es así que los cuerpos platónicos han obtenido un lugar trascendente en la historia de la Ciencia y la Filosofía. Motivo para presentarlos a las nuevas generaciones ya que por un lado significa cultura mientras que desde el punto de vista académico permite una mejor comprensión de la matemática y las ciencias.

Sin embargo, en las escuelas la dificultad de estudiarlos es patente, dificultad ocasionada en parte por los procesos de visualización y de representación de los objetos geométricos. La visualización es ir más allá del simple ver u observar una figura, es ser capaz de abstraer elementos e información de lo que se está viendo de allí su importancia en el estudio. Duval dice:

> Visualizar es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuvieran realmente delante de los ojos. La visualización debe pues distinguir e identificar, al primer vistazo (aprehensión vivida como inmediata) sea de un único vistazo (aprehensión simultánea) lo que está representado. (Duval, 2003, pág. 44)

Gregoria Guillen Soler (2005), de la Universitat de València en España, con su grupo de investigación, situados en marco del modelo Van Hiele, realizan una serie de clasificaciones de los sólidos para la enseñanza de la geometría. Éstas son por; sus particiones, sus jerarquías, criterios de construcción y analogías. Siendo su trabajo un ejemplo de lo realizado con poliedros y la visualización con el enfoque de Duval.

Desarrollo

Es necesario abordar la enseñanza de la Geometría desde otras perspectivas, especialmente la referente al estudio de los cuerpos geométricos, que realmente muestren un camino o cultiven en los alumnos las ganas de buscar el conocimiento y la cultura y así, “lograr develar a sus ojos la luz de la curiosidad”.

Una opción es el uso de aplicaciones informáticas como es el uso de software, dirigido al estudio de la Geometría del espacio de manera dinámica, es decir, el desarrollo de Software para

Geometría Dinámica (SGD) en el espacio. Este tipo de software permite de una forma lúdica poder manipular las figuras y obtener una mejor visualización de éstas. Tomando la idea de visualizar de Duval. Permite ver en la pantalla de la computadora los "objetos geométricos", pero también permite manipularlos por medio del ratón y sin que éstos pierdan sus propiedades geométricas. Considerando que esta es una herramienta que puede explotase dentro y fuera de una institución académica, pues puede ser instalada en sus computadoras o todavía mejor, en una página web para el aprovechamiento de todos.

En función de lo anterior, proponemos el desarrollo de la aplicación en Java, pues este es un programa muy portable, ligero y del reconocimiento de los navegadores del Internet. Ésta herramienta es usada en la programación web para el manejo tanto de base de datos como software educativo que lleve una programación que presente movimiento o permita la elaboración de cálculos.

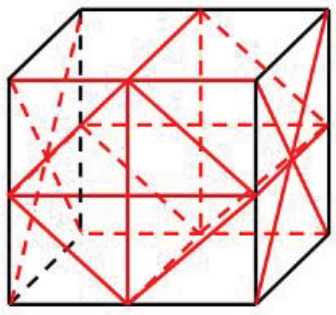
Para poder trabajar en el destazamiento y manipulación de los cuerpos, usaremos como herramienta principal la simetría de los cuerpos y de esta forma obtener una mejor visualización de sus propiedades y características. Dentro de las clasificaciones que realiza Guillen nuestros destazamientos corresponden a clasificar por particiones.

Mostraremos a manera de ejemplo, el caso del hexaedro:

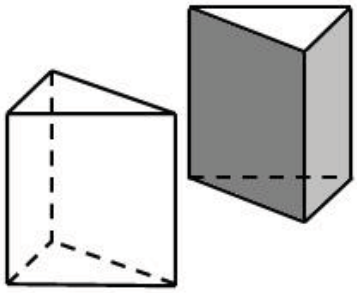
Para realizar el destazamiento de los cuerpos, primeramente hay que ubicar en ellos algunos planos que crucen por algunos de sus ejes de simetría.

Posteriormente se realizan cortes con el objetivo de visualizar los cuerpos platónicos y las figuras que de ellos se generan.

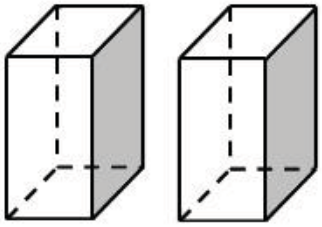
Veamos el hexaedro o cubo con planos cruzando sus ejes de simetría: horizontal, vertical, sus diagonales y sus puntos medios.



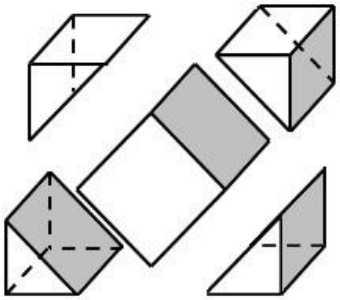
Destazamiento realizado por el corte de un plano que cruza al hexaedro, pasando por sus diagonales de la cara inferior y superior del vértice posterior izquierdo, al vértice frontal derecho. De este destazamiento se obtiene dos prismas triangulares. En ellos encontraremos que el área de la base de cada uno son la mitad del área del hexaedro, también se puede calcular los volúmenes de los prismas.



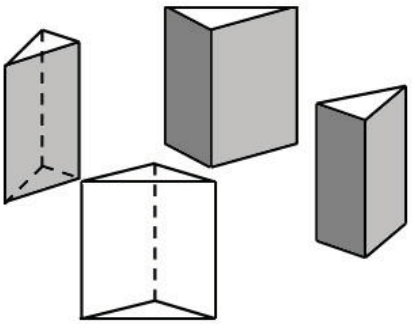
Destazamiento por un plano que cruza al hexaedro por los puntos medios de las caras superior, anterior, inferior y posterior. Se obtienen dos prismas rectangulares.



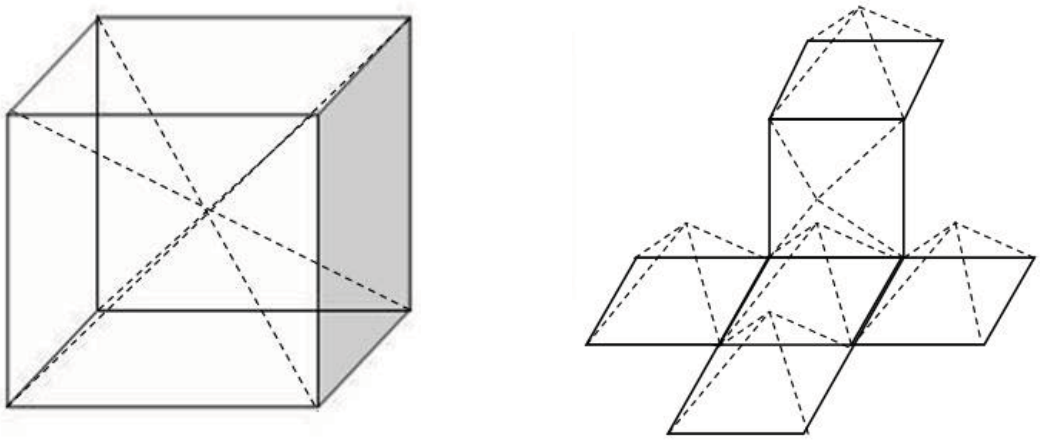
Destazamiento por cuatro planos que cortan al hexaedro al cruzar los puntos medios de las caras anterior y posterior. Éste nos permite obtener un hexaedro al centro y cuatro prismas triangulares.



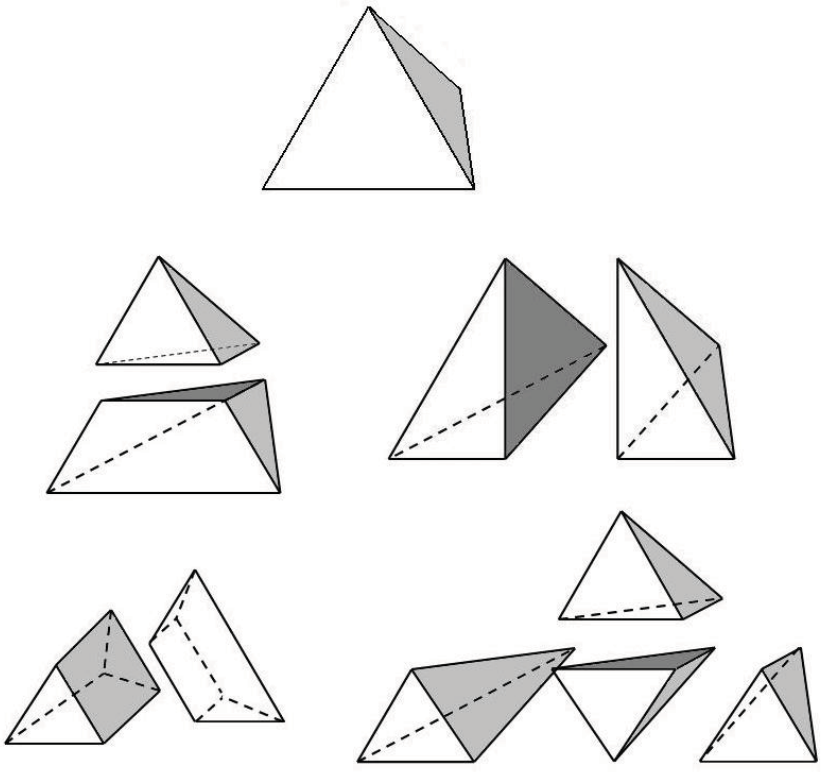
Destazamiento por dos planos que cortan al hexaedro en las diagonales de la cara superior e inferior. Forma cuatro prismas triangulares.



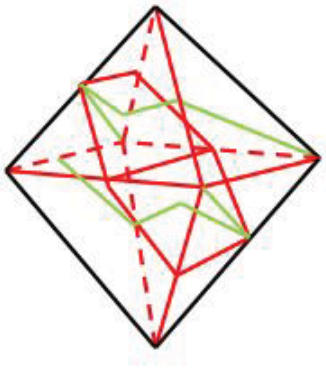
Destazamiento por dos planos que cortan al hexaedro por sus diagonales. Forma cuatro pirámides cuadrangulares.

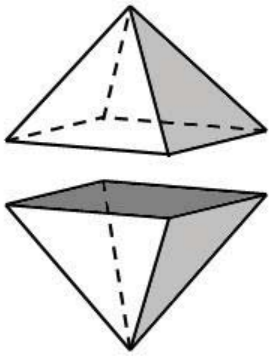


Al igual que en el hexaedro, podemos realizar destazamiento en el tetraedro a partir de sus ejes de simetría y de, el obtener otros cuerpos.

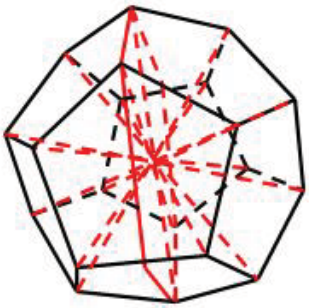


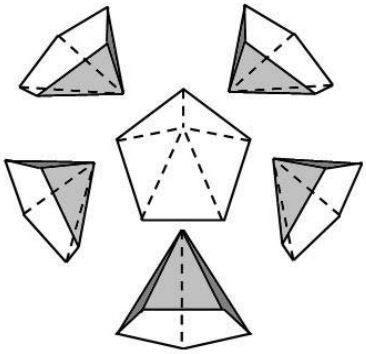
Aquí vemos ejes de simetría del octaedro y su destazamiento por un plano horizontal del que obtenemos dos pirámides de base cuadrangular.



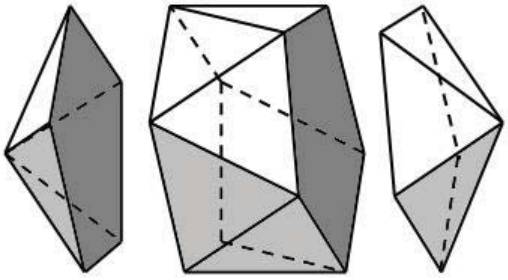


Estos son ejes de simetría del dodecaedro y un destazamiento por planos que parten de los vértices de los pentágonos al interior del cuerpo. Se forman doce pirámides de base pentagonal.





El icosaedro y su destazamiento por medio de dos planos que cortan a cinco triángulos que se unen en un mismo vértice. Forma dos pirámides con base pentagonal y un antiprisma con base pentagonal (en lugar de rectángulos son triángulos equiláteros y las bases son pentágonos con un desfase en cada vértice).

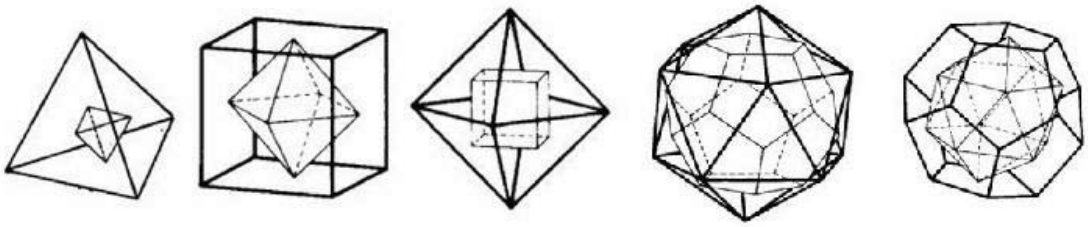


Conclusión

Este proyecto tiene por principio una las ideas más antiguos de la humanidad: los cuerpos platónicos y por otro lado, el mostrar sus propiedades con el uso de una herramienta de las más recientes creadas por el hombre como lo es la computadora, particularmente el empleo de un software cuyo uso didáctico enriquece la enseñanza de la matemática en este aspecto a través de una visualización de los cuerpos.

Como hemos presentado a partir del destazamiento de los cuerpos platónicos, podemos obtener otros cuerpos geométricos, al ser cortados por medio de planos pasan por puntos de simetría de los cuerpos originales, que se pueden estudiar para abarcar más cuerpos y no solo los platónicos.

Aún más asombroso es lo que se conoce como la dualidad de los cuerpos platónicos, en donde encontramos que el tetraedro se inscribe en sí mismo, el octaedro y hexaedro se inscriben mutuamente tal como es el caso del icosaedro con el dodecaedro. En todos para obtener la figura inscrita es a partir del uso los centros de las figuras planas que generan los cuerpos platónicos, como vértices de los cuerpos inscritos. Correspondería a una clasificación por sus criterios de construcción y analogías, según Guillen.



Realizar todos estos destazamientos en modelos físicos sería una inversión de tiempo, materia prima para el docente y tiempo con las instituciones, en cambio con el empleo de software nos permite representar los modelos en la computadora, evitándonos la creación física de los cuerpos. El software por lo tanto, permite realizar estos procesos cuantas veces sea necesario además de la manipulación se da más fácil y su exploración permite ver mejor los cuerpos. De esta forma una figura que era un objeto seco para los jóvenes se vuelve algo animado y lúdico, ya que se utiliza una forma de comunicación para ellos cotidiana como lo es la visual que permite a través de una pantalla enriquecer la manipulación, volviéndose así, una experiencia didáctica para los jóvenes.

La herramienta propuesta permite al docente que el alumno visualice problemas prácticos, induciendo a los alumnos a planteamientos que lo hagan pensar y desarrollar sus habilidades.

Después de la manipulación del software se pueden plantear actividades como: solicitar al alumno generar una figura a partir de otra para crear un mueble, inmueble, escultura u otros y de esta forma, motivar y desarrollar su parte creativa.

Referencias bibliográficas

Coxeter, H. S. y Gretzer, S. (1993). *Retorno a la geometría*. Madrid, España: DLS-Euler Editores.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (págs. 41-76). México: Cinvestav y Fondo de Cultura Económica.

Extremiana Aldana, J. I., Hernández Paricio, L. J., y Rivas Rodríguez, M. T. (2004). *Poliedros*. Logroño, España: Depto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja.

Guillén Soler, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemética,* Volumen 17 (002), 117-152

Gutiérrez, Á. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Valencia: Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.

Platón (1989). *Diálogos*. México: Editorial Porrúa S.A.

PERSPECTIVA DE LAS TIC´S EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR EN AMÉRICA LATINA

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Los propósitos del presente grupo de discusión son:*
a) Analizar la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe, y la ubicación de las TIC, 10 años después de la Conferencia Mundial de 1998 (CMES-98) y la Conferencia Regional de la Unesco sobre políticas y estrategias para la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe (CRES-96), b) Identificar los aspectos que servirán como referentes o criterios para evaluar el impacto de las TIC en la educación superior de América Latina y el Caribe, c) Describir el impacto de las TIC en el contexto de cada centro de estudios y de cada país.
A partir de un documento base dónde se plasmaron los aportes de los profesores participantes, se elaboraron las conclusiones así como una propuesta de perspectivas a futuro.
Palabras clave: TIC, diseño, cooperación, articulación

Introducción

El avance de las TIC a nivel mundial nos ha llevado a reflexionar sobre la posición de América Latina. El propósito de acercar las nuevas tecnologías a todos los individuos a un precio y en plazos razonables significa un doble progreso que implica una accesibilidad competente, la cual está lejos de haber sido adquirida por todos en todas partes.

Es en este contexto donde los conceptos bien diferenciados: brecha digital y fractura digital, toman cuerpo. La f*ractura digital* designa múltiples desigualdades de acceso a las TIC, esto es: socioeconómicas, geográficas, etcétera, cada vez más profundas y que dan lugar a una dinámica perniciosa y la *brecha digital* designa las disparidades importantes de acceso y/o de uso.

Luego del ordenador personal, Internet, aun cuando tenga la reputación de ser una red mundial, no es compartida igualmente por todos: el acceso al ordenador supone como mínimo una accesibilidad competente, la cual está lejos de haber sido adquirida por todos en todas partes. La cuestión del acceso a Internet con muy fuertes disparidades entre los países del Norte y los del Sur, es uno de los elementos claves en cuanto a la ampliación de fractura digital. Las Naciones Unidas, y luego el G8 (conformado por Estados Unidos, Japón, Alemania Occidental, Italia, Francia

y el Reino Unido, Canadá y Rusia) han hecho suya la causa de la fractura digital y han abogado por la toma de acciones enérgicas en favor de los países del Sur. (Dupuy, 2007).

> "El acceso material a los equipamientos tecnológicos constituye el primer orden de la fractura digital, y es el más evidente. Sin embargo, disponer de tales equipos no garantiza su apropiación, o su uso, por parte de las personas concernidas. El aprendizaje, la motivación que requiere una práctica verdadera, suponen un bagaje cultural que no todos poseen. Es la fractura digital de segundo orden." (Dupuy 2007, p. 117)

En América Latina, el uso de las TIC es un tema controversial y de larga data. En nuestra opinión, la fractura digital de segundo orden, en los términos de Dupuy, está estrechamente vinculada a los procesos educativos. Los estudios realizados por la UNESCO establecen que los docentes en ejercicio necesitan estar preparados para ofrecer a sus alumnos oportunidades de aprendizaje apoyadas en las TIC; para utilizarlas y para saber cómo éstas pueden contribuir al aprendizaje, capacidades que actualmente forman parte integral del catálogo de competencias profesionales básicas de un docente. Tanto los programas de desarrollo profesional para docentes en ejercicio, como los programas de formación inicial para futuros profesores deben comprender, en todos los elementos de la capacitación, experiencias enriquecidas con TIC. Los estándares y recursos del proyecto "Estándares UNESCO de Competencia en TIC para Docentes" (ECD-TIC) ofrecen orientaciones destinadas a todos los docentes y más concretamente, directrices para planear programas de formación del profesorado y selección de cursos que permitirán prepararlos para desempeñar un papel esencial en la capacitación tecnológica de los estudiantes. (UNESCO, 2008)

Objetivos

Los propósitos del presente grupo de discusión son:

- Analizar la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe, y la ubicación de las TIC, 10 años después de la Conferencia Mundial de 1998 (CMES-98) y la Conferencia Regional de la Unesco sobre políticas y estrategias para la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe (CRES-96)

- Identificar los aspectos que servirán como referentes o criterios para evaluar el impacto de las TIC en la educación superior de América Latina y el Caribe
- Describir el impacto de las TIC en el contexto de cada centro de estudios y de cada país.

Desarrollo

El grupo discusión estuvo conformado por docentes de la Universidad de San Pablo (Brasil), Universidad Autónoma de Querétaro (México), Universidad de Salamanca (España), Universidad Rey Juan Carlos e IES Joaquín Araujo (España), Universidad Pontificia Comillas (España), Universidad Politécnica de Madrid (España), Universidad Tecnológica Nacional (Argentina).

Se contó con dos encuentros de dos horas.

El primero de ellos tuvo dos etapas. La primera estuvo destinada al análisis de las TIC según la Declaración Mundial sobre la educación superior en el Siglo XXI de 1998, que tuvo su origen en la CMES-98, y CRES-96; y las 13 recomendaciones para mejor aprovechamiento de las TIC, que se elaboraron en el marco de la CMES-98 y la CRES-96. La segunda estuvo destinada al análisis y discusión respecto del Informe sobre la educación superior en América Latina y el Caribe 2000-2005, el cual describe de manera exhaustiva el impacto producido por tales recomendaciones.

El segundo de los encuentros estuvo destinado a describir el impacto de las TIC en el contexto de cada centro de estudios y de cada país, a partir de una propuesta de trabajo con la cual se pretendió organizar los cometarios y reflexiones de los participantes.

Análisis de las TIC según la Declaración Mundial sobre la educación superior en el Siglo XXI y la Conferencia Regional de la Unesco sobre políticas y estrategias para la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe

En la Declaración Mundial sobre la educación superior en el Siglo XXI, aprobado por la CMES-98 y los documentos de la Conferencia Regional de la Unesco sobre políticas y estrategias para la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe (CRES-96), la información que aparece en relación con las TIC se refiere a dos tipos de aspectos: las nuevas oportunidades

que ofrecen las TIC para la educación superior y algunas recomendaciones para que se hagan realidad esas oportunidades. (Tünnermann, 1996 y 2008; UNESCO, 1998 y 2008)

En cuanto al primer aspecto, en el documento de la CMES-98 se afirma que las TIC facilitan la configuración de una educación superior orientada al aprendizaje durante toda la vida; esto es, brindan la oportunidad de ampliar el proceso de la educación superior en muchos sentidos. Es decir, el uso de las TIC se identifica como un elemento que posibilita de manera directa tres de estos retos: acceso, diversificación y capacitación de profesores, lo cual no va en detrimento de que produzca un impacto favorable frente a los otros retos mencionados. En cuanto al segundo grupo de aspectos, que se refiere a las recomendaciones realizadas, las cuales se refieren a dos niveles: un nivel general, que se identifica con los gobiernos de los países y con el sector privado, y un nivel particular, que se refiere al sistema de educación superior y más concretamente a las instituciones. Las recomendaciones dirigidas a los gobiernos y el sector privado pueden interpretarse como una sola: garantizar el acceso equitativo a las tecnologías de la información y la comunicación, no solamente en lo que toca a la educación superior, sino en todo nivel educativo. Esta sugerencia implica: procurar un nivel de infraestructura informática suficiente, un buen nivel de redes de comunicación, buenos servicios informáticos y la capacitación adecuada de las personas para hacer efectivo su trabajo con las TIC. Es decir, se refiere este aspecto al concepto de alistamiento digital. El nivel particular de las recomendaciones no excluye la anterior. Las instituciones de educación superior deben hacer lo que esté de su parte para asegurar buenos niveles de alistamiento digital, en lo que toca a la igualdad de oportunidades para acceder a las tecnologías; en lo que toca a la cooperación internacional para facilitar el acceso a las infraestructuras tecnológicas y en lo relacionado con la cooperación internacional para difundir las TIC en toda la sociedad.

Recomendaciones para el mejor aprovechamiento de las TIC

Tales recomendaciones, incluyeron pautas muy precisas sobre que acciones se debían seguir, en los dos niveles mencionados. De modo resumido, detallamos tales pautas:

1. La construcción de redes de comunicación.
2. La realización de transferencias tecnológicas.

3. La formación de los profesores en el uso de TIC y en competencias docentes.
4. La elaboración de materiales didácticos.
5. El intercambio de experiencias de aplicación de las TIC a la enseñanza o a la formación o a la investigación.
6. La creación de entornos pedagógicos de calidad, que respeten las identidades culturales y sociales, para salvar las distancias; estos entornos pueden ir desde la educación a distancia, hasta los sistemas virtuales de enseñanza.
7. Aprovechar las posibilidades que ofrecen las TIC a la educación.
8. Hacer todo lo posible para que haya igualdad de oportunidades para la producción de recursos informáticos para la educación.
9. Adaptar las TIC a las necesidades locales.
10. Adaptar las reglas de acceso para que sigan siendo equitativas según evolucione la sociedad de la información.
11. Adaptar las estrategias para asegurar la calidad a la evolución de la sociedad del conocimiento
12. Adaptar las reglas de acceso para que sigan siendo equitativas según evolucione la sociedad de la información.
13. Utilizar las TIC para modernizar el trabajo, en lugar de que las TIC transformen lo real en virtual.

Informe sobre la educación superior en América Latina y el Caribe. 2000 – 2005

Uno de los puntos centrales del informe está referido a la selección de elementos para *describir la brecha digital y el alistamiento digital en América Latina y el Caribe*. Se explica que la brecha digital se presenta en dos niveles diferentes, uno de ellos entre sociedades; es decir, la brecha que se genera entre los países por las diferencias en los ingresos que da una mayor o menor capacidad tecnológica y de formación, además de lo que tiene que ver con políticas de gobierno. El segundo nivel reside en la brecha que existe dentro de una misma sociedad entre las personas, ya sea por

diferentes niveles de formación, por género, por edad (problema generacional), por ubicación (rural o urbana), por ingresos, por idioma, etc. De esta manera, la brecha digital causa una desigualdad en las posibilidades de los países y de los particulares para acceder a la información, al conocimiento, a la educación y al mundo laboral, entre otros. Diferentes organizaciones se han puesto en la tarea de generar indicadores que permitan medir de alguna manera la brecha digital. La Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT) definió el Índice de Acceso Digital (IAD) con el fin de considerar en un solo indicador, la infraestructura y el factor de la educación de la población. De esta manera se puede constatar la capacidad de los particulares para hacer uso de las TIC y tener una mejor percepción de la realidad que la obtenida al medir la brecha digital solamente desde el punto de vista de infraestructura.

El IAD se basa en cuatro factores: infraestructura, accesibilidad, conocimiento y calidad. Permite clasificar a los países en función del acceso a las TIC en cuatro niveles: elevado, medio alto, medio bajo y bajo. El rango va de cero a uno. La mayor capacidad de acceso se indica con uno y la ausencia de capacidad se expresa con cero. (ver gráfico 1)

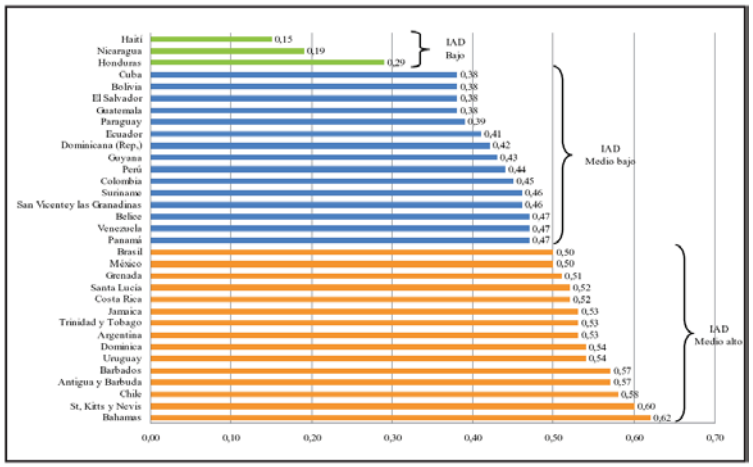


Gráfico 1. IAD de los países de América Latina y el Caribe.

Cabe señalar que otras organizaciones estudian la brecha digital no simplemente con la información del número de servidores, de computadoras, sitios de Internet y teléfonos móviles en el país, sino que incorporan, entre otros elementos, la capacidad de los ciudadanos de utilizar la tecnología hábilmente, la transparencia de sus negocios y sistemas legales y la medida en que los gobiernos fomentan el uso de las tecnologías.

Un estudio, a nuestro juicio, muy relevante, analiza la brecha digital, tomando variable como fundamental, el ancho de banda. Para el caso concreto de América Latina, aunque se registra un aumento respecto de la última década, se sigue teniendo una capacidad muy baja: el ancho de banda de la región representa el 12% del total mundial, mientras que Europa representa el 72%, Asia el 35% y Estados Unidos y Canadá el 21%.

Otro aspecto importante, que se aborda en el informe, está referido a *la virtualización de la educación en América Latina y el Caribe.* En los últimos años del siglo pasado se produjo la convergencia de factores considerados fundamentales: cualitativa (banda ancha) y cuantitativa (número de usuarios), en el acceso a Internet. Este momento marcó un cambio importante en las posibilidades de uso de las TIC en procesos educativos en la región. A partir de entonces se crearon condiciones para superar el simple uso de herramientas digitales en docencia, generalmente basado en los mismos textos utilizados en el caso presencial, o en algunas funciones administrativas, y comenzar a utilizar plataformas virtuales para digitalizar e integrar muchas más funciones (docencia, investigación, administración, extensión) que permiten una mayor actividad digital (teleconferencias, videochat, etc.), e incluso llegar a renovar las estructuras educativas. Es decir, se generaron condiciones para comenzar la virtualización de la educación.

No obstante, deben mencionarse algunos esfuerzos entre los países de la región para coordinar las actividades e iniciativas aisladas sobre las TIC entre los distintos agentes y autoridades involucrados, como la Agenda de Conectividad de las Américas, en el 2002, o el Plan de Quito, en el 2003, o el Plan de Acción Regional sobre la Sociedad de la Información en América Latina y el Caribe, eLAC, en el 2007.

Sin embargo, afirma Facundo (2005) que aún no parecen visualizarse ni los grandes cambios ni las grandes posibilidades de las TIC como herramientas pedagógicas para el mejoramiento de la calidad de la educación en cualquiera de las modalidades en que se apliquen, así como para extender el servicio educativo, que motiven el ajuste de la normatividad general existente en materia de educación superior. Esto sugiere que la ausencia de políticas a nivel nacional crea una especie de círculo vicioso: por un lado, no hay reglas claras y de fomento que sirvan para superar las posibles indecisiones causadas por incertidumbre que puedan aplazar la utilización decidida de las TIC por parte de las instituciones de educación superior de la región y por otro, la ausencia de este tipo de oferta frena la iniciativa de los gobiernos a pronunciar políticas que vayan más allá de

la instalación de infraestructura y fomente el desarrollo del tema. Una de las dificultades más sentidas a la hora de describir el panorama del uso de la tecnología en la educación superior de la región es la ausencia de procesos sistemáticos de recolección de información, ya sea por parte de los gobiernos o de instituciones especializadas, y de marcos metodológicos y conceptuales comunes que permitan la comparación de los resultados.

Una de las características fundamentales que se deben considerar para tener una percepción válida del uso de las TIC, es la cantidad de instituciones y programas que se ofrecen en esta modalidad, aunque también existen instituciones que, aunque no puede considerarse que ofrezcan cursos virtuales, utilizan las tecnologías de alguna manera para sus procesos educativos. El total llega al 6%. (Facundo, 2005)

Para completar el panorama hay que considerar la manera como ha ido evolucionando la educación a distancia de la región hacia la modalidad distancia/virtual, que actualmente representa la mayoría de la oferta. Un problema importante se encuentra en lo que tiene que ver con el acceso a Internet. La banda ancha es una condición necesaria tanto para ofrecer programas virtuales como para tomarlos. Al respecto es ineludible el apoyo gubernamental y los convenios internacionales. Los países que actualmente cuentan con un acceso adecuado para intereses educativos (Brasil, Chile, México, Argentina, Colombia, Uruguay, Bolivia y Paraguay) comenzaron su carrera por la banda ancha hace más de veinte años. Es interesante verificar cómo, en los países que se logra superar este aspecto, aparecen redes universitarias que potencian el desarrollo de la educación virtual, como es el caso de las redes Reuna y Conicyt en Chile, y las redes RNP y Remav en Brasil, Educared, Rred Telar, ORT, Programa integral para la igualdad educativa, en Argentina, que operan desde finales de los noventa.

Conclusiones

Sobre la base del aporte de los participantes se elaboró un documento base, cuyas conclusiones se detallan a continuación. Cabe destacar la valiosa contribución de los profesores Agustín de la Villa (Universidad Pontificia Comillas y Politécnica de Madrid), Gerardo Rodríguez (Universidad de Salamanca), Ana Belén Cabello (Universidad Rey Juan Carlos e IES Joaquín Araujo)y Félix Alonso

(Universidad Pontificia Comillas) en la elaboración de estas conclusiones, así como de las perspectivas a futuro.

Respecto de la utilización de recursos didácticos, la utilización de CAS es el elemento con mayor concenso (en especial Mathematica, Geogebra y DERIVE, aunque en menor grado Matlab y Cabri). Las pizarras interactivas, en general, no se utilizan; y los recursos en línea, solamente como refuerzo de los conceptos de las respectivas asignaturas.

Por otra parte, los profesores de las Universidades españolas, a partir de su propia experiencia como participantes de los proyectos europeos XMath, European data base of e-learning modules (DMath) y European Virtual Laboratory Mathematics (EVLM), remarcan la importancia de la participación en proyectos internacionales con propósitos tales como promover la enseñanza virtual en Matemáticas, ofrecer soluciones a diferentes grupos interesados (target groups) y ayudar a los profesores y educadores, potenciar las habilidades en el uso de los entornos e instrumentos educativos más avanzados, ayudar al desarrollo y creación de materiales educativos en formato electrónico, ofrecer consultoría acerca del uso del material existente, ofrecer un espacio para compartir los recursos de la enseñanza virtual a través del portal del EVLM. Una sólida infraestructuras de comunicaciones entre países es decisiva a la hora de construir una red educativa de calidad.

Respecto de la formación de los docentes en el uso de TIC, los participantes coinciden en que desde un comienzo fueron autodidactas y poco a poco se fueron configurando programas de formación, que actualmente representan un importante porcentaje de la oferta virtual. Pero este esfuerzo parece no haber tenido los efectos esperados, porque no se ha verificado un verdadero cambio cualitativo en las instituciones de educación superior hacia la educación virtual.

Un último ítem estuvo referido al intercambio de experiencias. En pocos años han prosperado muchas iniciativas importantes al respecto: congresos y reuniones de carácter nacional o internacional, de instituciones de educación superior, de representantes de los gobiernos o de carácter mixto, dónde la preocupación por la calidad, por la cooperación, por la pedagogía, por el alistamiento, han sido grandes temas recurrentes en estos eventos.

En cuanto a las perspectivas a futuro, se llegó a las siguientes conclusiones:

- La implementación de una colaboración bilateral, en principio, en vistas a la firma de convenios entre instituciones que constituyan la base de acuerdos de cooperación.
- La creación de un grupo de las TIC en Hispanoamérica, con los propósitos básicos de acudir a las convocatorias de ayuda, la selección de contenidos donde la utilización de las nuevas tecnologías pueda ser más útil, la elección de los CAS más adecuados, sobre todo en el campo cada vez más amplio del software libre.

Referencias bibliográficas

Dupuy, G. (2007) La fractural digital hoy. *Ciencia, Tecnología y Sociedad, 9(3), pp. 115-133*

Facundo, A. (2005). *Antecedentes, situación y perspectivas de la educación superior virtual en América Latina y el Caribe*. Caracas: Iesalc/Unesco.

Tünnermann, C. (1996). *La Educación superior en el Umbral del Siglo XXI.* Caracas: Cresalc/Unesco.

Tünnermann, C. (2008). *UNESCO. La educación superior en: diez años después de la Conferencia Mundial de 1998*. Cali: Iesalc- Unesco.

UNESCO (1998). *World Conference on Higher Education in the XXI Century: Vision and Action.* Paris: UNESCO

UNESCO (2008) *Estándares de competencias en TIC para docentes.* Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/default.aspx

RESIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR A TRAVÉS DE TECNOLOGÍA

Cynthia Almazán Colorado, Landy Sosa Moguel
Universidad Autónoma de Yucatán México
almazan.cc@hotmail.com, smoguel@uady.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *Esta investigación tiene como propósito generar argumentos de presentación y justificación sobre la Serie de Taylor a través de su visualización con tecnología, con la intención de identificar los significados que los estudiantes construyen sobre la Serie. Se empleó como metodología la ingeniería didáctica en el diseño y experimentación de actividades, desarrolladas mediante calculadoras graficadoras. La perspectiva teórica de la génesis instrumental permitió explicar la integración tecnológica del estudiante para construir conocimiento matemático. Se reportan los aspectos del análisis preliminar y del análisis a priori, a partir de los cuales se diseñaron las actividades, así como los principales argumentos generados por los estudiantes y los significados que le asignaron respecto a la Serie de Taylor.*
Palabras clave: argumentación, Serie de Taylor, pensamiento variacional

Problemática

Al realizar un cambio en la presentación de un objeto matemático, digamos un tratamiento didáctico a través de un medio tecnológico surge un fenómeno didáctico llamado transposición informática, en el que las transformaciones que sufre el saber al introducir instrumentos tecnológicos en su tratamiento pueden dotarlo o hacer que pierda significados (Balacheff, 1994, citado por Contreras y Ortega, 2003). Siendo éste el fenómeno de estudio del presente trabajo, el objetivo fue generar argumentos de presentación y justificación, mediante la visualización de la Serie de Taylor a través de tecnología. La intención fue, identificar cuáles son los significados que construyen los estudiantes de nivel educativo superior sobre la Serie de Taylor al interactuar con un medio tecnológico.

Se partió de la hipótesis de que a través de actividades de visualización, es posible que un estudiante genere argumentos visuales y discursivos de la Serie de Taylor, mediante la integración de una calculadora gráfica como un instrumento de aprendizaje.

La aproximación teórica de la Génesis Instrumental favoreció entender la forma en que el artefacto tecnológico, a saber calculadoras graficadoras, van siendo incorporadas por el estudiante en la construcción de un conocimiento matemático, convirtiéndolo en un instrumento de aprendizaje que media su actividad y lo incorpora orgánicamente para hacer matemáticas

(Briseño, 2008). Es decir, se consideró que en la construcción de conocimiento a partir de una actividad matemática resuelta a través de un medio tecnológico, el estudiante debería incorporar dos procesos: 1) de conocimiento y manejo del artefacto tecnológico (instrumentación) y 2) de adquisición de esquemas de acción sobre el artefacto (instrumentación), mediante una interacción bidireccional estudiante-calculadora, calculadora-estudiante.

Metodología

Consideramos un diseño experimental para verificar nuestra hipótesis y, para ello, utilizamos la ingeniería didáctica, tanto como metodología para el diseño de actividades, como para su implementación y análisis de resultados. A continuación se presentan algunos datos de lo realizado u obtenido en cada fase de la metodología.

Análisis preliminar

Aspectos didácticos. En el trabajo de Marcolini y Perales (2005) se menciona que coexisten dos modelos didácticos respecto al tratamiento de la Serie Taylor, uno es sugerido por los trabajos de Newton, Euler y Laplace, entre otros, donde la expresión de la Serie lleva consigo un significado perteneciente a las ciencias experimentales, y que se introduce mediante una construcción natural para gran variedad de problemas. El otro se desprende de los trabajos de Cauchy, donde las series son el resultado más de la teoría, una consecuencia del concepto límite y del Teorema Fundamental del Cálculo. Bien sabemos que el segundo esquema es el que predomina en la enseñanza actual, mientras que el primero aunque se usa en varios contextos, no es contemplado en los temas que se imparten en la enseñanza universitaria. Estos autores afirman que para realizar un cambio en la presentación de la Serie de Taylor se requiere centrarse en las ideas propias de su génesis y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Aspectos epistemológicos. Desde la perspectiva de Cantoral (2001) la idea germinal que destaca en esta Serie es la noción de predicción de los fenómenos naturales de flujo y lo analítico en el Cálculo, en su trabajo se mencionan ocho modelos de lo analítico de los cuales nos hemos centrado en tres modelos para la realización del diseño experimental:

Modelo de regularidad binomial

Se caracteriza por percibir y utilizar una regularidad en los desarrollos binomiales y centra su atención en su semejanza operativa con los números y magnitudes variables.

Modelo de predicción paramétrica

Radica en la determinación del estado futuro (estado vecino) con la información del estado actual (estado facto). De modo que, si conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino con la ayuda del método de los incrementos finitos.

Modelo de aproximación polinomial

Se caracteriza por reducir el cálculo de la función al cálculo de polinomios. Para ello se construye una sucesión de éstos que converja a la función determinada y que hereden el comportamiento puntual de la función, para lo que también se estima el margen de error.

Como se mencionó, se pretendió generar argumentos sobre la Serie de Taylor de modo tal que en cada argumento se trabaje un modelo de la analiticidad y ciertas estrategias variacionales, con el fin de construir diferentes significados sobre la Serie. Particularmente se tuvieron en cuenta tres tipos de argumentación visual:

- *Argumento geométrico-numérico.* Relacionado con la estrategia de diferencias finitas de variables, consiste en aproximar y estimar numéricamente un valor específico a partir de la determinación geométrica de incrementos y decrementos de las variables.

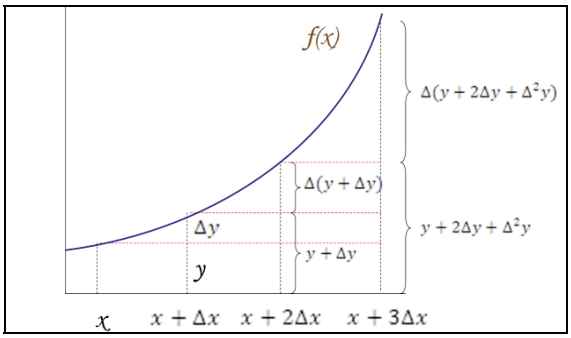


Imagen 1- Argumento geométrico-numérico

- *Argumento algebraico.* Consiste en que a partir de la determinación algebraica de incrementos de las variables y la identificación de un patrón binomial es posible aproximar y estimar numéricamente un valor específico. Véase la siguiente tabla:

Cambio en x	Cambio en y	
x	y	y
$x + \Delta x$	$y + \Delta y$	$y + \Delta y$
$x + 2\Delta x$	$(y + \Delta y) + \Delta(y + \Delta y)$	$y + 2\Delta y + \Delta^2 y$
$x + 3\Delta x$	$(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)$	$y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$
⋮	⋮	
$x + n\Delta x$	$y + n\Delta y + \frac{n(n-1)\Delta^2 y}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y}{2 \cdot 3} + \cdots$	

Tabla 1- Argumento algebraico

- *Argumento algebraico-gráfico.* Por medio de la representación gráfica de operaciones algebraicas se pueden aproximar funciones polinomiales.

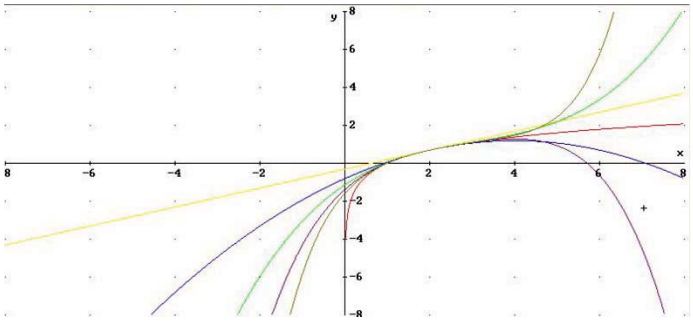


Imagen 2- Argumento algebraico-gráfico

Análisis a priori

El diseño consistió en cuatro ejercicios nombrados con una palabra clave:

1) *Ejercicio del "Cohete".* Residió en el análisis de la posición de un cohete en función del tiempo, se efectuaron preguntas sobre la variación y el comportamiento gráfico y en algunas ocasiones, se vio la necesidad de predecir estados inmediatos (anteriores o posteriores) a partir de datos iniciales.

Este ejercicio tuvo dos intenciones: i) inducir la instrumentalización de la calculadora, y ii) acercar a los estudiantes nociones y estrategias variacionales asociadas a la Serie de Taylor, por ejemplo, la predicción y la estrategia de diferencias finitas de variables.

2) *Ejercicio de la "Partícula".* Consistió en solicitar al estudiante estimar la posición de una partícula en movimiento en el tiempo $t = 4$, sabiendo que su trayectoria sigue el comportamiento $S(t) = \sqrt{t}$ y que $S(4) = 2$.

3) *Ejercicio de las "Diferencias". Se solicitó a los estudiantes completar un arreglo de diferencias finitas de variables y proponer un método general para predecir valores.*

4) *Ejercicio de los "Polinomios". Se le presentó a los estudiantes un conjunto de polinomios y se les demandó construir con ellos, una función que se aproxime a* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ *en el punto* $a = 1$.

La intención de los ejercicios 2, 3 y 4 fue: i) inducir la instrumentación tecnológica en el estudiante, y ii) generar argumentos sobre la Serie de Taylor. La idea es que en cada ejercicio se genere un argumento y se trabaje con un modelo de analiticidad de la Serie de Taylor: "Partícula", argumento numérico-geométrico y modelo de predicción paramétrica; "Diferencias", argumento algebraico y modelo de regularidad binomial; "Polinomios", argumento gráfico-algebraico y modelo de aproximación polinomial.

Experimentación

Para la implementación de las actividades experimentales, se trabajó con un grupo de 6 jóvenes universitarios de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, con edades entre 19 y 20 años y con tres cursos de cálculo aprobados, es decir, tenían conocimiento de los tipos de funciones, de funciones en serie, del concepto derivada y de gráficas de funciones. Cada estudiante dispuso de una calculadora graficadora durante una semana de práctica para su manejo.

Análisis a posteriori

En esta etapa se analizaron los resultados obtenidos de la experimentación y se contrastaron con los resultados que se esperaban del análisis a priori, los cuales se presenta brevemente en el siguiente apartado.

Resultados y discusión

De los resultados obtenidos hemos rescatado dos elementos importantes:

1) Los argumentos generados asociados a la serie de Taylor
2) Los significados construidos mediante los argumentos

Describimos algunos argumentos brevemente:

Argumento geométrico-numérico (ejercicio de la "Partícula"). Al tratar de predecir la posición de la partícula en el tiempo $t = 4$, un estudiante construyó un método que puede ser utilizado para predecir la posición en cualquier instante de tiempo mediante la siguiente gráfica:

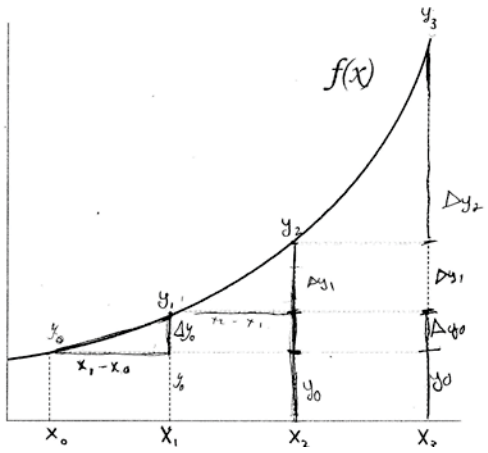


Imagen 3- Argumento geométrico de la Serie de Taylor generado por un estudiante

Por ejemplo, para predecir la posición de x_2 conociendo la posición de x_0, este estudiante construyó la siguiente expresión: $y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2$

Nótese que en su desarrollo se aprecia el empleo de la estrategia de *diferencias finitas de variables*, la expresión anterior se encuentra en términos de la primera diferencia. Esto lo podemos expresar de otra forma. Observando la gráfica se puede decir que $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Entonces:

$$\Delta y_1 = \Delta(y_0 + \Delta y_0) = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \qquad (1)$$

Análogamente, observando en la gráfica podemos expresar y_2 como:

$$y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

Entonces:

$$\Delta y_2 = [\Delta(y]_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) = \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \qquad (2)$$

Por tanto, sustituyendo (1) y (2) en la construcción del estudiante tenemos:

$$y_2 = y_0 + \Delta y_0 + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0)$$

$$y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

Si se extiende este procedimiento y se realizan los cambios de variable necesarios, se obtiene la Serie de Taylor.

El significado que los estudiantes construyeron sobre la Serie de Taylor en este ejercicio alude al uso de la Serie como una herramienta para predecir un valor mediante su aproximación con incrementos finitos de los valores de la variable en juego, también se entendió la serie como un proceso para estimar variaciones.

Argumento gráfico-algebraico (ejercicio de los "Polinomios"). Se generaron dos tipos de resultados concernientes a la noción de "aproximación" que cada estudiante concibió.

1) Aproximación puntual. Algunos estudiantes se dieron a la tarea de realizar una aproximación de la función $f(x)$ específicamente en el punto $x_0 = 1$.

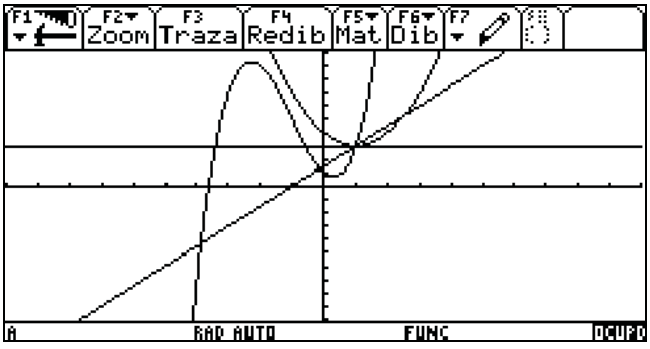


Imagen 4- Aproximación puntual

2) Aproximación global. Otros estudiantes realizaron una aproximación global, es decir, intentaron construir una expresión polinomial cuya gráfica fuera casi la misma que la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

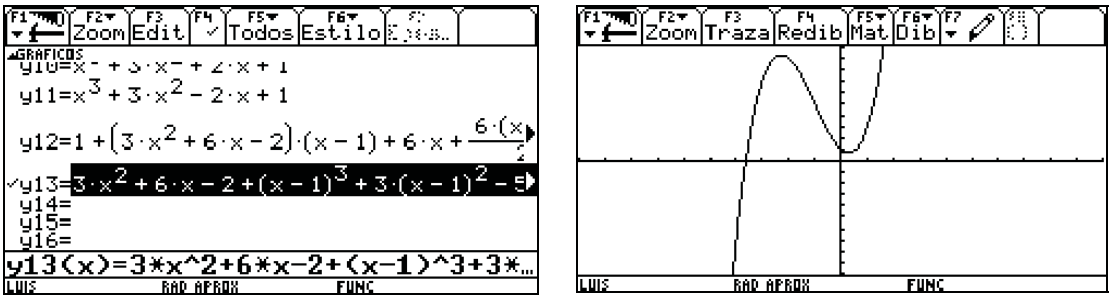


Imagen 5- Aproximación global

Es posible que parezca que estos procesos fueron realizados "al tanteo", pero en ellos intervienen varias estrategias para construir con éxito la función correcta, como la *integración de registros de representación* que se observan al elegir adecuadamente los polinomios de manera algebraica, mirar su efecto en el *comportamiento de su gráfica* y regresar al registro gráfico para modificar parámetros hasta obtener la aproximación más precisa. El significado inmerso en este ejercicio fue concebir la Serie como una *aproximación polinomial*. Es decir, las ideas y significados que los estudiantes construyeron sobre la Serie de Taylor en este ejercicio fueron que la Serie es una función cuya gráfica representa una operación de funciones de diferentes grados y comportamientos con una tendencia en común (polinomial), con lo cual es posible aproximar funciones de manera puntual y global por medio de la suma deliberada de polinomios.

Conclusiones

Para resignificar la Serie de Taylor es importante abordarlo desde la perspectiva de su génesis y poner en juego estrategias y nociones variacionales tales como: diferenciación finita de variables, noción de variación, tránsito entre registros de representación, entre otras, en situaciones de variación en las que se requiere predecir o aproximar un valor.

Considerando esos aspectos, la integración de la calculadora graficadora en la práctica del estudiante favoreció la visualización de la Serie de Taylor y formas de pensamiento y lenguaje variacional, permitiéndole tener una visión global y local (tanto cualitativa como cuantitativa) de

las gráficas que utilizaban y transitar entre diferentes registros de representación. A su vez, esto propició que para los estudiantes la Serie representara algo más que la combinación de variables y constantes en una expresión analítica, resignificando la Serie en tanto una representación de un polinomio con cierto comportamiento gráfico, como una relación entre diferencias sucesivas o concibiéndola como una técnica para aproximarse a valores de una función o puntos de una curva.

En síntesis, el uso de la calculadora graficadora permitió a los estudiantes construir herramientas (nociones y estrategias), para responder a una tarea de predicción en la que se requería aproximarse al valor de la ordenada de una función conociendo ciertos valores iniciales, es decir, construir un conocimiento matemático referente a la Serie de Taylor.

Referencias bibliográficas

Briseño, E. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. y Ortega, M. (2003). *El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?*. Recuperado el 19 de octubre de 2008 de http://64.233.169.104/search?q=cache:WNZzGL_lDwJ:www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/acontrerasdoc.doc+transposicion+informatica&hl=es&ct=clnk&cd=6&gl=mx&client=firefox-a

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: análisis y propuesta didáctica para la educación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1), 25-68.

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL, UN ACERCAMIENTO VISUAL CON GEOGEBRA

Armando López Zamudio
C.B.T.I.S. No.94 México
larmandozam@hotmail.com
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Medio

Resumen. *La enseñanza del concepto de integral en la educación media superior es considerada clave del curso Cálculo Integral, de la Reforma Integral del Bachillerato como lo señalan los programas de estudio del bachillerato tecnológico SEP (2008). Los nuevos programas demandan una metodología centrada en el aprendizaje, donde los conocimientos previos deben ser el preámbulo para adentrarse al estudio de conceptos clave, por lo que es importante proponer actividades para abordar estos conceptos enmarcados en la metodología sugerida, tradicionalmente se privilegia el tratamiento algorítmico, sobre el conceptual. En este trabajo proponemos algunas actividades, la utilización del software GeoGebra de Hohenwarter (2008) y sus bondades visuales para equilibrar la situación, como un recurso didáctico que permite a los estudiantes de bachillerato apropiarse del concepto en cuestión. Daremos a conocer una experiencia empírico experimental con alumnos de bachillerato.*
Palabras clave: cálculo integral, GeoGebra, visualización, software educativo

Introducción

Un concepto fundamental del curso de Cálculo Integral es la noción Integral, este concepto suele introducirse en la enseñanza del bachillerato como la antiderivada o la primitiva de la derivada, desde este enfoque se privilegia lo algorítmico y los alumnos muchas veces saben integrar pero no comprenden que es la integral, ni cual es su utilidad. Con las nuevas calculadoras CAS o el software como DERIVE, MAPLE o MATEMATICA resolver una integrar es un asunto de dar algunos "teclazos", y un estudiante con acceso a ésta tecnología, tendrá resuelta la algoritmia involucrada en el cálculo de una integral. Pero, ¿contará con elementos conceptuales que le permitan discernir si los resultados emitidos por la calculadora o computadora son correctos, podrá realizar una adecuada interpretación?, ¿será posible revertir la situación? es decir, lograr que los estudiantes tengan una noción del concepto de integral, que sepan para que es útil, aunque la tarea de las técnicas de integración sea sacrificada y delegada en todo caso a un software. La propuesta de este trabajo es que nuestro objeto de estudio en un curso de cálculo integral, debe ser con una tendencia conceptual y no algorítmica, para ello utilizamos el software de Geogebra y su posibilidad de hacer geometría dinámica, además de practicar lo anterior mediante la

presentación de problemas que incluyan el contexto inmediato de los estudiantes. También es posible acceder a dichos conceptos mediante la explicación de fenómenos que se presenten en el entorno social y tecnológico del alumno.

Antecedentes

Cabañas y Cantoral (2006) señalan que: "suele introducirse el concepto de integral en la educación media superior como una forma de obtener el área y se fundamenta en una particular utilización del concepto de límite", expresan que: "esta forma causa dificultades cognitivas", diferentes estudios muestran que los estudiantes tienen dificultades para concebir los procesos de integración y que ellas se relacionan con un cierto desequilibrio entre el tratamiento conceptual y con el algorítmico pues se privilegia el tratamiento algorítmico, (Arcos Quezada, 2006; Cordero, 2003; Artigue 1998). Un estudio realizado en (Cordero, 2003) en el que se acude al empleo de marcos epistemológicos, modelos para la cognición y sobre los tratamientos didácticos para entender el patrón de construcción de la teoría de integración, encontró entre otras afirmaciones que: considerar al área bajo una curva como modelo geométrico de la integral en un ambiente de variación continua, *exige mover lo estático.*

De la propuesta

El presente trabajo propone una serie de actividades que consisten en medir el área por diferentes métodos de figuras geométricas (Triángulos, trapecios, rectángulos, semicírculos) tangibles, hechas en madera o acrílico. Para generar un conflicto cognitivo se pide el cálculo de áreas de figuras también tangibles como: sectores de áreas parabólicos, de una raíz cuadrada o de la función senx. En esta tarea se pide a los alumnos que planteen un problema contextualizado donde se involucre la figura geométrica de la cuál se desea obtener el área. Posteriormente se recurre al software GeoGebra a través una serie de actividades diseñadas, donde se puede visualizar exhaución de un sector parabólico y la idea de Leibniz de que $\int ydy = Q$ significa que la suma de los rectángulos infinitamente pequeños es *Q*. Con el uso del software podemos revertir lo que Cordero (2003) encontró "la exigencia de mover lo estático". GeoGebra tiene una herramienta o comando llamado *Deslizador* que consiste en asignar a una variable valores que

pueden ir cambiando discretamente con incrementos que uno decida, y si esta variable esta asociada a algún objeto geométrico éste cambia en tiempo real. En la figura 1 mostramos como el *Deslizador* a varia de 1 a 20 y esta asociado al radio de una circunferencia, que al mover el *Deslizador* traza las circunferencias con los distintos radios. ¡Estamos moviendo lo estático!

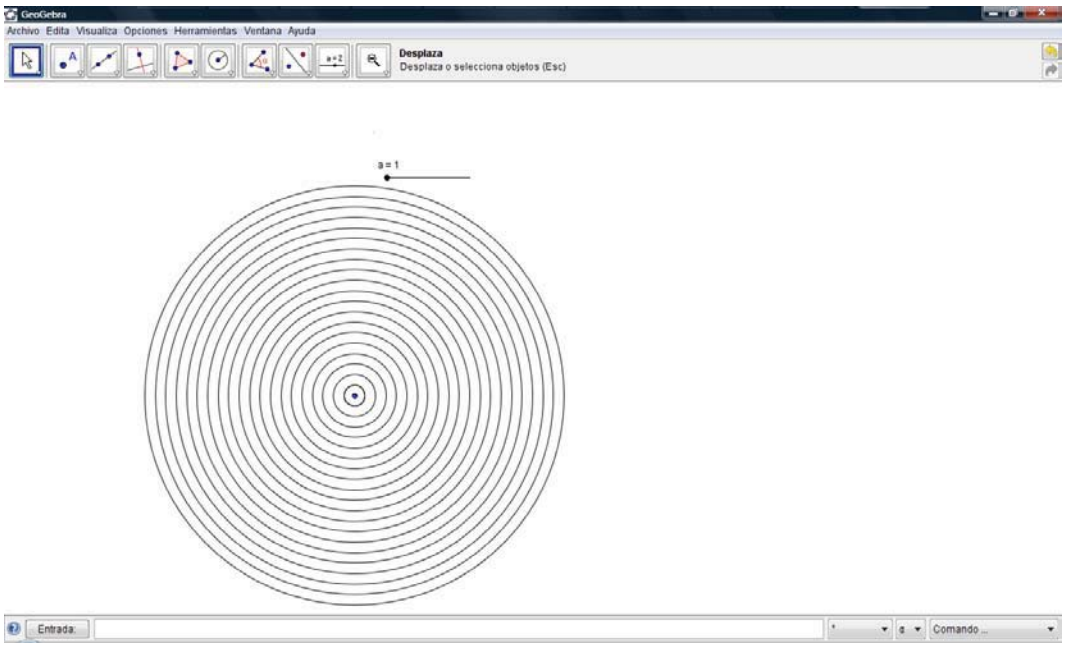


Figura 1. Círculos concéntricos de radio los valores del deslizador a.

Como señala Cantoral y Cabañas (2006) la explicación didáctica asociada a la presentación de la integral, normalmente se realiza a través de la consideración de que para una función positiva definida sobre un intervalo cerrado, la integral proporcionará el valor del "área bajo la curva". La medición de dicha área se obtiene subdividiendo en regiones planas más pequeñas, cuyas disposiciones geométricas permitan la utilización directa de fórmulas conocidas. Suele dividirse, por ejemplo, al intervalo de integración en subintervalos de igual longitud, sobre los cuales se construyen rectángulos construidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula elemental "base por altura" ésta construcción la puede realizar GeoGebra con un comando llamado *sumaInferior[],* o *sumasuperior[]* entre corchetes se escribe la notación, por ejemplo: *sumaInferior[f,a,b,n]* que indica el cálculo del área bajo la curva *f*, en el intervalo *[a,b],* con *n* subdivisiones. Estos comandos realizan un cálculo aproximado al área bajo la curva por defecto o por exceso De esta manera podemos usar un *Deslizador* asociándole valores por ejemplo de uno hasta quinientos y asociarlo a la *sumainferior*, al ir cambiando el número de subdivisiones del

intervalo en tiempo real, se logra visualizar que a medida que *n* crece, se tiende a un límite, justamente la medida del área bajo la curva. La figura 2 muestra la suma para 10 rectángulos bajo la función $f(x)=x^2+3$ en un intervalo de 0 a 2, luego se hace crecer n a 40 y se muestra en la figura 3 luego se cambia hasta 200 como lo muestra la figura 4, finalmente la figura 5 muestra una aproximación del área bajo la curva para 400 subdivisiones

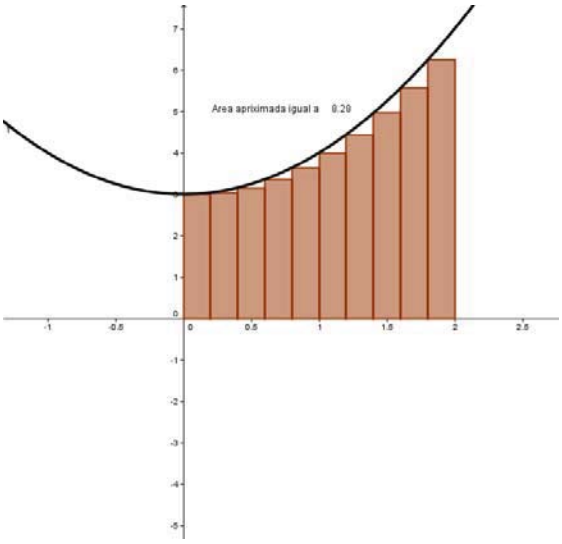


Figura 2. Área aproximada con diez subdivisiones

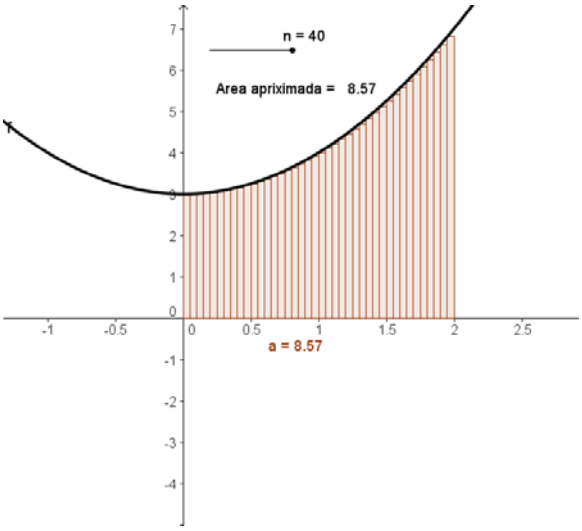


Figura 3. Área aproximada con 40 subdivisiones

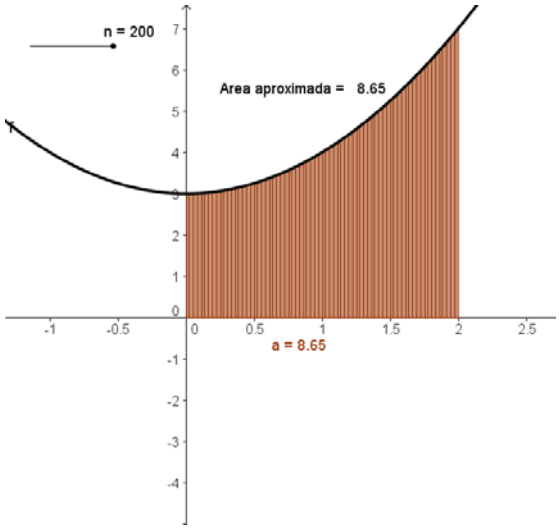


Figura 4. Área aproximada con 200 subdivisiones

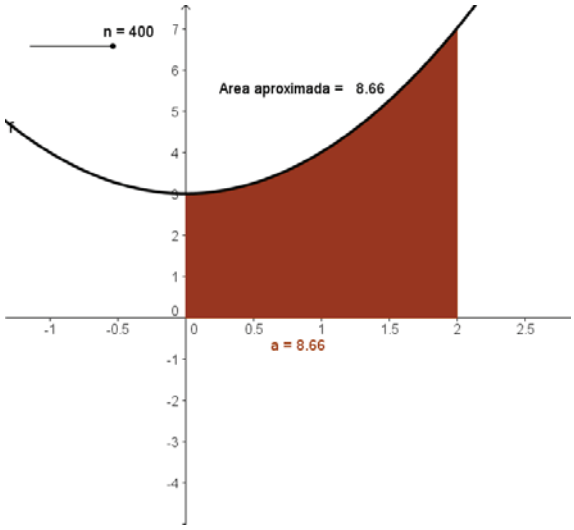


Figura 5. Área aproximada con 400 subdivisiones

El poder que dan los *Deslizadores* para visualizar a la integral como un proceso de un límite moviendo lo estático, es una idea bastante plausible para introducir así el concepto de Integral en el bachillerato.

Metodología

Se aplicaron las actividades a un grupo de 5to semestre de bachillerato, la experiencia fue una experimentación empírico experimental. El grupo estuvo formado por 45 alumnos, se dieron 7 sesiones de una hora en donde los alumnos se familiarizaron con los comandos de GeoGebra a la vez que exploraron graficas de funciones algebraicas y trascendentes. Buscando la articulación entre la representación simbólica y la gráfica, estudiando los efectos de los parámetros de las formas generales en la representación simbólica de las funciones. En la sexta actividad los estudiantes exponen los contextos que inventaron así como los métodos que usaron para calcular el área. La sesión 7 aborda el cálculo de áreas bajo curvas, usando la idea antes expuesta a través del uso del comando *Deslizador* para diferentes casos de funciones y diferentes valores de *n*.

Resultados

Los contextos que proponen los estudiantes resultan interesantes porque parten desde sus propios intereses, sus exposiciones son parodias, maquetas sobradas de creatividad. El conflicto cognitivo efectivamente aparece cuando los alumnos no pueden calcular de manera exacta el área, ellos encontraron métodos de exhaución como los mostrados en las figuras 6 y 7.

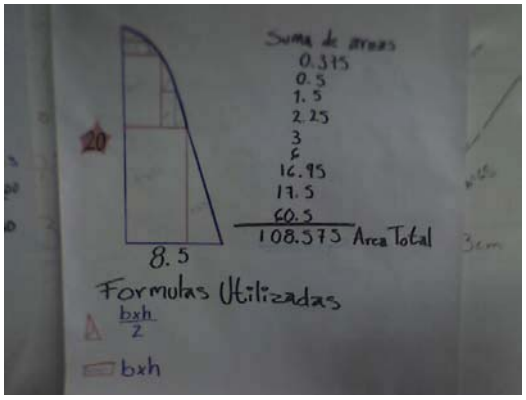


Figura 6. Área aproximada de un sector parabólico

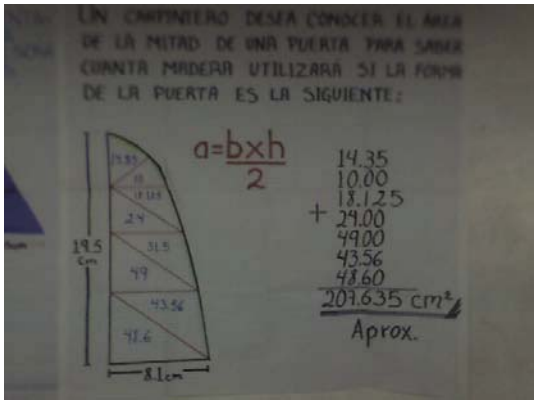


Figura 7. Área aproximada de un sector parabólico

Como podemos observar, hacen un supuesto de que algunos porciones de área son muy parecidas al área de un triángulo, un método recurrente que usaron fue el de cuadricular, otros encontraron el método de cubrir con rectángulos por exceso o por defecto pero tuvieron dificultades para entender el método. Logrando así su interés por aprender un método que les permitiera calcular el área de su problema.

En la figura 8 se muestra como un alumno que ya comprendió el concepto de integral prefiere este método para calcular un área, que las fórmulas de la geometría plana, en la figura 9 un alumno muestra que comprendió los dos métodos el uso de la integral definida y un método numérico. En la figura 10 un alumno usa sus conocimientos de geometría plana y los de cálculo integral para calcular el área bajo una parábola, incluso por dos métodos, mostrando un gran avance en comprensión del tema. En cambio en la figura 11 un alumno aplica un método numérico y obtiene un resultado muy lejano del real.

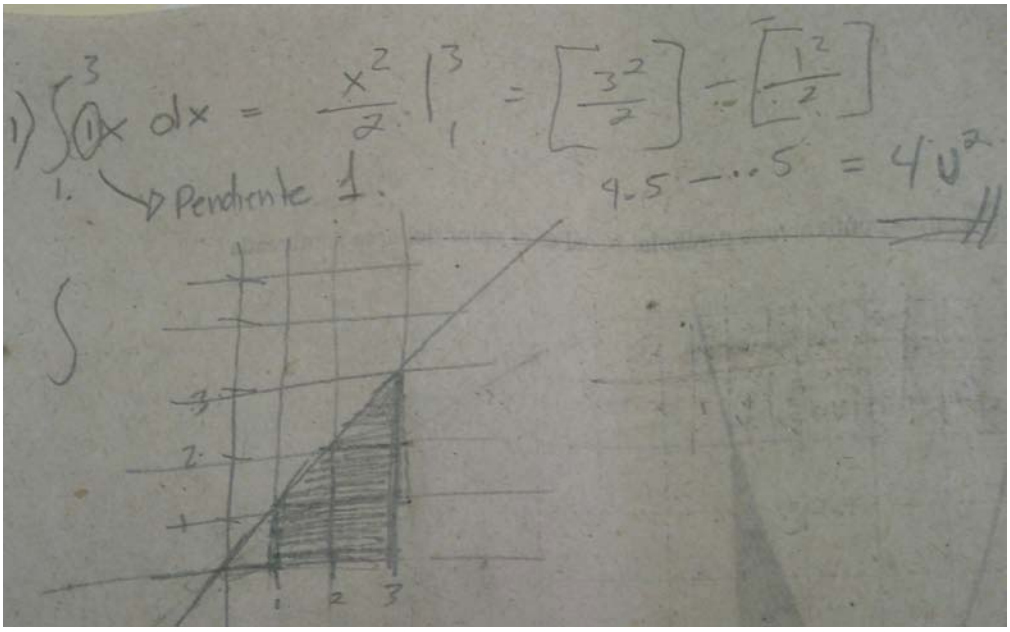


Figura 8. Cálculo del área de un trapecio usando la integral definida

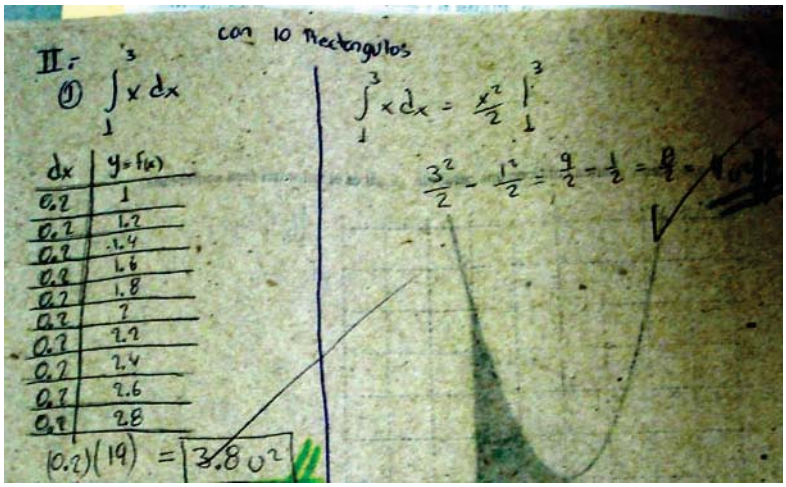


Figura 9. Cálculo del área de un trapecio usando la integral definida y un método numérico

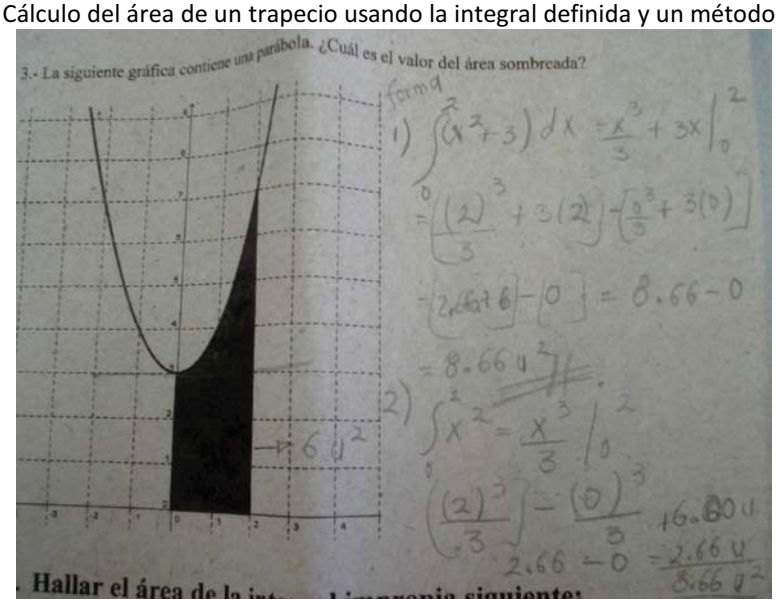


Figura 10. Cálculo del área bajo una parábola dos formas

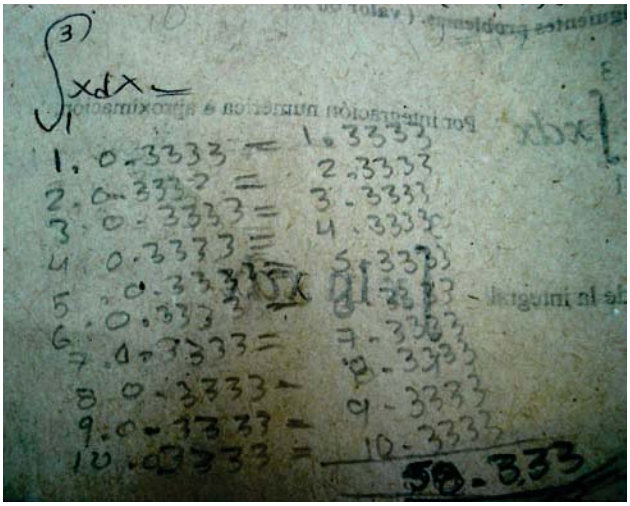


Figura 11. Cálculo del área bajo una recta resultado erróneo

Conclusiones

La posibilidad de visualizar el concepto de integral con GeoGebra da la oportunidad de que los alumnos reacomoden sus saberes e incorporen nuevos conceptos para resolver problemas, esta experiencia empírico experimental nos permitió realizar un análisis cualitativo y en algún momento pudimos observar que los estudiantes sabían para que es útil la integral, aunque no sabían integrar. Avanzado el curso pudimos lograr el equilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. La gran mayoría pudo interiorizar el concepto de integral. Queda en el horizonte poner en la práctica docente esta propuesta y experimentar con más grupos para alcanzar mayores estándares en los saberes de nuestros estudiantes.

Referencias bibliografícas

Artigue, M. (1998) Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Arcos Quezada J. I. (2006) El cálculo infinitesimal y la enseñanza del cálculo en el siglo XXI. *En* Sepúlveda, L. A., García, P. R., Guerrero, M. L. (Eds.). *Memorias. XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas***,** (pp. 51-57) . Morelia: UMSNH.

Cabañas, G y cantoral, R. (2006). La conservación en el estudio de área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 199-226). México D.F. México:Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hohenwarter M. (2008) *GeoGebra* (Versión 3.0) [Software de cómputo] Salzburgo, Austria.

SEP (2008) *Programas de Estudio Matemáticas, Bachillerato Tecnológico, Reforma Integral del Bachillerato*. Subsecretaria de Educación Media Superior. Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico. México.

EL PAPEL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS ANTE EL USO DE LAS HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN EL AULA

Alma Rosa Pérez Trujillo, Gabriela Buendía Abalos
Universidad Autónoma de Chiapas — México
Cicata-IPN
alma.perez@unach.mx, gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Formación de profesores; Tecnología avanzada — Nivel: Básico

Resumen. *Con esta investigación se pretende reconocer el impacto y el rol que tienen los profesores de Matemáticas de nivel básico (secundaria) del sistema educativo chiapaneco el uso de herramientas tecnológicas educativas. Lo anterior se hará por medio del análisis de sus argumentaciones y explicaciones sobre diseños didácticos producto de investigaciones en matemática educativa al incorporarlas a su quehacer cotidiano en el aula. Partimos de la idea que al introducir las herramientas tecnológicas en los escenarios escolares se provocan reacciones ya que alteran la armonía del tradicional sistema didáctico.*
Palabras clave: profesores de matemáticas, herramientas tecnológicas educativas, socioepistemología

Introducción

El sistema educativo mexicano en el nivel básico (secundaria) ha sufrido un proceso de transformación, tanto en aspectos estructurales como de contenidos (ver Reforma de la Educación Secundaría 2006). Las instituciones y los agentes involucrados en este proceso están destinados a asumir nuevos roles y a definir sus nuevas funciones, rescatando aquellos aspectos que merecen ser conservados por la eficacia y eficiencia demostrada y desechando otros, a la luz de un análisis y reflexión profunda de su experiencia. De forma particular, en esta investigación nos centraremos en reconocer el impacto en su quehacer cotidiano y el rol (papel) del profesor ante investigaciones en matemática educativa apoyadas en el uso de las *herramientas tecnológicas educativas (HTE), término con el cual nos referiremos a la calculadora graficadora, medios transductores (sensores), al pizarrón electrónico y al software matemático.*

En esta investigación, no pretendemos soslayar la importancia del triangulo didáctico, usado por Chevallard (1991) para comprender los hechos didácticos. Este triángulo está compuesto en sus extremos por el maestro, el saber y el alumno, sin embargo nos centramos en el papel que juega el profesor en este contexto, ya que son ellos los que ponen en marcha los resultados de una investigación, al incorporar los conocimientos al aula de clases. En Chevallard (1991; citado en

Castañeda, 2004) se explica que al introducir las herramientas tecnológicas a los escenarios escolares se provocan reacciones debido a que alteran la armonía del sistema didáctico, la interacción de las tres componentes (estudiantes, profesor y el saber), se modifica debido a que existe un instrumento mediador (HTE) que participa transformando las prácticas.

> Esta paulatina pero incesante incursión tecnológica en varios espacios de nuestra vida, ha traído consigo una inevitable modificación de nuestras usuales prácticas. En el ámbito educativo, esta evolución tecnológica ha perturbado el habitual equilibrio en las instituciones educativas; el fácil acceso a la tecnología de los estudiantes desafía los tradicionales planteamientos didácticos que hacen los profesores (Castañeda, 2004; p. 660).

La Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas considera que son tres los actores principales en la enseñanza de las matemáticas, el profesor, el alumno y el saber a enseñar; entre ellos, se reconoce a los docentes como parte esencial del triángulo. Tal como dice Lezama (2003), el profesor es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible, pues vive la situación didáctica, la discute, analiza y critica, también sostiene que son tantos los aspectos (de tipo curricular, de tiempo, de cantidad de alumnos, etc.) que el profesor debe cubrir que es muy fácil que en alguno falle. Una idea planteada en Crespo y Ponteville (2001; citado en Borello, 2007) es que el profesor de matemáticas enseña la disciplina basándose en sus ideas acerca de ella y en cómo debería ser aprendida por los alumnos. Sin embargo al hablar del uso de HTE en el aula, encontramos que en su mayoría, los maestros se muestran renuentes al uso de la misma; pareciera que de alguna forma este obstáculo no se ha logrado eliminar del todo. Sin embargo, nosotros consideramos que en el aula de matemáticas del siglo XXI, es inminente el uso de las herramientas tecnológicas.

> Las mujeres y hombres del siglo XXI quizás no necesiten saber todas las integrales inmediatas, pero sí que necesitarán iniciativa, capacidad de trabajo en equipo, curiosidad ante los nuevos avances, sano escepticismo, capacidad para afrontar diferentes problemas y dificultades, inquietud para aprender, facilidad para hacerlo y también para relacionar diferentes campos del saber, *hábito a las posibilidades de las nuevas tecnologías* (Comellas y Serra, 2000; citado en Sosa, 2006; p.20)

De acuerdo a Ursini (2006), el uso de la tecnología en el salón de clases implicaría que los profesores se vean a sí mismos como agentes de cambio y que acepten enfrentar situaciones no predecibles de antemano y en un ambiente tecnológico en el cual ellos mismos no fueron educados. Samayoa y Buendía (2009) sostienen que la tecnología ha hecho que las matemáticas se conviertan en una ciencia más empírica y que es esa misma tecnología lo que le ha permitido al estudiante trabajar más fácilmente con una gran cantidad de información relacionada con problemas que no hubiera podido resolver de otra forma. Además continúan diciendo que de acuerdo a Briseño (2008) no existen técnicas instrumentadas (uso de herramientas tecnológicas) para que los profesores tengan reglas de estudio a fin de que puedan tener intervenciones en la educación de los alumnos. Y por estas carencias hay investigadores que se han preocupado y han hecho estudios para construir un discurso teórico que sustente técnicas instrumentadas. Por todo lo anterior sabemos que el profesor es el que tiene en sus manos la responsabilidad de la educación del alumno; de ahí que en esta investigación analizaremos el rol del profesor cuando tiene las herramientas tecnológicas educativas a su alcance.

Antecedentes

Como antecedentes para esta investigación, se retomarán investigaciones sobre matemática educativa, el uso de las nuevas tecnologías educativas y el papel de los profesores en el aula.

Cedillo (2006; citado en Briceño, 2008), hace un estudio con profesores con el uso de las CAS (Computer Algebra System por sus siglas en inglés o Sistemas de Algebra por Computadora), centrándose en los cambios que pudieran presentarse en las concepciones y prácticas de enseñanza de los docentes y la manera en que el uso sistemático en el aula de un sistema algebraico computarizado afecta la relación estudiante-profesor. Siguiendo con el uso de la tecnología encontramos investigaciones como la realizada por Suárez (2006), quien sostiene que la tecnología es considerada como parte integral del binomio ciencia y la tecnología y como consecuencia, uno de los problemas educativos ha sido su grado de desarrollo. Menciona que, en un tiempo relativamente corto (25 años a la fecha) las calculadoras, las computadoras y los procesadores matemáticos (algebraicos, geométricos, numéricos y gráficos) han pasado de ser herramientas de unos cuantos a tener un uso masivo ya que su desarrollo ha perfeccionado su técnica y abaratado su costo.

Con base a la experiencia educativa que reportan, Cantoral y Mirón (2000) sostienen la posición respecto del papel que juega la tecnología en las realizaciones didácticas, la cual consiste en asumir que efectivamente es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes en caso de que la intervención de medios y dispositivos didácticos se acompañen seriamente de investigación en el campo de la Matemática Educativa.

En cuanto a la formación de profesores, Milevicich y Lois (2007) sugieren la necesidad de ofrecer a los profesores una formación pedagógica que favorezca visiones críticas acerca de la complejidad que entrañan los procesos de aprendizaje, de la multiplicidad de factores que intervienen en ellos y, sobre todo, de la necesidad de instrumentar prácticas pedagógicas que no sólo contemplen la enseñanza de los saberes disciplinares, sino que atiendan también a aquellos aspectos que pueden favorecer el aprendizaje de tales saberes.

La experiencia de proyectos en México y otros países (Suárez, 2008; Torres, Gutiérrez y Cárdenas, 2007) ha permitido comprobar cómo un entorno en donde se usan las HTE puede servir para lograr las modificaciones deseadas con relación a las concepciones matemáticas de los estudiantes y de los profesores. Consideramos que la utilización de la tecnología se perfila ya no sólo como una realidad del aula del siglo XXI, sino como un medio que ofrece posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance. Son pues estas investigaciones las que nos servirán de base para poder analizar el papel de los profesores ante el uso de las HTE en el aula.

Problema de investigación

Con esta investigación se pretende reconocer el impacto y el rol que tienen los profesores de Matemáticas de nivel básico (secundaria) del sistema educativo del estado de Chiapas el uso de las HTE al incorporarlas a su quehacer cotidiano en el aula, por medio del análisis y reconocimiento de sus argumentaciones y explicaciones sobre ello.

De acuerdo a Nolasco y Velázquez (2007) comprender la práctica docente de los profesores constituye un vasto campo de investigación, ya que los programas educativos son instrumentados por sujetos, cuyas experiencias van conformando día con día creencias y maneras de actuar, a partir de las cuales interpretan las propuestas de trabajo y organizan sus actividades. Por ello, el estudio de la práctica docente de los profesores al usar HTE permitirá establecer el rol que asumen

éstos y cómo su práctica se ve afectada.

Las preguntas que guiarán esta investigación son: ¿Cuál es el perfil de los profesores insertos en el sistema educativo chiapaneco? y ¿Cuál es el papel de los profesores de Matemáticas del nivel básico y medio superior ante las investigaciones hechas al seno de la matemática educativa, donde se proponen secuencias que favorecen al uso de las herramientas tecnológicas en el aula?

De acuerdo a Suárez (2006) el avance acelerado de la tecnología educativa en particular ha dado pie a una serie de fenómenos, entre otros, el que los profesores actuales no han aprendido matemáticas con el uso de la tecnología y hoy deben enseñar de esta forma. De ahí que el objetivo de esta investigación es conocer el papel del los profesores de nivel básico y medio superior insertos en el sistema educativo chiapaneco frente al inminente uso de las herramientas tecnológicas en el aula.

Metodología

Para desarrollar esta investigación, emplearemos dos aspectos metodológicos globales:

1. Recopilación de datos

Para desarrollar esta parte, empleamos como instrumento de investigación y recopilación de datos; cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas (bajo un guión preestablecido), como estrategia para conocer las concepciones del profesor sobre la matemática, la enseñanza y aprendizaje de la misma, además de algunos datos sobre el currículo actual y el uso de las HTE en su aula, así como datos referentes a la capacitación y actualización del profesor. También, se grabarán en video las puestas en escena de los diseños didácticos con la finalidad de poder analizar el papel del profesor ante el uso de las herramientas tecnológicas en su salón de clases, cuando estos diseños se acompañan de investigaciones serias en el campo de la Matemática Educativa.

2. Análisis de reproducibilidad de los diseños didácticos en el marco de la Socioepistemología

Al resultado de la conjunción de las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social, se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2000). Uno de sus objetivos es la formulación de epistemologías de prácticas o socioepistemologías que den cuenta de aquello que

constituye al saber matemático.

De acuerdo a Buendía & Cordero (2005) la investigación en Socioepistemología parte de reconocer fenómenos didácticos relacionados con un determinado saber matemático y su uso al seno del aula de matemáticas como se muestra a continuación (ver figura 1).

Bajo la aproximación socioepistemológica, resulta necesario realizar una revisión, una búsqueda acerca de las circunstancias que tienen que ver con la construcción de ese saber; en consecuencia se involucra diferentes fuentes y tipos de revisiones, desde aquéllas que tienen que ver con el desarrollo histórico de las propiedades y temas involucrados en el fenómeno didáctico, hasta revisiones sobre la búsqueda del uso de dicho conocimiento en diferentes contextos. Con ello, se integra una epistemología de prácticas la cual presenta el papel de las prácticas en la generación de dicho conocimiento, se plantea además la reformulación y reinterpretación de esas prácticas para lograr llegar al aula.

Si bien, las prácticas sociales son el fundamento epistémico en la construcción del saber matemático en cuestión, se les tiene que imprimir intencionalidad y hacerlas explícitas a fin de favorecer la resignificación de dicho saber; esto es, la reconstrucción del saber en una situación particular.

Figura 1. Esquema metodológico para la investigación en Socioepistemología

Retomando la figura 1, nos centraremos en la parte del diseño de aula ya que se utilizarán situaciones diseñadas cuya fundamento teórico se encuentra en investigaciones de corte socioepistemológico, como por ejemplo, la visualización en los criterios de semejanza propuesta

por Pérez (2008) en los que se promueve el desarrollo intencional de ciertas prácticas sociales (como la predicción y la visualización como herramienta) con el fin de generar conocimiento significativo mediante el uso de HTE. Estos diseños didácticos en forma de prácticas de laboratorio son el mecanismo para lograr incidir en la reorganización de la matemática escolar.

Al hablar del estudio del fenómeno de la reproducibilidad, Lezama (2005) dice que es vital establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase, al repetirse en distintos escenarios. Continua diciendo que al poner en escena un diseño es el profesor quien conoce de primera mano cual es el propósito didáctico del diseño y los probables obstáculos que el estudiante enfrentara, así como el tiempo requerido para su realización. Además "en tal dinámica, el maestro juega un papel esencial. Él es el actor decisivo de la reproducibilidad" (Lezama, 2005, p. 345). Algo a considerar en nuestra investigación es que no estará centrada en el funcionamiento de los diseños en el aula, si no, al papel del profesor ante el uso de estos diseños apoyados en las herramientas tecnológicas, el cual es determinante para que las situaciones lleguen al aula. Así pues, retomaremos el fenómeno de reproducibilidad, a fin de evidenciar qué es lo que lo que se reproduce de los diseños didácticos y cuál es el papel del profesor al respecto.

Referencias bibliográficas

Borello, M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav. México.

Briseño, E. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*. 58(3), 299-333.

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 12 (1), 7-28.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En R. Farfán, C. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 13, 54-62. México: Iberoamérica.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 265-292.

Castañeda, A. (2004). Desarrollo de situaciones de aprendizaje en un escenario a distancia incorporando objetos virtuales de aprendizaje. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 660-667. México: CLAME.

Chevallard (1991) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de Doctorado no publicada, CICATA del IPN. México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8(3), 339-362.

Milevicich, L. y Lois, A. (2007). La motivación y el uso de estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 359–364. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Nolasco, H. y Velázquez, S. (2007). Las explicaciones de los profesores del nivel medio superior. Un estudio de la semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 388–393. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Pérez, A. (2008). *Una vinculación de la matemática escolar y la investigación a través de diseños didácticos con el uso de la tecnología*. Tesis de maestría no publicada, UNACH, México.

Samayoa, O. y Buendía, G. (2009). De la investigación al aula: unas prácticas de laboratorio utilizando calculadora. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 22. pp. 1483-1490. México, D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Sosa, L. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Estudio con profesores en servicio.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Suárez, L. (2006). *El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico*. Memoria pre-doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación. Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Torres, A., Gutiérrez, J. y Cárdenas, D. (2007). *El pizarrón electrónico interactivo, otra tecnología para incorporar a la educación*. Recuperado el 20 de Octubre de 2007 de http://www.recursosvoip.com/netmeeting/index.php

Ursini, S. (2006). ECAMM y EMAT en Telesecundaria. pp. 159-166. En Rojano, T. (ed.) *Enseñanza de las Física y las Matemática con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. Organización de Estados Iberoamericanos y Secretaría de Educación Pública.* México. ISBN 970-790-885-8. Recuperado el 25 de Enero de 2007 de http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/downloads/libros/ematefit/capitulo%206.pdf

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa