ALME 24

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

2011

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
COLEGIO MEXICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.
• VOL. 24 » AÑO 2011

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 24

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 24

Editora:

Patricia Lestón (Argentina)

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:

Rebeca Flores (México)
Mónica Micelli (Argentina)
Carlos Oropeza (México)
Elizabeth Mariscal (México)
Luis Arturo Serna (México)

Diseño de portada y CD:

Gabriela Sánchez Téllez

Diseño de interiores:

Ricardo Arce Valdovinos y Elizabeth Mariscal Vallarta

CICATA IPN, Legaria

Edición:

©2011. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-4-8

Lestón, P. (Ed.). (2011). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 24. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2008 - 2012

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de Admisión

Leonora Díaz Moreno
Liliana Milevicich
Armando López Zamudio

Comisión de Promoción Académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité Internacional de Relme

Cecilia Crespo Crespo
Ángela Martín
Javier Lezama
Hugo Parra Sandoval
Olga L. Pérez González

Comité Científico de Evaluación

Comité Científico de Evaluación

TABLA DE CONTENIDOS

CAPITULO 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CAPITULO 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CAPITULO 3: ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLSIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CAPITULO 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

CAPITULO 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), a lo largo de casi un cuarto de siglo ha venido cumpliendo con el su propósito que se planteara desde su creación, consistente en brindar a docentes e investigadores del área de la matemática educativa un ámbito para el intercambio de ideas y propuestas de docencia e investigación orientadas entre colegas con la finalidad de obtener beneficios de los sistemas escolares de América Latina.

Entre estos espacios de intercambio que organiza Clame, podemos citar a publicaciones como la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime) y el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme). Estas publicaciones han ido cobrando importancia y visibilidad en la comunidad de matemáticos educativos latinoamericanos. Alme es producto de las exposiciones que se realizan año a año en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (Relme), en las que se reúnen y participan activamente profesores e investigadores de los distintos países latinoamericanos, con el objetivo de lograr una mayor profesionalización y fortalecimiento de la comunidad, en la que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos.

Es en este contexto de ideas que se vela por el cumplimiento de uno de los propósitos específicos del Clame defendido desde sus inicios, consistente en *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*, se publica año con año el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme).

Son características esenciales de Alme su carácter periódico y la existencia de un proceso de evaluación de sus artículos que la integran provienen de trabajos que fueron efectivamente expuestos en Relme previamente y enriquecidos de esta exposición y discusión entre pares. Con posterioridad a este evento, los artículos son evaluados de forma rigurosa de por lo menos dos pares especialistas en dicho campo y provenientes de distintos países. Los artículos publicados son los que son aceptados a través de esta evaluación de manera directa o después de que sus autores realicen las modificaciones propuestas por los árbitros. La edición de esta publicación está a cargo de un Comité Editor formado por varios colegas de distintos países de nuestra comunidad, que da continuidad a la línea de publicación definida de acuerdo con el respeto los lineamientos propuestos.

En esta publicación puede accederse, de esta manera, al estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica. En la página web de Clame, los distintos volúmenes de nuestra publicación son puestos a disposición de colegas, constituyendo una fuente de consulta y referencia en la comunidad de matemática educativa que cada vez son más consultados.

En este caso, las exposiciones tuvieron lugar durante *Relme 24*, llevada a cabo en la ciudad de Guatemala (Guatemala) durante 2010.

Los trabajos han sido organizados según cinco categorías:

- Categoría 1: Análisis del Discurso Matemático Escolar
- Categoría 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas
- Categoría 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
- Categoría 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
- Categoría 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Cada una de estas categorías se inicia con breve introducción realizada por colegas de nuestra comunidad especialmente invitados a realizarlas. En ellas se reflexiona sobre el tema y se comentan de manera sucinta el contenido de los artículos que la componen.

Agradecemos especialmente a los miembros del Comité Editor y Comisión Académica y de Evaluación de Alme 24 que colaboraron activamente y con entusiasmo y profesionalismo, así como a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos y tuvieron en cuenta las observaciones y propuestas de los árbitros para su mejora y enriquecimiento.

Cecilia Crespo Crespo
Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Junio 2011

CATEGORÍA 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Análisis del Discurso Matemático Escolar

Gabriela Buendía Abalos

CICATA-IPN. (México)
gbuendia@ipn.mx

Realizar estudios sobre el discurso matemático escolar supone reconocer que existe un discurso especial que permea en todos los actores e influye en todos aquellos elementos presentes en el proceso educativo de las matemáticas. La ilustración gráfica que sobre algún tópico realice un profesor, es parte de ese discurso pero, en otro nivel, ese discurso también atiende a la formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar (Marcolini y Perales, 2005). Castañeda (2006), por su parte, señala el papel de los libros de texto dentro del discurso matemático escolar pues se puede advertir una doble naturaleza en dichas obras: aquella referida a los elementos de estructura y organización, o bien a aquellos elementos tocantes a su contenido, es decir, al discurso que contiene. Digamos entonces que cualquier ejemplo que se maneje ya sea a través de lo que diga un profesor, o que sea tomado de un texto o bien, aquél sugerido en algún currículo, forma parte de lo que en Matemática Educativa, hemos llamado el discurso matemático escolar.

Este discurso matemático escolar involucra, entonces, a las formas orales, como el diálogo que se puede suscitar en una clase entre profesor y alumnos, pero también involucra formas escritas como los programas o los libros de texto seleccionados para dictar un curso. También conforman al discurso otros aspectos relevantes como las prácticas docentes y todo lo que hace a la formación docente: la estructuración de sus planes y programas, los libros de texto que se recomiendan y las prácticas docentes de los formadores de profesores. Por otro lado, integran el discurso todas las manifestaciones –generalmente escritas– que no son consultadas frecuentemente en los cursos actuales pero que de alguna manera influyeron o influyen en la configuración actual de los programas y las prácticas docentes, como los escritos científicos y libros de texto de antaño (Molfino, 2010).

Y, ¿por qué importa analizarlo? Farfán y Lestón (2009) han señalado que podemos entender al discurso matemático escolar como el germen de la problematización de las situaciones que se viven en las aulas. Así, el ejemplo o ilustración que el profesor, el texto o el currículo señalen, se convierte en una fuente de problemáticas educativas, fenómenos didácticos o, en general, problematizaciones que tendríamos que reconocer, primero, para analizarlos después. Y desde ahí, ser capaces de brindar explicaciones, proponer alternativas, sugerir cambios o cualquier otra alternativa que los matemáticos educativos podríamos dar.

La problemática es compleja sin duda. La misma diversidad de factores, elementos y actores involucrados en la conformación del discurso matemático escolar, conlleva la necesidad e importancia de múltiples herramientas teóricas y metodológicas para abordar seriamente esta problemática. No en vano, las investigaciones y estudios sobre el discurso matemático escolar suelen ser numerosas en cualquier foro del área. De manera coherente, la comunidad del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa se suma a los esfuerzos por aportar en esta importante área.

Conocer este amplio abanico de investigaciones y estudios contenidos en este capítulo tiene un aporte adicional. Como una comunidad latinoamericana compartimos lenguaje, factor fundamental del discurso matemático escolar. Desde ahí entonces compartimos libros de textos y sin duda, los diversos actores de la noosfera están influenciados por la proximidad geográfica de nuestros países. Resulta entonces sorprendente cómo compartimos problemáticas, cómo entendemos diferentes fenómenos didácticos aún tomando en cuenta que ocurren en distintos países.

Me parece entonces que el análisis del discurso matemático escolar es un área de estudio en la que todos los asistentes a la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa estamos involucrados: tenemos mucho que decirnos al respecto de nuestros propios discursos, compartir experiencias para potenciar nuestros aportes. Conozcamos, pues, los trabajos presentados en este capítulo.

Referencias bibliográficas

Farfán, R y Lestón, P. (2009). Introducción al capítulo de análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (ed) *Acta Latinoamericana de Matemática educativa* Vol 22 pp. 3-4 México DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), 253-265

Marcolini, M y Perales, J. (2005) La noción de predicción: análisis y prouesta didáctica para la educación universitario. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 8(1) 195-218

Molfino, V. (2010). Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

EL RECAPITULACIONISMO Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, rondero@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. En esta investigación se considera cierto paralelismo entre el desarrollo individual de la noción de *linealidad* y su desarrollo histórico social. El surgimiento de la *linealidad* y de sus significados en las etapas evolutivas de un sujeto parece que están en cierta concordancia con el surgimiento y uso de los conceptos previos asociados a esta noción, que se manifiestan en diferentes escenarios históricos. Sin embargo, en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior. En este trabajo se buscan precisar algunos elementos que se establecen en este paralelismo entre lo histórico epistemológico y el desarrollo de la noción en situación escolar.

Palabras clave: linealidad, didáctica, recapitulacionismo, significados, articulación

Abstract. In this research we consider some parallelism between individual development of the concept of historical linearity and social development. The emergence of linearity and its meaning in the evolutionary stages of a subject seem to be somewhat consistent with the emergence and use of the previous concepts associated with this notion, which manifest themselves in different historical settings. However, in the graduate school environment is not sufficiently emphasize their associated meanings and related topics are linked to the high school level. In this paper we seek to clarify certain elements set forth in this parallelism between the epistemological and historical development of the concept in school situation.

Key words: linear, didactic, recapitulation, meanings, joint

Introducción

En esta investigación se considera cierto paralelismo entre el desarrollo individual de la noción de linealidad y su desarrollo histórico social, en cuanto al surgimiento, comprensión y uso de conceptos matemáticos asociados. Esto es que el crecimiento intelectual de un individuo compendia los estadios evolutivos de la sociedad. Esta corriente de pensamiento llamada *Recapitulacionismo* considera que la ontogenia recapitula la filogenia en relación al aprendizaje de la matemática.

Los métodos y verdades matemáticas se han obtenido en diversos países y culturas a través de procesos complejos, donde se han dado errores y retrocesos. Esto es fructífero desde la dimensión epistemológica, y puede emplearse pedagógicamente. Detrás de un concepto hay una postura epistemológica, la cual condiciona el pensamiento y la interpretación del desarrollo histórico de conceptos. El estudio del pensamiento pertenece a la psicología, en cambio el desarrollo conceptual de la matemática corresponde al estudio histórico de las ideas. La recapitulación psicológica del desarrollo intelectual de nuestros estudiantes pasa en mayor o menor grado por las mismas etapas por las que ha atravesado la humanidad (Furinghetti y Radford, 2002).

Por otra parte Piaget y García (2004) señalan que se puede hacer un análisis comparativo entre la psicogénesis y la historia de la ciencia, en tal caso la física aristotélica y la medieval tienen sorprendentes coincidencias de método y contenido con las concepciones de un niño o un adolescente, hasta aspectos más elaborados de la ciencia moderna en los que se necesita una abstracción no alcanzable por personas muy jóvenes o adultos sin formación científica. Estos autores señalan de manera contundente que *los únicos factores realmente omnipresentes en los desarrollos cognoscitivos –tanto en la historia de la ciencia como en la psicogénesis- son de naturaleza funcional y no estructural.* De tal modo que los factores funcionales se articulan a la asimilación de nuevos significados las estructuras precedentes, así como a la acomodación de las mismas cuando aparece un nuevo objeto de conocimiento.

Paralelismo entre lo histórico epistemológico y la didáctica

El surgimiento de la noción de linealidad y sus significados en las etapas evolutivas de un sujeto parece que están en cierta concordancia con el surgimiento y uso de los conceptos previos asociados a esta noción, que se manifiestan en diferentes escenarios históricos (Acosta, Rondero, y Tarasenko, 2008). Esto es, la primera aproximación antecedente de la noción de linealidad que hace uso un niño de cuatro años es la proporción cualitativa, al establecer comparaciones del tamaño de objetos *mayor que* o *menor que* (Ruiz y Valdemoros, 2006), hecho que aparece datado en épocas tempranas de la humanidad, al apreciar la diferencia de talla entre una persona y un animal muy grande. Por su parte el uso de la proporción cuantitativa para resolver problemas de estimaciones de interés simple con el propósito de pago de impuestos y en solución de problemas de primer grado con una incógnita. Como se aprecia en la cultura egipcia, donde no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dan elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax= b$ o $x + ax+ bx= c$, donde a, b y c son conocidas y x desconocida, como está escrito en el *Papiro Rhind* que data del año 1650 AC (Filloy, 1998). Esto presenta cierta correspondencia con la psicogénesis evolutiva del individuo al abordar dicho tema en la escuela secundaria y preparatoria.

En el libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* (Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático) de la dinastía Han (206 AC – 220 DC) (Struik, 1986), en el cual aparecen porcentajes y proporciones; problemas de aplicación de impuestos a productos de cualidades diferentes; uso de "la regla de tres" y de progresiones aritméticas y geométricas. Incluye de igual forma el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población; además aborda el tema de *Excesos y deficiencias* donde se ocupa básicamente de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos (García, 2000). Tomando el paralelismo del cual se ocupa este reporte, algunos de estos tópicos se estudian durante los dos últimos años del nivel básico elemental y durante la secundaria.

También en los últimos años de este nivel educativo se estudia la solución de una ecuación de primer grado $ax+by=c$, problemas con una incógnita y se resuelven sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de dos incógnitas. Estos temas se estudian nuevamente en el primer año de bachillerato, donde se formulan problemas en contexto, vinculado con tales temas (Stewart, Redlin, y Watson, 2001).

Con una cierta analogía, desde el punto de vista histórico epistemológico, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría. Toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262? - 190? a d C), desde su escrito *La Cónica,* y establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación. Esto es determinan la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x, y ya manifiestan a la recta que pasa por el origen de la forma $bx=ay$ y consideran a $ax + by= c$ como la ecuación de una recta en su forma general y la extienden al problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ es la ecuación de una recta (Hofmann, 2002).

Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola a los lugares geométricos que hoy conocemos, se le atribuye la hipótesis de las orbitas excéntricas o teoría de epiciclos para intentar explicar el movimiento relativo de los planetas y de la velocidad cambiante de la luna, entre otras cosas (Hofmann, 2002). Tales temas matemáticos se abordan en bachillerato, pero independientemente del aspecto psicogenético, sería conveniente incluir estos aspectos históricos en la asignatura de geometría, pero no desde el punto de vista meramente anecdótico, sino con el afán de escudriñar algunos aspectos de la epistemología de las matemáticas de la época.

Bajo tales consideraciones en el Renacimiento se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de pares ordenados de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita a su vez ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico. Entonces lo que nos enseña la evolución histórica de las ideas matemáticas, parece que debieran rescatarse en la didáctica actual.

La recapitulación psicológica del desarrollo intelectual de nuestros estudiantes y el desarrollo histórico epistemológico de la noción de linealidad también es manifiesto en los saberes escolares que se ponen en escena en un curso de Álgebra Lineal. Los conceptos de este tema de matemáticas inician de forma incipiente desde el siglo XVIII con algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de *n* ecuaciones con *m* incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema.

Con anterioridad ya se conocían métodos de solución en las culturas ancestrales china, egipcia y babilónica. Aunque, uno de los primeros casos significativos de su tratamiento analítico, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. Pero esto no era tan significativo para los matemáticos de la época, pues no ofrecía nuevos métodos de solución, lo novedoso fue la aproximación descriptiva y cualitativa de su estudio. Proporciona una conclusión para cualquier *n*: *que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que no haya ninguna que esté contenida en otras.* (Euler (1750), citado en de Dorier (2000); traducción libre). En la lexicología moderna quiere decir que las ecuaciones son linealmente independientes, y que si hay ecuaciones contenidas en otras implica el concepto de dependencia lineal, el cual es más general y válido para una gran cantidad de objetos matemáticos.

En particular a dicha inclusión de una ecuación en otra Euler, citado por Dorier (2000) le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX. Esta explicación del caso excepcional de dependencia inclusiva en sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, fue un cambio en el punto de vista en la aproximación de ecuaciones lineales. Finalmente, se puede decir que Euler no fundamentó ninguna aproximación teórica de la dependencia lineal, sin embargo sí aportó algunos elementos sutiles que tendrían intervenciones importantes posteriormente.

Cuando un estudiante en el ámbito didáctico aborda el tema de los sistemas lineales descritos por Euler, es recomendable resaltar que cuando alguna ecuación es múltiplo de otra, o que está incluida en otras, interviene el concepto de dependencia lineal, el cual forma parte de la propia noción de linealidad.

Cramer publicó en el siglo XVIII un documento titulado *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques* en el cual se aborda un método para solucionar sistemas de ecuaciones lineales *n x n*, que depende de los coeficientes, usando lo que en nuestros días se conoce como determinantes. Desde entonces este enfoque ha sido muy importante hasta convertirse en una teoría ampliamente conocida indispensable para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y conceptos vinculados al Álgebra lineal.

A pesar de que el método de Cramer está ubicado en algunos de los programas de estudio desde el bachillerato, el abordaje del tema de determinantes, en el mejor de los casos, es tratado de forma algorítmica, y sin articularse con otros métodos de solución, dejando de lado aspectos conceptuales que le dan sustento.

En la Teoría de determinantes el concepto de rango, tomó forma en el periodo comprendido entre 1840 y 1879, y algunas de las dificultades conceptuales a las que se enfrentaron los matemáticos de esa época fueron: la identificación de ser un invariante; la posibilidad de la misma definición de dependencia entre ecuaciones y vectores; y el hecho importante ha de que un sistema dual mismo conjunto de soluciones.

La relevancia didáctica que tiene el rango no ha sido suficientemente reconocida en relación a otros conceptos que se trabajan en el Álgebra lineal, de manera tal que se pierde gran parte de su esencia conceptual que es la de ser una vertiente fundamental de la noción de linealidad. Esto es, que cuando un sistema $n \times n$ tiene un rango menor que n existen vectores que son linealmente dependientes, o sea que alguno puede escribirse como combinación lineal de los otros, lo que implica un aspecto de la propia linealidad; la explicitación del proceso anterior le da sentido al aprendizaje de la misma asignatura.

El autor que definió en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal simultáneamente para ecuaciones y vectores, y los consideró como la misma clase de objetos en cuanto a la linealidad, y que los asoció con el concepto de dependencia inclusiva ya mencionada, fue Frobenius. Este autor da un gran aporte tendiente a la definición moderna de vector y del concepto de base de las soluciones e incorpora la noción de *sistema asociado* de un sistema dado. Propuso una forma diferente de los procesos que devienen desde la época de Cramer. Ya no hubo una separación arbitraria entre incógnitas principales y secundarias, y ecuaciones, pero sobretodo el concepto de dependencia lineal reemplazó el término de dependencia inclusiva, acuñado por Euler. Fue hasta 1879 que Frobenius llamó al rango como el orden máximo del menor no nulo (Dorier, 2000).

Posteriormente, en otro estatus de abstracción y generalización, se incorporan conceptos como matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad (Acosta, Rondero, y Tarasenko, 2008).

En el ámbito escolar la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, el estudio de los determinantes, matrices, rango de un sistema, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y en particular el concepto de transformación lineal

$$L(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=aL(\mathbf{u})+bL(\mathbf{v}),$$

se aborda hasta el primer curso de Álgebra lineal (Kolman y Hill, 2006) en los primeros semestres de licenciatura. En referencia a ello Golubitsky y Dellnitz (2001) sostienen que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. Pero dicha noción se estudia en etapas escolares anteriores con otras formas y significados, los cuales están desarticulados con respecto a la definición formal.

La siguiente tabla muestra un comparativo entre aspectos de la evolución histórica epistemológica y el desarrollo individual que se da en el ámbito didáctico:

La *ontogenia* recapitula la *filogenia* de la *Noción de linealidad*			Línea del tiempo
Historia y personajes	Significado asociado a la noción	Etapa escolar donde se aborda	↓
Épocas tempranas de la humanidad	Proporción cualitativa *mayor que, menor que*	Jardín de niños	
Civilizaciones, egipcia, babilónica y china (500 a. c.)	Proporción cuantitativa *interés simple*	Educación primaria	
Grecia (400 a. c.) Eudoxio de Cnido	Proporción cuantitativa *igualdad de dos razones*	Educación primaria	
Grecia (300 a. c.) Euclides	Concepto geométrico *Recta*	Educación primaria	
Renacimiento Descartes y Fermat (Siglos, XVI y XVII)	La *recta* como lugar geométrico en un sistema coordenado	Educación secundaria y Bachillerato	↓
Siglo XVIII, Euler Cramer	Solución y propiedades de *sistemas de ecuaciones lineales*	Bachillerato y educación superior	
Siglo XIX, Cramer, Frobenius y otros.	Concepción de *rango, dependencia e independencia lineal, transformación lineal*	Educación superior	

Lo que se propone en la tabla es de carácter funcional y no estructural, y no pretende ser contundente, sino que es un elemento de reflexión didáctica.

Conclusiones

Hay diversos temas de matemáticas que se explicitan mediante nociones y significados asociados a la *linealidad*. Sin embargo, en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados, ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior.

El paralelismo entre la evolución de las nociones y el desarrollo psicogenético se puede entender cuando se trata de conceptos que son precientíficos pero no es posible generalizar tal paralelismo de manera absoluta en el caso de las teorías científicas.

En este trabajo se buscan precisar algunos elementos que se establecen en el recapitulacionismo entre lo histórico epistemológico y el desarrollo de la noción en situación escolar, tales que, a partir de esta investigación, lleve a resultados que favorezcan un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática del aula. Para tal propósito el rescate de los significados de la noción de linealidad en las etapas históricas permite aportar elementos para su aprendizaje en el ámbito escolar.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* (enviado para su publicación). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Mathematics Education Library. Vol. 23. Dordrecht. The Netherlands.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroompractice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción.* España: Gedisa.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* México: Pearson Educación.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis* e *historia de la ciencia.* México: Siglo XXI Editores.

Ruiz, E. y Valdemoros, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 299-324.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2001) *Precálculo.* México: Thomson editores.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México: Instituto Politécnico Nacional.

DIFICULTADES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO ALGEBRAICO DE SEGUNDO ORDEN A TRAVÉS DE SUCESIONES, PARA DEFINIR EL ENÉSIMO TÉRMINO

Juan Carlos Osorio Paulino
CINVESTAV - IPN (México)
josorio@cinvestav.mx, thinkingmathematics@live.com

Resumen. Esta investigación que forma parte de las tesis de maestría, se realiza en México con estudiantes de secundaria, de edades 14-15 años. El objetivo es dar a conocer las dificultades; que a partir de un análisis comparativo, tienen los alumnos al tratar de construir una expresión algebraica de segundo orden que defina el enésimo término al usar sucesiones figurativas. Para ello, se ha estado haciendo uso de dos de sus cuatro componentes del Modelo Teórico Local [MTL] (Filloy, 1999): modelo de enseñanza y de procesos cognoscitivos. Se realiza una evaluación diagnóstica, se clasifica a la población según los distintos perfiles: alto, medio y bajo rendimiento, para observar en entrevista clínica videograbada y elaborar un reporte de observaciones acorde al esquema de desarrollo de experimentación perteneciente al MTL.

Palabras clave: pensamiento algebraico, patrones figurativos, generalización

Abstract. This research is part of the thesis for a master´s degree in Mexico with students of secondary school, ages 14-15 years. The aim is to show the difficulties; from a comparative analysis, students have trying to build an algebraic expression of second order to define the nth term of a sequence of figures. Therefore, we used two of the four components of the Local Theoretical Model [MTL] (Filloy 1999) i.e.: model of education and cognitive processes. A diagnostic assessment, classifies the population according to the different profiles: high, medium and low performance seen in clinical interviews on video and then we prepare a report according to the schema development belonging to the MTL experimental observations.

Key words: thinking algebraic, figurative patterns, generalization

Introducción

Hay una variedad de artículos e investigaciones asociadas al razonamiento algebraico, a los procesos de generalización y estrategias que intervienen y se emplean en aula de clase para tratar el contenido matemático que refiere a sucesiones, pero, específicamente en las que su forma de proceder es de tipo lineal. Asimismo, se hace hincapié en diversas investigaciones, de cómo el emplear sucesiones figurativas o numéricas resulta tan estratégico que, permite al alumno generalizar: analizar el comportamiento matemático de los patrones, organizar la información e interpretarla y diseñar una expresión algebraica que represente los incrementos de cada uno de los elementos o términos de una sucesión.

Este tema constituye ya una parte de la currícula o propuesta institucional de algunos sistemas educativos entre ellos está el Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 1989), en el cual se hace referencia a que el alumno debe explorar patrones. Tal es el caso también de la propuesta institucional del Ministerio de Ciencia Diseño (1989), que en su Diseño Curricular de Base se hace alusión a la variedad de fenómenos de tipo lineal y cuadrático. Otro caso es el del programa de estudio que propone la (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2006) en México, en el cual se puede constatar de que ya existe el tratamiento de éste tópico matemático, aunque éste no está explicito, no en el sentido de redacción, si no en el número de actividades (son pocas) que se proponen al tema de sucesiones figurativas de segundo orden; es decir, a aquellas donde el comportamiento matemático de los términos es de forma cuadrática. Lo anterior, dirime los objetivos que el programa de estudios tiene como fundamento.

¿Cómo proceden los alumnos para ser competentes en el Sistema Matemático de Signos? ¿Qué dificultades presentan los alumnos a tratar con éste contenido matemático? Son algunas de las cuestiones que se establecen como puntos de partida para la investigación en proceso.

Justificación

El programa de estudios de educación secundaria (SEP, 2006) alude a que los alumnos deben ver lo general en lo particular, esto es que a través de sucesiones, regidas por un patrón permitan al estudiante identificar e interpretar en forma o en términos algebraicos el comportamiento matemático que tiene dicha sucesión.

Luego, sí éste es una de las afirmaciones que la currícula quiere echar andar, ¿por qué las lecciones y problemas que se están sugiriendo, no están compensadas con otras más? Cuando además el programa de estudios en uno de sus apartados denota en su enfoque que los alumnos al verse inmiscuidos en cualquier actividad, deben hacer uso de procesos, en primer plano lo informal para concluir en un estado de convencionalidad.

Sabiendo que estos elementos son una parte importante para desarrollar en los alumnos, habilidades algebraicas.

Se ha encontrado que hacer uso de patrones es una importante estrategia para la resolución de problemas en matemáticas (Stacey, 1989) esto implica que al alumno va a permitirle al explorar, identificar el comportamiento de patrones y, representar de forma algebraica y numérica cualquier término en función de cómo el incremento de los valores permanece constante, por ello y por resultar una estrategia que permite resolver problemas, es indispensable tratar en la currícula con mayor énfasis éste contenido, no descuidando los objetivos que dispone ésta. De igual manera, es preciso acercase a los procedimientos empleados por los alumnos, pues serán el punto de partida para aclarar que lo informal puede adaptarse y convertirse en lo formal, debido a que como se hace mención en el Curriculum and Evaluation for School Mathematics (National Council of Teacher of Mathematics) el emplear éste proceso de descubrimiento, a través de sucesiones para llegar a la generalidad implica resolver problemas de tipo informal para construir álgebra, esto quiere decir, que si el alumno trata éste tipo de sucesiones figurativas conllevará a identificar: cómo es el incremento en cada uno de los términos de una sucesión, si permanece o no constante, y entonces proceder a generar un expresión algebraica que vincule los incrementos figurativos-numéricos y pasar a formar parte de manera subsecuente del álgebra formal.

Al estudiar álgebra, los alumnos hacen uso de símbolos a los cuales hay que asignarles un significado y establecer los primeros elementos ya que son los que pasan a formar parte de la sintaxis del contenido a tratar. Sin dejar de considerar que las herramientas, tales como la extracción, representación e interpretación de la información (Herbert & Brown, 1997) son parte fundamental para llegar a consolidar el álgebra formal. Por ende, sí el alumno explora situaciones que impliquen deducir fórmulas mediante una sucesión figurativa, se hace uso de las herramientas y símbolos que entrelazan al álgebra.

Las imágenes que en su caso son los patrones-figurativos, forman parte de la interacción entre el sujeto y los problemas, debido a esto, las figuras cobran un papel importante en este proceso de investigación, pues están asociadas a una sucesión, siendo éstas un recurso o medio de comunicación que permite transmitir ideas, conceptos, fórmulas sólo por mencionar algunos de los muchos beneficios que se obtienen del uso de ellas.

El reconocimiento de patrones, conlleva a generar aproximaciones a fórmulas: como es el caso de la visualización, ya que al ser modificada la figura en relación al número de elementos que tiene el conjunto (término) permite observar el cambio (incremento en el número de elementos) y sucesivamente construir los elementos faltantes para posterior, a partir de los anteriores conjuntos (términos) se formule una expresión algebraica que represente el comportamiento de un patrón de forma generalizada.

Calvillo y Cantoral (2007. p. 424) definen a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.

Según (Socas. 1989. citado por Socas, Camacho, Paralea & Hernández, 1989. p. 142) "la experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas". Esta afirmación, no quiere decir que por naturaleza propia de la visualización aparezcan de forma automática las generalizaciones, por el contrario, sólo son un complemento para la compresión de las situaciones que se están revisando.

Perspectiva teórica

Para el sustento de éste artículo, se ha utilizado el Modelo Teórico Local (Filloy, 1999). Dentro de este modelo existen cuatro componentes: modelos de enseñanza, para los procesos cognoscitivos, competencia formal y modelo de comunicación, pero, cabe decir, que para el proyecto de investigación en curso, implica hacer uso de sólo dos componentes; modelos de enseñanza y procesos cognoscitivos. Sin embargo, los demás componentes restantes son indispensables en el sentido implícito.

Al tratar cualquier contenido matemático, los sujetos cometen en forma natural errores que a la postre generan dificultades para llevar a cabo de forma formal procedimientos de carácter sintáctico, esto debido a los mecanismos que se aferran a permanecer en el sujeto durante largo tiempo, aunque es importante decir que, estos conocimientos en una parte, son el punto de partida pues son los conocimientos previos indispensables para la construcción del conocimiento matemático. Por otro lado, cuando se habla de modelar, se está refiriendo a que las nuevas operaciones u objetos que pasaran a formar parte del sujeto deben ser dotadas de un significado y, tomando éste como punto de inicio, se construyen los primeros elementos de sintaxis. Luego, como se está tratando el contenido matemático perteneciente a sucesiones figurativas, por ende hay que de modelar los conocimientos que los alumnos tienen respecto a lo concreto para finalizar con él proceso de abstracción.

Modelo de Enseñanza

Para desarrollar estrategias de enseñanza en los inicios de la adquisición de competencias de un Sistema Matemático de Signos es importante distinguir entre los modelajes concreto y sintáctico pues son en cierta manera, un punto relevante para generar estrategias en situaciones posteriores, el modelar en términos concretos se tome en ese contexto las nuevas operaciones y los nuevos objetos para dar a éstos un significado pertinente.

Resulta que, en este modelo concreto intervienen procesos en las acciones, como es el caso de la "abstracción de operaciones" que se ve perjudicado o en consecuencia presenta características en su desarrollo cuando el alumno hace uso de éste, debido a que puede variar entre cada sujeto, así como también, a la presencia de tendencias y relación que se tiene con su uso y aprendizaje de las matemáticas.

Cuando se piensa en la introducción de nociones matemáticas de cualquier índole (modelo concreto y sintáctico) es conveniente de acuerdo Filloy (1999) tener en mente algunas componentes de los modelos. Entre ellas destaca dos componentes fundamentales una la traducción que es donde se "dota de significado y sentido" en un contexto concreto (modelo concreto) a los nuevos objetos y operaciones que se introducen, mismos que estarán presentes en situaciones más abstractas; esto quiere decir, que mediante esta componente (traducción) se relaciona los elementos de una situación concreta con los elementos pertenecientes a las situaciones de tipo abstracto y a partir de lo que ya se sabe en un contexto concreto. La segunda componente del modelaje es para Filloy (1999), la separación de los nuevos objetos y operaciones de los significados más concretos con que fueron introducidos; esto significa desprenderse de la semántica (la costumbre de ciertos usos) de modelo concreto, ya que es situaciones posteriores se pretende lograr que el sujeto no solamente resuelva situaciones que ya sabe resolver, si no por lo contrario, sería conveniente resolver situaciones más abstractas. Esto significa que el sujeto al entrar en el contexto de una situación o problema matemático, el alumno al usar sus conocimientos previos puede reestructurar de la situación en la que se encuentra involucrado; modificar, desechar y adaptar a diversas o nuevas situaciones sus conocimientos.

Sin embargo, para que la deficiencia en la componente de abstracción sea modelada y al sujeto no se le deje que se desarrolle de manera espontánea, debido a que tiende a ocultar lo que se esencialmente se pretende enseñar debe ser fortalecida en el sentido amplio de ser tomada en cuenta y modelada en la enseñanza.

Procesos Cognoscitivos

Los procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación van afinando los elementos complejos como los que se utilizan:

> en a) en la percepción que es más que el caso del manejo de las formas geométricas y sus transformaciones, b) en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con el proceso de comprensión, c) el uso cada vez más intensivo de la memoria, d) en el desencadenamiento de proceso de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, e) en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problémicas, f) en el aprendizaje muy ligado a los procesos de generalización y abstracción, y que requieren de usos novedosos de los SMS de la matemática escolar. (Filloy, 1999 p. 37)

Método y desarrollo de la investigación

La investigación, de tipo cualitativo, examina en su primera fase documental, la propuesta institucional (SEP, 2006) para educación secundaria, con el objeto de identificar a nivel curricular cuáles son las orientaciones respecto a conceptos relacionados con álgebra, pero, en específico con sucesiones de tipo lineal y cuadrático. Así mismo, se examina el fichero de actividades (SEP, 2002) en el que a la par con el programa de estudio, contiene actividades relacionadas con patrones. Así mismo se ha hecho una revisión sobre la literatura (todavía sigue en proceso) para concluir con el marco de referencia. Para que un determinado momento, se formulen hipótesis en términos de tesis teóricas. Para llevar a cabo el estado de experimentación (Véase figura 1): Preparación de las experiencias de aprendizaje, mecanismos de observación, clasificación y medición, y diseño del trabajo con los aprendices. En un primer acercamiento, con el fin de generar (a posteriori) y aplicar las actividades se aplicó un cuestionario exploratorio (evaluación diagnóstica) a un grupo de secundaria, con un total de 20 alumnos de entre 14 y 15 años de edad, para determinar la eficiencia del estado del conocimiento de los alumnos en relación al SMS (Sistema Matemático de Signos) más concreto del nuevo (más abstracto).

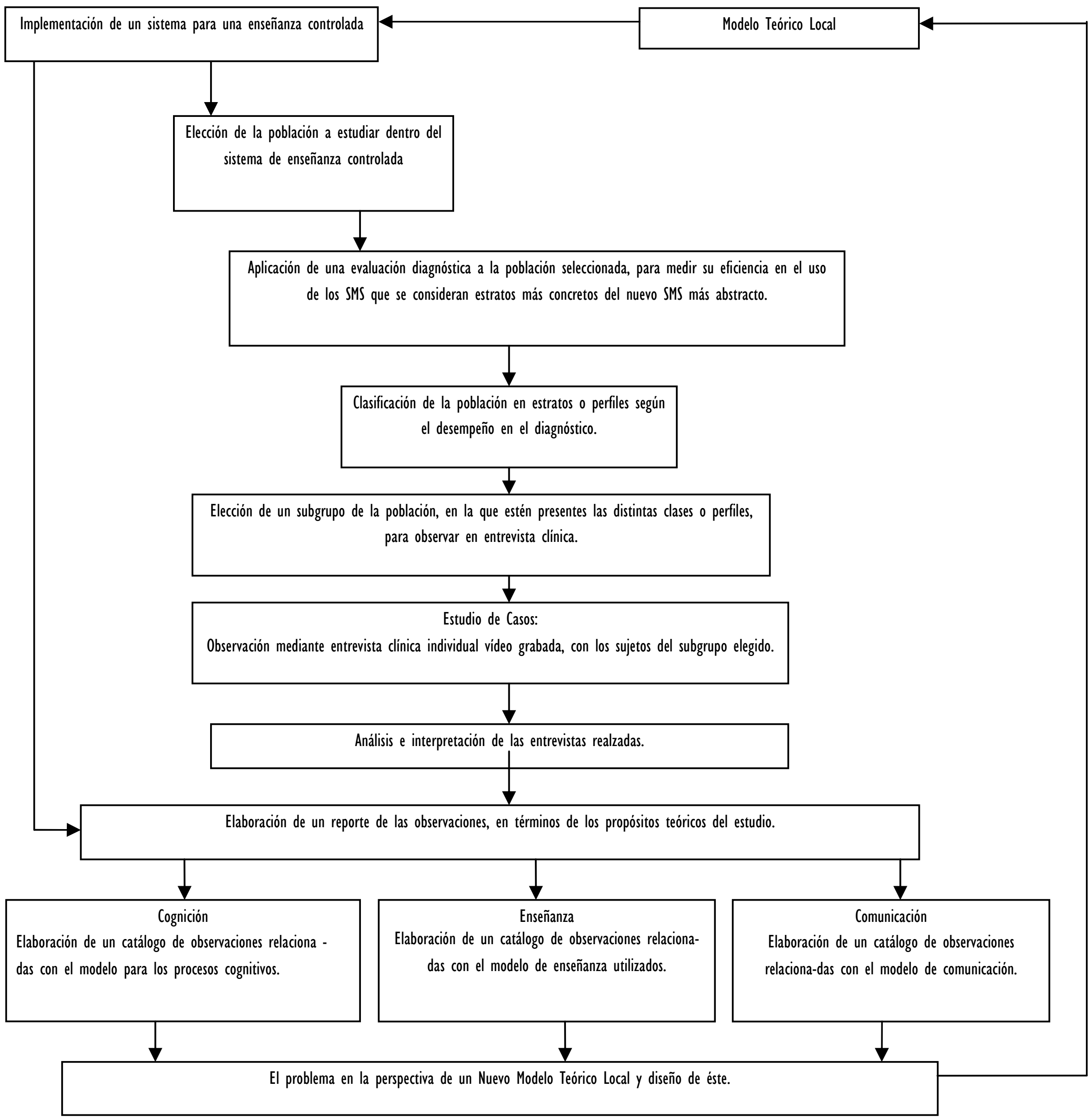


Figura 1. Esquema del desarrollo de la experimentación (Filloy, 1999).

Resultados e interpretación

Al hacer una revisión minuciosa sobre la propuesta institucional, se ha encontrado que las actividades que se proponen para explorar situaciones que involucren a sucesiones de segundo grado, que a su vez se expresan mediante el álgebra y en especial aquellas que refieren al uso del método de diferencias, son iguales a las que diversos libros sugieren, aunque cabe mencionar que no es el único recurso didáctico que también tiene en su contenido repetidas lecciones, esto también es para el caso de el fichero de actividades (SEP, 2000) que a la par con uno de los planes del programa de estudios clarifican el desarrollo del método de diferencias, pero con el mismo problema planteado.

La propuesta institucional para la educación secundaria tiene como propósito mediante el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico la insistencia en ver lo general en lo particular; obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón (SEP, 2006). Asimismo, hace referencia a situaciones en donde la sucesión de tipo lineal y de segundo orden intervienen en el desarrollo de conceptos, pero, cuando se habla de construir modelos que representan a ésta última situación, resulta que no está muy explicito en relación a las actividades. Este también es el caso del fichero de actividades (SEP, 2000), las consignas que se proponen, no están categorizadas con explicitud.

En una primera aproximación, los estudiantes utilizaron el método aritmético: tanteo. La actividad a realizar consistía en llenar espacios; es decir, completar varias sucesiones; tres de tipo lineal y una de segundo orden. En las primeras sucesiones, los alumnos no tuvieron problemas, utilizaron la operación suma, identificaron el comportamiento del patrón y descubrieron los términos faltantes. Cuando se trató de identificar cuáles eran los números que completarían a la sucesión de grado dos, los alumnos utilizaron el tanteo para estimar su resultado, sólo una alumna pudo completarlo, sin embargo, el resto de los estudiantes les fue complejo; no encontraban el patrón de comportamiento, las operaciones que se ejecutaban no tenían sentido, y por ende no completaban la sucesión. Otra actividad a realizar por parte del alumno está relacionado con secuencias de grado uno y dos (Figura 2), en ésta se pide que se encuentre a partir de una secuencia ordenada, el número de elementos que tendrá una figura intermedias de y posteriores posiciones de una sucesión, sin llegar a la generalidad, debido a que en ese punto, la actividad no lo contempla.

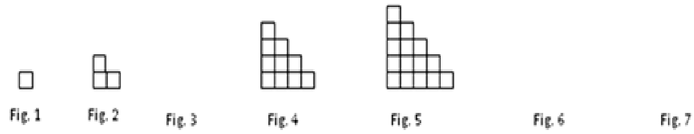


Figura 2. Sucesión de figuras de tipo dos.

Al comienzo de la actividad, los estudiantes resolvieron las condicionantes de la evaluación de forma individual. Como ya se mencionó, al aprendiz se le requirió que encontrará el número de cuadrados que contendría la figura (Fig.) 3, 6 y 7. En primera, por ejemplo una alumna descompuso por así decirlo, cada una de las figuras (Fig.) de esta manera (Véase Figura 3). Esto con el objeto de encontrar el número de elementos faltantes (cuadritos) de una figura.

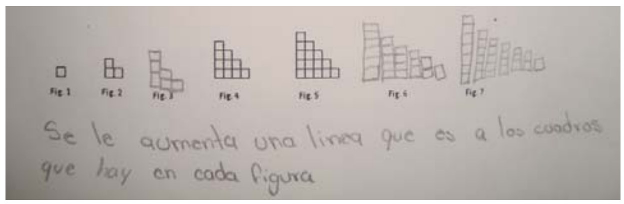


Figura 3.Descomposición de la estructura figurativa para encontrar otros valores

Respecto a sucesiones figurativas en donde el patrón se comporta de forma cuadrática y además se adjudica la condición de encontrar una expresión algebraica que permitiera definir cualquier término (figura), los alumnos optaron por hacer uso de combinaciones de sumas y restas, para determinar el número de estrellas o asteriscos que contenían las siguientes figuras (Figura 4). En cambio, otros estimaron sus resultados, se aproximaron mediante ensayo y error. A pesar de que alumnos (no muchos), encontraron una forma de construir las siguientes figuras; es decir, visualizar formo parte de ellos para enlazar un sistema gráfico con uno de tipo formal, se encontró que en el intento por representar a la situación para definir el enésimo término, vinculado con el patrón sucesivo y la expresión algebraica, el sujeto no determina esa relación. Entre tanto, el alumno llega identificar cuantos elementos (asteriscos) contiene cada una de las figuras, como están colocadas y así efectuar operaciones si fuese necesario para relacionar el incremento de asteriscos, como el número de de posición que corresponde a cierto número de elementos.

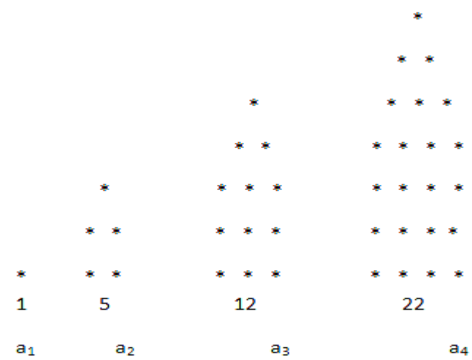


Figura 4. Secuencia de figuras de segundo orden.

Conclusiones

En este primer acercamiento, se pudo constatar de cuáles son algunas de las estrategias y dificultades que presentan alumnos de secundaria al tratar con este contenido. Si bien es cierto, también se pudo observar que el método de tanteo al cual ha afianzado el alumno, esto es, que usan el ensayo y error para determinar valores faltantes de una sucesión sin poder llegar a la generalización. Cabe decir, que el usar este tipo de patrones figurativos pone en claro el papel que desempeña la visualización en términos de recurso para generar un sintetizador (expresión algebraica) que reitere el comportamiento de dichas sucesiones. Debido a que ayudo a legitimar la simbolización pero de forma aritmética.

Además, respecto a el currículo se pudo constatar de que en se requiere reforzar este tema, con más actividades para llegar a concebir una de las cuestiones propuestas, que no es más que ver lo general en lo particular.

Referencias bibliográficas

Calvillo, N. & Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. En C. Crespo Crespo (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 20 (pp. 421-426). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Filloy, E. (1999) *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Herbert K. & Brown, R. (1997). Pattern as Tools for Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics 3*(6), 340-345.

Nacional Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Council.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1989) *Diseño Curricular Base 1989. Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Fichero de actividades 2000*. Educación *Básica. Secundaria. Matemáticas.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Programa de estudios 2006. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular. México: SEP.

Stacey K. (1989) Finding and Using Patterns in Linear Generalization Problems. *Educational Studies of Mathematic, 20*(2)*,* 149-164.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

LOS SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Rebeca Flores García
CICATA – IPN (México)
rebefg@gmail.com

Resumen. Este artículo describe una conexión con la idea de articularse a lo que en la disciplina de Matemática Educativa se está produciendo a través de diversas vertientes de investigación relacionadas con el concepto de fracción que se están generando, algunas ligadas a la noción de fracción, a su operatividad y a los significados que le son asociados. Aquí se presenta y analiza un problema de reparto resuelto por jóvenes de entre 12 y 15 años pertenecientes a una escuela secundaria del Estado de México, en cuyas producciones se evidencian diferentes significados del concepto de fracción así como de formas de operación entre ellas.

Palabras clave: fracción, significado, operatividad, número racional

Abstract. The article describe a link to the idea of articulating what in the discipline of Mathematics Education is taking place through various aspects of research related to the concept of fractions that are being generated, some linked to the concept of fraction, in operational and meanings that are associated. Here we present and analyze a distribution problem solved by young people between 12 and 15 years belonging to a secondary school in the State of Mexico, whose productions are evident in different meanings of the concept of fractions as well as methods of operation between them.

Key words: fraction, meaning, operability, rational number

Introducción

En la Matemática Educativa para llevar a cabo el análisis de fenómenos cognitivos y del aprendizaje matemático, se utilizan algunas nociones teóricas, las cuales actualmente siguen siendo clarificadas, entre ellas se encuentra la noción de significado, la cual ha sido expuesta por D'Amore (2005) a través de dos vertientes: una visión desde lo real y otra desde lo pragmático. Bajo estas visiones intentamos mirar la problemática presentada en esta investigación.

Uno de los contenidos que en el nivel básico ha sido muy estudiado sin duda alguna es el de fracciones. Numerosos estudios que respecto a este objeto se han hecho tanto a nivel nacional como internacional, por ejemplo Perera y Valdemoros (2007), reconocen a las fracciones como uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación. Fandiño (2005), también reconoce que la noción de fracción y la operatividad correspondiente son de los contenidos más estudiados desde el inicio de la investigación en Matemática Educativa debido quizá a que representan una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo, ya que también nos advierte de algunos errores típicos cometidos por los estudiantes, entre ellos se destacan:

- Ordenar fracciones y escribir números decimales,
- Las operaciones entre fracciones y entre números racionales,
- Reconocer los diagramas más comunes,
- Utilizar el adjetivo "igual",
- Manejar la equivalencia,
- Simplificar fracciones,
- Utilizar figuras no estándares,
- Pasar de una fracción a la unidad que la ha generado y
- Manipular de manera autónoma diagramas, figuras o modelos.

Así es como nuestra de pregunta de investigación se enfocó en responder la siguiente pregunta: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presentes en la escuela secundaria?,* de este planteamiento se deriva un cuestionamientos más: *¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción movilizados por los estudiantes?*

De acuerdo con Valdemoros (1993), Dávila (2002) y Fandiño (2005), uno de los estudios que ha contribuido en el análisis de los diferentes significados que le son asociados a la fracción ha sido la investigación que desde los años setenta ha sido desarrollado por Kieren (1988), quien consolida y plantea un modelo teórico con cuatro subconstructos esenciales, el otro (parte – todo) se encuentra implícito en cada uno de los otros:

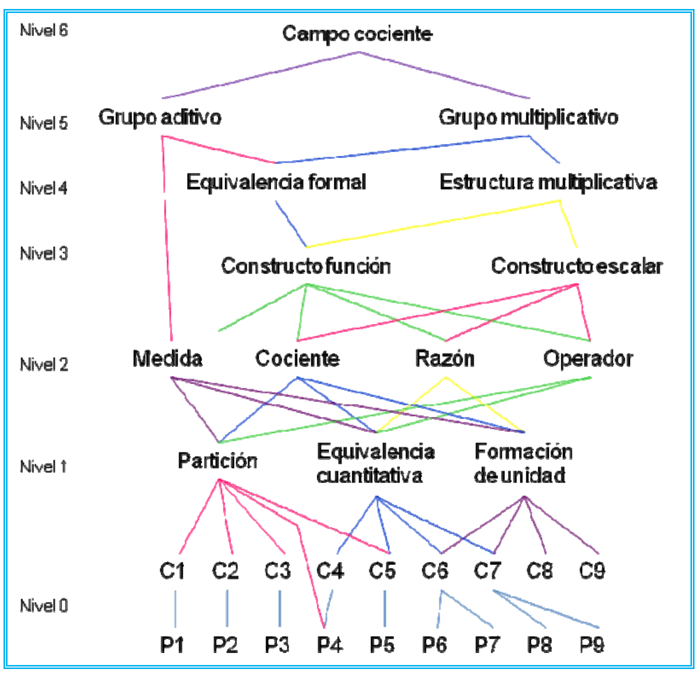


Figura 1. Conocimiento "ideal" del número racional (Millsaps, 2005, p.19)

En la base del modelo se observa un sistema de conocimiento cercano al plano de los hechos (nivel 0), en esta zona el conocimiento es local; en un siguiente nivel se encuentran los *mecanismos de formación*, los cuales corresponden a los procesos de partición, equivalencia cuantitativa y formación de unidades divisibles, los tres le permiten incluso a una persona joven "resolver" cierto tipo de problemas relacionados con número fraccionarios, los cuales se pueden representar mediante un lenguaje fraccionario aditivo y son la base para el conocimiento de la fracción unitaria (Kieren, 1988). En un segundo nivel se ubican los *mecanismos intuitivos*: medida, cociente, razón y operador guardan conexiones con los procesos ya mencionados, además de poseer características o "cualidades" aditivas (en el caso de la medida y el cociente) y multiplicativas (para la razón y el operador) (Valdemoros, 1993). Para un tercer nivel ubicamos al constructo función y al constructo escalar, los cuales, en el modelo contribuyen al desarrollo del razonamiento proporcional y al campo conceptual multiplicativo de Vergnaud (citado por Millsaps, 2005). Entendiéndose este campo multiplicativo como "todas las situaciones que pueden ser analizadas como simples problemas de proporcionalidad múltiple y para los cuales necesitas multiplicar o dividir". En el cuarto nivel se encuentran la equivalencia formal y la estructura multiplicativa, las cuales representan la síntesis de la construcción formal de la fracción y del número racional. En el quinto nivel se ubican los grupos aditivo y multiplicativo; los cuales incluyen las 4 operaciones con los números racionales y cuyo acompañante es la habilidad para crear y representar problemas de los números racionales. Finalmente, aparece la noción de campo cociente, el cual además de ser extenso atraviesa los otros niveles (los cuales se encuentran interconectados) hasta llegar al plano de los hechos, lo cual complejiza aun más el desarrollo de este modelo teórico.

Metodología

La investigación que a continuación se presenta, recupera elementos de corte cualitativo, por lo que es trascendente recuperar dónde, con quiénes y cómo fue llevada a cabo, pretendiendo dar respuesta a las preguntas planteadas.

Centramos nuestra atención en analizar la presencia de las fracciones en el discurso matemático escolar del nivel secundario a través de la presentación de investigaciones realizadas en torno a los significados que se otorgan a las fracciones en la escuela y a la identificación de los mismos en libros de texto de uso habitual en la actualidad y en el programa de estudio de México. Hechos que permitieron conformar un instrumento conformado por seis planteamientos que se aplicó a estudiantes de nivel secundario (entre 12 y 15 años de edad) con la finalidad de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados por ellos. Para el caso que nos ocupa presentaremos las producciones generadas de algunos estudiantes al resolver un problema que gira en torno al reparto, que como vimos es uno de los mecanismos de formación considerados en el modelo de Kieren (1988), guardando vínculos con nociones como medida, operador, cociente, los cuáles intentaremos dejar ver en las producciones de los estudiantes. El cuestionario fue aplicado a 36 estudiantes de cada grado del nivel secundario, haciendo un total de 108 estudiantes, todos ellos cursaban en el turno vespertino. Los bosquejos que a continuación se presentan, se encuentran ordenadas en distintos niveles, que van del menor al mayor grado de profundidad, por lo que el último nivel se presentará la solución "completa" propuesta por alguno de los estudiantes, el propósito de efectuar la presentación a través de niveles es con la intención de evidenciar la evolución del significado generada por ellos, lo cual puede revisarse con más detalle en Flores (2010).

Resultados

En la literatura se reconoce que el estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra (SEP, 1994)

El planteamiento enuncia lo siguiente:

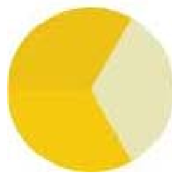
> *Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad?* (SEP, 2001, p.82)

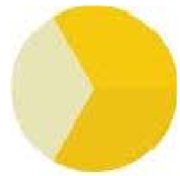
La solución del problema incluye nociones relacionadas con el concepto de fracción; entre éstas, las de unitización (Lamon, 1999), parte todo, partición (que para las fracciones implica repartir en partes iguales), cociente, operador, medida y razón. Asimismo incluye las nociones de equivalencia de fracciones, así como las operaciones de adición, diferencia y multiplicación de fracciones.

Una mirada a la solución del problema

Solución propuesta a la primera pregunta:

Corresponde al reparto de las 2 pizzas (a partes iguales) entre los 3 amigos. Lo cual se obtiene con sólo dividir la unidad de 2 (1 de 2) entre 3; es decir, al calcular $\frac{2}{3}$, lo cual indicará que cada uno recibirá $\frac{2}{3}$ de pizza.





Reparto a 3 amigos

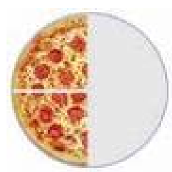
$\frac{1}{3}$ (de 2)

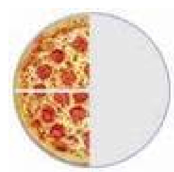
$=\frac{2}{6}$ (de 2)

$\approx\frac{2}{3}$ (de 1)

Figura 2. Representación de $\frac{2}{3}$ de cada pizza.

Solución propuesta a la segunda pregunta:





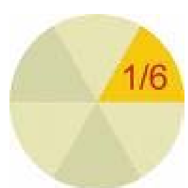
Reparto a 4 amigos

$\frac{1}{4}$ (de 2)

$=\frac{1}{2}$ (de 1)

Figura 3. Representación de $\frac{1}{4}$ de cada pizza

Una solución dependiente: (la segunda respuesta en función de la primera)



$\frac{2}{3}-x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{6}$ (de 1)

$\approx\frac{1}{4}\left(de\frac{4}{6}\right)$

Figura 4. Representación de $\frac{1}{6}$ de pizza

Así; cada uno de los 3 amigos iniciales; deberán dar $\frac{1}{4}$ de lo que recibieron en el primer reparto, al cuarto amigo que llega al final. Esto debido a que $\frac{2}{3}\left(\approx\frac{4}{6}\right)$ de una pizza, se convierte en la nueva unidad a considerar para dar respuesta a la segunda pregunta. Ha de observarse que el problema y su solución incluyen (al menos) 3 tipos de unidades distintas: 1 (de 2), 2 (de 1) y 1 $\left(de\frac{2}{3}\right)$. Asimismo incluyen la noción de equivalencia y las operaciones de adición sustracción y multiplicación de fracciones. Hechos que apuntan a propiedades de Q como estructura algebraica (es decir, como un conjunto no vacío en el que se tienen definidas operaciones y éstas poseen propiedades). Propiedades como: $\frac{a}{b}(c)=\frac{c}{b}(a)$, $m\left(\frac{1}{m}\right)=1$, $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$, entre otros.

A continuación se presentan evidencias de las soluciones de 4 estudiantes. En un primer nivel se encuentra lo propuesto por Vanessa del primer grado:

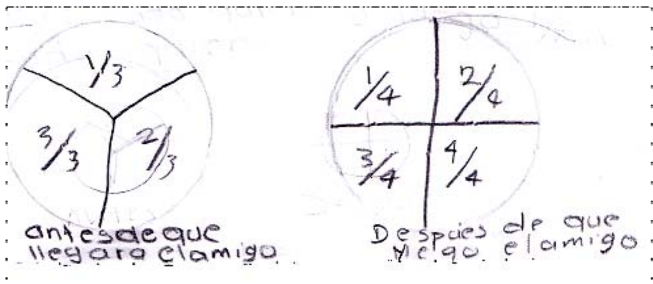


Figura 5. La solución propuesta por Vanessa.

Ella responde las dos preguntas representando el todo (las 2 pizzas) usando sólo un círculo. Hace uso de la noción parte – todo. Utiliza la escritura de fracciones de una manera aparentemente "ordinal" ($\frac{1}{3}$ para el primer tercio; $\frac{2}{3}$ para el segundo tercio, etc.). No percibe una conexión entre la primera y la segunda pregunta.

En un segundo nivel se encuentra la respuesta propuesta por Enriqueta, quien también se encontraba en primer grado:

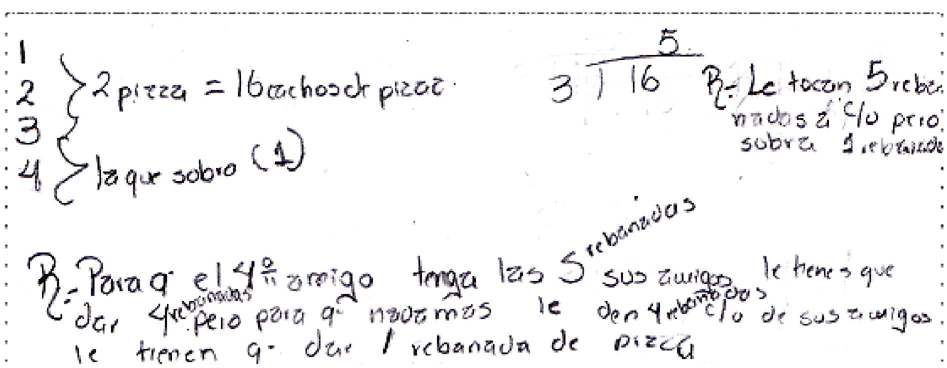


Figura 6. El procedimiento de Enriqueta.

Ella conecta las dos preguntas. Sus respuestas son "aproximadas" y se deben a que la pregunta (que parece dominante) es la segunda. Anticipa una partición de las 2 pizzas en un total de 16 rebanadas, de manera que al repartirlas entre los 4 amigos, cada uno reciba un total de 4 rebanadas. Hecho que obtiene cuando cada uno de los 3 amigos iniciales le convida una de sus

5 rebanadas que le tocaron en el primer reparto. Obteniendo así 3 rebanadas, las cuales sumadas con aquella sobrante de ese primer reparto, le proporcionaría la cantidad requerida. Enriqueta sólo realiza operaciones con enteros.

En un tercer nivel se encuentra el procedimiento de Brenda de tercer grado:

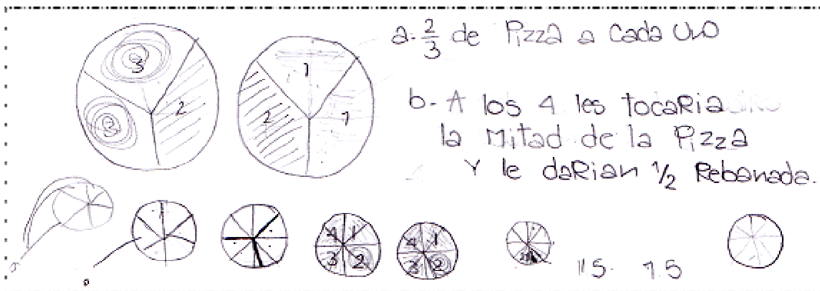


Figura 7. El procedimiento de Brenda.

Aquí ella resuelve correctamente la primera parte; no obstante, hace uso de una notación fraccional, logra conectar las dos preguntas y contesta acertadamente la segunda parte también (aun cuando no lo consiguen expresar en términos fraccionarios de la unidad original). En su solución implícitamente establece que:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{2 rebanadas}}}{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{1 rebanada}}}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En un último nivel se encuentra el procedimientos de Sandra de segundo grado, quien nos evidencian una solución correcta.

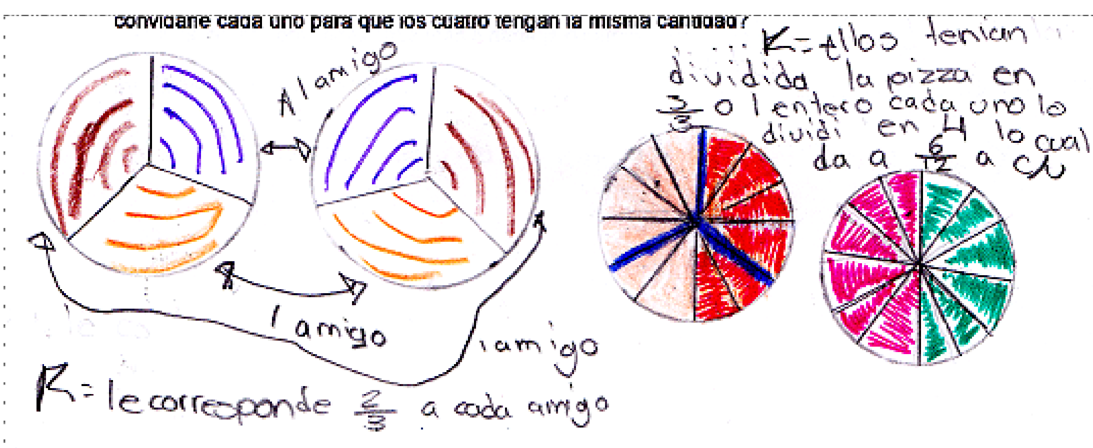


Figura 8. El procedimiento de Sandra.

Sandra incorpora en su solución; de manera implícita, los hechos:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Ella logra responder gráficamente la segunda pregunta. Obsérvese que la respuesta a la segunda pregunta está dada en términos de una pizza como unidad, y no como una comparación con la "nueva unidad $\left(\frac{2}{3}\right)$"

Implicando nociones como: equivalencia, orden y comparación.

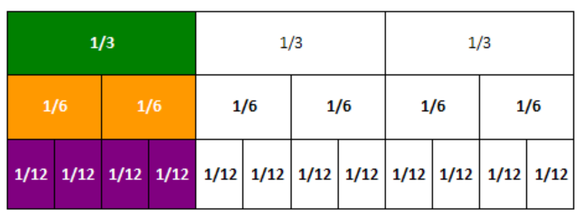


Figura 9. Fracciones equivalentes de $\frac{1}{3}$

Conclusiones

Al mirar con detenimiento el proceso de solución queda de manifiesto que el problema planteado incluye los siguientes elementos: entre los significados asociados a la noción de fracción involucrados en el problema: (*parte todo, operador, medida, cociente, partición,* la noción unidad: 2 de 1; 1 de 2; 1 de $\frac{2}{3}$ (entre otras); junto con la equivalencia de fracciones, la adición, la diferencia y el producto de fracciones). De acuerdo con las respuestas proporcionadas por los estudiantes, una solución "completa" la ofrece una estudiante de segundo grado.

Algunas de las dificultades detectadas fueron: a) la interpretación del problema, debido a que algunos sólo responden una de las dos preguntas que incluye el problema; b) la forma en que llegan a la respuesta de la segunda pregunta – evadiendo considerar las condiciones para responder esa pregunta; c) la nueva unidad que se considera y que es $\frac{2}{3}$, parece ser la idea que no logra trascender, el hecho de partir ahora de una fracción y repartirla nuevamente en partes iguales; d) acceder a la noción de equivalencia, pocos son los que perciben cómo es que esa noción les permite arribar a fracciones equivalentes para poder realizar el reparto solicitado.

Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté.

Dávila, M. (2002). *Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italia.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Millsaps, G. M. (2005). *Interrelationships between teacher's content knowledge of rational number, their instructional practice, and students' emergent conceptual knowledge of rational number.* Tesis de doctorado no publicada, Ohio State University, Columbus.

Perera, P. y Valdemoros, M (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática* XI, 209–218.

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria*. México.

Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria*. México.

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en* él. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LAS ECUACIONES DE LA RECTA Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Oleksandr Karelin, Germán Reséndiz López
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. U. Tecnológica de Tulancingo (México)
acostah@uaeh.edu.mx, karelin@uaeh.edu.mx, gresendiz@hotmail.com

Resumen. La noción de linealidad en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano. Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal. Desde un punto de vista histórico epistemológico el estudio matemático de la linealidad se inicia durante el desarrollo del Álgebra Lineal, a mediados del siglo XIX. Los trabajos sobre la recta tangente sirvieron para profundizar la noción de linealidad. En el ambiente escolar moderno de licenciatura no se resaltan de manera suficiente los significados asociados a la linealidad ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior. Se busca precisar, desde lo epistemológico, algunos indicios respecto a las ecuaciones de la recta en el plano, para propiciar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate de las ecuaciones de la recta permite aclarar aspectos vinculados con la noción de linealidad y sus significados.

Palabras clave: linealidad, recta, epistemología, didáctica, significados

Abstract. The notion of linearity in the higher educational level is not explicit from the different analytical representations of the line in the plane. The equations themselves are an obstacle in the interpretation of the concept of linear transformation. According to a historical epistemological point of view mathematical studies of the linearity start together with development of linear algebra in the mid-nineteenth century. Work on the tangent line served to deepen the notion of linearity. In the modern school environment degree not sufficiently highlight the meanings associated with the linearity or related topics are linked to the high school level. It seeks to clarify, from the epistemological, some clues to the equations of the line in the plane, to facilitate a consistent and structured didactic discourse in school mathematics. For this purpose the rescue of the equations of the straight clarify aspects linked to the notion of linearity and their meanings

Key words: linearity, line, epistemology, didactics, meanings

Introducción

En la investigación *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural* (Acosta, 2011) se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. El propósito general de dicho trabajo es mostrar y caracterizar los diferentes significados de la noción de linealidad y de su antecedente conceptual la noción de proporcionalidad, desde una perspectiva sistémica. Se observa que dichas nociones cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para el aprendizaje de la matemática lo que proporciona su función de nociones metamatemáticas.

En particular para este trabajo, se considera un Marco Conceptual constituido por las interpretaciones acerca del término *noción* (un saber susceptible de ser enseñado en ámbito escolar), y de las *nociones didácticas* (Chevallard, 1997).

Las nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos (Chevallard, 1997): las nociones explícitas que están conformadas por las nociones matemáticas (Son objeto de estudio y evaluación en si mismas, además sirven como instrumento para el estudio de otros objetos.); y las nociones implícitas conformadas por las nociones paramatemáticas (son las que se utilizan conscientemente, esto es que son reconocidas y designadas como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas, y por lo tanto no son objetos de evaluación directa.) y las nociones protomatemáticas (Son las nociones que se emplean en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.) (Martínez, 2002).

En este reporte de investigación se sostiene que la noción de linealidad en la didáctica del nivel superior no es explícita desde las distintas representaciones analíticas de la recta en el plano, ni se vincula con la proporción directa. Además la linealidad adopta un estatus didáctico diferente, de acuerdo al curso y al grado escolar.

La forma científica de conducir este trabajo, está sustentada en el enfoque sistémico, además de tomar en cuenta, como elemento metodológico, el *rescate epistemológico de los significados* (recuperación de significados que subyacen al conocimiento, lo cual se realiza en diferentes momentos de la evolución del mismo (Acosta, 2011)) de la noción de linealidad.

Antecedentes históricos epistemológicos

La matemática previa a la griega, en particular la babilónica y la egipcia, alcanzaron un gran desarrollo de la habilidad operatoria, para afrontar cierto tipo de problemas de la vida cotidiana, desde la distribución de una herencia, hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica funcionaba para hacer cálculos astronómicos, mercantiles, y mediciones de áreas y volúmenes; en tales estimaciones, la proporción directa se empleaba con frecuencia (Filloy, 1998).

En la cultura egipcia, no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales, que escritas en simbología moderna son de la forma $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$. En el *Papiro de Rhind,* se muestra la solución de este tipo de ecuaciones, empleando un método que en nuestros días se conoce como el *método de la falsa posición* (Boyer, 1991).

En *Los Elementos* de Euclides, escrito hacia el año 300 a. C., los postulados, *Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto y toda recta se puede prolongar* *indefinidamente.* Dichas proposiciones se refieren a la recta, no sólo en el sentido de que por dos puntos pasa una recta, sino además de que ésta es única.

En el primer postulado del primer libro, *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes, da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Además, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, 1999). Sin embargo tal definición se planteó desde el punto de vista geométrico, sin que hubiera en ese entonces algún vestigio ni antecedente remoto del sistema cartesiano, donde pudiera caracterizarse a la recta como hoy en día.

Hacia el año 370 a. C. Eudoxio de Cnido (408? – 355?) profundiza en las ideas de Anaxágoras, tomando a la geometría antigua como un caso particular, en el sentido de que dos magnitudes no pueden formar una razón si la menor de ellas no puede hacerse más grande que la mayor mediante su multiplicación por números enteros, definiendo indirectamente la igualdad de dos razones *a: b y c: d,* exigiendo que al elegir dos números dados cualesquiera *m* y *n resulte siendo m a* menor o mayor o igual a *nb,* sea *m c* menor o mayor o igual a *n d* (Hofmann, 2002). Este hecho relevante resulta un antecedente epistemológico de la ecuación de la recta $y= mx$, donde por supuesto está implícita la noción de linealidad, cuya perspectiva geométrica en el plano se inicia desde los trabajos de Descartes, y la cual en la actualidad se estudia en el nivel medio superior.

La noción de linealidad, surge de forma incipiente desde que se trabajan las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, usadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

Se puede resaltar que en los primeros hechos históricos, la proporcionalidad tiene un sentido práctico que se manifiesta en la solución de problemas lineales contextuales y cotidianos, y que la idea naciente de linealidad, aunque no está representada de manera explícita por medio de ecuaciones tal como las conocemos hoy en día, si está presente en aspectos científicos relevantes de aquellos tiempos.

Hacia finales del siglo XVII, hay un florecimiento de la matemática, en el sentido de la unificación de conocimientos nuevos a partir de trabajos antiguos. Fermat y Descartes toman lo obtenido por Apolonio de Pérgamo (262 ? - 190? a. C.), desde su escrito *La Cónica* y establecen la unificación geométrica - algebraica de la recta, proponiendo su ecuación: *En su empeño de dar pleno sentido a los trabajos antiguos sobre lugares geométricos, se le ocurrió a Fermat, como a Descartes, de cuyas obras no conocía nada entonces, determinar la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Ya da a la recta que pasa por el origen, la forma* $b\,x = a\,y$ *y considera* $a\,x + b\,y = c$ *como la ecuación de una recta en su forma general y la amplía al* *problema del lugar geométrico de Apolonio, reconociendo que* $\sum a_i x + b_i y + c_i = d$ *es la ecuación de una recta* (Hofmann, 2002).

En el mismo sentido, Descartes (1596 – 1650) crea el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, siendo su meta un método de investigación que permita ir de lo complejo a lo sencillo, y de las hipótesis a la evidencia y a la claridad. Busca el vínculo iniciado, pero no terminado por Viète, del Álgebra con la Geometría. Descartes agrega a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás, considerándolos como problemas del plano (denominación de Apolonio).

A diferencia de los hechos históricos iniciales, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales *(x,y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico.

El surgimiento incipiente del Álgebra lineal se da con algunas ideas de Euler y Cramer a partir del siglo XVIII. Su inicio partió del análisis de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente, conceptos como matrices, determinantes, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales y espacios vectoriales. Sin embargo en este desarrollo histórico epistemológico del Álgebra Lineal, no se aclara la importancia conceptual de la proporcionalidad, ni su vinculo con la ecuación de la recta en R^2, ni con la noción de linealidad, circunstancia que se hereda a la estructura temática y conceptual de los ambientes didácticos modernos.

La ecuación de la recta en el plano y la linealidad

En particular en la escuela, las ecuaciones de la recta pueden adoptar un estatus diferente, según el rol que estén desempeñando en la didáctica, por lo que ellas mismas pueden bloquear la interpretación de algunos otros conceptos.

La enseñanza de la recta en bachillerato se inicia con la ecuación *y=mx+b*, como noción matemática, donde *m= tan* α y α es el ángulo de inclinación con respecto al eje *x* (Lehmann, 2001). Las ecuaciones mismas representan un obstáculo en la interpretación del concepto de transformación lineal *L(au+bv)=aL(u)+bL(v)*, como noción matemática, de lo cual Golubitsky y Dellnitz (2001) afirman que: *la idea central en álgebra lineal es la linealidad*. La forma *ay=bx*, la cual es herencia epistemológica de la igualdad de dos razones *a: b y c: d* planteada por los griegos de la antigüedad, representa una transformación lineal, sin embargo *la ecuación pendiente ordenada al origen* no lo es (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008). Ello no se aclara en el nivel medio superior, ni en el sentido del estatus didáctico que tiene en la escena escolar, ni por ser un antecedente histórico epistemológico, y como consecuencia, esta vaguedad sobrevive hasta los cursos iniciales de licenciatura.

También en el ámbito didáctico actual, en general no se hace énfasis a los trabajos de Fermat y Descartes basados en los resultados obtenidos por Apolonio siglos antes, donde definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, el cual la proporcionalidad toma la forma analítica *b x = a,* y donde se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad, sin que por supuesto sea el objeto de estudio, esto es que sólo presente un carácter paramatemático.

Desde el enfoque geométrico, se puede trazar una recta uniendo dos puntos diferentes, siendo esta única. Además de que existe sólo una recta que pasa por otro punto distinto que es paralela a la primera, como se evidencia en los postulados de Euclides. La noción de linealidad tiene conexiones estrechas con la noción de paralelismo, (ya que dos rectas en el plano cartesiano son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente). En ámbito escolar se necesita explicar el vínculo conceptual entre la proporcionalidad, la linealidad y dependencia lineal.

En los primeros semestres de licenciatura se aborda, aunque de manera aislada con respecto al tema de *la recta* del nivel medio superior, la ecuación *ax+by=0* conociendo dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) por medio del determinante *2 x 2* igualado a cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

pero ello no se articula, ni con la proporcionalidad, ni con la dependencia lineal, lo cual auspicia un referente matemático escolar pobre en significados.

En particular, cuando se estudia el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad. En la escuela se menciona: *Dos vectores* v_1 *y* v_2 *definidos en* R^n*, con* $n > 1$*, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal* $c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} = 0$*, se cumple cuando* $c_1 \neq 0$ *ó* $c_2 \neq 0$*. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas,* $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$*, siempre y cuando* $c_1 \neq 0$*, o bien* $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$*, si* $c_2 \neq 0$ (Rondero, Tarasenko, Acosta, 2009).

El que dos vectores sean linealmente dependientes implica que geométricamente sean paralelos, y ello está relacionado conceptualmente con la idea de paralelismo entre rectas en el plano cartesiano. Tales significados tendrían que ser resaltados en la didáctica para una articulación apropiada de saberes en el curso inicial Álgebra Lineal. Sin embargo en la didáctica escolar no se agregan dichos elementos, privilegiando lo algorítmico y memorístico.

Por otra parte, para el aprendizaje de los conceptos de *recta tangente*, *derivada* y *diferencial* del *corpus* del Cálculo diferencial (Edwards & Penney, 1997) son indispensables las aproximaciones lineales. Por ejemplo en el texto de cálculo para bachillerato *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza* (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, Garza, 2005) se presenta una conceptualización de la derivada, a partir de la idea de razón de cambio constante, mediante un problema de movimiento rectilíneo uniforme, generalizando después a la ecuación lineal, donde la velocidad corresponde a la pendiente de la recta. En ese mismo texto se analiza el problema de la velocidad no constante de un automóvil, considerando pequeños intervalos de tiempo, en los cuales la velocidad sí es constante o sea emplea el Método de Euler. Lo que se hace es una linealización en cada subintervalo, al considerar la velocidad constante en cada uno de ellos. La expresión lineal recursiva que aparece es un instrumento y por lo tanto juega un papel paramatemático, ya que de manera explícita se emplean el carácter lineal, sin embargo la noción de linealidad no es el objeto de estudio.

En el Cálculo multivariable (Stewart, 1999) cuando se trata la forma vectorial de una recta en R^2, como noción matemática, especificando su dirección y uno de sus puntos; se tiene que, si $u= (a, b)$ es un vector no nulo diferente de cero, el punto $P_0= (x_0, y_0)$, w_0 el vector asociado con P_0, y x el vector asociado al punto $P(x, y)$. La recta L que pasa por P_0 y es paralela a u consiste de los puntos $P(x,y)$, con lo que se forma la ecuación vectorial: $x=w_0+tu$. Este objeto matemático se denomina *la ecuación paramétrica de la recta*: $x=x_0+ta,\ y=y_0+tb$ (escrita por componentes), donde t es un parámetro al que se le puede asignar cualquier número real. De lo anterior despejando t de ambas ecuaciones, e igualándolas se obtiene la *ecuación simétrica de la recta*:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$$

Para obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0=(x_0, y_0)$ y que contiene el vector no nulo $n=(a,b)$, se emplea el producto punto $n\cdot P_0P=0$, donde $P(x, y)$ está en la recta y donde $P_0P= (x-x_0, y-y_0)$, por lo que

$n\cdot P_0P=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (Kolman & Hill, 2006).

La forma paramétrica conecta las nociones de paralelismo y dependencia lineal, y representa el movimiento de una partícula por la trayectoria rectilínea. Aunque esta manera de presentar la ecuación de la recta tampoco se vincula de manera clara con la linealidad en la didáctica. Ello representa un obstáculo para el entendimiento de su definición, tanto como mapeo lineal como transformación lineal.

Hay diferentes temas de matemáticas que se explicitan mediante ecuaciones de rectas, como *Polinomios de Lagrange*, *Métodos de aproximación*, *Convexidad*, entre otros, dando variantes a los puntos de vista sobre la *noción de linealidad*. En particular los *Polinomios de Lagrange* para la recta que pasa por dos puntos se definen como:

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} y_2 .$$

Sin embargo en el ambiente escolar de licenciatura no se resaltan de manera suficiente sus significados asociados (Acosta, Tarasenko y Rondero, 2010), ni se vinculan con temas afines del nivel medio superior.

Conclusiones y reflexiones

Se ha buscado precisar el papel didáctico que presentan las ecuaciones de la recta en el plano, en diferentes momentos curriculares, para propiciar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Además se clarifica cuando por ejemplo una representación, como lo es una ecuación de la recta en el plano cartesiano, es un obstáculo en el entendimiento de algún saber, por ejemplo el concepto de transformación lineal.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la matemática avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes estadios didácticos, a veces manifiestos por las propias ecuaciones de la recta, que tienen su expresión en los conceptos que generan y que a su vez aportan nuevos significados a la misma.

Un obstáculo importante que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones *a: b* y *c: d* con la recta que pasa por el origen, *bx* = *ay*, y con la función lineal *f(x)*= *ax* +*b*. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presentan distintos significados que se entrevén por las ecuaciones.

Es de resaltarse el hecho de que los significados de la noción de linealidad rescatados de las ecuaciones de la recta en el plano, representan un andamiaje fundamental de articulación conceptual en la matemática escolar y se distingue su importancia transversal entre la matemática elemental y la matemática avanzada, esto es debido a la condición metamatemática de la noción de *linealidad*. En tal caso, la adecuada instalación de los elementos conceptuales antes señalados, propiciaría un aprendizaje matemático bien articulado con diversos conceptos del Álgebra Lineal.

En este trabajo se dan evidencias, de que el estudio de la recta permite aclarar aspectos vinculados con la noción de linealidad y sus significados asociados al papel didáctico que juegan en el ambiente escolar.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2011) *Análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad.* Tesis doctoral no publicada. México: CICATA-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* (enviado para su publicación). México: CLAME.

Boyer, C. (1991) *A History of Mathematics*. New York, USA: John Wiley.

Chevallard, Y. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Edwards, C. y Penney, D. (1997) *Cálculo diferencial e integral.* (4ª ed.). México: PEARSON Educación Prentice Hall.

Filloy, E. (1998) *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB.* México: Thomson Editores.

Hofmann, J. (2002) *Historia de la matemática.* México: Limusa.

Kolman, B. y Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal*. (8ª ed.). México: PEARSON Educación. Lehmann, C. (2001) *Geometría Analítica.* Editorial LIMUSA, México.

Martínez, G. (2002) Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (5) 1, (pp. 45-78).

Rondero, C., Tarasenko, A., Acosta, J., (2009) *Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 22: México.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J. (2005) *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas: ITESM.

Stewart, J. (1999) *Cálculo multivariable.* (3a ed.). México: Thomson editores.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* (2a ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.

ALGUNAS INFLUENCIAS CULTURALES EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Oscar Fernández Sánchez
Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia)
oscarf@utp.edu.co

Resumen. La Matemática, como ciencia, es un constructo cultural y por tanto, es posible estudiarse como un fenómeno comunicativo; pero también, como componente importante de una cultura, la forma de expresar el pensamiento matemático es propio de cada cultura y por tanto, no se puede hablar de la Matemática como un único lenguaje, o como un constructo universal, estático y único de toda la humanidad, sino que se debe hablar de ella, como las diferentes formas con que cada cultura ha construido un sistema simbólico dinámico con el cual expresa la filosofía de vida que caracteriza su subjetividad. Se pretende mostrar algunos aspectos que desde lo cultural han influido sobre el desarrollo de pensamiento matemático en la cultura de Occidente.

Palabras clave: cultura occidental, cultura maya, cultura china, pensamiento matemático, símbolos

Abstract. Mathematics as a science, is a cultural construct and it is possible to study as a communicative phenomenon, but as an important component of culture, the way to express mathematical thinking is particular in each culture and therefore we cannot speak of mathematics as a single language or as a universal, static and single construction of mankind, it should be said that different forms that every culture have built a dynamic symbolic system which expresses the philosophy of life which characterizes its subjectivity. It is intended to show some cultural aspects which influenced the development of mathematical thinking in Western culture.

Key words: western culture, Mayan culture, Chinese culture, mathematical thinking, symbols

Introducción

Pensar en la Matemática como un área del saber ausente de símbolos es un sinsentido, así mismo, hablar de pensamiento matemático sin influencias culturales sería insensato. Tanto la primera, como el segundo, son construidos con palabras, ladrillos retóricos, metáforas que por la constancia y costumbre de su uso hoy pasa casi inadvertida su influencia, bien sea para propiciar o para obstaculizar el desarrollo de pensamiento matemático a través de procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se habla de obstaculizar, porque muchos permanecen aturdidos por el ruido de la fuerza expresiva de las palabras o han sido encandilados por el brillo de su apariencia.

Como constructo cultural, las Matemáticas, han de estudiarse como un fenómeno comunicativo, que ha sido desarrollado a través del devenir histórico y social de la humanidad; la forma de expresar el pensamiento matemático es propio de cada cultura y por tanto, no se debe hablar de la Matemática como un único lenguaje, o como un constructo universal, estático y único de toda la humanidad, sino que se debe hablar de las Matemáticas, como las diferentes formas con que cada cultura ha construido un sistema simbólico dinámico con el cual expresa las lecturas que ellas hacen de su entorno social, de sus relaciones con la naturaleza y con el cosmos, con su visión de lo espiritual y trascendente del ser humano, en fin, de la filosofía de vida que caracteriza la subjetividad de cada cultura (Eco, 2006).

Pero si hablamos de cultura, debemos asumirla como un constructo constitutivo y dinámico de un grupo humano con características afines que lo identifican y lo diferencian. Y ligado a la cultura, reclama su injerencia la conciencia mítica y la fuerza de su influencia en la historia del espíritu humano. La historia de un pueblo está precedida por la mitología creada en la conciencia colectiva de dicho pueblo y según Cassirer, "la mitología es la que determina la historia de un pueblo; así, en la mitología de los hindúes y griegos estaba implícita toda su historia" (Cassirer, 1998, p. 22). El surgimiento del mito, del lenguaje, la configuración artística y la creación de los conceptos fundamentales del mundo y sus relaciones se ven sometidos al poder del signo, ese poder de actuación y de creación gracias al cual se constituye el conocimiento matemático. A continuación se muestran algunos casos donde se alcanza a visualizar como el pensamiento matemático ha sido influenciado por aspectos muy propios de la cultura donde haya sido desarrollado. Para empezar en una primera sección, se muestra el caso de la cultura griega y el uso de las matemáticas dentro de dicha cultura. En seguida, en la sección titulada "el símbolo impuesto por una cultura sobre otra", se muestra como los símbolos usados por una cultura están cargados por aspectos que aparentemente no tienen nada que ver con lo matemático como es la concepción del fenómeno de la muerte y lo que para una cultura hay después de ésta. En la sección que le sigue se muestra como una operación tan sencilla y común como es la resta, imposible en los primeros niveles escolares para la cultura de Occidente, fue algo sencillo y cotidiano en una cultura de Oriente, y por último en la siguientes dos secciones se hace un intento por responder a las preguntas ¿La Matemática es única y universal? y ¿Se están creando nuevas matemáticas?

El símbolo expresa el poder jerárquico dentro de una cultura

Detengámonos un momento en la Grecia clásica, la de Platón y Aristóteles, una cultura cuya historia está bastante marcada por su mitología como anotamos antes, una cultura donde existía el modo de producción esclavista, circunstancia que permite vislumbrar el uso del símbolo como instrumento de poder al interior de una misma cultura. La existencia de esclavos en la cultura griega, permite hacer una diferenciación bien definida en la distribución de los oficios desempeñados por éstos y los desempeñados por los hombres libres. Ahí, se consideraba que el hombre libre solo se podía dedicar a gobernar y a la filosofía. Desde aquella época se podía evidenciar una manifestación de poder de una clase social sobre otra, expresado a través de la simbología constitutiva de la matemática necesaria para el diseño y construcción de edificios, de embarcaciones, la agricultura, etc. Una matemática propia de los oficios desempeñados por los esclavos, quienes usaban estas matemáticas prácticas por razones meramente utilitarias, por tanto considerada distinta e inferior a la matemática sagrada que se discutía en los liceos, academias y escuelas donde se reunían los hombres libres, una matemática que constituía una parte fundamental del pensamiento filosófico que emanaba de las reflexiones continuas que se sucedían en dichas instituciones, dichas reflexiones filosóficas, sustentadas desde la Lógica, que llevaban a conocimientos dentro de la matemática misma, conocimientos sin un sustrato real que los justificara, sino un resultado que se enmarcaba en el mundo abstracto de las ideas, que para ellos estaba en el plano de la Filosofía, reina de las ciencias, una actividad propia de los hombres libres, que se hacía por amor al conocimiento, sin una justificación utilitarista alguna (Platón, 1996).

El símbolo impuesto por una cultura sobre otra

Veamos ahora un caso del uso de los símbolos como expresión del poder de una cultura que conquista, sobre otra que es conquistada y sometida. La cultura subyugada se ve obligada a adoptar y usar toda la simbología que trae la cultura conquistadora. Estamos hablando de la cultura indoeuropea conquistadora, sobre la cultura precolombina de América Central, conquistada. Para entenderlo consideremos solamente el caso del aniquilamiento, o de manera menos drástica, del ocultamiento del símbolo para representar el cero que usaban culturas americanas, como la Maya, antes de la llegada de los conquistadores europeos. Ellos impusieron en las colonias del Nuevo Mundo el uso del símbolo que les llegó de Oriente y que venían usando por años, ese símbolo que hoy se usa de manera mundial, y que todos conocemos, la circunferencia pequeña (Mankiewicz, 2000) y (Guedj, 1998).

No podían aceptar otra representación diferente a esta, y menos propuesta por una cultura considerada salvaje e inferior a las culturas indoeuropeas. Los mayas usaban una forma de caracol para representar el cero. El caracol es un animal que vive dentro de su exoesqueleto y cuando muere queda este como una huella del animal que habitó ahí, que murió y pasó a un nivel superior de existencia. Es una representación de un número asociado con la trascendencia de los seres humanos a través de la experiencia de la muerte, para ellos morir significaba pasar a un nivel superior de existencia. Ellos usaban el sistema base 20 para la representación de las cantidades, entonces, cuando en una posición aparecía un caracol, significaba que ya se había completado una unidad para el siguiente nivel, a través de reunir 20 unidades en el nivel donde aparecía el caracol, es decir, se había cumplido un ciclo (Mankiewicz, 2000) y (Guedj, 1998).

El uso del caracol frente a la circunferencia es mucho más significativa desde el punto de vista de los mayas, es una forma de representación que muestra como el pensamiento matemático de dicha cultura, está asociado estrechamente con la concepción de trascendencia a través del fenómeno tan natural como la muerte, una trascendencia entre dos mundos, el de los vivos y el de los ancestros, aparentemente muertos ya idos, pero en realidad cultura viviente, dos mundos que para muchas culturas autóctonas en América fueron y siguen siendo dos formas de realidad.

Concepción simbólica desde la racionalidad de dos culturas

El caso que voy a tratar en seguida difiere de los dos anteriores, en que no se trata del poder de una clase social sobre otra al interior de una misma cultura, ni tampoco la conquista de una cultura sobre otra; sino de poner dos culturas, una frente a la otra, para hacer un paralelo desde la forma como es asumido un mismo problema por cada una de las culturas, desde las metáforas con las cuales su racionalidad ha construido la matemática desde la cual hacen sus propias lecturas del mundo en el cual dichas culturas están inmersas. Estas dos culturas son la china y la indoeuropea y el problema es:

¿Está una operación tan simple como 2 – 3 influenciada por la racionalidad desde donde una cultura se piensa?

En cada cultura hay una forma de pensar y de asumir el mundo, que permea una operación matemática tan aparentemente simple como lo es la resta. La cultura indoeuropea ha constituido su modo de pensar basado fundamentalmente en la abstracción y la deducción, en cambio, la milenaria cultura china muestra un modo de pensar basado en la oposición y la analogía.

Para evidenciar lo dicho en el párrafo anterior, llamemos por un momento a Euclides, geómetra griego, quien realizó un trabajo de recolección enciclopédica del conocimiento matemático que había hasta ese momento en el mundo conocido, Euclides consignó su obra en trece libros llamados "Los Elementos". Él, para hablar de restar un número de otro, utiliza el verbo aphairéo, que Aristóteles utiliza para abstraer y que en griego común, se usa habitualmente para referirse a actividades como sacar, extraer, separar y arrancar. Digamos que "confluyen en un mismo verbo, distintas concepciones para varias operaciones, restar para Euclides, abstraer para Aristóteles y extraer para el común de los griegos de la época" (Lizcano, 1996, p. 3). Desde esta racionalidad, se considera que solo es posible extraer de donde existe algo, es más, no se puede extraer más de lo que hay. Una racionalidad heredada de Euclides y Aristóteles, una forma de restar que obstaculiza y condiciona una operación tan sencilla como la resta, genera una problemática que se extiende hasta el siglo XVIII y que aun hoy no es ajena a las enseñanzas en las escuelas contemporáneas. Para Euclides resolver una resta como 2 – 3 no tiene sentido, ni siquiera plantearla, pues es una operación considerada como imposible de efectuar. ¿Por qué? Pues sencillamente si se tienen dos y se extrae uno, se extrae otro, ya no queda nada de donde extraer más. ¿De dónde se podría extraer uno más? Es un absurdo pensarlo siquiera. De la nada no es posible extraer algo.

> Desde esta forma de asumir este aspecto aritmético, se concibe la posibilidad de ser al +1 y se niega alguna posibilidad de ser al -1, es decir, el +1 es y el -1 no es, de lo cual se deduce que +1 se puede escribir simplemente como 1, pues el "+" es una redundancia que no añade ninguna determinación. Es un hecho que no es ajeno a la notación utilizada por nosotros hoy, pues si el 1 no tiene el "adjetivo calificativo" + o –, lo asumimos como positivo (Lizcano, 1996, p. 4).

Esta misma operación en el ámbito de la cultura china es una operación natural y muy sencilla, tanto instrumental como conceptualmente, ya que ellos no piensan por abstracción, ni extracción como los griegos, ellos piensan por oposición. Para los chinos cualquier realidad se divide en dos mitades, lo que ellos llaman el yin y el yang, el lado femenino y el masculino presente en toda realidad. Lo numérico, como realidad está determinado por esta división, cada número también es yin y es yang, femenino y masculino, negro y rojo (lo que para nosotros hoy, negativo y positivo). Para el chino la operación 2 – 3, representa una lucha de opuestos sobre un tapiz en el suelo, en el que dos palillos de color rojo se enfrentan a tres palillos de color negro, palillos que ostentan fuerzas equiparables que se aniquilan entre sí. De esta lucha queda un palillo de color negro sin contendiente y de esta resta-batalla, sale victorioso el yin, el lado femenino, ha quedado un palillo negro, lo que indicaría en nuestra forma de efectuar esta operación hoy, que ha dado como resultado un número negativo: -1.

Hemos citado dos formas de realizar una operación matemática, dos formas permeadas por las metáforas de extracción y de oposición, ambas constitutivas de sus propias realidades y que determinan la forma de pensar de los pueblos griego y chino. A la cultura americana le fue impuesta la forma de pensar de la cultura griega por la vía de los conquistadores europeos. Los estudiantes de hoy muestran un significativo desconcierto cuando los docentes tratan de enseñarles a resolver la resta 2 – 3 porque estamos inmersos en la cultura de pensamiento heredada de Grecia, es decir, hemos aprendido de Euclides a restar, de Aristóteles a abstraer, y del pensamiento griego en general a extraer. Tenemos una forma de razonar consecuente, lineal, que dificulta entablar un diálogo constructivo con los estudiantes, para construir el conocimiento que nos lleve juntos a entender esta operación (Lizcano, 1996).

Si los chinos nos hubiesen conquistado, no tendríamos este problema, pues su cultura de pensamiento es concurrente y holística, se basa en la oposición y no en la extracción como la de los griegos, y este tipo de restas se podrían enseñar de una manera tan natural y temprana que hoy no estaríamos hablando de esta operación como una problemática del ámbito educativo.

Se observa de los tres apartes anteriores que, la creación de lo matemático, está profundamente permeada por la subjetividad cultural desde donde dicha creación se hace efectiva, es decir, no es ajena a las formas como se estructura el pensamiento, como se construyen categorías, como se caracterizan las semejanzas y como se establecen diferenciaciones, maneras de clasificar y ordenar, criterios de validez, en fin toda una arquitectura bajo la cual se construye el pensamiento lógico desde donde se legitima o no las distintas formas de razonar de una sociedad. Toda esta gran construcción tiene unos cimientos con fuertes matices culturales indoeuropeos, impuestos a la fuerza de manera brutal por el aparato militar de dicha cultura.

Nuestra manera de concebir el tiempo, el espacio y las manifestaciones fenomenológicas de los objetos enmarcados en ese espacio y sujetos a dicho tiempo, así como las formas de construir realidades, están marcadas por las concepciones de la cultura indoeuropea, una cultura que a fuerza de conquista militar creo sobre los ojos de la sociedad americana una lente con la cual miramos lo que ellos dictan que se debe mirar. En ese orden de ideas, el pensamiento matemático instaurado en América, es fruto de la forma de pensar por abstracción y por deducción que conduce al desarrollo de un pensamiento lineal, evidente en la forma como se procede en el ámbito matemático creado en Occidente, un procedimiento sujeto al principio de causalidad, un procedimiento que busca seguir la línea de pensamiento tomado de los pensadores y filósofos griegos como Aristóteles, un filósofo que evidencia en su trabajo la forma estrictamente lineal en sus reglas para deducir verdades.

¿La Matemática es única y universal?

Se alcanza a vislumbrar en los párrafos anteriores, como una sugerencia, que cuando se realiza una operación como 2 – 3, esta es una operación metafórica antes que matemática, y es entonces, la forma de pensar de cada cultura, la que determina la matemática usada para resolver este problema, desde cada cultura. No se puede pretender hablar de una matemática universal e inmutable, con la cual, en cualquier cultura se resuelven de igual manera problemas como el que nos ocupa. Morín advierte sobre la necesidad de aguzar la vista, a la manera como cuando estamos frente a ciertas pinturas esquivas a las miradas plenas, hay que aguzar la mirada para poder apreciar ciertos rasgos que revelan su real esplendor. Una invitación a rebelarse contra una concepción del conocimiento como algo acabado y estático, sino a verlo en su real condición, como un saber incompleto, digamos que un conocimiento del mundo inasible, del cual tan solo es posible tener aproximaciones como lo que ocurre con la simbología en matemáticas, son aproximaciones temporales que expresan conocimientos inacabados del mundo, conocimientos en evolución e interactuantes con otros conocimientos en una relación dinámica que permite lecturas sistémicas del mundo (Morin, 2007). O sea, que a dichos símbolos matemáticos, se les debe ayudar a encontrar los hilos conectores, en un proceso de búsqueda entre docente y estudiantes, un proceso que podría perfectamente llevar uno o varios periodos escolares y que posiblemente al final del año escolar aun no ser hallados dichos hilos. Pero ¿acaso encontrarlos es lo importante? No será que es más importante el aprender a buscarlos en equipo, el aprender a seguir un rastro o el aprender a leer los signos de su presencia en nuestras propias experiencias o en las experiencias de los otros, o en las nuestras con los otros.

¿Se están creando nuevas matemáticas?

Para cerrar, los artículos que aparecen en los Journals y en las Revistas de Matemáticas, con resultados nuevos en matemáticas, son prueba fehaciente que el conocimiento matemático se está construyendo continuamente, y son los profesionales de las matemáticas, quienes hoy crean más matemáticas que las que se crearon desde Babilonia hasta la Primera Guerra Mundial, es decir, la simbología a través de esas creaciones se está resignificando y los conceptos en los cuales los símbolos se sumergen son reconstruidos, decantados, podríamos decir; de modo que se está dando un permanente proceso de creación de nueva matemática, a través de nuevas miradas sobre los objetos ya establecidos.

Así también, cabe la pregunta sobre el porqué de tan fructífera producción y resignificación evolutiva de los símbolos, ¿Qué es lo que impulsa a este proceso evolutivo de los símbolos? Pues es el carácter profundamente humano de lo matemático, en el sentido de estar continuamente enfrentados a la solución de diferentes tipos de problemas, económicos, familiares, sociales, políticos, laborales, de salud, lúdicos, como decidir acerca de la conveniencia de una discoteca u otra, para salir a bailar una noche cualquiera, o que plato elegiremos en un restaurante cuando invitamos o nos invitan a cenar. Pues eso, es en esencia, una gran parte de lo matemático, y otra parte la conforma nuestra inclinación natural desde niños por resolver acertijos o adivinanzas como las llaman muchos, que también son problemas, pero no tan cotidianos como los prácticos, digamos que son problemas planteados por los llamados juegos de mesa, por algún abuelo de esos que disfrutan resolviendo los crucigramas de los periódicos o por algún compañero pilo del colegio (Dieudonne, 1999).

Conclusiones

Se mostró como el pensamiento matemático es influenciado por aspectos culturales como las creencias mitológicas, las formas de relación social, la filosofía de vida.

Se mostró el caso de la cultura griega en el periodo llamado clásico y helenístico y como la forma como dicha cultura se concebía afectó directamente el uso de las matemáticas dentro de dicha cultura.

Se manifestó como las creencias religiosas y espirituales influyen en la conceptualización de los símbolos matemáticos en una cultura como la de los mayas de Centroamérica, y como por ejemplo los símbolos numéricos como el del cero está cargado con aspectos que aparentemente no tienen ninguna relación con lo matemático, como es la concepción espiritual de la muerte.

Se expresó como en la cultura China, lo que era problemático por su imposibilidad de ejecución, como lo es la simple resta entre dos números, gracias a su visión cultural del mundo, fue algo cotidiano y sencillo de efectuar.

Se dio una respuesta a las preguntas ¿La Matemática es única y universal? y ¿Se están creando nuevas matemáticas?, desde dos autoridades en el tema.

Referencias bibliográficas

Cassirer, E. (1998). *Filosofía de las Formas Simbólicas II: El Pensamiento Mítico*. México: Fondo de Cultura Económica.

Dieudonne J. (1999). Matemáticas vacías y matemáticas significativas. En F. Guerard y G. Lelievre (Eds) *Pensar la Matemática* (pp. 149-172), Barcelona: Tusquets Editores S.A.

Eco U. (2006). *La Estructura Ausente. Introducción a la Semiótica*. México: Random House Mondadori S.A.

Guedj, D. (1998). *El Imperio de las Cifras y los Números*. Barcelona: Ediciones B S.A.

Lizcano E. (1996). *Ser/No ser y Yin/Yang/Tao, Dos maneras de sentir, dos maneras de contar*. Texto de intervención del profesor en Congreso de Filosofía. Valencia. Recuperado el 20 de octubre de 2009 de http://www.uneb.es/dpto-sociologia-I/Lizcano/Lizcano/artco.htm

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las Matemáticas, del Cálculo al Caos*. Barcelona: Paidós.

Morin, E. (2007). *Introducción al Pensamiento Complejo*. Barcelona: Gedisa.

Platón. (1996). *La República. Filosofía y Política*. Traducción José Tomás y García. Bogotá: Panamericana.

LA IMPORTANCIA DE LOS EVENTOS CONTEXTUALIZADOS EN EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11 "Wilfrido Massieu Pérez", IPN (México)
abenitez@ipn.mx

Resumen. Las competencias matemáticas se refieren al dominio, por parte del estudiante, de los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de su vida escolar, social y laboral. El objetivo del presente trabajo fue identificar los niveles de competencias matemáticas adquiridos cuando se promueve el estudio de contextos evocados introductorios, que permitan explorar diversas representaciones. La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. El análisis de los datos permitió identificar tres niveles de Competencias Matemáticas.

Palabras clave: competencias matemáticas, representaciones, estrategias

Abstract. The math skills relate to the domain, by the student, of knowledge, skills, values and attitudes that are essential in understanding the discourse of science, humanities and technology, and for its application in solving problems of their school, social and labor life. The objective of this study was to identify the levels of math skills acquired when it promotes the study of evoked introductory contexts that allow exploring diverse representations. The educational experience was conducted with a group of 45 students, from high school who attended the course in algebra, and whose duration was 18 weeks. The data analysis identified three levels of Mathematics Competencies.

Key words: mathematics competencies, representation, strategies

Introducción

La importancia que reviste actualmente el término *Contexto* adquiere importancia en el aprendizaje de la matemática, es debido al desarrollo de las competencias de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a contextos de la vida real, ya que consiste en entender con más detalles el entorno de la situación. Para las situaciones extra matemáticas que contextualizan un *objeto matemático*, los problemas contextualizados permiten simular situaciones del mundo real. Las investigaciones sobre los problemas contextualizados, que atienden el aspecto sociocultural, muestran la enorme diferencia que hay entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que realizan en la vida cotidiana (Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Jurdak y Shahim, 2001; Díez, 2004). En las situaciones de la vida real donde los alumnos se encuentran involucrados, se ha observado el empleo de un tipo especial de matemáticas, ajenas a las que estudiaron en la escuela (Díez, 2004). En general, las investigaciones muestran que en situaciones contextualizadas el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitiva, emocional y socialmente.

La incorporación de los problemas contextualizados en el currículum escolar (Acuerdos 442 y 444, Nivel Medio Superior, Secretaria de Educación Pública, México), distinguen: problemas escolares descontextualizados, problemas escolares contextualizados y problemas reales. D'Amore, Fandiño y Marazzani (2003), proponen la siguiente clasificación relacionada con el momento en que se propone a los alumnos los problemas contextualizados: a) Problemas contextualizados evocados de aplicación los cuales se presentan al inicio del proceso de instrucción en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema. b) Problemas contextualizados evocados de consolidación, es similar al anterior pero su resolución resulta más compleja, c) Problemas de contexto evocados introductorios, estos problemas se presentan al inicio de una unidad de aprendizaje con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar en esta unidad de aprendizaje. En este caso, se presenta una situación que tiene su origen o fuente en el contexto real y que reproduce una parte de sus características, donde el alumno puede resolver con sus conocimientos previos, cuyo propósito es facilitar la construcción, por parte de los alumnos, de los conceptos matemáticos nuevos.

Los problemas contextualizados destacan su participación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas concibiendo la actividad matemática como una actividad humana, por lo cual se considera que "saber matemáticas" es "hacer matemáticas". Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Por lo que los Lineamientos Curriculares de las Matemáticas han realizado la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la cual se utilizan los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica dentro y fuera de la institución educativa. Así mismo puede re-interpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanesian (1983), donde se expresa que la significatividad de aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido utilidad y eficiencia. Por lo que la competencia es definida en un sentido amplio como un conjunto de conocimientos habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

La relevancia de estas ideas, y la problemática que presenta la enseñanza de la matemática tradicional enfocada a los algoritmos, expone una problemática particularmente evidente en el nivel medio superior donde las prácticas tradicionales son cotidianas, por lo que se hace necesario diseñar estrategias didácticas para desarrollar competencias matemáticas, considerando el importante papel que adquiere el *contexto* entre un *objeto matemático* y la *práctica,* en la que dicho *objeto* es determinante, así como el uso de diversas representaciones para la aprehensión del *objeto matemático.* El objetivo del presente trabajo fue identificar los niveles de competencias matemáticas adquiridas cuando se proporcionan al estudiante contextos evocados introductorios para explorar las representaciones, empleando tratamientos que permitan evidenciar su contenido, para lo cual se diseñó e implementó una experiencia educativa en un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos 11 (CECyT 11) que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años.

Marco teórico

Dentro de este proceso, las *representaciones* (Duval, 1999) juegan un papel fundamental, ya que dinamizan la resolución de problemas en las ciencias y en particular en matemáticas, permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Duval (1999), considera la existencia de *sistemas semióticos*, los cuales proveen nuevos significados a la r*epresentación*, es decir, cualquier *objeto matemático* tiene diferentes *representaciones* producidas por diferentes *sistemas semióticos*, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la *aprehensión conceptual*: el objeto, uno de los varios *sistemas semióticos* y la composición de signos.

Además enfatiza la importancia de manejar varios sistemas semióticos para lograr la *aprehensión del objeto*, pero advierte los problemas que origina la coordinación de estos sistemas. Los *objetos matemáticos* no pueden ser identificados con cualquiera de sus representaciones, esta actividad ocasiona que muchos estudiantes no puedan identificar el contenido de la *representación* y el *objeto* representado.

Otro aspecto que no debe ser soslayado, es la razón por la cual la representación es un aspecto determinante en el proceso del aprendizaje; primero porque beneficia la comunicación y segundo porque permite el desarrollo de tratamientos, los cuales consisten en transformar la representación, dentro del mismo sistema, sobre la base de reglas propias para obtener otras representaciones que puedan constituir aportes diferentes de la representación inicial (Duval, 1996). Particularmente, Benítez (2009) menciona el hecho de que la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución es decisiva, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, durante el cual influyen varios aspectos como son: la formulación del problema, las ideas previas del estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso, factores que son determinantes para que el estudiante pueda re-interpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los elementos relevantes que posteriormente se traducirán en la abstracción del análisis de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del problema.

Metodología

Esta investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron problemas en eventos contextualizados. Los problemas de contexto evocados introductorios se presentaron al inicio de cada unidad didáctica con el propósito de que el alumno emplee sus conocimientos previos para resolver la situación, facilitando la construcción del concepto matemático nuevo que se va analizar en la unidad didáctica.

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior (CECyT) que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- Reportes escritos elaborados en forma individual.
- Reportes escritos elaborados por equipos de estudiantes (4 integrantes).
- Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- Reportes elaborados por el profesor-investigador.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. Esta dinámica fue implementada durante todo el curso (18 semanas).

Diseño de las Actividades. Para el diseño de los diferentes contextos simulados se atendieron los significados que incorpora el objeto matemático, además de identificar las habilidades cognitivas, destrezas, y actitudes a desarrollar en las competencias matemáticas. Para ello el contenido de los contextos simulados se presentaron en forma: textual, gráfica, y numérica, atendiendo la interpretación y exploración que el alumno desarrolla durante el proceso, realizando previamente un análisis del contenido matemático a tratar en el curso: lenguaje algebraico, ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticos en contextos simulados.

Tipo de Actividades. Una característica de las actividades fue presentar una situación del mundo real simulada para que el alumno, a través de sus conocimientos previos, explore los conceptos matemáticos nuevos, identificando la información que proporciona la situación para construir la expresión algebraica que modela dicho evento. Después de concluir la experiencia educativa se presentó la siguiente tarea que aborda el tema de funciones y ecuaciones cuadráticas en la solución de problemas;

Una compañía de discos estima que podrá vender siete mil álbumes de una nueva versión de "Le nozze di Figaro" de Morzart-Da Ponte a $ 240 cada álbum. Por cada reducción de $5 en el precio por álbum, calcula que venderá 300 álbumes más. A la compañía cada álbum le cuesta $85 y sus costos fijos son de $100000. Encuentra el número de álbumes que darán a la compañía la ganancia máxima por cada peso invertido?

Análisis de Datos

Los elementos que guían el análisis son:

- Documentar el papel que juegan los contextos simulados en el desarrollo de competencias en matemáticas.
- Identificar el tratamiento empleado para explorar el contenido de las representaciones en contextos simulados.
- Documentar los niveles de competencias matemáticas adquiridos.

El análisis de las grabaciones, el trabajo escrito por los equipos, así como las notas del entrevistador, muestran las diversas estrategias que los equipos emplearon para explorar las representaciones (numérica, verbal, gráfica y algebraica), así como el papel que juegan los contextos simulados de las cuales se menciona las siguientes:

En cuanto a los problemas contextualizados evocados introductorios (D´Amore, Fandiño y Marazzani, 2003) en los cuales se presenta al inicio del proceso de instrucción en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema, y cuyo propósito es para que el alumno vea las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. En este marco de trabajo los estudiantes desarrollaron actividades con problemas evocados de aplicación durante la experiencia, no obstante al culminar el trabajo con los equipos parece ser que algunos estudiantes quedan anclados en la situación de la vida real y no descontextualizan, pues algunos equipos no lograron transferir el conocimiento, debido a que desconocen los diferentes enfoques del concepto, así como el desconocimiento de los patrones de comportamiento del concepto cuando se mueven los parámetros que lo componen, ya que se ven limitados para transitar entre las diferentes representaciones del concepto. Para otros se presente de manera inmediata la descontextualiza del problema evocado siguiendo el patrón de los tratamientos realizados durante la experiencia en las representaciones, identificando variables descontextualizadas y realizando tratamientos en las diferentes representaciones para identificar los parámetros en la expresión algebraica, sin establecer relación alguna con el contexto. Ambas conductas dan muestra de la influencia que ejerce para algunos alumnos el contexto y para otros la influencia que se tiene cuando se está familiarizado con el estudio de las representaciones ignorando el contexto en el cual está inmerso el problema.

Los equipos fueron consistentes con las estrategias empleadas, por ejemplo se presentaron trabajos en lo que se exploraba la representación numérica con tratamientos cualitativos, cuya información se interpretó de manera global, identificando secuencias numéricas que les permitió identificar la variación de los valores obtenidos para determinar el valor de los coeficientes que constituyen la expresión algebraica, lo que codujo al establecimiento de relaciones con la representación algebraica para construir la expresión algebraica que representa el comportamiento de las parejas ordenadas en la tabla numérica. Mientras que para otros se identificaron las variables en términos de x y y, para exponer veinte a treinta datos, que representan el comportamiento del costo como del ingreso, mismos que se colocaron en la representación gráfica para mostrar el comportamiento lineal y parabólico, respectivamente, no obstante los datos no fueron explorados para determinar un tratamiento que permitiera la posible construir de una expresión algebraica que se ajustara a la situación planteada.

Competencias desarrolladas durante la experiencia. La capacidad de adquirir competencias en matemáticas que puede adquirir los alumnos depende de su desarrollo por lo que se habla de niveles de desarrollo que vendrán determinados por la identificación que el estudiante hace de las características relevantes de la situación, el establecimiento de relaciones en las representaciones para construir un modelo matemático y el uso que hace del modelo para conseguir el objetivo pretendido. El esquema de análisis considera tres niveles de desarrollo.

Niveles	*Competencia*	*Descripción*
I	Interpreta el evento contextualizado	Idea vaga del contenido del evento contextualizado

	Organiza y explicita diferentes procedimientos para identificar los datos	Idea aproximada del comportamiento de los datos
	Reconoce la necesidad de establecer un modelo para los datos obtenidos	Establece relaciones para identificar el comportamiento de los datos
	Organiza e interpreta la información recopilada	Establece diferentes acercamientos para definir relaciones e identificar las variables
II	Emplea y reconoce los sistemas de representación	Explora las representaciones; icónica, pictórica, gráfica, numérica y algebraica
	Reconoce el tipo de expresión que permita modelar la situación	Establece acercamientos para identificar la expresión.
	Aplica diferentes procedimientos en la representación numérica para identificar su contenido	Se presentó rigidez en el uso de la representación
	Interpreta la información en las representaciones numérica y algebraica.	Se presentaron dificultades en la lectura de la tabla numérica
	Relaciona el comportamiento de los datos con la gráfica	Durante la experiencia los estudiantes trazaron diferentes gráficas, sin embargo, la escala fue el principal obstáculo que se presentó.
	Identifica el contenido de las representaciones empleadas	Explora el contenido de la representación numérica y gráfica
	Resuelve situaciones problemáticas en contextos simulados utilizando propiedades y conceptos matemáticos estudiados	Tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentan las ideas matemáticas o se desarrollan las actividades
	Interpreta y define funciones que modelen situaciones problemáticas	Los alumnos mostraron capacidad para desarrollar actividades de formulación para modelar situaciones, desafortunadamente, los recursos que mostraron limitaron los alcances del proceso
III	Aplica correctamente los conceptos en situaciones prácticas	Se presentó la dificultad para distinguir entre el valor de cambio de una función y la función misma. Este discernimiento es crucial en el tratamiento de la variación en cualquier contexto
	Elabora ejemplos y contraejemplos	Inclinación a formular ejemplos o contraejemplos que eran fáciles de identificar.
	Obtiene resultados discutidos en situaciones problemáticas (contextos simulados).	Dificultad para comunicar ideas matemáticas, tanto en forma oral como escrita. Las preguntas planteadas no expresaban el trabajo desarrollado al interaccionar con la tarea, lo mismo sucedía para enunciar un problema, a pesar de que se había entendido la esencia de la situación
	Expresa conceptos en distintas representaciones (gráfica, numérica,	Los estudiantes establecieron las relaciones matemáticas de una situación y la conexión de la información, sin embargo

	verbal, algebraica…).	no se identificaron tratamientos cualitativos y cuantitativos que permitieran establecer relaciones entre las representaciones empleadas

Conclusiones

- Durante el diseño de las actividades es fundamental favorecer el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban las ideas matemáticas.
- El proceso de aprendizaje durante el uso de contextos simulados, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban.
- Las representaciones empleadas fueron gráfica, numérica y algebraica, cuyo tratamiento fue de tipo cuantitativo.
- La manera en que se organizaron las actividades en el curso, es decir, trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fueron elementos que aportaron para que el alumno pudiera exponer sus ideas y conjeturas.
- La discusión abierta en el salón en de clases fue un escenario importante para el desarrollo de la experiencia. En particular, se mostró el valor que tiene someter a la crítica pública un trabajo y defenderlo ante los demás. En general coadyuvó a entender los procesos de razonamiento, así como sus interpretaciones idiosincráticas que dan los conceptos matemáticos.

Nota: La investigación con número de registro 20100459 ha sido apoyada por la Secretaria Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.; Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas Editores.

Benítez, A. (2009)**.** Estudio de la Primera Representación Gráfica de las Ecuaciones Algebraicas en Contexto. *Revista Innovación Educativa* 9 (1), 41-50.

Díez, J. (2004), *L´ensenyament de les mateátiques en l´educació de persones adultes. Un model dialógic*. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. Barcelona.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.

Duval R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. In F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Morelos: ERIC

D'Amore, B., Fandiño, M.I. y Marazzani, I. (2003). Ejercicios anticipados y Zona de desarrollo próximo: comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon* 57, 357-378.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht: Riedel-Kluwer A.P.

Jurdak, M. y Shahim I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics Education* 47 (3), 297-315.

Nunes, T., Schliemann, A. D. y Carraher, D.W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL NIÑO PREESCOLAR

Adriana Ramos Córdova, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav (México)
aramosc@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Esta investigación, en curso y cualitativa, trata la introducción de nociones de probabilidad y de estadística en la educación preescolar mexicana, la comprensión de los niños de esas nociones resultante de su enseñanza y a qué otras de sus nociones matemáticas favorece el proceso. Sus referentes teóricos consideran las ideas fundamentales de estocásticos para el curriculum y el origen de la idea de azar en el niño; el cognitivo, el rol de la intuición en la adquisición de nociones de estocásticos; el social, el rol de la interacción en el aula en esa adquisición. Su primera fase examina la propuesta institucional para preescolar; la segunda, la docencia y su formación y, la tercera, la enseñanza de estocásticos en un aula con 25 niños de 3 a 4 años de edad y otra con 30 niños de 5 años. Los resultados indican que para la educación preescolar no se considera el valor formativo de su estudio, no obstante que los niños son sensibles a las ideas de azar y de probabilidad y que la docencia requiere formación en estocásticos.

Palabras clave: educación preescolar, estocásticos, docencia

Abstract. This ongoing and qualitative research examines how to introduce ideas of probability and statistics in Mexican preschool education, children's understanding of these ideas after their teaching and if other mathematical notions are favored in the process. Its theoretical framework considers the fundamental ideas of stochastics for the curriculum and the origin of the idea of chance in children, the role of intuition in the acquisition of notions of stochastics and the role of interaction in the classroom in such acquisition. The first of its three phases examines the institutional proposal for preschool, the second, the teachers' training and the third, the teaching practice of stochastics in a classroom with 25 children 3-4 years old and another with 30 children aged 5 years. The findings show that the teachers require training and updating in stochastics and that preschool education neglects the formative value of stochastics, although children are sensitive to the ideas of chance and probability.

Key words: preschool, stochastics, teaching

Introducción

A 35 años del señalamiento de Fischbein (1975) de que en general la educación no otorga al tema de estocásticos la relevancia que reviste, ni por sus aplicaciones ni por el valor formativo de su estudio, esta situación prevalece en nuestro país (por ejemplo, Limón, 1995; Flores, 2009). Por ello, esta investigación plantea: ¿Cómo introducir nociones de probabilidad y de estadística en la enseñanza de preescolar?; ¿Cuál es la comprensión de los niños de esas nociones resultante de la enseñanza?; ¿Qué otras nociones matemáticas se favorecen con la enseñanza de estocásticos?

Perspectiva teórica

La investigación se rige por tres ejes teóricos:

El eje epistemológico. Según la propuesta de Heitele (1975) de ideas fundamentales de estocásticos como guía en un curriculum en espiral, esas ideas son necesarias desde los niveles iniciales de la educación hasta los superiores, para garantizar su continuidad y convertir la comprensión intuitiva en la formal. El autor propone el uso de modelos en la simulación y reproducción de una situación azarosa, de modo que los niños desde temprana edad tengan experiencias con fenómenos aleatorios organizadas. Heitele propone como ideas fundamentales para la educación en estocásticos las de: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica (variable aleatoria), ley de los grandes números y muestra. Los estudios de Piaget e Inhelder (1951) sobre el origen de la idea de azar en el niño y la construcción de estructuras lógicas de su pensamiento señalan a las operaciones de combinatoria como el origen de la noción de probabilidad. Los autores obtuvieron este resultado al interrogar a niños de 4 a 16 años respecto a la mezcla aleatoria, irreversible, que les presentaron con una bandeja diseñada para balancearse, que en reposo y en su lado más bajo perpendicular a la dirección del balanceo, contenía canicas separadas en dos colores. Al balancear la bandeja sucesivamente, las canicas van entremezclándose y sus distintas posiciones, al cabo de cada balanceo, son el punto de partida para analizar la posibilidad del regreso a su estado inicial. Aquí es donde se identifica el origen en el pensamiento del niño de la noción de probabilidad mediante la inducción y el cambio.

El eje cognitivo. Fischbein (1975) destaca el papel del enfoque frecuencial en el pensamiento probabilístico. El autor señala que un niño pequeño, al igual que un adulto, es capaz de predecir y anticipar el evento más frecuente y hace uso de esa condición experimental. Él descubre que en los niños preescolares existe la intuición primaria de la estimación del azar, pues responden correctamente a preguntas relativas a ella, por lo que comprenden el problema y sus respuestas expresan juicios probabilísticos (p. 120).

Para Fischbein, la intuición es una parte integral del funcionamiento de la inteligencia; es una adquisición cognitiva que interviene directamente en la práctica de la acción mental, por su inmediatez, su globalidad, su capacidad exploratoria, estructuralidad y por ser evidente en sí misma. Las intuiciones primarias son adquisiciones que se derivan de la experiencia individual, sin la necesidad de alguna enseñanza sistemática.

Estas intuiciones pueden ser de afirmación, que subyacen al conocimiento del mundo externo y pueden ser aceptadas como evidencias; y de anticipación, que son las construcciones mentales que anticipan en forma global la solución a un problema antes de conocer en detalle la solución. Fischbein afirma que para el niño de preescolar lo aleatorio es lo impredecible, lo reduce a lo deducible, pero distorsiona esas interpretaciones por las características de su inteligencia: a) su subjetivismo, porque el niño confunde lo aleatorio con lo arbitrario; b) su inducción pasiva, pues el niño juzga los hechos con base en los hechos recientes y no con base en un esquema deductivo; c) el niño piensa que los eventos aleatorios pueden ser controlados por quienes lo originan; d) la distinción entre lo aleatorio y lo necesario es inestable en ausencia de un sistema operacional deductivo.

El eje social. La constitución del conocimiento se deriva de las relaciones entre los individuos y con su entorno. Steinbring (1991) propone "reconstruir el significado del conocimiento matemático [ya] construido en el salón de clases, y entender su relación con las condiciones sociales y las convenciones de enseñanza y aprendizaje" (p. 9) en el aula, con el fin de no dejar el estudio y desarrollo de estocásticos en el proceso de enseñanza como una mera reproducción informativa de la aplicación de un fenómeno aleatorio y reducir así ese proceso a sólo una convención metódica. El autor sostiene que el desarrollo del conocimiento requiere de una estructura de retroalimentación interactiva para verificar, mejorar y modificar la comprensión que los individuos tienen de los conceptos matemáticos, que transgreda a la subjetividad reducida de los conocimientos. De esta manera, afirma, se reducen los errores en la comprensión del concepto matemático, y se establece un balance apropiado entre los aspectos objetivos y subjetivos en la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión.

Métodos y organización

La investigación, *en curso,* responde a la dialéctica que se establece entre el escenario empírico, sus resultados y los referentes teóricos consecuentes; sus preguntas y su objetivo se van precisando y consolidando a lo largo de su desarrollo (véase http://www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion/extras/SAPI08-Calendario.pdf).

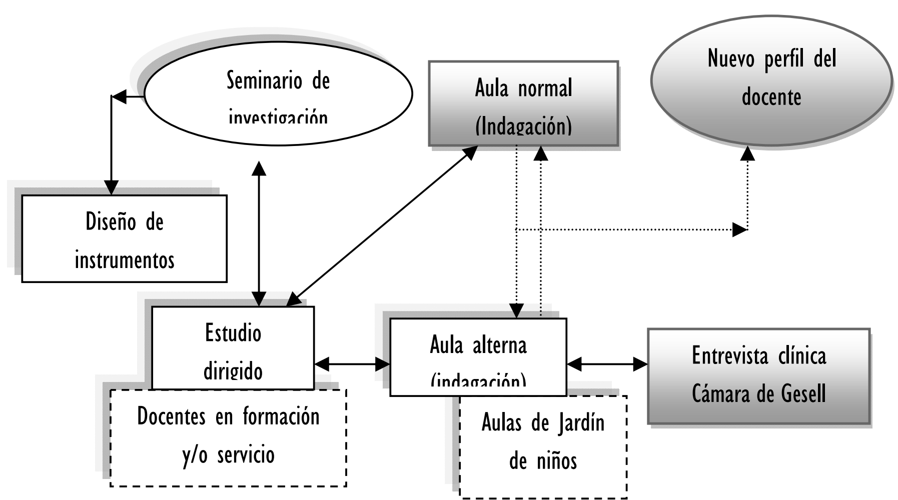


Figura 1. Órgano operativo de la investigación.

Los espacios para la investigación se organizan según el "órgano operativo de la investigación" (Ojeda, 2006, p. 204) más el de entrevista clínica (véase la Figura 1).

Del seminario de investigación emanan los fundamentos teóricos y las estrategias a poner en juego. El *estudio dirigido* a la docencia sobre estocásticos y su enseñanza lo conduce la investigadora. El *aula alterna* es el escenario donde se conjugan la docencia y la investigación. En el *aula normal* la docente indaga sobre su enseñanza. Aquí nos referimos sólo al aula alterna en el marco institucional de la educación preescolar.

La investigación consta de tres fases (véase la Figura 2). La primera fase, *documental*, examina la propuesta institucional, con el fin de identificar lo que insinuaría una orientación hacia los conceptos de estocásticos. La segunda fase, de *experienciación* (Maturana, 1995) y de *entrevista*, se enfoca en la docencia de preescolar y en su formación en estocásticos. La tercera fase, de *experienciación* también y de *bitácora*, examina la enseñanza de temas de estocásticos en el aula y, mediante la *entrevista clínica* (Piaget e Inhelder, 1951), incursiona en la comprensión de las ideas de azar y de probabilidad del niño resultante de su enseñanza; los resultados permitirán ponderar la introducción de estocásticos en este nivel educativo. Las técnicas para el registro de los datos recopilados han sido las matrices, la videograbación, la audiograbación y las transcripciones respectivas, las notas de bitácoras escritas en papel y las hojas de control para obtener las evidencias en papel y lápiz asentadas por los niños. De forma correspondiente con los espacios tratados aquí (indicados con fondo blanco en la Figura 1), nos restringiremos a la primera fase, al inicio de la segunda fase y al aula alterna en la tercera fase (véase la Figura 2).

Resultados

Primera fase. Se examinaron el Programa de Estudios de la Licenciatura en Educación Preescolar 1999, el Programa de Educación Preescolar 1982 y 2004 y los libros de texto de matemáticas de primer grado de primaria pública 2008 y 2010. Para este examen se utilizó la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006; véase la Figura 2). El análisis de esta propuesta se resume en la Figura 2 de la página siguiente.

Segunda fase. Nuestro enfoque en la docencia inicio con el diseño de un guión de entrevista para aplicarla individualmente a dos docentes frente a grupo y a dos profesoras adjuntas, las cuatro participantes del proyecto, con la finalidad de obtener datos sobre sus nociones de probabilidad y de estadística, de su identificación de contenidos de estocásticos en el programa de estudios de preescolar y de si los incluían en su práctica cotidiana. La entrevista contenía siete preguntas:

1) ¿Qué es probabilidad?; 2) ¿Qué es estadística; 3) ¿En qué etapa de su formación se enfrentó a problemas de probabilidad y estadística?; 4)¿Alguna vez ha incluido y desarrollado en su aula

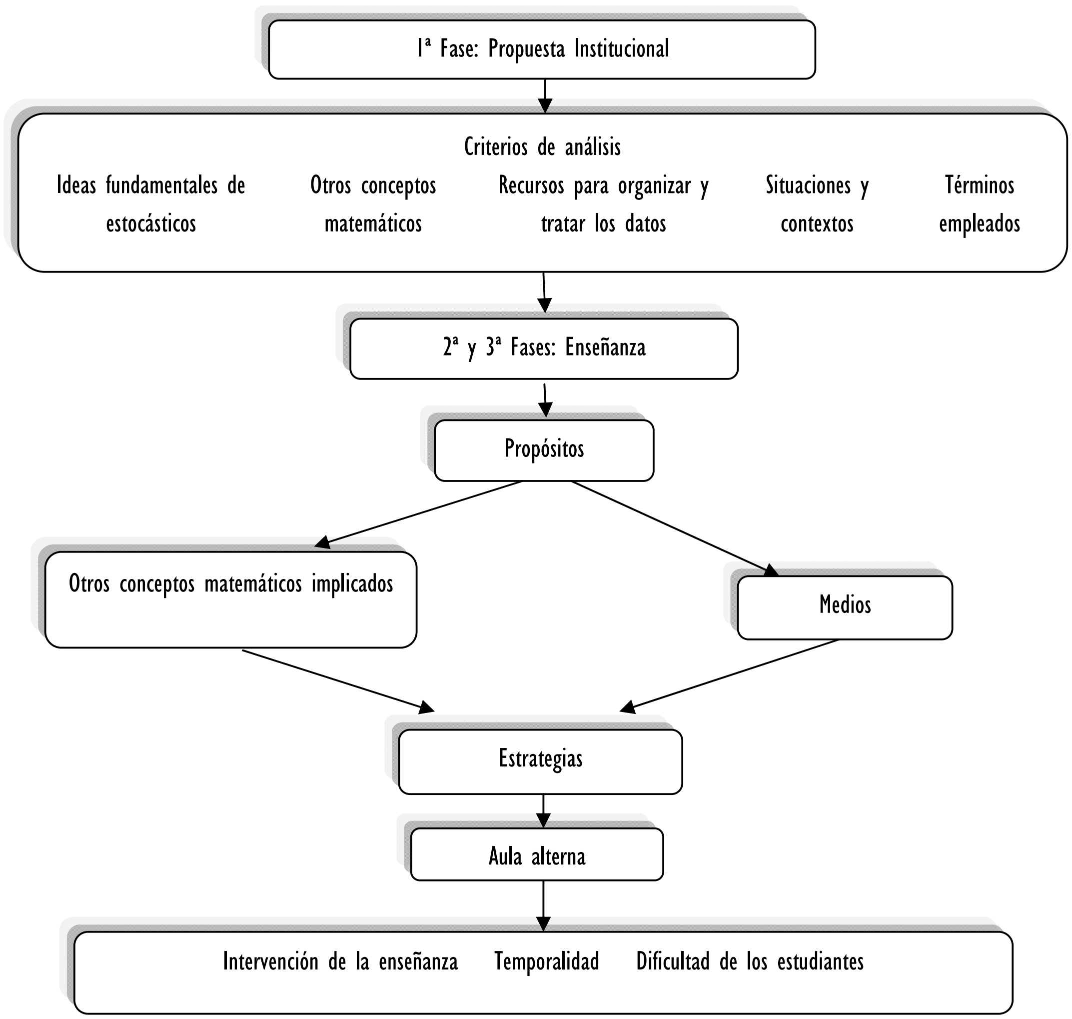


Figura 2. Célula de análisis y fases.

con los niños, actividades de probabilidad y estadística?; 5) ¿Considera pertinente la introducción de conceptos de probabilidad y estadística en este nivel como parte del campo de pensamiento matemático?; 6)¿De qué manera se podría acercar a los niños pequeños a las nociones de probabilidad y estadística?; y 7)¿Qué materiales y recursos podría utilizar para introducir probabilidad y estadística en el nivel preescolar?; a las que respondieron de manera semejante. La técnica de registro para la aplicación de la entrevista fue la audiograbación. De la entrevista aplicada a las cuatro docentes resultó su desconocimiento de las competencias o actividades referentes a estocásticos porque estas no son explícitas en el Programa de Preescolar (PEP, 2004). Su práctica no ha incluido a los estocásticos como parte de las matemáticas. Como evidencia se tienen las transcripciones de los audios.

Tercera fase. En el *aula alterna* la enseñanza se dirigió a los niños preescolares con tres actividades aplicadas a dos grupos, uno de segundo con 25 alumnos de entre tres y cuatro años de edad y otro de tercero con 30 niños de cinco años de edad. Cada sesión de aula duró dos horas y la condujo la investigadora, ante la presencia de la docente y de la adjunta, una vez a la semana en cada grupo; el resto de la semana la docente de grupo reforzaba la actividad siguiendo la dinámica expuesta por la investigadora y usando el cuaderno de los niños como hoja de control.

Tabla 1. Análisis de la propuesta institucional.

Elemento de la propuesta institucional	**Ideas fundamentales**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos para organizar y tratar datos**	**Situaciones y contextos**	**Términos referentes a estocásticos**
Programa de Lic. en Educación preescolar 1999	No aparecen de manera explícita	Nociones numéricas, espaciales, de forma y medida	Lengua escrita	Identificar en las acciones de los niños los principios de conteo y su uso de los números. Planteamiento y resolución de problemas	Ninguno
Programa de Educación Preescolar 2004	*Pensamiento matemático*: Recopilación y organización en histogramas (estadística descriptiva) *Conocimiento del mundo*: Elaboración de inferencias y predicciones.	Nociones numéricas, medida.	Lengua escrita, tablas, gráficas, registros	Recopilar datos Organizar y registrar Observación de fenómenos naturales	Gráficas, registro, inferencias, predicciones
Libro de texto Matemáticas 1er. grado de primaria 2008	Recopilación y organización de datos en histogramas. Combinaciones	Nociones numéricas, medida.	Lengua escrita, tablas, gráficas, registros, dibujos.	Recopilar datos Organizarlos y registrarlos	Gráficas, registro
Libro de texto Matemáticas 1er. grado de primaria 2010	Combinaciones, espacio muestra.	Colores y técnicas de conteo.	Lengua escrita, tablas, gráficas, registros de datos, dibujos.	Encontrar todas las posibles combinaciones	De cuántas maneras…

La primera actividad, ya propuesta por Glaymann y Varga (1975, pp. 90-92), se refiere a la suma de los puntos del lanzamiento de dos dados ordinarios, a la anticipación y al registro en tablas de los resultados. La segunda actividad consistió en formar todas las combinaciones posibles de dos objetos (tazas, cuentas, platos, focos y cubos) de cuatro colores distintos. La tercera actividad adaptó la lección 25 de estadística descriptiva propuesta en el libro de texto gratuito de matemáticas de primero de primaria (SEP, 2008, p. 36) que plantea la recopilación de datos para su organización en gráficas de barras. La Tabla 2 resume la distribución de ideas fundamentales de estocásticos en las actividades presentadas en el aula.

Tabla 2. Distribución de ideas fundamentales en las tres actividades

Actividad	Ideas fundamentales
Suma de números	Medida de probabilidad, espacio muestra, independencia, combinación de probabilidades, regla de la adición y equidistribución
Combinaciones	Combinación, permutación, espacio muestra.
"Lo que nos gusta comer"	Distribución de frecuencia, espacio muestra, recolección de datos en estadística descriptiva y organización de la información en histogramas.

Primera actividad. Los niños anticiparon, en forma oral, la suma de los puntos del lanzamiento de dos dados, los lanzaron, registraron los resultados en tableros (véase la Figura 3) y los confrontaron con sus anticipaciones con la suma más frecuente. Se hizo énfasis en las posibles sumas, en cuáles eran imposibles y porqué.

En la actividad, los niños más grandes (cinco años de edad) empezaron a relacionar los resultados que obtenían de las sumas de puntos y los casos posibles, los imposibles, seguros e igualmente posibles; al inicio lo expresaron como intuición primaria, por ejemplo, "quince no puede caer porque sólo tenemos dos dados y para que salga un quince necesitamos tres dados…", "puede salir un ocho o un cinco porque cuatro y uno si hay…"; y lo corroboraron con la experiencia y su registro en el tablero provisto. Con esta actividad, los niños más pequeños (tres y medio años) desviaron su atención hacia el evento más frecuente y no al más posible.

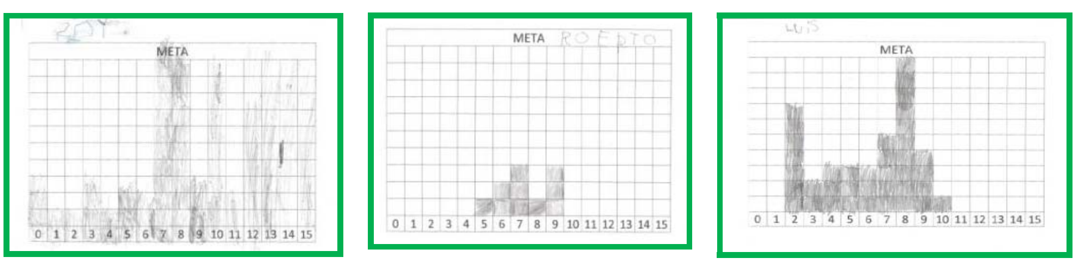


Figura 3. Registro de tres niños de cinco años para la actividad de dados

Segunda actividad. Se proporcionó a los niños, organizados en equipos de seis, una bolsa de juguetes con 100 piezas de cuatro colores diferentes; tenían que exhibir, sin que se repitieran, todas las combinaciones distintas de dos colores. La estrategia de los niños fue acomodar directamente los juguetes y ensayar hasta enlistar todas las posibles combinaciones de dos de entre los cuatro colores (véase la Figura 4). Ante la identificación de una repetición, algunos niños corrigieron (diez en el grupo de segundo de tres y medio a cuatro años de edad, y quince en el de tercero de cinco años de edad), encontraron todas las combinaciones y propusieron mayor cantidad de colores. De los 25 niños del grupo de 3-4 años de edad, diez, realizaron permutaciones y no combinaciones y no aceptaron correcciones de otros; seis niños más sólo manipularon el material sin atender la consigna de encontrar todas las posibles combinaciones de colores.

Figura 4. Segunda Actividad: grupo de 5 años de edad (izda.), grupo 3-4 años (der.)

Tercera actividad. Se adaptó la lección 25 "Lo que nos gusta comer", del libro de texto de primero de primaria (SEP, 2008, p. 36), para introducir las ideas de frecuencia y de moda. Ambos grupos registraron datos, de lo que les gustaba comer de entre cinco postres propuestos por los niños, con dibujos los más pequeños y con lengua escrita los mayores (véase la Figura 5). Los niños empezaron a identificar la frecuencia de un evento y 15 de ellos, de cinco años, los mismos que se destacaron en las otras dos actividades, empezaron a atender al número de veces que se escogía cierto alimento, es decir, las veces que se repetía un dato.

Los niños de este grupo asociaron algunos términos de estocásticos con sus experiencias cotidianas, como "moda" a la ropa que más se usa o al juguete o producto que se promociona en los medios de comunicación; la palabra "fenómeno" la asociaron con lo raro, y "frecuencia" con lo que más hacen a diario. Los niños de entre tres y cuatro años no mostraron familiaridad con esos términos ni nociones de cantidad o de número, pero las actividades resultaron para ellos en una iniciación en situaciones azarosas mediante el juego.

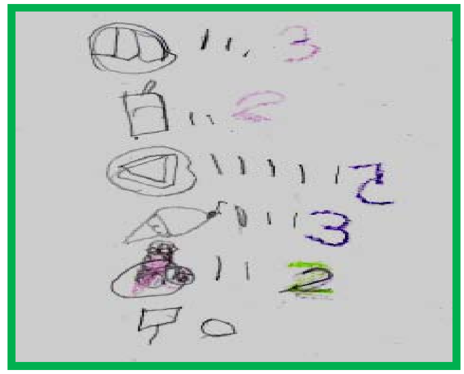


Figura 5. Registros de datos y grafica de una niña de 5 años de edad.

Comentarios

Los resultados sugieren que con una variedad de actividades semejantes a las propuestas aquí se podrían sentar bases para comprender más tarde los conceptos de estocásticos. Para la orientación hacia este tema, con los niños más pequeños se requiere el recurso a materiales concretos en una diversidad de situaciones. Pero es imperativo, también, la formación de la docencia para la enseñanza de estocásticos en el aula de preescolar y reconsiderar el tema para el programa de estudios respectivo.

Referencias bibliográficas

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Holanda: Reidel.

Flores, M. P. & Ojeda A. M. (2009) La predicción y el azar en la escuela Primaria, *Memorias del VI congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 475-480. Puerto Montt, Chile, enero 4 al 9 de 2009.

Glaymann, M. & Varga T. (1975). *Las probabilidades en la escuela.* Barcelona: Teide.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205. Holanda: Reidel.

Limón, A. (1995). *Elementos para el Análisis Critico de la Posible Inserción Curricular de Nociones Estocásticas, Ausentes en el programa de Preescolar y Primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Maturana, H. (1995). *Desde la Biología a la Psicología*. Buenos Aires: Lumen

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años*. (pp. 257-281). México: Santillana.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La génése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: PUF

Secretaria de Educación Pública (2008, 2010). *Matemáticas Primer grado*, Libro de texto Gratuito. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (1992, 2004). *Programa de Educación Preescolar* (PEP). México: Autor.

Seminario de Avances de Proyectos de Investigación. (2009) Recuperado el 15 de Agosto de 2009 de http://www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion/extras/SAPI08-Calendario.pdf).

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 503-522 . Holanda: Kluwer.

FRACCIONES NEGATIVAS Y LAS NOCIONES PREVIAS PARA EL RECONOCIMIENTO DE SU SIGNIFICADO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Aurora Gallardo Gil Saavedra
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
agallardo@cinvestav.mx, gsaavedra@cinvestav.mx

Resumen. Esta investigación aporta elementos teóricos al estudio de las fracciones negativas, problemática poco abordada a nivel secundaria. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios. El significado más frecuente de la fracción positiva encontrado en los alumnos, es el de "medida", perteneciente al mecanismo constructivo de partición, ello obstaculiza concebir la fracción negativa; mientras que los significados de "operador" y "razón", permiten su reconocimiento

Palabras clave: fracción negativa, significado, sentido, enseñanza

Abstract. This research provides theoretical elements to the study of negative fractions. The present topic has been poorly discussed at secondary school. The results point to the need for students to acknowledge the different meanings of positive fractions in order to make sense of negative fractions in non-routine problems. The most common meaning of positive fractions found in students' work is as "measure", belonging to the constructive mechanism of partition. This meaning obstructs the appearance of negative fractions, while the meaning of "operator" and "rate", allows recognition of negative ones.

Key words: negative fraction, meaning, sense, teaching

Con la presente investigación se pretende dar respuesta a la interrogante sobre las implicaciones para la enseñanza de fracciones negativas en educación secundaria. Este ciclo escolar puede cursarse en tres modalidades distintas: Secundaria General o Diurna, Secundaria Técnica y Telesecundaria; el presente proyecto se realiza en un ambiente de aula en una escuela Telesecundaria con alumnos que cursan el tercer grado. Se ha elegido este grado porque se considera que es ahí donde se posibilita de una manera más clara la visualización de las nociones previas para el manejo de la enseñanza de las fracciones negativas y los problemas que se generan durante el tratamiento de este tema.

Los resultados obtenidos en esta investigación apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios.

Planteamiento del problema

En México, la Educación Básica culmina con la Educación Secundaria normada por el Plan y Programas de Estudio (SEP, 2006); para el caso de la asignatura de Matemáticas, se ha realizado una revisión curricular a este programa y no se encontró el tratamiento de las fracciones negativas enunciado como tal, solamente son consideradas como cocientes de números con signo, cuando se realizan multiplicaciones y divisiones de fracciones; en el tema de ecuación de la recta cuando ésta presenta una pendiente fraccionaria negativa, o como soluciones de ecuaciones de primero o segundo grado. También emergen en: sucesiones y en la homotecia. Sin embargo, su aparición es siempre de manera súbita, es decir, sin darle mayor importancia al surgimiento de la negatividad que conduciría a reflexionar sobre su tratamiento, e incluso se le resta importancia.

El Programa de Estudios de Matemáticas vigente actualmente, está dividido en tres ejes temáticos: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico; Forma, espacio y medida; y, Manejo de la información. Dado el nombre del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, se esperaría encontrar el tratamiento de las fracciones negativas dentro de éste. Sin embargo, como anteriormente se dijo no es así, incluso, en el tema: Significado y uso de las operaciones, existe una leyenda que a la letra menciona:

> Puesto que no abundan los problemas reales que impliquen la multiplicación y división de números con signo (multiplicar o dividir temperaturas, elevaciones y depresiones no tiene sentido), se pueden plantear problemas numéricos que seguramente serán retos interesantes. Por ejemplo:
>
> Pensé un número. Al multiplicarlo por –7 y enseguida restar 49 obtengo cero. ¿De qué número se trata? (S. E. P., 2006, p. 67)

Lo anterior es tal vez una muestra de la escasa importancia que se le da al tratamiento de los números negativos y mucho más al tema de fracciones negativas, ya que no existen de manera explícita.

Nos planteamos el problema de investigación:

Indagar sobre las implicaciones para la enseñanza de fracciones negativas en Educación Secundaria.

Este planteamiento nos conduce a las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué significado de las fracciones positivas deben poseer los estudiantes, que les permitan dotar de significado y sentido a las fracciones negativas?

¿Qué sentido de uso de los números negativos permite dotar de significado a las fracciones negativas?

Marco teórico

Para el análisis de las nociones previas sobre el tema de fracciones, se han tomado en cuenta autores dentro del campo de la Matemática Educativa; uno de ellos es Freudenthal (1983), quien establece los criterios que a su juicio lo llevan a preferir llamar fracciones a los números racionales; dadas las implicaciones en la organización didáctica de estos números, denomina como fracción a las distintas expresiones fraccionarias del mismo número racional. También sostiene que las fracciones son el recurso organizador del número racional. Desde su punto de vista la palabra fracción está relacionada con romper: fracturar, mientras que racional está relacionado con razón desde el punto de vista de proporción, de medida.

Uno de los fenómenos en los que Freudenthal hace hincapié, es en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano; las fracciones aparecen en el ámbito lingüístico apelando a presentaciones más o menos directas; destaca en particular, el uso de algunos ordinales como denominadores, lo cual supone para los estudiantes una fuente generadora de muchas distorsiones semánticas. Lo que este autor resalta, es el origen histórico de algunas de dichas designaciones ordinales del denominador, tomando como ejemplo supremo, el caso de los décimos, los cuales en diferentes culturas emergieron como sucesores del conteo.

Abordando el tema de la didáctica de fracciones, Freudenthal (1983) advierte que ésta ha sido caracterizada por una tendencia unificadora, suponiendo que los aprendices han ya superado los obstáculos con los números naturales. Ello provoca que el tratamiento de las fracciones funcione peor que el de los números naturales. La fracción puede ser vista como fracturador, que en el más sencillo de los casos corresponde a repartir en partes equitativas (parte y todo); añade que también se puede ver a la fracción como comparador, las fracciones sirven para comparar objetos que se separan uno de otro (relación de razón); igual puede encontrarse a la fracción como operador, en el que se entiende a la fracción como un número de medida.

Otro autor consultado sobre el tema de fracciones es Kieren (1983). Él advierte el complejo proceso de construcción de estos números que incluye varias experiencias matemáticas del pensamiento tales como: particiones, la identificación de partes y formación de equivalencias usando una variedad de imágenes y madurando desde lo metafórico hasta el uso del lenguaje formal de la fracción. Este autor menciona que el conocimiento de la fracción se compone de cuatro subsistemas o constructos: medidas, cocientes, razones y operadores, los cuales aluden a la significación de la fracción en los estudiantes. También afirma que el lenguaje de parejas ordenadas está basado en un quinto constructo: la relación parte-todo. Los significados antes mencionados, se caracterizan por presentar "cualidades" primordialmente aditivas (para el caso de los subconstructos medida y cociente), o bien multiplicativas (para los casos de razón y operador).

Refiriéndose a los contenidos que Kieren reconoce y asigna a los constructos, los aspectos más relevantes que destaca son; la fracción es asociada al significado de cociente, en marcos donde se desarrollan situaciones concretas de reparto que están referidas a conjuntos discretos. Cuando la fracción permanece asociada a la medición, es decir, en aquellas situaciones en que el soporte fundamental es la noción de magnitud, el contenido semántico es el de medida. El reconocimiento de fracción como razón, destaca un acceso menos formal que el expresado a través de la noción de par ordenado. La fracción cumple con su función de contractor o dilatador a través del constructo de operador, cuando queda vinculada a la manipulación de un conjunto sobre otro.

La semántica que se atribuye a las fracciones se proyecta hacia las construcciones formales del respectivo lenguaje, lo que implica una redefinición de los dominios aditivos y multiplicativos. Para Kieren, el quinto constructo: parte – todo, constituye el "constructo generador del lenguaje" dado que se encuentra íntimamente relacionado a los mecanismos constructivos, además de asociarse este quinto constructo a los otros cuatro a través de una unidad apropiada para cada circunstancia. Este autor concede al lenguaje de las fracciones un rol primordialmente orientador, ya que mediante su uso no formal, se encamina al estudiante hacia los "objetos-acciones".

En relación al número negativo, nos apoyamos en Gallardo (1999) quien realizó un estudio histórico – epistemológico – didáctico, donde identificó 4 sentidos de uso de los números negativos por estudiantes de entre 12 y 13 años de edad, a saber:

1. Número Sustractivo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud, por ejemplo, en *a – b,* a es siempre mayor que b.
2. Número Signado, cuando el número tiene un signo + ó -, sin que tenga ningún sentido contextual. Su uso es en la sintaxis para las reglas de la adición y sustracción.
3. Número Relativo o Número Dirigido, donde la idea de cantidades opuestas en relación a una cantidad surge en el dominio discreto y la idea de simetría aparece en el dominio continuo.
4. Número Aislado, surge cuando el número negativo es el resultado de alguna ecuación o problema. (Gallardo, 2002, p. 179).

Es importante señalar que la conjugación de los aportes hechos por Freudenthal (aparición de las fracciones en el ámbito lingüístico y su vinculación con los decimales), de Kieren (cinco significados de las fracciones encontrados en los estudiantes) y de Gallardo (cuatro sentidos de uso del negativo identificados en autores de textos históricos y en alumnos del presente) es lo que fundamenta sólidamente el marco teórico de esta investigación en ciernes.

Método

Para responder a las interrogantes planteadas, se ha recurrido a una investigación de corte cualitativo ya que este paradigma hace aportaciones importantes al realizar estudios sobre los procesos cognitivos del sujeto durante la adquisición de conceptos matemáticos (Gallardo, 1999).

Nos hemos apoyado en los aspectos metodológicos de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999), donde desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora es tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de la investigación.

El modelo tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera, es decir, mediante otro modelo; en esto se diferencia la elaboración del modelo de la que suele acompañar a la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se utilice para explicar los mismos hechos (Puig, 2006).

El MTL, consta de cuatro componentes:

- Componente de Competencia.
- Componente de los Procesos Cognitivos.
- Componente de Enseñanza.
- Componente de Comunicación.

Filloy, establece la diferencia entre Significado, que es el campo semántico del objeto matemático, y Sentido que se refiere al campo semántico personal del sujeto. Este modelo, se apoya en la semiótica para comprender los procesos de significado y sentido en la actividad matemática escolar, dado que los signos matemáticos no son todos ellos de naturaleza lingüística (Puig, 2003).

Filloy (1999), acuña el término "Sistema Matemático de Signos" (SMS) que describe las producciones de los estudiantes en entrevista clínica o en situación de aula.

El carácter Local del MTL, se debe al hecho de que trata de explicar los fenómenos presentados durante el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático concreto en un momento histórico determinado y con un grupo de personas específico.

El estudio

La población seleccionada para nuestra investigación (Saavedra, 2011), corresponde a un grupo de 40 alumnos que cursan el tercer grado en la modalidad de Telesecundaria.

Se utilizan los siguientes instrumentos metodológicos:

- Cuestionario Exploratorio: Consta de 14 ejercicios cuyo objetivo primordial es evidenciar el manejo que tienen los sujetos sobre las fracciones y los números negativos.
- Entrevista Individual: Realizada a 3 alumnos, uno de cada estrato (alto, medio y bajo) según el rango de aciertos obtenidos en el cuestionario exploratorio, con el fin de realizar un estudio en profundidad y extensión.

Para la validación de los resultados, se recurre al Método de Triangulación (Cohen, 1990) de los datos obtenidos del cuestionario exploratorio y la entrevista individual.

Cabe aclarar, que para el análisis de los procesos cognitivos se recurrió a 11 categorías de "tendencias cognitivas". Estas tendencias fueron definidas por Filloy dentro del MTL. Para el autor las tendencias cognitivas son aquellos hechos que surgen cuando en una situación de enseñanza (aula, cuestionario, entrevista) los estudiantes transitan de un SMS más concreto a otro más abstracto. En este artículo únicamente se exhibe a continuación, el diálogo de uno de los ejercicios resuelto por un alumno, donde se identifican dos de las tendencias cognitivas manifestadas por Filloy.

Se le pidió al estudiante que resolviera:

Escribe el signo > o < en el recuadro, según corresponda.

$\frac{3}{4} \square \frac{2}{5}$ $\qquad$ $-\frac{2}{3} \square -\frac{7}{5}$

$-5 \square -1$ $\qquad$ $\frac{1}{4} \square -\frac{3}{7}$

$-\frac{11}{9} \square -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{3}{4} \square \frac{3}{4}$

Resultado del análisis del ejercicio anterior

Fue posible vía diálogo en entrevista videograbada con el estudiante, observar el significado de cociente en las fracciones positivas y negativas. Además se identificaron los sentidos de uso del número negativo como Número Signado, por ejemplo verbaliza – ½ como "menos un medio" y también como Número Relativo, ya que utilizó estos últimos para realizar una comparación. Es importante señalar que el alumno se maneja bien tanto en el dominio continuo como en el discreto.

Un hecho destacable es que el alumno recurre a la recta numérica, porque en ella le es posible comparar las cantidades solicitadas en el ejercicio. En este momento se observa que transita del SMS Numérico al SMS de la Recta. También recurre al esquema de fracciones equivalentes para tomar decisiones sobre cuál de las cantidades es mayor o menor (*Tendencia Cognitiva: La dotación de sentidos intermedios)*, al considerar conveniente "convertir" las fracciones en sus equivalentes con un denominador común, y simultáneamente, (*Tendencia Cognitiva: El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis)*, recurre tanto a las fracciones equivalentes como a la posición de los números en la recta numérica.

Es posible identificar los significados de cociente y medida cuando, en un fragmento del diálogo de la entrevista el estudiante menciona: *"la mitad de cuatro sería dos"*, aquí se visualiza el cambio entre un SMS numérico a un SMS del lenguaje natural. Además maneja el significado de razón ya que compara con respecto a un mismo denominador e incluso no pierde de vista la negatividad pues en algún momento menciona: *porque como son números negativos entre más estén cerca del cero son más grandes.*

Se puede observar el significado Parte – Todo cuando hace las comparaciones de –11/9 y –1/2, ya que maneja bien las partes en que se ha dividido el entero y las que se han tomado de él para hacer las comparaciones.

Por lo anteriormente expuesto, podemos decir que:

- El significado más frecuente es el de "medida", del mecanismo constructivo de partición, ello obstaculiza concebir la fracción negativa.
- El significado recurrente del número negativo es el de número sustractivo, ello impide comprender la fracción negativa.
- Algunos estudiantes arriban al significado de "operador" y "razón" que permitió el reconocimiento de la fracción como "número aislado" y como "número signado".

Referencias bibliográficas

Cohen, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica (Sociedad Mexicana de Matemática Educativa).

Freudenthal, H. (1983). Fractions. En Freudenthal, H. (Ed), *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 133 – 177). Dordrecht: Reidel Publishing Company,.

Gallardo, A. (1999). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. En Hitt, F. (comp), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 197 – 222). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics vol. 49*, 171 – 192.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy, E. (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

(2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-126.

Saavedra, G. (2011). *Estudio de las Fracciones Negativas en Educación Básica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

S. E. P. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: S.E.P.

LOGRO EDUCATIVO: PRUEBA ENLACE MÉXICO 2008

Esthela Salas Simental, Tatiana Nayeli Domínguez Mendoza, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (México)
esalas@cinvestav.mx, tdominguez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. Diferentes corrientes teóricas han intentado conocer cuáles son los factores que inciden en los procesos educativos, cuál es su relevancia y cómo podrían ser modificadas con la finalidad de obtener una mejor calidad en la educación. Fortalecer esta corriente de investigación en México es imprescindible. El objetivo de este trabajo es, identificar factores individuales, familiares y escolares incidentes en el nivel de logro académico en matemáticas de estudiantes de tercer año de secundaria. Se analizaran los resultados del examen de matemáticas propuesto por la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). También se estudiaran los resultados de los cuestionarios de contexto que se aplicaron a una muestra representativa de estudiantes a sus profesores y a sus padres. Para ello se hará uso de Minería de Datos con el objetivo de encontrar relaciones ocultas entre las variables, sacar conclusiones y generar conocimiento a partir de estas.

Palabras clave: evaluación, género, prueba enlace, minería de datos

Abstract. Different research streams have tried to find factors which affect the educational process, what their significances are and how they might be modified in order to improve the quality of education. To strengthen this line of research in Mexico is essential. The aim of this study is to identify individual, family and school agents influencing mathematical academic achievement in junior high school. The results of the mathematics test proposed by National Assessment of Academic Achievement in Schools (ENLACE) will be analyzed. The context tests that were applied to a representative sample of students and their teacher and parents will also be analyzed. To do this work Data mining will be used with the aim to find hidden relations between variables, make conclusions and generate knowledge from them.

Key words: assessment, gender, enlace test, data mining

Introducción

Desde diferentes corrientes teóricas se ha intentado conocer cuáles son los factores que inciden en los procesos educativos, cuál es su relevancia y cómo podrían ser modificadas con la finalidad de obtener una mejor calidad en la educación. Fortalecer esta corriente de investigación en México es, por lo tanto, una tarea académica imprescindible si se pretende desarrollar políticas eficaces para la mejora de la calidad y la equidad educativa (Blanco, 2008). Por esta razón es que en la actualidad, la búsqueda de factores asociados al logro escolar ha sido intensa.

Sobre la base de datos obtenida de la aplicación de la prueba ENLACE 2008 (instrumento que la Secretaría de Educación Pública (SEP) pone a disposición de la sociedad mexicana, ante las exigencias actuales de rendición de cuentas, en donde se proporciona información a los estudiantes, a los padres de familia, a los docentes, a los directivos de las instituciones educativas y a la sociedad en general, respecto del logro académico de los alumnos del Sistema Educativo Nacional de México), realizada a estudiantes de educación básica a nivel nacional, se analizaron los factores de logro académico de los alumnos de tercero de secundaria en el Distrito Federal utilizando técnicas de minería de datos y estadística.

Antecedentes

A inicios de 2006 la Secretaría de Educación Pública, como respuesta a una demanda de construcción de diagnósticos acerca del logro educativo de los alumnos, consideró importante desarrollar una evaluación a los estudiantes de educación básica. Uno de los objetivos de éste instrumento es que permitiera identificar indicadores orientados a la intervención pedagógica que impactaran de manera positiva en el mejoramiento de la calidad educativa. Dentro de este marco, la Unidad de Planeación y Evaluación de Políticas Educativas (UPEPE) de la SEP, a través de la Dirección General de Evaluación de Políticas (DGEP), implementó la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) y, año tras año, esta prueba -cuyas especificaciones siguen las competencias y contenidos establecidos en los planes y programas de estudio oficiales vigentes y se encuentra enmarcada en un enfoque constructivo- se ha aplicado con el propósito fundamental de medir el resultado del trabajo escolar en las asignaturas de Español, Matemáticas y, en el año 2008 Ciencias Naturales.

Los instrumentos de prueba se diseñaron como pruebas objetivos, es decir, se conformó con reactivos de opción múltiple. Éstos instrumentos únicamente permite la selección de una respuesta correcta, renunciando a la posibilidad de explorar algunos aspectos, por un lado, en Español, la producción oral y escrita, las prácticas de búsqueda de información en fuentes diversas y/o la construcción de opiniones y valoraciones; por el otro, en Matemática, la creación de unidades arbitrarias de medida, el uso de instrumentos de geometría y/o la creación y exploración de objetos tridimensionales. Asimismo, con el fin de establecer una mejor precisión, se añadieron cuestionarios de contexto dirigidos a una muestra específica de estudiantes, padres y directores con el objetivo de detectar factores externos al proceso de enseñanza y aprendizaje que influyan en el rendimiento académico de los escolares.

Como lo plantea en el Manual Técnico de ENLACE-2008, "ENLACE es un instrumento estandarizado, objetivo, de alcance nacional, diseñado para que los maestros, maestras, directivos, autoridades educativas, investigadores y escolares de todo el país, dispongan de una medida válida, objetiva y confiable, del estado actual del aprovechamiento académico de los estudiantes" (Manual Técnico, 2008, pp. 2); cuyo designio es la obtención de resultados que permitan la toma de decisiones asociadas con la mejora educativa, como ya se ha dicho, sobre la base de los cuales posteriormente se formulen e implementen políticas educativas.

Marco teórico

Estudios como el de Blanco (2007) proponen un marco de referencia que permite establecer niveles concretos que se encuentran relacionados con el logro académico. Estos niveles abarcan desde características del estudiante, así como rasgos significativos del ambiente en donde se desenvuelve, hasta características de su núcleo familiar y escolar. Para entender aún mejor esta relación se presenta el siguiente esquema:

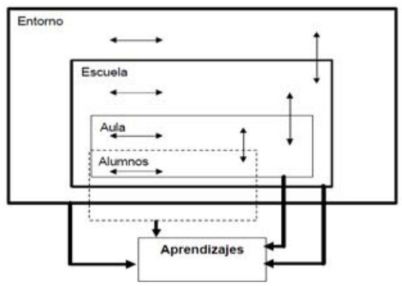


Figura 1. Niveles asociados a los resultados educativos (Blanco, 2007, pp.17).

Podemos inferir entonces, que la labor de identificar factores de logro académico dista de ser sencilla. Dada la complejidad de la búsqueda y teniendo en consideración los niveles anteriores, se tendrán como base para el análisis los siguientes estratos: en primer lugar, el nivel individual, comprendido por las características del alumno, su entorno y su familia; en segundo lugar, el nivel escolar, el cual considera las oportunidades de aprendizaje, clima en el aula, expectativas, política, participación, entre otras.

De lo anterior se desprende una amplia gama de variables por lo que es necesario utilizar métodos que nos brinden la mayor objetividad posible. Los métodos de estudio multinivel y jerárquicos (véase Oliver, Rosel y Jara, 2000; Blanco, 2007) parecen ser altamente apropiados para analizar este tipo de datos, ya que permiten determinar la influencia que ejercen, por separado, los distintos niveles involucrados en el fenómeno escolar. Sin embargo el auge de la tecnología y la computación así como su rápida implementación en actividades relacionadas con la educación han complementado los métodos estadísticos ya existentes, permitiendo una mayor eficacia en el procesamiento de datos. La existencia de algoritmos computacionales que pueden encontrar el significado de las palabras fue uno de los descubrimientos más excitantes en la ciencia cognitiva de las décadas pasadas. El KDD (Descubrimiento de Conocimiento en Bases de Datos) es un proceso no trivial de identificación válida, novedoso, potencialmente útil que encuentra patrones en datos (Coello, Dehuri y Ghosh, 2009). La Minería de Datos es una manera de desarrollar el KDD. Este método permite combinar métodos y herramientas de bases de datos, estadística e inteligencia artificial para tratar grandes cantidades de datos con el objetivo de encontrar relaciones ocultas entre las variables, sacar conclusiones y generar conocimiento a partir de estas.

Datos

(Las bases de datos trabajadas en este estudio fueron proporcionados por el Instituto Nacional de las Mujeres)

Población: 1 643 585 estudiantes de tercer año de secundaria en el año 2008 que contestaron la prueba ENLACE.

Dentro de las actividades en la aplicación de la prueba ENLACE, se hizo una selección de escuelas bajo un diseño muestral estratificado que estuvo a cargo de la Dirección General de Evaluación de Políticas (DGEP) de la Secretaria de Educación Pública (SEP), con el fin de aplicar cuestionarios de contexto tanto a estudiantes como a padres de familia y directivos. Cada estrato está descrito por la modalidad de la escuela: General, Particular, Técnica y Telesecundaria. Muestra: 173,691 estudiantes, los cuales según el género, el 52% fueron mujeres y el 48% hombres.

Instrumentos

Para realizar el presente estudio se analizaron los resultados obtenidos de la asignatura de matemáticas, así como los datos de los cuestionarios de contexto que contestaron alumnos, padres y directivos. A continuación se describen brevemente las particularidades de los instrumentos de contexto.

El examen de matemáticas consta de 74 reactivos.

El cuestionario para alumnos consta de 142 preguntas, en el cual se abarcan los siguientes aspectos: Datos generales (sexo, edad, discapacidad, trabajo, tiempo libre), aspiraciones educativas, entorno familiar (características de sus padres, hermanos, maltrato), características de su vivienda, estudios de lengua extranjera y conocimientos de computación, hábitos de estudio, entorno y ambiente escolar, características de su escuela, características de sus profesores de español y matemáticas, relación con sus amigos.

En el cuestionario de padres se integraron 101 preguntas que abarcan los siguientes aspectos: características personales de la madre y del padre, situación laboral y económica, características de sus hijos, vivienda (Bienes y Servicios), apoyo a sus hijos (estudios), características de la escuela donde estudian sus hijos, características de los profesores de sus hijos.

El cuestionario aplicado a directivos contempla 134 preguntas que engloban los siguientes aspectos: datos personales (sexo, edad, escolaridad), experiencia laboral, infraestructura de la escuela (Bienes, servicios, entorno), características del personal docente y administrativo, gestión y organización escolar.

Método

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se cuenta con una gran cantidad de variables categóricas, (142 para el caso estudiantes, 101 para el caso de padres y 134 para el caso de directivos), motivo por el cual se plantea el uso de diversos métodos para seleccionar y construir aglomeraciones de variables que facilite la interpretación de los resultados.

Inicialmente, se realizó un análisis multinivel preliminar; para después, aplicar el Algoritmo de Cluster (aglomeración) para estudiar las relaciones y comportamientos tanto de las variables como de los casos, entendiendo por casos, las respuestas individuales de cada uno de los alumnos encuestados en la muestra.

Se comenzó, con el análisis de las tablas de contingencia tomando como factor, la prueba Chi-cuadrada de Pearson, la cual parte de la hipótesis de que las variables son independientes. Para ser más precisos, se analizaron los datos con una confianza del 95% haciendo la asignación de $\alpha = 0.05$ (lo cual corresponde al complemento porcentual de la confianza). El objetivo fue encontrar aquellas variables que son dependientes, para lograrlo se requirió refutar la hipótesis planteada. Por lo tanto, fue necesario encontrar aquellas variables cuyo valor de significación fuera menor a α. Este primer análisis nos permitió estructurar grupos de variables con los cuales se trabajó posteriormente para hacer un análisis más preciso y certero.

Resultados

La primera conclusión importante que se observa, luego del análisis de las frecuencias de las respuestas correctas en Matemáticas de cada uno de los ítems de la prueba ENLACE, es que en todos ellos los resultados de los hombres prevalecen sobre los de las mujeres, es decir, no sólo que la amplitud entre las frecuencias de los géneros es -la mayoría de las veces- muy amplia, sino que también en ningún momento la cantidad de respuestas acertadas por las mujeres es superior a la de los hombres. Se observó que aun siendo la cota superior del rango de calificaciones en las mujeres, mayor a la de los hombres, éstas poseen una concentración en las calificaciones centrales (entre 450 y 650), mientras que la distribución de los hombres es más homogénea.

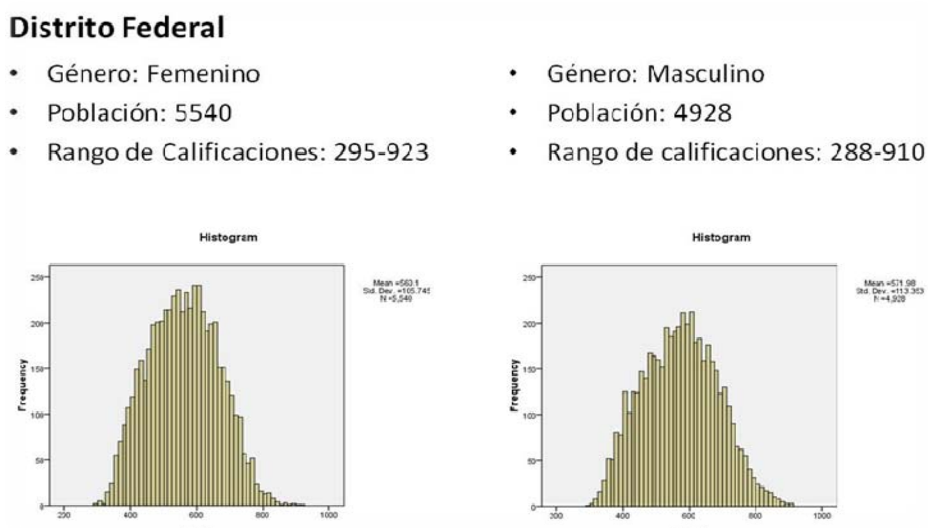


Figura 2. Histograma de puntaje de resultado de prueba de ENLACE en Matemática.

El primer experimento con el clúster jerárquico consistió en realizar dos corridas del algoritmo, una en la cual se incluyen únicamente los casos femeninos y otra donde se incluyen los casos Masculinos. En la siguiente tabla se muestran ocho categorías obtenidas después de la aplicación del algoritmo para los casos femeninos y masculinos. Se establece el rango de la puntuación para caracterizar cada una de las categorías.

Tabla 1. Categorías por rango de calificaciones

Categoría	**Mujeres**		**Hombres**	
	Rango de Calificaciones	**Número de Estudiantes**	**Rango de Calificaciones**	**Número de Estudiantes**
1	295-389	245	288-375	152
2	388-451	633	376-463	760
3	449-541	1399	461-523	751
4	538-639	1671	521-586	960
5	637-745	1164	586-655	998
6	746-799	148	652-771	1040
7	802-852	38	772-839	146
8	863-923	8	840-910	41

En esta tabla se observa que los agrupamientos con mayor número de casos son los que se encuentran entre los rangos de puntuación matemática media y baja, siendo las mujeres los casos que mayor frecuencia tienen en las puntuaciones bajas. Después de analizar la tabla anterior se realizó un análisis del comportamiento de cada una de las variables incluidas en el bloque de entorno familiar dentro de los agrupamientos antes definidos.

En la siguiente gráfica se observa el comportamiento de las variables cuya opción de respuesta fue siempre. Al parecer dentro de este bloque las variables "expresa afecto", "platica de tus dudas" y "está al pendiente de tus calificaciones" están relacionadas con la puntuación en matemáticas. Sin embargo, las derivaciones de los gráficos indican que las diferencias en cuanto al apoyo de sus familiares a hombres y mujeres son relativamente pequeñas. Se observa que la diferencia de género más notoria es la relacionada con la variable "expresa de afecto" (Figura 3, colores rosas mujeres, colores oscuros hombres), ya que son las mujeres con mejor puntuación, las que expresan sentirse apreciadas por sus padres.

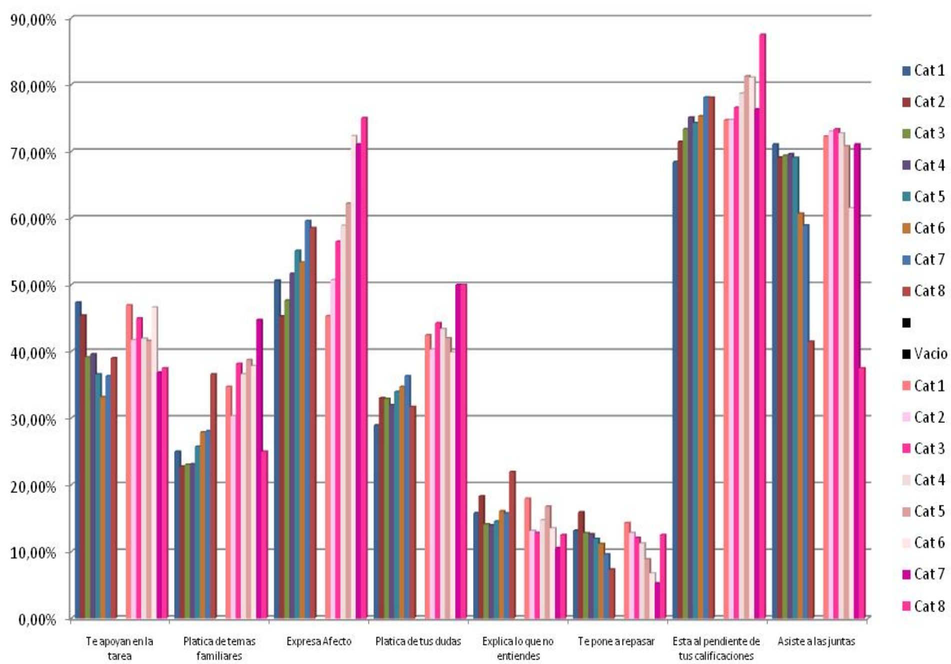


Figura 3. Análisis del clúster Entorno Familiar y Puntuación en Matemáticas.

El siguiente obstáculo planteado fue identificar qué conjunto de variables utilizar para realizar el agrupamiento de los casos, por lo cual, se empleó el mismo algoritmo de clúster jerárquico, para hacer agrupamiento de variables; las variables "El maestro de Matemáticas toma en cuenta las opiniones de los alumnos para mejorar la enseñanza" y "El maestro de Matemáticas me motiva para aprender más y seguir estudiando" son un ejemplo de estos agrupamientos que se relacionan con el desempeño de los estudiantes en matemáticas .

Otro resultado importante es que las variables "Pongo atención en las clases" y "¿Hasta qué nivel educativo te gustaría estudiar?" representa una influencia positiva (creciente) para el sistema de variables que se están analizando, donde la opción de respuesta siempre es la categoría que más aporta a este comportamiento en la primer variable; mientras que para la segunda la opción que más aporta a este resultado es posgrado. Lo anterior da indicios de mejorar los modelos establecidos e indagar con mayor profundidad, la influencia de ciertas variables lo cual es una gran posibilidad de estudio.

Conclusiones

Se observó que aun siendo la cota superior del rango de calificaciones en las mujeres, mayor a la de los hombres, éstas poseen una concentración en las calificaciones centrales (entre 450 y 650), mientras que la distribución de los hombres es más homogénea. Para enfatizar en el estudio de género, se requiere, por un lado, incluir en las pruebas de contexto ítems que nos permitan hacer inferencias más precisas y por el otro, incurrir en investigaciones sobre estudio de género que nos den indicios de una mejora en la elaboración de la prueba de conocimientos en matemáticas de la prueba ENLACE.

El entorno familiar influye en el buen desempeño del estudiante, a saber, en el caso de las mujeres se notó una diferencia respecto a los hombres cuando a éstas sus padres les demuestran afecto. Tanto en hombre como en mujeres es importante que los padres de familia estén al pendiente de las calificaciones de sus hijos.

Se observa que la mayoría de los hombres que tienen puntajes altos en la prueba de matemáticas expresan que su profesor de matemáticas les explica lo que no entienden. También se observó que es importante la organización que tienen las autoridades de la escuela.

Referencias bibliográficas

Blanco, E. (2007). Eficacia escolar en México. Factores escolares asociados a los aprendizajes en la educación primaria. Tesis de doctorado no publicada. Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. México.

Blanco, E. (2008). Factores escolares asociados a los aprendizajes en la educación primaria mexicana: Un análisis multinivel. REICE - Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 6(1), 58-84.

Coello, C. A., Dehuri, S., Ghosh, S. (2009). Swarm Intelligence for Multi-Objective Problems in Data Mining. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Manual Técnico ENLACE. (2008). Recuperado el 20 de noviembre de 2009 de http://www.enlace.sep.gob.mx/ba/?p=manualtecnico

Oliver, Juan O., Rosel, J., Jara P. (2000). Modelos de regresión multinivel: aplicación en psicología escolar. Psicothema 12(3), 487-494.

UNA REFLEXIÓN SOBRE EL TALENTO INFANTIL EN CIENCIAS Y SU DESARROLLO, CON TUTORES PARTICIPANTES DEL PROGRAMA NIÑ@S TALENTO-D.F.

Erika Marlene Canché Góngora; Rosa Ma. Farfán Márquez
Cinvestav-IPN (México)
emcanche@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. Este trabajo presenta una reflexión paralela a una investigación en curso en la cual la problemática general es la atención a la diversidad escolar y, en particular, la dimensión de talento infantil en ciencias. En este sentido un papel primordial lo juega el profesor como aquél acompañante al alumno en su proceso de aprendizaje y del cual se exigen indicadores para determinar las capacidades superiores. Por tanto, creemos que vale la pena discutir aspectos tanto de la profesionalización docente como de la reflexión que los profesores hacen al respecto. Planteamos una experiencia de discusión sobre el talento en ciencias con tutores del programa Niñ@s Talento D.F. con la finalidad de conocer su postura y contrastar lo manifestado con el estado del arte que construimos para el proyecto

Palabras clave: diversidad escolar, talento científico infantil, profesorado

Abstract. This paper presents a reflection parallel to an ongoing investigation in which the general problem is the scholastic diversity in the group of child talent in science. In this context it is important that the teacher who accompanies the student in their learning process have a key role in the identification of superior capabilities. We therefore believe that it is worth discussing aspects of both teaching and professional reflection by teachers about it. We propose a discussion on the experience of science talent program with tutor of Niñ@s Talento D.F. in order to know their position in this theme, in contrast with the state of the art we built for the project.

Key words: scholastic diversity, child talent in science, teachers

Los modelos teóricos explicativos del talento nos indican, tanto su estrecha relación con el término superdotación, como la intervención determinante de la inteligencia como aquella noción que norma diferentes paradigmas en el campo. Lo anterior dado que desde la antigüedad, la inteligencia de los individuos ha implicado una condición dialéctica con el éxito académico creando paradigmas a su alrededor. Es decir, se le ha dado a la inteligencia un carácter primordialmente académico y base fundamental para la *clasificación escolar*.

Desde sus estudios iniciales, las definiciones sobre inteligencia ponen más énfasis en unos o en otros aspectos, como lo son la manifestación de habilidades y capacidades de aprendizaje demostradas en la resolución de problemas o cuestionamientos que involucran abstracción, hasta la importancia del contexto sociocultural, en años recientes, los cuales miran al individuo en sus relaciones con el medio y ante adaptaciones a nuevas situaciones. Sin embargo, de manera general, se acepta a la inteligencia como una capacidad de organización o de un sistema artificial auto-modificable en situaciones o limitaciones del medio ambiente, dependiente de un nivel de integración en el campo de: representaciones, procesos mentales, comportamientos y conexiones neuronales (Lautrey, 2004).

Creemos que es desde la visión individual en la cual la inteligencia y el talento se miran intrínsecamente relacionados, ya que esta postura mira a la inteligencia como algo único en el individuo y se cuestiona acerca de si la inteligencia se manifiesta en todos los ámbitos o en unos cuantos, y sobre todo marca la frontera entre lo que el individuo posee y lo que el medio le infiere. En términos generales, ¿es *la* inteligencia o son *las* inteligencias? El cómo definir la inteligencia y por tanto la postura que se tome, es en sí mismo, un cuestionamiento central dentro de los estudios del talento y la sobredotación.

Esta problemática la vemos desde un sentido más amplio, es decir, en términos de la diversidad escolar, en la cual influyen diversos factores, sin embargo se discute en la crítica de que los sistemas educativos dan respuestas homogéneas a poblaciones heterogéneas. Uno de estos factores que permite hablar de diversidad escolar, son las capacidades de los individuos dentro del proceso educativo, lo que expresaría el éxito o fracaso del estudiante.

Consideramos que sobre la población menos exitosa existen acciones más claras que diferencian las problemáticas de las poblaciones y determinan sus tratamientos, es decir, se habla de niñas y niños con problemas de aprendizaje, con discapacidad o con algún retraso mental y las acciones educativas contemplan tratamientos diferenciados. Sin embargo para el extremo superior las acciones no se ven de la misma forma, dado que no hay una distinción adecuada de los términos para referirse a las poblaciones con características superiores. De lo anterior encontramos evidencia en algunos documentos de la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México en donde la población de Educación Especial del sistema de educación básica está determinanda por:

Tabla 1. Población atendida y diagnosticada de acuerdo con SEP

Población atendida y diagnosticada
Deficiencia mental
Transtornos visuales
Transtornos de audición
Problemas de conducta
Impedimentos motores
Problemas de aprendizaje
Problemas de lenguaje
Intervención temprana
Aptitudes sobresalientes

A nivel aula, la diversidad escolar constituye una de las problemáticas fundamentales a resolver por parte del sistema educativo. Las acciones gubernamentales mexicanas han atendido principalmente a la población con discapacidad o aquella con problemas de aprendizaje, y en el extremo superior no ha tenido el mismo apoyo, en lo que se refiere a los alumnos como a los profesores. En la Ley General de Educación, artículo 41, se enfatiza la atención de los alumnos con necesidades educativas especiales, incluirá orientación a los padres o tutores, así como también a los maestros y personal de escuelas de educación básica regular que integren alumnos con necesidades especiales de educación (SEP, 2006).

En cuanto a la calidad de los servicios de educación especial en la actualidad, en particular el que se refiere a los alumnos con aptitudes sobresalientes, persiste un trabajo irregular no sólo entre las distintas entidades del país, sino también entre los servicios de una misma entidad; esto como consecuencia de la falta de lineamientos y normas que orienten la práctica educativa de los profesionales implicados (SEP, 2006). Se reconoce una demanda de servicios educativos de educación especial en cuanto a la necesidad de recursos humanos y materiales en términos de acciones de capacitación y actualización, pero en términos de acciones nada es concreto.

Según datos de la SEP (2006), a partir del reporte global del Diagnóstico sobre la Formación y Actualización del Personal de Educación Especial y los Centros de Atención Psicopedagógica de Educación Especial (CAPEP), realizado en agosto de 2005 en las 32 entidades del país:

- De 50,186 personas que contestaron el cuestionario, 54% (27,048) estudió en la Escuela Normal. De éstos, 44.6% (16,549) tienen estudios en Educación Especial.
- 40.7% (20,489) estudió la Licenciatura en Educación Especial en otras instituciones.

Con lo anterior se fundamenta que la falta de recursos humanos, en cantidad y con el perfil adecuado, es un problema insoslayable.

En un esfuerzo por abordar esta problemática en la Ciudad de México se implementa El Programa Niñ@s Talento que ofreciendo alternativas de desarrollo a estudiantes destacad@s a través de actividades extraescolares de carácter lúdico en los ámbitos de las ciencias, las artes y el deporte, a fin de estimular su creatividad, orientar sus intereses, actitudes y valores, así como potenciar sus conocimientos y habilidades (DIF-DF, 2007). Es de destacar que este programa es innovador tanto en su ideología como en su desarrollo diario, en nuestro país. En el apartado de ciencias las niñas y niños tienen contacto con situaciones de aprendizaje diseñadas para ellos y en las cuales el reto es el hilo conductor de las sesiones.

Otro componente esencial es el tutor como medio inmediato de interacción entre el reto y la niña o niño. Este Programa alberga aproximadamente 150 tutores en el área de ciencias, con los cuales trabajamos durante dos sesiones, de 4 horas cada una, sobre la percepción que tienen y que se han "formado" sobre el talento infantil en ciencias y su potencialización.

Recabamos datos que nos permiten conjeturar las posturas que tienen sobre este tema y la posible potencialización de las habilidades que, según ellos, posee una niña o niño con talento científico.

A modo de caracterización las tutoras y tutores manifestaron reflexiones sobre la condición de talento en los niños y formas de potencialización. Esta exploración nos parece importante ya que creemos que puede ser diferente con la reflexión que nos podría dar una profesora o profesor de escuela regular, lo cual es natural dada la experiencia que el tutor tiene en un programa con niñas y niños exitosos en la escuela y que conviven *académicamente* en un escenario construido precisamente para tal interacción.

Entre las características mencionadas por las tutoras y tutores acerca del talento científico, se encuentran:

Tabla 2. Comentarios escritos de los tutores del programa sobre el talento en ciencias

Una caracterización del talento infantil en ciencias por tutoras y tutores del Programa Niñ@s Talento
Virtud y facilidad para resolver problemas
Curiosidad
Capacidad de deducción
Capacidad de abstracción
Capacidad de razonamiento
Capacidad de atención
Iniciativa
Observación
Trabajo en equipo
Sentido crítico
Habilidad de redacción
Formulación de hipótesis
Planteamiento de analogías
Sentido Crítico
Creatividad
Construcción de hipótesis

La tabla anterior resume las características manifestadas, sin embargo, es importante resaltar que ciertos indicadores tuvieron mayor recurrencia entre las y los tutores. Estas posturas comunes fueron la curiosidad, la creatividad y la capacidad de abstracción.

Si bien no ahondamos más al respecto creemos que esta información nos permite tener un punto de vista concreto sobre lo que en el programa se vive diariamente y la reflexión que en el tutor que lo anterior motiva.

Uno de los aspectos importantes de la investigación actual del talento se ve reflejada en la consideración de que es potencial, es decir, desarrollable. Las tutoras y tutores también se encuentran bajo esta postura y se demostró en términos de relacionar la caracterización anterior con posibles *formas* de promover la potencialización del talento científico en el Programa, o lo que en ese momento se denominó *estrategia.*

Estas estrategias las hemos caracterizado de acuerdo a:

- Importancia de la vida cotidiana:

  Hacer situaciones con un tema de su interés que pueda ser aplicado en su vida, en su casa, en su escuela y le vea una aplicación y/o función.

  Llevar material didáctico de acuerdo al tema. Relacionar el tema con la vida cotidiana. Formular preguntas para despertar interés y que a su vez ellos planteen nuevas interrogantes. Saber los intereses de los alumnos.

  Relacionar la mayor cantidad de actividades realizadas con su medio ambiente y entorno familiar y social.

  Proponer problemas de tipo lógico para ayudar a fortalecer su pensamiento abstracto, como la programación en la computación. Relacionarlo con la vida común.

  Preguntarles ¿dónde lo han observado?, que hablen de sus experiencias cotidianas, fomentar que participen hablando de ellos mismos.

- Para promover el desarrollo de ciertas habilidades:

  Propiciar el uso de la imaginación con conocimiento previo para poder generar explicaciones sobre diferentes situaciones.

  Proveer al estudiante de cierta información pero a su vez, dejar ciertos huecos en la consolidación del tema, esto lleva a generar dudas y se interese por conocer más sobre el tópico. Ayuda incitarlo y a su vez retarlo a preguntar lo inusual.

  Formulación de preguntas, que lleven al niño a respuestas y que le generen más preguntas para crear la necesidad de saber.

  Realizar preguntas que generen pensamiento crítico.

  Proporcionándoles actividades que les permitan desarrollar habilidades y acciones más allá de las científicas, también las verbales y artísticas.

Haciéndoles preguntas, retándolos con actividades que desarrollen su imaginación y relación.

Generando actividades que generen curiosidad, que el mismo se cuestione sobre ¿por qué pasa?, ¿qué ocurre?, estas actividades o el diseño se debe armar o realizar a la vista de ellos, para que observen que no hay ningún truco o que no es magia.

- De formas de organización en el aula del Programa:

Competencias entre equipos, competencias uno a uno.

Interacción de grupos.

Hacer equipos mixtos, buscar que sean rotativos, hacerlos al azar, hacer actividades de integración y de conocimiento buscando que se conozcan y construyan relaciones de respeto entre todos.

Reflexionar y problematizar con ellos ¿Por qué es importante el trabajo en equipo?

Reflexionar en cada situación didáctica o actividad, ¿por qué fue importante el trabajo en equipo?, ¿qué aprendí de mi compañero?, ¿Por qué es importante que cada uno expresemos nuestras ideas?, buscar que cada equipo construya sus propias formas organizativas, de reflexión, de discusión, de toma de acuerdos y de toma de conciencia de la importancia del trabajo en equipo.

- Para el desarrollo de diferentes reflexiones mediante ciertos cuestionamientos:

Preguntas de apertura, ¿qué ves?, ¿cómo es? Preguntas sobre el planteamiento de hipótesis, ¿Qué crees que suceda? ¿cómo lo harías?

Fomentar que el o la niña se pregunte ¿por qué pasa?, ¿cómo pasa?, y que aprendan a analizar los procesos diciendo ¿qué piensan de esto? Y ¿porqué?, reflexionar siempre con las y los niños para que se cuestionen los fenómenos que se observan y sus explicaciones, para que faciliten sus análisis ubicando sus causas y consecuencias.

Analogías ¿A qué se parece?

Escribir resultados, y ¿por qué?

Estas estrategias planteadas por el tutor nos dejan ver las diferentes posturas que tienen con respecto al talento infantil en ciencias de las niñas y niños con los cuales interactúan sistemáticamente. Nos dejan ver preocupaciones por desarrollar habilidades más que otras y por tratar de mantenerlos interesados. Nos sorprendió la gran variedad de reflexión que los tutores manifestaron, lo cual nos hace pensar en que son un grupo realmente preocupado por la función que desempeñan en el Programa y sobre todo por el impacto que tienen en las niñas y niños inscritos.

En contraste con lo marcado por el estado del arte, el profesor de escuela regular se concibe como la fuente primordial de identificación de las capacidades superiores y, en consecuencia, dar la atención educativa que se requiere. Los tutores del Programa Niñ@s Talento D.F. tienen una amplia experiencia con las niñas y niños que asisten y tenemos la hipótesis de que eso les permite reflexionar aspectos que, en el carácter restrictivo de la escuela regular, serían difícilmente identificados.

La discusión anterior nos permite nutrir una investigación más amplia sobre la conceptualización, identificación y tratamiento, en términos de una propuesta de política pública que atienda a la diversidad escolar, en particular al extremo superior de alumnos de educación básica, dado que la postura del tutor nos da indicios de la postura ideal del profesor de aula regular que distingue la presencia de talentos en su aula.

Referencias bibliográficas

DIF-DF (2008). Lineamientos y mecanismos de operación del Programa Niñ@s Talento. *Gaceta oficial del Distrito Federal*, publicado el 24 de octubre de 2007. Recuperado de: www.sideso.df.gob.mx/documentos/ninos_talento.pdf

Lautrey, L. (2004). Hauts potentiels et talents: la position actuelle du problème. *Psychologie française* 49, 219–232.

SEP (2006). Propuesta de intervención: Atención educativa a alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes. México. Recuperado el 15 de enero de 2009 de: http://normalista.ilce.edu.mx

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRABAJO PRE-ALGEBRAICO

Tulio Rafael Amaya De Armas, Josefina del Carmen Gulfo de Puente
Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo (Colombia)
tuama1@hotmail.com, jgulfo26@hotmail.com

Resumen. En este trabajo se comunican los resultados de una investigación donde se analizaron los errores que cometen estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria tratando de resolver una expresión aritmética. Este análisis se hace con los temas habituales, que según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que rigen en Colombia, deben desarrollarse en tal grado. Los errores encontrados fueron de tres tipos: de entrada, de operación y de escritura. Estos errores fueron sistemáticos: se dieron en serie, unos como consecuencia de los otros. En su mayoría estos errores se debieron a la prioridad que los estudiantes dan a las operaciones, realizando primero operaciones aditivas que multiplicativas o porque operaron con números que no estaban en la expresión.

Palabras clave: - errores, pensamiento algebraico, transición aritmética-álgebra

Abstract. In this paper we communicate the results of an investigation where the mistakes made by students of the eighth degree of basic secondary education trying to solve an arithmetic expression were analyzed. This analysis is done with the usual subjects that according to the Basic Skills Standards in Mathematics in Colombia, must be developed to a certain extent. The errors found were of three types: input, operation and writing. These errors were systemic, occurred in series, one following the other. Most of these errors were due to the priority students give to the operations, performing first additive to multiplicative operations or because they operate with numbers that were not in the expression.

Key words: mistakes, algebraic thinking, transition arithmetic-algebra

Marco teórico

Según Sessa (2005) para los profesores, el álgebra representa la herramienta por excelencia de la matemática, considerando que los profesores se forman en una matemática algebraica, mientras que del lado de los alumnos el álgebra se presenta como una fuente inagotable de pérdida de sentido y de dificultades operatorias muy difíciles de superar.

No es un secreto que la mayoría de los estudiantes cometen errores en el desarrollo de las operaciones matemáticas, errores que son mucho más notorios cuando se inicia el trabajo algebraico en el octavo grado de educación básica. La recurrencia de estos errores va creando vacíos conceptuales que a corto o mediano plazo se convierten en serios problemas para el desempeño académico de los estudiantes, llevándolos incluso, hasta la deserción escolar. Del Puerto, Minnaard y Seminara, (2004) consideran que el análisis de los errores que cometen los estudiantes en su proceso de aprendizaje proporcionan una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; se constituyen en una excelente herramienta para revelar el estado del conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de mejorar sus resultados académicos. Además, estos vacíos que van quedando, pueden impedir el correcto aprendizaje de otros temas importantes en cursos posteriores y frustrar desarrollos académicos futuros. Para Vergnaud (1991, citado por Carrión, 2007), el análisis de las producciones de los estudiantes conduce al análisis de sus aciertos y errores. La necesidad de analizarlos es evidente, ya que sólo mediante su análisis se puede saber qué dificultades enfrenta el alumno. Lo que permite determinar los medios para corregir tales dificultades, además, "se requieren los errores para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada" (Carrión, 2007, p. 21), es decir, los errores son necesarios para que el estudiante pueda distinguir lo correcto de lo incorrecto, lo peligroso es que se quede con el error considerándolo como lo correcto.

Ruano, Socas y Palarea (2008), plantean que los errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Por lo que los errores que cometen los alumnos son muy buenos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Bachelard (1938, citado por Del Puerto et al, 2004) ya consideraba que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo; que se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superando lo que en la mente hace de obstáculo y, por lo tanto, los errores son constitutivos del propio acto de conocer. Bajo este punto de vista pretender que los estudiantes no cometan errores sería pretender que dejaran de aprender, es decir, "el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje." (Del Puerto, et al, 2004, p. 2). Estos mismos autores consideran que la presencia de errores algebraicos obstaculizan con frecuencia la articulación exitosa de contenidos imprescindibles en la formación matemática del alumno y además, que el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos, por lo que su análisis y tratamiento puede evitar "consecuencias que, para un país, ocasiona formar profesionales con un aprendizaje en un ambiente de errores" (Carrión, 2007, p. 20); Carrión además considera que para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprenderlo, analizarlo, corregirlo y utilizarlo para desarrollar estrategias de prevención de nuevos errores.

Para Carrión (2007), el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. En general, el error es un conocimiento que puede funcionar en un contexto y en otro no hacerlo. Según Charnay, (1991) los errores se consideran significativos, y poseen las características de ser reproducibles cuando se manifiesta una cierta persistencia, por lo tanto no es considerado al azar, o por distracción. Además sostiene que estos hechos no son aislados, pueden ponerse en relación con otros, formando una suerte de red o de sistema de errores. Por lo que los errores así conformados propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las actividades planteadas.

Carrión (2007), clasifica los errores cometidos en el proceso pre-algebraico en tres tipos: 1) errores de entrada, en estos los estudiantes aunque realizan los cálculos en forma correcta, operan una expresión diferente a la que se les propone, es decir, eligen el proceso correcto, pero presentan errores en su proceso de solución, cambiando por ejemplo los términos de las expresiones o alterando el uso de los paréntesis o inventando números que no están en la expresión; estos errores por lo general conducen a resultados incorrectos. 2) errores de operación, en estos los estudiantes distorsionan el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada en forma independiente, por mal uso de las operaciones o de los signos. Y 3) errores de escritura, se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión, aunque se escojan las operaciones adecuadas y estas se realicen correctamente; en los errores de este tipo, el estudiante realiza los cálculos secuencialmente sin cometer errores en la ejecución de las operaciones y es muy común que se obtengan resultados correctos.

Metodología

En este trabajo se hace el análisis de los errores que cometen estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria tratando de resolver una expresión aritmética que incluye sumas, restas y potenciación. Esto se hace en el desarrollo ordinario de un curso de octavo grado, con los temas habituales que según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que rigen en Colombia, deben desarrollarse en tal grado. Se detectaron los errores en los escritos de los estudiantes, por observación directa de su producción en clase, en su trabajo individual o en grupos. El análisis se hizo con la ayuda de los estudiantes de los mejores promedios académico de cada grupo, quienes en el trabajo en clases debían repartirse cada uno, entre el resto de sus compañeros conformando grupos libres de tres o cuatro. En reuniones extra clases donde éstos también se reunían en grupos libre de tres o cuatro estudiantes; cada grupo designaba un relator quien explicaba a los demás los errores que habían visto cometer a sus compañeros en la clase, se analizaba la postura de cada grupo y se clasificaban de acuerdo a una clasificación propuesta por Carrión (2007). El trabajo se llevó a cabo en el segundo semestre académico del año 2009. Participaron 91 estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria de la Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo Colombia, del sector oficial, todos de la jornada matinal, repartidos en tres grupos: A (30), B (29) y C (32), con edades entre 13 y 14 años, provenientes de estratos socioeconómicos 1 y 2. Todas las expresiones que se presentaron fueron descontextualizadas, es decir, no se presentaron situaciones que se pudieran modelar con estas expresiones.

El trabajo se realizó en varios momentos en los cuales se citaron a los estudiantes de mejores promedios en contra-jornada y se procedió a hacer:

- Discusiones preliminares para conceptualizar el problema de investigación y acordar la metodología de trabajo.
- Conformación de grupos donde cada uno debía hacer lecturas, análisis y discusión de algunas bases teóricas sobre análisis de errores, luego se analizaban y discutían en plenaria entre todos los grupos.
- Análisis y discusión en los grupos de los errores encontrados en la clase.
- Socialización y discusión en plenaria de los errores encontrados por los estudiantes e implementación de nuevas estrategias.

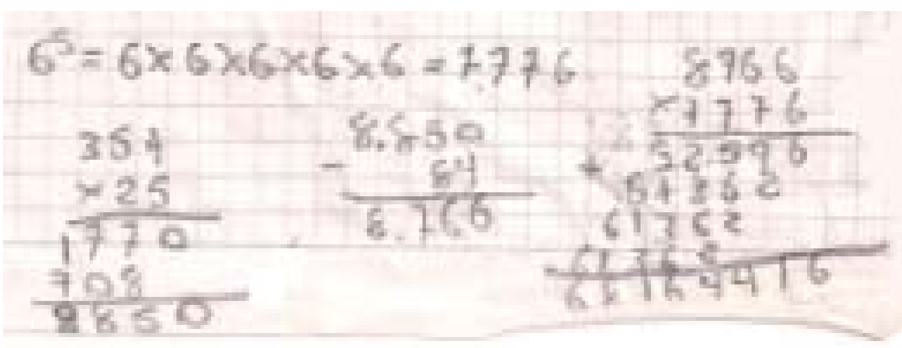
Resultados

Para el análisis se escogieron dos de las expresiones que se les propusieron a los estudiantes, se clasifican y analizan los errores cometidos por algunos de ellos, de acuerdo al tipo de error cometido, en cada expresión:

Expresión 1. $25 \times 354 - 84 \times 6^5 + 8 \times 21$

En relación con la expresión 1, el 50,55% (46) de los estudiantes cometió algún error al tratar de resolver esta expresión. Así mismo, fue amplia la variedad de errores que se presentaron. A continuación se muestran algunos de estos errores, presentados por los estudiantes y algunos de sus manuscritos al tratar de realizar los cálculos en cada una de las expresiones propuestas.

Ejemplo 1

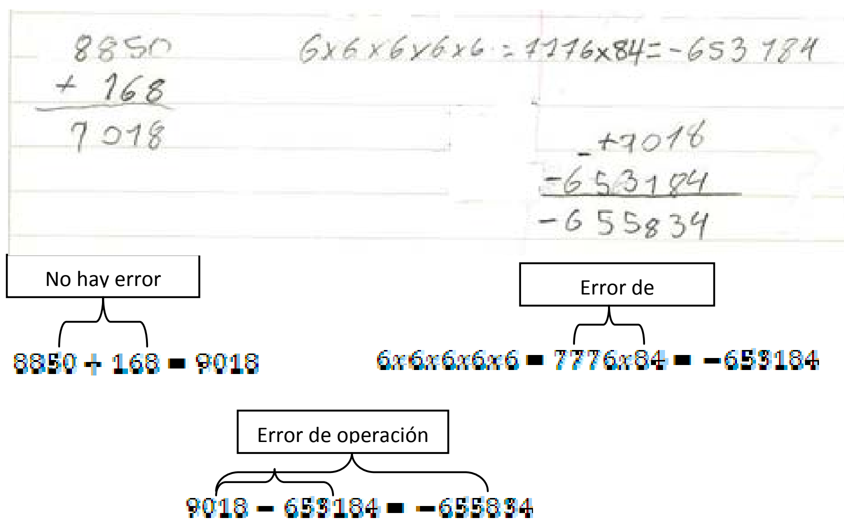


$25x354 = \overbrace{8850 - 84}^{\boxed{\text{Error de entrada}}}$ $\qquad$ $\overbrace{8766}^{\boxed{\text{Error de entrada}}}x7776 = 68164416$

Este estudiante comete un par de errores de entrada, como se puede ver en su manuscrito, además, omitió realizar la última operación. Puede apreciarse que los cálculos realizados los ejecutó correctamente y por separado; los errores están en la combinación de términos.

Ejemplo 2

Este estudiante agrupa los términos con igual signo y realiza cada operación por separado. Al realizar la operación con los términos que tienen signo negativo, omite el signo, desarrolla la potencia y posteriormente comete un error de escritura al continuar secuencialmente con los cálculos sin separarlos. Al final vuelve y considera el signo negativo. Cuando ya tiene las cantidades positivas y negativas correspondientes procede a hacer la adición y comete un error de operación, al realizar el cálculo en forma incorrecta. Este estudiante fue uno de los pocos que obtuvo un resultado negativo en sus cálculos.

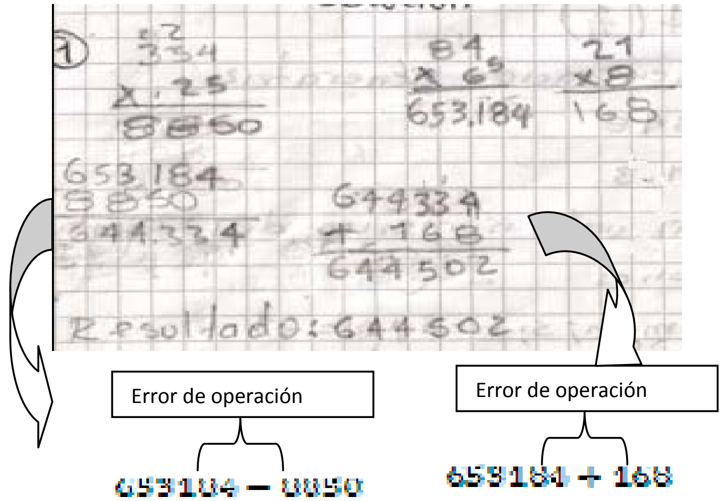


Ejemplo 3

Este estudiante al igual que el anterior, realizó cada operación por separado. Cometiendo un par de errores de operación al ignorar el signo en la diferencia al realizar el primer cálculo y luego no tener en cuenta que el resultado debía ser negativo para el último. El segundo error se dio como consecuencia del primero, formándose lo que Charnay (1991) llama red o cadena de errores.

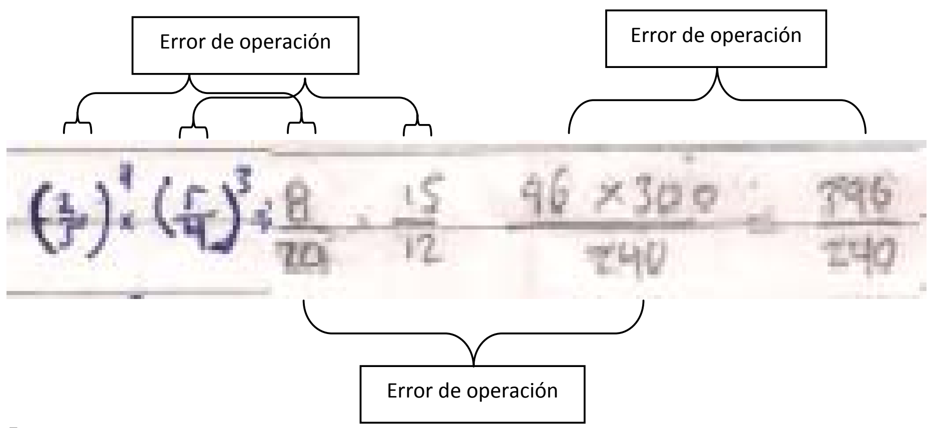
Expresión 2 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^3$

En relación con la expresión 2, el 73,62% (67) de los estudiantes cometió algún error al hacer la transformación de esta expresión en otra equivalente y al igual que en la anterior, fue diversa la variedad de errores que se presentaron. A continuación mostramos algunos ejemplos.



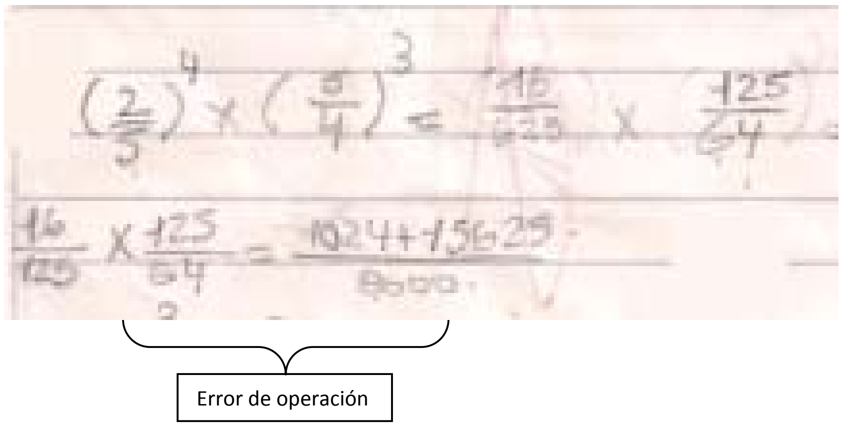
Ejemplo 4

Aquí el estudiante ejecuta correctamente las potencias en ambos fraccionarios, sin embargo al realizar la multiplicación comete un error de operación cuando en lugar de realizar la multiplicación que tiene planteada, lo que hace es multiplicar en cruz cada término de los fraccionarios y luego los denominadores, como si fuera una suma y finalmente los suma.



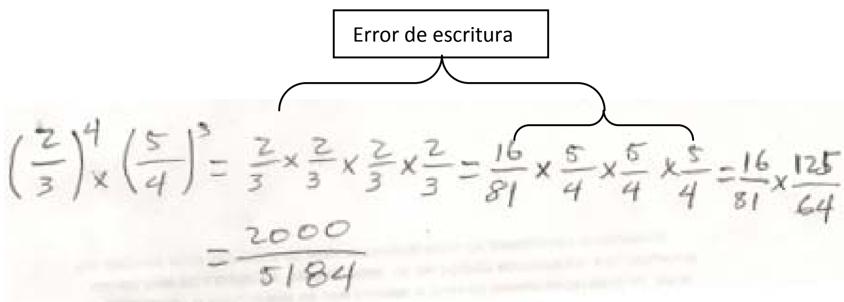
Ejemplo 5

Aquí el estudiante parte de sendos errores de operación al considerar $\frac{2^4}{5^4}=\frac{2x4}{5x4}=\frac{8}{20}$ y $\frac{5^3}{4^3}=\frac{5x3}{4x3}=\frac{15}{12}$, pretendiendo que la potenciación funcione como la multiplicación. En el tercer término comete otro error de operación al multiplicar en cruz el numerador del primer fraccionario con el denominador del segundo y el denominador del primero con el numerador del segundo, como en una suma de fraccionarios. Y finalmente en lugar de ejecutar la multiplicación que tenía planteada, lo que hace es la suma de los factores que aparecen en el numerador de la fracción.



Ejemplo 6

En este ejemplo el estudiante ejecuta correctamente las potencias, pero comete errores de escritura y finalmente obtiene un resultado correcto, que no lo es por ser producto de un proceso inadecuado.



Los errores de entrada fueron los más sistemáticos, se dieron en serie, unos como consecuencia de los otros, lo que Perrot (1989, citado por Charnay, 1991) llama coherencia entre errores. Coincidimos con Carrión (2007) en que, cuando se cometieron este tipo de errores, aunque los estudiantes eligieran el algoritmo correcto, parte de ellos presentaron errores en el proceso de resolución. La mayoría de estos errores se debieron a la prioridad que los estudiantes dan a las operaciones, realizando primero sumas o restas que multiplicaciones; aunque las potencias si las resolvieron primero, dándole la prioridad adecuada.

Los errores de operación fueron una constante en todo el proceso; se hacían actividades para remediarlos, según el tipo (Charnay, 1991), y volvían a aparecer de la misma forma o de otra similar o diferente, pero siempre aparecían. Este tipo de error fue el más constante, los mismos estudiantes tendían a cometer los mismos errores. Por lo general se produjeron por cambios en los signos de las operaciones, por invertir los factores en un fraccionario, uso inadecuado de las leyes de la potenciación, omisión de alguna operación o de un número y cambio de operaciones, como potenciación por multiplicación o multiplicación por división o por suma. Se presentó con mucha frecuencia entre los estudiantes, cambiar el minuendo con el sustraendo, cuando el sustraendo era mayor, persistiendo la idea de que al restar dos números, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo.

Con los errores de escritura sucedió lo contrario que con los de entrada: aunque aparecieron en cada tema, fueron más evidentes al final, cuando se estaba próximo a una evaluación. Este tipo de error fue el menos admitido por los estudiantes, lo cometían y como casi siempre obtenían la respuesta correcta, sostenían que eso no podía ser un error porque el resultado estaba bien. Los mismos monitores no los veían como error. Estos errores se debieron más que todo a formas inadecuadas en la sintaxis, al encadenar varios signos de igualdad operación tras operación sin alterar el orden ni la prioridad de las operaciones y en la mayoría de los casos realizando cálculos correctos. La mayoría de los estudiantes encontraron en sus errores una oportunidad de aprendizaje y se esforzaban al máximo para no cometerlos. Sin embargo, la recurrente naturaleza de los errores persistía, como queriendo mostrar que "el dominio completo de las estructuras aditivas se logra a lo largo de un tiempo bien largo. Y que hay que subrayar la importancia del 'largo plazo' en los aprendizajes" (Charnay, 1991, p. 6-7), además, que "el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos" (Del Puerto, et al, 2004, p. 2).

Conclusiones

La mayoría de los errores cometidos por los estudiantes en el trabajo pre-algebraico están relacionados con el uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas de matemática (suma, resta, multiplicación y división) debido a las insuficiencias de los conocimientos adquiridos en niveles de enseñanza anteriores; al uso inadecuado de la sintaxis o a la prioridad en el orden al ejecutar las operaciones.

Fueron muy frecuentes los errores por la mala utilización e interpretación de los signos y por la distorsión de las operaciones; esto generó conflicto en los estudiantes sobre todo al operar fraccionarios.

El hecho de analizar las producciones de los estudiantes, permite conocer sus errores más frecuentes y plantear actividades de remediación (Vergnaud, 1991, citado por Carrión, 2007) en función de estos errores, lo que podría llevar a los profesores a realizar algunas modificaciones en el currículo, basado en una realidad muy propia, además, puede permitirle al profesor "diseñar problemas de investigación adaptados al nivel de los alumnos" (Carrión, 2007, p. 55).

Uno de los aspectos más importantes del trabajo lo constituyó el trabajo en grupo de los estudiantes, permitiendo un acercamiento de tú a tú, el mismo hecho de que fueran los propios compañeros los que los hicieran caer en cuenta de los errores cometidos, permitió que los estudiantes que cometían errores con mucha frecuencia, perdieran el temor de admitir cuando tenían resultados errados, lo que les fue dando autoridad para encontrar errores en los demás.

Referencias bibliográficas

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, N° 11, 19-57.

Charnay, R. (1991). *Del análisis de los errores en matemáticas a los dispositivos de remediación: algunas pistas* Equipo de Investigación en didáctica de la Matemática INRP. Michel Mante del IREM de Lyon. En: Grand N, 48 (pp. 37-64)

Del Puerto, S. Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* 38(4), 1-13.

Ruano, R. Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica 2*(2), 61-74.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zarzal.

LA TÉCNICA SPLINE: UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE, USANDO LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Rogelio Ramos, Frida María León, Armando Aguilar, Carlos Oropeza
Universidad Nacional Autónoma de México (México)
egorrc@gmail.com, armandoa@servidor.unam.mx, egor1131@servidor.unam.mx

Resumen. La técnica "spline" es una de las técnicas más usadas en aplicaciones científicas y tecnológicas. Presenta una mayor estabilidad numérica que la representación polinómica tradicional. Es un técnica poderosa y ampliamente usada, en derivación, integración, solución de ecuaciones diferenciales y graficación en dos y tres dimensiones (Madhumangal, 2007). El objeto matemático descrito, se enseña a estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) en el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí, y considera al aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la "Zona de Desarrollo Próximo". El experimento se realizó con un grupo experimental (64 alumnos) y un grupo de control (33 alumnos) y se utilizó el diseño experimental denominado prueba t independiente de comparación simple.

Palabras clave: técnica spline, aprendizaje, zona de desarrollo próximo

Abstract. The spline technique is one of the techniques used in scientific and technological applications. It has a higher numerical stability than the traditional polynomial representation. It is a powerful and widely used technique in derivation, integration, solution of differential equations and graphing in two and three dimensions (Madhumangal, 2007). The mathematical object described, is taught to engineering students using the learning sociocultural model of Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) which argues that both processes, development and learning, interacting, considering learning as a factor of development. It is this close relationship between development and learning, that, Vygotsky stresses and leads him to formulate his famous theory of the "Proximal Development Zone". The experiment was conducted with one experimental group (64 students) and a control group (33 students) and used the experimental design called independent t test of simple comparison.

Key words: technique spline, learning, proximal development zone

Introducción

Denominamos spline a una curva definida por tramos (o segmentos) mediante polinomios de tercer grado. A partir de un conjunto de datos, como el de la *Figura 1*:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Figura 1. Expresión tabular del conjunto de datos que es tratado mediante la técnica spline

Como resultado de la aplicación del ajuste cúbico spline, a partir de un conjunto de datos se obtienen las curvas suavizadas o polinomios cúbicos correspondientes a cada uno de los segmentos que conforman al conjunto citado. Por este motivo, la técnica spline también es conocida con el nombre de interpolación segmentaría. Esto significa que la técnica spline, interpola una función entre un conjunto de puntos. La curva interpolada pasa a través del conjunto de puntos dado y también, su derivada y curvatura son continuas en cada punto. Existen “splines” de distintos grados; sin embargo, los de tercer grado son los más ampliamente usados. Con esta descripción del ajuste cúbico spline, se puede observar en su representación gráfica, que, para cada subintervalo formado por dos puntos se determina un polinomio de grado tres, tal como se muestra en la *Figura 2*.

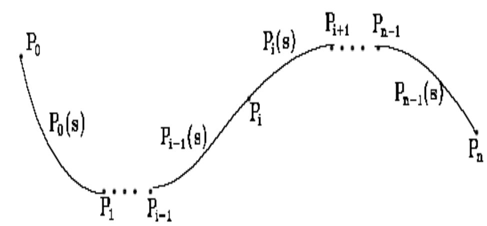


Figura 2. Expresión gráfica de la técnica de ajuste de curvas “spline”

Un caso particular del proceso que se lleva a cabo con la técnica del ajuste cúbico de curvas, se presenta en la *Figura 3*, aplicado al conjunto de datos tomados de un experimento.

Datos:

X	2	3	4	5	6	7
y	-5	4	27	70	139	240

Resultados del Proceso:

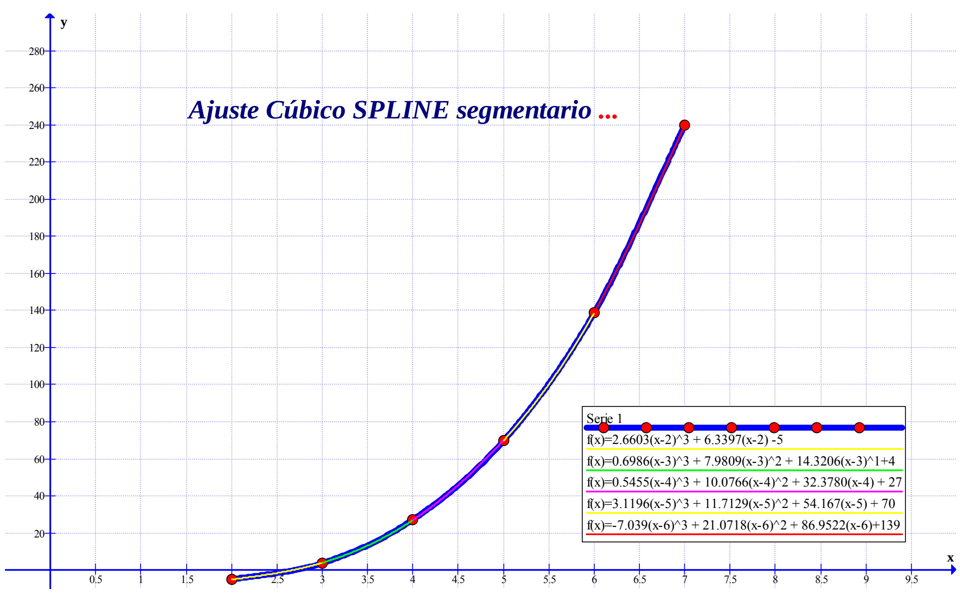


Figura 3. Representación gráfica del proceso que se sigue en el ajuste cúbico de curvas “spline”

En la *Figura 3*, se aprecia la calidad del ajuste cúbico spline segmentario; se muestra la gráfica del conjunto de datos del experimento (color azul) y los polinomios cúbicos calculados para cada uno de los segmentos correspondientes a los datos, los cuales se dibujaron en colores distintos y se encuentran indicados en la leyenda del gráfico

Descripción del objeto matemático

Se puede realizar un ajuste cúbico (Madhumangal, 2007) a una función definida en el intervalo:

$$[x_0, x_n]$$

cuando se pueden determinar polinomios cúbicos $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_n(x)$, tales que:

$$(1)\ldots\ y(x) = p_i(x) \quad sobre\ [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$(2)\ldots\ p_{i-1}'(x_i) = p_i'(x_i)\ , \quad i = 1,2,\ldots,n-1\ (igual\ \ derivada)$$

$$(3)\ldots\ p_{i-1}''(x_i) = p_i''(x_i)\ , \quad i = 1,2,\ldots,n-1\ (igual\ \ curvatura)$$

$$(4)\ldots\ p_i(x_i) = y_i\ ,\ \ p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}\ ;\ i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Para estos polinomios se establecen las consideraciones adicionales:

Sea denotara al i-ésimo intervalo por:

$$[x_i, x_{i+1}]$$

También se considera la notación siguiente:

$$h_i = x_i - x_{i-1}\ ,\ i = 1,2,3,\ldots,n \quad y\ \ sea\ \ M_i = y''(x_i)\ ,\ i = 0,1,2,\ldots,n$$

Entonces se propone encontrar un polinomio cúbico para el i-ésimo intervalo de la forma:

$$(5)\ldots y(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i\ \ en\ [x_i, x_{i+1}]$$

de manera que el problema se reduce a determinar los coeficientes $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, y $\boldsymbol{d_i}$, asociados al conjunto de datos que se ajustarán mediante el spline cúbico. Estos coeficientes quedan determinados mediante las relaciones:

$$(6)\ldots\ y_i = d_i$$

$$(7)\ldots b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$(8)\ldots a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}$$

$$(9)\ldots\ c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{2h_{i+1}M_i + h_{i+1}M_{i+1}}{6}$$

Así que, los coeficientes, $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, y $\boldsymbol{d_i}$ en la ecuación (5) quedan determinados en términos de las (n+1) derivadas desconocidas: M_0, M_1, M_2,… M_n. Estas incógnitas se determinan mediante la ecuación:

$$(10)\ldots 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right) = h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})M_i + h_{i+1}M_{i+1}$$

Esta relación es cierta para $i = 1,2,3,\ldots,(n-1)$.

Entonces se dispone de (n-1) ecuaciones para resolver las (n+1) cantidades desconocidas: M_0, M_1, M_2, … M_n

Luego, se requieren dos condiciones más, para resolver el problema del número de ecuaciones requeridas. Las condiciones se pueden obtener considerando las formas siguientes:

(i) Si se satisface la condición $M_0 = M_n$, entonces el ajuste cúbico ("spline") correspondiente es llamado "spline natural".

(ii) Si se satisfacen las condiciones:

$$M_0 = M_n\ ;\ M_1 = M_{n+1}\ ;\ y_0 = y_n\ ;\ y_1 = y_{n+1}\ ;\ h_1 = h_{n+1}$$

el "spline" correspondiente, se llama "spline periódico".

(iii) Otro caso es aquél, para el que se cumplen las condiciones:

$$y_0' = y'(x_0)\ ;\quad y_n' = y'(x_n)$$

de donde se obtiene:

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_i}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - y_0'\right)$$

$$y \qquad\qquad \ldots (11)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)$$

Se denomina "spline no periódico" o bien "spline cúbico anclado" (ajuste cúbico anclado), al "spline" que satisface las condiciones (iii),

(iv) Si se consideran como condiciones que:

$$M_0 = M_1 - \frac{h_1(M_2 - M_1)}{h_2}$$

y

$$M_n = M_{n-1} + \frac{h_n(M_{n-1} - M_{n-2})}{h_{n-1}}$$

entonces el "spline", que cumple con esas condiciones se llama "spline de extrapolación"

(v) Si se define que: $M_0 = y_0'' \;\; ; \;\; M_n = y_n''$

entonces el "spline" que satisface esas condiciones, es llamado "spline de curvatura ajustada en puntos extremos".

Diseño de las actividades y de las pruebas

Las actividades consistieron en la presentación del tema por los estudiantes, en esta se les pide que hagan uso de: un discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas, software y el uso de un lenguaje simbólico, además se propició en el estudiante la búsqueda y organización de la información para prepararlo en el uso personal de material informativo, como condición del autoaprendizaje; con objeto de conjuntar la comprensión de la teoría con la aplicación práctica. Se indicaron los conceptos básicos adquiridos previamente requeridos para el aprendizaje del objeto en cuestión; para lo que se sugiere que el estudiante use recordatorios (notas), claves o formulas, ayuda con los detalles o pasos que conforman el algoritmo e iniciar la presentación con un problema en el contexto de la ingeniería. Se diseño un sistema de evaluación, en el que se incluye un examen único para los dos conjuntos de estudiante el experimental y el de control, el cual se aplica en igualdad de condiciones, a la misma hora y con la misma duración y consistiendo de un solo problema en el que se utilice la técnica spline para su solución.

Metodología

El objeto matemático descrito, ha sido tratado para su aprendizaje por estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) para el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí considerando el aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje la que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP), que se puede definir como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Así mismo, subraya que el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, la cual está condicionada por dos tipos de mediadores: "herramientas" y "símbolos", ya sea autónomamente en la "zona de desarrollo real", o ayudado por la mediación en la "zona de desarrollo potencial. Y la adquisición de aprendizajes se explica cómo formas de socialización. El autor concibe al hombre como una construcción más social que biológica, en donde las funciones superiores son fruto del desarrollo cultural e implican el uso de mediadores.

Las "herramientas" (herramientas técnicas) son las expectativas y conocimientos previos del alumno que transforman los estímulos informativos que le llegan del contexto. Los "símbolos" (herramientas psicológicas) son el conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos. Las herramientas no modifican los estímulos en sí mismos, pero sí modifican las estructuras de conocimiento cuando aquellos estímulos se interiorizan y se convierten en propios. Las "herramientas" están orientadas externamente y su función es, a su vez, orientar la actividad del sujeto hacia los objetos; al contrario los "símbolos" están orientados internamente y son un medio de la actividad interna que apunta al dominio de uno mismo. Todo este proceso recibe el nombre de "ley de la doble formación" puesto que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las "herramientas" y reestructurándolo luego en el interior, a través de los "símbolos".

Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la citada "zona de desarrollo potencial", que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

En el aprendizaje escolar, la actividad del alumno está mediada por la actividad del profesor, que es quien debe ayudarle a activar los conocimientos previos (a través de las "herramientas") y a estructurar los conocimientos previos (a través de los "símbolos") proponiéndole experiencias de aprendizaje ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino en el límite de las posibilidades del sujeto. Es decir, en su "área o zona de desarrollo potencial" con el fin de ir ampliándola y desarrollándola. De esta forma, los procesos de aprendizaje y de enseñanza se solapan, convirtiéndose la propia actividad del alumno y la del profesor en mediadores de todo proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito escolar.

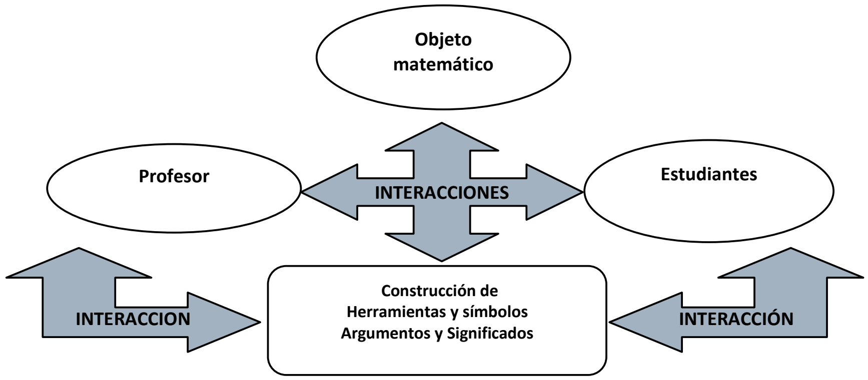


Figura 4. Esquema de las interacciones realizadas para aplicar la metodología de la zona de Desarrollo Próximo con estudiantes de Ingeniería, para el aprendizaje del ajuste cúbico de curvas "spline".

Realización del experimento

En nuestro experimento buscamos propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas proponiendo un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas con la técnica "spline", suponiendo que, para lograrlo sólo necesita cierta estructura, claves, recordatorios, ayuda con los detalles o pasos, aliento para seguir esforzándose. Este tipo de apoyos es lo que se denomina en la teoría el *andamiaje didáctico*. En esta etapa de la indagatoria, el estudiante ha logrado resolver con relativa facilidad los problemas que se le proponen, en la medida en que los apoyos se aumentan en forma gradual, a fin de observar cuánta ayuda necesita y cómo responde. Así mismo un aspecto importante que se ha utilizado, como parte del andamiaje didáctico es solicitar al estudiante una presentación en la que se propicie el uso de: discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas y el uso de lenguaje simbólico.

Por su parte el maestro observa, escucha y toma notas cuidadosamente acerca de la forma en que el estudiante emplea la ayuda y el nivel de apoyo que necesita. Esta información ha servido para planear agrupamientos instruccionales, tutoría entre compañeros (actividad que en la teoría "vigotskyana", se denomina, la enseñanza recíproca), tareas de aprendizaje, trabajos para casa, uso de herramientas de programación de computadoras, uso de software de apoyo, etc. En este sentido el profesor ha guiado y facilitado con explicaciones, demostraciones y el trabajo con otros estudiantes, lo que hace posible el aprendizaje cooperativo. Así es como se ha experimentado para la aprehensión del objeto matemático propuesto en nuestra indagatoria, de tal manera que teóricamente hemos supuesto que las herramientas psicológicas (Baquero, 1997), son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores y, el puente entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas (personales). La actividad desarrollada por los estudiantes para la presentación en el aula se muestra en *Figura No. 5*.

Una vez hecha la presentación por parte de los estudiantes, en la siguiente fase del experimento se realiza el desarrollo matemático por parte del profesor, aclarando las inquietudes y dudas de los estudiantes y haciendo énfasis principalmente en las recomendaciones que se consideran pertinentes y de acuerdo con lo observado, lo escuchado y las notas que tomaron cuidadosamente durante la presentación de los estudiantes; se ilustra con un caso resuelto en clase y se propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula y desarrollarse, tanto en el escritorio, así como, valiéndose de los instrumentos electrónicos de cómputo. Finalmente se lleva a cabo una serie de ejercicios en el aula, tipo taller y organizada por estudiantes y profesor resolviendo varios problemas relacionados con el contexto de la ingeniería y discutiendo los resultados obtenidos. Por último se realiza un examen del objeto matemático tratado, en forma individual.

Figura 5. Una de las etapas de la experimentación en la que los estudiantes realizan la presentación del objeto matemático propuesto.

En la investigación se aplicó esta metodología a un grupo experimental, mientras que otro grupo recibió la instrucción en la forma tradicional; en la que el profesor es el expositor, realiza ejemplos pregunta acerca de dudas, las aclara, propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula de clase, incluyendo prueba de escritorio y programa por computadora y aplica el examen en forma individual. En ambos casos; es decir, en el grupo experimental como en el grupo de control se utilizó el mismo tiempo para la enseñanza del objeto de estudio (4.5 hrs.) y se aplicó el mismo tipo de examen; cuyos resultados se analizan mediante la prueba ***t*** independiente de comparación simple.

Resultados y conclusiones

Lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que tenemos, y a su vez, las herramientas psicológicas dependen de la cultura en que vivimos, consiguientemente, nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas; que es el hecho central de la teoría "Vygotskyana", en la que se postula que el ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas, de que dispone, y el conocimiento se adquiere, se construye, a través de la interacción con los demás mediada por la cultura, desarrollada histórica y socialmente. Por lo que hemos propuesto el probar experimentalmente que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para alcanzar el aprendizaje del objeto matemático "spline" (y de cualesquiera otros objetos matemáticos); coincidiendo con Vygotsky en el sentido de que la cultura nos dice qué pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento, por esta razón, la teoría sostiene que el aprendizaje es mediado y que además la interacción social es el origen y el motor del aprendizaje.

Concluyendo que la investigación ha comenzado a producir resultados satisfactorios, en contraste con aquellos grupos en los que se ha seguido con la enseñanza tradicional (grupo de control). Así mismo, resulta importante señalar, que se ha observado la dificultad de resolver problemas por parte de los estudiantes (grupo experimental), cuando se les retiran los apoyos estratégicos para sostener o soportar el aprendizaje; sin embargo, el grupo experimental da mejores resultados en el aprovechamiento escolar, que el grupo con enseñanza tradicional.

Prueba-t Independiente sobre los datos de los grupos de control y experimental :			
Datos	Media	Varianza	N
Calificaciones del grupo de Control	5.08121	0.65895	33
Calificaciones del grupo Experimental	8.93859	2.28771	64
Estadístico de prueba: t = 13.64879 Probabilidad: p = 4.03865E-24			
A un nivel de 0.05, Las dos medias SON significativamente diferentes.			

Figura 6. Resultados del análisis de los datos obtenidos de las calificaciones de los grupos del experimento.

Referencias bibliográficas

Baquero, R. (1997). *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique S.A.

Madhumangal P. (2007). *Numerical Analysis for scientists and enginners. Theory and C programs*. Londres: Alpha Science.

Vygotsky, L. S. (1979). *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo-Critica.

CULTURA MATEMÁTICA VS. CONTEXTUALIZACIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Andrea L. López Pineda, Beatriz Moreno Carrillo, Màrcia Souza da Fonseca
UAQ, COBAQ. (México.)
UFP (Brasil)
allopine@hotmail.com, betthy_moreno@hotmail.com, msz.fonseca@gmail.com

Resumen. Este trabajo muestra los resultados de una intervención educativa diferenciada en grupos de educación de nivel medio. Por una parte se trabajó con un grupo 7 horas a la semana, cinco con matemática convencional y dos horas adicionales en contextualización matemática, y en otro grupo cinco horas semanales, tres con matemática convencional y dos en cultura matemática. Se consideraron elementos de la etnomatemática, la matemática crítica y poíesis educativa en la planeación del trabajo. Los resultados muestran que los estudiantes con mejores resultados fueron aquellos que trabajaron con cultura matemática, en segundo lugar, los jóvenes que trabajaron siete horas, mientras que aquellos en los que no se intervino, no mostraron ninguna mejoría. Se considera que la cultura matemática proporciona a los jóvenes la posibilidad de reconocer-se, sentir-se y asumir-se como parte importante en el desarrollo en dicha materia.

Palabras clave: poíesis educativa, cultura matemática, etnomatemática

Abstract. This paper presents the results of an educational intervention in groups of middle level education. On one hand we worked with a group, seven hours a week. Five of those hours were worked with conventional mathematics. The other two hours were worked with mathematical contextualization, and in the other group we worked five hours a week. Three of them were worked with conventional mathematics and the other two hours were worked with mathematical culture. Some elements of etnomathematics, critical mathematics and educative poiesis were considered in planning this work. The results show that students with best results were those who worked with mathematical culture, secondly, young people who worked seven hours, while those in which there were no intervention, showed no improvement. It is considered that the mathematical culture gives young people the opportunity to acknowledge themselves and assume themselves as an important part in the development of that subject.

Key words: educational poiesis, educational intervention, etnomathematics

Antecedentes

La educación matemática representa en nuestro país uno de los mayores problemas a resolver, los parámetros que se utilizan para medir el conocimiento de los contenidos matemáticos muestran las dificultades que tienen los estudiantes en la disciplina para acceder a él. Los exámenes se enfocan más hacia desarrollos y procedimientos propios de la disciplina que a una contextualización clara y significativa en la vida cotidiana que motiven al estudiante a aprender.

En el Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro, México (COBAQ), institución de educación media, se toma como elemento fundamental en la preparación de los jóvenes el conocimiento matemático, cuya currícula está dividida en seis semestres, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Funciones, Cálculo Diferencial y finalmente Cálculo Integral. Sin embargo, los resultados en exámenes de admisión a la educación superior, muestran que en el área matemática se encuentran muy por debajo de lo esperado. Las matemáticas figuran como uno de los elementos fundamentales que se toma como base para elaborar y aplicar los exámenes de ingreso.

Es indudable que el perfil de egreso del nivel medio superior solicita de los estudiantes ciertas competencias genéricas y disciplinares que no logran desarrollar del todo y ello deriva en resultados pobres en dicha área, además, la habilidades propias de las matemáticas son primordiales para mantenerse y establecer prácticas matemáticas en la Educación Superior.

El COBAQ cuenta con más de veinticinco mil alumnos en todo el estado con planteles escolarizados y de educación a distancia. Para el caso del plantel 17 que se encuentra en la ciudad de Querétaro, Qro., México, se cuenta con una población de dos mil jóvenes divididos en dos turnos, matutino y vespertino. En dicho plantel la población estudiantil es una de las que obtienen los resultados más bajos en el examen de ingreso, no existe selección de alumnos, el nivel socioeconómico es bajo y también, pertenecen a diversas zonas de la ciudad, por lo que difícilmente cumplen expectativas institucionales. El porcentaje de egreso no rebasa el 60 % de los jóvenes, la deserción y la reprobación va en aumento y por lo tanto la eficiencia terminal disminuye, de tal forma que la institución busca crear programas para mejorar el rendimiento y eficiencia de los estudiantes.

Marco teórico

La Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) está centrada en el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que buscan generar una transversalidad de los contenidos de todas las áreas, con la intención de definir en los estudiantes un perfil de egreso centrado en ciertas competencias básicas para que puedan integrarse al entorno laboral de manera inmediata o que puedan continuar sus estudios y logren acceder de manera más eficiente al nivel superior a través de un Marco Curricular Común (MCC). En este Marco se hace mención de cualidades individuales, de carácter ético, académico, profesional y social que deberá desarrollar aquel estudiante del nivel medio. Todo ello desde la perspectiva humanista que se deriva del Artículo 3° Constitucional. La competencias que deberá desarrollar el estudiante durante su estancia en nuestra institución muestran cómo, en el marco de la RIEMS, se privilegia el razonamiento matemático y el desarrollo de técnicas y procedimientos propios de las matemáticas sin que por ello medie un acuerdo tácito de cómo el estudiante, piensa, hace y construye conceptos en matemáticas, ello genera así, desinterés y apatía por el conocimiento que se traduce en dificultad para aprender de manera lineal y estructurada, como muestran los contenidos matemáticos.

Algunos programas en educación matemática asumen la enseñanza de esta área del saber como una tarea esencialmente inserta en una sociedad y una cultura específica, situada históricamente, tanto en el desarrollo de sus conceptos como en las implicaciones en el pensamiento de los individuos y por tanto en su educación. Así la denominada etnomatemática (D´Ambrosio, 1997) ha puesto énfasis en rescatar la importancia de las matemáticas creadas por los diversos grupos culturales, específicamente para las necesidades, tiempo y contexto de estos grupos. La etnomatemática valora y contextualiza esa matemática en el mismo nivel de importancia y significancia al de la matemática oficialmente establecida tanto por la academia como por los profesionales que planean la educación. Así entonces, desde esta perspectiva, los trabajos de investigación pretenden hacer valer y resignificar las matemáticas creadas por los diversos grupos culturales. Sin embargo se señala la importancia de no sólo rescatar y valorar las matemáticas de diversos grupos, sino que se vea la necesidad de incorporar a estos grupos en el saber matemático occidentalizado, moderno.

La matemática crítica (Gates, 2004; Skovsmose y Nielsen, 1996), por otra parte ha realizado investigaciones en donde se pone de manifiesto el papel de las matemáticas como elemento de segregación, de enculturación y marginación en diversos grupos sociales, pugna por tanto para orientar la enseñanza de las matemáticas hacia la conformación de individuos que propicien una sociedad más equitativa y democrática.

Una escuela que también ha cuestionado la educación matemática convencional es la matemática humanista (Brown, 1996 y 2002), la cual pretende humanizar la matemática, así como su educación.

Las escuelas mencionadas surgen a partir de una concepción de las matemáticas dialógicas, falibles y cuya creación obedece al momento social, histórico y cultural específico. No admiten a las matemáticas como verdaderas a ultranza, sino sólo como formas de concebir el mundo. Por otra parte una perspectiva que va ganando terreno en el campo educativa es la denominada Poíesis Educativa (Zapata,2003) , que concibe a la educación como un espacio de creación, un arte, en el cual sus participantes tendrían la libertar para crear, pensar, ser, esta propuesta tiene un fondo hermenéutico, poiético, fundamentado en Heidegger, Gadamer entre otros. El presente trabajo se diseñó y planeó en función de las reflexiones y propuestas de estas perspectivas.

Objetivo

Tomando como base los objetivos institucionales que consisten en la mejora de los indicadores académicos, así como en la mejora académica de los estudiantes y dar cumplimiento a políticas institucionales de atención diferenciada, el objetivo de esta investigación fue, primero, valorar el trabajo efectuado bajo diferentes perspectivas de acercamiento al conocimiento matemático a través de una práctica convencional y otra práctica dirigida a la contextualización de la cultura matemática, de tal manera que por un lado, se pueda proporcionar herramientas metodológicas necesarias para que los estudiantes puedan permanecer en el sistema y aumenten sus índices de rendimiento en la materia, dentro del grupo de menor rendimiento académico, también se busca dar sentido a la currícula de ambas materias donde al establecer puentes cognitivos, mejoren su desempeño académico entre semestres.

Por otro lado para aquellos quienes tienen mejor rendimiento general, se intenta proporcionar elementos de cultura matemática, a fin de mostrar la importancia y relatividad de los saberes matemáticos en la cultura, para tal fin, se eligieron algunos textos que propiciaran la reflexión acerca de la relatividad de la matemáticas axiomáticas, con discusiones grupales acerca de la importancia de la formación matemática de los estudiantes.

El planteamiento del problema se centra en determinar qué implicaciones tiene el abordaje de una aproximación diferenciada en estudiantes del nivel medio, con grupos de cincuenta estudiantes en una institución de carácter público.

Metodología

El trabajo se llevó a cabo con alumnos de segundo semestre, - la Institución separa los grupos por rendimiento en diversas materias, entre ellas Matemáticas I-.

Se trabajó con dos grupos extremos, uno de ellos es el que tuvo menor rendimiento en la materia (mayor índice de reprobación) y el otro corresponde a los estudiantes con mejor desempeño académico general, la intención de hacer tal acomodo obedece a dar mayor tiempo de apoyo en áreas donde los estudiantes muestran menor rendimiento.

En el primer grupo se lleva a cabo un trabajo de cruces curriculares entre la materia de Matemáticas I y Matemáticas II con un tiempo de siete horas a la semana, cinco que corresponden a Matemáticas II y dos corresponden a la nueva estructura institucional en la intención de dar mayor apoyo y mejorar los índices de aprobación y asistencia a clase. Estas dos horas extra a la semana se consideraron de asesoría donde se llevó a cabo una estrategia cognitiva para establecer puentes cognitivos entre ambas materias con la finalidad de que los alumnos conozcan, construyan, procesen, apliquen y logren metacognición, formando los enlaces cognitivos necesarios para facilitar el proceso enseñanza aprendizaje de ambas materias.

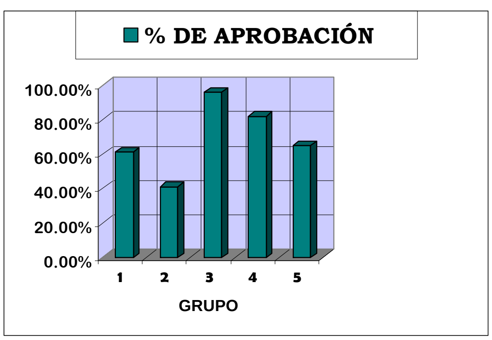
En el segundo grupo se realizó un trabajo de cultura matemática. Dentro del tiempo asignado a la materia de Matemáticas II (cinco horas a la semana) se establecen tres horas de práctica y desarrollo convencional de la materia y dos de actividad para cultura matemática. Se genera así que un contenido destinado a cinco horas semanales se reduzca a tres para abrir un espacio de dos horas donde se abordaron distintas estrategias de trabajo que permitieran tener un acercamiento con otros elementos de la matemática, poco o nada considerados dentro del programa de la disciplina, así como deslindar el desempeño en matemáticas como elemento de valoración personal. La parte más importante de las actividades con este grupo fue la realización de un proyecto semestral que versara sobre el impacto de las áreas de las matemáticas (Geometría, Trigonometría y Estadística), en la cultura y sociedad contemporánea.

Es importante mencionar que a la par del trabajo con estos grupos también se tomaron en cuenta las evaluaciones de tres grupos más, para quienes la práctica fue totalmente convencional, sin ninguna estrategia en particular relacionada con ambos grupos de aproximaciones diferenciadas, ya que estos tres grupos trabajaron acorde a las estrategias y didáctica marcada dentro de la planeación académica dirigida a todo el sistema COBAQ.

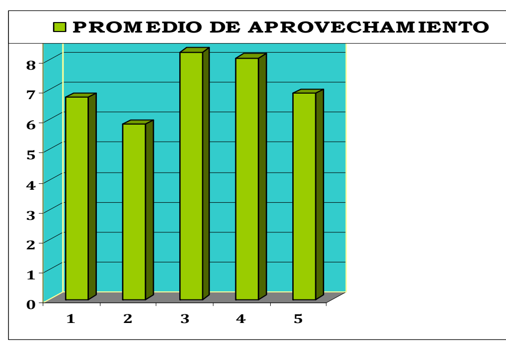
Resultados

El grupo en el que se trabajaron siete horas fue el grupo número uno, mientras que el grupo con el que se trabajo cultura matemática fue el tres.

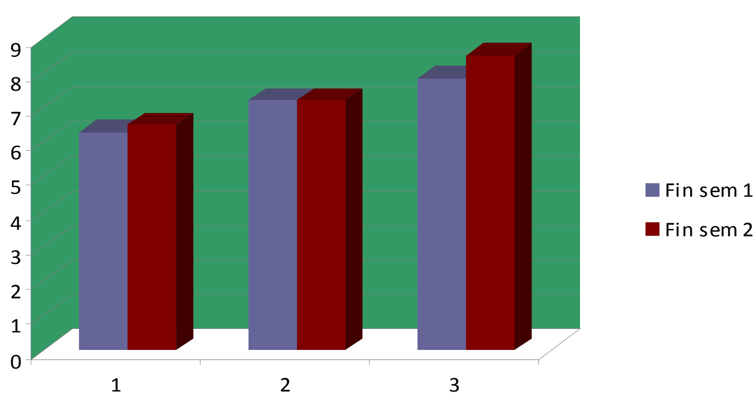
Gráficas de desempeño



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

Cuadro 1

Grupo	Fin sem 1	Fin sem 2
Practica Matemática (1)	6.29	6.5
Control (2)	7.2	7.20
Cultura Matemática (3)	7.85	8.51

Cuadro 2

ENTRE	Grupo	T	gl	Ns
antes y después	Practica Matemática (1)	0.619	27	0.541
	Control (2)	0	128	1.000
	Cultura Matemática (3)	3.296	46	0.002*

*Diferencia significativa n.s. $\leq$ 0.05

Como se puede apreciar en las gráficas, el mejor desempeño fue el del grupo, con el cual se trabajó cultura matemática, y sólo tres de las cinco destinadas a tareas convencionales de matemáticas, también fue el único grupo en el que se observó una diferencia significativa entre el primer y segundo semestre. En el grupo en donde se trabajaron siete horas también hubo una mejoría, aunque ésta no fue significativa. Por último, en los grupos en donde no se llevó a cabo ninguna actividad, no se reportó ningún cambio en las evaluaciones.

Además se puede afirmar que de manera general los resultados cualitativos muestran un mejor desempeño personal en la materia por parte de los estudiantes del grupo de cultura matemática. Lo anterior se mostró en lo que se refiere a que manifestaron una actitud más favorable ante la materia, mayor responsabilidad en lo que se refiere a la realización de tareas, mayor participación y también se mostraron más honestos en la resolución de exámenes, es decir, se registró una menor incidencia de copiado, así mismo en sus participaciones se evidenció una reflexión más amplia en torno a los contenidos matemáticos. Estos estudiantes mostraron una ampliación de ideas respecto a la materia, se dieron cuenta que el desempeño no necesariamente está ligado a la inteligencia y al indagar sobre diferentes temas encontraron áreas de aplicabilidad directa en la disciplina. Así entonces, encontramos mejores resultados en aquellos estudiantes en donde se revisó la cultura matemática. Se comprueba que el tiempo dedicado a la materia no fue determinante para mejorar el desempeño y pudimos observar que cuando los estudiantes repiten técnicas operatorias propias de la disciplina se pierde de vista el sentido y el contexto extra-matemático que ayudan a favorecer el desempeño en la materia

Los resultados de esta investigación muestran, que si bien la atención diferenciada contribuye a una mejora del proceso aprendizaje de los estudiantes, éste tendría que verse con extremo cuidado, para saber qué matemática y cómo debiera trabajarse para cada grupo, pareciera que los parámetros de desempeño académico y actitudinal mejoran notablemente cuando se establecen formas y estructuras de trabajo dirigidas hacia objetivos muy particulares y acordes a cada grupo. Finalmente, quedo claro que dar la palabra a los estudiantes, y abrir espacios para su expresión, mejora la disposición al trabajo escolar.

A partir de esta investigación concluimos que de acuerdo a las diferencias que se establecen con intervenciones educativas muy particulares se vuelve cada vez más necesario establecer cambios de origen en la concepción de estrategias de enseñanza aprendizaje, pues este proceso no puede ser visto ya de manera aislada en cada disciplina escolar, la sociedad actual requiere estudiantes mejor preparados y con perspectivas amplias de vida tanto académica como personal y social.

Referencias bibliográficas

Brown, S. I. (1996). Towards humanistic mathematics education. In Allan J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (2 vols. pp. 1289-1321). Dordrecht: Kluwer.

Brown, S. I. (2002). Humanistic Mathematics: Personal Evolution and Excavations. Recuperado el 20 enero de 2007 de http://www2.hmc.edu/www_common/hmnj/.

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics . In: Powell , A.; Frankenstein , M. (Eds.) *Ethnomathematics: challenging eurocentrism in mathematics education* (13-24), Albany: State University of New York.

Gates, P. (2004). Lives, Learning and Liberty. The impact and responsibilities of mathematics education. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th PME*, vol. 1, pp.71-80. Bergen: Bergen University College.

Skovsmose, O. y Nielsen, L. (1996). Critical Mathematics Education. En Skovsmose, O (Ed), *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Zapata M., J. (2003). *Poíesis educativa*. México: Fundap.

LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA PRUEBA ESCRITA

Martha Imelda Jarero Kumul, Eddie Aparicio Landa
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (México)
jarerok@uady.mx, alanda@uady.mx

Resumen. En el presente trabajo se expondrán los resultados de un estudio desarrollado en una facultad de ciencias (ciencias exactas) cuyo propósito consistió en determinar la eficacia de una prueba escrita como recurso de medición de aprendizajes específicos, y validar sus alcances predictivos respecto a la complejidad de contenidos y ejercicios matemáticos que la componen. Con esto se esperaba caracterizar procesos, mecanismos e indicadores asociados a la elaboración de una prueba escrita.

Palabras clave: evaluación, prueba escrita

Abstract. In the present work we will expose the results of a study developed in a faculty of sciences (exact sciences) with the intention of determining the efficiency of a written test as resource of measurement of specific learning, and of validating his predictive scopes with regard to the complexity of contents and mathematical exercises that compose it. With this we are expecting to characterize processes, mechanisms and indicators associated with the production of a written test.

Key words: assessment, written test

Presentación de la problemática

¿Es posible determinar un valor predictivo en las pruebas escritas (pruebas abiertas) elaboradas por profesores de matemáticas universitarios en tanto la confiabilidad y validez de la complejidad resolutiva? ¿La percepción de estudiantes universitarios sobre la complejidad resolutiva de una prueba escrita se corresponde con los porcentajes de aciertos y desaciertos en la misma? Estas son cuestiones que en el presente escrito se discuten a partir de los resultados obtenidos en un estudio realizado con profesores en una facultad de ciencias exactas en México.

El interés por indagar sobre las formas en que profesores e instituciones educativas conciben y ejercen la evaluación de procesos educativos se ha intensificado en los últimos años. Las diversas propuestas incorporan reflexiones sobre el significado de la evaluación, sus procesos y usos.

Para algunos autores como Chadwick y Rivera (1997), la evaluación de procesos educativos requiere de coherencia entre los tipos de instrumentos o mecanismos usados y los objetivos de instrucción. Para algunos otros como Wachtel (1998) la evaluación es un proceso que se ve influenciado por factores relacionados con la administración de la misma, las características de los cursos, los perfiles de profesores y estudiantes. Para Runco (2003) la evaluación es un proceso selectivo y crítico en el cual las ideas originales, creativas y potencialmente útiles deben reconocerse y preferirse por encima de aquellas repetitivas, irrelevantes e inapropiadas.

En Sawin (2005) se plantea que las técnicas empleadas en el método científico pueden auxiliar en la evaluación que realizan los profesores, pues como se indica en Saroyan y Amundsen (2001), una forma de superar las limitaciones de una evaluación sumativa que a menudo realizan los profesores, es el empleo creativo de métodos y recursos con un enfoque multidimensional.

En este orden de ideas estuvimos interesados en estudiar y aportar evidencia empírica sobre la problemática de la evaluación de aprendizajes en matemáticas. Específicamente en el papel predictivo que puede establecerse en una prueba escrita de preguntas abiertas de un grupo de profesores universitarios y la correlación entre las percepciones de los estudiantes sobre la complejidad resolutiva de una prueba y sus respectivos porcentajes de aciertos y desaciertos.

Sin duda es preciso valorar la calidad y eficacia de prácticas educativas en matemáticas, especialmente en aspectos relacionados con formas de evaluar procesos educativos y las pruebas escritas, pues visiblemente la actividad de un profesor concentra la selección, organización, comunicación y evaluación de un conjunto de conocimientos institucionales. Respecto a esto último, es usual que el profesor universitario de matemáticas elabore y aplique pruebas escritas para determinar los estados aptitudinales de sus educandos referente a conocimientos, habilidades y "actitudes" adquiridas. Tal tipo de pruebas son a menudo empleadas con doble intencionalidad (muchas veces ajena a una idea de evaluación en un sentido amplio), por un lado, son un referente para determinar quiénes habrán de acreditar o no un curso y por otro lado, la nota (calificación) alcanzada en el mismo.

Evaluación y reprobación escolar

La reprobación y rezago escolar es un problema vigente en el sistema educativo mexicano que se acentúa conforme los jóvenes avanzan (promueven) en sus estudios. Así, según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) en el ciclo escolar 2006 – 2007, el porcentaje de reprobados en la matrícula corresponde al 4.1% de los estudiantes de primaria, 17.6% de secundaria y al 37.7% de bachillerato. Si la referencia se hace exclusivamente a los cursos de matemáticas, la situación se agudiza pues se reporta hasta el 50% de reprobación en las asignaturas del área de fisicomatemática en el nivel medio superior.

La reprobación escolar obstruye el avance de los jóvenes en su formación académica – científica. Hecho que se ha estudiado desde diferentes enfoques, por ejemplo desde un marco psicopedagógico, Robles y Martínez (2007) plantean que la reprobación en matemáticas se traduce en un problema con múltiples repercusiones, en un primer momento se afecta directamente la trayectoria escolar de los jóvenes al prolongarse su estadía en la escuela, asunto que se traduce en más gastos para el gobierno. De igual manera, en un segundo momento se afecta directamente el estado financiero de las familias y más aun, se sitúa a los estudiantes en una etapa de desajustes emocionales y comportamientos derivados de la reprobación que, en muchos casos incide en lo vocacional al punto que la tendencia en la selección de carreras donde se consideran menos difíciles se ve incrementada.

Aun cuando la tendencia en las escuelas para determinar si un estudiante acredita un curso o avanza al siguiente nivel educativo incorpora distintas formas de evaluación, implicando con ello que el profesor se apoye de instrumentos diversos, en Melchor y Melchor (2002) así como en Aparicio, Jarero y Ávila (2007), se reporta que la mayoría de los profesores universitarios utilizan la prueba escrita como principal instrumento de "evaluación" y calificación. Situación que se hace más evidente en el área de ciencias matemáticas. En este sentido y con la pretensión de caracterizar procesos, mecanismos e indicadores asociados a la elaboración de una prueba escrita, nos dimos a la tarea de evidenciar la eficacia de una prueba escrita como recurso de medición de aprendizajes específicos, y validar sus alcances predictivos respecto a la complejidad de contenidos y ejercicios matemáticos que la integran.

Método de estudio

En el trabajo desarrollado se entiende que cualquier tipo de prueba que tenga por fin último, medir resultados de aprendizajes, debe, en mayor o menor medida, reunir una serie de características que den cuenta de su nivel de calidad para cumplir eficientemente la función para la cual ha sido creada. En Salkind (1999) por ejemplo, se plantea que una de las características indispensables de una "buena" prueba, es la validez de la misma, es decir, la medición de lo que se pretende medir; tómese como caso, la precisión con que mide la conducta especificada en el objetivo sometido a verificación.

Al momento de analizar la utilidad de las pruebas de aprovechamiento o pruebas que muestran un área de conocimiento en particular, debe tomarse en cuenta como característica central la validez de contenido, que se define como el grado en que una prueba mide una muestra representativa del contenido de una asignatura o curso y la conducta que la manifiesta. El conocimiento sobre la validez de contenido de una prueba se verifica a través de la relación que presenta con los objetivos, por ello se debe verificar que los instrumentos de evaluación sean adecuados en nivel de dificultad, extensión y profundidad a lo expresado en los objetivos. Otra característica de una prueba es la confiabilidad. Se dice que una prueba es confiable o consistente, cuando al ser aplicada en diversas oportunidades, produce resultados aproximadamente similares. Ello da cuenta de la exactitud o precisión con que un instrumento mide algo.

Así, el método de investigación seguido en el estudio consistió en diseñar y aplicar una prueba escrita (prueba experimental), haciéndose acompañar de un análisis a priori y uno a posteriori. El diseño de la prueba se basó en la identificación de contenidos conceptuales y procedimentales que los profesores participantes en el estudio incluían en sus pruebas. Con esta actividad se daba validez al diseño de la prueba, pues se incluían reactivos equivalentes a los empleados por ellos.

El grupo de investigadores analizó cada uno de los reactivos considerados en la prueba experimental con base en la teoría de los esquemas propuesta por Marshall (citado en Real, Olea, Ponsoda, Revuelta y Abad, 1999), atendiendo la identificación de componentes de dificultad que intervienen en la resolución de los reactivos de una prueba de matemáticas, enfatizando tanto aspectos referidos en la consigna como en los implicados en el proceso resolutivo. La idea era producir un índice de dificultad para cada uno de los reactivos de la prueba así como de la prueba misma. El índice de dificultad se determinó en el intervalo [0, 1] que se obtuvo de dividir los indicadores identificados en la consigna y los identificados en el proceso resolutivo, entre el total de los indicadores del reactivo. El valor arrojado permite interpretar que un reactivo resulta muy difícil, mientras más cercano a uno se encuentre o muy fácil al acercase a cero.

Presentamos como ejemplo el análisis de un reactivo (ver tabla 1) en el cual se identificaron ocho indicadores que se presentan ya sea en la consigna y/o en la resolución, para hacer un total de 16 indicadores. Tanto en la consigna como en la resolución, se asigna el valor uno o cero si se encuentra presente o no el indicador, y para el caso que se ejemplifica se identificaron siete indicadores, tres correspondientes a la consigna y cuatro en la resolución. Así, el índice de dificultad asignado a dicho reactivo fue 7/16=0.43, de modo que se interpreta como un reactivo de regular complejidad resolutiva dado que se aproxima al valor 0.50 que correspondería al valor medio del intervalo.

Reactivo 6. Dada la siguiente relación en Z, $R = \{(m,n) \in Z^2 \mid mn \geq 0\}$

Determínese si R es una relación de equivalencia. En caso de serlo, hállese el conjunto cociente.

COMPONENTES SEGÚN MARSHALL	INDICADORES	EN LA CONSIGNA	EN LA RESOLUCIÓN
I. Conocimiento de los rasgos distintivos de un fenómeno o situación	1.Relación de Equivalencia 2.Producto cartesiano 3.Desigualdad en los enteros	0 1 0	1 0 0

II. Conocimiento de las condiciones que los delimitan y por tanto, la posibilidad de aplicar determinado procedimiento para resolverlos	4.Determinar, inconsistencia o contraejemplo 5.Desigualdad en los enteros	1 0	1 0
III. Conocimientos relativos a la planificación de la solución de un problema de una categoría dada (estrategias de resolución)	6.Propiedades de relación de equivalencia	0	1
IV. Conocimientos relativos a los algoritmos y reglas de cálculo necesarios para ejecutar el proceso de solución.	7.Desigualdad en los enteros 8.Relación de pertenencia	0 1	0 1

Tabla 1. Análisis del reactivo 6 de la prueba experimental

La prueba quedó determinada con un total de ocho reactivos (ver tabla 2) buscando un promedio de índice de complejidad de la prueba adecuado o intermedio, y para ello se incluyeron reactivos cuyo índice de complejidad variaron entre 0.37 y 0.67.

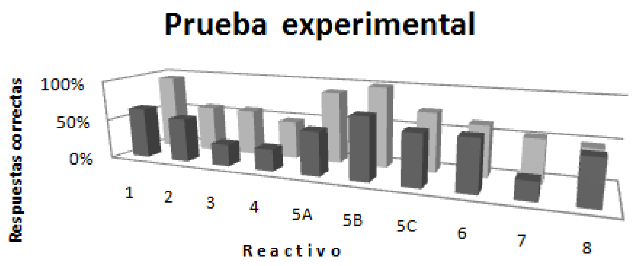
Reactivo	Tema	Tipo de reactivo	Estructura	Índice de complejidad
1	Tipo de relaciones	Conceptual	Opción múltiple	0.37
2	Tipo de funciones	Conceptual		0.57
3	Composición de funciones	Procedimental		0.50
4	Tipo de funciones compuestas	Conceptual		0.42
5	Concepto función	Procedimental	Abierta	0.46
6	Relación de equivalencia	Procedimental		0.43
7	Función biyectiva	Procedimental		0.65
8	Inversa de una función	Procedimental		0.67

Tabla 2. Características de los reactivos de la prueba experimental

Resultados

La prueba fue implementada en una población de 41 estudiantes procedentes de dos grupos distintos, 22 estudiantes de un grupo etiquetado con la letra A y 19 de un grupo B. La implementación se realizó posterior a la presentación de los contenidos por parte de los profesores. Sin embargo cabe decir que el grupo B ya había pasado por el proceso de presentar la prueba que su profesor emplea para calificar el bloque de contenidos, situación distinta fue la del grupo A.

El tiempo asignado para responder la prueba experimental fue de 80 minutos. El grupo B tuvo un mejor desempeño al lograr porcentajes más altos en cada uno de los reactivos. Y aunque el grupo A queda por debajo en el porcentaje de respuestas correctas, presenta un comportamiento similar al del grupo B, como puede verse en la gráfica 1.



	1	2	3	4	5A	5B	5C	6	7	8
Grupo A	64%	55%	27%	27%	55%	77%	64%	64%	23%	55%
Grupo B	95%	58%	58%	47%	89%	100%	74%	63%	53%	47%

Gráfica 1. Porcentaje de respuestas correctas por grupo

La diferencia encontrada se asoció al desfase de momento de aplicación de la prueba experimental respecto a la aplicación de la prueba del profesor.

Número de Reactivo	Índice de complejidad	Interpretación de los investigadores	Perspectiva del estudiante	% Respuestas Correctas
1	0.37	Fácil	Fácil a Muy fácil	78.0
2	0.57	Regular	Fácil a Muy fácil	56.1
3	0.50	Regular	Fácil a Regular	41.5
4	0.42	Regular	Regular a Fácil	36.6
5a	0.46	Regular	Regular a Fácil	70.7
5b	0.46	Regular	Regular a Fácil	87.8
5c	0.46	Regular	Regular a Fácil	68.3
6	0.43	Regular	Regular a Difícil	63.4
7	0.65	Difícil	Regular a Difícil	36.6
8	0.67	Difícil	Regular a Difícil	51.2

Tabla 3. Porcentaje de respuestas correctas de la prueba experimental

El poder predictivo de la prueba se analizó a partir de la interpretación de los estudiantes respecto al nivel de complejidad de cada uno de los reactivos, contrastado con lo propuesto por el grupo investigador así como los aciertos y desaciertos logrados por los estudiantes (tabla 3).

Los estudiantes consideraron que la prueba experimental incluía reactivos con diferente nivel de complejidad resolutiva, coincidiendo en la mayoría de los casos, con el índice de complejidad determinado por el grupo investigador. Sin embargo, aun cuando para los estudiantes, los tres primeros reactivos resultaban perceptiblemente fáciles, éstos no resultaron ser los de mayor porcentaje de respuestas correctas.

Lo esperado era que el porcentaje de respuestas correctas sea inverso al índice de complejidad, esto es, que mientras más fácil esté catalogado un reactivo el porcentaje de respuestas correctas sea más alto. Tal situación no se cumple en lo general como puede verse de los resultados obtenidos en el reactivo 4. Este tiene menor porcentaje de respuestas correctas en tanto que el reactivo 6 que le sigue en dificultad tiene mayor porcentaje de respuestas correctas. De igual manera ocurre con los reactivos 5A y 5B, y entre el 7 y 8. Resultados que obligan a reconsiderar el índice de complejidad asignado y a la búsqueda de explicaciones más finas.

Conclusiones

De los resultados generados se concluye que aun cuando es posible generar una prueba escrita de preguntas y respuestas abiertas en matemáticas de educación superior confiable (en tanto se logra, exceptuando un reactivo, obtener resultados similares en poblaciones distintas), no es posible precisar un valor predictivo en la misma en su índice de complejidad resolutiva.

Por otro lado se concluye que no fue posible bajo el método seguido, obtener una correlación entre la percepción de los estudiantes respecto a la complejidad resolutiva de una prueba y sus porcentajes de logros. Lo que hace reflexionar sobre la conveniencia de ajustar el formato de la prueba, llevarla de una prueba abierta a una prueba cerrada de modo que el grado de logro se mida en términos dicotómicos: respuestas correctas y respuestas incorrectas, sin pasar por la consideración estados intermedios por parte del profesorado.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Jarero, M. y Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática*. Edición 35, 3 – 12.

Chadwick, C.B. y Rivera, N. (1997). ¿Qué es evaluación? En Chadwich, C. B. y Rivera, N. (Eds.). *Evaluación formativa para el docente* (pp. 36-61). México: Paidós Educador.

Melchor, J. y Melchor, V. (2002). *El conocimiento de las matemáticas.* Recuperado el 30 de agosto de 2008 de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0904.pdf

Robles, R.; Martínez, J. (2007). La reprobación en matemáticas desde la perspectiva del alumno, el docente y la academia. *IPyE: Psicología y Educación* 1(1), 97-104

Real, E.; Olea, J.; Ponsoda, V.; Revuelta, R. y Abad, F. (1999). Análisis de la dificultad de un test de matemáticas mediante un modelo componencial. Recuperado de http://www.uv.es/revispsi/articulos2.99/4olea.pdf

Runco, M. A. (2003). Idea evaluation, divergent thinking, and creativity. To appear in M. A. Runco (Ed.), *Critical creative processes.* (pp. 69-94) Cresskill, NJ: Hampton

Salkind, N. (1999). *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

Sawin, E (2005). Tha scientific method and other bases for evaluation procedures. *ETC*: 386 – 404.

Saroyan, A. & Amundsen, C. (2001) Evaluating university teaching: time to take stock, *Assessment & Evaluation in Higher Education,* 26(4), 341–353.

Wachtel, H. K. (1998) Student evaluation of college teaching effectiveness: a brief review, *Assessment & Evaluation in Higher Education,* 23(2), 191–211.

INFLUENCIA DEL AUTOCONCEPTO DEL ALUMNO SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA: UNA EXPERIENCIA EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE PSICOLOGÍA

José Gabriel Sánchez Ruiz, Julieta Becerra Castellanos, Julieta Ma. de L. García Pérez, Ma. del Socorro Contreras Ramírez
FES Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México (México)
josegsr@unam.mx; juveka_mx@yahoo.com.mx

Resumen. Se presentan los resultados obtenidos al tratar de identificar el papel del autoconcepto del alumno en su aprendizaje en estadística y matemáticas. Un total de 104 estudiantes participaron en el estudio. Eran alumnos de la Carrera de Psicología que, al iniciar sus estudios universitarios, realizaban un curso obligatorio de temas matemáticos-estadísticos. Se aplicó la escala AF5 (García y Musitu, 1999) para evaluar su autoconcepto. Se analizan las implicaciones de los resultados para la enseñanza-aprendizaje de la estadística.

Palabras clave: autoconcepto, escala AF-5, aprendizaje en estadística, rendimiento escolar

Abstract. We present the results obtained when we try to identify the role of self-concept of students in their learning in statistics and mathematics. A total of 104 students participated in this study. They were students of Psychology Career that are taking a formal course on mathematics and statistics topics. The AF5 scale (Garcia and Musitu, 1999) was used to assess their self-concept. The implications of the results for teaching and learning of statistics are analyzed.

Key words: self-concept, AF-5 scale, statistics learning, achievement in school

La investigación enfocada a entender qué influye en el aprendizaje o rendimiento escolar ha abordado tanto factores denominados variables distales, por un lado, como variables personales, por otra parte. En el primer grupo figuran, por ejemplo, el nivel socioeconómico, la escolaridad de los padres y el entorno familiar. En la segunda categoría se ubican, entre otros, las actitudes, los hábitos de estudio, la motivación al estudio, la comprensión lectora y las atribuciones causales. En ambos grupos, en algunas de ellas se ha corroborado con cierta consistencia su papel en el rendimiento de asignaturas escolares, aunque en otras es necesario más evidencia que esclarezca su relación con este. Esta situación se aprecia también en estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Sánchez y Ursini, en prensa).

Tomando en cuenta la posibilidad de incidir sobre ellas, mediante programas de intervención o reentrenamiento, para promover una mejoría en el aprendizaje de los estudiantes es comprensible la atención desigual que reciben ambos tipos de variables, por ejemplo, en la escolaridad paterna y sobre los ingresos económicos familiares es prácticamente imposible actuar. En contraste, aunque es más viable influir en las variables personales, respecto a las distales, no está resuelto todavía su contribución en el aprendizaje aún menos de asignaturas y niveles escolares específicos. El objetivo de este trabajo consiste en presentar los resultados obtenidos al tratar de identificar la contribución del autoconcepto del alumno en su aprendizaje en cursos de estadística y matemáticas.

De acuerdo a las concepciones más clásicas, el autoconcepto se refiere a las percepciones que el individuo tiene de sí mismo (Shavelson, Hubner y Stanton, 1976), o a la totalidad de los pensamientos y sentimientos de un individuo que hacen referencia a sí mismo (Rosenberg, 1979). Purkey (1970, cit. en González, Núñez, González y García, 1997, p. 273) lo define como "un sistema complejo y dinámico de creencias que un individuo considera verdaderas respecto a sí mismo teniendo cada creencia un valor correspondiente…". Esto es, el autoconcepto es para el individuo el eje de su universo personal. Según Tómas y Oliver (2004) el autoconcepto representa una temática psicológica central desde prácticamente los orígenes de la psicología científica. Su importancia radica al menos en dos aspectos no excluyentes: el primero está directamente relacionado con un constructo fundamental que se emplea para entender cabalmente al individuo, el de la personalidad; el segundo aspecto se refiere a considerarle como una variable relacionada, explicativa o a un factor por explicar en prácticamente todas las áreas de la psicología, como la industrial, la educativa, la clínica, entre otras (cf., Stevens, 1996).

Se considera que la personalidad, está integrada por seis sistemas: sensorial, motor, cognitivo, afectivo, estilos y valores, los cuales están conformados por subsistemas multidimensionales. Tales sistemas se organizan en distintos niveles jerárquicos ejerciendo mayor influencia sobre la conducta del individuo, y adoptando un papel más integrativo, según el nivel que ocupen dentro de dicha organización. En particular, de los antes listados, los sistemas de estilos y valores están en niveles más altos. De la interacción de todos ellos se deriva la personalidad, en la cual destacan tres dimensiones siendo una de ellas la de autoconcepto o autoimagen, determinada por los valores y el estilo (González et al., 1997).

García, Musitu y Veiga (2006) mencionan que el autoconcepto es considerado como una de las variables más relevantes para el bienestar personal; incluso, en la práctica muchos problemas conductuales se han tratado de relacionar con esta variable. Asimismo, refieren que, por ejemplo, en el ámbito clínico se han encontrado relaciones significativas entre el bajo autoconcepto y diversos trastornos conductuales: alimenticios (Goñi, Rodríguez y Ruiz de Azúa, 2004), de relaciones interpersonales (Jadue, 2001), de lenguaje, específicamente de disfemia (tartamudez) (Garaigordobil y Pérez, 2007) y alcoholismo (Izquierdo, 2001), entre otros. De tal modo que parece asumirse que el autoconcepto está tan estrechamente relacionado con la aceptación de sí mismo que el bienestar o su opuesto representan dos polos en los que el autoconcepto siempre está presente.

Por otro lado, en cuanto al autoconcepto como una variable a considerar en el ámbito educativo, autores como Hernández (1991) mencionan que son tres las variables personales que determinan el aprendizaje escolar: el poder (referido a aspectos como la inteligencia y las aptitudes), el querer (es decir, la motivación) y el modo de ser (que incluye a la personalidad). Lo cual, en términos de Corno y Snow (1996), consistiría en la vertiente personal de un individuo conformada por tres ámbitos: cognición, conación y afecto. El ámbito afectivo contiene dos variables relevantes para el aprendizaje escolar siendo una de ellas la personalidad que como ya se dijo incluye constructos importantes como el autoconcepto. En algunos estudios, el bajo rendimiento académico se ha explicado en función de un autoconcepto bajo (Rodríguez, Cabanach, Valle, Núñez y González-Pineda, 2004). En otros más bien se postula que un rendimiento escolar disminuido tiene consecuencias negativas tanto en las calificaciones como en aspectos estrechamente asociados al autoconcepto de los estudiantes, tal como la autoestima, y en la ansiedad (Jadue, 2001). En cambio, para Moreno y Bazán (2009), el rendimiento escolar basado en las calificaciones asignadas por los profesores está relacionado con variables afectivo-motivacionales, pero cuando el rendimiento se especifica en términos de niveles de logro, en su estudio considerados a partir de los puntajes obtenidos por los alumnos en una prueba nacional de gran escala, parecería que el influjo conjunto de factores afectivo-motivacionales con factores familiares es lo que explica el por qué de los mayores o menores logros de los alumnos de tal forma que ello podría determinar en buena medida el éxito o fracaso escolar de un estudiante; sin embargo, en estudiantes de escuelas secundarias fue el autoconcepto la variable más influyente sobre los niveles de logro y las puntuaciones de los estudiantes en matemáticas y español, en especial las dimensiones de autoconcepto relativas a lo académico y a lo físico.

El presente estudio se realizó dado las siguientes situaciones: una, que si bien se han realizado algunas investigaciones sobre el autoconcepto y el logro escolar, los resultados no son concluyentes ofreciendo más bien apoyo de que su relación está mediatizada por diversos factores tal como la edad de los estudiantes, los estimadores de rendimiento y el tipo de asignatura estudiada (González et al, 1997); dos, que se ha reflexionado acerca de abordar la investigación educativa desde un modelo general del aprendizaje en el que estaría incluido el autoconcepto como una de las variables con mayor importancia en el proceso del aprendizaje (Pintrich, 1994); y tres, la escases de estudios en matemática educativa que aborden la relación entre autoconcepto y rendimiento académico en tópicos matemáticos.

Adicionalmente, porque varios autores, como Gómez-Chacón (2000, cit. en Sánchez, Becerra, García y Contreras, 2010), han señalado con cierta contundencia que el fracaso escolar de los estudiantes parece no siempre corresponder con su desarrollo cognitivo, indicando que otras variables estarían jugando un papel facilitador, o debilitador, del aprendizaje de la matemática: emociones y ansiedad, entre otras. Gómez-Chacón también refiere que, en el aprendizaje de las matemáticas, las reacciones del estudiante a los constantes estímulos asociados con la matemática están condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo, lo cual corresponde al autoconcepto, y acerca de la matemática. En este sentido, Gil, Blanco y Guerrero (2006) señalan que la sociedad promueve y divulga ciertas creencias sobre las matemáticas (v.g., *las matemáticas son difíciles, complicadas y reservadas sólo para los estudiantes inteligentes*). Es interesante destacar, de acuerdo con estos autores, el efecto que tales creencias tienen en la formación de las actitudes y emociones hacia las matemáticas, ya que estas cíclicamente influyen en dichas creencias y contribuyen con su formación. No sobra decir que anteriormente ya se había considerado la posible participación de variables diferentes a las de naturaleza intelectual en el desempeño en matemáticas, así Polya (1965, p. 80; paréntesis de los autores) declaró que "sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual… la determinación (y) las emociones juegan un papel importante…".

Por otra parte, en la literatura se listan distintas variables que afectan directa o indirectamente la motivación por las matemáticas en los estudiantes. En varios estudios se destaca que factores estrechamente vinculados al autoconcepto, como es el caso de la autoestima, influyen en dicha motivación; en consecuencia, tendría un influjo en el rendimiento, esfuerzo y persistencia dedicada a las matemáticas, siendo diferente entre alumnos y alumnas dado la diferencia en su autoconcepto en matemáticas (cf., Blázquez, Álvarez, Bronfman y Espinosa, 2009). En algunos de estos trabajos se afirma que las niñas poseen un autoconcepto menor por las matemáticas que los niños.

En síntesis, parece que factores motivacionales, de creencias, actitudinales, y otros de esta naturaleza, no representan algo suntuoso o artificial sino que están comprometidos e involucrados con el éxito o con el fracaso de los estudiantes en el aprendizaje de contenidos matemáticos.

Método

Participantes

En el estudio participaron 104 alumnos de la Carrera de Psicología de un campus de la UNAM, más del 75% era del turno matutino y el 23% del vespertino. Los estudiantes pertenecían a los primeros semestres del nivel universitario y tomaban un curso obligatorio (oficial) con temas de matemáticas y estadística (como álgebra, conjuntos y estadística descriptiva). Fueron escogidos por su disponibilidad en los días que se programó y realizó la aplicación de la escala para evaluar autoconcepto, no mediante un muestreo intencional. Predominó el sexo femenino en una razón de 3:1 sobre el masculino, situación que se ha mantenido por generaciones en la Carrera de Psicología. Conforme a la calificación promedio final obtenida en el curso de matemáticas-estadística su distribución porcentual fue: el 14.9% con calificaciones de 9.1 a 10; el 28.7% de 7.1 a 9; el 35.1% de 5 a 7; y el 19.2% logró calificaciones menores a 5.

Instrumentos

Se aplicó la escala de Autoconcepto Forma-5 (AF5) (García y Musitu, 1999) para evaluar cinco factores o dimensiones del autoconcepto: *Laboral/académico* (es la percepción que el sujeto tiene de la calidad de su desempeño, como estudiante o como trabajador), *Social* (es la percepción que el sujeto tiene de su competencia en las relaciones sociales), *Emocional* (es la percepción que el sujeto tiene sobre su estado emocional y sus respuestas a situaciones específicas, con cierto grado de compromiso e implicación en su vida cotidiana), *Familiar* (es la percepción que tiene el sujeto de su implicación, participación e integración en el medio familiar) y *Físico* (se refiere a la percepción que tiene el sujeto de su aspecto físico y de su condición física). Se seleccionó esta escala principalmente por su empleo consistente en la investigación sobre autoconcepto y porque mantiene la idea promovida por Shavelson, Hubner y Stanton (1976) de una estructura multidimensional del autoconcepto. La escala tuvo una confiabilidad total de .78 y, en cuanto a validez, una varianza total explicada de 60.37%, la cual confirmó su estructura pentafactorial.

La escala AF5 evalúa las respuestas del estudiante en un formato tipo Likert de 9 puntos: una puntuación de "1" significa "máximo desacuerdo", y una puntuación de "9", "máximo acuerdo" con el contenido de la afirmación. Consta de 30 reactivos, agrupados en las cinco dimensiones de autoconcepto, cuya redacción se adaptó al tema del estudio. Los siguientes son ejemplos del tipo de reactivos empleados:

- *Hago bien los trabajos escolares de estadística*
- *Tengo miedo de algunas cosas en el curso de estadística*
- *Soy muy criticado/a en casa por mi desempeño en la asignatura de estadística*
- *Mis superiores (como los profesoras/es) me consideran buen/a estudiante en estadística*

Procedimiento

Se administró la escala AF5 como prueba de screening a todos los participantes, y se llevó a cabo el registro de su historial académico para determinar el nivel promedio de rendimiento académico integral (aprendizaje) en estadística.

Resultados

Para el análisis de los datos se agrupó a los participantes en tres categorías tomando en cuenta las calificaciones obtenidas en el curso de matemáticas-estadística. Con base en un punto de corte, se conformó un grupo de 'éxito' (calificación > 9), otro 'intermedio' (7 ≤ calificación ≤ 9) y un grupo de bajo rendimiento o 'fracaso' (calificación < 7).

Los resultados revelaron que los estudiantes en conjunto presentan un buen concepto de sí mismos. La puntuación media de la muestra total fue de 64.4. Sin estar ante puntuaciones muy elevadas, puede decirse que existe una aceptable autopercepción de los participantes en las distintas dimensiones de autoconcepto analizadas: laboral/académico (media=40), social (media=39.4), familiar (media=38.2) y físico (media=28.1), ya que el factor emocional está enfocado más a un uso de naturaleza clínica no se tomó en cuenta en el estudio. La Figura 1 muestra un análisis de distribución de frecuencias donde se observa que la concentración de alumnos con calificaciones más altas respecto a los que tienen calificaciones más bajas es diferente en cada una de las dimensiones de autoconcepto, principalmente, se encontró que la dimensión social predomina en alumnos con calificación menor a 7 y que el autoconcepto académico laboral destaca en los alumnos con calificación de 10 (grupo de éxito).

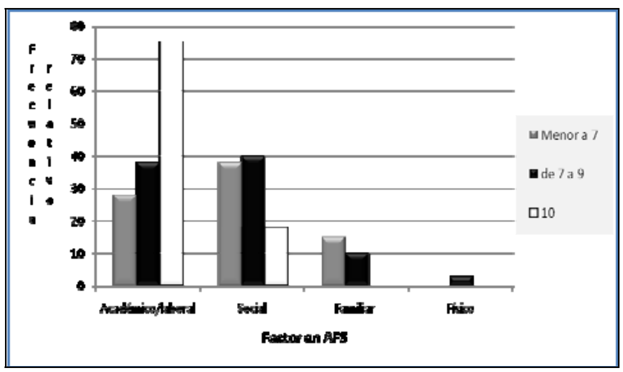


Fig. 1.- Distribución de los estudiantes en las dimensiones de autoconcepto.

Conclusiones

Los hallazgos indican diferencias, de acuerdo al tipo de rendimiento académico, en las características de autoconcepto. La diferencia encontrada particularmente entre los grupos de alumnos en los extremos de rendimiento, que podrían designarse "bajo" y "alto", sugiere que las características en su autoconcepto podrían reflejarse en el rendimiento en estadística. Algunos estudios, enfocados a medir la relación entre rendimiento y autoconcepto, apuntan al predominio de una dimensión de autoconcepto según el tipo de rendimiento, por ejemplo en la práctica deportiva destaca más la dimensión física, y las sub-dimensiones que la conforman (apariencia física y habilidad física), sobre otras (Esteve, Musitu y Lila, 2005) para explicar significativamente el rendimiento en el deporte en lugar de recurrir a factores motivacionales, como el clima deportivo familiar. Partiendo de ello, en este trabajo se esperaba que en los estudiantes con mayor rendimiento en matemáticas-estadística preponderara la dimensión de autoconcepto asociada al trabajo académico; es decir, los aspectos relacionados con la percepción del individuo sobre la calidad de su desempeño, como estudiante o como trabajador. En contraparte, que en los de bajas calificaciones sobresaliera una dimensión distinta a la académica o bien que su puntuación fuera menor en el factor académico. Los resultados apoyaron lo esperado, así las puntuaciones fueron más altas en los alumnos de alto rendimiento en aspectos del autoconcepto como "hago bien los trabajos escolares" "trabajo mucho en clase" "mis superiores (como los profesoras/es) me estiman" "mis superiores (como los profesoras/es) me consideran buen/a estudiante". A diferencia de los alumnos con calificaciones bajas que tuvieron puntajes más altos en la dimensión social, relacionada con la percepción que el sujeto tiene de su competencia en las relaciones sociales, en la cual estaban reactivos del tipo "me considero elegante" "consigo fácilmente amigos/as" "soy amigable".

No está por demás hacer énfasis en que la importancia de este tipo de trabajos, que abordan lo que se denomina variables personales del estudiante, radica en indagar en otro tipo de factores alternativos a los referidos como los influyentes en el rendimiento matemático a nivel escolar, con ello sería posible, como lo hemos indicado en otros trabajos (Sánchez, et. al., 2010) esclarecer la relación entre logro y cada uno de los componentes del autoconcepto. Así, donde sea necesario se aplicarían programas de entrenamiento diseñados sobre autoconcepto orientados a objetivos como: reconocer que nuestro autoconcepto representa un obstáculo o un facilitador en el logro matemático; identificar las características específicas del autoconcepto de un alumno de éxito en las clases de matemáticas para reflexionar sobre los efectos de la ausencia de dichas características en estudiantes de no éxito. Desde este punto de vista, podría adoptarse el autoconcepto en el rendimiento en contenidos escolares matemáticos como eje rector del desarrollo de habilidades, por ejemplo, afectivas, motivacionales y actitudinales, en el aprendizaje de tópicos matemáticos a fin de revertir el influjo de un autoconcepto negativo en matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Nota: Los autores agradecen el apoyo de la DGAPA-PAPIME al proyecto No. PE305407 para el desarrollo de este estudio.

Referencias bibliográficas

Blázquez, C., Álvarez, P., Bronfman, N., y Espinosa, J. F. (2009). Factores que influencian la motivación de escolares por las áreas tecnológicas e ingeniería. *Calidad en la Educación. 31*, 46-63.

Corno, L., y Snow, R. E. (1986). Adapting teaching to individual differences among learners. En M. Wittrock (Ed.): *Handbook of research on teaching.* New York: McMillan.

Esteve, R. J. V., Musitu, O. G., y Lila, M. M. (2005). Autoconcepto físico y motivación deportiva en chicos y chicas adolescentes. La influencia de la familia y de los iguales. *Escritos de Psicología. 7*, 82-90.

Garaigordobil, M., y Pérez, J. I. (2007). Autoconcepto, autoestima y síntomas psicopatológicos en personas con y sin disfemia: un análisis descriptivo y comparativo.*International Journal of Psychology and Psychological Therapy. 7* (2), 285-298.

García, J. F., Musitu, G., y Veiga, F. (2006). Autoconcepto en adultos de España y Portugal. *Psicothema. 18* (3), 551-556.

García, J.F. y Musitu, G. (1999). *AF5: Autoconcepto forma 5*. Madrid: TEA ediciones.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación.* 340 (Mayo-agosto), 551-569.

González, P. J. A., Núñez, C. J. C., González, P., S., y García, G. M. S. (1997). Autoconcepto, autoestima y aprendizaje escolar. *Psicothema. 9* (2), 271-289.

Goñi, G. A., Rodríguez, F. A., y Ruiz de Azúa, G. S. (2004). Bienestar psicológico y autoconcepto en la adolescencia y juventud. *Psiquis. 24* (4), 141-151.

Hernández, P. (1991). *Psicología de la instrucción.* México: Trillas.

Izquierdo, F.M. (2001). Un programa de prevención con hijos de alcohólicos. *Anales de Psiquiatría*, *17*, 313-318.

Jadue, J. G. (2001). Algunos efectos de la ansiedad en el rendimiento escolar. *Estudios Pedagógicos. 27*, 111-118.

Moreno, A. R. I. y Bazán, R. A. (2009). Relación entre autoconcepto y rendimiento académico en estudiantes de secundaria. *Revista de Enseñanza* e *Investigación en Psicología*. Número Especial, 231-241.

Pintrich, P. R. (1994). Continuities and discontinuities: future directions for research in educational psychology. *Educational psychologist. 29,* 137-148.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rodríguez, S., Cabanach, R.G., Valle, A., Nuñez, J.C. y González-Pineda, J.A. (2004). Differences in use of self-handicapping and defensive pessimism and its relation with achievement goals, self-esteem and self-regulation strategies. *Psicothema*, *16*, 625-631.

Rosenberg, M. (1979). *Conceiving the self.* New York, USA: Basic.

Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J., y Contreras, R. Ma. del S. (2010). La dimensión afectiva y el rendimiento en estadística en estudiantes universitarios. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 23*, 429-436.

Sánchez, R. J. G., y Ursini, S. (en prensa). Actitudes hacia las matemáticas, género y tecnología: estudios con alumnos mexicanos de educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

Shavelson, J., Hubner, J. J., y Stanton, G. C. (1976). Self-concept: validation of construct interpretations. *Review of Educational Research, 46,* 407-442.

Stevens, R. (1996). *Understanding the self.* London, United Kingdom: Sage.

Tomás, J. M., y Oliver, A. (2004). Análisis psicométrico confirmatorio de una medida multidimensional del autoconcepto en español. *Revista Interamericana de Psicología*. *38* (2), 285-293.

ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y MATEMÁTICAS: FACTORES AFECTIVOS, COGNITIVOS Y GÉNERO

Claudia Rodríguez Muñoz, Claudia Gisela Espinosa Guía
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (México)
claurom65@yahoo.com, guia95@gmail.com

Resumen. Una preocupación constante del sector educativo es la calidad de la educación que se oferta en nuestros países, las organizaciones internacionales han instrumentado mecanismos (Pisa, TIMSS, Excale, Enlace) para medir el logro académico en los niveles educativos básicos de los países agremiados, en general los resultados de estas pruebas, establecen que en el área de las matemáticas el alumnado de escuelas públicas de la educación secundaria en México tiene en promedio resultados que les ubican en los niveles de logro insuficiente y elemental. Estos resultados indican carencias graves en esta asignatura, que se enfatizan aún más cuando se analizan los resultados que obtienen las mujeres. Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que tuvo como propósito profundizar en los factores que inciden en el nivel de logro matemático que tienen las y los estudiantes de 3° grado de secundaria.

Palabras clave: discursos, afectividad, género

Abstract. A major preoccupation in education is the quality of the education offered in our countries, international organizations have instrumented evaluation mechanisms (PISA, TIMSS, Excale, Enlace) for the educational performance in basic education. In general, results show that students from public junior high schools get in average results that are insufficient and elemental in level. These results show important deficiencies in the matter that are emphasized even more when the results of women are analyzed. This paper is part of a wider investigation to go deeper on the factors that influence in the performance of male and female third grade junior high school students show in mathematics. Results with focus groups are presented.

Key words: discourse, affectivity, gender, mathematics performance

Introducción

En este documento se analizan los resultados obtenidos al aplicar la técnica de estudio denominada *grupo focal* a la muestra de estudiantes que participaron en un estudio cualitativo multi-metodológico llamado "Aspectos Educativos y Género. Modelos de Intervención para el Mejoramiento de las Capacidades de Aprendizaje en Matemáticas".

A continuación presentamos la pertinencia del marco teórico utilizado en este estudio, seguido de la descripción de las características de la población participante y del instrumento metodológico. Posteriormente se presentan los resultados a la luz de diferentes categorías que arrojó el programa ALCESTE que se utilizó para un primer procesamiento de los datos.

Pertinencia del marco teórico en Educación Matemática

El feminismo es un movimiento que cuestiona los valores y la estructura de una sociedad determinada y propone acciones que permitan corregirlos o transformarlos. A través de esta perspectiva, resulta evidente que a lo largo de la historia han prevalecido formas de organización social que suponen la virtual exclusión de la mujer de muchas de las esferas de la vida (arte, ciencia, política, trabajo y educación) y su confinamiento dentro de los límites de la vida doméstica. En sus comienzos, el movimiento feminista se concentró en el desarrollo de una agenda política consecuente con este esclarecimiento: la completa transformación del *status quo* y la creación de una sociedad sin sexismo. Más recientemente la búsqueda de este objetivo ha sido enriquecida con el desarrollo de una teoría social feminista que cuestiona de un modo fundamental la tradicional (masculina) forma de hacer ciencia (Castro y Bronfman, 1993, Harding, 1987).

La teoría feminista es una teoría de poder. Cuyo objetivo es explicar el "origen de la opresión, supresión y represión" de la mujer (Bart y Budinger, 1984). El punto de partida de esta teoría es el señalamiento del dominio masculino sobre las mujeres en prácticamente todos los periodos de la historia (Rosaldo y Lamphere, 1974).

La escuela, institución encargada de educar, tiene entre sus funciones también la de reproducir y fortalecer las diferencias de género, y lo hace a través de sus normas y contenidos curriculares (Bustos, 1994; Gomariz, 1992; De Barbieri, 1996; Scott, 1996). Como lo señalan Horkheimer y Adorno (2004) y Foucault (1976, 1997), la educación reproduce las formas sociales de dominación y explotación, no solamente en las relaciones de poder que se dan en el ámbito educativo, sino por la formación del pensamiento que se modela a través de las relaciones en el aula y la imposición por decreto de los contenidos.

El abordaje teórico feminista supone la ventaja de apoyarse en diferentes herramientas metodológicas: de tipo interrogatorio (como la aplicación de cuestionarios y entrevistas), de tipo asociativo (técnicas de asociación libre de palabras), la aproximación monográfica (la observación de las prácticas). La combinación de estas herramientas y técnicas ayuda a la recolección de datos, consideramos importante privilegiar nuestro trabajo bajo un enfoque cualitativo fundamentado en el análisis de la subjetividad de las y los participantes.

Características de la población y del instrumento

En cada una de las 16 escuelas secundarias que participaron en la investigación cualitativa, se organizaron dos grupos focales, uno con 6 niñas y otro con 6 niños. Estos 12 estudiantes entre 14 y 15 años de edad que fueron seleccionados a través de un muestreo aleatorio sistemático de un grupo de tercer grado escogido al azar. En total se trabajó con 192 estudiantes. Las sesiones, fueron video-grabadas con la autorización informada de cada participante.

Para poder aplicar la técnica de grupos focales *se realizó una guía semiestructurada dirigida a recabar información de las y los estudiantes acerca de las siguientes categorías:*

- Actitud hacia las matemáticas.

- Autoconfianza en el desempeño matemático.
- Creencias entorno a las matemáticas.

Para obtener la información deseada se provocó la interacción entre las y los estudiantes. Esta es una característica fundamental de esta técnica de estudio que permite resaltar y rescatar de cada persona la concepción de su realidad, sus vivencias, su afectividad, su lenguaje cotidiano, sus valores y creencias en relación al tema de discusión (Kitzinger, 1994); y ha demostrado su utilidad para evaluar el impacto de un fenómeno o problema social (Markova, 2004). En particular, siguiendo una guía de discusión, se solicitó a los y las participantes hablar de sus vivencias, afectos, experiencias, creencias y actitudes en relación a las matemáticas dentro y fuera del ambiente escolar. Esto, con el propósito de obtener información acerca de cómo cada estudiante ha sido y es influenciado por su entorno social, familiar y escolar.

El programa ALCESTE para el manejo de la información

ALCESTE es un método informatizado para el análisis de textos, creado por Reinert (1997), en el marco de las investigaciones acerca del desarrollo de métodos de análisis de datos lingüísticos. Es un programa desarrollado en relación con las necesidades y problemas de las investigaciones sociales, especialmente útil para el análisis de materiales lingüísticos como las preguntas abiertas en cuestionarios, entrevistas a profundidad o grupos focalizados (Rodríguez, 2009).

Para Reinert (1997) el objetivo del método propuesto es el de poner en evidencia, a través del análisis de un conjunto de textos, los "mundos lexicales usuales" evocados por los enunciadores. Se encuentra un interés estadístico en la redundancia de las huellas lexicales o sucesiones de palabras, lo que permite localizar los mundos más frecuentes. Un mundo lexical es entonces el lugar frecuentemente "habitado" por el enunciador (De Alba, 2004).

Las transcripciones de los datos obtenidos con la técnica de *grupos focales* fueron preparadas para conformar un cuerpo discursivo general, es decir, se unieron las discusiones de todos y cada uno de los grupos de discusión, desagregadas por sexo. El análisis realizado por el programa ALCESTE permitió poner en evidencia "*los mundos lexicales"* que están en juego en las y los estudiantes respecto a los temas que se discutieron. El programa genera relaciones entre estos "*mundos lexicales"*, que llamamos *clases*, que encierran los grandes temas a los que hacen referencia los discursos evocados por las y los estudiantes.

Conocer las *clases* y su relación, así como las frecuencias y sucesiones de palabras que nos proporciona ALCESTE es de gran utilidad para un primer acercamiento cuantitativo al análisis del discurso, sin embargo, consideramos que es fundamental profundizar a través del análisis de contenido.

Tanto Ibáñez (1992) como Bardin (1996) coinciden en que el análisis de contenido es una técnica útil para el análisis de comunicaciones, por lo que se hace necesario conjuntar la técnica cuantitativa y cualitativa, con la finalidad de enriquecer el análisis de los discursos evocados en los grupos focales.

A cada categoría se le asignaron códigos de significado. En el análisis cualitativo, esta asignación constituye un primer análisis que se realiza al clasificar una sección del texto en categorías específicas de significados que tengan sentido a partir del lugar de donde se mira al fenómeno u objeto de estudio en cuestión.

Resultados por género y clase

Al analizar con ALCESTE el discurso evocado por las mujeres en los grupos focales encontramos cuatro clases que se vinculan: a) La autoconfianza para trabajar en matemáticas, b) La clase de matemáticas, c) Proyecto de vida y d) Expectativas de la familia en matemáticas.

Clase a: Autoconfianza

Las palabras producidas por *las mujeres* con mayor frecuencia en la clase 1 son: niño(71), mano(57), burla(52), miedo(48), compañero(47), levanta (44), salón(44), hombre(27), mujer(26), participar(27), Martha(25), individual(19).

Las mujeres se reconocen como participativas en la clase de matemáticas, atribuyéndolo al hecho de ser más disciplinadas y atentas. Consideran que, si bien los hombres pueden ser en ocasiones más atinados que ellas para resolver problemas matemáticos, ellos participan menos para evitar exponerse y ser etiquetados por sus compañeros, como se puede apreciar en el siguiente fragmento del discurso de una estudiante:

> *…pero, yo no digo que los hombres sean más buenos que las mujeres, es que como que las mujeres somos más clavadas. O porque a los hombres les da más pena lo que digan los mismos hombres, porque dicen "qué tonto, no le entiende" y entre ellos mismos se reprimen.*

Al parecer, el ambiente de trabajo en el aula de matemáticas pocas veces favorece el aprendizaje. Con frecuencia las estudiantes manifestaban sentirse incómodas por las burlas constantes de sus compañeras y compañeros, lo que las lleva a sentir miedo de expresar alguna duda o de participar en la clase de matemáticas y a no ser asertivas. Lo anterior se ilustra con este comentario:

> *En otros lugares nos han dicho cosas diferentes respecto a qué hacer si no entiendes, pero sí que cuesta trabajo preguntar. No nada más sería esta cuestión de la actitud del maestro, que diera confianza, también hay alguna actitud de compañeras y compañeros que nos impide preguntar. Bueno, es que si preguntas algo, se burlan, pero no son tanto las compañeras, como que son más los niños, los que, si preguntamos, luego empiezan así de "ja, ja, ja", burlándose.*

Las estudiantes manifiestan sentirse más seguras al trabajar en equipo porque pueden intercambiar ideas, generar un aprendizaje social. Si bien existen matices en sus discursos, coinciden en que el trabajo en equipo puede ser más productivo y apoyarles en la comprensión de los contenidos matemático. Sus argumentos apoyan un trabajo colaborativo y están en desacuerdo con las y los estudiantes que simulan trabajar y sólo copian los resultados. Los siguientes fragmentos de discurso establecen estos matices:

> *Así es mejor, en equipo. Aja, es mejor que individual. Porque en lo individual nada más te quedas así, pensando si estaré bien o no. Luego te volteas y estás preguntándoles a los demás, y te dicen los profes: "¿Por qué estás volteando?", "Es que no entendí", y te quedas con la duda.*

Las palabras producidas por *los hombres* con mayor frecuencia en la clase 1 son: Entender (40), preguntar (40), hombre (30), participar (25), interés (24), maestro(a) (22) e iguales (20).

Los estudiantes expresan autoconfianza al decir que tanto niñas como niños entienden las matemáticas. Argumentan que las niñas las entienden mejor debido a la buena relación que tienen con el profesor(a). Consideran que dependiendo de la o el profesor que les imparta la clase, ellos pueden o no entender los conceptos matemáticos, en cambio, piensan que a las niñas eso no les afecta, debido a que ellas siempre buscan la buena relación con el docente. Entre los niños es común que digan

> *"…las niñas preguntan sólo para ganarse al maestro…".*

En su discurso insisten en decir que tanto hombres como mujeres tienen las mismas capacidades de aprender matemáticas, sin embargo, enfatizan también, con cierto orgullo de género, que las matemáticas, históricamente, han sido desarrolladas por hombres.

> *"…¿quién inventó las matemáticas? fue un hombre ¿no?…"*
>
> *"… en la historia de las matemáticas quienes han destacado son los hombres…"*

Clase b: La clase de matemáticas

Las palabras evocadas por *las mujeres* con mayor frecuencia en la clase 2 son: docente(91), explica(83), entender(52), enseñar(33), clase(30), tema(28), entiendo(20), tiempo(20), explique(20), bien(28) y divertido(17).

Esta clase es la que ocupa un mayor porcentaje del discurso de las estudiantes (43%). Al abordar el tema de las clases de matemáticas, las mujeres expresaban sus experiencias y sus emociones respecto a las distintas formas de enseñanza de las y los docentes que habían tenido a lo largo de la secundaria. En sus discursos concurren comentarios acerca de las prácticas tradicionales en la enseñanza, en las que quien posee el conocimiento (docente) explica, define, vierte su sapiencia y solicita a sus estudiantes reproducir los procedimientos empleados para resolver problemas matemáticos, ejercicios aritméticos o algebraicos. Estas prácticas generan en las estudiantes enojo, inseguridad, frustración y desinterés:

> *Como que da sólo la respuesta, aja!, y no la explica, nada más este, da el resultado de lo que es ¿no?, no lo vuelve a explicar. Si no le entendemos, pues ni modo. Nosotros tenemos que o irle a preguntar, aja!, o ir nada más anotando a la hora da las respuestas, nada más hay que ir anotando lo que dice y ya, pero me siento mal de no saber.*

De los 16 grupos focales que se realizaron con las mujeres, sólo en dos, las estudiantes expresaron contar con docentes que se ocupan de resolver las dudas que surgen durante la clase de matemáticas. Las emociones que se producen en estos casos son confianza y seguridad. Por ende, las actitudes hacia estas clases son de interés y disposición al trabajo:

> *Y al profesor de hace un año, pues te podías acercar y decirle no, no le entiendo. Y ya te explicaba así, a tu gusto. Me sentía más tranquila, sabía que contaba con él.*

Como alternativa para combatir el desinterés, aburrimiento y falta de comprensión de los contenidos matemáticos, provocado por las prácticas tradicionales de sus profesoras y profesores, las estudiantes manifiestan, como un deseo recurrente, el hacer del aula de matemáticas un espacio lúdico que, a través de juegos y/o actividades más dinámicas, motive la participación y la comprensión de esta asignatura:

> *Sí, que fueran todas un poco divertidas, porque son como que muy, muy aburridas y pues no está bien, pues es súper aburrido. Sólo me piden a mí que mejore, que le eche más ganas, que ponga más atención, que ya no sea distraída, no sé, siempre, siempre te dicen lo mismo, pero ellos no cambian.*

Las palabras producidas con mayor frecuencia por los hombres *en la clase 2 son: Pone (56), ejercicio (48), punto (38), sello (37), cuaderno (31), clase (23), examen (18) y tema (17).*

En cuanto a la convivencia que los estudiantes tienen con su profesor(a) de matemáticas, consideran que no es del todo cortés, debido a que:

"no comprenden que no somos robots"

"a su forma de explicar no le entiendo"

Para la mayoría la clase de matemáticas consiste en que el profesor(a) explica sólo un ejemplo y después pide que realicen una lista de ejercicios o solicita que los ejercicios se resuelvan en equipo. Los estudiantes comentan que su profesor(a) de matemáticas les exige disciplina en todos los aspectos, desde el comportamiento en clase (puntualidad, orden, silencio, atentos a la pizarra, cuaderno limpio y ordenado, letra clara, etc.) hasta el respeto por las operaciones matemáticas (deben colocar correctamente signos, exponentes, literales, operaciones). De la realización adecuada de estos aspectos depende el número de puntos (sellos) que el docente otorgue a cada uno, lo cual les provoca estrés y angustia por hacer de la mejor manera lo que les pide su maestro(a). Así, fue común que ellos comentaran cosas como las siguientes:

"me regaña si no pongo los paréntesis"

"nos obliga a que pongamos atención y que estemos atentos al pizarrón"

"…por un exponente ya no me puso los 16 sellos…".

Clase c: Proyecto de vida

Las palabras con mayor frecuencia en la clase 3 son: estudio(105), ser(98), carrera(97), prepa(76), querer(51), gustaría(43), dinero(33), turismo(24), hijo(24), hermano(23), universidad(22), terminar(21), casa(21) y familia(20).

El discurso de las estudiantes de la muestra en torno a lo que hemos categorizado como *proyecto de vida* se reconoce a las matemáticas como importantes para la vida, sin embargo, no se les consideran como algo que deseen estudiar como parte de su formación futura.

Ellas manifiestan el deseo de continuar con sus estudios, teniendo como preferencia más frecuente el ingresar a bachilleratos de la UNAM o el IPN. En estas chicas permea la idea de que sólo la UNAM y el IPN ofrecen carreras de prestigio social.

Las profesiones a las que aspiran siguen apelando al estereotipo de género, es decir, se inclinan por licenciaturas orientadas al cuidado o atención de los otros, deseando ser psicólogas, enfermeras, educadoras, estilistas, azafatas. Sólo dos estudiantes de las 96 mujeres que participaron en el estudio vislumbran la opción de estudiar un doctorado. Todas las demás ven la licenciatura como su meta final. En algunos casos expresan que su selección responde al deseo de excluir carreras en las que se aprendan matemáticas:

> *Me gustaría también ser educadora, sí, me encantan los niños chiquitos. Todo, menos que sea algo de matemáticas!*

Las estudiantes miran el concluir una licenciatura como una opción para tener una mejor calidad de vida. Dentro de su proyecto de vida también existe la figura de ser "madre-esposa", formar una familia nuclear "madre, padre e hijos" como modelo de familia:

> *...Y pues, con mi propio dinero ayudar a mis papás, y pues estar en mi casa, y con hijos, tal vez, uno, o dos, o tres. Y obvio con esposo, si tengo hijos debo tener esposo ¿noooo?*

Las palabras producidas por los hombres *con mayor frecuencia en la clase 3 son: Carrera (58), papá (57), matemáticas (48), estudiar (47), comprar (34), vida (29), utilizar (31), dinero (26) y mamá (24).*

La mayoría de los varones manifestó que las matemáticas son importantes para el estudio de una carrera profesional, sin embargo, consideran que son un obstáculo que les impide quedarse en la escuela de educación media superior de su preferencia. Esto provoca que ellos desmeriten a las escuelas (Colegio de Bachilleres, CBTiS, Conalep) que no pertenecen al IPN o a la UNAM, argumentando que el nivel de educación es bajo y las carreras que se imparten son técnicas o terminales.

Los estudiantes consideran a la matemáticas como una herramienta útil en sus estudios, asimismo las consideran necesarias para la vida, pero no para ser estudiadas de manera profesional, ya que se requiere de tener inteligencia, disciplina, confianza, gusto y entendimiento hacia ellas.

Sin proponérselo, ponen en evidencia que consideran que el conocimiento de las matemáticas está en los hombres, cuando argumentan que a las personas a quienes les preguntan sus dudas son su papá o tíos o primos, sin mencionar jamás a una persona del sexo femenino:

> *"…como mi hermano está en arquitectura en CU…"*
>
> *"...ha sí, mi hermano también me apoya…"*
>
> *"bueno mi papa es el que me puede ayudar…"*

Clase d: Expectativas de la familia

Esta clase sólo aparece en el discurso recurrente y estable de las mujeres, los hombres no suficientemente de esto, no les resulto importante.

Las palabras con mayor frecuencia en la clase 4 evocadas por las mujeres *son: papá(114), calificación(106), mamá(100), gana(95), reprobar(55), baje(48), regaño(45), échale(41), castigo(41),baja(35), permiso(35), saque(32), feo(30), boleta(28), materia(22) y bajo(21).*

La mayoría de las estudiantes buscan que sus padres las apoyen para estudiar y comprender matemáticas y afirman que ellos saben más matemáticas que sus mamás; o bien recurren a otros hombres de su familia para resolver sus dudas en esta asignatura, al hermano, el primo, el cuñado. El entorno escolar, familiar y social alimenta la creencia de que las matemáticas son un dominio masculino:

> *…ni entiendes, ni lo razonas bien, por ejemplo, en mi caso, últimamente he llegado, y como mi papá sí sabe algo de matemáticas y todo eso, llego, mejor con mi papá para que me explique y él me tiene más paciencia, me explica mejor.*

Conclusiones

Pese a la deseabilidad social del discurso donde se decreta que mujeres y hombres somos capaces de desarrollar habilidades y construir conocimientos matemáticos por igual, la construcción sociocultural de género establece condiciones distintas para unas y otros. Tanto las mujeres como los hombres consideran que las matemáticas son una herramienta útil para la vida y determinantes para poder elegir una carrera profesional, pero, ellas se inclinan por carreras que no se vinculen con las matemáticas.

De sus argumentos se desprende que las estudiantes son vulnerables a los ambientes hostiles que se generan en el aula de matemáticas. Por lo general, los estudiantes varones discursivamente se consideran personas seguras, que no se sienten intimidados por el ambiente que se genera dentro de la clase de matemáticas. Las mujeres manifiestan su preferencia por el trabajo de equipo, donde se dé una participación colaborativa, considerando que pueden aprender más si socializan los procedimientos empleados. En cambio a los estudiantes varones sólo les agrada competir en la clase de matemáticas. En general el estudiantado manifestó que la clase sería mejor si se realizara a través juegos o actividades que les permitiera la interrelación entre pares y así acercarse a los conocimientos matemáticos.

Nota: Este término es acuñado por la Secretaria de Educación Pública en México como la capacidad que las y los estudiantes desarrollan y muestran a través de los exámenes ENLACE en el dominio de los conocimientos y habilidades contenidos en los planes y programas de estudio que se tienen en la educación básica en nuestro país.

Referencias bibliográficas

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. España: Akal Universitaria.

Bart, P. B. y Budinger, J. (1984). *Feminist Theories*. Draft. (Mimeo)

Bustos O. (1994). La formación del género: El impacto de la socialización a través de la educación. En: Antología de la sexualidad humana. México: Porrúa.

Castro, P., Mario Bronfman P. (1993). *Teoría Feminista y Sociología Médica: Bases para una Discusión*. Recuperado el 29 de marzo de 2011 de http://www.sicielosp.org/pdf/csp/v9n3/24.pdf

De Alba, M. (2004). *Programa de análisis de textos Alceste (análisis de lexemas co ocurrentes en los enunciados simples de un texto*). Cuadernillo de trabajo. Departamento de Sociología. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

De Barbieri T. (1995). Certezas y malos entendidos sobre la categoría de género. Estudios de Derechos Humanos IV, IIDH, Costa Rica.

Foucault, Michel. (1976). *Historia de la sexualidad: la voluntad de saber.* Madrid: Siglo XXI.

Foucault, Michel. (1997). *Microfísica del poder*. España: La piqueta.

Harding, S., (1987). The instability of the analytical categories of feminist theory. En Harding S. y O'Barr, J. F. (eds.), *Sex and Scientific Inquiry* (pp. 283-302). Chicago: University of Chicago Press.

Horkheimer, M. y Adorno, T (2004). *La industria cultural, en Dialéctica de la Ilustración*. Fragmentos Filosóficos. Tecnos. Madrid.

Ibáñez, T. (1992). *Aproximaciones a la Psicología Social*, Barcelona: Sendai.

Kitzinger J. (1994). The methodology of focus groups: the importance of interaction between research participants. *Sociology of Health* 16(1), 103-21.

Marková, I. (2004). Les focus groups. En Moscovici, S. y Buschini, F. (Eds), *Lesméthodesde sciences humaines*. Paris : PUF Fundamental.

Reinert, M. (1997). Un Logiciel d'Analyse Lexicsl: Alceste. Le Chaiers de l'Analyse des Données, 4, 471-484.

Rodríguez, C. (2009). *Diferencias de género en las representaciones sociales en la enseñanza de las Matemáticas con Enciclomedia.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Rosaldo, M. y Lamphere, L. (eds.), (1974). *Woman, Culture and Society*. Stanford: University of Stanford Press.

ALTERNATIVAS METODOLÓGICAS EN LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Claudia Rodríguez Muñoz, Claudia Gisela Espinosa Guía
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (México)
claurom65@yahoo.com, guia95@gmail.com
Scott, J. (1996). El género: Una categoría útil para el análisis histórico. En M. Lamas (comp.) *El género: la construcción cultural de la diferencia sexual.* México: Porrúa-PUEG

Resumen. La mayoría de las investigaciones que se han interesado por el estudio de la afectividad, actitud, creencias y autoconfianza en matemáticas, parten de la aplicación de escalas que muestran una realidad parcial y con sesgos asociados a la deseabilidad social. En este artículo describimos las fases metodológicas del uso de la técnica de asociación libre usada en una investigación reciente desarrollada con estudiantes de secundaria (14-15 años). El objetivo de la investigación fue profundizar en el conocimiento de las dimensiones relevantes en la construcción de la afectividad, actitud, creencias y autoconfianza en matemáticas del estudiantado de secundaria a través de una multi-metodología, donde la asociación libre se introduce como alternativa metodológica viable.

Palabras clave: asociación libre, metodología, afectividad, matemáticas

Abstract. Most of the research that has been done on the study of emotion, attitude, belief and confidence in mathematics, start from the application of scales showing a partial reality and biases associated with social desirability. This article describes the methodological phases of the use of free association technique used in recent research carried out with high school students (14-15 years). The research objective was to deepen the knowledge of the relevant dimensions in the construction of emotion, attitude, beliefs and self-confidence in math high school students through a multi-methodology, where free association is introduced as a viable alternative methodology.

Key words: free association, methodology, affectivity, mathematics

Introducción

Los resultados de las pruebas estandarizadas que se han implementado en México por la Secretaria de Educación Pública para medir el logro académico[1] del estudiantado de educación básica indican carencias graves en la asignatura de matemáticas, enfatizándose en los resultados de las niñas. Esta investigación forma parte de un estudio más amplio que tuvo como propósito profundizar en los factores que inciden en el nivel de logro matemático que tienen las mujeres y los hombres en la educación secundaria de 3° grado. En este documento se presenta el análisis de los resultados del instrumento metodológico: "inventario de Matemáticas" basado en la técnica de asociaciones libres, aplicado a la muestra de estudiantes de la investigación denominada "Aspectos Educativos y Género. Modelos de Intervención para el Mejoramiento de las Capacidades de Aprendizaje en Matemáticas".

Lo que se describe a continuación son las características de la población sustentante y del instrumento metodológico. A lo largo de este artículo se sitúa la afectividad, las creencias, actitudes y autoconfianza hacia las matemáticas, que tienen las y los estudiantes que participaron en estudio, estos aspectos están también relacionados con algunos temas de matemática que toma en cuenta la prueba de Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) de forma diferenciada por sexos.

Marco de referencia

En México el uso de la técnica de asociación libre en Matemática Educativa se empieza a emplear mediante la Teoría de Representaciones Sociales (Rodríguez y Ursini, 2008 y Rodríguez, 2009), con el propósito de analizar las diferencias de género en la apropiación del profesorado de un recurso tecnológico (Enciclomedia) para la enseñanza de las matemáticas. La asociación libre brinda contenidos de naturaleza variada que pueden ser clasificados en tres modos: *semántico, lexical y cognoscitivo-procesual.* El modo *semántico* se aplica a los textos. Mediante un ejercicio de asociación libre de palabras se logra obtener un material referido a objetos, sucesos, emociones y sentimientos en relación al texto que se presenta. El modo *lexical* considera sustantivos, verbos, adverbios, adjetivos, proposiciones, y todas las expresiones gramaticales empleadas por los sujetos de estudio. Este material léxico se somete a análisis para extraer índices léxico-métricos como la frecuencia absoluta de las palabras, la tasa adjetivos/verbos, la tasa verbos/total de palabras, etc., lo que proporciona información acerca de las formas verbales más recurrentes. El modo *cognoscitivo*, se refiere a la información que tienen los sujetos sobre el tema que detonan las asociaciones y permite observar creencias, atribuciones de causalidad, estereotipos, actitudes-evaluaciones y tendencias de conducta (Abric, 1994).

Descrito lo anterior mostramos la pertinencia de la técnica en este estudio, dado que permitió recoger y analizar un conjunto de relaciones significativas que el estudiantado tiene sobre las matemáticas, es decir, mostrar qué es más cercano a sus intereses, conocimientos y gustos por esta asignatura, diferenciando los contenidos matemáticos que se abordan en la currícula de secundaria.

Características de la población y del instrumento

Marco muestral

La investigación se realizó en 16 escuelas secundarias públicas del Distrito Federal seleccionadas mediante muestreo aleatorio con base en los siguientes criterios: de las 1281 escuelas secundarias del Distrito Federal, se eliminaron las escuelas privadas, quedando 816 escuelas; de éstas se eliminaron 711 en las cuales no se presentaron diferencias significativas entre mujeres y hombres en la media de respuestas correctas a los ítems de matemáticas de la

Prueba Enlace 2008 (se aplicó el criterio de punto de corte considerando 442 como puntaje mínimo y 606.83 como máximo, incluyendo todas las escuelas). De las 105 restantes, se eliminaron las escuelas cuya población era menor a 30 alumnos o alumnas, considerando que la prueba t a implementarse para detectar diferencias significativas, necesita una muestra mínima de 30 niñas/os; quedando así un universo de 56 escuelas. Con éstas se determinó el tamaño de muestra de 16 escuelas.

Población sustentante

El inventario de matemáticas se aplicó a 192 estudiantes de escuelas secundarias de educación pública (12 de cada una de las 16 escuelas de la muestra de la investigación principal). Las escuelas fueron seleccionadas al azar entre aquellas que, en el examen de Enlace 2008, se consideraron escuelas con rezago y que, después de un análisis estadístico, se encontró que tenían diferencias de género en los resultados de dicho examen. El estudiantado (6 mujeres y 6 varones por grupo) fue seleccionado a través de un muestreo aleatorio sistemático de un grupo de tercer grado de cada institución.

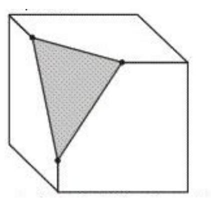
Instrumento

El "inventario de matemáticas" consta de 14 reactivos seleccionados de la prueba Enlace 2008 aplicada a estudiantes de 3° de secundaria. Los reactivos que se seleccionaron cómo detonadores de los factores de la afectividad del estudiantado de 3° de secundaria en relación con las matemáticas se caracterizaron por cumplir los siguientes criterios:

1. La necesidad de tener por lo menos un reactivo en correspondencia a cada una de los aspectos considerados en planes y programas de estudio de matemáticas en secundaria: números naturales, números fraccionarios y decimales, números con signo, variación proporcional, cálculo algebraico, ecuaciones, manejo de la información, experimentos aleatorios, medición y cálculo geométrico, geometría. Esto con el propósito de poder reconocer los distintos factores afectivos asociados a cada área y si existen diferencias entre ellas.
2. La inclusión de reactivos en que existen diferencias significativas en las respuestas correctas a favor de los hombres y algunos en que existen diferencias significativas en las respuestas correctas a favor de las mujeres. Esto, con el fin de contrastar los factores afectivos asociados a las áreas y reactivos en ambas condiciones.

Al lado de cada reactivo aparecen tres celdas vacías en las que se solicitó al estudiantado que, escribieran en la primera celda la primera palabra que les viniera a la mente después de leer la pregunta y así sucesivamente con las trece preguntas subsecuentes. Una vez concluidas estas primeras asociaciones, el investigador pidió a las y los participantes que en la segunda celda que correspondía a cada reactivo, anotaran por qué asociaron esa palabra con el contenido del reactivo. Por último se les solicitó que registraran en la tercera cómo pensaban que les iría si tuvieran que responder cada reactivo.

Ejemplo de: reactivo, columnas y respuestas:

Reactivo 10 del inventario / 143 de la prueba Enlace 2008		Asociación	Información	Auto confianza
El siguiente sólido ha sido cortado con un plano ablicuo que pasa por los puntos medios de dos lados consecutivos de su cara superior. 	¿Qué tipo de triángulo resulta del corte del sólido? A. Equilátero B. Rectángulo escaleno C. Rectángulo isósceles D. Isósceles acutángulo	Regalo de mi novio	Porque el día de su cumple le di un osote en una caja y la caja se me rompió de un lado y quedo así	Bien

Proceso para el análisis de resultados

Las palabras asociadas a cada reactivo se analizaron con el programa Excel para obtener las frecuencias de los términos asociados por el estudiantado. Las palabras asociadas y el tipo de explicaciones que emitieron respecto a las causas por las que asociaron ciertas palabras con las preguntas planteadas sirvió para develar las creencias y la actitud hacia las matemáticas del estudiantado, por medio de un análisis de contenido.

La autoconfianza se analizó a partir de las respuestas dadas en la tercera celda. En este análisis resulta importante distinguir la carga emotiva de las respuestas.

Resultados

Aritmética

Cuatro de los catorce reactivos del "*inventario de matemáticas"* plantean problemas aritméticos; dos de ellos sobre *Números fraccionarios y decimales,* otro es de *Variación proporcional* y uno más de *Números con signos*. En el análisis de los resultados de la prueba enlace 2008, los mismos cuatro reactivos (10, 16, 22 y 27) muestran que existen diferencias significativas del 0.001 a favor de los hombres.

Las palabras o frases asociadas a estos reactivos en el caso de las mujeres están fuertemente ligados al contexto del planteamiento del problema, es decir hacen alusión a los sujetos u objetos enunciados (35.41%), un porcentaje mayor (37.5%) de las evocaciones se relacionan con el deseo de resolver el problema, emiten palabras o frases que indican procedimientos u operaciones que deben realizar para resolver el ejercicio, otro grupo relaciona los problemas con aspectos afectivos como el amor (15.62%), algunas de las estudiantes escribieron palabras o frases relacionadas a su incertidumbre sobre el tema a resolver, también están en este grupo las que tienen un desinterés por los ejercicios (11.47%).

Los hombres al leer los cuatro reactivos sobre aritmética emiten asociaciones relativas a sus reflexiones sobre cómo resolver el problema (36.45%), también presentan palabras o signos de las operaciones que deben realizar para resolverlos (26.04%), en un porcentaje menor hacen alusión al contexto del problema (18.75%), sólo 2 de los estudiantes hacen mención a su novia al asociar libremente los reactivos (2.08%), el resto de los estudiantes producen términos que muestran indiferencia (16.68%).

Los resultados de las asociaciones libres con los reactivos presentados ponen a la luz que los hombres están más preocupados por resolver los problemas matemáticos, lo primero que les viene a la mente es dar solución a cada ítem (62.49%), mientras que en las mujeres esta asociación se refleja en menor grado (37.5%), los referentes vinculados al contexto de los problemas son diferenciados de forma importante por sexo, los hombres hacen referencia al contexto en un 18.75% de las veces, las mujeres lo asocian un 35.41% de las ocasiones. Es importante destacar que las estudiantes ligan con mayor frecuencia los contextos de los ítems con sus lazos afectivos al novio (15.62%) este elemento es notablemente menor en los hombres (2.08%), tanto en las mujeres como en los hombres existen porcentajes que revelan desinterés ya sea por la tarea o bien por las matemáticas, (11.47% y 16.68%) siendo mayor en los estudiantes.

Podemos establecer que, aún cuando las consignas para esta tarea solicitaban escribir lo primero que les viniera a la mente, los hombres responden mayoritariamente a lo que por estereotipo de género se espera de ellos, es decir, actuar de forma concreta avocándose a resolver cada reactivo, las mujeres se permiten más escribir lo que se les ocurre sin importar la lógica de sus evocaciones, lo anterior es reforzado por el tipo de explicaciones que dan acerca del porque asociaron las palabras o frases escritas en la primer columna del instrumento, tanto las asociaciones cómo las explicaciones que proporcionan pueden estar vinculadas a lo que Gómez Chacón (2003) llama *afecto global*, ya que está estructuralmente ligado a los sentimientos y actitudes que refuerzan las estructuras de creencias.

Muchas de las explicaciones que emite el estudiantado sobre sus asociaciones relacionadas con fracciones, les generaron ansiedad, incertidumbre, la falta de comprensión del contenido matemático desencadena estas emociones, lo cual no es cosa menor si entendemos que el sistema afectivo al trabajar en matemáticas no es un auxiliar de lo cognitivo, sino resulta central en las configuraciones cognitivas, (Gómez Chacón, 2006).

La autoconfianza para resolver los problemas aritméticos es mayor en los hombres que en las mujeres (ver tabla 1). En esta sección resaltan las cosas que escriben cuando no logran tener una postura definida respecto a cómo creen que les iría si tuvieran que resolver cada ítem, por lo general las estudiantes argumentan que no entienden. Sus respuestas parecen responsabilizar más a las circunstancias que así mismos o bien se alientan ante la adversidad.

Reactivo ENLACE	Reactivo inventario	Área y tema del conocimiento matemático	Nivel de logro	Diferencias significativas por sexo	Autoconfianza mujeres	Autoconfianza hombres
10	1	Aritmética: Números fraccionarios y decimales	Medio	0.001 a favor de los niños	59 bien, 13 mal, 4 regular, 20 diferentes relacionadas con procedimientos.	65 bien, 18 mal, 7 regular, 6 diferentes justificaciones y ánimos.
16	2	Aritmética: Números fraccionarios y decimales	Alto	0.001 a favor de los niños	11 bien, 59 mal, 7 regular, 19 diferentes relacionadas con procedimientos y dudas.	18 bien, 65 mal, 6 regular, 11 diferentes justificaciones y ánimos.
22	3	Aritmética, Números con signos	Medio	0.001 a favor de los niños	31 bien, 34 mal, 5 regular, 26 diferentes relacionadas con procedimientos justificaciones y dudas.	40 bien, 41 mal, 8 regular, 7 diferentes justificaciones y ánimos.
27	11	Aritmética, Variación proporcional	Bajo	0.001 a favor de los niños	41 bien, 18 mal, 5 regular, 15 diferentes relacionadas con procedimientos y dudas.	41 bien, 19 mal, 3 regular, 9 diferentes justificaciones y ánimos.

Tabla 1 Concentrado de respuestas en autoconfianza para resolver los reactivos de aritmética.

Álgebra

Dos de los catorce reactivos del "*inventario de matemáticas*" plantean problemas de álgebra; el primero es de *cálculo algebraico* el cual implicaba poner en juego habilidades como identificar, agrupar, traducir, calcular, operar y expresar los términos semejantes y el segundo sobre *ecuaciones* que propone sustitución y solución de ecuaciones. En el análisis de los resultados de la prueba Enlace 2008, los mismos reactivos (31 y 63, tabla 2) muestran que existen diferencias significativas del 0.001 a favor de los hombres.

Las mujeres asociaron palabras o frases que se circunscriben al contexto del planteamiento del problema, haciendo alusión a los sujetos u objetos enunciados (18.75%), un porcentaje mayor (32.29%) de las evocaciones se relacionan con el deseo a resolver el problema, también emiten palabras o frases que indican procedimientos u operaciones que deben realizar para resolver el ejercicio. Algunas de las estudiantes en estos reactivos escribieron palabras o frases relacionadas a su incertidumbre sobre el tema y sobre su desinterés por la prueba (48.96%).

Reactivo ENLACE	Reactivo inventario	Área y tema del conocimiento matemático	Nivel de logro	Diferencias significativas por sexo	Autoconfianza mujeres	Autoconfianza hombres
31	6	Algebra Cálculo algebraico	Medio	0.001 a favor de los niños	30 Bien, 35 mal, 4 regular, 27 diferentes.	34 Bien, 33 mal, 3 regular, 26 diferentes.
63	7	Algebra Ecuaciones	Medio	0.001 a favor de los niños	30 Bien, 40 mal, 2 regular, 24 diferentes.	25 Bien, 43 mal, 1 regular, 27 diferentes.

Tabla 2 Concentrado de respuestas en autoconfianza para resolver los ítems de álgebra.

Geometría

Son tres los reactivos seleccionados de la prueba Enlace que evalúan distintos temas de geometría, el primero hace referencia a la *visualización espacial* (105), el segundo se relaciona con los *sólidos y sus propiedades* (141) y el tercero revisa los temas de *medición* y *cálculo geométrico* (143).

Contrario a lo reportado en diversas investigaciones en matemática educativa, respecto a las diferencias de género que favorecen a los hombres cuando se enfrentan a problemas de visualización espacial, (Ben-Chaim *et al*., 1985; González, 2003; Rivera, 2003) los resultados de la prueba Enlace 2008 encontraron diferencias del 0.001 a favor de las niñas en el reactivo 105 de dicha prueba.

Las palabras o frases asociadas al reactivo de visualización espacial, en el caso de las mujeres están fuertemente ligados al contexto del planteamiento del problema, es decir, ellas hacen alusión a los sujetos u objetos enunciados (21.87%) un porcentaje mayor (69.45%) de las evocaciones se relacionan con el deseo de resolver el problema, en las que las estudiantes emiten frases que indican procedimientos que deben realizar para resolver el ejercicio. También algunas de las estudiantes escribieron palabras o frases relacionadas a su incertidumbre sobre la resolución del problema (8.68%).

Por otro lado los hombres en los reactivos sobre visualización espacial emiten asociaciones relativas a sus reflexiones sobre cómo resolver el problema (19.79%), en un porcentaje menor hacen alusión al contexto del problema (12.5%), el resto de los estudiantes producen términos que muestran incertidumbre sobre la resolución del problema (47.91%), un grupo importante de estudiantes relacionó objetos de su vida cotidiana que al parecer fueron evocadas por la gráfica (19.2%).

Dentro de los aspectos cognitivo y afectivo las mujeres desarrollaron mejores habilidades para visualizar, analizar, interpretar y representar una función cuadrática, aún cuando la tarea no era resolver el ítem, es evidente que las evocaciones emitidas por las mujeres ponen al descubierto mayor confianza ante este ítem en específico. La autoconfianza fue mayor en las mujeres que en los hombres.

Reactivo ENLACE	Reactivo inventario	Área y tema del conocimiento matemático	Nivel de logro	Diferencias significativas por sexo	Autoconfianza mujeres	Autoconfianza hombres
105	4	Geometría, visualización Espacial	Alto	0.001 a favor de las niñas	36 Bien, 46 mal, 12 regular, 2 diferentes.	38 Bien, 54 mal, 4 regular,
141	10	Geometría, Sólidos Propiedades	Medio	0.001 a favor de los niños	38 Bien, 41 mal, 8 regular, 9 diferentes.	39 Bien, 47 mal, 3 regular, 7 diferentes.
143	13	Geometría, Medición y cálculo geométrico	Alto	0.001 a favor de los niños	34 Bien, 48 mal, 8 regular, 6 diferentes.	42 Bien, 47 mal, 3 regular, 4 diferentes.

Tabla 3 Concentrado de respuestas en autoconfianza para resolver los ítems de geometría

Conclusiones

La mayoría del estudiantado no manifestó una actitud negativa hacia las matemáticas, sino una actitud neutra. En general, el estudiantado de 3° de secundaria de escuela pública no tienen una actitud negativa hacia las matemáticas, aunque si una autoconfianza baja.

Las creencias en torno a las matemáticas que en general se manifestó entre el estudiantado tienen que ver con el imaginario colectivo que las considera difíciles, aburridas y complicadas. También fue evidente que buscan un compromiso por lo menos moral de promoverse en esta asignatura considerando que las matemáticas son importantes para su vida académica y cotidiana. Casi todo el estudiantado considera que las matemáticas son importantes, con una ligera diferencia a favor de las mujeres.

Por áreas específicas, se halló que la autoconfianza que los hombres manifestaron para resolver problemas aritméticos y algebraicos, es mayor que la de las mujeres. Estas últimas expresaron mayor autoconfianza que ellos para problemas relacionados con análisis de la información.

Por otro lado es preocupante la naturalización del lenguaje sexista en cualquier nivel educativo, en particular en este instrumento -ENLACE 2008- encontramos una fuerte carga de sexismo en la construcción de los contextos de la enunciación de los problemas y sólo nueve respuestas del estudiantado pudieron advertirlo, las mujeres expresaron palabras y frases en contra de la discriminación de la mujeres y la violencia simbólica que se presenta en los ítem, los chicos que observaron esta circunstancia fueron cuatro, dos hicieron referencia en el mismo tono que las mujeres, pero otros dos ejercieron más violencia al expresar burla y superioridad sobre las mujeres en sus respuestas.

Nota: Este término es acuñado por la Secretaria de Educación Pública en México como la capacidad que las y los estudiantes desarrollan y muestran a través de los exámenes ENLACE en el dominio de los conocimientos y habilidades contenidos en los planes y programas de estudio que se tienen en la educación básica en nuestro país.

Referencias bibliográficas

Abric, J.C. (1994). *Prácticas Sociales y Representaciones.* México: Coyoacán.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics 16(4),* 389-409.

Gómez-Chacón, I.M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. Recuperado 19 de agosto 2009 de http://www.emis.de/journals /BAMV/ conten/vol10/igomez.pdf.

Gómez-Chacón, I.M., Teynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Educación Matemática.* 24(3), 309-324.

González, R.M. (2003). Diferencias de Género en el Desempeño matemático. *Educación Matemática*. 15 (2), 129-161.

Rivera, M. (2003). *Diferencia de género en la visualización espacial: un estudio exploratorio con estudiantes de 2º de secundaria*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rodriguez, C. & Ursini, S. (2008). Social representation and gender in the teaching of mathematics with multimedia devices. *ICME 11, Topic Study Group 32: Gender and mathematics education*, Monterrey. México.

Rodríguez, C. (2009). *Diferencias de género en las representaciones sociales en la enseñanza de las Matemáticas con Enciclomedia*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES DE 5° DE BÁSICA PRIMARIA

Alberto Jesús Iriarte Pupo
I. E. Normal Superior de Sincelejo. Universidad de Sucre (Colombia)
albertoiriarte4@yahoo.es

Resumen. En este trabajo de investigación se muestra la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la habilidad de resolución en problemas matemáticos para estudiantes de básica primaria. El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental con cuatro grupos; la intervención se realizó en cuatro fases, poniendo en práctica la instrucción directa, el modelado metacognitivo, la práctica guiada y el aprendizaje cooperativo. Se realizaron comparaciones intragrupos e intergrupos estableciéndose diferencias estadísticas significativas, que corroboraron la efectividad de las estrategias aplicadas.

Palabras clave: metacognición, resolución de problemas, cuasi experimento

Abstract. In this research work we show the influence of implementing metacognitive teaching strategies focusing on the development of mathematical problem solving ability in students of primary age. The methodological design used was quasi-experimental with four groups; the intervention was conducted in four phases, implementing direct instruction, metacognitive modeling, guided practice and cooperative learning. Comparisons were performed intragroup and intergroup with statistically significant differences, which confirmed the effectiveness of strategies implemented.

Key words: metacognition, problem solving, quasi-experiment

En diferentes ocasiones se ha repetido que “hacer matemática es resolver problemas”, tal afirmación sería muy difícil negarla, teniendo en cuenta el enfoque que ha tomado esta disciplina en las últimas décadas. A nivel internacional, se le ha dado un nivel prioritario a la “resolución de problema” en la enseñanza de la matemática. Como puede verse en el informe Cockcroft (1982) en Gran Bretaña; una agenda para la acción y los estándares curriculares para la evaluación de los Estados Unidos que reporta el NTCM (1980,1989 y 2000). En Colombia se puede observar en los lineamientos curriculares (1998) y estándares nacionales del área de matemática (Vasco, 2006).

Sin embargo, diferentes estudios internacionales y nacionales, muestran un panorama poco alentador para los países latinoamericanos y en especial para Colombia en lo que respecta al desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos. Pruebas de tipo internacional, como son la prueba PISA (*Program for International Student Assessment*), las pruebas TIMMS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) y las SERCE *(Segundo Estudio Regional y Comparativo),* las cuales son aplicadas por diferentes organizaciones, consienten la resolución de problemas dentro de sus componentes evaluativos, dándole importancia al desarrollo de esta competencia.

La problemática encontrada en esta investigación no es ajena a la que pasan diferentes países, en la cual se identifica que los estudiantes de 5º del ciclo de básica primaria (9 a 12 años) presentan dificultades relacionadas a los conocimientos declarativos, actitudinales y procedimentales, que permiten el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos contextualizados. Los indicadores de este problema se observan en distintos espacios de resultados de pruebas estandarizadas, como las pruebas: PISA (2006), SERCE (2006) y TIMMS (2007) a nivel internacional y por otra parte las Pruebas Saber (ICFES, 2009) aplicadas en el ámbito Nacional.

Planteamiento del Problema

En el contexto nacional se tienen las pruebas Saber, las cuales son aplicadas a estudiantes de quinto grado; La prueba Saber de matemática, a nivel general fluctúa entre una puntuación de 0 a 100 puntos posibles, el departamento de Sucre (Colombia), obtuvo una media de 53.32, la cual se ubica por debajo del promedio nacional de 56.20; a su vez el municipio de Sincelejo puntuó 53.60 también por debajo de la media nacional. La Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo (IENSS) no es ajena a esta problemática, donde los estudiantes presentan una media en la competencia de resolución de problemas de 3.51 de 10 puntos posibles. A su vez, indicadores en las evaluaciones internas del primer período académico del año 2009 dan cuenta que el 62.81% de los estudiantes de quinto grado presentan dificultad al resolver correctamente problemas y situaciones matemáticas que requieren del conocimiento de los números naturales en diferentes contextos, del cálculo de áreas y volúmenes y de la organización e interpretación de datos.

Para identificar algunos de los factores que podían estar incidiendo en la anterior problemática se realizaron diferentes tipos de indagaciones, tales como: entrevistas no estructuradas con los docentes que orientan la disciplina en el grado quinto, informes de tipo investigativo con estudiantes de pregrado y un grupo focal realizado con docentes de la Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo (Sucre). Entre algunas de las conclusiones obtenidas con la aplicación de las técnicas anteriores se tienen: En las aulas de clase priman las estrategias basadas en la repetición, solución de operaciones de tipo algorítmico, donde el docente presenta un modelo para la solución de ejercicios de rutina, y les propone a los estudiantes solucionar ejercicios del mismo tipo, hasta que manejen las operaciones que aquí se realizan; por tanto, cuando a los estudiantes se les propone una situación que implique reflexión, comprensión, análisis y evaluación de los resultados, encuentran dificultades para resolverla; en los eventos de clase se enfatiza más en los conocimientos de tipo declarativo que en la reflexión de los conocimientos de tipo procedimental, es decir, la importancia estriba en los resultados más que en los procesos, se les exige a los alumnos que atiendan, memoricen, resuelvan problemas, apliquen estrategias nuevas, sin haberles enseñado en forma metódica, sistemática y persistente qué deben hacer y cómo deben hacer lo que de ellos se espera; Existen falencias en el cómo desarrollar habilidades de pensamiento que permitan potenciar las competencias matemáticas, así como el pensamiento lógico y matemático.

La mayor parte de los indicadores de la problemática apuntan a que las estrategias didácticas utilizadas por los docentes, no están dando los resultados que ellos esperan. Se observa que la tendencia está en prestar más atención a que el alumno memorice el concepto, así como el procedimiento y, en menor medida, a la apropiación e interpretación de sus posibilidades de utilización y las vías para aplicarlos, lo que constituye una importante limitación en la concepción del proceso de formación de las competencias matemáticas. Por tanto, se diseña entonces una forma diferente de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje, planteándose nuevas estrategias didácticas que se lleven a cabo en el aula de clases, que generen cambios significativos en la manera de abordar el aprendizaje de la matemática. Ahora bien, cabe entonces preguntarse ¿Cuál es la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 5º de la institución educativa Normal Superior de Sincelejo?

Marco teórico

La resolución de problemas se ha conceptualizado a través del tiempo por varios investigadores, donde podemos citar a Orton (1996), quien expresa que la resolución de problemas "se concibe como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva". En este sentido la resolución de problemas es concebida como creadora de un proceso mental, donde influyen habilidades, competencias, conocimientos tanto declarativos, procedimentales como actitudinales.

Para efectos de esta investigación la resolución de problemas se toma como una habilidad de pensamiento, definida como: proceso que implica la realización de una secuencia o serie de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de ser resuelta. Como proceso, esta habilidad se descompone en diferentes pasos o acciones progresivas que deben ser desarrolladas de manera integral. La resolución de problemas matemáticos, es una capacidad específica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática y que se configura en la personalidad del individuo al sistematizar, con determinada calidad y haciendo uso de la metacognición, acciones y conocimientos que participen en la resolución de estos problemas. (Llivina, 1999).

En diferentes modelos sobre resolución de problemas, modelo de Polya (1945), Schoenfeld (1985), Mason, Burton & Stacey (1989), Miguel de Guzmán (1991), Pifarré y Sanuy (2001), Mayer (2002), se tienen en cuenta ya sea de manera implícita o explícita el conocimiento y los procesos metacognitivos, por ello es importante considerar cómo se ha entendido la metacognición, retomando algunos aspectos que en este concepto se han definido.

Esta investigación centró su atención en una línea investigativa relacionada con la metacognición y la educación, la cual ha venido en aumento en las últimas décadas. Los estudios relacionados con la metacognición se remontan a los años setenta, con los trabajos de John H Flavell, de la Universidad de Stanford y han venido en las últimas décadas realizándose con mayor interés (Soto, 2002). La definición que le dio Flavell (1976) a este término afirma que se refiere al conocimiento que uno tiene sobre los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionando con ellos…La metacognición se refiere, entre otras cosas a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetivos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de una meta u objetivo concreto.

A partir de los trabajos de Flavell, otros autores han realizado sus propias definiciones de lo que para ellos es la metacognición y sus componentes, parece haber cierto acuerdo en cuanto a que la metacognición es un constructor tridimensional que abarca tres aspectos: la conciencia acerca de los procesos cognitivos, el monitoreo (supervisión, control y regulación) y la evaluación de dichos procesos.

Por otra parte, se define el proceso de enseñanza, desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, la cual se preocupa por hacer que los espacios y situaciones de aprendizaje, sean significativos y productivos en el aprendizaje y comprensión de la matemática es lo que le da mayor relevancia a la didáctica de la matemática no solo con los conocimientos declarativos y procedimentales dados desde la escuela, sino también fuera de ella. Si la didáctica de la matemática se asume desde la perspectiva de la ciencia cognitiva, los conceptos son el resultado del proceso cognitivo contrario que la cognición comienza por los conceptos (Freudhental, 1968), que es en cierta medida lo que sucede en nuestras instituciones educativas. Es decir, se debe iniciar el proceso de conocimiento desde espacios concretos, llevándolos de manera procesal a la estructuración de conceptos.

En la década de los cincuenta Hans Freudhental, incentivo un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática, en la cual manifestó su oposición a las corrientes pedagógicas -

didácticas y las "innovaciones" en la enseñanza vinculado a la matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado (la teoría de los objetivos operacionales; los test estructurados de evaluación; la investigación educativa estandarizada; la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo Piagetiano al aula; la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente; y la matemática "moderna" en la escuela). Proponiendo entonces las bases de lo que hoy se conoce como la corriente Educación Matemática Realista (EMR).

Este tipo de educación se basa en las siguientes ideas: pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudhental denomina matematización) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos; aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen solucionador de problemas.

Se define entonces que el enfoque de enseñanza parte de la problematización de los contextos "reales" y de esta forma los contenidos quedan relegados a un segundo plano, no por ello menos importantes, sino todo lo contrario constituyéndose para ellos un andamio que permite el aprendizaje significativo. Por eso, es importante diseñar ambientes de aprendizaje, donde las situaciones problemas sean planteadas y abordadas desde una matemática concreta, para luego pasar a una matematización en abstracto.

Esta investigación se basa en la perspectiva de las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo. Por consiguiente, las estrategias didácticas implementadas en el aula deberán estar dirigidas a potenciar el aprendizaje autónomo. Es decir, el aprender a aprender, entre algunas de estas estrategias, utilizadas para orientar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, utilizados en esta investigación, se encuentran:

1. Instrucción Directa: Tiene como objetivo proporcionar a los estudiantes indicadores sobre cómo utilizar correctamente el modelo de resolución de un problema, adoptado por el docente, o cualquier otro procedimiento. Las principales características de este modelo las resumen Winograd y Hare (1998; citado por Monereo, 2002) de la siguiente manera: descripción de las características diferenciales que definen un procedimiento correcto; valoración del propósito o beneficio potencial de su utilización; exposición de los diferentes pasos que se deben seguir para utilizar un procedimiento; análisis de las

situaciones o circunstancias en las que el procedimiento pueda ser más útil y determinación de los criterios que permitan decidir la adecuación o inadecuación de la utilización de un procedimiento en una situación concreta. La instrucción directa se utiliza para explicarles a los estudiantes los métodos heurísticos del cómo resolver problemas, se describen las diferentes cuestiones en las que hay que centrar la atención y ser cuidadosos a la hora de diferenciar entre los tipos de actividades concretas de la matematización.

2. Modelado Metacognitivo: Es un método instruccional que tiene como objetivo que los estudiantes adquieran las estrategias, encaminándose a la "explicitación" de procesos, más que poner el énfasis en los resultados y de esta manera ir adquiriendo un comportamiento similar al de los expertos solucionadores de problemas o de cualquier área del conocimiento. Se trata entonces de hacer público el proceso de pensamiento requerido para aplicar una estrategia. Cuando el profesor(a) está resolviendo un problema, va desarrollando pasos y el estudiante solo ve sus resultados. En el caso de la aplicación del modelado metacognitivo, el experto, además de resolver paso a paso, demostrando acciones, verbaliza las operaciones mentales que va considerando en cada uno de ellos, dando cuenta a su vez de las decisiones que va tomando en el proceso (Mateos, 2001).

3. Práctica Guiada: En esta fase del proceso se busca que los estudiantes practiquen el uso del procedimiento para resolver problemas, utilizando los procesos metacognitivos, aumentando progresivamente el nivel de complejidad de las situaciones planteadas, proponiendo la utilización de los procedimientos aprendidos para trabajar diferentes contenidos y situaciones diversas. El modelo que se destaca en esta fase es el utilizado por Pifarré (1998) en la guía propuesta por este autor "la hoja para pensar el problema", la cual se estructura como una guía para el estudiante que le sirve de apoyo en el momento en que se enfrenta a una situación de este tipo, el docente a su vez va proporcionándoles a los estudiantes la retroalimentación del proceso.

4. Aprendizaje Cooperativo: el objetivo principal de esta estrategia es el de promover la realización conjunta de diferentes tareas, tomando como base que la cooperación puede el aprendizaje personal y el grupal. Es importante que para trabajar esta estrategia se debe tener en cuentas aspectos como el conocimiento previo de los estudiantes respecto al contenido que se quiere trabajar, la diversidad del grupo o la planificación minuciosa de la tarea que tendrá que realizar el docente. El aprendizaje cooperativo promueve la colaboración y el trabajo grupal, ya que éste establece mejores relaciones

con los estudiantes, aprenden más, les agrada resolver problemas, se sienten más motivados, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas al estudiar, aprender y trabajar en grupos.

Las anteriores estrategias se articulan de manera transversal con procesos de planificación, control y evaluación, que se desarrollan en las diferentes fases del programa interventivo. Los procesos metacognitivos contemplados en la intervención coinciden con los tres estudios que tradicionalmente la psicología cognitiva ha descrito en las tareas cognitivas: planificación, automonitoreo, y comprobación (Pintrich, 2003).

Como lo plantea Tárraga (2008): La autoinstrucción implica decirse a sí mismo qué hacer antes y durante la resolución. Esta fase equivaldría a la fase previa de la mayoría de programas de enseñanza de estrategias de aprendizaje. Podría resumirse mediante la pregunta ¿Qué tengo que hacer?, y supondría el inicio del proceso de movilización de la estrategia de aprendizaje. Del mismo modo, el autocuestionamiento o automonitoreo implica preguntarse a sí mismo mientras se está implicado en una actividad, con el objetivo de mantenerse centrado en la tarea, regular el proceso y asegurarse de que se está haciendo correctamente. Esta fase se desarrolla mientras el sujeto está inmerso en la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo estoy haciendo bien?; ¿estoy siguiendo mi plan? Finalmente, la comprobación requiere que el solucionador del problema se asegure de que todo se ha hecho correctamente a lo largo del proceso de solución del problema. Equivaldría a la fase posterior a la realización de la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo he hecho bien?

Estas preguntas ¿qué tengo que hacer?, ¿lo estoy haciendo bien? y ¿lo he hecho bien? estarán inmersas en todo momento de la intervención del programa, el docente reiterara constantemente los procesos enmarcados en ellas, se pueden realizar ayudas nemotécnicas u otras, teniéndolas en cuenta el tiempo que sea necesario, de esta manera se contribuye al mejoramiento de los procesos metacognitivos del estudiante.

Método

El trabajo de campo se realizó con estudiantes de la institución Educativa Normal Superior de Sincelejo (Sucre – Colombia), se trabajó con una muestra de 135 estudiantes. El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental con cuatro grupos, se tomaron dos grupos experimentales, a ambos se les intervino con la estrategia didáctica con enfoque metacognitivo, a uno de ellos se le aplicó pretest y postest, al otro sólo el postest. Se tomaron a su vez dos grupos de control, los cuales no fueron intervenidos con la estrategia, sin embargo, a uno de ellos se le aplicó el pretest y postest, al otro solo el postest, teniéndose como variable independiente las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo (Tárraga, 2008) y como variable dependiente el desarrollo de la habilidad para resolver problemas matemáticos, medida mediante un test aplicado a los estudiantes que contempla 10 situaciones problemas, tomadas de los cuestionarios utilizados por el ICFES (Instituto Colombiano Para el Fomento de la Educación Superior) en las pruebas aplicadas en los años 2002 y 2005 de la prueba Saber, que se realizó a estudiantes de quinto grado de básica primaria en Colombia.

La prueba estuvo caracterizada por el planteamiento de situaciones basadas en la competencia específica de resolución de problemas y en sus componentes de la siguiente manera: tres problemas pertenecientes al componente aleatorio, tres problemas del componente geométrico – métrico y cuatro problemas del componente numérico – variacional. El test fue sometido a dos pilotajes, y a la valoración de expertos, para que juzgaran la relación existente entre los componentes que se estaban evaluando. Así mismo, el alfa de Cronbach dio como resultado, en el segundo pilotaje, un valor de 0,7344, presentando una confiabilidad moderada en el conjunto de sus ítems. Entre los indicadores descritos en cada componente se tienen, para el componente numérico – variacional: Interpreta y compara distintas representaciones de un mismo número; representa relaciones numéricas con ecuaciones e inecuaciones aritméticas sencillas; resuelve problemas contextualizados de tipos aditivos y multiplicativos; resuelve problemas de proporcionalidad en contextos multiplicativos. Para el componente geométrico – métrico: compara figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades; diferencia atributos medibles tales como: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa; resuelve problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes. Por último. En el componente aleatorio: interpreta datos en tablas, graficas de barras y de líneas; conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos; resuelve situaciones problema interpretando datos en forma organizada y aplicando la aleatorización.

Para comprobar que los grupos eran inicialmente equiparables en una serie de variables de control se ha puesto a prueba la igualdad por medio de pruebas no paramétricas. Entre algunas de estas pruebas utilizadas para la comparación de variables se tienen la de Kruskal-Wallis y la de Mann-Whitney. La prueba de Kruskal-Wallis corroboró que la edad en los cuatro grupos no presenta diferencias estadísticamente significativas ($\chi 2= 1.864$, $p= 0.601$); A su vez, la prueba de Kruskal-Wallis corroboró que el sexo en los cuatro grupos no presenta diferencias estadísticamente significativas ($\chi 2= 0.775$, $p= 0.856$); También el resultado del pretest, prueba en los dos primeros grupos la equivalencia inicial, con respecto a la resolución de problemas matemáticos. Se realizó la prueba de Mann-Whitney, en la que se corroboró que en la puntuación obtenida en el pretest no existen diferencias estadísticamente significativas ($Z= 0.772$, $p= 0.440$).

En el programa de intervención, que tuvo una duración de tres meses, se establecieron las estrategias cognitivas que se utilizan para resolver problemas, que según el modelo de Pifarré (1998) son: leer el problema, planificar una estrategia para resolver el problema, organizar datos, resolver el problema y evaluar el resultado del problema. Luego se realizan cuatro fases de intervención; la primera fase denominada de Instrucción directa (Pozo, Monereo y Castelló; 2001), se presentan las estrategias cognitivas para resolver problemas utilizadas en este programa, se les explica a los estudiantes los métodos heurísticos de la resolución de problemas, se pone principal énfasis en la guía de la autoinstrucción, el autocuestionamiento y la comprobación como características principales del proceso metacognitivo.

La segunda fase el Modelado Metacognitivo, se divide en tres momentos. El primero donde el docente modela cómo resolver problemas matemáticos utilizando los procesos metacognitivos de planeación, control y evaluación. En segundo momento el docente resuelve los problemas junto con los estudiantes guiando el proceso por medio de preguntas orientadoras y en el último momento el estudiante adquiere el protagonismo y resuelve él solo los problemas planteados.

La tercera fase denominada Práctica Guiada, se les proporciona a los estudiantes la guía necesaria para ir alcanzando progresivamente un mayor nivel de autonomía, el docente explica y modela la utilización de la Hoja Guía de Pifarré (1998), luego los estudiantes la utilizan para resolver problemas, ya sea en grupos o individuales.

En la fase final se pone en marcha el aprendizaje cooperativo, donde el docente conforma grupos de manera heterogénea, es decir, un estudiante con alto desempeño, acompaña estudiantes con desempeños medios y bajos, esto con el fin de establecer las relaciones entre pares y potenciar el aprendizaje. Cada miembro del grupo cumple con un rol y una responsabilidad, la cual deberá ser cumplida para beneficio de todo el equipo.

Para cada una de las fases anteriores se crearon ambientes de aprendizaje ubicados dentro de la matemática realista (Freudenthal, 1968), con situaciones de aprendizaje de las cuales se diseñaron tres talleres que permitían poner en práctica lo aprendido en cada estrategia, mientras que en cada evento de clases se reforzaban la utilización de las estrategias de tipo metacognitivo.

Resultados y conclusiones

Antes de iniciar la puesta en marcha del programa interventivo se aplicó la prueba de Mann-Whitney, en la que se corroboró que la puntuación obtenida en el pretest no existen diferencias estadísticamente significativas ($Z= 0.772$, $p= 0.440$). lo que significa que estos grupos son equivalentes en cuanto al desarrollo de la competencia de resolución de problemas matemáticos contextualizados; se establece que los estudiantes presentan dificultades en cuanto a los siguientes indicadores: interpretación y comparación de distintas representaciones de un mismo número (como fracción, como decimal o como natural); resolver problemas en contexto de tipo aditivo y multiplicativo; resolver problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes; interpretar datos en tablas, gráficos de barra, pictogramas y de líneas; resolver problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando la aleatorización.

Seguidamente de la aplicación de la intervención basada en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, se realizan los análisis de los resultados obtenidos en el pretest. Para comprobar que el grupo control no presenta diferencias estadísticamente significativas se realizó una prueba de signos bilateral ($\rho =$ 0.648), corroborando que no hubo diferencias entre la aplicación de la prueba diagnóstica y el postest, por lo tanto los estudiantes siguen presentando las mismas dificultades. Por otra parte, el grupo experimental si presentó diferencias estadísticamente significativas al 5% de significancia, se realizó la misma prueba de los signos bilateral (Z=-2.157, $\rho =$ 0.031), simbolizando que el tratamiento presenta un efecto positivo en cuanto al desarrollo de habilidades para resolver problemas matemáticos. Posteriormente se realiza un análisis intergrupal utilizando la prueba U de Mann-Whitney, para el grupo A experimental y el grupo B control, donde los resultados demuestran la existencia de diferencias estadísticamente significativas (Z= -2.457, $\rho =$ 0.014), como $\rho < 0.05$ se acepta que el programa si tuvo incidencia en el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos contextualizados. A su vez, se contrasta el grupo D con el grupo B para descartar los efectos temporales que pueden haber ocurrido en el tiempo que se realizó la intervención. La prueba U de Mann-Whitney no reporta diferencias estadísticamente significativas (Z=-0.482, $\rho =$ 0.630) entre los resultados del postest de los dos grupos controles, lo que descarta el efecto de temporalización entre los grupos.

Con base en lo anterior, entre las conclusiones derivadas de la investigación se tienen: la preparación de los docentes en la aplicación en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, contribuye al desarrollo de competencias metacognitivas en el aula, aportado al aprendizaje autónomo de los estudiantes; la resolución de problemas matemáticos, en sus funciones de medio y fin del aprendizaje, constituye una actividad compleja e integral que requiere de la formación de modos de actuación, métodos de solución y procedimientos específicos, elementos constitutivos de la competencia, que incluyen a su vez conocimientos tanto cognitivos como metacognitivos; el manejo de estrategias metacognitivas caracterizada por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo, hace parte fundamental en el proceso de resolución de problemas; el conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos que articulen estrategias cognitivas y metacognitivas y el contexto, permite que el estudiante desarrolle la competencia de resolver problemas desde la matematización de sus realidades; los aportes de Freudhental sobre la contextualización de los problemas son elementos significativos para el desarrollo de la competencia en resolución de problemas; a su vez se corrobora que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva; la aplicación sistemática de un modelo didáctico, inspirado en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje, operacionalizado mediante las fases de instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo, influye de manera positiva en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados de los estudiantes.

Se plantea como sugerencia para futuras investigaciones la comparación de diferentes variaciones de este mismo entrenamiento, es decir, poner en práctica otras estrategias didácticas con este mismo enfoque, que les permita a los estudiantes ir reforzando el aprendizaje autónomo, y el desarrollo de habilidades de tipo metacognitivo, las cuales contribuyan a su formación como aprendices reflexivos y conscientes de sus potencialidades, pero también de sus deficiencias.

Referencias bibliográficas

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics Counts. London: HMSO.

De Guzman, M. (1991). Para pensar mejor (To think better). España: Labor.

Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS). (2007). Recuperado el 20 de septiembre de 2009 de http://hydra.icfes.gov.co/timss/docs/Resultados2007_ Resumen Ejecutivo_Ago2009.pdf

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspecets of problem solving. En Resnick, L. (Ed.). The nature of intelligence. Hillsdale: LEA.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics* 1(1), 3 – 8

ICFES. (2009). Boletín No. 93. Bogotá 13 de Noviembre de 2009. Recuperado el 20 de Abril del 2010 de http://w4.icfes.gov.co/ClasificacionPlanteles/edit.php?CodColegio= 077347 &KT_back=1.

LLECE- UNESCO. (2006). SERCE. Los aprendizajes de los estudiantes en América Latina y el Caribe.Santiago de Chile.

Llivina, M.J. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis de doctorado no publicada, La Habana. Cuba

Mason, J; Burton, L. & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Editorial Labor.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación.* Serie Psicología Cognitiva y Educación. Argentina: Aique.

Mayer, R.E. (2002). *Psicología de la educación. El aprendizaje en las áreas de conocimiento.* Madrid: Prentice Hall.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá. Colombia.

Monereo, F. (2002). *Estrategias de aprendizaje*. Madrid: A. Machados libros.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Washington D.C: NCTM.

OCDE. (2006). PISA 2006 Marco de la evaluación. Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos: OCDE

Orton A. (1.996). Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Madrid: Ediciones Morata.

Pifarré, M. (1998). *Aprèn estratègies per resoldre problemas matemàtics.* Lleida: Pagès editors

Pifarré, Manoli y Sanuy, Jaime. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias* 19(2), 297–308

Pozo, J. I; Monereo, C y Castelló, M.. (2001). El uso estratégico del conocimiento. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesí (Comps), *Psicología de la Educación Escolar*. Madrid: Alianza.

Polya, G. (1945). How to Solve It. New York: Doubleday

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. California: Academic Press.

Soto, C. (2002). *Metacognición, cambio conceptual y enseñanza de las ciencias*. Colombia: Editorial Magisterio.

Tárraga, R. (2008). *¡Resuélvelo! Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Valencia. España.

Vasco, C. E. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Colombia: Imprenta Nacional.

LECTOMATEMÁTICAS: PROBLEMAS DE TRADUCCIÓN

Ricardo Ulloa Azpeitia, Elena Nesterova, Alexander Yakhno
Universidad de Guadalajara (México)
ricardo.ulloa@cucei.udg.mx, elena.nesterova@cucei.udg.mx, alexander.yakhno@cucei.udg.mx

Resumen. Los resultados que se reportan, se sustentan en las observaciones realizadas en investigaciones sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes de matemáticas de los diferentes niveles en el proceso de modelaje matemático. Con el estudio se han buscado explicaciones del origen de los problemas, así como identificar la teoría que sustente la integración de opciones para ayudar a que los alumnos superen los obstáculos de aprendizaje identificados. Se describen de manera general, los estudios realizados, así como algunas de las conclusiones principales que se generaron a partir de los datos recopilados, que ponen de manifiesto la importancia del dominio y comprensión del lenguaje cotidiano, así como de los procesos de traducción al lenguaje matemático.

Palabras clave: lectomatemáticas, lenguaje matemático, textos dinámicos

Abstract. Results reported here are based on observations from several studies regarding difficulties faced by mathematics students inscribed in different levels, when in the process of mathematics modeling. Explaining the source of obstacles was a goal of this study, as well as identifying theory to support the building of alternatives to help students to overcome learning obstacles identified. The several phases of research are described in general way, and are presented some of the main conclusions, generated from experimental data, and those denote the importance of competence and comprehension of everyday language, and also of translating to mathematics language.

Key words: lectomathematics, mathematics language, dynamic texts

Introducción

Lectomatemáticas es un término acuñado para describir una línea de investigación que incide sobre los problemas que origina la traducción de lenguaje materno a matemático, el paso al simbólico y viceversa, así como los procesos de modelaje matemático.

En ocasiones, lo obvio es a veces lo más descuidado y el uso del lenguaje cotidiano, tanto por profesores, como por alumnos, genera muchas más complicaciones de las que percibe o alcanza a distinguir un profesor. Si un alumno no entiende lo que se le pide, es posible que responda cosas grandes y maravillosas, pero no lo que es necesario para que avance en el aprendizaje o desarrolle las competencias deseadas.

El profesor puede hablar en un idioma que refleja su experiencia y formación previa, que seguramente tiene diferencias con el que emplean sus alumnos, quienes deberán invertir cierta energía en decodificar lo que escuchan o leen. Tal inversión de energía los coloca en posición de desventaja respecto a aquellos alumnos que "hablan" el mismo "idioma" que el profesor. (Desde luego que éste no es el único factor que influye en el aprendizaje pero es crucial por el efecto de conexión que se requiere entre el profesor y el alumno).

Ante tal problema de comunicación, es difícil que los estudiantes de matemáticas desarrollen lo que solicita su profesor, situación que se exacerba cuando se asignan a los estudiantes problemas desprovistos de contexto. Quizá el ambiente escolar no sea el mejor para la construcción de significados matemáticos, pero surge la cuestión de cómo explicar que algunos estudiantes si tengan éxito.

A despecho de múltiples intentos y de experimentar variadas propuestas didácticas, el aprendizaje de las matemáticas continúa como un problema vigente probablemente en cualquier país.

Con estudios realizados en el contexto de las actividades de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM) de la Universidad de Guadajara (Márquez, 1998; Ulloa, 2004; Martínez, 2005; Figueroa, 2005; Camelo, 2005; Lomelí, 2005; Montalvo, 2006; Torfer, 2009; Tavares, 2009), se han identificado elementos lingüísticos que representan obstáculos de aprendizaje, no cabalmente distinguidos por los profesores, que en consecuencia, no toman providencias para evitarlos. Desafortunadamente eso ocurre en todos los niveles, aún con alumnos de posgrado, que por lo general, son profesores en ejercicio.

La reflexión sobre las diferentes observaciones realizadas, impele a considerar que el nivel de dominio del lenguaje materno en el proceso de traducción al lenguaje especializado de las matemáticas y viceversa, es esencial para los resultados de aprendizaje de la materia. Esta importancia puede observarse aún en obras clásicas (Vigotsky, 1995) así como reiterados en trabajos realizados en el contexto regional (Martínez, 2005; Lomelí, 2005; Figueroa, 2005; Ulloa, Nesterova y Pantoja, 2009; Torfer y Ulloa, 2009; Tavares y Ulloa, 2009).

En la búsqueda de opciones para propiciar mejores resultados de aprendizaje, como primera fase se ha diagnosticado la calidad de interpretación de conceptos matemáticos que ha resultado pobre o bien, meramente superficial, especialmente con los estudiantes de bajo rendimiento, pues se distingue que pueden repetir las definiciones, pero no explicar su significado, ni el sentido de emplearlos en diferentes ámbitos, particularmente cuando se presentan en el contexto de problemas expresados en palabras.

De lo anterior se denota que los profesores de matemáticas suelen tener problemas para redactar. Es notable la mejoría al comparar los escritos de profesores alumnos de la MEM, de cuando iniciaron el propedéutico, a cuando egresan del posgrado, aunque no se puede presumir de haber resuelto el problema.

Se ha estudiado el proceso de traducción en diferentes niveles educativos y áreas de la matemática: álgebra, geometría euclideana, probabilidad y estadística, y cálculo diferencial. Es seguro que existen otros factores que afectan el aprendizaje de la materia, pero es evidente que si no se supera el problema de la traducción, los resultados seguirán pobres, pues si los estudiantes no entienden lo que se les pide, no podrán obtener los niveles deseados de aprendizaje.

Se espera germine con el trabajo de investigación, la creación de una metáfora del enfoque dirigido a la lectocomprensión, para emplearla con estudiantes de niveles superiores, con la intención de ayudarles a superar obstáculos probablemente generados por esos problemas de comprensión que se incubaron a lo largo de los niveles previos y que les impiden modelar el escenario o contexto de un problema y por ende, llegar a la solución de problemas planteados en palabras.

Entre los elementos que han sido comprobados en los diferentes sitios que se ha investigado y que la literatura corrobora, se cuenta la importancia del contexto. Las ideas que giran alrededor de la línea denominada aprendizaje situado, parecen tener bastante importancia para explicar las dificultades que se observan en los procesos de traducción entre el lenguaje materno y el lenguaje matemático, así como un sustento teórico para encontrar alternativas que permitan mejorar la situación.

Por otro lado, si se considera que las matemáticas son un lenguaje (Pimm, 1987; Rojas, 2004) en el que las ideas deben expresarse con absoluta precisión, entonces pueden emplearse técnicas y teorías de enseñanza que se han utilizado para aprender un segundo idioma.

En tal línea, se experimentó usar un tratamiento semejante al empleado para la enseñanza del inglés en una universidad particular (González, 2006), con resultados menos buenos que los esperados, aunque las conclusiones sugieren que sería pertinente profundizar en la investigación de ese enfoque.

En el mismo sentido, recientemente se experimentó como alternativa proporcionar entrenamiento a estudiantes de bachillerato para mejorar su lectocomprensión del idioma materno y el particular de las matemáticas, para lo cual se instrumentó una secuencia didáctica en la que se impulsó el empleo de diccionarios, aunque también hicieron uso de herramientas de Internet.

Si bien los resultados de aprendizaje de los sujetos del grupo experimental fueron mejores que los del grupo de control, no se registró diferencia estadísticamente significativa, posiblemente debido a la presencia de imponderables en el trabajo que obstaculizaron el experimento, pero el seguimiento hecho a los primeros parece mostrar bondades, lo que sugiere continuar esa línea de trabajo.

La insistencia se justifica, parafraseando el trabajo de Duval, en razón de que parece lógico suponer que los estudiantes que se vuelven capaces de comprender diferentes representaciones de un problema o de algún concepto y logran traducir las implicaciones de una a otra representación, se apropian de herramientas que tienen un carácter flexible para aplicarlas a otros problemas y potencialmente a otros contextos, lo que permitiría incidir sobre el serio problema de la transferencia de conocimientos.

Enseguida se describen algunas de las metodologías que fueron empleadas en los diferentes estudios, así como algunos de los resultados.

Estudio correlacional

Como objetivo de una primera fase se determinó la relación entre los niveles de lectocomprensión y los resultados alcanzados por los estudiantes en las correspondientes materias de Matemáticas. Aunque de antemano se percibía la existencia de una fuerte correlación, se buscó corroborar. Se realizó la prueba en distintos niveles y contextos: Guadalajara, Tepic, S.L.P., Cedral, S.L.P.; instituciones públicas y privadas; bachillerato, licenciatura y posgrado. En todos los casos el coeficiente de Pearson fue positivo, con rango de 0.3 a 0.82 y promedio de 0.68.

Se observó que los alumnos con mejor nivel en matemáticas, aún cuando confunden los términos propios del lenguaje matemático, emplean las herramientas del lenguaje materno para obtener la solución de un problema, a pesar de que no puedan construir de manera estrictamente algebraica la solución.

En cambio los alumnos de nivel bajo de resultados en la evaluación de conocimientos matemáticos dado que no comprenden los términos involucrados en los problemas matemáticos, no pueden obtener la solución de problemas planteados en palabras. Esto hace patente la necesidad de insistir en la formación de estructuras lingüísticas, como prerrequisito para aprender matemáticas.

Estudio clínico

En otra fase se buscó identificar componentes lectomatemáticos problemáticos. A partir de los resultados del estudio correlacional fueron seleccionados al azar, representantes de cada uno de tres estratos definidos por las calificaciones obtenidas en el correspondiente curso de matemáticas. A los miembros de las muestras se les presentó un problema en palabras y se les pidió que leyeran en voz alta. Con cada uno de ellos se desarrolló un diálogo en torno a la resolución del problema, a fin de profundizar en las razones que les guiaban a realizar los diferentes pasos dirigidos al modelaje y la solución del problema.

A efectos de recuperar los aspectos vertidos en las sesiones, los diálogos fueron videograbados. Posteriormente se hizo un análisis de la grabación y se identificaron los obstáculos lectomatemáticos que afectan el aprendizaje y el desempeño matemático. Entre otros se tienen los siguientes:

- La significación personal que los alumnos dan a los signos, símbolos o expresiones matemáticas es cercana a lo cotidiano, es intuitiva, diversa y discordante de los conceptos matemáticos.
- Existe distorsión del proceso de aprendizaje y de desempeño matemáticos, a consecuencia de las nociones construidas sobre los significados y creencias personales, así como de las traducciones incorrectas entre las diferentes representaciones matemáticas, lo cual evita la construcción de los conceptos matemáticos.
- La incomunicación entre el maestro y el alumno no obstante que se usen las mismas palabras y que el alumno incorpore a su léxico palabras de uso común en las matemáticas. Curiosamente, en los diferentes estudios, casi todos los alumnos rechazaron que les disguste la materia.
- Se puso de manifiesto la existencia de términos problemáticos en la comprensión de los problemas matemáticos, especialmente cuando son expresados en palabras, ya que implican noesis y por ende semiosis (no hay noesis sin semiosis, Duval, 1995; noesis, actos cognoscitivos como la aprehensión cultural, la discriminación de una diferencia o la comparación de una inferencia. Semiosis: Proceso de construcción de signos y negociación de significado).

Se observó que los entrevistados realizan interpretaciones diferentes para un mismo signo lingüístico, i.e., que la concepción aceptada por la comunidad matemática no se ha asimilado, que los alumnos no han interiorizado su significado de manera congruente con el prevalente, aunque pueden estar presentes en su vocabulario las mismas palabras que designan los símbolos. La interpretación que hacen de los textos matemáticos es intuitiva y personal, más que sistemática y determinista.

Los signos o símbolos lectomatemáticos son empleados por los estudiantes únicamente en su función indicativa como señales, pero no en términos de su función significativa, aunque suelen tener éxito cuando los utilizan de manera mecánica, como en los problemas donde meramente deben aplicar un algoritmo. Esto representa un enorme obstáculo epistemológico para el aprendizaje de las matemáticas.

Observaciones con profesores

Por razones obvias, el número de sujetos entrevistados fue pequeño. Si bien, originalmente no se tenía planeado incidir sobre el efecto que produce el empleo del lenguaje por parte de los profesores, ha resultado patente su influencia en la propia construcción de significados por parte de los alumnos.

De las observaciones realizadas durante entrevistas clínicas con docentes, se puede concluir que el lenguaje que emplean, en buena parte no es comprendido por los estudiantes, lo que es equiparable a un diálogo entre personas, una de las cuales entiende un poco del idioma que usa la otra, pero por más esfuerzo que haga, al no contar con los referentes adecuados, apenas se forma una idea vaga de lo que su interlocutor expresa.

Lo anterior induce a ampliar el trabajo y abrir una línea para estudiar de manera particular el uso del lenguaje por parte de los profesores de matemáticas, lo que podría constituir una fuente importante que contribuye a la presencia del problema de aprendizaje.

Acciones a futuro

Con estas investigaciones se ha mostrado la necesidad de buscar alternativas que permitan incidir sobre el problema y se distingue que necesariamente deberán ser mediadas por el uso de la tecnología. Una opción que se instrumenta actualmente, denominada Textos Dinámicos (TD), desarrollados como hipertextos, tiene como objetivo diseñar, desarrollar y experimentar el uso de Objetos Para Aprendizaje, vinculados al diseño instruccional de cursos, para los cuales se han identificado conceptos estratégicos.

De cierta forma se pretende incidir sobre la zona de desarrollo próximo de los estudiantes de manera que la interacción con los TD's permita ampliarla y facilitar la apropiación de los conceptos que han sido detectados como complicados para los estudiantes. A fin de lograr la necesaria generalidad y abstracción de los conocimientos, se piensa recurrir a mostrarlos en más de un contexto, lo que sugiere la idea de diferentes tipos de TD's, en consideración de que el conocimiento es situado.

Tales elementos son vinculados mediante ligas a textos definidos en cuatro niveles, que les permitan una cierta construcción de los conocimientos.

Primer nivel. Se dispone un contexto para propiciar al estudiante construir significados, es decir propiciar el proceso de Semiosis: entendido como la construcción de signos y la negociación de significado. Por ejemplo, la inclusión de problemas y su solución, que propicien un proceso semejante a como se dio el desarrollo histórico de los contenidos matemáticos, pasar por una etapa de álgebra sincopada o prominentemente verbal, antes de llegar a la etapa simbólica, lo que de alguna manera extrapola las ideas de representación enactiva, icónica y simbólica propuestas por Bruner (1978).

Segundo nivel. Se pide al alumno una definición propia del concepto, luego se proporcionan una o más definiciones, como las usuales de los textos matemáticos y se le pide compararlas con la que dio.

*Tercer nivel***.** Se presenta una aplicación o bien, el contexto de un problema en el que se denota la presencia del concepto en estudio.

Cuarto nivel. Se plantea la solución de un problema, del tipo de los empleados en el enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas y la estrategia de enseñanza recíproca con la intención de incidir sobre la construcción de conceptos y sus aplicaciones en el modelado de situaciones propuestas.

Referencias bibliográficas

Bruner, J. S. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea.

Camelo, J. O. (2005). *Problemas en el desarrollo de habilidades lectomatemáticas de los alumnos de primer ingreso al nivel superior de la UA de Nayarit.* Tesis de maestría no publicada,Universidad de Guadalajara. México.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine- registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Figueroa, R. G. (2005). *Influencia de las habilidades de lecto-comprensión en el aprendizaje de las Matemáticas en el nivel medio superior: estudio correlacional y clínico*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

González, C. (2006). *Experimentación de opciones de enseñanza en álgebra basadas en las técnicas de enseñanza de un segundo idioma*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Lomelí, M. G. (2005). *Estructuras lingüísticas y las dificultades que originan en el Proceso de modelaje Matemático*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Márquez, M. (1998). *Influencia de los procesos de modelaje matemático en la enseñanza aprendizaje de las asignaturas de hidráulica*. Tesis no publicada para obtener el grado de maestría en Ciencias en la Enseñanza de las Matemáticas. U. de Guadalajara.

Martínez, I. (2005). *Estudio clínico para la identificación de problemas en el aprendizaje de las matemáticas determinados por deficiencias de lectocomprensión, en bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Montalvo, R. (2006). *Lectomatemática y su vinculación a los problemas de aprendizaje de la estadística influidos por deficiencias de lectocomprensión: estudios correlacional y clínico*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Pimm, D. (1987). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata, S. A.

Rojas, E. D. (2004). Las Matemáticas Como Lenguaje de Comunicación y Expresión de Conocimiento: Un Principio Socio-Constructivista. *AMCE Santiago,* Chile.

Tavares, L. (2010). *Alternativa didáctica enfocada a lectocomprensión para problemas en palabras que implican el planteamiento de ecuaciones lineales.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Guadalajara. México.

Tavares, L. y Ulloa, R. (2009). Alternativa didáctica enfocada a lectocomprensión para problemas en palabras que implican el planteamiento de ecuaciones lineales. En *Memorias de Escuela de Invierno*, CIMATES, Cd. Madero.

Torfer, C. y Ulloa, R. (2009). Obstáculos de lectomatemáticas en problemas de cálculo diferencial. En *Memorias de Escuela de Invierno*, CIMATES, Cd. Madero.

Ulloa, R. (2004). Lectomátematicas y lectoescritura, influencia en el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del II Seminario Nacional sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, vía la computadora*. I.T. de Cd. Guzmán.

Ulloa, R., Nesterova, E. y Pantoja, R. (2009). Los profesores como fuente de obstáculos en el modelaje matemático. En *Memorias del VI Seminario Nacional sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas Vía Computadora*. Cd. Guzmán, Jalisco.

Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Recuperado el 30 de octubre de 2008 de http://www. psicojack.com/blog/2007/07/libro-vigotsky-lev-s-pensamiento-y.html http://platea.pntic.mec. es/~jescuder/algebra1.htm

EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA COMO UN PROCESO COMPLEJO, SOBRE UN SISTEMA AUTOPOIÉTICO Y ADAPTATIVO

Herbert Mendía A
CIMACIEN (Guatemala)
omendia@cimacien.org.gt, omendia@itelgua.com

Resumen. La variedad de respuestas a preguntas en exámenes de respuesta abierta sugieren que los estudiantes parten y organizan la experiencia matemática de forma autopoiética. El reconocimiento de bloques constructivos y de las relaciones entre estos, de manera autónoma, guían la manera de enfrentar los problemas. La interacción con el ambiente, sus pares y profesores provee realimentación para su adaptación (aprendizaje), aunque puede ser incorrecta. La falta de una adecuada realimentación y de maneras de verificación de las acciones que ejecutan, llevan al incorrecto aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: bloques constructivos, adaptación, autopoiética, partición

Abstract. The variety of responses to questions in test of opened answers, suggest students parse and organize the mathematical experience so autopoietic. Recognition of building blocks and establishment of relationships among them, in an autonomous way, guide the way to confront that problems. Interaction with environment, their peer and teachers, give necessary feedback to adaptation (learning), even though it may be incorrect. The lack of an adequate feedback and validation means for their actions, result in wrong mathematical learning.

Key words: building blocks, adaptation, autopoietic, parse

Entre los años 1999 y 2001 algunos grupos de estudiantes fueron sometidos a exámenes de admisión, en el área de matemática, usando pruebas de respuesta abierta con el propósito de encontrar distractores para las pruebas de respuesta cerrada de uso masivo. Los evaluados, recién graduados de diversificado de diferentes establecimientos educativos, con edades cercanas a los 18 años, en su mayoría no lo superaron. Lo que llamó la atención fue la gran diversidad de sus respuestas, y surgieron las preguntas: ¿Porqué tantas respuestas diferentes a una misma pregunta? ¿Porqué hay respuestas tan "inesperadas"? ¿Las respuestas revelarán de algún modo los procesos utilizados en su resolución?

Fue interesante listar todas las respuestas obtenidas, contando cuántas veces se repite la misma. La primera impresión apuntaba a que las respuestas eran construidas al azar, sin razones que las originaran. Un estudio más amplio, suponiendo que las experiencias, ideas, conceptos, imágenes, creencias, reglas, relaciones entre todas éstas y lo demás que se considera forma parte de la red de conocimientos de un ser humano, y que se considera constituye un sistema (que llamaremos RPP); conjuntamente con los conceptos de Sistema Adaptativo Complejo (CAS por sus siglas en inglés) de Holland (1995), de organización Autopoiética de Maturana y Varela (1996) y de Complejidad de Robert Rosen (2009), sugiere que no es este el caso. Con lo anterior, la aspiración de este escrito es proporcionar algunas ideas para explicar esa diversidad.

Holland (1995) ejemplifica varios sistemas complejos (CAS), tales como una ciudad, el sistema inmunológico humano, el sistema nervioso central, un ecosistema. Tales sistemas mantienen su coherencia en el tiempo e indica que a pesar que entre ellos difirieren en los detalles, todos son caracterizados por 4 propiedades: agrupación, no linealidad, flujo y diversidad, y 3 mecanismos: bloques constructivos (building blocks), modelos internos y etiquetado; otra de sus características es la gran cantidad de elementos interactuantes que los constituyen. Además introduce el concepto de "agente" que no es más que alguno de los elementos o grupos de elementos del CAS que interactúan entre sí y su entorno, e indica que "esos agentes se adaptan cambiando sus reglas conforme la experiencia se acumula"(p.10). Adaptación y experiencia acumulada son otras maneras de referirse al aprendizaje.

Maturana y Varela (1996) caracterizan la organización de los sistemas vivos como "[aquellos] que se producen continuamente a sí mismos" y a la organización que los define la llaman "organización autopoiética", y que sus "componentes ...... están dinámicamente relacionados en una continua red de interacciones" (p.25), ejemplificándola con la célula, que cuando "interactúa con una molécula X incorporándola a sus procesos, lo que ocurre a consecuencia de dicha interacción no está determinado por las propiedades de la molécula X, sino en la manera cómo tal molécula es ¨vista¨ o tomada por la célula al incorporarla en su dinámica autopoiética" (p.32). Añaden que "los cambios que resultan de la interacción entre ser vivo y medio son desencadenados por el agente perturbante y *determinados por la estructura de lo perturbado*", es decir, esos sistemas son auto organizados y las estructuras internas, formadas con elementos incorporados, son determinadas por sí mismos.

La manera en que el agente perturbante es "visto" por el sistema, puede tomarse como lo que significa para él, tomando lo que dice Eco (1972): "significado es solamente la *disposición del aparato para responder de cierta manera al significante*" (p.51), así cada problema propuesto tiene un significado diferente para cada estudiante.

En la página dedicada a la complejidad de Rosen (Rosennean Complexity) (2009) se indica: "A system is *simple* if all its models are simulable. A system that is not simple, and that accordingly must have a nonsimulable model, is c*omplex*." Como consecuencia algunas características de un sistema complejo son: a) contener aspectos no fraccionables por ejemplo, intentar separar en un proceso qué es analógico y qué es inductivo; b) ser impredecible; c) contener aspectos semánticos; d) tener ciclos cerrados de relaciones.

Lo que se intenta mostrar abajo es que los estudiantes producen continua y autopoiéticamente su red de conocimientos, mediante la construcción personal de los bloques constructivos y de las relaciones entre ellos. Y que a pesar de los 5 años de estudio sin importar el colegio o escuela, la adaptación (aprendizaje) no ha sido adecuada.

Es claro que las situaciones matemáticas propuestas para resolver que enfrentan los estudiantes son, con alta probabilidad, siempre diferentes, tanto que podemos decir que todo problema propuesto es nuevo para ellos, la novedad es casi permanente. Si cada problema es nuevo, ¿cómo ayuda la experiencia acumulada a enfrentar lo nuevo? Para reducir la novedad de la experiencia matemática deben distinguir los elementos familiares, llamados por Holland (1995, p.34) bloques constructivos, en escenas no familiares y reconocerlos en cada nueva aparición, cada nueva escena. Para este reconocimiento uno de los procesos importantes es la analogía.

Maturana y Varela (1996, p. 24) indican que "El acto de señalar cualquier ente, objeto, cosa o unidad está amarrado a que uno realice un acto de distinción que separa a lo señalado como distinto de un fondo." y añadiendo que esa es una situación enteramente cotidiana y permanentemente; así, por ejemplo, reconocemos a una persona en particular separándola de fondo, que es todo lo demás, en un salón de clase.

La partición de la experiencia es un acto de creación personal, usando criterios de distinción también personales y no necesariamente los adecuados para una escena en particular, pero que cambian, se adaptan (entendiendo adaptarse como: cambiar los bloques constructivos, las relaciones entre ellos y, las acciones que sugieren y producen), al producir acciones que llevan a respuestas erróneas y se ven obligados a corregir lo actuado al enterarse de su incorrección. La corrección de la partición de la experiencia es verificada gracias a la realimentación recibida.

En las respuestas de los 149 estudiantes evaluados podemos observar las diferentes maneras de partir el problema propuesto y la cadena de acciones asociadas. En la tabla 1 se consignan: la respuesta dada por el estudiante y el número de estudiantes (No.) con la misma respuesta. La respuesta correcta está indicada con un (ok) a la par.

Pregunta: El resultado de efectuar $3\times 8-6\times 4+2\times 5+12$ es:

Respuesta	No.	Respuesta	No.	Respuesta	No.
En blanco	2	22	89 (ok)	-12	1
94	1	342	1	-10	1
222	1	392	1	28	1
282	1	318	1	36	1
		28 x	1	-1x + 20	1
16	2	18	2	70	2
382	34	612	3	24	3

Tabla 1

En la tabla 2 están algunas formas de cómo los evaluados llegaron a algunas de las respuestas, después de reconstruirlas y hacerlas presentables.

Error 1. 382	Error 2: 612	Error 3: 24	Error 4: -1*x* + 20
----------------------------→ $3 \times 8 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$ $24 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$ $18 \times 4 + 2 \times 5 + 12$ $72 + 2 \times 5 + 12$ $74 \times 5 + 12$ $370 + 12$ 382	$3 \times \underline{8 - 6} \times \underline{4 + 2} \times \underline{5 + 12}$ | | | $3 \times 2 \times 6 \times 17 =$ 612	$3 \times 8 - 6 \times \underline{4 + 2} \times \underline{5 + 12}$ | | $24 \underline{- 6 + 6} \times 17$ | $24 \underline{- 0 \times 17}$ | $24 - 0 = 24$	$3 \times 8 - 6 \times 4 + 2 \times 5 + 12$ $3x - 6x + 2x = -1x$ $8 \times (5 - 4) + 12 = 20$ respuesta $= -1x + 20$

Tabla 2

El error 1 es una lectura "textual" de la expresión, partiéndola en bloques que se muestran [3 × 8] [– 6] [× 4] [+ 2] [× 5] [+ 12] en donde los [ ] indican los limites de las partes.

En el error 2 primero separa la suma y resta 3 × [8 – 6] × [4 + 2] × [5 + 12] y después efectúa las multiplicaciones.

En el error 3 separa primero el 4 + 2 y el 5 + 12 para obtener un 0 y un 17, que luego multiplicará y sumará al primer 24.

En el error 4, interpreta el signo de multiplicación como la variable *x* y separa operaciones con variable y sin variable.

Nótese que los estudiantes reconocen los mismos números y los signos de operación, pero dividen la expresión de maneras diferentes. Note también que al efectuar las operaciones con los números de dos en dos lo hacen correctamente, es decir, no se equivocan al sumar, restar ni multiplicar. Los datos anteriores muestran que:

1. La mayoría de los evaluados se consideró con capacidad para efectuar la operación, porque sólo 2 no la respondieron,
2. es una pregunta que muchos responden correctamente, aproximadamente un 60 %, (marcada con ok),
3. la respuesta incorrecta más común de 34 de ellos (23 %) es obtenida al efectuar las operaciones de izquierda a derecha, sin considerar la jerarquía de las operaciones, tal como se realiza la lectura de un texto en español,
4. las respuestas incorrectas repetidas por 2 ó 3 participantes (5 respuestas diferentes) se asume no pueden deberse a errores de cálculo operatorio en las sumas o multiplicaciones, por ejemplo equivocarse con 3 × 8 y hacerlo = 26, o que en lugar de

escribir 24 se escriba 22, dada la baja probabilidad de que varios cometan la misma equivocación al azar. Al parecer llegaron a la misma respuesta por la manera en como interpretaron la expresión y las acciones que realizaron,

5. hay respuestas en las que se lee una intención muy particular, como las dos respuestas obtenidas **28*x*** y **–1*x* + 20**, que muestran que los signos de multiplicación × fueron reconocidos como la variable ***x***, a pesar de la tipografía y la corrección sintáctica,
6. la mayoría de respuestas incorrectas generadas una sola vez no se pueden atribuir sólo a equivocaciones, como las mencionadas arriba, sino a la manera en que experimentan, interpretan y desarrollan la expresión,
7. todos escribieron UNA sola respuesta.

De igual manera para otro examen efectuado a 68 estudiantes, se muestran los resultados de dos de las preguntas y se registran en las tablas 3, 4, 5 y 6. Las respuestas producidas por procesos semejantes, excepto por los signos resultantes, están agrupadas con sombreados o sin sombra.

Pregunta: El resultado de factorizar 4x 2 – y 2 + 2x – y es:

Respuesta	No.	Respuesta	No.	Respuesta	No.
En blanco	15	$(2x - y)(2x + y + 1)$	2 (ok)	$4x^3y^3$	1
$6x^3 - 2y^2$	2	Otras respuestas	21	$8x^2$	1
$6x^3 + 2y^2$	1	$x\,(4x + 2)\,y\,(y - 1)$	1	$17x$	1
$8x^3 - y^3 = 0$	1	$x^2 + y^3 + 2x$	1		
$8x^3 - y^3$	1			$2x^2$	1
$6x^3 + y^3$	1	$(2x + y)\,(2x - y)$	1	$2x$	1
$6x^3 - 2y^3$	2	$(2x - y)^2$	3	$2x - y$	1
$6x^3 - y^3$	4	$(2x - y)^2 + 2x - y$	3	$2x + y$	3

Tabla 3

Error 5: $6x^3 + y^3$ o $6x^3 - 2y^3$ o $6x^3 - y^3$	Error 6: $8x^3 - y^3 = 0$	Error 7: $2x - y$ o $2x + y$
$\underline{4x^2} - y^2 + \underline{2x} - y$	$\underline{4x^2} - y^2 + \underline{2x} - y$	$\underline{4x^2 - y^2} + 2x - y$
$4x^2 + 2x = 6x^3$	$4x^2 + 2x = 8x^3$	$\underline{(2x - y)}\,(2x + y) + \underline{(2x - y)}$
$-y^2 - y = 2y^3$ ó y^3	$-y^2 - y = y^3$	$= 2x + y$

Tabla 4

En el error 5 separa las variables y realiza de una manera particular la suma de positivos y negativos. Dependiendo de cómo trate los signos obtiene respuestas con + ó –. Además no factoriza, parece que pretende efectuar, pero en realidad el estudiante entiende la instrucción “factorizar” como un objetivo particular para él, que no tiene nada que ver con el hecho de factorizar la expresión dada.

En el error 6 la partición de la expresión es semejante al error 5, pero introduce un objetivo adicional, establecer una ecuación.

En el error 7, efectúa una adecuada partición en el inicio, factorizando la diferencia de cuadrados, pero el siguiente reconocimiento para la cancelación es inapropiado.

Note, de nuevo, que la partición de la expresión es diferente para cada estudiante, y las reglas de manejo de los signos, las operaciones y las variables también es personal. Sin embargo, no se equivocan en las tablas de la suma, resta ni multiplicación con los números.

Pregunta: El resultado de efectuar $m - m\ (m + 3)$ es:

Resultado	No.	Resultado	No.	Resultado	No.
En blanco	6	$-m^2 - 2m$	11	$+ m\ (m^3)$	1
$-m^2 + 2m$	1	Otras Respuestas	12	$- 3m - m$	1
$m^2 + 3m$	1	$- 3m^3$	1	4	1
$m^2 - 2m$	2	m^3	2	$4m$	1
$m^2 + 2m$	1	$-2m + 3$	1	$- 4m$	1
$m = -3$	1	$m - 3$	1	$- 3m$	1
0	5	$m + 3$	7	$3\ m$	10

Tabla 5

Error 8: 0 ó $m = -3$	Error 9: $m + 3$ ó $m - 3$ ó $-2m + 3$	Error 10: $\pm\ 3m$ ó $\pm\ 4m$ ó 4
$\underline{m - m}\ (m + 3)$ $0\ (m + 3) = 0$ $m + 3 = 0,\ m = -3$	$\underline{m - m}\ (m + 3)$ $m - m(m + 3) = m + 3$	$m - 3m^2 = 3m$ $m + 3 = 3m$

Tabla 6

Los diferentes resultados evidencian que cada uno de los estudiantes parte (fragmenta, divide) lo que observa de manera diferente, reconociendo diferentes configuraciones (bloques constructivos y sus relaciones), además usan o inventan diferentes reglas, reconocen diferentes metas (errores 6 y 8).

Estos otros dos ejemplos muestran cuáles son sus bloques para reconocer términos semejantes. Las mismas variables, sin importar sus exponentes en el primer caso, Fig. 2, o bien, sin importar que uno sea denominador de una fracción. Incluso encierra los coeficientes numéricos, Fig. 3.

17. Encierre en un círculo los términos que son semejantes entre sí

$$-3x^2z + \frac{2}{5}\frac{x^3z^2h}{xzh} - 3xz^2 + \frac{3}{5}xzh - \frac{1}{7}\frac{1}{x^{-2}z^{-1}}$$

Figura 1

17. Encierre en un círculo los términos que son semejantes entre sí

$$-3x^2z + \frac{2}{5}\frac{x^3z^2h}{xzh} - 3xz^2 + \frac{3}{5}xzh - \frac{1}{7}\frac{1}{x^{-2}z^{-1}}$$

Figura 2

A pesar de que lo presentado a todos los evaluados es lo mismo: números, variables, operaciones, signos de agrupación y un objetivo; lo que reconocen, que ya forma parte de su RPP, es diferentes. Los bloques constructivos, las relaciones entre ellos, los objetivos que se proponen, las acciones asociadas (los significados), son construidos de manera autónoma; la RPP completa fue organizada de manera autónoma, autopoiéticamente; dependiendo de su historia personal; por lo que es una "invención" de cada estudiante. Sin embargo, esa red ha sido sometida a adaptación, a cambios, a aprendizaje (aunque sea incorrecto), por la realimentación de profesores, pares y demás influencias durante 5 años, pero no garantiza su corrección puesto que los cambios en un sistema autopoiético no son dirigidos ni determinados por la perturbación, sino por el sistema mismo. Las perturbaciones del exterior desencadenan los cambios pero las consecuencias de ellas dependen de cómo la red las interpreta.

La secuencia de pasos para llegar desde la pregunta a la respuesta que cada estudiante da, ya sea correcta o no, se puede concebir como seguir un camino en una red, en la que cada vértice (nodo) es un estado en la resolución y cada arista es la acción que ha decidido ejecutar.

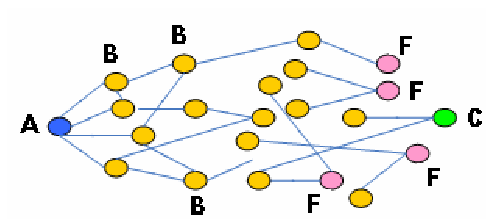


Figura 3

Diferentes estudiantes toman diferentes caminos. Esa red (Fig. 3) es el *posible espacio de resolución del problema,* y puede ser enorme. El círculo A representa el estado inicial o pregunta planteada, el C la respuesta correcta, los F los resultados incorrectos y los B son las etapas intermedias en la resolución del problema.

No está de más indicar que para llegar al estado final C (respuesta correcta), el camino puede pasar por resultados parciales incorrectos. Para transitar de un estado a otro, el estudiante debe reconocer un patrón, una configuración particular (un bloque de objetos particular) y luego elegir aplicar alguna regla, una propiedad matemática, de las varias que sabe puede usar. Lo que haga dependerá de cómo es "visto" el problema y del objetivo que identifique, aunque la pregunta sea clara para quien la elaboró.

La interconexión entre los diversos dominios de conocimiento de la RPP se manifiesta cuando se trasladan reglas de un dominio a otro, como en el caso de las reglas de manejo de signos en la multiplicación que se traslada a las potencias, por ejemplo, el error que se comete en la figura 4 en la que se manifiesta que el signo más de la base por el signo menos del exponente da el signo negativo del resultado de la potencia negativa.

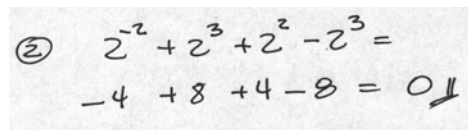


Figura 4

O cuando se trasladan reglas de otros dominios que no sean de la matemática, como en el caso del error 1, analizado al inicio de este escrito, en donde se lee la expresión de izquierda a derecha como cuando se lee un texto en español.

La RPP es el modelo del mundo, el concepto de modelo interno de Holland (1995), de cada persona, es lo que vive y con lo que actúa en consecuencia. Esta red es construida mediante procesos complejos, en el sentido de Rosen (2009).

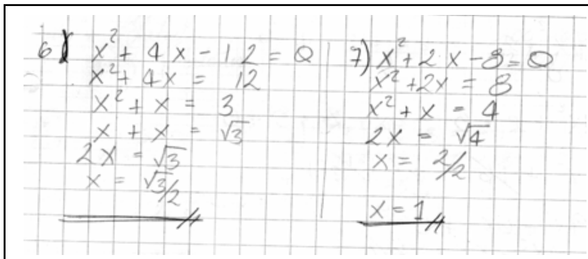


Figura 5

La RPP, además, manifiesta consistencia como se muestra en la figura 5. Se observa que si hay una multiplicación, se debe dividir: como el 4 multiplica a la *x* debe dividir al 12 (el 2 en el problema 7 debe dividir al 8), si la incógnita está elevada al cuadrado, se debe extraer raíz cuadrada y así resuelve la ecuación.

La modificación de la RPP, es decir, su adaptación implica aprendizaje, aunque no sea el correcto. Y la tarea del profesor es proveer la realimentación para desencadenar esos cambios. Además debe verificar la corrección de los cambios en la RPP puesto que la corrección en los mismos no está garantizada.

Dado que la construcción de la red de conocimientos es autopoiética, personal y compleja, también es necesario proveer a los estudiantes de maneras de verificación de la corrección de sus acciones. Podemos añadir que la historia de la matemática muestra que darle significado a las expresiones matemáticas, apoyan los procesos de validación autónoma de la corrección tanto de los bloques constructivos elegidos, las relaciones entre ellos y los objetivos de los procesos; por ejemplo, los griegos verificaban la corrección de algunos de sus procesos y construcciones matemáticas vía la corrección geométrica y la conservación del área.

Referencias bibliográficas

Eco, H. (1972). *La Estructura Ausente. Una introducción a la semiótica.* España: Editorial Lumen.

Holland, J. (1995). *Hidden Order. How Adaptation Builds Complexity*. New York: Helix Books.

Maturana, H. y Varela, F. (1996). *El Árbol del Conocimiento. Las bases biológicas del entendimiento humano.* Chile: Editorial Universitaria.

Rosennean Complexity and others interests. (sf). Recuperado el 15 de noviembre de 2009 de http://www.panmere.com/?page_id=16

UN ANÁLISIS SOBRE CONTENIDOS ENSEÑADOS Y EVALUADOS EN CURSOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR

Luisa Nataly Mukul Doblado, Martha Imelda Jarero Kumul
Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas (México)
luisa_mukul@hotmail.com, jarerok@uady.mx

Resumen. Las Instituciones de Educación Superior, reportan bajos índices de Eficiencia Terminal, hecho relacionado con la reprobación. Tal es el caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, donde se presentan altos porcentajes de reprobación en los primeros cursos. Por eso, desarrollamos un estudio descriptivo apoyado en la etnografía como método de investigación, cuyo objetivo fue analizar la relación existente entre los contenidos enseñados y los evaluados por medio de pruebas escritas en la asignatura de estudio y caracterizar el nivel de asimilación de su contenido alcanzado por los estudiantes en la misma. Como parte de los resultados, se identifica coherencia entre lo enseñado y lo evaluado, respecto a los contenidos conceptuales y procedimentales; y aunque los estudiantes pueden desarrollar el nivel de asimilación conocido como producción no implica aprendizajes significativos por parte de ellos.

Palabras clave: evaluación, álgebra superior

Abstract. Institutions of Higher Education, reported low rates of Terminal Efficiency, a fact related to failure. That is the case of the Facultad de Matemáticas of the Universidad Autónoma de Yucatán, México, that shows high percentages of failure in the first courses. Therefore, we developed a descriptive study based on the ethnographic research method, which aimed to analyze the relationship between the content taught and the content assessed through written tests about the topic of study and to characterize the level of assimilation achieved by the students therein. As part of the results, coherence is identified between the teaching and the assessment, with regard to the conceptual and procedural contents; even though the students are able to reach the level of assimilation known as production, this does not imply that they have a significant learning on the experience.

Key words: assessment, higher algebra

Reportes sobre la reprobación en la educación superior

Los bajos índices de Eficiencia Terminal, asociada a la deserción, rezago estudiantil y la reprobación, es uno de los problemas más complejos que enfrentan las Instituciones de Educación Superior en México. Gran parte de este problema se atribuye a los estudiantes, sin embargo la reprobación es un fenómeno escolar que se produce como resultado de las interacciones de profesor-alumno-saber, esto es en el Sistema Didáctico.

La Facultad de Matemáticas (FMAT) de la Universidad Autónoma de Yucatán ha enfrentado problemas de reprobación y rezago escolar en los últimos 20 años (Aparicio, 2006). Este problema se ha observado principalmente en los primeros semestres de estudio, en asignaturas como Álgebra Superior I (ASI), la cual registró el 63% de reprobación en el año 2007, según las estadísticas realizadas por la misma dependencia.

Posso (2005) informa que el bajo nivel de aprovechamiento estudiantil en los cursos de matemáticas de los dos primeros semestres, a nivel licenciatura, se refleja principalmente en un alto índice de reprobación. Lo cual lleva a prácticas de aula menos rigurosas o severas ante el cumplimiento de las metas de aprendizaje de los cursos y, por consiguiente, en detrimento de las exigencias de la evaluación. Este relajamiento en la evaluación se hace evidente cuando pocos profesores universitarios están conscientes de llevar a cabo la evaluación como acción formativa para los estudiantes, o para el mejoramiento de su práctica docente. En pocas ocasiones, los docentes llevan a cabo la función retroalimentadora de la evaluación en el momento oportuno (Pérez, 2007).

Melchor y Melchor (2002), Aparicio, Jarero y Ávila (2007), reportan que la mayoría de los profesores universitarios, utilizan la prueba escrita como único instrumento de evaluación y calificación, en la cual solamente se evalúa el producto dejando a un lado el proceso, lo cual revela que no consideran a la evaluación como proceso continuo, paralelo y permanente al de enseñanza. Dochy, Segers y Dierick (2002) señalan que estas pruebas tradicionalistas no parecen reflejar adecuadamente la capacidad de resolución de problemas, el pensamiento crítico y el razonamiento. Los exámenes tradicionales generalmente fomentan la memorización más que la comprensión. Además, "una práctica desafortunada pero que se ha hecho una costumbre entre el profesorado de casi todos los niveles educativos, consiste en establecer una marcada distancia entre lo que suele enseñar y lo que se evaluará" (Coll y Martín, 1993, citado en Díaz y Hernández, 2002, p.366). Inclusive se reservan ejercicios, tareas o problemas más difíciles o complejas para el momento del examen, bajo la supuesta valoración de la generalización o transferencias del aprendizaje.

Ante las situaciones referidas y como parte del proyecto de investigación "La práctica de evaluación en cursos de Matemáticas. Explorando su relación con los índices de reprobación escolar", que se desarrolla al interior de la FMAT, la presente investigación tiene el objetivo de analizar la relación entre las prácticas de evaluación y la reprobación en la asignatura de estudio, con el fin de ofrecer estrategias para aminorar de alguna forma los altos índices de reprobación, y por consiguiente, incrementar el índice de Eficiencia Terminal. Nos planteamos la siguiente pregunta *¿cómo se evalúa el desarrollo de las habilidades requeridas en el curso de ASI?* Particularmente nos interesó *analizar la relación existente entre los contenidos enseñados y los evaluados por medio de pruebas escritas en el curso de ASI, y caracterizar el nivel de asimilación alcanzado por los estudiantes en él por los estudiantes.*

Marco conceptual

De acuerdo con Coll, Pozo, Sabaria y Valls (1992; citado en Díaz y Hernández, 2002), los contenidos curriculares se pueden clasificar en conocimiento declarativo, procedimental y actitudinal. El conocimiento declarativo o saber qué, puede definirse como aquella competencia referida al conocimiento de datos, hechos, conceptos y principios. Los contenidos declarativos se dividen, a su vez, en factuales y conceptuales, los primeros se refieren a datos y hechos que proporcionan información verbal y que los estudiantes deben aprender de forma literal. El conocimiento conceptual se construye a partir del aprendizaje de conceptos, principios y explicaciones, para los cuales se debe comprender el significado esencial o identificar sus características y las reglas que los componen. El aprendizaje del contenido procedimental, también conocido como saber hacer, se refiere a la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas, métodos, etc. El conocimiento actitudinal, o saber ser, se orienta al desarrollo armónico y pleno de la persona así como a la convivencia solidaria en sociedades caracterizadas por la justicia y la democracia. Se sustenta en los derechos humanos universales y en la erradicación de los llamados antivalores.

Bordas (2008) señala que al momento de seleccionar los instrumentos y de diseñar las actividades de evaluación para el estudiante, se deben tener en cuenta las actividades de enseñanza-aprendizaje realizadas y los objetivos planteados previamente, es decir, debe haber congruencia entre los objetivos, la enseñanza y la evaluación, para obtener resultados que den información para mejorar la práctica educativa.

La apropiación de los contenidos por parte de los estudiantes puede clasificarse en niveles de asimilación del conocimiento, los cuales son: Familiarización, Reproducción, Producción y Creación. En el primer nivel, el estudiante es capaz de reconocer los objetos, procesos y propiedades estudiados anteriormente, según el modelo a él presentado. En el segundo puede reproducir la información, la operación, resolver problemas tipo estudiados. El tercero sugiere que el aprendiz es capaz de realizar las operaciones según el orden acostumbrado, en las condiciones nuevas y con el contenido nuevo, por ejemplo, la solución de problemas no típicos. Y en el último el estudiante es capaz de orientarse independientemente en situaciones objetivas o subjetivamente nuevas para él. Su actividad puede tener carácter de búsqueda, de investigación (Ramos, Valle y Ross, 2007).

Método de investigación

La investigación desarrollada fue de naturaleza cualitativa, de carácter descriptivo, apoyada en la etnografía. Participaron en ella 33 estudiantes de la FMAT, que cursaban la asignatura de ASI y el profesor titular del curso, cuya formación inicial es de licenciado en matemáticas egresado de la misma facultad.

Debido a que los profesores encargados de la asignatura, reportan altos índices de reprobación en el examen utilizado para evaluar la unidad 2, cuyo título es *Relaciones y Funciones*, restringimos el estudio a esa unidad, en la cual se espera que el estudiante conozca y maneje la teoría del producto cartesiano, las relaciones entre conjuntos, en especial las relaciones funcionales y las relaciones de equivalencia para que se familiarice con la demostración en matemáticas, de manera formal.

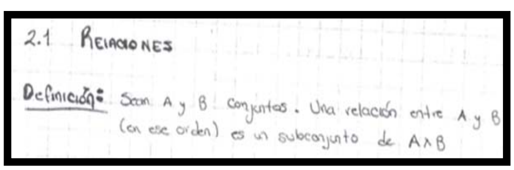
Utilizamos la observación no participante, la cual tuvo una duración de 17 sesiones, registrando los hechos en notas de campo. Se analizó el programa del curso de Álgebra Superior I, correspondiente al plan de estudios de las licenciaturas de Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Actuaría, Ciencias de la Computación, Ingeniería en Computación e Ingeniería de Software; para caracterizar los contenidos enseñados y evaluados, ya sean estos conceptuales o procedimentales.

Para determinar la relación existente entre los contenidos enseñados y evaluados y determinar si existe la coherencia en la evaluación, observamos y analizamos *las notas del estudiante* y *la prueba que aplicó el profesor para evaluar la unidad 2*.

Por último, aplicamos *una prueba experimental*, diseñada por el grupo de investigadores a cargo del proyecto, con el propósito de identificar el nivel de asimilación de los contenidos por parte de los estudiantes. La prueba se integró de ocho reactivos clasificados de reproducción y dos de producción, los primeros incluían consignas planteadas a los estudiantes durante las clases y los segundos consignas no familiares.

Resultados

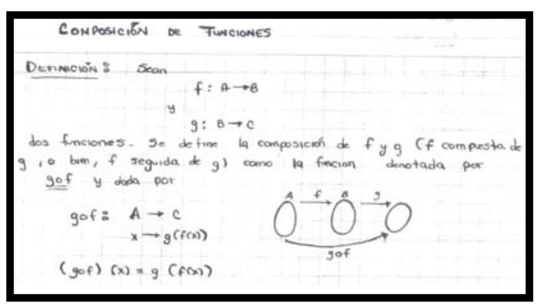
El programa de curso incluye un listado de contenido temático y objetivos a nivel unidad, sin una definición clara de lo que se espera del estudiante; aunque pueden deducirse los contenidos conceptuales y procedimentales, pero no son evidentes los actitudinales. Al observar las clases identificamos contenidos conceptuales, tales como definiciones y propiedades del Producto Cartesiano, Relaciones y Funciones (Figuras 1 y 2).



2.1 RELACIONES

Definición: Sean A y B conjuntos. Una relación entre A y B (en ese orden) es un subconjunto de A x B

Figura 1. Definición de relación



COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

DEFINICIÓN: Sean

$f: A \to B$

y

$g: B \to C$

dos funciones. Se define la composición de f y g (f compuesta de g, o bien, f seguida de g) como la función denotada por gof y dada por

$g \circ f: A \to C$

$x \to g(f(x))$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Figura 2. Definición de composición de funciones

También identificamos contenidos procedimentales, como la determinación del producto cartesiano, la composición de funciones y la función inversa (Figuras 3 y 4), demostraciones de propiedades sobre productos cartesianos y relaciones, así como teoremas relacionados con funciones. Esos mismos contenidos conceptuales y procedimentales se incluyeron en los reactivos de la prueba que aplicó el profesor para evaluar la unidad 2.

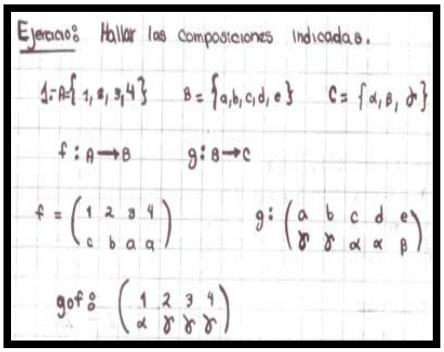

Ejercicio: Hallar las composiciones indicadas.
$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c,d,e\}$ $C=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
$f: A \to B$ $g: B \to C$
$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ c & b & a & a\end{pmatrix}$ $g:\begin{pmatrix}a & b & c & d & e\\ \gamma & \gamma & \alpha & \alpha & \beta\end{pmatrix}$
$g \circ f: \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \alpha & \gamma & \gamma & \gamma\end{pmatrix}$

Figura 3. Composición de funciones

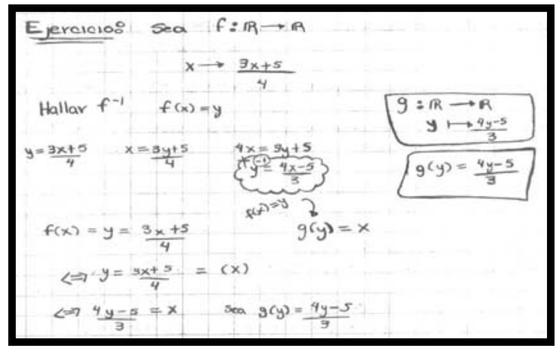


Figura 4. Función inversa

Al analizar la prueba del profesor, observamos que algunos reactivos son los mismos ejemplos y ejercicios planteados durante las clases, los cuales encontramos en las notas del estudiante.

Demuestra: $AX(B \cup C) = (AXB) \cup (AXC)$

Figura 5. Reactivo de la prueba

En la Figura 5, se presenta un reactivo del examen aplicado por el docente y en la Figura 6 se muestra la evidencia de que en la clase se demostró la misma propiedad del producto cartesiano.

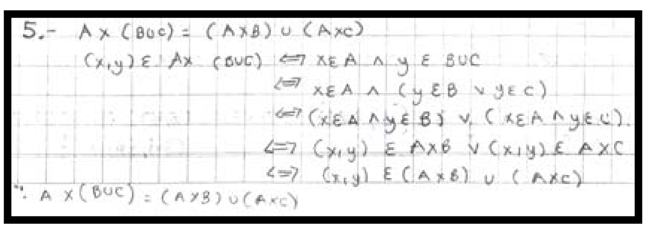

5.- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$(x,y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A \wedge y \in B \cup C$
$\iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$
$\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$
$\iff (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C$
$\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$
$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Figura 6. Propiedad del producto cartesiano demostrada en clase

Considera la relación en $\mathbb{Z}$:

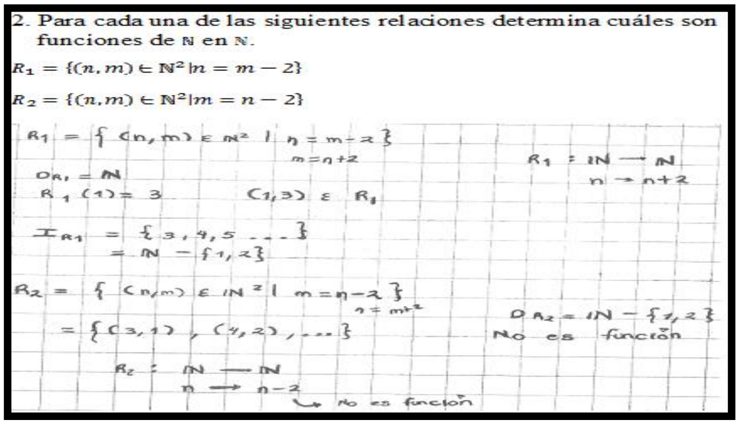
$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / y = x^2\}$

¿Es R función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$?

Figura 7. Reactivo de la prueba aplicada por el profesor

Se identificaron otros reactivos con características similares a ejercicios presentados en las clases, es decir tenían las mismas consignas.

En las Figuras 7 y 8, comparamos un reactivo de la prueba y ejercicios de las notas del estudiante, donde se realizan las mismas actividades


2. Para cada una de las siguientes relaciones determina cuáles son funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

$R_1 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 | n = m - 2\}$

$R_2 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 | m = n - 2\}$

$R_1 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = m-2\}$, $m = n+2$

$D_{R_1} = \mathbb{N}$

$R_1(1) = 3 \qquad (1,3) \in R_1$

$I_{R_1} = \{3,4,5 \ldots\} = \mathbb{N} - \{1,2\}$

$R_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to n+2$

$R_2 = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = n-2\}$, $n = m+2$

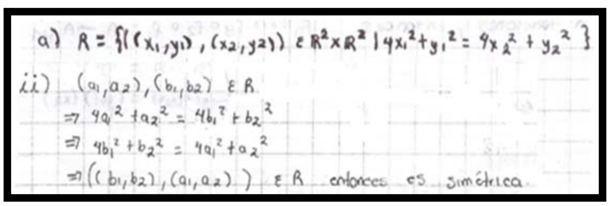
$= \{(3,1), (4,2), \ldots\}$

$D_{R_2} = \mathbb{N} - \{1,2\}$ No es función

$R_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to n-2$ No es función

Figura 8. Ejercicios en notas del estudiante

Respecto a la prueba experimental, los porcentajes de respuestas correctas de los reactivos que se clasifican en el nivel de reproducción se encuentran entre 26.3% y 94.7%, mientras que para los reactivos en el nivel de producción esos porcentajes fueron del 57.8% al 100%. Las respuestas dadas a los reactivos de reproducción corresponden a las estrategias utilizadas por el profesor al resolver ejercicios durante las clases


a) $R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + y_1^2 = 4x_2^2 + y_2^2\}$

ii) $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in R$

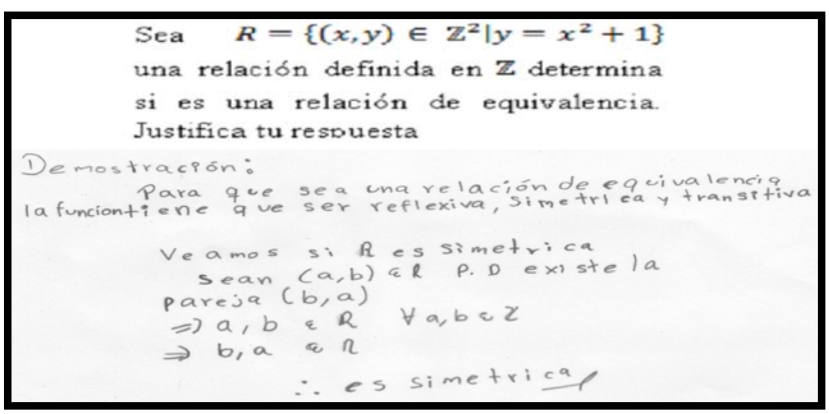
$\Rightarrow 4a_1^2 + a_2^2 = 4b_1^2 + b_2^2$

$\Rightarrow 4b_1^2 + b_2^2 = 4a_1^2 + a_2^2$

$\Rightarrow ((b_1,b_2),(a_1,a_2)) \in R$ entonces es simétrica

Figura 9. Demostración que realizó el profesor en la clase

En la Figura 9 se presenta parte de una demostración que el profesor realizó en la clase y, en la Figura 10, una fracción de la demostración que realizó un estudiante al resolver un reactivo de reproducción de la prueba experimental.


Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | y = x^2 + 1\}$ una relación definida en $\mathbb{Z}$ determina si es una relación de equivalencia. Justifica tu respuesta

Demostración:

Para que sea una relación de equivalencia la funcion tiene que ser reflexiva, simetrica y transitiva

Veamos si R es simetrica

sean $(a,b) \in R$ P. D existe la pareja (b,a)

$\Rightarrow a,b \in R \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b,a \in R$

$\therefore$ es simetrica

Figura 10. Demostración del reactivo de producción de la prueba experimental

En las respuestas dadas a los reactivos de producción, los estudiantes emplearon estrategias propias aprendidas en cursos anteriores. En la Figura 11, se muestra un reactivo de producción de la prueba experimental, y en la Figura 12 las respuestas de dos estudiantes, dadas a ese reactivo.

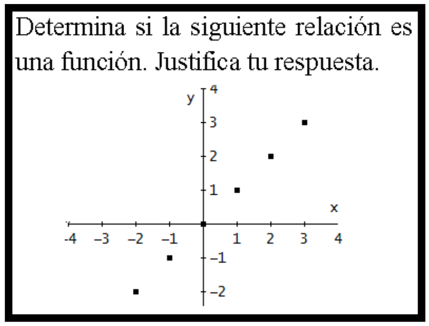


Figura 11. Reactivo de producción de la prueba experimental

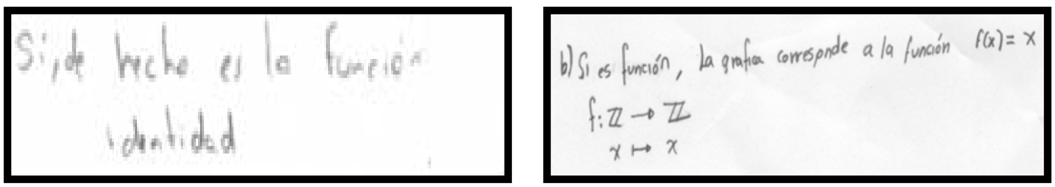


Figura 12. Respuestas de los estudiantes

Conclusiones

Con el propósito de determinar cómo se evalúa el desarrollo de las habilidades requeridas en el curso de ASI, partimos de la identificación de los contenidos curriculares que se enseñan en la unidad 2 de ese curso y los comparamos con los que se evalúan mediante pruebas escritas. Al respecto, podemos establecer que tanto los contenidos conceptuales como los procedimentales enseñados corresponden a los mismos que se evalúan en el tipo de instrumento referido y, por ende, se considera la existencia de coherencia en ese proceso.

Por otro lado, el instrumento de evaluación considerado valida el aprendizaje de los estudiantes hasta el segundo nivel de asimilación, el cual corresponde al nivel de reproducción, mismo que, como su nombre indica, requiere la aplicación de conocimientos previamente estudiados y, por tanto, demanda principalmente procesos memorísticos. Sin embargo, los estudiantes utilizan estrategias propias, desarrolladas a partir de conocimientos de cursos anteriores, para dar atención a reactivos de producción, como se mostró a partir de la prueba experimental aplicada. Con respecto a las ideas anteriores, podemos establecer que a partir de la prueba del profesor el nivel de asimilación de los estudiantes correspondería al de reproducción, aunque ellos pudieran ejercerlo al nivel de producción.

En consecuencia, se recomienda plantear actividades a los estudiantes correspondientes al nivel de producción, de modo que pongan en juego sus estrategias y desarrollen nuevas redes de pensamiento, aunque no en las pruebas escritas.

Como reflexión final, no basta la coherencia entre lo que se enseña y evalúa, para afirmar que los estudiantes han comprendido los conceptos tratados durante el curso, sino que el profesor debe llevar a cabo la acción formativa de la evaluación y no sólo la acción sumativa, es decir, evaluar el proceso y el resultado en conjunto.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y Eficiencia Terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 450-455. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aparicio, E., Jarero, M. y Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la sociedad Argentina de Educación Matemática 35*, 3-12.

Bordas, M. (2008). *Características de la evaluación*. Recuperado el 22 de mayo de 2008 de http://www.abc.com.py/2009-03-17/articulos/504487/caracteristicas-de-la-evaluacion

Díaz, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista* (Segunda Edición). México: Editorial Mc Graw Hill.

Dochy, F., Segers, M. y Sabine, D. (2002). Nuevas Vías de Aprendizaje y Enseñanza y sus Consecuencias: una Nueva Era de Evaluación. *Revista de Docencia Universitaria 2(2)*. Recuperado el 24 de septiembre de 2008 de http://www.um.es/ojs/index.php/red_u/article/view/20051/19411

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Distrito Federal, México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. DE C.V.

Melchor, J. y Melchor, V. (2002). El conocimiento de las matemáticas. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas 3(1)*, 16-29. Recuperado el 30 de agosto de 2008 de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0904.pdf

Pérez, G. (2007). La evaluación de los aprendizajes. *Reencuentro*, 048, pp. 20-26. Recuperado el 18 de septiembre de 2008 de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=34004803

Posso, A. (2005). Sobre el bajo aprovechamiento en el Curso de Matemáticas I de la UTP.

Scientia et Technica, *11(28)*, 169-174. Universidad Tecnológica de Pereira. Recuperado el 27 de octubre de 2008 de http://www.utp.edu.co/php/revistas/ScientiaEtTechnica/docsFTP/164230169-174.pdf

Ramos, C., Valle, M. y Ross, S. (2007). El grado de reflexión de los alumnos de cálculo diferencial. Una experiencia. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 2(2)*, 54-70. Recuperado el 17 de diciembre de 2008 de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio2/num2/REIEC_anio2_num2_art6.pdf

LA EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Eréndira Valdez Coiro
ISCEEM (México)
erevalco@prodigy.net.mx

Resumen. La evaluación ha tomado un destacado lugar. Es una actividad prioritaria en las aulas, que causa impacto, y cuyos resultados en buena medida representan un reto para los profesores. En esta investigación pudimos constatar que al menos en lo explícito del discurso, los diseños didácticos para la enseñanza de las Matemáticas que se centran en el alumno van mejorando lentamente, pero cuando se concretan los procesos de evaluación surge una contradicción, pues el enfoque no ha sido realmente modificado, pues los aprendizajes de los estudiantes se proyectan de manera limitada pues para evaluarlos se construyen formatos tradicionales, con estructura simple que demanda respuestas directas, cortas y sin mucho trabajo de reflexión por parte del alumno. Hace falta más fundamentación en los apoyos didácticos que los profesores reciben, y el renglón de la evaluación de los aprendizajes matemáticos en el aula queda como una verdadera asignatura pendiente en la formación magisterial.

Palabras clave: matemáticas, evaluación, profesores, educación secundaria

Abstract. The evaluation has taken a prominent place. It is a priority in the classroom, that makes an impact, and the results largely represent a challenge for teachers. In this research we found that at least explicit discourse, instructional design for teaching mathematics that students focus on getting better slowly, but when the evaluation processes materialize a contradiction arises because the approach has not actually been modified, as student learning are projected on a limited basis for evaluation are built as traditional formats, with simple structure that demand straight answers short and without much reflection work by the student. We need more grounding in the teaching aids that teachers receive, and the line of the assessment of mathematical learning in the classroom is a real ongoing issue in teacher education.

Key words: mathematics, evaluation, teachers, secondary education

Antecedentes

La evaluación de los aprendizajes de los alumnos ocupa un lugar realmente central en el Sistema Educativo. Públicamente hubo un reconocimiento del bajo logro que tienen los alumnos en los exámenes externos de Matemáticas que les aplican desde programas gubernamentales e internacionales. Es un hecho ampliamente divulgado en los medios masivos de comunicación no sólo el bajo lugar que ocupa nuestro país respecto a la lista de países participantes,... sino los niveles de logro alcanzados: un alto porcentaje de alumnos solo puede resolver problemas matemáticos de bajo nivel. Los niveles 0 y 1 de Matemáticas están caracterizados en el informe oficial como: "Insuficientes, en especial el 0, para acceder a estudios superiores y para las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento". Más del la mitad de la población estudiantil de secundaria quedó ubicada en ellos en la aplicación de ENLACE 2010 .

El hecho que en principio nos preocupó fue que si bien tenemos un amplio reconocimiento por la labor técnica que hacen los equipos de trabajo del Instituto Nacional de Evaluación

Educativa (INEE), y programas afines (EXCALE, PISA, TIMSS,...), y por el trabajo de los profesores en las aulas; parecía proyectarse una lejanía de unos respecto a otros, y el desencuentro en los modos y tiempos en que se evaluaba era notable. Valoramos que esta distancia puede hacer que la brecha operativa y conceptual impida un buen aprovechamiento de las acciones emprendidas desde ambos escenarios.

El ámbito educativo valida los aprendizajes que se dan en su contexto, a través de la calificación que en la escuela se otorga a los alumnos. La función legitimadora de la escuela es robusta en las comunidades del Estado de México. Los saberes escolares tienen un alto aprecio, y la función de la escuela aún se valora muy positivamente. Socialmente se alimenta la idea de que mediante la escolarización se pueden tener mejores posibilidades para insertarse en el mercado laboral, de ahí que las calificaciones emitidas por la escuela, sean una forma de tarjeta de presentación, moneda de cambio para moverse en la vida productiva. En ese orden de ideas, en el informe EXCALE se destaca la "influencia de la educación en la transformación cultural y la mejora de los estándares de vida de la población adulta". Lamentablemente, por la situación crítica que hoy día se vive, la educación, no es garantía de mejor ingreso, ni de mejor comprensión del entorno y el papel del ciudadano.

En las recomendaciones de la OCDE derivadas de las evaluaciones externas internacionales, se informa que "Los estudiantes que aprenden con un enfoque memorístico y de reproducción de conocimientos científicos no están preparados para hacer frente a los retos de la sociedad actual y para incorporarse el mercado laboral". En el sector educativo la evaluación adquiere un gran valor estratégico, es el instrumento por excelencia para la toma de decisiones. Lamentablemente, al ponerla en marcha, y diseñar acciones específicas, la estrecha relación que la vincula a la medición parece fortalecerse. Una de las desviaciones que ha provocado esta concepción es que hay que lograr mejores puntajes en las evaluaciones externas, sin hacer énfasis en lo que tales puntajes representan. Los aprendizajes de los alumnos se ven desvirtuados hacia la práctica de resolución de exámenes. Hay una gran confusión.

El acto de la evaluación es un interjuego que se da a partir de una acción voluntaria e intencionada entre los actores del proceso. En el ámbito educativo *el referente* de la evaluación está en la documentación que oficialmente norma la actividad en las aulas, y que suponemos es guía de las acciones docentes. El programa escolar expone los propósitos que tendrían que ser alcanzados mediante las actividades de aprendizaje. Si tales propósitos se logran el proceso educativo puede considerarse exitoso, si no ocurre esto, habría que tomar conocimiento de las evidencias que dan cuenta de la falla, para buscar medidas remediales.

El *referido* de la evaluación, puede ser interpretado como el "formato" para documentar el acto de evaluación. Es variable, sin embargo es importante señalar que como se trata de un instrumento utilizable en un acto intencionado que dará lugar a la posibilidad de emitir un juicio de valor, debe considerarse un cierto protocolo para dejar testimonio del acto mismo en cuanto a condiciones, contenidos y resultados. Es una forma de plasmar el acto de evaluación, el referente puede, como en las obras de arte, tener varias expresiones (referidos) que le den forma para concretar en un material la idea. El aprendizaje matemático es en todo caso lo importante, y la evaluación es una de las formas de constatar que tal aprendizaje se produjo.

Lo importante no son los exámenes, sino el juicio de valor sobre los aprendizajes escolares que se pueda emitir a partir de su aplicación. Vale la pena distinguir entre los controles, los resultados, los usos y los efectos de la evaluación, en el ámbito escolar que es el que nos interesa. Desde este trabajo la función pedagógica se considera central, aunque por los impactos tan fuertes que actualmente tiene, la función social también se trabajó en lo explícito del discurso. En particular, Matemáticas es un área de conocimiento que presenta un severo problema en términos de impedimento para el logro de objetivos personales, pues tiene de un bajo rendimiento escolar.

Encuadre de la investigación

La investigación acción (I-A) es una forma de trabajo que intenta dar cuenta de los procesos de cambio que se producen en un colectivo, bajo las circunstancias específicas del contexto, las personas y la actividad que desarrollan. En el diseño utilizado se contemplaron cuatro fases metodológicas: detectar necesidades (investigación, I), atenderlas en un primer momento (acción, A), elaborar problemáticas específicas que surgen del primer intento de cambio (tematización, T), y fundamentar un plan de trabajo para darle atención a la problemática desde las condiciones en que cada participante trabaja (programación, P).

Por el paradigma de investigación con el que se trabajó resultaba sumamente importante la interacción con los profesores, a partir de las posibilidades que daba el calendario oficial y la puesta en marcha de los talleres. En cada encuentro se ajustó un programa de actividades inicial que tenía abiertos los eventos que podrían llevarse a cabo, y el énfasis que se pondría en cada uno de ellos según correspondiera, y acorde con el marco de cada momento de la secuencia metodólogica. La idea de un *trazador didáctico* (Newman, Griffin y Cole; 1991), se retomó para hacer del plan de clase un instrumento sumamente flexible que sin dejar de cumplir con aspectos enunciados en la propuesta de cada taller, permitiera recorrer senderos de información que sobre la marcha surgieran en el trabajo de los profesores y que me permitieran rescatar sus opiniones, no solo las que previamente tenían instrumentos diseñados, sino también las espontáneas.

Se plantearon cuatro encuentros con profesores de Matemáticas de dos zonas escolares, por lo que pudimos trabajar con un promedio de treinta profesores por sesión. El formato de los encuentros fue el de cursos- taller de Didáctica de las Matemáticas. En este formato el trabajo desarrollado en las sesiones siempre centró la atención en la evaluación de los aprendizajes matemáticos de los alumnos: desde los exámenes ENLACE, los resultados y el manejo de los profesores al respecto, tratamiento didáctico de algunos temas de los programas de Matemáticas (concepto de altura, teorema de Pitágoras y lenguaje algebraico), así como su evaluación, y perspectivas de los profesores al respecto.

Las sesiones tuvieron una duración de cinco horas, y se llevaron a cabo en instalaciones escolares de las zonas participantes. También se contó con la opinión explícita de la Supervisora de una zona y de los Líderes Académicos –representantes- de ambas zonas, que aportaron valiosa información en las entrevistas que se les hicieron.

Algunos resultados

Sobre la *evaluación diagnóstica* (ED) aportada por ENLACE: Al preguntarles si habían hecho la ED, 5 de 28 contestaron: 'si', 'parcialmente' solo 1, y 22 de los 28 dijeron 'no haber hecho tal evaluación'. En las repuestas de los profesores ante el conocimiento de la información contenida en la Evaluación Diagnóstica del 2008, ellos manifestaron mayoritariamente, desconocimiento del documento, y de los resultados que sus alumnos obtuvieron. Entre las razones por las cuales los profesores no hicieron esta evaluación figuraba un desconocimiento procedimental para la consulta de tales datos, y el hecho de no haber tenido disponibles los datos en línea. La ED no fue recuperada por la mayoría de los profesores.

Sobre la *evaluación continua*: tenemos evidencias respecto al alto valor que representan para los profesores las evaluaciones continuas, porque en ellas depositan un gran aparte de su confianza para otorgar las calificaciones a los alumnos, a partir de "un juicio objetivo". Hay una sensación de arbitrariedad si no lo hacen de esta manera. Los propios profesores declararon que la estructura y contenido de los exámenes parciales se produce en paralelo a los contenidos trabajados en las clases. El formato de tales documentos era bastante simple, tanto por el tiempo que les toma su elaboración, como por la facilidad que deben tener para ser calificados. En estos instrumentos no hay exigencia de reflexión y procesamiento de nivel medio o superior, generalmente son breves (de tres a cinco reactivos) y de tipo operativo.

Análisis de las evaluaciones externas, desde la opinión de los profesores

- Las evaluaciones externas *no son confiables* para fundamentar la asignación de calificaciones. Los alumnos no dan muestras de dominio de conocimientos. A decir de los profesores, últimamente están aprendiendo a contestar exámenes de opción múltiple. Los resultados se consideran casi aleatorios, y en los exámenes figuran temas que abarcan la totalidad del programa escolar, a pesar de que se aplican casi dos meses y medio antes de que concluya el ciclo.

- Respecto a *la congruencia*: de acuerdo con las Tablas de Especificaciones, y los documentos que se exhiben en la página del INEE no hay duda de que los exámenes que aplican miden lo que los programas dictan. Lamentablemente, la distancia entre ese listado y lo que aprenden los alumnos en las aulas es significativa. De las declaraciones de los profesores, inferimos que en las aulas no se está trabajando didácticamente en ese enfoque recomendado para la enseñanza de las Matemáticas.

Cuando se pidió a los profesores que elaboraran reactivos para evaluar en el salón de clase dos temas, sus reactivos se quedaban en el nivel taxonómico 1 (Niveles de reconocimiento y comprensión, de la Taxonomía de Bloom, que aún es utilizada en los documentos del INEE), y solo cinco personas redactaron algunas preguntas de nivel 2. Esto apunta a pensar que el manejo disciplinario de los profesores, no admite productos parciales, que en el proceso son aprendizajes valiosos, y merecen ser evaluados.

Un paréntesis en este aspecto: El 43% de los participantes declaró tener problema por no tener un adecuado manejo del contenido programático. Casi la mitad del grupo de profesores no tienen formación matemática ni didáctica, y por necesidades del servicio fueron asignados para impartir los cursos de secundaria a los alumnos.

Ante la pregunta: En sus grupos de trabajo ¿qué nivel de logro percibe Usted... de acuerdo con el cuadro de los Niveles de Desempeño en Matemáticas (PISA)? Nivel 1: 84%, Nivel 2: 12%, Nivel 3: 4%

Las autoevaluaciones que hicieron respecto a su habilidad para evaluar a sus alumnos en los aprendizajes matemáticos en el aula, tenían una escala de 1 a 11, en una línea que simbolizaba el 'continuo psicológico'. En el primer taller el 87 % se ubicó entre 6 y 9, Taller 2: 52% entre 6 y 8, Taller 3: 72 % entre 5 y 6. En cambio en el último, 56% se ubicaron entre 5 y 8.

Respecto a la *validez* de la evaluación es difícil de analizar. No se cumple, porque lo que los estudiantes debieran aprender es algo lejano a lo que realmente han aprendido, y más aún, a lo que hoy día están aprendiendo. La escala de valores respecto a su formación e importancia en el desempeño ciudadano, por ejemplo, ni se menciona. El supuesto valor estratégico de la evaluación, y concretamente el uso de sus resultados para la toma de decisiones en el ámbito de la política educativa se ha metido en las aulas... El examen no es ya el testimonio de los aprendizajes para valorar el logro, ahora es la meta. En el ámbito escolar, teóricamente, la evaluación es una etapa del proceso de planeación, debiera ser la meta clara que orienta, para el logro durante el proceso de aprendizaje.

Para concluir

En una perspectiva más amplia, si bien se evalúa a los sujetos para verificar su aprendizaje, al Sistema Educativo se le evaluaría para conocer la realidad educativa del país. La segunda es una evaluación en el mundo de los objetos. Cuando se habla de las evaluaciones externas al aula, para nosotros es claro que no puede hablarse del mismo proceso, de una aplicación para ambos entornos. Hay una violación de principios en la extensión del dominio de los resultados de esta evaluación. Hay una medición descriptiva, generalmente cuantitativa que intenta objetivar el proceso para traducirlo en actos comparables, con fines estratégicos de control y de gestión.

Los procesos del aula requieren de una mejor atención, y se vuelve una tarea urgente que los profesores hagan un buen manejo de la información disponible, y una mejor actuación en materia didáctica para promover los aprendizajes de sus alumnos.

Referencias

ENLACE: Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares

EXCALE: Exámenes para la Calidad y el Logro Educativos.

OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

PISA: Programa para la Evaluación Interna de Alumnos (de la OCDE).

TIMSS: Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2007). *Actividad Matemática y Evaluación*. Conferencia Magistral, XII CIAEM Julio 2007, Querétaro, México. Traductores: David Block y Grecia Gálvez. En: Memorias (CD).

INEE/SEP, 2006. *La Calidad de la Educación Básica Ayer, Hoy y Mañana. Conclusiones del Informe Anual sobre La Calidad de la Educación Básica en México*. México. Recuperado el 13 de julio de 2008 de www.inee.edu.mx

Newman, D., Griffin P., y Cole, M. (1991). *La zona de construcción del conocimiento. Trabajando por un cambio cognitivo en la escuela*, Madrid: Ed. Morata.

Porlán, R. (1993). *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza- aprendizaje basado en la investigación,* Sevilla: Díada.

Pérez Abril, M. y Bustamante Zamudio, G. Comps. (2001). *Evaluación Escolar ¿resultados o procesos? Investigación, reflexión y análisis crítico*, Colección Mesa Redonda, Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2001). Breaking Political Neutrality: The Critical Engagement of Mathematics Education with Democracy: Recuperado el 15 de julio de 2008, de http:*//www.learning.aau.dk/dounload/Medarbejdere/Paola-Valero/Breaking_Political_Neutrality.pdf*.

LA REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE COMPETENCIAS MATEMATICAS EN SECUNDARIA

Hanssell Guadalupe Caballero Villarreal, Evelia Reséndiz Balderas, Ramón Llanos Portales
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México)
hgcv_caballero@hotmail.com,erbalderas@uat.edu.mx,rjardiel5@hotmail.com

Resumen. Esta investigación se efectúa en el marco de la reforma de la educación secundaria del 2006 en México y tiene como propósito mostrar los avances sobre la edificación de conocimientos matemáticos en los alumnos de primer año de secundaria, a través de los 5 bloques del año escolar, en los que figuran tres ejes de estudio que son: a) Sentido numérico y pensamiento algebraico, b) Forma, espacio y medida y c) Manejo de la información. Pero solo se estudiará el eje temático relacionado a pensamiento numérico y lenguaje algebraico, poniendo especial énfasis en una de las cuatro competencias que marca el programa: la competencia de la comunicación. Haciendo una comparación entre dos grupos de estudio, ya que en uno empleará el método tradicional y el otro utilizará el de inducción.

Palabras clave: pensamiento algebraico, comunicación, competencias

Abstract. This investigation takes place within the framework of the reform of the secondary education of the 2006 in Mexico and must like intention show the advances on the construction of mathematical knowledge in the students of first year of secondary, through the 5 blocks of the scholastic year, in which they appear three axes of study which they are: a) Numerical sense and algebraic thought, b) Form, space and measurement and c) Handling of the information. But one will only study the thematic axis related to numerical thought and algebraic language, putting special emphasis in one of the four competitions that the program marks: the competition of the communication. Making a comparison between two training groups, since in one it will use the traditional method and the other will use the one of induction.

Key words: algebraic thought, communication, competitions

Introducción

En los actuales planes y programas de estudio de las matemáticas para la escuela secundaria en México, se hace énfasis que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes. (Plan de estudios de matemáticas para secundaria)

La reforma curricular del 2006 llevada a cabo en La República Mexicana, propone una alternativa a una tradición de enseñanza que se cultivó durante mucho tiempo, en la que el énfasis se otorgaba al dominio de la ejecución de las operaciones aritméticas básicas, lo cual se tradujo en una gran inversión de tiempo y esfuerzo por parte de los profesores para que los estudiantes lograran un manejo aceptable de los algoritmos. Quizá la mayor crítica a éste enfoque es que propiciaba el mecanicismo que no favorece la comprensión de conceptos, ni el uso eficiente de la aritmética como herramienta para resolver problemas. A éste respecto la reforma curricular del 2006 disminuye considerablemente el énfasis en la enseñanza de las operaciones aritméticas y otorga principal atención a que los alumnos desarrollen y despierten la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, la creatividad para formular conjeturas, flexibilidad para poder modificar sus puntos de vista y su autonomía para enfrentarse intelectualmente a contextos, de tal manera que asuman una postura de confianza en su capacidad para aprender. La intervención en trabajo en equipo resultará de organizar actividades colectivas en la que se requiere que los alumnos enuncien, comuniquen, argumenten y muestren la importancia de los enunciados matemáticos, poniendo en práctica tanto las reglas matemáticas como socioculturales que los lleven a tomar decisiones para cada situación. Los contenidos que se estudian en la educación secundaria se han organizado en tres ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información.*

En el presente trabajo se estudiarán dos grupos de primer año de la escuela secundaria técnica 15 de H. Matamoros Tamaulipas, se registraran cada una de las sesiones en donde se vean temas relacionados al primer eje del nuevo plan de estudios de la reforma en educación secundaria y que corresponde al de: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, el programa está basado en competencias que la OCDE (2005), las define como la estrategia educativa que evidencia el aprendizaje de conocimientos, actitudes y comportamientos requeridos para desempeñar un papel específico, ejercer una profesión o llevar a cabo una tarea determinada y pondremos especial énfasis en una de las cuatro que marca el programa: la competencia de la comunicación. La comunicación y, específicamente, las interacciones docente-alumno y alumno-alumno se consideran en la actualidad la base del proceso de aprendizaje. El objetivo principal del trabajo pretende analizar las maneras cómo se introduce y desarrolla el sentido numérico y pensamiento algebraico en situación de enseñanza y dar cuenta de que sucede en la interacción con este eje temático.

Características del Programa de Educación Secundaria. Programa basado en competencias.

Los procesos de globalización que se extienden e imponen debido al desarrollo industrial, económico y tecnológico, ponen un gran énfasis en elevar la calidad y la producción, lo cual requiere también incrementar la productividad humana, basada en sus recursos. Una consecuencia de este debate se da en los programas de educación básica que han sufrido reformas, (la última en el 2006), en sus contenidos, en su metodología y en su estructura (OCDE, 2002, UNESCO, 1996, SEP, 2006b).

Para las instituciones educativas del país que sustentaron sus planes y programas en base a competencia tomaron como base los documentos: el informe Faure “aprender a ser” (1972), el informe Delors “La educación encierra un tesoro” (1996) en los cuales se explican los cuatro pilares de la educación: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir (Delors, 1996).

Estos principios acomodan los planes y programas de estudio en el funcionamiento de una mejor calidad, ya que constituyen los principios del aprendizaje para la vida. Delors (1996) afirma que cada uno de los principios ha de tomarse en cuenta de manera equitativa “a fin de que la educación sea para el ser humano, en su calidad de persona y de miembro de la sociedad, una experiencia global y que dure toda la vida en los planos cognitivo y práctico” (Delors, 1996). Para ello estructura seis tipos de competencias: pedagógicas, sociales, profesionales, técnica, básicas y claves. Sin duda esta tendencia refleja una política técnico – laboral que no logra dimensionar una formación integral de los jóvenes.

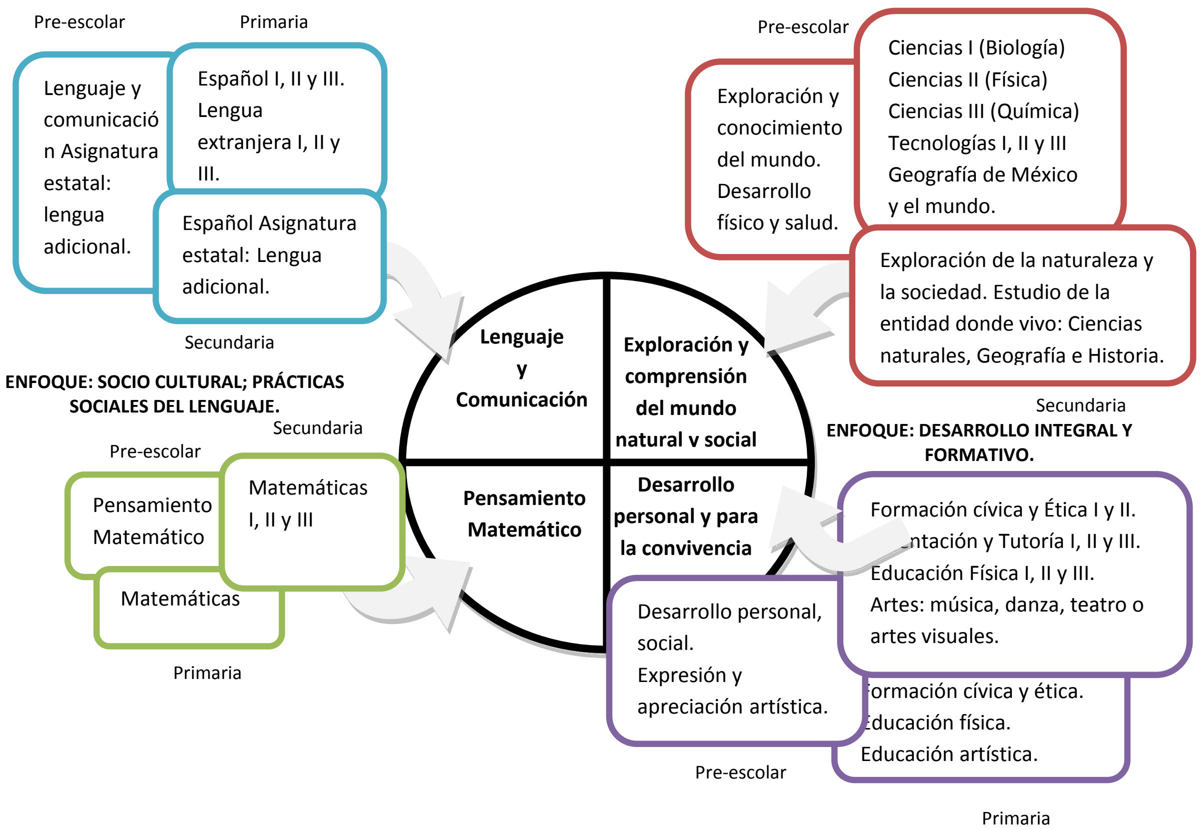
En el 2002 aparece el proyecto de “Definición y selección por competencias: bases teóricas y conceptuales” (DESECO) el cual esboza una nueva tipología de competencias y las define como “la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales o para realizar una actividad o una tarea” (Coll, 2006) en donde los contenidos curriculares promuevan y favorezcan el aprendizaje para que los alumnos lo asimilen y se apropien de él. Cada competencia descansa en una serie de conocimientos, habilidades, actitudes, valores, motivación y otros elementos que pueden ser reunidos para presentarse de una manera efectiva.

Las tipologías que define DESECO (2002) las divide en tres categorías que son: 1) Usar de manera interactiva un amplio rango de herramientas físicas y socioculturales para interactuar efectivamente con el ambiente adaptándolas a sus necesidades. 2) Interactuar en grupos heterogéneos, lo que implica la necesidad de poder comunicarse con otros. 3) Actuar de manera autónoma, tomar la responsabilidad de manejar sus propias vidas, situándose en un contexto social más amplio. Esto es para que haya un buen funcionamiento en la sociedad, tomando en cuenta los requisitos que ésta demanda, y en donde las competencias son “claves” para fomentar el desarrollo de habilidades, modo de actuar, para realizar una tarea. Sin embargo, hasta el 2006 la Secretaría de Educación Pública conviene y define la competencia como algo necesario para el desarrollo y crecimiento de un individuo y para responder a las necesidades de la sociedad de la información y conocimiento a la que se enfrentan.

Las competencias en el Plan y Programa de Estudio de Educación Básica

A partir de la Reforma Educativa en la Educación Secundaria, los programas de estudio que son documentos que establecen los propósitos, enfoques, metodologías y criterios para la planeación y evaluación que se pretende lograr en los alumnos en los diferentes niveles educativos, están orientados por cuatro campos formativos:

- Lenguaje y comunicación
- Pensamiento matemático
- Exploración y comprensión del mundo natural y social
- Desarrollo personal y para la convivencia



Los cuatro campos formativos de la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) se han organizado de forma horizontal y vertical, de tal manera que se permite apreciar la secuencia entre estos campos y asignaturas, pero al ser un esquema no permite apreciar de manera explícita todas las interrelaciones que existen entre ellas. La ubicación de los campos formativos y las asignaturas se centra en sus vinculaciones, así como en la importancia que revisten como antecedente o subsecuente de la disciplina.

Pensamiento numérico y lenguaje algebraico

Muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra. Kieran y Filloy (1989) y Malisani (1993) presentan un resumen bastante completo sobre las principales investigaciones relativas: a los errores que efectúan los alumnos cuando resuelven ecuaciones y problemas algebraicos y a los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

La vinculación entre contenidos del mismo eje, entre ejes distintos o incluso con los de otras asignaturas es un asunto de suma importancia, puesto que la tendencia generalizada en la enseñanza ha sido la fragmentación, sin posibilidades de establecer conexiones o de ampliar los alcances de un mismo concepto.

En estos programas, la vinculación se favorece mediante la organización en bloques temáticos que incluyen contenidos de los tres ejes.

Un elemento más que atiende la vinculación de contenidos es el denominado *Aprendizajes esperados*, que se presenta al principio de cada bloque y donde se señalan, de modo sintético, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio del bloque en cuestión. Aunque la responsabilidad principal de los profesores de matemáticas es que los alumnos aprendan esta disciplina, el aprendizaje será más significativo en la medida en que se vincule con otras áreas. (Plan 2006a)

En esta fase de su educación, por medio del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintas: como número general, como incógnita y en relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

La insistencia en ver lo general en lo particular se concreta, por ejemplo, en la obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón; en la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas; en el empleo de expresiones algebraicas que representan la relación entre dos variables, la cual, para este nivel, puede ser lineal (en la que la proporcionalidad es un caso particular), cuadrática o exponencial.

Desde este enfoque se pretende que el alumno obtenga una formación matemática para que sea capaz de afrontar las problemáticas que se suscitan en su vida diaria manifestando los conocimientos adquiridos así como el desarrollo de las actitudes y habilidades fomentadas en la educación secundaria. Aunque este panorama no se encuentra libre de obstáculos hay que estar preparados para afrontar situaciones problemáticas como las siguientes:

La oposición que presentan los alumnos para encontrar las posibles soluciones a problemas planteados, porque al principio les cuesta trabajo la depuración de ellas y habrá caos tanto por parte del alumno como por la del maestro. Pero vale la pena insistir para encontrar el camino correcto para tal situación problematizadora y además tomaran en cuenta que el ambiente del aula empieza a favorecerlos ya que hay intercambio de opiniones, acuerdos y desacuerdos para reflexionar sobre el tema a resolver.

Otra gran dificultad es la comprensión lectora por carecer del hábito de la lectura, ya que se presenta comúnmente el que den resultados diferentes al planteado por el docente, aunque para ellos este correcto porque su interpretación es lo que les sugiere, es allí donde el maestro tendrá que ver o estudiar los posibles conflictos presentados al momento de la interpretación del enunciado oral o escrito planteado.

El factor tiempo para las actividades planeadas ya que hay muchos profesores que comentan para llevar el enfoque didáctico en donde el alumno resuelva con sus propios recursos el problema y además lean, reflexionen, analicen, trabajen en equipos, esto les lleva a falta de tiempo para concluir el programa y prefieren volver al método tradicional, en donde el alumno se vuelve receptivo no importando si aprendió o no.

El trabajo en equipo es otra de las situaciones no menos importante que debemos enunciar ya que los alumnos presentan una actitud desfavorable a este tipo de actividades y en las cuales el docente debe contar con las herramientas necesarias para que el alumno comprenda que es un ejercicio en donde los puntos de vista enriquecen el suyo y desarrollan habilidades como la argumentación y competencias como la comunicación y además insistir en la enorme responsabilidad de resolver lo cuestionado, no de manera individual sino colectiva.

La competencia de la comunicación en la matemática

Si hacemos una reflexión sobre el informe PISA que en la versión inglesa no hay un término equivalente al de competencia (competence) sino *proficiency* y *literacy* respectivamente. Rico (2005) encuentra cuatro significados diferentes sobre la noción de competencia, no porque sean significados distintos, sino porque son conceptos diferentes que se han estipulado a un mismo termino de forma errónea. Rico (2005) empieza "competencia como dominio de estudio… equivalente a dominio de estudio", en el siguiente significado "conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos", ya que encuentra competencia de manera plural, es decir, competencias. En un tercer lugar aborda las competencias de manera general referente a "la manera en que distintas competencias que se invocan a distintos tipos y niveles de demandas, impuestos por distintos problemas matemáticos" (OCDE, 2004), por lo que sigue lo que se cito en el segundo lugar, hay un sin número de competencias. En último lugar se habla del nivel de competencia de los alumnos que se expresa en forma de escala y que para Rico (se presenta en el segundo significado) son competencias generales en donde los alumnos tendrían tareas detalladas que son capaces de realizar.

El informe especifica las competencias matemáticas propias de la escuela freudenthaliana, es decir, la mate matización horizontal y vertical que describieron años atrás autores como De Lange (1987) y en última instancia los expertos de PISA.

Si tomamos la palabra *proficiency* como pericia, sería entonces en dentro de las competencias matemáticas como las potencialidades que se actualizan en las acciones de los alumnos que se evalúan y permiten establecer niveles de pericia en las actuaciones.

En cuanto al término *literacy* es el adjetivo de letrado o cultivado, el término mathematical literacy se traduce como alfabetización matemática que es una acción en lugar de una capacidad, pero Rico (2006) nos dice que: "En los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la Alfabetización y concluyen con un mayor uso del término Competencia Matemática". Este término tiene que ver con la capacidad que tiene el sujeto para analizar, razonar y comunicar efectivamente al plantear, interpretar y resolver los problemas en una variedad de contextos, que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos u otros conceptos matemáticos.

En nuestros modelos de competencias no debe aparecer enunciados tan generales como "plantear y resolver problemas" como parece en el informe PISA ya que dentro de nuestro proceso de enseñanza aprendizaje no es una competencia, ya que en nuestro sistema escolar, la competencia consiste en resolver problemas, es decir, cuáles son los elementos que lo componen. Es decir, para elaborar un modelo de competencia solo hemos descrito que vamos a estudiar, y la clase de función eficaz (resolutor) que se pone en juego para resolver problemas.

Así podemos señalar por ejemplo a Polya (1945) en su modelo por fases como sugerencia para la resolución de problemas y por otro lado interpretamos los componentes del conocimiento y la conducta dados por Schoenfeld (1985) para dar cuenta de las conductas observables de triunfo o fracaso en la resolución de problemas que no están en las fases de Polya.

Conclusiones

Actualmente es un trabajo que se encuentra en proceso, no cuenta con resultados observables en las distintas consignas relacionadas con el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico cuyos temas se involucran en las dos primeras sesiones de cada bloque. Se han tomado los temas y subtemas del eje temático en cuestión en donde los resultados se puedan interpretar de diversas formas de manejar conceptualmente por ejemplo numero, incógnita y relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.se pone especial énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes en cuanto a la de generalizar propiedades aritméticas y geométricas. Se anexa una consigna didáctica que se utilizara en primer grado.

Referencias bibliográficas

Coll, E. (2006). "Vigencia del debate curricular. Aprendizajes básicos, competencias yestándares", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 8 (1).

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW &OC

DeSeCo, OCDE. (2005). Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo). Summary of the final report. En Rychen, Dominique y Salganik, Laura (Eds.), Key competencies for a successful life and a well-functioning society. Göttingen, Alemania: Hogrefe & Huber. Recuperado el 17 de agosto de 2010, de http://app.cepcastilleja.org/contenido/ccbb/saber_mas/deseco/5_deseco_final_report.pd

Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006. México: SEP

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva

psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

MALISANI, E., 1993. *Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici.* Tesi di Laurea, Università degli Studi di Palermo.

OCDE. (2002). Definition and selection of competences (DeSeCo). Theoretical and conceptual foundations. Recuperado el 18 de enero de 2009, de www.portal-stat.admin.ch/deseco/deseco_strategy_paper_final.pdf

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: OCDE

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En *VI Seminario de Primavera.*

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución

de problemas. *Revista de Educación, núm. extraordinario*, 275-294.

La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid: Fundación Santillana.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública (2006). Fundamentación curricular. Matemáticas. México: SEP

Secretaría de Educación Pública (2006). Programa Nacional de Educación 2006–2012 México: SEP.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

PLAN DE CLASE (1/5)

Escuela:____ Fecha:__________________
Profr(a)____
Curso: Matemáticas 1 Apartado: 1.1 Eje temático: SN y PA

Conocimientos y habilidades: Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos, posicionales y no posicionales.
Intenciones didácticas:
Que los alumnos utilicen y amplíen sus conocimientos sobre la lectura, la escritura, el orden y la comparación de números naturales.
Consigna:
Resolver los problemas que se plantean en la ficha 'Tarjetas Numéricas" del FAD. Matemáticas Educación Secundaria. Págs. 10 y 11.
Consideraciones propias:
Es necesario preparar 6 tarjetas para cada equipo con las palabras que se indican en la ficha y tener en reserva tarjetas con números, como se indica en la variante de la ficha previniendo que los alumnos terminen rápido la primera actividad.
Observaciones posteriores:

PLAN DE CLASE (5/5)

Escuela:____ Fecha:________________
Profr(a): ____
Curso: Matemáticas 1 Apartado: 1.1 Eje temático: SN y PA

Conocimientos y habilidades: Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos, posicionales y no posicionales.
Intenciones didácticas:

Que los alumnos conozcan las propiedades de los sistemas de numeración e identifiquen las características de los sistemas de numeración posicional y no posicional.

Consigna 1:
Trabajen en equipo y anoten en la tabla las cantidades que se piden de acuerdo con el sistema numérico indicado.

CANTIDAD	NUMERO DECIMAL	NUMERO ROMANO	NUMERO EGIPCIO	NUMERO MAYA	NUMERO BASE 2
Días que tiene un año					
Edad de uno de ustedes					
Número de alumnos en el grupo					
Año en que vivimos					

Consigna 2:
Anoten en la tabla una "estrellita" (*) si el sistema numérico cumple con la propiedad indicada o una cruz (x) si no cumple.

*	PRINCIPIO ADITIVO	PRINCIPIO SUSTRACTIVO	PRINCIPIO MULTIPLICATIVO	PRINCIPIO POSICIONAL
NUM. ROMANA				
NUM. EGIPCIA				
NUM. MAYA				
NUM. DECIMAL				
NUM. BASE 2				

¿Por qué consideras que a través de la historia de la humanidad el sistema de numeración decimal se ha universalizado?

Consideraciones previas:
Es importante analizar colectivamente los resultados la tabla de la consigna uno. Destacar la importancia del cero (invención), en los sistemas posicionales.
VINCULACION: Geografía, localización geográfica de Egipto, Italia, España, escribir una monografía.

Observaciones posteriores:

¿CÓMO CRECE CENTI? INTERACCIONES Y ARGUMENTOS EN EL AULA BAJO UN AMBIENTE DE COOPERACIÓN

María Eulalia Valle Zequeida, Magdalena Rivera Abrajan
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
mevzy@hotmail.com, magrivab@hotmail.com

Resumen. En este trabajo abordamos la problemática que surge cuando los alumnos trabajan en equipo en el aula de matemática pues generalmente el trabajo conjunto no se da de manera natural y reside en un trabajo individualista, asumimos como perspectiva teórica la Socioepistemología, debido a que ésta otorga fundamental importancia a las interacciones y acepta a la argumentación como una herramienta para la construcción social del conocimiento.

En éste artículo presentamos la validación del diseño de aprendizaje propuesto en Valle (2009) el cual caracteriza el proceso de una clase bajo un ambiente cooperativo, propone el rol del profesor y las pautas para la formación de equipos; la puesta se realizó con un grupo de alumnos de sexto grado de nivel básico recabando evidencia visual y audio gráfica la cual se analizó mediante un “análisis del discurso”, finalmente presentamos algunas reflexiones acerca de cómo fluyo el diseño en este contexto.

Palabras clave: trabajo cooperativo, proporcionalidad, interacciones, argumentos, construcción social del conocimiento

Abstract. In this paper we address the problem that arises when students work in teams in the mathematics classroom as a whole does not work usually occurs naturally and resides in an individual work, we assume the Socioepistemology theoretical perspective because it gives central importance to interactions and argumentation as a tool for social construction of knowledge.

In this paper we present the validation of the proposed learning design Valle (2009) which characterizes the process of a class under a cooperative environment, suggest the teacher´s role and guidelines for team building, the setting was done with students sixth grade basic level, collect audio visual and graphic evidence, analyze it through a “discourse analysis”, and finally offer reflections on how he behaved in this context design

Key words: cooperative work, proportionality, interactions, arguments

Introducción

Nuestro sistema educativo en México no solo se ocupa del desarrollo cognitivos de los niños y jóvenes, sino también del desarrollo de habilidades, actitudes y valores en los alumnos SEP (1993), los encargados de generarlos son los profesores durante el desarrollo de las distintas clases.

En este trabajo abordamos la problemática que surge en las clases de matemáticas cuando los docentes emplean la estrategia de formar equipos de trabajo para desarrollar alguna actividad de contenido matemático, teniendo como objetivo que todos los miembros del equipo trabajen de manera conjunta, es decir cooperativamente, construyendo así las herramientas necesarias durante el proceso para resolver la actividad ,además de desarrollar en ellos valores tales como la solidaridad y respeto entre ellos.

Sin embargo esto generalmente no sucede de manera natural, dado que en la mayoría de los casos el docente no toma un precedente de un ambiente cooperativo a la hora de planificar la clase, al final se trabaja de manera individual o tradicional sin que el alumno pueda validar o consensuar su conocimiento.

Adoptamos como perspectiva teórica al acercamiento Socioepistemológico, debido a que bajo esta visión podemos estudiar la construcción social del conocimiento (Arrieta 2003), dando fundamental importancia a los contextos y a la argumentación como herramienta para intervenir en ellos, respecto al aprendizaje este ocurre durante el ejercicio de diversas prácticas sociales las cuales son situacionales, es decir, están inmersos en un contexto social y en un tiempo determinado, el conocimiento así, se construye durante las interacciones de los actores y en la comunidad a la que pertenecen.

Particularmente presentamos la validación del diseño tomado de Valle (2009), en el cual se caracteriza el proceso de una clase de matemáticas bajo un ambiente de trabajo cooperativo; en dicho diseño se aborda la problemática antes mencionada bajo la misma perspectiva socioepistemológica, partiendo de la hipótesis de que si se logra un ambiente de cooperación en comunidades de estudiantes, éste propiciará la construcción social del conocimiento; ésta investigación consistió en la búsqueda de elementos que permitieran la caracterización de una clase de matemáticas bajo un ambiente de cooperación, propone el rol que deberá desempeñar el docente además de la manera en la cual deben de formarse los equipos, todo esto aterrizado en un diseño de aprendizaje fundamentado en siete momentos por los que pasa una clase bajo un ambiente de cooperación (Ferreiro, 2003).

Realizamos la puesta con alumnos que participaban en un curso de verano en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, las actividades fueron grabadas en audio y video, de la cuales se analizó el discurso, en este escrito presentamos extractos de diálogos que nos permitan observar aspectos relevantes durante el proceso de la puesta y que nos dan la pauta para posteriormente hacer una reflexión acerca del papel que desempeñó el diseño al ser llevado a cabo con los dichos estudiantes.

Partimos de la argumentación de que el aprendizaje en un ambiente cooperativo genera en los estudiantes distintos valores, entre ellos el de cooperación, solidaridad, respeto y tolerancia así como también desarrolla ciertas habilidades y actitudes, además de un pensamiento crítico necesario para el desarrollo de los estudiantes (Valle, 2009), las interacciones que provoca el ambiente permiten relacionarse con los demás participantes conformando así un aprendizaje integral.

Este tipo de aprendizaje genera un ambiente propicio para la construcción social del conocimiento, debido a su naturaleza, este provee de las condiciones necesarias para que las interacciones entre los actores se intensifiquen, aunado al hecho de que éstas llevan consigo la intención de trabajar de manera conjunta para la realización de las actividades propuestas en una clase de matemáticas, que a su vez estimula el desarrollo de habilidades, actitudes, valores y argumentaciones, que pueden ser de tipo verbal, escrito o gesticular, las cuales se vuelven un vehículo a través del cual los actores le dan distintos sentidos y significados a las herramientas construidas, propiciando que desarrollen la capacidad de debatir, defendiendo sus puntos de vista respecto al tema a tratar.

Aspectos metodológicos

Para llevar a cabo la puesta del diseño de aprendizaje contamos con la participación de seis alumnos de sexto grado de primaria próximos a ingresar a secundaria que participaban en un curso de verano que se dio en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, cuyas edades oscilaban entre los 12 y 13 años. Iniciamos tomando en cuenta las propuestas que se mencionan en Valle (2009) como el rol que desempeñara el docente y la formación de equipos.

Rol del profesor. Es un guía, el cual orientará a la comunidad de alumnos a que construyan herramientas matemáticas, recordemos que es en el nivel primaria donde los estudiantes no están acostumbrados a la independencia escolar, por lo que se sugiere que la guía sea gradual debido a que el proceso puede ser lento hasta lograr una comunidad que trabaje cooperativamente.

Formación de los equipos. Estos pueden formarse de tres maneras: por el maestro, al azar, o por los mismos alumnos. Este último es conveniente que se use cuando los alumnos ya estén familiarizados con el trabajo cooperativo y manejen las normas que se refieren a este ambiente, por consecuencia la manera en que se formaron los equipos para esta ocasión fue propuesta por el docente.

El diseño está estructurado en dos fases de dos y una actividad respectivamente la cual se realizó en una sesión de aproximadamente cuatro horas con un descanso intermedio de media hora.

El diseño consiste en presentarles un robot "Centi" formado por cierta cantidad inicial de cuadritos, cada parte de su cuerpo crecerá *n* cuadritos cada *m* días, donde *n* y *m* serán obtenidas por sorteo, el diseño consta de tres actividades las cuales van aumentando su grado de complejidad, se busca que los alumnos observando las relaciones que hay en el crecimiento del robot respecto al tiempo y cantidad de cuadritos que aumento logren identificar la relación de proporcionalidad y buscar alguna herramienta matemática para resolver la actividad.

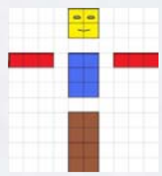
Puesta en escena

Iniciamos con una tabla en la cual se muestran medidas iniciales del robot que servirán de base para las tres actividades.

Actividad 1

Nuestro robot "Centi" tiene estas medidas en cada parte de su cuerpo:

PARTES DEL CUERPO	CUADRITOS
Cabeza	4
Torso	6
Pierna izquierda	4
Pierna derecha	4
Brazo izquierdo	3
Brazo derecho	3



El docente formó los equipos y posteriormente se ubicaron a manera de que todos tuvieran acceso al material además de que todos pudieran opinar sin que quedara alguien aislado

Actividad 2

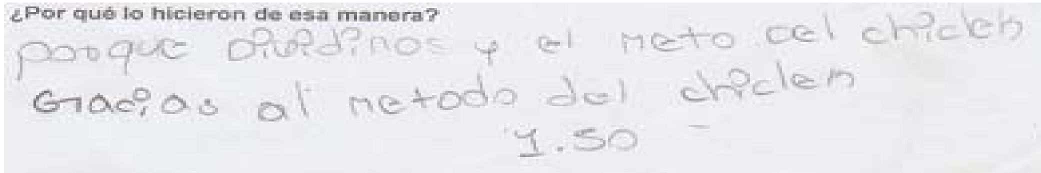
En esta actividad los estudiantes buscaran como herramienta la proporcionalidad.

En el equipo uno, inicialmente tenía muy marcado un líder quien tomaba la actividad él solo, pero posteriormente en base a la orientación del docente, empezaron a participar los demás discutiendo una vía de solución.

Partes del cuerpo	Cada cuanto tiempo crecerá	Cuantos cuadritos	Al cabo de 6 días cuanto es lo que ha crecido	Cuáles son las medidas finales
Cabeza	4	6	19	13
Torso	5	3	3.6	9.6
Pierna izquierda	5	3	3.6	7.6
Pierna derecha	5	3	3.6	7.6
Brazo izquierdo	5	3	3.c	6.6
Brazo derecho	5	3	3.6	6.6

¿Qué hicieron para llegar al resultado?

Sin embargo los que dieron la pauta para la solución fueron los del equipo dos ya que desde un inicio había mayor interacción comenzaron a hacer analogías de su contexto social para llevarlas a la actividad y buscar una vía de solución que posteriormente nombrarían como el método del chicle.



¿Por qué lo hicieron de esa manera?

porque dividinos y el meto del chicleh
Gracias al metodo del chiclen
1.50

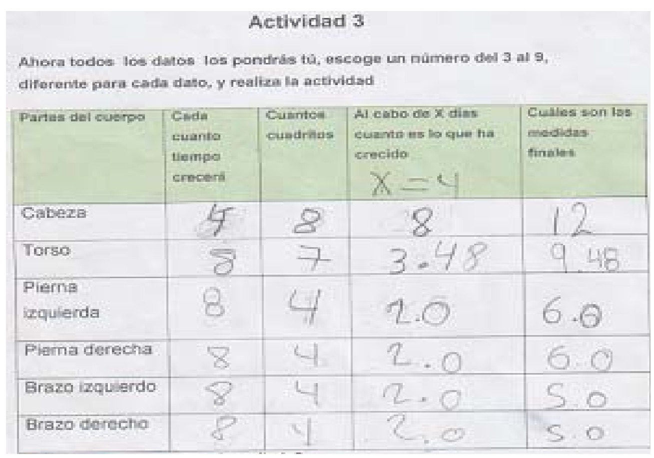
A continuación presentamos extractos de dialogo:

Moisés:	*Perla solo está observando*
Docente	*A ver dales ideas ellos no pueden, miren piensen así 4 días son 6 cuadritos*
Moisés	*Pues viendo cuánto vale 1 día*
Docente	*A ver, si cuánto vale 1 días*
Moisés	*No dice*
Moi	*Pues 1.50 + 1.50 = 3*
Karen	*Como le hiciste para sacar 1.50 a ver explícanos*
Moi	*Bueno, voy sumando 1.5 más 1.50 es lo que vale un chicle aquí afuera*
Docente	*Entonces si vale 1.50 al sumar te da 6*
Karen	*Saldría 9*
Mg	*Porque fui sumando 1.50+ 1.50, entonces 3,6,9*
Moi	*Porque sale así , pues por el chicle*
Docente	*A ver entonces al cabo de 6 días cuanto he crecido Centi*
Todos E2	*Son 9*

Este equipo pidió pasar al pizarrón a exponer la forma en la que habían resuelto la actividad, mientras que al otro equipo que no la había resuelto le sirvió de ejemplo para ellos buscar su propio método.

Fase 2

Para la fase dos, que consistió en una actividad, ambos equipos interactuaban considerablemente entre ellos exponiendo sus ideas y consensando los resultados.



Actividad 3

Ahora todos los datos los pondrás tú, escoge un número del 3 al 9, diferente para cada dato, y realiza la actividad

Partes del cuerpo	Cada cuanto tiempo crecerá	Cuantos cuadritos	Al cabo de X días cuanto es lo que ha crecido X = 4	Cuáles son las medidas finales
Cabeza	5	8	8	12
Torso	5	7	3.48	9.48
Pierna izquierda	8	4	2.0	6.0
Pierna derecha	8	4	2.0	6.0
Brazo izquierdo	8	4	2.0	5.0
Brazo derecho	8	4	2.0	5.0

Además en el equipo dos, que fue quien inicio lo del método del chicle, se notaba esa intención de cooperación dentro del equipo ya que compartían ideas y se cuestionaban entre ellos tratando de argumentar de una manera más solida sus respuestas.

Conclusiones

En nuestra perspectiva teórica la Socioepistemología, es durante el ejercicio de las prácticas sociales donde surge la construcción social del conocimiento, estas son moduladas por distintas interacciones las cuales permiten que los actores construyan argumentos para validar las herramientas construidas en el proceso, sin embargo hemos observado que la intencionalidad de la práctica es fundamental para lograr esto.

En las comunidades lo anterior ocurre de manera natural, sin embargo en la escuela o alguna situación escolar al no estar presente implícitamente la pertenencia a una comunidad de alumnos haciendo matemáticas, esto no es tan inmediato, es aquí donde adquiere pertinencia el trabajo cooperativo.

En el transcurso de la puesta en escena, observamos que en cada uno de los equipos se destacó un líder, en el equipo uno tal líder asumió el mando sin tomar en cuenta las opiniones de los demás elementos, sin embargo el docente jugó un papel importante al negociar la intervención de los demás compañeros de equipo para resolver la actividad haciendo hincapié del trabajo conjunto y propiciando en ellos interacción ; por su parte en el equipo dos el elemento líder fungió como organizador y promotor de las interacciones en el seno de su equipo, en este caso la intencionalidad de trabajar conjuntamente fue de una manera un poco más inmediata.

De las intervenciones del docente surgieron argumentos en relación a la actividad que se desarrollaba, utilizaron analogías de su contexto social que fueron encaminadas hacia la búsqueda de una herramienta que les permitiera solucionar la actividad, tal fue el "método de chicle" que posteriormente adoptarían como método de solución de la siguiente actividad. De esta manera se pone en relieve la importancia, en la construcción de herramientas, utilizar analogías del contexto social.

El consenso al final de las actividades permitió a los equipos exponer sus ideas argumentando para convencer a los demás de sus puntos de vista, en este ejercicio se dió una retroalimentación por ambos equipos.

En general durante el transcurso de las actividades se observaron algunos aspectos que nos dan la pauta para observar un desarrollo en los equipos para trabajar cooperativamente, tales como la apertura del líder a las opiniones de sus compañeros para resolver la actividad, el incremento de interacciones, argumentos tomando como referencia situaciones de su contexto social y un sentido de pertenencia que adquirió el grupo donde encontraron una herramienta que les sirvió para realizar la actividad.

Cabe mencionar que creemos que el trabajar cooperativamente en los alumnos no solo bastaría una clase, sino más bien es un proceso, particularmente en esta puesta mediante estas actividades se observaron aspectos que habrán de potencializarse mediante la práctica de ésta forma de trabajo, así, los equipos se convierten en microcomunidades en las cuales cada miembro asume un rol, adquiriendo un sentido de pertenencia , comprometiéndose a la construcción de herramientas para sí mismo y para los demás, al paso del tiempo esta formación permitirá que los alumnos se identifiquen con la comunidad global de la clase, de tal forma que se logre un trabajo cooperativo general.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis Doctoral no publicada, CINVESTAV- IPN, México.

Ferreiro, R. (2003). *Estrategias didácticas del aprendizaje cooperativo.* México: Editorial Trillas.

SEP (1993). *Planes y programas de estudio de educación básica.* México.

Valle, M. (2009). *Interacciones en el aula bajo un marco cooperativo, el crecimiento de Centi.* Tesis de Licenciatura no publicada, UAG, Guerrero.

CONCEPTUALIZACIONES DE DOCENTES Y DIRECTIVOS DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACION SECUNDARIA. UN ESTUDIO DE GÉNERO EN EL D. F., MEXICO

Martha Patricia Ramírez Mercado, Yolanda Chávez Ruiz
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav (México)
mpramirez@cinvestav.mx, ychavez@cinvestav.mx

Resumen. En este documento se reporta la investigación sobre las conceptualizaciones de los docentes y directivos acerca de las matemáticas y la clase de matemáticas, de las percepciones y expectativas que tienen del desempeño matemático del alumnado, cómo conciben y evalúan el desempeño del estudiantado en esta asignatura y si ésta difiere para alumnas y alumnos. Finalmente se indaga sobre las creencias que poseen los docentes y directivos sobre los factores asociados al rendimiento de los alumnos en matemáticas y la influencia de los distintos contextos en que viven. El análisis de los discursos obtenidos de las entrevistas se realiza desde la perspectiva de género. Con este fin se entrevistó a catorce directivos y quince docentes de matemáticas de educación secundaria de escuelas generales y técnicas ubicadas en el Distrito Federal. El estudio es parte de un estudio mayor denominado "Aspectos Educativos y Género. Modelos de Intervención para el Mejoramiento de las Capacidades de Aprendizaje en Matemáticas", un proyecto de colaboración entre el Cinvestav y el Instituto Nacional de las Mujeres.

Palabras clave: matemáticas, perspectiva de género, directivos, profesorado, conceptualizaciones

Abstract. This paper reports research on the conceptualizations of teachers and school directives' regarding mathematics and the teaching of mathematics, together with the perceptions and expectations they have of the mathematical performance of the students, how they conceive and evaluate such performance in this subject and whether this differs from boys and girls. Finally, this paper delves into the beliefs that teachers and school directives' have concerning the factors associated to students' yield in mathematics and the influence of the different socio-cultural contexts in which they live. With this objective, fourteen school directives' and fifteen mathematics teachers of both general and technical secondary schools were interviewed in Distrito Federal. The study is part of a larger one entitled "Educational Aspects and Gender. Intervention Models for the Improvement of the Capacities in the Learning of Mathematics".

Key words: mathematics, gender perspective, directives, teachers

Introducción

En México, los resultados de estudios y evaluaciones internacionales (PISA) y nacionales (ENLACE) acerca del nivel de logro matemático de niñas y niños es bajo. De acuerdo a estos resultados, el alumnado carece de los conocimientos matemáticos mínimos requeridos para ser competente en un mundo globalizado, situación que se agrava para la población femenina que obtiene puntajes de logro matemático más bajos que la población masculina. Así por ejemplo la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares 2008 (ENLACE) aplicada por la Secretaría de Educación Pública (SEP), los alumnos superan significativamente (3.9%) el desempeño de las alumnas. Estos datos han generado interés y preocupación entre algunas organizaciones sociales como el Instituto Nacional de las Mujeres.

Por otro lado, las investigaciones internacionales y nacionales, realizadas en las últimas cuatro décadas, reconocen que son muchos los factores que influyen en el aprendizaje matemático de las alumnas y los alumnos: por ejemplo: las creencias y concepciones (Andrews y Hatch, 2000); los mitos y estereotipos (Fennema y Leder, 1990); las actitudes, la auto-confianza y las emociones (Leder, 1992, 1996, 2001; Forgasz y Leder, 2000; Ursini, Sánchez, & Orendain, 2004; Ursini, Ramírez, & Sánchez, 2007; Ursini, & Sánchez, 2008); los comportamientos y conductas (Meyer y Koehler, 1990; Figueiras et al., 1998;) y, las interacciones docente-alumnado, (Wimer, Rinedour y Place 2001; Tiedemann, 2006; Ramírez, 2006).

Backhoff et al. (2005, 2006, 2007), identifican factores asociados a estas diferencias entre las cuales se encuentran: el familiar (estructura familiar/padre, familiar/madre, conflictos familiares, supervisión padres); el económico (estatus económico, trabajo labores domésticas, conductas violentas, lengua indígena, limitaciones físicas) y finalmente el sexo.

En este documento se considera que los factores asociados inciden en el nivel de logro matemático, pero no lo determinan, son los factores construidos socioculturalmente (creencias, concepciones, actitudes…) asociados a un cuerpo social quienes juegan este papel. Siendo el contexto escolar el ámbito que los legaliza e institucionaliza y donde el profesorado y personal, responsables de los procesos educativos, son parte del sistema que vehiculizan estas construcciones. Al respecto Thompson (1992) señala que algunos elementos que constituyen el pensamiento de los profesores son las creencias, sus conocimientos y las concepciones.

Así, la concepción que el profesorado tenga de las matemáticas y su función social determina como conciben su enseñanza; la selección, jerarquización y nivel de profundidad de los contenidos del programa; que evaluar y como evaluar, el trabajo en clase, las dinámicas de interacción, todos ellos factores que inciden de manera diferenciadamente en el logro académico de alumnas y alumnos, así como en sus actitudes y su autoconfianza hacia las matemáticas. En cuanto al conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas Shulman (2005) destaca que el conocimiento del profesor debe centrarse en varios tópicos: el contenido, la didáctica, el conocimiento de los alumnos, de los contextos educativos, así como de los objetivos y finalidades educativos.

Marco teórico

El estudio, se enmarca en los estudios de género, entendidos como los constructos socioculturales, que organizan y clasifican las relaciones sociales de los cuerpos sociales sobre los cuerpos sexuados, determinando lo normativo de ser hombre o mujer en un espacio y tiempo determinado. Son producto de un proceso socio-histórico-cultural constituido por prácticas, símbolos, representaciones, normas y valores sociales, cuyo fundamento es la diferencia sexual (Lamas, 1986; Scott, 1996; Bustos, 1994). Con el término “cuerpo social” hacemos alusión a las diferencias que no son corporales, sino asignadas socialmente, están presentes en la cultura y se aceptan sin cuestionamientos de acuerdo al sentido común, dado que se viven en la experiencia cotidiana desde el nacimiento.

En lo subsiguiente el concepto sexo hace referencia a las características anatómicas y fisiológicas derivadas de la biología.

Metodología

Con la intención de conocer cuáles son las conceptualizaciones de los docentes y directivos acerca de las matemáticas; sus percepciones y expectativas sobre el desempeño matemático del estudiantado, y si éstas difieren para alumnos y alumnas; conocer sus criterios de evaluación y su apreciación de cómo se ve afectado el aprovechamiento del alumnado por los distintos contextos en que éste vive, se entrevista a 14 directivos y 15 docentes de educación secundaria de 12 escuelas generales y 4 escuelas técnicas ubicadas en el Distrito Federal.

Las dos entrevistas fueron de tipo semiestructurado y validadas a través de un proceso de inter-jueceo. Se llevaron a cabo de manera individual al interior de los planteles educativos y fueron audio-grabadas. Los datos obtenidos se analizaron en un primer momento con el apoyo del programa Alceste (De Alba, 2005) y posteriormente el análisis de contenido (Bardín, 1996).

Las 16 escuelas seleccionadas para llevar a cabo la investigación pertenecen a un grupo de 56 escuelas secundarias que presentaron diferencias significativas entre alumnas y alumnos en la media de respuestas correctas a los ítems de la Prueba Enlace 2008.

Resultados

Los datos obtenidos a través de cada una de las entrevistas, si bien arrojaron resultados interesantes en particular, mostraron tres puntos coincidentes que son los que se reportan.

Cabe señalar que para los directivos existen tres factores determinantes en el desempeño matemático del alumnado: el profesorado, el razonamiento distinto de hombres y mujeres, los padres de familia, siendo este último factor el más importante. Para el profesorado entrevista consideró cuatro aspectos a investigar: significados que poseen a cerca de enseñar matemáticas, expectativas de desempeño del estudiantado, criterios de evaluación y percepción del desempeño matemático de alumnas y alumnos, y su percepción del contexto familiar en el que se desenvuelven.

a) Percepción de las matemáticas y de la clase de matemáticas

Los profesores tienen diferentes creencias sobre las matemáticas que se enseñan en la secundaria y la utilidad que puedan tener para sus alumnas y alumnos. Algunos profesores, sobre todo los que vienen de una formación en ingeniería y arquitectura, perciben que las matemáticas tienen que ver con muchos aspectos de la vida y les serán útiles a sus alumnas y alumnos si se deciden a estudiar cualquier profesión. Perciben a las matemáticas como algo sencillo y valioso, aunque no dan detalles respecto a dicha valía.

> *[Profesor]: "Yo les digo a mis alumnos que las matemáticas son como una novela, si dejan de leer un capitulo de una novela ya no le van a entender o le entenderán a medias y eso no puede ser ya que las matemáticas les van a dar todo..."*

Por su parte los directivos consideran que las matemáticas están presentes en la cotidianidad y fuertemente relacionadas con la concepción de que éstas se encuentran de manera ***"natural"*** en el entorno natural y social), sin embargo, las matemáticas a las cuales hacen alusión son las básicas (Aritmética). Una indicación importante que el discurso deja entrever, es el hecho de que las matemáticas adquieren relevancia a partir de su uso, dadas las exigencias del régimen económico en el cual se vive, de ahí la necesidad, de acuerdo a directivos y profesorado de aplicarlas en la vida cotidiana. Además de considerarlas el antecedente indispensable para accesar a otras disciplinas y a niveles educativos superiores.

En relación a la clase de matemáticas, el profesorado establece relaciones directas con las distintas maneras de concebir la enseñanza de las mismas. Así, se observan tres modelos de enseñanza: el primero de ellos donde la enseñanza de las matemáticas se reduce a una explicación acompañada con ejemplos, seguido de la explicación se procede a "comprobar" si las y los alumnos recibieron lo trasmitido por la o el profesor; dicha comprobación se hace mediante ejercicios similares a los trabajados en la clase.

Un segundo modelo es el de resolución de problemas donde el docente presenta un problema y los alumnos deberán buscar las posibles soluciones, y donde los contenidos previos adquieren gran relevancia. Finalmente un tercer modelo muestra una convivencia de los dos primeros.

Es necesario señalar que en los tres modelos referidos, las matemáticas se ven reducidas a una asignatura de tipo operatorio, donde los procedimientos y algoritmos adquieren gran valor, por lo que se empeñan en que el alumnado domine dichos procedimientos. De manera recurrente, los docentes expresan preocupación porque el alumnado no domina las operaciones básicas, lo que justifica que al inicio de ciclo escolar dediquen gran parte del tiempo para que el estudiantado tenga un dominio algorítmico.

[Profesor]: "Los niños llegan sin los conocimientos necesarios para que yo pueda iniciar mi programa entonces tengo que dar un repaso desde lo que ven en tercero de primaria ya que medio suman, medio restan, medio multiplican y no saben dividir, de las fracciones ni hablar ni siquiera saben qué es una fracción…"

Desde la perspectiva de los directivos, la clase de matemáticas presenta muchos problemas que están directamente relacionados con el perfil profesional de los docentes. Para ellos la heterogeneidad académica del profesorado es el núcleo de esta problemática, hecho documentado ya por Sandoval (2008) e Ynclán (2005). Explicaron que la gran parte del profesorado son profesionistas ajenos a la docencia que, por distintas razones, no ejercen la profesión para la que se prepararon y ***"acaban dando clases"*** por ello, no cuentan con conocimientos de didáctica que permita al alumnado aprender la disciplina, promoviendo su interés o gusto por la misma; por el contrario, se prioriza la memorización y la mecanización.

[Director]:"…este, estamos llenos de personas que no son docentes. Si usted, si ustedes hacen ahorita un estudio, se va a encontrar que en secundaria generales, el 70% de los docentes no son docentes, son egresados de universidades y licenciaturas, y en las técnicas, el 90%, 95%, ajá, son licenciados, arquitectos, ingenieros y demás".

[Directora]: "… la SEP, nos manda maestros que no sé quién autorizó alguna vez, que muchas veces no cubren ni los requisito".

El personal directivo establece que los maestros normalistas poseen la didáctica para enseñar matemáticas, sin embargo tienen graves faltantes en el conocimiento y dominio de la asignatura. Señalan además, que en algunos casos el profesorado conjunta la falta de conocimiento matemático y el de la didáctica (Idem).

Si bien la mayor parte de los directivos, consideran que la didáctica es un elemento importante en la enseñanza de las matemáticas, la supeditan al dominio del conocimiento matemático por parte del profesor. Su preocupación es que el alumnado tenga los conocimientos necesarios al egresar de la escuela secundaria, de ahí, que tiendan, a asignar los grupos de tercer grado *[Director]"profesores que den buenos resultados*", aunque no tengan formación docente, siendo estos en todos los casos varones. También atribuyen a los profesores la capacidad de imponer la disciplina y tener el control de los grupos, por el contrario asignan los primeros años a maestras dado que facilitan la transición de la escuela primaria a la escuela secundaria *[Director] "son más cariñosas, más comprensivas, más cuidadosas…"*

Los directivos establecen diferencias sustanciales en el desempeño profesional de maestras y maestros, ellas les representan mayores problemas laborales (faltas, llegadas tardes, incapacidades, cuidados maternos, no entregan los trabajos en tiempo y forma, etc.), en tanto que los maestros son directos, resuelven, y si se atrasan se muestran preocupados, no faltan, no llegan tarde, son responsables como se ejemplifica:

> *[Director] "… En segundo año, el maestro es muy directo, eso sí, él motiva, pone problemas concretos, explica, pone ejercicios, evalúa, y si se atrasan, regresan, este, muy preocupado. Ni falta, ni llega tarde, entonces, está preocupado por sus grupos…. La maestra ha ido muy lejos, entonces, me falta seguido, casi todo el día llega una hora más tarde, todo los problemas del mundo ¿no?*

Lo anterior, nos muestra que el personal directivo toma como fundamento las características de género atribuidas a unos y otras para la organización y el logro del propósito educativo de la asignatura, donde también se intersecan las preocupaciones y dobles o triples jornadas de trabajo a las cueles se enfrentan los docentes.

Una queja sentida por parte de los directivos es la falta de docentes, en general, para todas las asignaturas. Señalan que la plantilla docente se encuentra incompleta y que muchos grupos quedan descubiertos por largos períodos. Situación que apunta hacia un desconocimiento de quiénes son y donde laboran las profesoras y profesores de este nivel por parte de las autoridades educativas (hace falta un padrón escolar, estatal y nacional del profesorado que permita prever estos conflictos).

b) Expectativas y desempeño matemático de niñas y niños.

Para el profesorado como para el personal directivo, tanto las niñas como los niños tienen las mismas posibilidades de aprendizaje, sin embargo hay algunos matices que reflejan percepciones diferenciadas de género. Para la mayor parte del profesorado, las niñas tienen un mejor rendimiento en matemáticas

> *[Director]:"pues ahí tiene el ejemplo la mayoría de las escoltas la integran niñas".*

Expresan que con las niñas se puede trabajar mejor ya que son ordenadas y más responsables con las tareas que se solicitan en clase, mientras que los niños son descuidados y no tienen interés en presentar sus trabajos de manera "adecuada".

En cuanto al desempeño de las niñas y niños en los exámenes las posturas de docentes y directivos difieren, para algunos los niños son quienes obtienen mejores calificaciones, para otros (la gran mayoría) son las niñas quienes logran las mejores notas. Sin embargo, todos atribuyen esta diferencia a ciertas características propias de cada uno de los sexos y no a las capacidades intelectuales de las niñas y niños.

El personal docente y directivo establece que el bajo desempeño que tiene el alumnado está directamente relacionado con dos hechos: la diferencia biológica y la diferencia construida socialmente a través de mitos y estereotipos.

Con base a estas justificaciones atribuyen a niñas y niños características particulares sustentadas en observaciones, juicios de valor y posturas propias, y dan cuenta de cómo aprenden niñas y niños. Así la mayor parte de profesores y directivos observan que los varones son hábiles para captar, son confiados y seguros para llevar a cabo cualquier tarea, pero son descuidados

> *[Director] "…hacen las cosas al ahí se va y sale", "…son muy fodongones".*

A partir de los juicios de valor que elaboran acerca de los alumnos, consideran que estos son: analíticos, críticos, abiertos y con ***"una capacidad tremenda",*** son ellos quienes desarrollan mejor los conocimientos matemáticos, ya que son capaces de llevarlos a la práctica:

> *[Director] "… Los hombres son, la mayoría: "Ahí le entrego en una hojita, le entrego acá". Pero parece ser que los conocimientos los tienen mejor establecidos y a la hora de ponerlos en práctica, y lo hacen".*

Desde su experiencia personal describen a los niños como prácticos, directos, capaces de poner atención y con una mayor capacidad de abstracción.

Por otro lado caracterizan a las niñas como "macheteras", participativas, dedicadas, responsables, dinámicas, estudiosas, no faltistas, controlables, llegan temprano, sus trabajos son limpios, pulcros, al igual que sus participaciones y su comportamiento; que si bien, las cosas les cuestan *"un poquito más de trabajo",* logran llevarlas a cabo.

A partir de los juicios de valor que elaboran acerca de las alumnas, consideran que estas son: ansiosas, nerviosas, creativas, inquietas y faltas de carácter; sin embargo, establecen que en general son *"las mejores del plantel".*

Los profesores y directivos explican también cómo las diferencias en las características de aprendizaje de niñas y niños inciden en la evaluación. Señalan que las niñas, gracias a que cumplen con requisitos específicos, logran buenas evaluaciones, sin que esto refleje necesariamente el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas

> *[Director] "…Las niñas a lo mejor están memorizando, están, tratando de pasar y de pasar con buenas notas, y se valen de todo, todo lo posible "La asistencia cuenta, no*

falto, la puntualidad cuenta, no llego tarde, si entrego tareas y son 4 puntos, entrego todas las tareas", ¿sí? El niño ¡no!, el dice: "¡No traje!, ¡no lo hice!, deme chance, otra oportunidad", y en el examen a lo mejor sacan el 6 o un 7, pero ¡sí! tienen los conocimientos, sí saben aplicarlos.

Factores asociados al aprendizaje

En este apartado se abordan los factores asociados a los niveles de logro matemático (y podemos afirmar de toda la educación secundaria) desde la perspectiva del profesorado y el personal directivo.

Se consideran los factores extrínsecos a la escuela (variables socioeconómicas y culturales de la familia) y los factores intrínsecos a la escuela (o escolares).

Para los docentes y directivos las variables socioeconómicas y culturales de la familia (nivel educativo y formas de control social intrafamiliar) son las que tienen un mayor peso e impacto que cualquier otra variable referida a la escuela o la docencia. De ahí que gran parte de la responsabilidad del bajo desempeño del estudiantado la atribuyen a los padres de familia donde la falta de interés de los padres de familia en sus hijos, es la principal causa del bajo desempeño escolar

[Director]: "…los niños de esta escuela vienen de papás de una generación que yo le puse "ni me". Ni me comprometo con mi hijo, ni lo ayudo, ni nada y si se queda dormido pues tampoco lo mando a la escuela"

Explican que los padres salen a trabajar dejando solos a niñas y niños la mayor parte del tiempo. Este abandono implica delegar a la escuela toda la función educativa formal, sin el apoyo de los padres en la labor docente

[Director]: "los padres no dan el apoyo necesario a los niños para que éstos mejoren su aprendizaje, y sólo acuden a la escuela bajo dos circunstancias: cuando tienen reportes y se solicita su presencia en la escuela y cuando reprobaron la asignatura"

Los directivos consideran como ideales dos condiciones para el aprendizaje del alumnado: el nivel de preparación académica de los padres y la atención que les proporcionen. Según ellos, estas condiciones posibilitarían que el alumnado adquiriera conocimientos que se fortalecerían continuamente con la atención y apoyo de los padres. Sin embargo, muy pocos los padres tiene la posibilidad de apoyar académicamente a los alumnos y alumnas ya que en su gran mayoría son obreros

[Director]:"… la mayoría de los padres de aquí es una la población clase media baja, son obreros. No tengo casi profesionistas, uno, dos o tres papá y mamás…"

Otra problemática es la violencia intrafamiliar, en ocasiones, generada por la separación o divorcio de los padres.

Como factores intrínsecos a la escuela, el profesorado y directivos identifican falta de apoyo institucional, el número de alumnos por grupo, la problemática del estudiantado del turno vespertino (repitencia, mala conducta y bajo rendimiento), falta de comunicación y compromiso entre el profesorado, la falta de dominio de contenidos matemáticos mínimos requeridos para el grado por parte del alumnado, y el clima de violencia e inseguridad al interior y exterior de la escuela (donde el grafitti, las pandillas y el tráfico de drogas representan los mayores problemas, sobre todo en el turno vespertino).

> *[Director]: "…además de que estamos muy al pendiente en cuanto a pleitos porque aquí es una zona muy conflictiva. Hay drogas afuera, hay delincuencia está muy complicado ¿no? asaltan a los niños aquí en la esquina, entonces, la patrulla no nos apoya…"*

Las y los profesores miran como una desventaja el número de alumnas y alumnos que atienden por grupo (en promedio 45 estudiantes), esta situación se agrava en el turno vespertino ya que la problemática de las y los alumnos es mucho más compleja. Asimismo, Identifican como deficiencias escolares la falta de comunicación y compromiso entre los profesores ya que es recurrente el discurso sobre las deficiencias de las y los alumnos en cuanto al manejo de contenidos de años anteriores, manifiestan que la falta de compromiso de los profesores es causa de que los alumnos no tengan los conocimientos necesarios para el tercer grado

> *[Profesor]: "Hay muchos problemas entre los compañeros y luego mejor no opino, mejor me quedo callado porque luego me busco problemas y ni el saludo contestan…"*

Conclusiones

Tanto el personal docente como directivo **c**onsideran que la mayor parte de la problemática del bajo desempeño del alumnado se debe a factores extrínsecos a la escuela (situación familiar de los educandos, bajo nivel económico, social y cultural, violencia familiar), y en menor medida a factores intrínsecos a ella, como perfiles profesionales docentes, falta de formación pedagógica de gran parte del profesorado, uso de métodos mecanicistas y transmisionistas, reproducción de formas de enseñanza obsoletas, énfasis en la enseñanza reiterada de algoritmos, el control disciplinario del alumnado, falta de personal, el turno escolar y el tipo de población estudiantil que asiste, la violencia al interior y exterior de los centros educativos.

Sin embargo en relación a las diferencias en el nivel de logro matemático de alumnas y alumnos, estas se justifican, por el profesorado y directivos, a partir de comportamientos, conductas y habilidades atribuidas a cada uno de los sexos, con sus consecuentes implicaciones cognitivas. Lo que deja entrever que las diferencias de género en el aprendizaje de las matemáticas responden a estereotipos sociales que han permitido la elaboración de subterfugios donde las niñas son "el mejor alumnado", pero donde los niños son quienes "construyen, desarrollan y poseen el conocimiento matemático".

Referencias bibliograficas

Andrews, P. and Hatch, G.(2000). A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching. Educational Studies in Mathematics, 43 (1), 31-64.

Backhoff E., Andrade E., Monroy L., Tanamachi, M., Bouzas, A., Sánchez A., Peón M. (2005) *Estudio comparativo de la educación básica en México*. 2000-2005. INEE. México.

Backhoff E., Andrade E., Peon A., Sánchez A., Bouzas A. (2006) *El Aprendizaje del Español, las Matemáticas y la Expresión Escrita en la Educación Básica en México: Sexto de Primaria y Tercero de Secundaria*. INEE. México.

Backhoff E., Riaño A., Hernández E., García M. (2007) *Aprendizaje y desigualdad en México. Implicación de Política Educativa en el Nivel Básico*. INEE. México.

Bardin, L. (1996). El análisis de contenido. Madrid, España: Ed. Akal Universitaria.

Bustos, O. (1994) La formación de género, el impacto de la socialización a través de la educación. En CONAPO, Antología de la sexualidad humana. México CONAPO-Porrúa.

De Alba, M. (2005). Programa de análisis de textos Alceste (análisis de lexemas co-ocurrentes en los enunciados simples de un texto). Cuadernillo de trabajo. Departamento de Sociología. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Fennema, E., & Leder, G.(1990) Mathematics and gender. New York: Columbia University.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (1998) Género y matemáticas. Madrid. Síntesis.

Forgasz, H. y Leder, G. C. (2000) The "mathematics as a gendered domain' scale. Nakara, T. y Koyama, M. (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for de Psychology of mathematics Education*. Hiroshima University. Japan pp. 2-273- 2-279.

Grouws (Ed.), Handbook of research in mathematics teaching and learning (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.Tiedemann, J. (2002). Teachers' gender stereotypes as determinants of teacher perceptions in elementary school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 50(1), 49–62.

Inclán, G; Zúñiga, E (2005) En busca de dragones. Imagen, imaginario y contexto del docente de secundaria. Centro de investigación para el éxito y la calidad educativa S.C. Castellanos Editores. México.

Lamas, M. (1986) La antropolgía feminista y la categoría de género. En: Nueva Antropologia, Estudios sobre la mujer, problemas teóricos. NAH Revista de Ciencias Sociales. Vol. VII, No. 30 México. GV Editores PP 173-198.

Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research in mathematics education (pp. 597–622). New York: Macmillan.

Leder, G. C., Forgaz, H. J., & Solar, C. (1996). Research and intervention programs in mathematics education: A gender issue. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Vol. 2 (pp. 932–961). Utrecht, The Netherlands: Kluwer.

Leder, G. C. (2001) Mathematics as a gender domain: New measurements tools. *Annual Meeting of American Education Research Association* (AERA). Seattle, E.U.

Meyer, M. R., & Koehler, M. S. (1990). Internal influences on gender differences in mathematics. In E. Fennema & G. C. Leder (Eds.), Mathematics and gender (pp. 60–95). New York: Teachers Londres: Teachers College, Columbia University.

Ramirez, M.; Ursini, S. (2008) Influence of the female teachers' gender vision on the type of interactions they establish with boys and girls in the mathematics classroom. ICME. Monterrey, México.

Revue. 91 Thompson, (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A.

Scott, J. (1986). Gender ouseful category of historical analys. American Historical

Sandoval Flores Etelvina (2008) La trama de la escuela secundaria. Colección Reforma Integral de la educación básica. SEP México.

SEP (2008) Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares 2008.

Shulman (2005) Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma en Profesorado. En Revista de currículum y formación del profesorado, 9, 2 (2005)

Ursini, S., Sánchez, G., & Orendain, M. (2004). *Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñada con computadora. Educación Matemática*, *16*(3), 59–78.

Ursini, S., Ramírez, M. P., & Sánchez, G. (2007). Using technology in the mathematics class: How this affects students' achievement and attitudes. Proceedings of the 8th ICTMT (Integration of ICT into Learning Processes) Czech Republic: University of Hradec Králové, [CD-ROM].

Ursini, S., & Sánchez, G. (2008). Gender, technology and attitudes towards mathematics: A comparative longitudinal study with Mexican students. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(4), 559–577.

Ursini, S. (2008). Diferencias de género en la representación social de las matemáticas: Un estudio con estudiantes de secundaria. In N. Blázquez & F. Flores (Eds.), Herramientas metodológicas y epistemología de género. CIICH/UNAM. México.

Wimer, J.; Ridenour, C; Thoma, K.; y Place, W. (2001) Higher order teacher questioning of boys and irls in elementary mathematics classrooms. *The Journal of Educational Researches*. Vol.95 Nº2. Páginas 84-91

GUATEMÁTICA: UN ESFUERZO POR MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA PRIMARIA GUATEMALTECA

Rina Rouanet, Alejandro Asijtuj, Cayetano Salvador
Proyecto GUATEMÁTICA/JICA, Ministerio de Educación (Guatemala)
guatematica.jica@gmail.com, rina.rouanet@gmail.com

Resumen. El Proyecto "GUATEMÁTICA" ha tenido como objetivo el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en el nivel primario. Fue ejecutado en cinco departamentos de la República de Guatemala en donde se desarrollaron actividades tales como: elaboración y validación de textos de matemática y guías para docentes del nivel primario, capacitación docente, monitoreo y acompañamiento en el aula. Los resultados obtenidos muestran que las escuelas piloto mejoraron en la conducción de la clase, comparativamente con las escuelas control. En cuanto a rendimiento, los alumnos de escuelas piloto de primero a sexto grado obtuvieron un promedio de 50.48; mientras que en escuelas control fue de 23.56.

Palabras clave: validación, capacitación docente, monitoreo

Abstract. The project "GUATEMÁTICA" has been aimed at improving the teaching of mathematics at the primary level. It was executed in five departments of the Republic of Guatemala, where activities such as: development and validation of mathematics textbooks and teacher guides at the primary level, teacher training, monitoring and support in the classroom, were developed. The results show that the pilot schools improved in the conduct of the class, compared with control schools. As for performance, pilot school students from first through sixth grade students had an average of 50.48, while in control schools it was 23.56.

Key words: validation, teacher training, monitoring

Los resultados de pruebas nacionales e internacionales, han puesto en evidencia el bajo rendimiento de matemática en alumnos del nivel primario en Guatemala. A pesar de los esfuerzos por mejorar la enseñanza de las Matemáticas en los últimos años, los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas de rendimiento académico, demuestran que aún hay retos por superar. En las evaluaciones nacionales, únicamente el 41.5% de estudiantes de primero, el 39% de tercero y el 37% de sexto primaria, alcanzan el logro esperado, (Ministerio de Educación, 2006). Esto significa que más de la mitad de los niños y niñas realizan tareas simples de reproducción de definiciones y cálculos, sin lograr llegar a un nivel de pensamiento lógico matemático en el que se interprete información para resolver problemas utilizando números naturales y racionales, medidas e interpretación de información en tablas y gráficas en situaciones de la vida cotidiana (Ministerio de Educación, 2006). Dichos resultados, se asocian a diferentes factores, algunos de los cuales inciden positivamente, por ejemplo: el tiempo que semanalmente se dedica a la enseñanza de esta área, el tipo de actividades que realizan los y las estudiantes y el contar con textos adecuados, la metodología empleada por el docente, entre otros.

Es por ello que durante varios años, la Agencia de Cooperación Internacional del Japón -JICA- ha estado trabajando con maestros y maestras guatemaltecas, para promover una metodología de enseñanza que, además de otorgarle mayor protagonismo a niños y niñas, en la construcción de su propio aprendizaje; promueva el desarrollo de actividades que les permita construir los conceptos matemáticos a partir de su contexto y el desarrollo de competencias básicas del área. Para ejecutar el Proyecto se seleccionaron 20 escuelas piloto del nivel primario, en cinco departamentos del país: Quetzaltenango, San Marcos, Sololá, Suchitepéquez y Guatemala. El propósito principal del Proyecto GUATEMÁTICA, ha sido, mejorar la enseñanza de la matemática. A partir de la identificación de factores asociados a la calidad con incidencia relevante, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

Elaboración y validación de textos para alumnos (as), basados en el Currículum Nacional Base: Para cada grado, se elaboró un texto y se fue validando gradualmente hasta completar la escolaridad primaria. (2003-2008).

Elaboración y validación de guías para docentes*:* como una herramienta de apoyo para el desarrollo de la clase y en la que se promueve un mínimo de 125 clases en promedio.

Capacitación a docentes de las escuelas piloto*:* en dichas capacitaciones se reforzó el contenido matemático y se enseñó la metodología (estudio didáctico de los contenidos matemáticos).

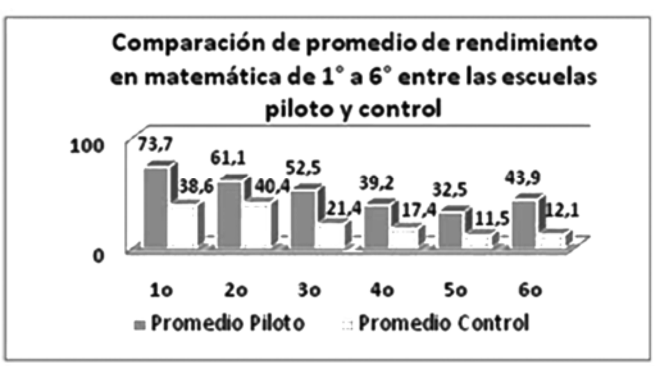
Acompañamiento en el aula: el cual además de permitir observar clases y brindar asistencia técnica a docentes, contribuyó con la validación de los textos y las guías**.**

Socialización de experiencias entre docentes: al final de ciclo escolar se realizaron encuentros de socialización para compartir la experiencia de aplicación de la metodología.

Para evaluar los resultados de la intervención, se llevó a cabo una serie de evaluaciones y observaciones cuyos resultados se irán describiendo a lo largo del documento.

Se realizaron observaciones de clase con guía de indicadores y se aplicó evaluación comparativa pre y pos test a los alumnos de las escuelas piloto y alumnos de escuelas control, encontrándose los siguientes resultados:

Las escuelas piloto mejoraron el resultado global en el estudio de la clase: Metodología, comunicación docente-alumno, alumno-docente, uso de materiales, participación activa de los alumnos, instrucciones precisas por parte del docente, monitoreo del docente al trabajo de sus alumnos, entre otros indicadores). Las Escuelas Piloto obtuvieron un **60%** de aspectos



positivos observados, en tanto que las control únicamente un 24% (JICA-GUATEMÁTICA, 2008). Para constatar cambios en el rendimiento se efectuaron pruebas de rendimiento cada año y se pudo evidenciar que los alumnos y alumnas de las escuelas piloto, obtuvieron mejor rendimiento que, los de las escuelas control. El cuadro y el gráfico que se muestra a continuación muestra los resultados de cada grado, comparativamente.

Fuente: Archivo Proyecto GUATEMÁTICA. Resultado de Evaluación final del Proyecto, 2008.

Aunque comparativamente se obtuvieron mejores resultados en las escuelas piloto que en las escuelas control, los alumnos de 3ª hasta 6ª, grado, aún no alcanzan el nivel de logro esperado, agudizándose esta situación en las escuelas control y particularmente en los grados más altos del nivel primario.

Por su parte, la Universidad Del Valle de Guatemala, en coordinación con el Proyecto Fortalecimiento al Desarrollo Educativo –FODE-, de la Cooperación Canadiense, utilizaron los textos de GUATEMÁTICA de primero y segundo grado, en su área de intervención. Para determinar los resultados, realizaron un estudio comparativo siendo el resultado que, las escuelas que usaron GUATEMÁTICA en primer y segundo grado tienen mejor rendimiento (media 16.27; DE= 6.55) que las escuelas control que no lo utilizaron (media 13:63; DE= 5.74) en primer grado, En segundo grado las piloto obtuvieron (media 11.98; DE= 6.42) mientras que las de control obtuvieron (media 9.78; DE = 4.74). (FODE-UVG, 2006).

Por otra parte, se realizaron encuestas de opinión con docentes y estudiantes para conocer la percepción de estos hacia la materia, antes y después del Proyecto y se pudo evidenciar una mejora significativa en cuanto al gusto por la matemática.

Por las evidencias en la mejora en el rendimiento en el área de matemática, el Ministerio de Educación de Guatemala, tomó la decisión de adoptar la metodología de GUATEMÁTICA, para la enseñanza de la matemática a nivel nacional, por lo que ha reproducido y distribuido los textos y guías de GUATEMÁTICA a todas las escuelas del país, convirtiéndose en el texto oficial de matemática en el nivel primario.

A continuación se describirán algunas generalidades de la propuesta metodológica de GUATEMÁTICA, la cual es operativizada en los textos y guías elaborados y difundida en los procesos de capacitación docente realizados en el marco del Proyecto.

La propuesta sugiere partir de una situación real y cotidiana conocida por el niño (mundo real) para desarrollar el contenido de aprendizaje, por ejemplo, no es lo mismo iniciar el concepto de suma presentado el procedimiento para el cálculo, que iniciar haciendo referencia a una situación real que se llega a representar con una operación de suma *(concreto)*.

Posteriormente, la representación de la situación cotidiana con materiales y la manipulación de los mismos, es condición clave para facilitar la comprensión del concepto o procedimiento. Con la manipulación de los materiales se puede generar la necesidad de utilizar un procedimiento matemático que finalmente sea generalizable para llegar a la abstracción (*Semiconcreto*)

Una vez comprendido el concepto o procedimiento se trabajará en el mundo abstracto a través de la ejercitación y aplicación de los conocimientos (mundo matemático). (JICA-GUATEMÁTICA, 2007)

Pasar por las tres etapas descritas, puede garantizar mejores y más significativos aprendizajes, además de respetar las etapas del desarrollo del pensamiento lógico matemático en el educando.

De acuerdo a la propuesta de GUATEMÁTICA, la clase se desarrolla en tres momentos que son: *lanzamiento, práctica y ejercitación*. El lanzamiento constituye la etapa en la que se provoca motivación y predisposición positiva al tema que se verá; generalmente se realiza a través de una pregunta generadora que hace el docente, para que los alumnos generen ideas y compartan sus respuestas. El *segundo* momento de la clase (práctica) es cuando se construye el concepto, se generaliza la fórmula (si este fuera el caso) y se dejan claras las ideas esenciales. Es una etapa práctica y de descubrimiento de la solución del problema con apoyo docente. El *tercer* momento de la clase es cuando se genera la práctica individual para reforzar el tema visto. El docente sólo es observador y puede ser un apoyo ante las dificultades encontradas por el alumno. (JICA-GUATEMÁTICA, 2007).

Con GUATEMÁTICA se busca en todo momento el protagonismo de los alumnos en el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Dichas actividades propician que ellos piensen, razonen, aprendan por sí mismos y ejerciten lo aprendido.

Es oportuno mencionar otras características generales de la propuesta metodológica:

- Se propone continuamente la autoevaluación como un medio para estimular al alumno a aprender por sí mismo. Esta condición se evidencia en los textos de los alumnos.
- Aprovecha los conocimientos previos para la construcción de nuevos conocimientos, lo cual contribuye a darle un carácter significativo al proceso de aprendizaje.
- Demanda el desarrollo de los contenidos con secuencia lógica, gradual y progresiva.

Requiere del docente ser facilitador de los aprendizajes que implica proponer situaciones problemáticas interesantes, promover la exteriorización de ideas por parte de los alumnos y dirigir discusiones en torno a las soluciones. El docente persigue lograr el dominio del contenido de aprendizaje de todos los alumnos antes de pasar a la siguiente clase.

- Cada clase tiene propósitos e indicadores de logro bien definidos según la secuencia, tiempo, tipo de clase y nivel del grupo.

Para conocer el punto de vista de los docentes que han utilizado la metodología de GUATEMÁTICA (docentes de las escuelas piloto), en el año 2008 se realizó una encuesta de opinión sobre las fortalezas y ventajas que esta propuesta metodológica les ofrece. El instrumento incluyó los siguientes aspectos: cambio de actitud hacia la matemática, fortalezas didácticas alcanzadas y cambios notados en los alumnos. A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos.

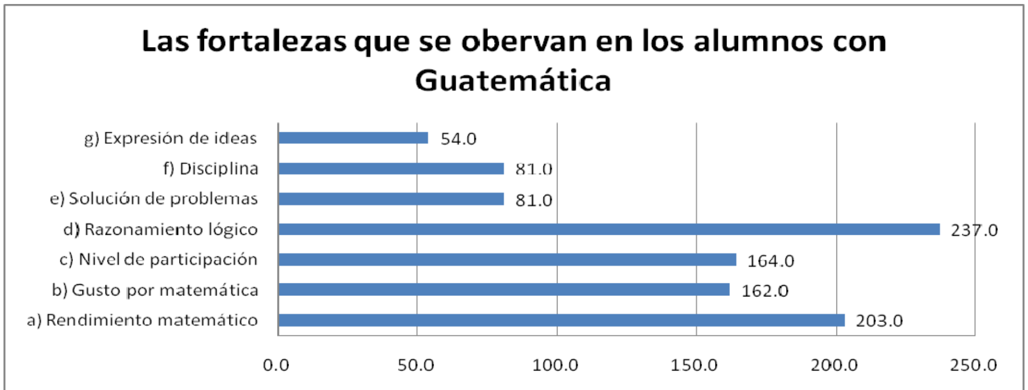
	a) Dominio matemático	b) Enseñanza de matemática	c) Uso de materiales didácticos	d) Manera de involucrar a los alumnos	e) Uso del pizarrón	f) Evaluación formativa	g) Planificación anual
Puntos	232.0	161.0	226.0	233.0	41.0	39.0	16.0

Fuente: Informe de evaluación final Proyecto GUATEMÁTICA, 2009

De acuerdo con los resultados anteriores, se puede confirmar que los docentes que conocen y han aplicado la metodología de GUATEMÁTICA, opinan favorablemente en cuanto a ella, atribuyéndole principalmente las siguientes ventajas: lograr un mayor involucramiento de sus alumnos, un mayor dominio de los contenidos matemáticos, uso de material didáctico, mejora la enseñanza.

Las ventajas reportadas por los docentes, fueron contrastadas con el resultado de **estudio de la clase**, que tal y como se indicó al inicio, es una observación que se realizó a las clases de los docentes involucrados a lo largo de la ejecución del proyecto (6 años) y mediante guía de observación se registraron los avances en los siguientes indicadores: comunicación docente-alumno, alumno-docente, uso de materiales, participación activa de los alumnos, instrucciones precisas por parte del docente, monitoreo del docente al trabajo de sus alumnos, entre otros indicadores. Las Escuelas Piloto obtuvieron un **60%** de aspectos positivos observados, en tanto que las control únicamente un **24%,** (JICA-GUATEMÁTICA, 2008)

En lo que respecta a las fortalezas observadas en alumnos por parte de los docentes, luego de usar GUATEMÁTICA, se visualizan los siguientes resultados según la encuesta:



	a) Rendimiento matemático	b) Gusto por matemática	c) Nivel de participación	d) Razonamiento lógico	e) Solución de problemas	f) Disciplina	g) Expresión de ideas
Puntos	203.0	162.0	164.0	237.0	81.0	81.0	54.0

Fuente: Informe de evaluación final Proyecto GUATEMÁTICA, 2009

Se resalta como fortalezas principalmente el razonamiento lógico, el rendimiento matemático, el nivel de participación y el gusto por la matemática.

Por otra parte, el Proyecto GUATEMÁTICA realizó un estudio para conocer la percepción (antes y después del Proyecto) de los alumnos que participaron en el piloto, en cuanto al gusto por aprender matemática. A continuación se muestra una tabla de resultados:

	Tenía temor	No me gustaba	Me gustaba	Me gustaba mucho	Me encantaba
Antes del Proyecto (%)	15.9%	19.4%	29.4%	17.1%	12.3%
Después del Proyecto (%)	0.8%	2.8%	43.7%	21.0%	29.8%

Fuente: JICA-GUATEMÁTICA, 2008

Los resultados de la encuesta realizada, reflejan un mejoramiento en el gusto por la matemática y una significativa reducción en cuanto al temor a la materia.

A continuación se presentan las razones (de mayor frecuencia priorizadas) por las cuales les gusta matemática a los alumnos entrevistados:

"Porque es fácil de aprender"

"Porque puedo descubrir las respuestas"

"Porque me siento feliz cuando puedo resolver un problema"

(JICA-GUATEMÁTICA, 2008,)

Ante la evidencia de mejora, como los resultados presentados por otros donantes que usaron la propuesta metodológica de GUATEMÁTICA, el Ministerio de Educación de Guatemala ha hecho que las escuelas del país asuman los materiales y la metodología y que cada día avance más en la adopción de la propuesta.

Actualmente el Ministerio de Educación ha puesto en marcha el Programa Nacional de Matemática "Me gusta Matemática" cuyo propósito principal es propiciar un fortalecimiento en las competencias didácticas de los docentes con la propuesta de GUATEMÁTICA, para una mejor entrega educativa del área de matemática y lograr así un mejoramiento en el rendimiento de los alumnos.

Referencias bibliográficas

FODE, UVG. (2006). *Informe de Evaluación Escuelas,* Guatemala: Universidad del Valle.

JICA, GUATEMÁTICA. (2007). *Principios básicos de la Metodología de GUATEMÁTICA*, Guatemala: CIMGRA.

JICA, GUATEMÁTICA. (2008). *Lecciones Aprendidas de GUATEMÁTICA*. Informe de cierre, Guatemala.

Ministerio de Educación. (2006). *Resultado de Pruebas Nacionales*. Guatemala: DIGEDUCA.

LA CADENA EXPLANANS-EXPLANANDUM COMO RECURSO PARA ELABORAR EXPLICACIONES FUNCIONALES DEL ACCIONAR EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

Oswaldo Jesús Martínez Padrón
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)
ommadail@gmail.com

Resumen. Este documento reporta las bondades de un recurso representacional conformado por cadenas de razonamiento de la forma explanans→explanandum que se utilizó para ilustrar las explicaciones funcionales derivadas del accionar de los protagonistas de unas clases de Matemática desarrolladas para formar docentes integradores. Sobre la base de una investigación cualitativa apoyada en el método etnográfico, las cadenas se construyeron con información recolectada mediante observaciones, anotaciones, revisión de documentos y entrevistas, en profundidad, aplicadas a informantes clave y destinadas a buscar episodios críticos contentivos de sistemas de creencias que sustentaran dichas explicaciones y permitieran describir y comprender las acciones observadas durante el proceso de formación de dichos docentes. En la experiencia, se determinó que tales cadenas resultan adecuadas para apoyar explicaciones funcionales de situaciones como la memorización de conceptos, ejemplos y ejercicios de Matemática.

Palabras clave: educación matemática, explanans→explanandum, sistema de creencias

Abstract. This paper reports the benefits of a representational resource consists explanans→explanandum chains form that was used to illustrate the functional explanations derived from the actions of the protagonists in some math classes developed to train teachers integrators. Based on qualitative research supported by the ethnographic method, the chains were constructed with data collected through observations, annotations, document reviews and interviews, in-depth, applied to key informants and aimed at finding critical episodes that have belief systems support these explanations and to describe and understand the actions observed during the process of training these teachers. In our experience, it was determined that such channels are adequate to support functional explanations of situations such as memorization of concepts, examples and exercises in mathematics.

Key words: mathematics education, explanans→explanandum, belief system

Introducción

Este documento forma parte de una investigación de campo (Martínez Padrón, 2008) cuyo objetivo fue comprender las acciones de los protagonistas de la clase (docentes y estudiantes) de Matemática en función de su teoría en uso, apuntando la mirada hacia el sistema de creencias y concepciones que ellos tienen en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática. Lo observado se validó con un conjunto de postulados teóricos elaborados con apoyo de una investigación documental que consideró tanto esos factores del dominio afectivo como otros aspectos concomitantes debidos a un proceso de formación de docentes.

La investigación se apoyó en el método etnográfico y desarrolló en una Universidad Pedagógica donde se observaron estudiantes que cursan la carrera de Educación Integral, destacando que ellos ya enseñan contenidos matemáticos en los primeros seis (6) grados de la Educación Básica venezolana, sin poseer el título correspondiente.

Se declara que aquí sólo se reporta parte de lo analizado y descrito en la investigación mencionada. Particularmente, da cuenta de las bondades de las cadenas de razonamiento de la forma *explanans→explanandum* que permitieron ilustrar las descripciones y explicaciones funcionales derivadas del accionar del docente y sus estudiantes, sobre la base de procesos inductivos, deductivos, generadores o constructivos que sirvieron de aliados para: (a) develar aspectos de las teorías en uso y explícitas de los protagonistas de la clase, y (b) identificar, describir, analizar, relacionar, comprender e interpretar las acciones sustentadas en el sistema de creencias que expresan o manifiestan los actores en relación con la Matemática.

Sistemas de Creencias

Las creencias son concebidas como referentes cognitivos que sirven de soporte lógico y psicológico para condicionar lo afectivo de los sujetos, predisponiéndolos a actuar según ello. Se consideran como puntos de vista fundados en las experiencias y representan construcciones que el sujeto realiza para entender su mundo, su naturaleza o su funcionamiento, jugando un papel preponderante tanto en la generación de acciones específicas como en la mediación para su comprensión (Ernest, 1989; Ponte, 1994; 1999; Contreras, 1998; Gil, 2000; Gómez Chacón, 2000; Callejo y Vila, 2003; Vila y Callejo, 2004; Martínez Padrón, 2005).

Como otros factores del dominio afectivo, las creencias impactan las decisiones que se toman en al aula y las tendencias de un importante número de acciones de los protagonistas de la clase (Martínez Padrón, 2008). Tal aseveración es afianzada por Gil (2000) cuando señala que lo cognitivo del docente está guiado por su sistema personal de creencias, el poderoso impacto que tienen en la selección de los contenidos y en su enseñanza, en los modos de aprender dichos contenidos y en las pautas de comportamiento que orientan la planificación de los docentes.

Martínez Padrón (2008) concreta que las creencias pueden considerarse como axiomas o principios rectores que forman parte del conocimiento intersubjetivo indicando que, difícilmente, se sostienen con independencia de otra u otras. En consecuencia, configuran una estructura que Vila y Callejo (2004) denomina sistema de creencias, la cual es dinámica y compleja y se puede pensar como una red organizada (Callejo y Vila, 2003) que se va reajustando en la medida que el sujeto contrasta sus visiones con la práctica.

Metódica

El propósito central de este documento es mostrar las bondades que ofrecen las cadenas de razonamiento de la forma *explanans→explanandum,* como recurso útil que fue utilizado en una investigación de campo, de carácter descriptivo-interpretativo, apoyada en el método etnográfico. El recurso fue utilizado para organizar relaciones que permitieron describir, densamente, y explicar, funcionalmente, lo que aconteció en un aula de clase matemática, en función del sistema de creencias que subyace en las acciones de los protagonistas de la clase y de otros factores preponderantes del dominio afectivo

El grupo docentes observados fue formado para enseñar tanto contenidos matemáticos en los primeros seis (6) grados de la Educación Básica venezolana, como otro tipo de contenidos, destacando que dichos docentes ya ejercen la docencia sin poseer el título correspondiente. En este sentido, son poseedores de información relevante para el estudio, en relación con la matemática que se enseña, se aprende o se evalúa.

Para la ubicación de los aspectos referidos a sistemas de creencias se utilizaron fuentes directas constituidas por las manifestaciones o expresiones de tipo verbal o gestual capturadas a través de observaciones directas, entrevistas y otras producciones tales como tareas de Matemática, ejercicios, notas realizadas en los cuadernos de apuntes y pruebas escritas aplicadas para evaluar el rendimiento académico de los estudiantes.

Lo que dijeron o hicieron los actores que participaron en cada clase fue analizado a través de las interacciones comunicacionales que se produjeron en el aula de clase, sobre la base de la consideración de la cuaterna didáctica: alumno-docente-Matemática-contexto. Para ello fue útil una versión pragmática del Análisis del Discurso (Padrón, 1996) que permitió describir y explicar las acciones generales, tomando en cuenta que ellas son definidas sobre la base de los comportamientos más las intenciones de los actores.

Los significados de los textos fueron considerados como contextuales y con ellos se construyeron las cadenas de razonamiento, en función del anidado de creencias y otros factores del dominio afectivo que subyacen en las acciones de los protagonistas de la clase.

Los Explanans y el Explanandum

Lo que piensa sobre la Matemática es inmanente a los actos intencionales y cognitivos de la mente misma. En relación con lo que acontece en la clase de Matemática, lo que se hace y la manera de hacerlo genera contenidos que producen determinados significados que hacen que los protagonistas de la clase de Matemática reaccionen de manera favorable o desfavorable en relación con la asignatura. Estos significados se pueden captar o identificar por lo que dicen, por los gestos que hacen e incluso, por lo que no dicen o por lo que no hacen en dicha clase. Todas estas cosas se combinan, unas con otras, en la mente de los estudiantes hasta construir una representación social de la Matemática que, en muchos casos, no ha favorecido su enseñanza, su aprendizaje o la evaluación de los contenidos presumiblemente aprendidos. Tal situación podría explicarse mediante relaciones causales que suponen que determinadas creencias, opiniones, motivaciones, concepciones, sentimientos, emociones, actitudes o ideas pudieran ser la causa de pensar que la Matemática es difícil, aburrida, complicada o compleja, generando un mito representado por un constructo social elaborado sobre la base de los factores en referencia. Sin embargo, para comprender esta representación social se podría pensar en una esquematización funcional del significado del constructo, lo cual pudiera mostrarse de variadas maneras. En este sentido, se elaboraron explicaciones de talante funcional graficadas con apoyo de un conjunto de partida, conformado por sistemas de creencias y otros factores anidados del dominio afectivo en relación con la Matemática, y de un conjunto de llegada que podría estar conformado por otras creencias, concepciones, ideas, representaciones sociales o mitos que, a su vez, pudieran estar sustentados en otras creencias o cualquier otro factor previamente enunciado.

Aunque la explicación en el campo de la etnografía ha generado controversias (Martínez, 1999), se destaca que la misma no es de tipo causal, a pesar de que Martínez y Martínez (1998) indican que explicar está basado en la causalidad y es inherente a las ciencias naturales. Para darle una mayor cobertura al término, Velasco y Díaz de Rada (1999) establecen y mantienen que en ciencias sociales es posible encontrar modelos de explicación tales como: (a) causales: dan cuenta de la existencia de un fenómeno, (b) genéticas o evolutivas: dan cuenta del desarrollo y fases de un fenómeno, y (c) composicionales: establecen relaciones entre sus partes.

Hempel (citado en Velasco y Díaz de Rada, 1999) señala que "explicar un fenómeno es dar causas de él, ya se trate de hechos, tendencias o regularidades" (p. 56). También declara que la etnografía no es incompatible con la explicación, vista ésta como un tipo de comprensión. Siendo así, se puede aseverar que los etnógrafos también pueden reflexionar sobre las causas y trabajar con conjuntos de hechos asociados. Erickson (1989) también señala que desde la investigación interpretativa es posible solicitar los porqués, en lugar de plantearse correlaciones entre conductas y otras variables. Aclara que la naturaleza de la causa, asumida desde la perspectiva interpretativa, puede ser considerada en ciencias sociales y señala que "una explicación de la causa humana debe incluir la identificación de la interpretación del significado del actor" (p. 215). Velasco y Díaz de Rada (1999) agregan que cuando la explicación se utiliza como forma de conocimiento es necesario tomar en cuenta los hechos asociados que pueden encajarse con una causalidad múltiple esquematizable en cadenas de la forma *explanans→explanandum* que, según Echeverría (1999), expresan una explicación donde: (a) el *explanans* está compuesto por proposiciones que deben ser verdaderas y con algún contenido empírico, permitiendo dar cuenta del fenómeno mediante leyes, condiciones iniciales/factuales o antecedentes de dicho fenómeno; y (b) el *explanandum* que se deduce como consecuencia lógica del *explanans* y está constituido por el enunciado relativo a un hecho y debe permitir describir el fenómeno mediante datos observables.

Seguramente, el *explanandum* es relativo, por ejemplo, a algún sistema de creencias y podría generar una causalidad no lineal. Este tipo de explicaciones es señalado por Martínez (1999) como funcional, válido para las ciencias sociales y, en este caso, se relaciona con el significado de las cosas y de las acciones de los sujetos. Se concreta, entonces, que la búsqueda de explicaciones en la etnografía se concentra en las causas y lo que se espera es "situar el fenómeno en un entramado de relaciones (causales o no)" (Velasco y Díaz de Rada, 1999, p. 235) que viene dado por el contexto.

Una muestra del entramado de explicaciones funcionales

Lo que acontece en un aula de clases de matemática, puede describirse, analizarse, interpretarse, comprenderse o explicarse de múltiples maneras y con apoyo de variados recursos. No obstante, en este caso se centrará la atención en las cadenas de la forma *explanans→explanandum* construidas con algunos de los datos obtenidos de episodios representativos observados en las clases de matemática y focalizados en las entrevistas realizadas a los informantes clave.

Con la intención de situar, por ejemplo, la ausencia de aprendizaje de contenidos matemáticos, se construyó el Gráfico 1 constituido por un entramado de acciones que se apoyan en creencias sostenidas por los estudiantes, concepciones derivadas de las acciones del docente y unas aseveraciones provenientes de la interpretación de las entrevistas que, luego de triangularse sus contenidos, fueron relacionadas con el hecho de que la preparación para las pruebas (evaluaciones sumativas) escritas, de este tipo de estudiantes, es realizado y declarado de manera mecánica, lo cual se materializó por medio de la memorización de los conceptos, los ejemplos y los ejercicios dados en clase o colocados en situación de trabajos escritos que enviaba el docente de manera previa a dichas pruebas. Pudo corroborarse, también, la ausencia de procesos de contextualización, descontextualización o recontextualización que, como se sabe, pueden dar fe de algún aprendizaje.

Se declara que, de manera sostenida, pudo observarse que las creencias y las concepciones de los docentes y de sus estudiantes, que dependen de ellas, constituyen elementos clave para la actividad matemática, generando comportamientos y acciones que no favorecen el abordaje adecuado de la clase, el aprendizaje real de los contenidos matemáticos y el éxito de estos docentes en el proceso de enseñanza. En Martínez Padrón (2008) pueden encontrarse los insumos que sustentan que casi el 92% de los estudiantes observados en esta investigación realmente son docentes en servicio y más del 72% ya laboran en la Educación Básica, es decir, enseñan, por obligación, contenidos matemáticos en algunos de los seis (6) primeros grados de la Educación Básica venezolana.

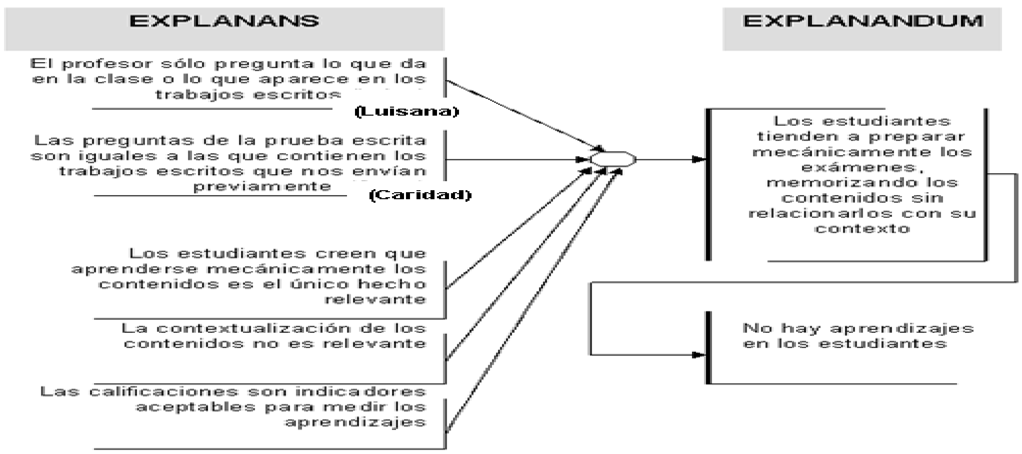


Gráfico 1. Esquema Explicativo-Funcional de una Situación de Clase 1

De los estudiantes, en referencia, se obtuvieron expresiones tales como las siguientes, con las que construyó el Gráfico 2: <<*no puedo, no puedo,… nunca podré con esa Matemática… esa materia es muy difícil y súper enredada… siempre me ha costado aprenderla*>> (Pompilia). <<*Soy tapada para la Matemática… no me gusta… no la entiendo… a mi me tienen que explicar todo eso porque si no, no entiendo nada*>> (Estela), <<*¡no quiero nada con ella!*>> (Estela).

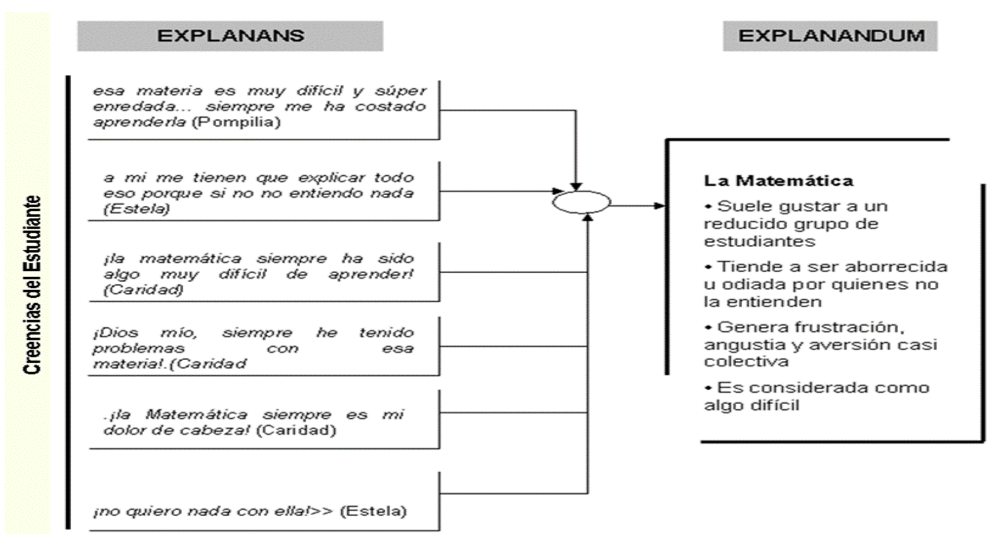


Gráfico 2: Esquema Explicativo-Funcional de una Situación de Clase 2

Finalmente, en el Gráfico 3 donde se concreta una concepción de enseñanza que se materializa por la decisión que toma el docente en relación con sentirse convencido de que a este tipo de estudiantes (casi todos docentes en servicio pero sin el título correspondiente) es necesario que se le explique todo lo de la clase no sólo porque así éste lo concibe sino porque ello también forma parte de la petición que suelen hacer los mismos estudiantes al momento en que se ponen en escena los contenidos matemáticos a enseñar. Ello viene amalgamado con algunas rutinas de aula que siempre convergen al modelo concepto-ejemplo.

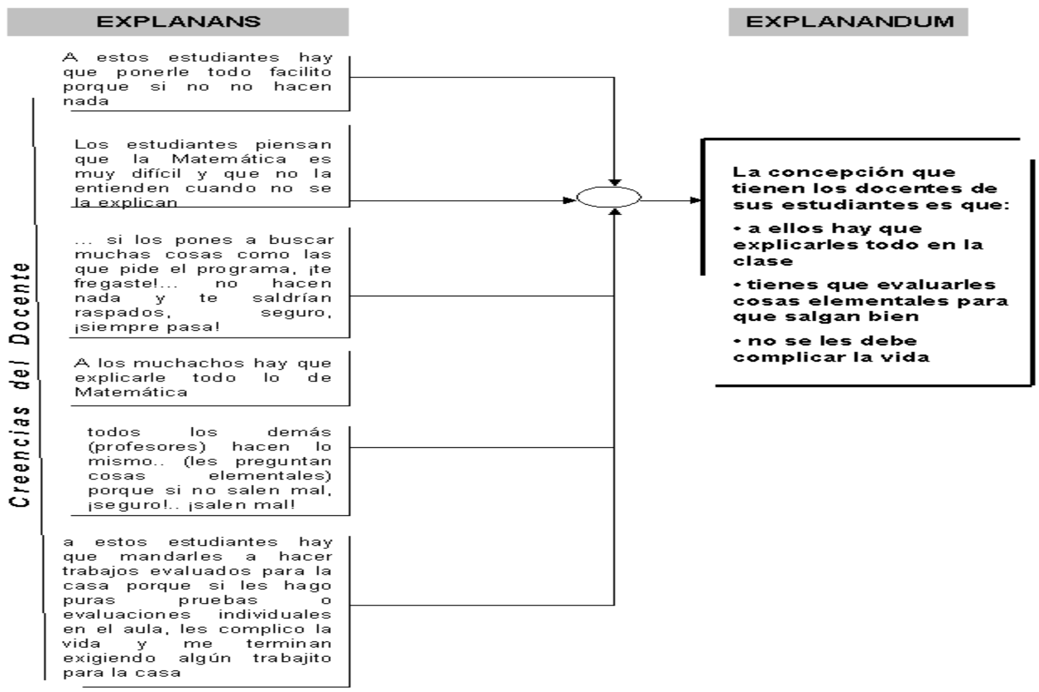


Gráfico 3: Esquema Explicativo-Funcional de una Situación de Clase 3

A manera de cierre

De acuerdo con lo observado, se puede señalar que es obligante considerar sistemas de creencias, en vez de creencias aisladas, dado que resulta difícil encontrar que algunas de ellas se sostengan de manera independiente. Tal sistema tiene que ver con las visiones, concepciones, valores e ideologías que tienen los sujetos sobre la naturaleza de la disciplina, sobre los objetivos que se persiguen, sobre los modelos de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación y las estrategias y recursos empleados durante el desarrollo de estos procesos. También, tiene que ver con las experiencias que dicho sujeto vive o ha vivido tanto en sus procesos de formación académica como fuera de ellos. Como eso es de carácter dinámico, el sistema de creencias se reajusta continuamente, pudiendo dar lugar a la creación de concepciones, actitudes, mitos, representaciones sociales e ideologías posibles de representar mediante entramados funcionales tales como el conformado por cadenas de la forma *explanans*

→ *explanandum*. En tal sentido, este tipo de ilustraciones puede considerarse como un recurso capaz de dar cuenta y hacer inteligibles las acciones que acontecen en torno a la clase de Matemática.

Referencias bibliográficas

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de las creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana***.** Vol.X, No.2 173-194, Recuperado el 31 de Julio de 2004 de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/ vol10/mcallejo+vila.pdf .

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Huelva, España. Recuperado el 21 de Noviembre de 2004 de http://www2.uhu.es/luis.contreras/Tesistexto.htm.

Echeverría, J. (1999). *Introducción a la metodología de la ciencia***.** Recuperado el 30 de Enero de 2006 de http://www.freewebs.com/futuroseconomistas/Reyes%20Edgar/ reyese003.doc.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M. Wittrock (Comp.), *La investigación de la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación* (pp. 195-296). España: Ediciones Paidós.

Ernest, P. (1989). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics***,** Recuperado el 18 de Septiembre de 2002 de http://www.ex.ac.uk/~PErnest/impactr.htm .

Gil, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas.* España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almeria.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* España: Narcea, S.A., Ediciones.

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática**.** *Paradigma***,** XXIV (2)**,** 7-34**.**

Martínez Padrón, O. (2008). *Creencias y Concepciones en Encuentros Edumáticos*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas.

Martínez, L. y Martínez, H. (1998). *Diccionario de filosofía*. Santafé de Bogotá: Editorial Panamericana.

Martínez, M. (1999). *La nueva ciencia. Su desafío, lógica y método*. México: Editorial Trillas.

Padrón, J. (1996). *Análisis del discurso e investigación social. Temas para seminario.* Caracas: Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez.

Ponte, J. (1994). *Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning.* Recuperado el 25 de Septiembre de 2002 de http://www.educ.fc.pt/ docentes /jponte/ ind_uk.htm.

Ponte, J. (1999). Teachers´ beliefs and conceptions as a fundamental topic on teacher education. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.), *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, [*Libro en línea], 43-50, Recuperado el 07 de Septiembre de 2002 de http:www.educ.fc.pt/ docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Velasco H. y Díaz de Rada, A. (1999). *La lógica de la investigación etnográfica***.** Madrid: Editorial Trotta.

Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. España: Narcea, S. A. de Ediciones.

CAPÍTULO 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Propuestas para la enseñanza de las matemáticas

Liliana Homilka

Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". (Argentina)

lhomilka@yahoo.com.ar

Desde hace varios años docentes e investigadores se preocupan y ocupan del estudio de los fenómenos didácticos que se manifiestan en las aulas de matemática en las diferentes regiones de Latinoamérica.

En nuestra Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa se comparten problemáticas que son originadas por los conocimientos que se construyen en escenarios académicos y no académicos los que llegan e impactan en nuestros sistemas de enseñanza.

Los conocimientos producidos por las investigaciones que se centran en dichas problemáticas y que son realizadas desde diferentes perspectivas teóricas aportan elementos que deben ser tenidos en cuenta en las discusiones y reflexiones tendientes a modificar y mejorar las prácticas escolares en nuestra región.

Los trabajos que a continuación se presentan se enfocan en mejorar los métodos de enseñanza. En algunos de ellos se muestra como la utilización de herramientas tecnológicas se integran a la cultura del aula lo que posibilita la construcción colectiva de ideas matemáticas. Además, las secuencias didácticas que se explicitan en los mismos, integran un conjunto de variables que atienden a circunstancias de diferente naturaleza por las que ha transitado el desarrollo de un determinado concepto matemático. Los resultados que se reportan de su implementación evidencian que los estudiantes le han otorgado sentido y significado a lo que se construye en la clase.

Invitamos a los miembros de nuestra comunidad a seguir retroalimentando estos resultados, a realizar nuevas propuestas de enseñanza con la finalidad de que las producciones de la matemática educativa lleguen a las escuelas, a las aulas para modificar sus realidades y de este modo, resignificar la matemática escolar en nuestra región.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA APOE

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación se sitúa en el estudio del concepto combinación lineal de vectores, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación determinan la estructura general del estudio. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto DM 03/10/I.IMA

Palabras clave: teoría APOE, combinación lineal

Abstract. The investigation presented below focuses on the study of the concept of linear combination of vectors, a central topic of linear algebra, under a mental approach where APOS theory is used as theoretical and methodological frame. The three proposed components by this cycle of investigation determine the general structure of the study. In the empirical part of this investigation a questionnaire was designed and applied to interview 8 students of the undergraduate program of Mathematics at the Pontifical Catholic University of Valparaiso (Chile) which provided information about the constructions students accomplished. This investigation has been partially financed by project DM 03/10/I.IMA

Key words: APOS theory , linear combination

Introducción

El concepto de combinación lineal de vectores está inmerso en el tópico de Espacios Vectoriales del dominio del Álgebra Lineal, que es básico y central para la construcción de otros conceptos no menos fundamentales, vectores linealmente dependientes e independientes, espacio generador, base de un espacio vectorial, transformaciones lineales, entre otros; todos conceptos importantes que resuelven problemas en el campo de la Física, la Química, la Ingeniería, la Economía, la Ecología, la Informática, etc. -constantemente los cursos de álgebra lineal son básicos para una gran variedad de disciplinas-. Sin embargo, a pesar de eso la enseñanza del Álgebra Lineal es comúnmente percibida como una experiencia de fracaso (Carlson, 1993, Hillel, 2000).

En 1997, Dubinsky declaró que la Didáctica del Álgebra Lineal es un campo de investigación muy reciente, y también habló de la insuficiencia de la enseñanza del Álgebra Lineal, “No hay un cuerpo de investigación que proporcioné la evidencia que convencería a un escéptico de la carencia del éxito de un curso de Álgebra Lineal” (Dubinsky, 1997, p. 86). Hoy en día, realmente la Didáctica del Álgebra Lineal no es así Dorier y Sierpinska (Dorier, 2000; Dorier y Sierpinska, 2001) certifican la fortaleza del campo. Particularmente Dorier y Sierpinska propusieron una clasificación de estudio más avanzados: (1) análisis histórico epistemológico (Dorier, 2000), (2) análisis de los lenguajes del Álgebra Lineal (Dorier, et al., 2000; Hillel, 2000), (3) análisis de las características del pensamiento requerido para la comprensión del Álgebra Lineal (Alves-Diaz y Artigue, 1995; Sierpinska, 2000) y (4) estudios de práctica de enseñanza y experimentos de enseñanza del Álgebra Lineal (Harel, 2000; Rogalski, 2000). Más trabajos se han desarrollado, que afirma bien la síntesis antes dicha: Sierpinska y Nnadozie (2001), Uhlig (2002), Gueudet (2004), Trigueros y Oktaç (2005), Maracci (2008).

La investigación que se reporta a continuación, se realiza desde un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE (proviene de los términos: Acción, Proceso, Objeto y Esquema). El proceso de investigación en esta teoría conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto matemático en cuestión (en este caso el de combinación lineal de vectores), llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991). La realización de este modelo forma la primera componente de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). En la descomposición genética que se diseña para el concepto combinación lineal de vectores, se describen: las construcciones mentales que se consideran prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y asimilación) que determinan un camino mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto. Las tres componentes propuestas por este ciclo de investigación: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de enseñanza y colección, análisis y verificación de datos, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes. Algunos hallazgos de la investigación dan información respecto a las operaciones de un espacio vectorial.

Marco teórico: Teoría APOE

El uso de la Teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos de Álgebra Lineal es reciente (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa y Oktaç, 2010), aunque este acercamiento teórico ha sido usado con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta y Lógica. La Teoría APOE está interesada en las construcciones mentales que los estudiantes hacen cuando ellos están aprendiendo un concepto matemático.

Se analiza el concepto de combinación lineal de vectores, teniendo como objetivo principal diseñar una descomposición genética, que muestre un camino viable que describa en detalle los aspectos constructivos del concepto, en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para tener buen éxito en el aprendizaje de él. Con esto en mente se plantean las siguientes preguntas: ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto de espacio vectorial? En la pregunta inmediatamente anterior, cuando decimos *"comprensión profunda"*, estamos pensando que las siguientes construcciones estarían involucradas: interiorizar acciones para llegar a una concepción proceso; coordinar dos o más procesos y encapsular varios procesos para construir nuevos objetos.

La posición en esta investigación fue abordar el concepto de combinación lineal de vectores desde su definición matemática formal ¿pero cuál definición? Ya que es muy importante declarar, qué definición se espera que los estudiantes alcancen y las proyecciones de la misma en el aprendizaje de la matemática.

Uno de los textos guía de los estudiantes del curso en el cual se realizan las entrevistas y cuestionarios, da la siguiente definición de combinación lineal de vectores: "sean $u_1, \ldots, u_n$ elementos del espacio vectorial U. Se dice que v en U es combinación lineal de estos vectores si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ en K tales que: $v = c_1u_1, + \ldots + c_nu_n$ (Hoffman y Kunze, 1979, p. 31). Una característica que se puede observar en la definición anterior, es considerar la construcción de la combinación lineal como una igualdad de vectores, por un lado v y por otro $c_1u_1, + \ldots + c_nu_n$.

Cabe aclarar que en lo que sigue, las descripciones que se hacen de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos. Por ello para dar respuesta a la pregunta de investigación se formularon los siguientes objetivos particulares: identificar y analizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al construir el concepto de combinación lineal de vectores, mediante la metodología de investigación planteada por la teoría APOE.

Descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores, como objeto

El concepto de combinación lineal de vectores fue estudiado en el libro Learning Linear Algebra with ISETL (Weller et al., 2002) por los miembros del RUMEC. En dicho estudio se explicita que la condición que determina la combinación lineal de vectores, no se puede averiguar mediante una concepción acción del concepto espacio vectorial, ya que se requiere representar mentalmente todos los vectores de un espacio vectorial. Estos autores consideran que con una concepción proceso un individuo puede programar un algoritmo al que han llamado "fun LC" que supondrá que el "name_vector_space" ha sido dirigido. Eso aceptará dos inputs SK y SV, donde SK denota una sucesión de escalares, y SV representa una sucesión de vectores de la misma longitud, eso devolverá un vector construido tomando la combinación lineal de SV con respecto a SK; es decir, la combinación formada primero por multiplicar cada vector en SV por su correspondiente SK y luego sumar juntos los vectores resultantes. La encapsulación de esto ocurre cuando el estudiante construye una acción o proceso para ser aplicada al concepto, por ejemplo al aplicar el algoritmo a cualquier sucesión de cuatro vectores no cero y cuatro escalares no cero, del espacio vectorial $V = (Z5)^6$.

La descomposición genética del concepto combinación lineal se basa en la construcción del concepto espacio vectorial, que es construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma. La coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar juega un papel importante para que emerja un nuevo objeto, llamado espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010)

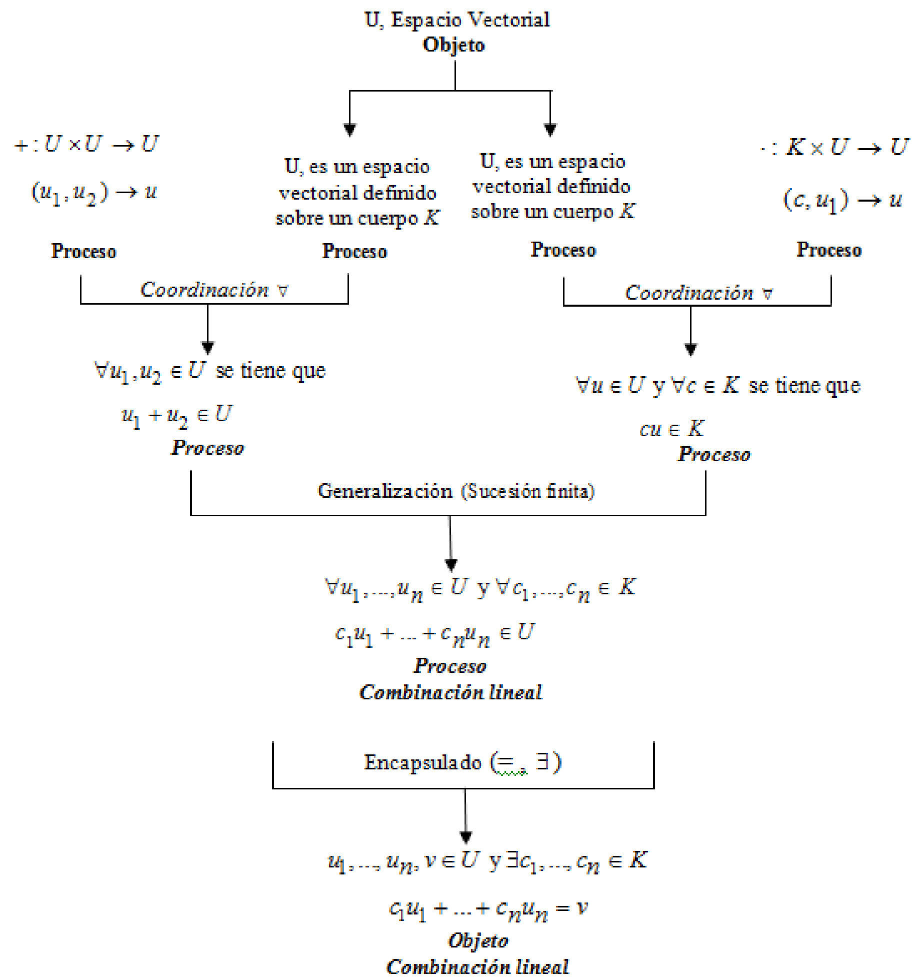


Figura 1. Descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores.

En base a los antecedentes entregados por el grupo RUMEC (Weller et al., 2002), en la experiencia como profesor y aprendiz de este tema, y resultados de investigaciones previas que están disponibles (Roa & Oktaç, 2010), se presenta una descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores: (Figura 1).

Esta coordinación se presenta específicamente cuando un estudiante considera que al multiplicar un vector cualesquiera u de U, y un escalar cualesquiera c de K, el vector resultante cu está en U (por ser U espacio vectorial). Una vez que un estudiante logra una concepción proceso proveniente de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial U, éstos deben generalizarse para una sucesión finita de vectores y para una sucesión finita de escalares, resultando un nuevo proceso de combinación lineal, $c_1u_1+ \ldots + c_nu_n$ que será encapsulado en el objeto combinación lineal a través de la resultante de la suma de: $c_1u_1, \ldots, c_nu_n$ en un vector v de U. Una vez que el estudiante logra la construcción objeto de la combinación, sólo entonces puede comparar dicho objeto combinación $c_1u_1+ \ldots + c_nu_n$

con el objeto *v*, a través de la igualdad de vectores y de la existencia de los escalares $c_1,\ldots,c_n \in K$; resultando un nuevo objeto llamado combinación lineal de vectores, que se lee: *v* es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_n$.

Ejemplo de la entrevista

Con el fin de mostrar un ejemplo de construcción del concepto combinación lineal como objeto, se presenta a continuación una parte del trabajo realizado por un estudiante durante la entrevista.

El estudiante 7 (ES7) trabaja el siguiente problema, sin percatarse de la contradicción que hay en su sistema de ecuaciones lineales. Miremos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 5 de la entrevista:

Pregunta 5 de la entrevista

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado a lo más dos incluyendo el polinomio nulo, y *V* un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$. ¿El vector $-5+7x-x^2 \in V$ es combinación lineal de los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$?

El ES7 inicia su respuesta, suponiendo que $-5+7x-x^2$ es combinación lineal de los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ (ver Figura 2a). A partir de lo cual genera un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz asociada esta representada en la Figura 2b.

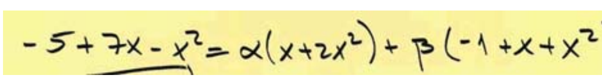


Figura 2a: Combinación Lineal

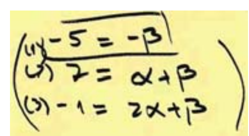


Figura 2b: Matriz Asociada

Posteriormente el ES7 resuelve el sistema a través de la matriz asociada, concluyendo que la combinación lineal del vector $-5+7x-x^2$ en los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$, no es única (Ver Figura 3).

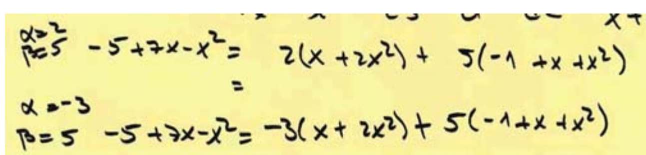


Figura 3: Respuesta del estudiante 7, a la pregunta 5 de la entrevista.

A manera de conclusión

Un resultado importante que arrojó esta investigación, es que las operaciones filas que realizan los estudiantes sobre la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales, está totalmente descoordinada de las operaciones suma de vectores y multiplicación por escalar que definen al espacio vectorial. Para estos estudiantes, la matriz asociada es una herramienta de trabajo "un algoritmo" que se utiliza con operaciones suma y multiplicación por escalar usuales, y que resuelven cuestiones que se relacionan con la combinación lineal de vectores.

Así también, otro aspecto relevante es que los estudiantes no sitúan los vectores de la combinación lineal en un espacio vectorial específico, es decir, no se cuestionan si los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ pertenecen a *V*. En términos de la descomposición genética propuesta, puedo señalar que el estudiante 7 no ha construido el objeto espacio vectorial *V*, por ende no puede desencapsularlo, ni mirar los vectores que están el él; y trabaja los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$ simplemente como polinomios de segundo grado, es decir, como elementos de $\square_2[x]$.

Referencias bibliográficas

Alves Dias, M., & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra. *Proceedings of PME 19*. Recife, Brezil, 2, 34–41.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) *Research in collegiate mathematics education,* Vol. 2 (pp. 1-32), Providence: American Mathematical Society.

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: must the fog always roll in? *College Mathematics Journal, 24(1)*, 29–40.

Dorier, J-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski M. (2000). The meta lever. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 151–176)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J-L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In: D. Holton (Ed.), *The teaching and learning in mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 255–273). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level, resources for teaching Linear Algebra. *MAA Notes*, 42, 85–106.

Gueudet G. (2004). Roˆle du ge´ome´trique dans l'enseignement de l'alge`bre line´aire. *Recherches en didactiques des mathe´matiques*, 24(1), 81–114.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 177–189)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 191–207*). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1979). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall International, Bogotá Colombia.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, *20(2),* 65-89.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *40(2),* 265-276.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces: a viewpoint from APOS theory. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis y H. Arikan (Eds) *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Estambul, Turquía: John Wiley & Sons Inc.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432(8),* 2112- 2124.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13(1)*, 89-112.

Rogalski, M. (2000). The teaching experimented in Lille. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 133–149)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra (pp. 209–246)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., & Nnadozie, A. (2001). Methodological problems inanalyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. In *Proceedings of* *the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Utrecht, The Netherlands, 4, 177–184.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 157-176.

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics, 50(3),* 335–346.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL.* Version. Disponible en http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/.

LA AUTOEVALUACIÓN COMO HERRAMIENTA PARA EL APRENDIZAJE

Margarita del Valle Veliz, María Angélica Pérez, Carolina Ramos
Facultad de C. Económicas, Universidad Nacional de Tucumán (Argentina)
mveliz@face.unt.edu.ar, mperez200@hotmail.com, carolinaramos1109@hotmail.com

Resumen. Las prácticas de autoevaluación no sólo tienen una influencia significativa en la calidad del aprendizaje, sino que contribuyen al desarrollo de las potencialidades metacognitivas del alumno, cuestión de vital importancia para su práctica cotidiana y su posterior actividad profesional. En este trabajo se muestran los resultados de analizar el comportamiento de los alumnos, de un curso de Cálculo en 2009, frente a la autoevaluación propuesta en guías de estudio impresas y a la solicitada a través del aula virtual. El uso del análisis estadístico multivariado permitió determinar que entre los componentes de las guías de estudio, a tener en cuenta en el proceso de aprendizaje, se tiene: la utilidad y suficiencia de los contenidos; la presentación de los temas, y la disposición de modelos de aplicaciones. Con la aplicación de un modelo de Regresión Logistic, se observó el aporte significativo a la variable respuesta "autoevaluación", de las componentes antes mencionadas. Se destaca la ventaja motivadora de la retroalimentación inmediata en la autoevaluación en el entorno virtual.

Palabras clave: autoevaluación, guías, aula virtual

Abstract. Auto-evaluation practices not only affect significantly the quality of the learning activity of the student but also contribute to the development of his meta-cognitive competences, a matter of vital importance in his daily practice and his subsequently professional life. In this paper, we show the results of the analysis of the students' behavior related to auto-evaluation proposed by printed study guides, and through a virtual classroom, in a Calculus class, in 2009. The use of multivariable statistical analysis allowed us to determine that the utility and sufficiency of contents, the presentation of subjects and the disposition of application models are to be taken into account when preparing a study guide. A meaningful contribution to the variable answer "auto-evaluation" of the above mentioned variables was observed with the implementation of the Regression Logistic model. The motivating advantage of the immediate feedback in the virtual environment is emphasized.

Key words: auto-evaluation, guides, virtual classroom

Introducción

La problemática de la evaluación se ha convertido en la actualidad en una de las cuestiones más importantes del discurso y de la actividad educativa. "La evaluación es el proceso de definir, seleccionar, diseñar, recoger, analizar, interpretar y usar la información para incrementar el aprendizaje y el desarrollo estudiantil." (Edwin 1991, p.15, citado en Brown y Glasner 2008, p. 53)

"Con la evaluación, la búsqueda se orienta a responder acerca del valor de las prácticas profesionales, los proyectos de trabajo, en última instancia, la legitimación de la tarea". (Litwin 1994, p.161).

> Una buena evaluación, realizada por el profesor, debe colaborar para el desarrollo progresivo y sistemático de la autoevaluación de los alumnos. Ésta es

> un elemento fundamental del proceso educativo dado que involucra el compromiso del alumno con su proceso de aprendizaje y con sus logros. (Davini 2008, p. 225)

En este trabajo se muestran los resultados logrados en la investigación llevada a cabo con alumnos universitarios de un curso de Cálculo. En el mismo se relacionaron los comportamientos de los estudiantes frente a la autoevaluación propuesta en las Guías de Estudio impresas y a la solicitada a través del Aula Virtual.

Se trabajó estadísticamente utilizando un Modelo de Regresión Logistic, donde se observó la significatividad de cada uno de los elementos analizados respecto a la variable respuesta "autoevaluación", tanto en la propuesta de las Guías de Estudio como en la del Aula Virtual.

Marco teórico

El proceso de evaluación se realiza con una finalidad práctica: tomar decisiones que orienten las acciones a seguir respecto del objeto evaluado. La idea es que se apunte a la toma de decisiones que impliquen un cambio, una transformación que mejore la realidad. No se evalúa sólo para saber más acerca del objeto evaluado, sino para proponer cambios. Es en la evaluación de los aprendizajes donde se evidencian en forma explícita o implícita las concepciones que posee el docente sobre la enseñanza y el aprendizaje.

Es conocido que el concepto que tiene un docente acerca del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación, conforman necesariamente un sistema integrado, que se manifiesta en distintos enfoques o modelos de evaluación. Según Quinquer (2000), entre los modelos de evaluación se distingue el modelo comunicativo o psicosocial. Este modelo pone énfasis en las mediaciones que se producen entre los estudiantes y entre estudiantes y profesorado. Tiene como elemento clave la evaluación formadora que propone transferir al alumnado el control y la responsabilidad de su aprendizaje mediante el uso de estrategias e instrumentos de autoevaluación, evaluación mutua y coevaluación.

Las principales características de este modelo son:

- El aprendizaje se considera una construcción personal del individuo, afectado tanto por sus características personales (esquemas de conocimientos, ideas previas, hábitos, motivación, etc.) como por el contexto social que se crea en el aula.
- Cobran importancia las mediaciones entre los sujetos implicados en el proceso enseñanza-aprendizaje (alumno - profesor y alumno - alumno), favoreciendo la reelaboración de conocimientos. Se producen negociaciones entre ellos de modo de "alinear" objetivos, enfoques y criterios.

- La evaluación se convierte en un facilitador de la comunicación y el aprendizaje, entendido como apropiación del conocimiento; en este contexto, adquieren relevancia las actividades de autoevaluación, coevaluación y evaluación mutua.
- La autonomía de los estudiantes constituye el elemento clave para transferir al alumnado el control y la responsabilidad de su aprendizaje mediante el uso de estrategias e instrumentos adecuados.

> La autoevaluación le sirve al estudiante para reconocer su progreso, sus fortalezas y debilidades, los logros y las dificultades. Es útil, además, para analizar sus ejecutorias individuales y grupales, y así desarrollar una actitud crítica y reflexiva. Por otro lado, le sirve al profesor para tener los elementos de juicio que le permitan facilitar y reorientar el aprendizaje, valorar lo que hacen sus estudiantes, conocerlos mejor, valorar su propia efectividad como educador, o incluso modificar, si es preciso, los métodos y técnicas que emplea. (Ortiz Hernández, 2007, p. 111).

Ortiz Hernández (2007), propone **objetivos** a desarrollar mediante la autoevaluación del alumno, entre otros: propiciar un aprendizaje autónomo, conseguir una mayor implicación en su propio aprendizaje, elaborar juicios y criterios personales, que el alumno asuma responsabilidades sobre su proceso educativo, que tome decisiones de acuerdo con las necesidades adoptadas, asumir conciencia de las posibilidades reales, fomentar la autoestima y responsabilidad en la actividad realizada.

> *¿Cómo se puede llevar a cabo la autoevaluación?* Lo primero que hay que hacer es prepararse —planificar— y para ello hay que establecer los objetivos y criterios de evaluación que el estudiante debe conocer. Es recomendable que todo esto se haga en un contrato en el que se anticipen las dificultades y cómo evitarlas. Es claro que todo el proceso, desde el inicio hasta que se complete, se realiza sobre las bases de un diálogo o negociación. Lo próximo es que, cuando ya el estudiante esté inmerso en la autoevaluación, el profesor debe orientarlo para que pueda aplicar los instrumentos y técnicas adecuadamente. (Ortiz Hernández, 2007, p.118)

Una vez finalizada la autoevaluación, es conveniente que el profesor promueva el comentario y la reflexión, analizando y valorando conjuntamente los objetivos alcanzados. En la reflexión se fomenta la explicación y superación de los errores con el fin de que se aprenda de los mismos.

La autoevaluación es un elemento fundamental del proceso educativo dado que involucra el compromiso del alumno con su proceso de aprendizaje y con sus logros. De esta forma, la autoevaluación de los alumnos es esencial para fortalecer, revisar o reorientar sus metas y necesidades; desarrolla habilidades metacognitivas, los alumnos comprenden el proceso seguido y los efectos de sus decisiones, lo que habilita para aprender a aprender en otras situaciones y contribuye al desarrollo del autoconocimiento y autoconfianza, necesarios para aprender.

> La participación de los alumnos en el proceso de evaluación, de acuerdo con sus capacidades y posibilidades, organizando sus registros, dialogando sobre sus logros, detectando sus dificultades, analizando sus esfuerzos, revisando su proceso y asumiendo sus responsabilidades en la construcción de su aprendizaje, representan componentes valiosos de una evaluación auténtica. (Davini 2008, p. 225)

García Beltrán, Martínez, Jaén, y Tapia (2006) plantean que las principales ventajas en la utilización de un entorno virtual para llevar a cabo un sistema de autoevaluación con pruebas de respuesta objetiva son:

- Posibilita un seguimiento individualizado del aprendizaje del alumno.
- Permite evaluar conocimientos y habilidades.
- Facilita el establecimiento de una evaluación continuada durante el proceso de aprendizaje y reduce el tiempo de su diseño, distribución y desarrollo.
- Agrega una gran flexibilidad temporal y espacial del sistema tanto para la configuración de ejercicios como de su realización. En este sentido puede ser especialmente útil para permitir que el alumno pueda seguir su propio ritmo de aprendizaje.
- Proporciona una respuesta inmediata (retroalimentación) de los resultados de los ejercicios.
- El almacenamiento de los resultados facilita la creación de informes y tratamiento de datos tanto a nivel de un alumno o de un grupo de alumnos como de las preguntas utilizadas.
- La base de datos de preguntas puede reutilizarse en otros cursos.
- La no necesidad de corregir por parte del profesor lo hace especialmente apropiado para grandes grupos de alumnos.

"La implantación de la autoevaluación mediante entornos virtuales es perfectamente factible en pruebas de respuesta objetiva y permite la realización de distintas actividades docentes que promueven el aprendizaje antes, durante y después del periodo académico" (García Beltrán et. al. 2006, p. 11).

Metodología

Se ofreció en las Guías de Estudio, una Metodología para aprender a autoevaluarse y una Guía de autoevaluación. Además, un sistema de autoevaluación mediante ejercicios objetivos en la Web, donde se sugirió su resolución en cada unidad de estudio de la asignatura. De esta manera, los alumnos dispusieron de un instrumento que les permitió determinar de forma sencilla el grado de aprendizaje que estaban alcanzando.

Respecto a los autoexámenes propuestos en las guías de estudio, que permitían la autoevaluación, se consideró de importancia analizar qué componentes o factores incluidos en las guías aportaban a la autoevaluación y cómo. Para ello se utilizó un Modelo de Regresión Logistic (Johnson, 2004), donde la variable respuesta fue "autoevaluación", considerada dicotómica con dos opciones de medida: si había realizado el proceso de autoevaluación o no, una vez ejecutados los autoexámenes.

Instrumento

Se utilizó una encuesta que contó con 24 (veinticuatro) aseveraciones referidas tanto al material elaborado en las guías impresas, como al elaborado para el aula virtual y a indicadores de la autoevaluación de los aprendizajes por parte de los alumnos, donde se midió las respuestas mediante la escala Likert con cinco opciones.

Para el análisis de la validez de este instrumento se recurrió a un grupo de expertos y para el análisis de la confiabilidad se consideró el coeficiente alfa de Cronbach, el que resultó ser 0,754 (paquete estadístico SPSS v.15.0).

Para analizar qué aspecto de las guías de estudio explicaban la autoevaluación en la asignatura Cálculo, se realizó un análisis de factores agrupándose en tres grupos muy significativos con un total de varianza explicada del 70%.

Muestra

Se trabajó con una muestra de 220 alumnos sobre un total de 673 que concluyeron el cursado de Cálculo en 2009.

Resultados

Cuadro Nº 1. Componentes del Factor Nº 1

Ítem	Factor Nº 1: Contenidos en Guías de Estudio	Saturación
3	El grado de utilidad que presentaron las guías de estudio fue excelente.	0,855

4	El material brindado en las guías resultó suficiente para el estudio de esta asignatura.	0,734
	Varianza explicada 37%	

Este factor agrupa los aspectos de utilidad y suficiencia de los contenidos de las guías, es el de mayor varianza explicada. Esto indica, que para los alumnos, estos aspectos son los que tienen mayor incidencia cuando se utiliza este material. Esto se debe a los contenidos conceptuales, y al conjunto de ejercicios y problemas resueltos y propuestos, que en el material se incluyen.

Cuadro Nº2: Componentes del Factor Nº 2

Ítem	Factor Nº 2: Presentación del material impreso	Saturación
1	Los temas tratados en las guías de estudio se muestran comprensibles.	0,806
2	La redacción se presenta con la debida claridad.	0,792
	Varianza explicada 18%	

Este factor, que explica el 18% de de la varianza total, está relacionado con la presentación del material en cuanto al tratamiento de los temas y su redacción

Cuadro Nº 3. Componentes del Factor Nº 3

Ítem	Factor Nº 3. Soluciones brindadas	Saturación
5	Los ejercicios y problemas resueltos, me ayudaron a comprender los conceptos tratados.	0,806
6	Los ejercicios y problemas resueltos, me ayudaron a verificar aciertos y corregir errores.	0,792
	Varianza explicada 15%	

Este factor, el de menor varianza explicada, incluye aspectos muy importantes del aprendizaje de los alumnos, en cuanto a la necesidad que los alumnos tienen de disponer de modelos para las aplicaciones de los conceptos, para comprenderlos y poder realizar evaluaciones de sus aprendizajes.

El Modelo de Regresión Logistic se ajustó a través del uso de los modelos de máxima verosimilitud, considerando como factores significativos los que presentan una significación de $p<0{,}10$, descartado así el Factor Nº 2. Estos modelos son importantes por su carácter explicativo. Del análisis del modelo surgió que los alumnos que se autoevaluaron se vieron influenciados en mayor medida por el Factor Nº 1 y luego el Nº 3.

La distribución porcentual de 220 alumnos de acuerdo a sus respuestas referidas a la resolución de los autoexámenes, en las guías impresas y en el aula virtual, es la siguiente: el 81% de la totalidad de los alumnos resolvió los autoexámenes en el aula virtual, de ellos el 68% realizó también los de las guías de estudio. Del 19% que no se autoevaluó en el aula virtual, sólo un 6% las realizó con las guías. Interesados en analizar si los cambios de conducta de los alumnos respecto de la autoevaluación, iniciada con las guías de estudio y luego con la presentada en el aula virtual eran significativos, se aplicó la Prueba Estadística del Cambio de Mc Nemar, donde cada sujeto se utiliza como su propio control y las mediciones se realizan en escala nominal.

Esta Prueba arrojó los siguientes resultados: $\chi^2_{(1)}=1{,}4$ (valor de p=0,221), lo que muestra que estadísticamente no se registran cambios significativos en las conductas de los alumnos. Es decir que el proceso de autoevaluación iniciado con las guías de estudio tuvo su continuidad en el presentado en el aula virtual.

Para conocer si los resultados de la autoevaluación coincidieron con las calificaciones obtenidas en las pruebas parciales implementadas por la cátedra para evaluar a los alumnos, se les preguntó:

"Los resultados de su autoevaluación, ¿coincidieron con los resultados obtenidos (calificaciones) en las pruebas parciales?". Esto dio como resultado, que del total de alumnos que manifestaron haberse autoevaluado en las guías impresas y/o en el aula virtual, el 53% manifestó que hubo coincidencia en los resultados, el 38% indicó que sólo una vez los hubo y el 13% respondió que nunca tuvo coincidencia.

Los motivos expresados en los casos que no hubo coincidencias se indican en el siguiente cuadro.

Cuadro Nº 5: Motivos por los que no hubo coincidencias entre los resultados de las autoevaluaciones y las pruebas parciales.

Motivos de no coincidencias	**%***
No supo cómo autoevaluarse	22%
No tuvo en cuenta algunos aspectos que son necesarios autoevaluar (conceptos, procedimientos, actitudes)	86%
No tiene criterios para autoevaluarse	11%
Motivos de no coincidencias	**%***
No coinciden sus criterios de evaluación con los establecidos en la Cátedra	14%
Su dedicación al estudio no fue suficiente	12%
No hizo el esfuerzo necesario	25%
No buscó ayuda en los docentes y/o en sus compañeros ante dificultades	18%

*Estos porcentajes se obtuvieron sobre el 51% de los alumnos (los que manifestaron no tener coincidencias en los resultados). Tuvieron la posibilidad de marcar más de una respuesta del listado.

El motivo de mayor frecuencia fue “por no haber tenido en cuenta aspectos necesarios de la autoevaluación (conceptos, procedimientos, actitudes)”. Esto conduce a pensar en la necesidad de implementar estrategias tanto cognitivas como metacognitivas de aprendizaje.

El cuestionario presentado a los alumnos también incluyó preguntas referidas al comportamiento de los alumnos respecto al material brindado a través del aula virtual.

Del total de alumnos (220), el 81% declaró hacer uso del aula virtual como herramienta para el estudio de esta asignatura. Entre las actividades que se presentaron en el aula virtual se encuentran los autoexámenes como estrategia de autoevaluación, los que fueron resueltos por todos los alumnos que recurrieron a esta herramienta informática. Lo expresado se indica en el cuadro siguiente:

Cuadro Nº 6: Respuestas a las preguntas sobre la autoevaluación en su trabajo en el aula virtual.

Las autoevaluaciones en el AULA VIRTUAL	**Total de respuestas positivas (%)***
¿Fueron útiles los autoexámenes en su estudio?	100
Las respuestas a los autoexámenes, ¿le resultaron útiles para verificar aciertos y corregir errores?	99
¿Hizo una autoevaluación antes de las pruebas parciales?	92
¿Considera de utilidad dichas autoevaluaciones en su estudio de la asignatura?	100
¿Le ayudaron para determinar posibles errores en su manera de estudiar?	99
¿Le ayudaron para incentivar su trabajo independiente?	100
¿Considera que la propuesta del aula virtual es necesaria?	100

*Estos porcentajes se obtuvieron sobre la base del 81% de alumnos que utilizaron el aula virtual.

Son sorprendentes las respuestas de los alumnos sobre las bondades de autoevaluarse mediante el aula virtual. Se considera que esto se debe a la motivación que experimenta el uso de la informática en muchos aspectos de la vida cotidiana.

Conclusiones

La autoevaluación es importante y beneficiosa dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es evidente que el estudiante que logra autoevaluarse es más efectivo porque cobra conciencia de sus propios logros, y por ello advierte que la causa o raíz de los mismos está en su capacidad, en su reflexión, acompañada de la acción y el esfuerzo desempeñado por él mismo.

La implantación de la autoevaluación mediante entornos virtuales es perfectamente factible en pruebas de respuesta objetiva y permite la realización de distintas actividades docentes que promueven el aprendizaje antes, durante y después del periodo académico.

El diseño y planificación de la autoevaluación debe ser coherente con los objetivos y el resto de la metodología docente a emplear. A diferencia de lo que ocurre con otras técnicas de evaluación, la ventaja de la retroalimentación inmediata en los sistemas de autoevaluación implementados con entornos virtuales constituye una clave fundamental en el proceso de aprendizaje, ejerce como elemento motivador para esfuerzo del alumno y le orienta eficazmente en sus actividades.

Lo ideal en términos de desarrollo de la autonomía en los estudiantes, sería que los procesos, los momentos y las formas de evaluación planteadas por los docentes y por la institución condujeran a desarrollar en el estudiante el hábito de la autoevaluación.

Referencias bibliográficas

Brown, S. y Glasner, A (Eds.) (2007). *Evaluar en la Universidad. Problemas y nuevos enfoques.* 2° ed. Madrid: Narcea S.A.

Davini, M.C. (2008). *Métodos de enseñanza. Didáctica general para maestros y profesores.* Buenos Aires: Santillana.

García Beltrán, A.; Martínez, R.; Jaén, J. A. y Tapia, S. (2006). La autoevaluación como actividad docente en entornos virtuales de aprendizaje/enseñanza. *RED. Revista de Educación a Distancia*, *número M6 (Número especial dedicado a la evaluación en entornos virtuales de aprendizaje).* Recuperado el día 12/08/09 del sitio web: http://www.um.es/ead/red/M6

Johnson, D.E. (2004). *Métodos multivariados aplicados al análisis de datos.* México: Internacional Thomson Editores S. A. de C. V.

Litwin, E. (1994). La evaluación de programas y proyectos: un viejo tema en un debate nuevo. En Puiggrós, A. y Krotsch, P. (comps.), Evaluación y Universidad. Estado del debate. (pp. 161-172). Buenos Aires, Argentina: Aique/REI/IDEAS.

Ortiz Hernández, E. (2007). La autoevaluación estudiantil. Una práctica olvidada. *Cuaderno de Investigación en la Educación. Centro de Investigaciones Educativas*, Nº 22, 107-119. Universidad de Puerto Rico.

Quinquer, D. (2000). *Modelos y enfoques sobre la evaluación: el modelo comunicativo.* En Ballester, M., Batalloso J., Calatayud, M., Córdoba, I, Diego, J., Fons, M. Giner, T., Jorba, J., Mir, B. Moreno, I., Otero, L., Parcerisa, A, Pigrau, T., Pitaluga, I., Pujol, M., Quinquers, D, Quintana, H., Sanmartí, N., Sbert, C, Sbert, M, Weissman, H. (Eds.) (2000), *Evaluación como ayuda al aprendizaje* (pp.13-19). España: Editorial Graò.

TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA PARTICIPAR EN EL PROCESO DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES EN EL TEMA DE SUCESIONES REALES

Elvira Borjón Robles, Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Coahuila (México)
eborjon@mate.reduaz.mx, omederosa2081@yahoo.es

Resumen. En este trabajo se indican los conceptos, teniendo en cuenta las necesidades al operar con ellos, mediante un cuádruplo (E, C, R, S); donde por E se denota la colección, que llamamos extensión, de todos los objetos que corresponden al concepto, por C su contenido, o sea, un conjunto, {Pi}, $i \in I$ (I es es un conjunto), de propiedades esenciales Pi de objetos, cuyo cumplimiento es suficiente para dado un nuevo objeto determinar si pertenece o no pertenece a la extensión del concepto, por R las representaciones de los objetos de E y por S los significados asociados a estos objetos. El objeto de estudio de esta investigación son las sucesiones reales. Se presta especial atención en este trabajo a los resultados de la utilización de diferentes registros de representación por los estudiantes para establecer las relaciones exactas, entre las extensiones de diferentes conceptos subordinados al concepto de sucesión real. Por ejemplo, sucesiones acotadas superiormente, sucesiones acotadas inferiormente, y los conceptos contrarios a estos conceptos.

Palabras clave: sucesión, conceptos subordinados, contenido, extensión, representaciones

Abstract. In this work the concepts are described by a quadruple (E, C, R, S) where, E denotes the collection of all the objects, which we call the extension of the concept, C is the content, i.e a set {Pi}, $i \in I$ (I is a set), of essential properties Pi such that if an object satisfies the properties of C then it belongs to E, and do not belong to E in any other case, R means the representations of objects of E and S stands for the meanings of these objects. The study objects of this research are the real sequences and the use of different registers of representation by students, to establish the exact relations between the extensions of different subordinate concepts to the concept of real sequence: upper bounded sequences, lower bounded sequences, and contrary concepts to the last ones.

Key words: sequence, subordinate concepts, content, extension, representations

Algunas ideas sobre los conceptos

En el aprendizaje de las matemáticas es primordial que los individuos aprendan los conceptos, pues estos juegan un papel muy importante en su desarrollo y son considerados parte esencial de su conocimiento. Es en esta dirección que de manera general se ha desarrollado nuestra investigación, tomando como fundamentación los resultados de la psicología educativa:

> los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno tanto de conceptos supraordinados (en la adquisición inclusiva de conceptos) como de conceptos subordinados (en la adquisición supraordinada de conceptos) (Ausubel, Novak y Hanesian, 2000, p.86)

Por otro lado relacionado con los conceptos matemáticos se plantea:

> Distinguir el "concepto" de su construcción no es fácil, y quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo continuamente en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado. Podríamos llamar a tal construcción, como hace otros autores: conceptualización. ¿Qué es o cómo se da la conceptualización? Sigue siendo fundamentalmente un misterio… (D´Amore, 2003, p. 28).

Desde el punto de vista de D´Amore no importa lo que se entienda por concepto sino más bien ¿de qué manera se adueña el individuo de los conceptos? En el caso de conceptos de extensión infinita, como es el caso de los conceptos fundamentales del cálculo y, particularmente el concepto de sucesión, constantemente se hallan en la fase de ampliar la colección de los elementos conocidos de su extensión.

Es de importancia para nuestra investigación tener claro lo que se entiende por concepto, existen diversas propuestas de definiciones, por ejemplo en (Ausubel *et al*, 2000, p.88) se menciona "para nuestros propósitos, definiremos a los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que ***poseen atributos de criterios*** y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún ***signo o símbolo*** aceptado".

Por otro lado también tenemos que en Bruning y Schraw (2006) aparece: "los conceptos son las estructuras mentales mediante las que representamos categorías significativas". Específicamente en la matemática ¿De qué forma se adquieren los conceptos? Según las teorías existentes, hay tres formas de adquirir los conceptos, a saber:

1. Teoría regida por reglas. Según Bourne (1982), la pertenencia a una clase conceptual se determina aplicando un conjunto de reglas, que se pueden aprender mediante la instrucción o la experiencia de ejemplos positivos o negativos.
2. Teoría basada en prototipos o patrones. Los teóricos de los prototipos, Rosch y Mervis (1975) y Rosch (1978) sostiene que la pertenencia a una clase la determina el grado de similitud del ejemplo con uno conocido que se halle en la memoria y que parezca que constituye la mejor ejemplificación del concepto.
3. Teorías probabilísticas. Wattenmaker, Dewey, Murphy y Medin (1986) afirman que en el aprendizaje de los conceptos juegan un papel importante las probabilidades. Ellos sostienen que el sujeto que está aprendiendo cuando se enfrenta a un ejemplo nuevo busca sus atributos característicos, pero no los toma como definitorios; ya que lo que determina que ese ejemplo sea positivo es la suma de los rasgos en la memoria.

Mientras más supera la suma el valor crítico, más rápidamente tiene lugar la clasificación.

En la matemática la utilización de la *teoría regida por reglas*, parece ser la que más facilita la utilización del aparato lógico deductivo para determinar nuevas propiedades de los conceptos.

D´Amore (2005) menciona relacionado con los conceptos y muchos investigadores en matemática educativa muestran preocupación por los procesos internos que un individuo realiza para asimilar los conceptos

En las investigaciones relacionadas el aprendizaje del cálculo y del análisis se dejan entrever problemáticas relacionadas con el aprendizaje del concepto de función (Hitt, 1996), este uno de los elementos que estaremos poniendo en juego en nuestra investigación.

Un concepto es un modelo mental, generalizado, de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. El concepto como resultado es una idea compleja, es la suma de un conjunto de proposiciones e inferencias anteriores que determinan tanto elementos como propiedades de éste.

Teniendo en cuenta las opiniones de D´Amore, de Ausubel y lo señalado en el párrafo anterior en este trabajo consideraremos a un concepto como un cuádruplo *(E, C, R, S),* donde por *E* se denota la colección, que llamamos extensión, de todos los objetos que corresponden al concepto, por *C* su contenido, o sea, un conjunto, $\{Pi\}$, $i \in I$ (I es un conjunto), de propiedades esenciales P_i de objetos, cuyo cumplimiento es suficiente para dado un nuevo objeto determinar si pertenece o no pertenece a la extensión del concepto, por *R* las representaciones de los objetos de *E* y por *S* los significados asociados a estos objetos. La extensión y el contenido son características lógicas y las representaciones y los significados características psicopedagógicas.

Por ejemplo, si se define el concepto de función real de variable real con dominio *A* y codominio *R* como una relación *f*, $f \subseteq A \times R$, que satisface las propiedades: $f_1)$ Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$, $f_2)$ Si $(a,b_1) \in f$ y $(a,b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$; resulta que el contenido de este concepto es el conjunto *C*, $C=\{ f_1, f_2\}$, y la extensión *E* es la colección de todas las relaciones *r* que satisfacen las dos propiedades del contenido. En el trabajo se indica la extensión de este concepto por *F(A)*.

El objetivo de nuestro trabajo es determinar como el uso de diferentes registros de representaciones facilita la participación de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de sucesión y de conceptos subordinados al mismo, y al mismo tiempo permite la determinación de las relaciones exactas entre sus extensiones

El concepto de sucesión numérica

En el trabajo se considera que las sucesiones son funciones reales cuyo dominio es *N*, por tanto el contenido *C* de este concepto es el conjunto $\{p\}$, donde *p* es la propiedad: el dominio de la función es el conjunto *N*. Su extensión la forman todas las funciones que satisfacen la propiedad *p*, y se indica por S*(N)*. En el concepto de sucesión intervienen los conceptos de dominio, codominio, grafo, imagen, variable independiente y variable dependiente, por tanto la utilización de registros de representaciones de los elementos de la extensión del concepto de sucesión requiere de la utilización de registros de representaciones de los conceptos que en el intervienen. En la figura 1 aparece la representación mediante un diagrama de una sucesión *a*,

$$\begin{tikzcd} & & & \textit{Grafo} \\ \textit{Dominio} & N \arrow[l, dotted] \arrow[r, "a"] & R \arrow[r, dotted] & \textit{Codominio} \\ \textit{Variable independiente} & n \arrow[l, dotted] \arrow[r] & a(n)=a_n \arrow[r, dotted] & \textit{Variable dependiente} \end{tikzcd}$$

Fig. 1. Algunos de los conceptos que intervienen en el concepto de sucesión

El grafo de la función es el subconjunto *a* de $N \times R$ definido por $a=\{(n,a_n):n \in N \text{ y } a_n \in R\}$. Téngase presente que con el símbolo *a* se indica tanto la sucesión como su grafo. La imagen de una sucesión *a* es el subconjunto del codominio que se indica por *Imf* y se define por $Imf=\{y \in R:$ existe un *n de N* tal que $a_n=y\}$. Para utilizar una representación gráfica en un plano cartesiano de una sucesión *a* hay que representar gráficamente su domino *N*, el conjunto $N \times R$, el grafo *a* y la imagen *Imf*. De la presentación gráfica de una sucesión en un plano cartesiano es importante que los estudiantes aprendan que el dominio y la imagen de la sucesión son las proyecciones del grafo sobre el eje de las *X* y de las *Y*, respectivamente.

El grupo de estudiantes

Las actividades didácticas diseñadas se aplicaron a un grupo de seis estudiantes de primer semestre de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se trabajo en horario extra clase durante cuatro semanas, dos veces por semana, dos horas. En esta investigación se puso en práctica el aprendizaje activo y a través de la mediación del docente con explicaciones breves sobre el contenido y las extensiones a tratar en la sesión correspondiente.

Descripción de las actividades diseñadas y de los resultados de los estudiantes

Sobre las actividades didácticas

Se diseñaron dos hojas de trabajo. En la primera hoja de trabajo las actividades que se le presentaron y realizaron los estudiantes estuvieron encaminadas a que participaran en: 1. La construcción de representaciones gráficas de sucesiones finitas y de relaciones con dominio *N* que no eran sucesiones. 2. La determinación de la imagen de una sucesión como la proyección de la representación gráfica del grafo de la sucesión sobre el eje de las *Y*. 3. El paso de representaciones tabulares a representaciones gráficas y viceversa. 4. La determinación de las características del grafo y la imagen de sucesiones acotadas, acotadas superiormente y no acotadas inferiormente y acotadas inferiormente y no acotadas superiormente. A continuación realizamos algunos comentarios sobre las tareas 1, 2 y 4.

Tarea 1. Al iniciar el tema de sucesiones el profesor construyó el mapa de las extensiones *R(A)* y *F(A)* de los conceptos de relación y función real con dominio *A*, figura 2. Los estudiantes construyeron representaciones gráficas de elementos de *S(N)* y de *R(N)\S(N)*, donde *R(N)* y *S(N)* indican las extensiones de los conceptos de relación con dominio *N* y sucesión. El profesor con estos resultados y con la participación de los estudiantes construyó el mapa de la figura 3.

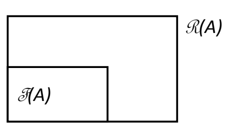


Fig. 2. Mapa de las extensiones R(A) y F(A)

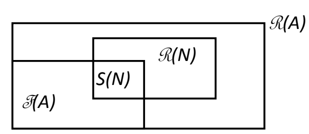


Fig. 3. Mapa de las extensiones R(A), F(A), R(N) y S(N)

Tarea 2. Se presentaron a los estudiantes actividades mediante las cuales tenían que representar el grafo de sucesiones y encontrar su imagen mediante la proyección del grafo sobre el eje de las *Y*.

Tarea 3. En las actividades correspondientes a esta tarea, los estudiantes tenían que determinar las características geométricas de las representaciones geométricas del grafo y la imagen de sucesiones acotadas (grafo en una semibanda e imagen en un intervalo acotado), acotadas superiormente y no acotadas inferiormente (el grafo no está contenido en ninguna semibanda, pero si en un semiplano, la imagen no está contenida en ningún intervalo acotado, pero si en un intervalo del tipo [a, +∞)). Al terminar estas actividades el profesor conjuntamente con los estudiantes construyó el mapa de las extensiones *S(N)*, $S_a(N)$, $S_s(N)$ y $S_i(N)$, de los conceptos de sucesión, sucesión acotada, sucesión acotada superiormente y acotadas inferiormente,

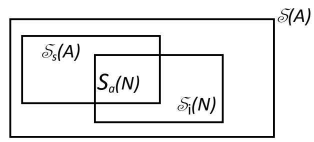


Fig. 4. Mapa de las extensiones S(N), Sa(A), Ss(N) y Si(N)

respectivamente, que se muestra en la figura 4.

Las actividades de la segunda hoja de trabajo se diseñaron con el objetivo de que los alumnos participaran en el paso de un tipo de representación a otro, teniendo en cuenta la afirmación que hace Duval (1998) en el sentido de que se conceptualiza, cuando se es capaz de transitar entre las diversas representaciones de un concepto. En la tabla 1 se muestran los tipos de representaciones y el orden en las que debía pasar de una a otra.

Tabla 1. Tránsito por las representaciones en cada actividad

Actividad	Orden de aparición de las representaciones			
	Analítica	Tabular	Gráfica	Verbal
I	1	2	3	
II	4	2	3	1
III	4	3	2	1
IV	3	1	2	
V	3	2	1	

Sobre los resultados de los estudiantes

Resultados de la hoja de trabajo 1

Se detecta que en algunos casos no se refleja el dominio del concepto de partida; el de función, a un valor natural asigna dos valores reales (ver figura 2) Algunos alumnos presentan problemas para reflejar geométricamente los elementos básicos del contenido del concepto de sucesión, tales como el grafo de la sucesión y el conjunto de los números naturales como dominio de las sucesiones.

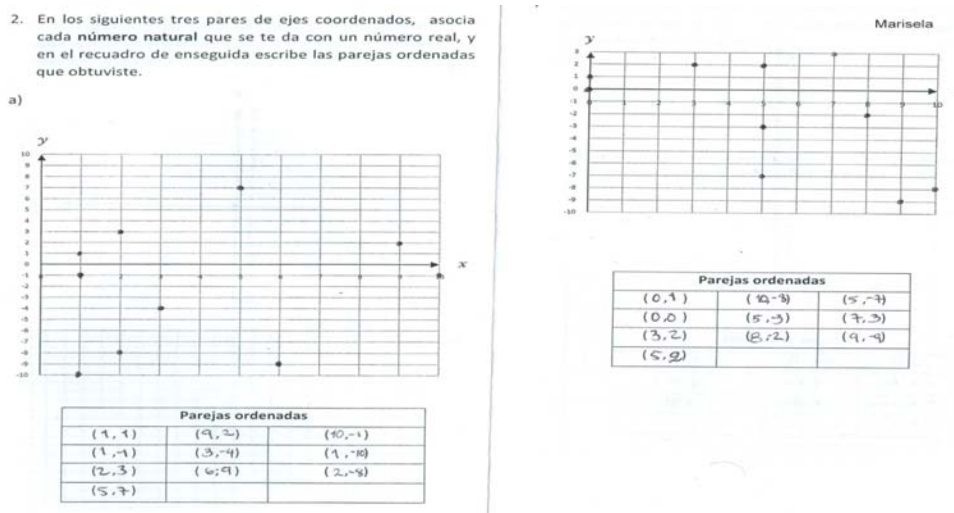


Figura 5. Parte de la hoja de trabajo1 que refleja la respuesta no esperada de una alumna

Resultados de la hoja de trabajo 2. Cinco de los seis alumnos realizan el transito adecuadamente entre las representaciones, de esos cinco, dos (Gema y Karen) unen las gráficas con curvas continuas y un alumno no logra el transito adecuadamente. En algunas ocasiones no realizaron correctamente el tránsito entre la representación tabular y la gráfica (Luis Ernesto y Gema de la tabular a la gráfica), pero la analítica si la expresaron. La alumna Karen no presentó resultados en la actividad cinco y los resultados de la cuatro son parciales.

Conclusiones

Por primera vez, los estudiantes participaron en tareas de paso de una representación gráfica a una analítica. Su experiencia anterior correspondía fundamentalmente al paso de una representación analítica a una gráfica o tabular.

Consideramos muy buenos los resultados de la utilización de representaciones gráficas para que los estudiantes participaran en el proceso de adquisición de los conceptos de grafo e imagen de una sucesión, mediante la comprensión de sus características gráficas y, posteriormente, mediante su traslado a propiedades analíticas. Los estudiantes que participaron en la investigación adquirieron significados sobre la imagen y el grafo que otros estudiantes no tienen.

Los estudiantes, participantes en la investigación, como resultado de la utilización de representaciones gráficas, identifican las sucesiones acotadas, las acotadas inferiormente, las acotadas inferiormente no acotadas, las acotadas superiormente y las acotadas superiormente no acotadas mediante los rasgos geométricos que se presentan en la tabla 2.

Mediante la transformación de las características geométricas en características analíticas los estudiantes adquirieron caracterizaciones analíticas de la imagen y el grafo. En las tablas 3 y 4 se expresan estas características utilizando inclusiones y desigualdades, respectivamente.

Tipo de sucesión	**Características geométricas**	
	Imagen contenida en un intervalo	**Grafo contenido en**
Sucesión acotada	*acotado*	*Una semibanda*
Sucesión acotada inferiormente	*Acotado inferiormente)*	*Un semiplano superior*
Sucesión acotada inferiormente no acotada	*Acotado inferiormente y en ninguno acotado*	*Un semiplano superior y en ninguna semibanda*
Sucesión acotada superiormente	*Acotado superiormente*	*Un semiplano inferior*
Sucesión acotada superiormente no acotada	*Acotado superiormente y en ninguno acotado*	*Un semiplano inferior y en ninguna semibanda*

Tabla 2. Características geométricas de la imagen y el grafo de conceptos subordinados al concepto de sucesión

Tipo de sucesión	**Características analíticas de una sucesión $\{x_n\}$**	
	De la imagen, que se indica por *Imx*	**Del grafo, que se indica por *grafx***
Sucesión acotada	$Imx \subset (r,s)$	$grafx \subset N \times (r,s)$
Sucesión acotada inferiormente	$Imx \subset (r,+\infty)$	$grafx \subset N \times (r,+\infty)$
Sucesión acotada inferiormente no acotada	$Imx \subset (r,+\infty)$, y $Imx \not\subset (r,s)$ *para todo r y s reales*	$grafx \subset N \times (r,+\infty)$, y $grafx \subset N \times (r,s)$ *para todo r y s reales*
Sucesión acotada superiormente	$Imx \subset (-\infty, s)$	$grafx \subset N \times (-\infty, s)$
Sucesión acotada superiormente no acotada	$Imx \subset (-\infty, s)$, y $Imx \not\subset (r,s)$ *para todo r y s reales*	$grafx \subset N \times (-\infty, s)$, y $grafx \not\subset N \times (r,s)$ *para todo r y s reales.*

Tabla 3. Características analíticas de la imagen y el grafo de conceptos subordinados al concepto de sucesión

Tipo de sucesión	**Características analíticas mediante desigualdades**
	Imagen
Sucesión acotada	*Existen números reales r y s tales que* $r \leq x_n \leq s$
Sucesión acotada inferiormente	*Existe un número real r tal que* $r \leq x_n$
Sucesión acotada inferiormente no acotada	*Existe un número real r tal que* $r \leq x_n$ *y no existe número real s tal que* $x_n \leq s$
Sucesión acotada superiormente	*Existe un número real s tal que* $x_n \leq s$
Sucesión acotada superiormente no acotada	*Existe un número real s tal que* $x_n \leq s$ *y no existe número real r tal que* $r \leq x_n$

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P., J.D. Novak y H. Hanesian. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Bourne, L. E. (1982). Typicality effects in logically defined categories. *Memory Cognition*, 10, 3-9.

Bruning, R. H. y Schraw G. (2006). *Psicología cognitiva y de la instrucción*. Madrid:

Pearson Educación.

D´Amore (2005). *Bases Filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México: Reverté.

Duval, R., (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En Hitt F. (Ed), *Investigaciones en matemática educativa I* (pp. 245-264), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rosch, E. (1978). Principles of categorization. In E. Rosch y B. B. Lloyd (Eds.) *Cognition and categorization* (pp. 28-48), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Rosch, E. y Mervis, C. (1975). Family resemblance: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology* 7, 573-605.

Wattenmaker, WD, Dewey, GI, Murphy, TD, y Medin, DL. (1986). Linear separability and concept learning: Context, relational properties, and concept naturalness. *Psychonomic Bulletin & Review* 10, 141–148.

COMUNICACIÓN Y ENTORNO FAMILIAR: LENGUAJE Y ADQUISICIÓN DE NOCIONES MATEMÁTICAS DE NIÑOS PREESCOLARES CON AUDICIÓN DIFERENCIADA

Ingrid Díaz Córdova, Ignacio Garnica Dovala
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN (México)
dici_1983@hotmail.com, igdovala@hotmail.com

Resumen. La siguiente es una investigación cualitativa que tiene por objetivos: identificar perfiles de comunicación en sus entornos familiares de niños preescolares que presentan déficit auditivo y/o fallas articulatorias; lograr la comprensión de las condiciones que posibilitan y las que limitan sus procesos de adquisición de nociones matemáticas en situación real de enseñanza. El método consiste en comprender las fenomenologías que acontecen en las aulas de Matemática Educativa (Escuela Oral; Escuela de Lenguaje y Aprendizaje) y la de la Escuela para Padres del Instituto Mexicano de la Audición y el lenguaje, AC en el que se desarrolla esta investigación.

Palabras clave: filosofía oral, lenguaje, sordos, educación especial

Abstract. The objectives of this research are to understand the conditions that either allow or restrict the acquisition of mathematic notions (of discreet quantity and space relations) as well as the influence of linguistic limitations in preschool deaf children with familiar environment participation. This first part, of three, has been performed in the Environment-class room of the Parents' School of the Mexican Institute of Hearing and Language (IMAL) and in the Educational Mathematics class-room within the Familiar Environment program, E/F (Barrientos, 2007) under the research organ of IMAL system (Garnica and Gonzalez, 2009). The present summary reports corresponding outcomes to communication profiles of child's familiar environment.

Key words: oral philosophy, language, deaf, special education

Antecedentes

La presente investigación se realiza en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje, que tiene su origen bajo el signo y la filosofía del oralismo, para su trabajo el IMAL, se divide en tres escuelas, la Escuela Oral [EO], La Escuela de Lenguaje [ELA] y Aprendizaje, y la Escuela para padres [EP], además de dos clínicas, la Clínica de Afasiología y la Clínica Externa, su objetivo fundamental, es conducir al niño sordo y a su entorno apoyando la más precisa estimulación auditiva. Bajo condiciones colegiadas con el Cinvestav (Centro de investigación y de estudios avanzados) y a partir de 2001 se desarrolla un Plan Integral (PI) (Garnica, 2006) con el propósito de comprender el pensamiento matemático de los niños y de las niñas ante la privación de la percepción auditiva y el consecuente lenguaje limitado y generar alternativas favorables a la adquisición de nociones matemáticas. En el periodo 2005-2007 se obtuvieron resultados del proceso de indagación dentro del desarrollo del Programa [D/I: Docencia - Investigación] que opera en el Aula de Matemática Educativa [AME reportados] en (González, 2009 p.56). A partir de 2006 se constituyó formalmente el Programa [E/F: Entorno Familiar] que opera en el Aula Entorno de la Escuela para Padres [AE/ EP], con la meta: "establecer un vínculo permanente de comunicación entre el desarrollo de los aprendizajes – propuestos por el IMAL – dentro del aula, en particular los referidos al desarrollo del pensamiento matemático y el entorno familiar del niño(a)" ver Informe 2006 – 2007 en (Garnica, 2007 p. 2) en este informe se presentan las primeras acciones de diseño e implementación de actividades y en (Barrientos, 2007, p.54), se reportan resultados del caso C en que se evidenció, como era necesario que el niño se basara en su lectura labio-facial [l-f] para comprender el contenido del mensaje, además de la intervención de la docente que incorporó el lenguaje corporal para fortalecer la compresión como proceso. Durante el ciclo 2007-2009 se incorporaron, al desarrollo del programa, los padres de los niños de la ELA, con poca relevancia para las madres, se realizaron diversas actividades para mejor las estrategias y las formas de comunicación madre-hijo [M-H] en su entorno.

Referentes teóricos y método

La comunicación entre el niño sordo y su entorno familiar es fundamental en su desarrollo cognitivo. El análisis de los elementos lingüísticos se fundamenta en la concepción del constructivismo… "el lenguaje deriva de la interiorización de la acción… subordinado al ejercicio de una función simbólica, a su vez apoyada en el desarrollo de la imitación y el juego, así como para el desarrollo de los mecanismos verbales" (Piaget 1982). Es por tanto fundamental el estudio de las formas de comunicación entre las madres y sus hijos cuando interactúan a través del juego o de las actividades de la vida cotidiana. Para comprender la comunicación, la base teórica se sustenta en la noción de <<zona de desarrollo potencial>> relacionada con "la distancia en el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (Vygostki, 1988, p.133*)*. Nos motiva a identificar con mayor rigor dicha comunicación e interacción, porque ante las limitaciones del niño en la compresión y expresión del lenguaje los padres pueden potenciar la capacidad de resolución de problemas a través de actividades de la vida cotidiana. (Caplan, 1997) por su parte describe al lenguaje humano como un código que relaciona un conjunto de formas lingüísticas con varios aspectos del significado, los niveles básicos incluyen: el nivel léxico, el morfológico, el oracional y el nivel del discurso. Debido a las múltiples fallas articulatorias que presentan los niños, la comunicación con los padres es el principal foco de análisis. "El conteo uno a uno de objetos implica tres juegos de correspondencias: (a) una relación de tiempo entre una palabra y una acción de apuntar, (b) una relación de espacio entre la acción de apuntar y el objeto, y (c) la relación resultante de la palabra y el objeto" (Fuson, 1983, p55). Fuson por otra parte explica que apuntar el objeto es muy importante, para el niño en la concepción de contar, restando importancia a la correspondencia palabra-objeto; es sólo después, que entiende que es la correspondencia de la palabra objeto la parte en una serie debe recibir una y sólo una palabra contada, en la práctica, es difícil asegurar cuando es un error de ejecución y aún más complicado descubrir que su naturaleza es de conocimiento o entendimiento. "El lenguaje es el medio esencial para la interacción entre los seres humanos. Sin la capacidad de oír y entender el lenguaje, la posibilidad de expresarse oralmente no se adquiere, tampoco se accede a la lectura y no se desarrolla la expresión escrita." (Ruiz, 2009, p.4). Por su parte (Corredera, 1949) subraya que el principal problema en la comunicación con esta población es identificar si el niño comprende o no el mensaje, o si la falla radica en la expresión, debido a que los niños aún no cuentan con las herramientas lingüísticas para expresar sus ideas o el mensaje. Al principio los niños con múltiples fallas articulatorias, sólo pueden pronunciar un corto número de consonantes, y substituyen los fonemas más difíciles de articular por los más fáciles. El EF se vuelve fundamental en este punto debido a que el lenguaje se adquiere por imitación, y si el modelo es incorrecto, sus primeras producciones serán deficientes. "La actualización de las nociones matemáticas básicas como objeto de comunicación y las orientaciones propuestas al adulto, para la identificación y realización de actividades cotidianas relacionadas con el uso de la noción en situaciones específicas, parecen ser condiciones de posibilidad de la comunicación, como acto de entendimiento, entre el adulto y el niño". (Garnica, 2006).

Preguntas de investigación y objetivos

Las preguntas de esta investigación en curso son: ¿Qué condiciones posibilitan la comunicación, entre la (el) niña(o) y su entorno familiar, cuando el contenido del mensaje son "nociones matemáticas" realizadas en el AME? y ¿Cuáles son los elementos fundamentales de comunicación de mensajes contenidos de nociones matemáticas (de cantidad y de relaciones espaciales) bajo los lineamientos de la EO y de la ELA del IMAL?, los Objetivos planteados son: identificar la relación entre la comprensión de la noción matemática y su expresión, consecuencia de la limitante de la audición y/o del lenguaje; Comprender los modos de comunicación entre el (la) niña(o) y su entorno familiar orientados al desarrollo cognitivo y del lenguaje de él/ella en situaciones de uso cotidiano de nociones matemáticas; Determinar las fallas lingüísticas (articulatorias o de estructuración), que impidan la expresión de las nociones adquiridas.

Método

Esta investigación es cualitativa basada en un método fenomenológico-comprensional que nos acerca a la comprensión de los fenómenos de comunicación ante la complejidad de las condiciones de percepción auditiva y/o de lenguaje limitado en particular lo que concierne a las expresiones lingüísticas "en el campo del lenguaje hay una diferencia entre las estructuras significativas y las expresivas" (Iglesias, 1981 p. 298), que nos permite, mediante el análisis, comprender las singularidades en el proceso de comunicación (madre – hijo) asociado a las experiencias cotidianas del niño en su entorno familiar, pero también las experiencias que se realizan en el AME durante la intervención [I] de la madre en el desarrollo de actividades supervisadas por la docente del AME. Los instrumentos utilizados en esta fase exploratoria fueron, el cuestionario aplicado bajo la modalidad de interacción con la madre que consideró en su estructura cuatro aspectos: a)estado emocional asociado a la situación perceptiva del niño; b) actividades de la vida cotidiana; c) imagen del conocimiento matemático y d) conocimiento de los problemas articulatorios y auditivos, la bitácora fue diseñada para la descripción de la actividad desarrollada y la inclusión de las observaciones relativas al desarrollo de la actividad en cuestión. Finalmente la planeación, diseño e implementación de actividades para su realización en el AE se fundamentó en los contenidos matemáticos tratados en el AME. Las técnicas de registro consideradas fueron el informe semanal de las actividades realizadas por el niño en su EF y la videograbación de actividades realizadas.

Desarrollo. En su fase exploratoria la investigación operó dos programas uno en el AE y en el otro en el AME. El foco permanente fue la comunicación y el EF que generó la ampliación y precisión del "Órgano operativo de la investigación en curso. Sistema IMAL" (Ojeda, 2006) al incluir en su estructura orgánica los tres niveles de operación del programa E/F para lograr de la meta planteada al generar condiciones que posibiliten la comunicación M-H orientada al entendimiento. (Ver figura 1).

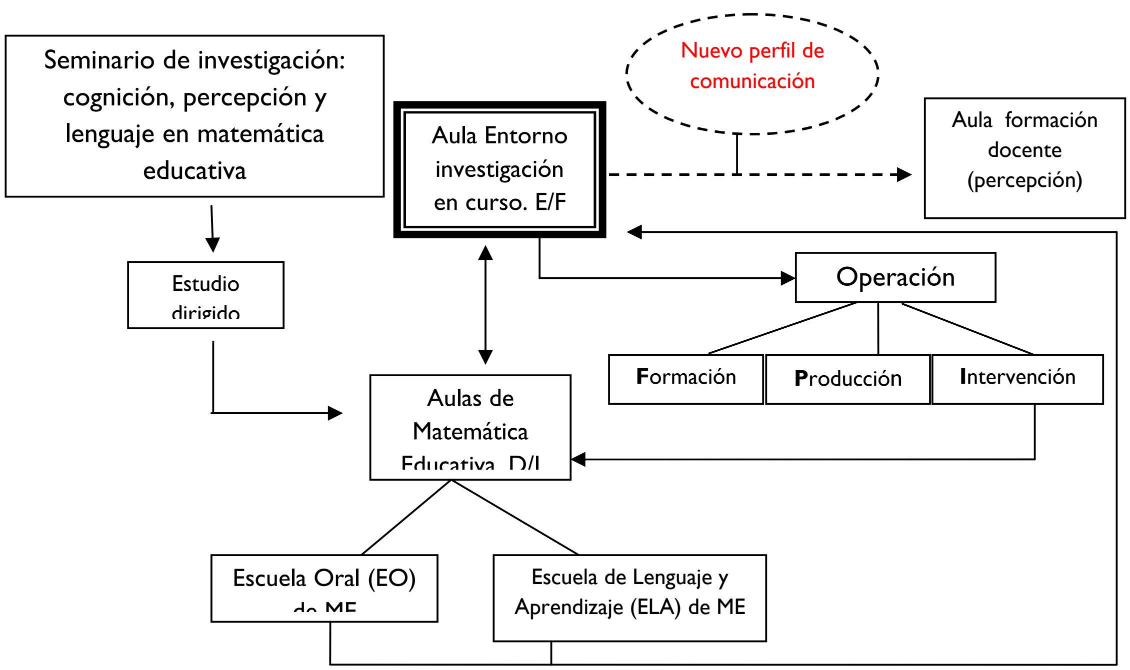


Figura 1. Órgano operativo de la investigación en curso. Sistema IMAL (Ojeda 2006) extendido.

Se trabajó en grupos de seis mamás de niños (as) de la EO y cuatro mamás de niños (as) de la ELA, en doce sesiones, cada una de dos horas una vez por semana, mientras que en el AME las actividades se desarrollaron durante treinta minutos una vez por semana de manera grupal o individual según el curso de la investigación. Se aplicó un cuestionario con preguntas abiertas y dirigidas siguiendo los cuatro aspectos arriba descritos. Con el objetivo de identificar perfiles de comunicación M-H, en la modalidad de aplicación individual, a modo de entrevista, se utilizó la videograbación en cada una de las aplicaciones, se transcribieron y se analizó el contenido de las respuestas utilizando las estrategias de análisis desprendidas de los cuatro aspectos ya antes mencionados. En el AME de la EO y de ELA se desarrollaron seis actividades relacionadas con los objetivos correspondientes al tema de cantidades discretas. El nivel de formación pretendió proporcionar a las madres información y estrategias que les permitieran comprender los objetivos del trabajo que se realiza en el AME y que a la vez que lograran concebir a la matemática desde la perspectiva de la comunicación. Los elementos de análisis fueron de carácter lingüístico, tanto en la estructura como en la articulación, es decir, la forma y la pronunciación cuando el contenido del mensaje es matemático. En el nivel de producción el grupo de mamás logró diseñar y elaborar ocho actividades didácticas, en su modalidad de juego de mesa para ser realizadas en el E/F: huevos al gallinero, las Vegas, los dados, la ruleta, la pirinola y el reloj, el banco, el memorama y fichas escondidas. El nivel de intervención en el AME no formó parte de esta fase.

Resultados

Se describen los correspondientes al nivel de formación consistentes en la identificación de cuatro perfiles de comunicación M-H: ***a)*** etapa de acción constructiva caracterizada por el grado de ansiedad en la madre y la sobreprotección, corresponde a la madre de un niño con Implante Coclear, que presenta múltiples fallas articulatorias, pero con excelente comprensión del lenguaje. **b**) Etapa de admisión, sentimiento de culpa y de aceptación, la limitante es que cree que todas las dificultades de su hijo son culpa suya lo que hace que exagere los cuidados, corresponde a la madre de un niño con retardo en la adquisición y desarrollo del lenguaje sin déficit auditivo, pero con aparentes dificultades neurológicas por factores adversos al nacimiento, en su expresión también tiene múltiples fallas articulatorias y de estructuración, pero su principal dificultad se da en la compresión del lenguaje, no sólo en los mensajes matemáticos, sino en la vida cotidiana. ***c)*** Etapa de choque emocional caracterizado por un divorcio, de ella (la madre) misma, de la situación de crisis, el hijo muestra severos problemas en la comprensión y expresión del lenguaje, la comunicación ha derivado en logros positivos del niño en su ingreso a la doble escolaridad. **d)** Imagen tradicional del conocimiento matemático centrado en las formas operativas de algoritmos y reglas sin sentido conceptual.

En cuanto al seguimiento del estudio de casos en su modo transversal se continuó con el caso C descrito en la sección de antecedentes y se logró el tratamiento de una lección de la escuela regular del el libro de texto de matemáticas de cuarto grado de primaria de la SEP (Ávila, Balbuena & Bollas, 2002), que deja evidencia del entendimiento en el proceso de comunicación M-H cuando el perfil de la madre se adecua al conocimiento de las fallas articulatorias. Véase figura (2) lección siete Censo y Población.

1) De acuerdo con la información que aparece en la tabla contesta lo siguiente:
¿Cuál es el municipio que tiene más habitantes?______________
¿Cuál es el municipio que tiene menos habitantes?____________
¿Cuál municipio tiene más habitantes Amozoc o Acatzingo?
¿Cuántos más?____________
El número de habitantes de Aljojuca. ¿Es mayor o Acatzingo?
¿Cuántos más?____________
¿Cuál municipio tiene aproximadamente el triple de los habitantes que tiene Amistlán? ____________________

Figura 2. Preguntas del libro de texto gratuito

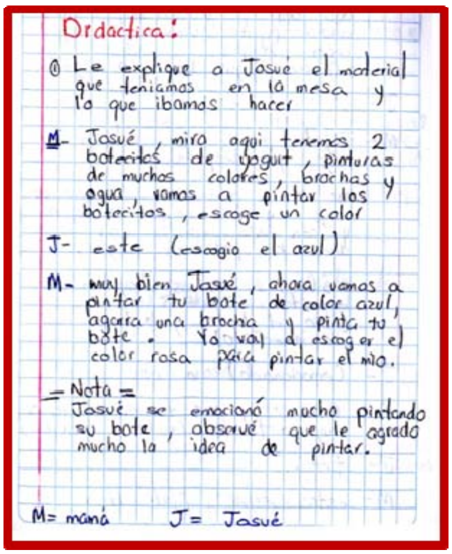
Con este trabajo se identificaron diversas fallas articulatorias, mismas que limitaban la comprensión del mensaje escrito, por ejemplo: la palabra municipio, C, no lograba la correcta pronunciación del mismo él leía /punicipio/, cuando se le corrige la articulación encontramos evidencia de cambio en las respuestas, "orales" y "escritas", cuando la madre interviene corrigiendo oportunamente la pronunciación. El propósito de las actividades es generar condiciones que promuevan la reflexión de las madres relacionada con sus concepciones respecto a la adquisición de nociones matemáticas que les permitan construir sus propias estrategias de comunicación de mensajes contenidos de nociones matemáticas. Diseñar estrategias para modificar el desarrollo de actividades y mejorar la adquisición de nociones matemáticas que realizan sus hijos en el AME. Se espera que las estrategias deriven en condiciones favorables al entendimiento y /o comprensión del mensaje por parte de los niños.

Otra actividad que se trabajó en el AE fue la de cantidad continua la noción de "cantidad de peso" en las madres compararon y ordenaron perceptualmente los objetos de mayor a menor peso. Las madres realizaron la actividad en su entorno e identificaron el material lingüístico con el que podrían trabajar, se describe en la tabla 1.

Tabla 1. Registro del material lingüístico que las madres identificaron para trabajar peso.

Ordenes	Preguntas	Léxico	Expresiones
¡Ayúdame!	¿Cuál te vas a llevar?	Bolsas negras	¡Qué pesado!
Ordenes	Preguntas	Léxico	Expresiones
¡Dame!	¿Por qué esa y no ésta?	Supermercado	¡Qué grande!
¡Carga!	¿Cómo esta?	mercado	¡Pesa Mucho!
¡Levanta!	¿Cuál crees que tú puedas cargar?	Mucho/poco	¡Pesa poco!
¡Súbete!	¿Cuál aguantas?	Peso/pesada	¡No pesa!
¡Bájate!	¿Cuál pesa más?	Grande /chico	¡Gracias!

En la comunicación [M-H] en el entorno. Las madres realizaron sus actividades, las registraron diariamente, anotaron dudas, avances y el material lingüístico que surge durante la actividad. Véase en la figuras 3.1 y 3.2.


Didactica:
① Le explique a Josué el material que teníamos en la mesa y lo que íbamos hacer
M- Josué, mira aquí tenemos 2 botecitos de yogurt, pinturas de muchos colores, brochas y agua, vamos a pintar los botecitos, escoge un color
J- este (escogió el azul)
M- muy bien Josué, ahora vamos a pintar tu bote de color azul, agarra una brocha y pinta tu bote. Yo voy a escoger el color rosa para pintar el mío.
= Nota =
Josué se emocionó mucho pintando su bote, observé que le agradó mucho la idea de pintar.
M= mamá J= Josué

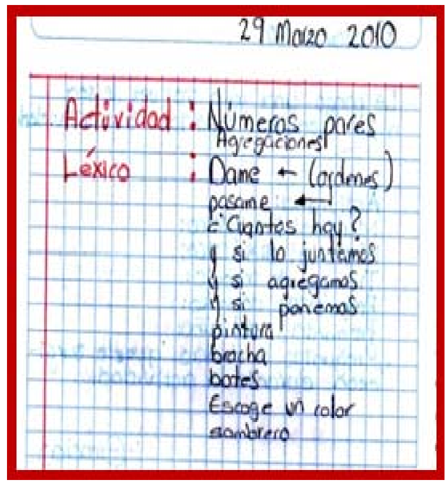

29 Marzo 2010
Actividad: Números pares
Agregaciones
Léxico: Dame ← (ordenes)
pasame
¿Cuántos hay?
y si lo juntamos
y si agregamos
y si ponemos
pintura
brocha
botes
Escoge un color
sombrero

Figura 3.1.La madre describe el material lingüístico

Figura 3.2 Se describe la dinámica

De los juegos de las madres se describe uno de ellos. "Huevos al Gallinero" el objetivo del juego es trabajar agregación y desagregación, las instrucciones, consisten en que el jugador que empieza el juego tira el dado y avanza tantos lugares como el dado indica, al tiempo que toma la mismo cantidad de huevos que marcó el dado. Todo el tablero tiene casillas con dos distintos colores: verde y azul. Dependiendo el color de casilla donde cae el jugador, es el color de tarjeta que debe tomar véase figura 4.1. Cada tarjeta tiene huevos rotos y otras están vacías. Véase figura 4.2. Tomar la cantidad de huevos que la tarjeta indica y hacer la agregación de los que tomo según indicó el dado y también lo de la tarjeta. Si es el caso quita la cantidad de huevos (huevos rotos) véase figura 4.3. Se quitan tantos huevos como marca la tarjeta a los que el jugador ya tiene. Si la tarjeta está vacía debe dejar todos que ha ganado hasta ese momento. Gana el jugador que llegue al gallinero con más huevos.

Figura 4.1. Colores del tablero Figura 4.2. Tarjetas con huevos Figura 4.3 Tarjetas con huevos rotos

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H. & Bollas, P. (2007). *Matemáticas. Cuarto grado*. México: SEP.

Barrientos, M. (2007). *"Actividades Para Adquisición De Nociones Matemáticas": Experiencias En El Aula Entorno De La Escuela De Niños Sordos.* Tesina de Especialidad en Lingüística Aplicada a la Adquisición de una primera Lengua no publicada. IMAL. México.

Caplan, D. (1997). *El Lenguaje: estructura, procesamiento y trastornos.* Buenos Aires: Docencia.

Corredera, T. (1986). *Defectos en la Dicción Infantil. Procedimientos para su corrección.* Buenos Aires: Kapelusz.

Fuson, K. (1983). *The Actisition of Early Number. Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review*. New York: Academic Press.

Garnica, I. (2006). Memoria *del seminario de estudios sobre el "conocimiento matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada".* Cinvestav-IMAL.

Garnica, I. y González, H. (2009). Cantidad Discreta y Pensamiento Matemático de Niños (7-9) con Audición Diferenciada y Lenguaje Limitado: Estudio de Cinco Casos. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 277 – 286. México. CLAME A. C.

Garnica, I. (2007). *"Seminario: Estudios sobre el conocimiento matemático ante la privación de la audición y la consecuente expresión lingüística limitada" Informe Académico 2006-2007.* Documento interno en prensa.

Iglesias, S. (1981). *Principios del método de la investigación científica*. México: Tiempo y obra.

Piaget, J. (1986). "*La Formación del símbolo en el niño:* la *formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño, imagen y representación*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ruiz, M. (2009). *Análisis de textos sobre las experiencias realizadas con niños sordos: el orden sintáctico.* Tesis de maestría en patología de la audición y el lenguaje. IMAL. México.

Vygostki, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

COMPRENSIÓN DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES SORDOS: EDADES 17-26 AÑOS

Pablo Gian-Carlo Lonngi Ayala, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN (México)
giancarlolonngi@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Como parte de tesis de maestría en México DF, este reporte sobre cuatro estudiantes sordos, en un programa del gobierno local de entrenamiento para su ingreso al bachillerato, describe su comprensión de ideas fundamentales de Probabilidad y de Estadística en el momento en que se les enseñaron por primera vez, y se investigó su desempeño en actividades de Estadística realizadas en sesiones de aula en condiciones reales. Con instrucciones escritas como estrategia de enseñanza de Matemáticas para sordos, el estudio se concentró en una actividad de estadística descriptiva para que interpretaran una gráfica de barras y respondieran preguntas completando oraciones. De los cuatro estudiantes, dos son oralizados y los otros sólo usan Lengua de Señas Mexicana (LSM). Los resultados no muestran una diferencia acusada entre unos y otros, aunque para la identificación de categorías en gráficas se reveló mayor comprensión en los estudiantes señantes.

Palabras clave: estocásticos, educación media superior especial

Abstract. As part of a thesis for a Master's degree in Mexico City, this report is about four deaf students in a local government training program to enter high school. It describes their understanding of fundamental ideas of Probability and Statistics when they are first taught. Their performance in a Statistics lesson using the actual classroom activities was also investigated. By means of written language as a Mathematics teaching strategy for deaf students, the research focused on a Descriptive Statistics activity to interpret a bar graph and to answer questions completing sentences. Among the four students, two of them knew spoken language and the other two just Mexican Sign language (MSL). The results show no difference between spoken and signing students, although the signing students revealed a better understanding to identify categories in graphs.

Key words: stochastics, high school, special education

Introducción

Para la educación matemática, la sordera plantea no sólo la dificultad comúnmente encontrada en la educación regular básica para la adquisición de conceptos de Probabilidad y de Estadística (Elizarrarás, 2004), sino además la de la adquisición de la lengua en general, dificultad que constituye un obstáculo para precisar en la comunicación las sutilezas que reviste el estudio de situaciones aleatorias.

Con esta investigación se pretende obtener información sobre los rasgos de la comprensión de contenidos de estocásticos, de jóvenes con déficit de audición y con educación especial básica terminada, en el contexto de un programa de matemáticas llevado a cabo en la Ciudad de México, con carácter emergente, preparatorio para un propedéutico de un bachillerato a distancia (véase UNAM, B@UNAM).

Los contenidos del programa emergente son los siguientes: *Primera unidad*: Conceptos básicos de aritmética y elementos de pre-álgebra; *Segunda unidad*: Geometría y medición; *Tercera unidad*: Información cuantitativa: registro, interpretación y análisis.

De la puesta en práctica de este programa, a la fase de inicio y de exploración (un mes), le siguió la de identificación de las condiciones de conocimiento matemático adquirido (un mes), de 31 estudiantes sordos. Se les ubicó en tres niveles: alto, medio y bajo; el primero correspondió al dominio de operaciones aritméticas con números enteros, correspondiente a los grados 5°-6° de primaria; el segundo, a los grados 4°-5°; y el último al 3° de primaria. La tercera fase, de enseñanza, se desarrolló en condiciones irregulares, aunque con alguna sistematicidad durante el segundo semestre del 2009, si bien con una marcada disminución del número de alumnos.

La operación del programa consistió en: diseño de las actividades de enseñanza para desarrollarlas en sesiones presenciales, asesorías personalizadas para el fortalecimiento de nociones matemáticas débiles y de la *comunicación escrita*, realización de tareas tradicionales y algunas en el entorno.

El proyecto actual se enfoca en la tercera unidad del programa de estudios emergente.

Perspectiva Teórica

El estudio tiene tres ejes: epistemológico, cognitivo y social.

Eje epistemológico

Se consideran las ideas fundamentales de estadística y de probabilidad propuestas por Heitele (1975) para un currículum en espiral. La idea de un currículum tal se apoya en su premisa de que es recomendable la enseñanza, a los niños desde edades tempranas, de los conceptos básicos de Probabilidad y de Estadística (Heitele, 1975). De Probabilidad, porque una noción incorrecta acerca de situaciones aleatorias en las que interviene el azar se manifiesta en las respuestas que las personas adultas dan para explicar dichas situaciones: "(…) la adquisición temprana de modelos explicativos inadecuados puede… desarrollar intuiciones firmemente arraigadas (…) difíciles de desprender y que pueden impedir la adquisición del conocimiento analítico" (Heitele, 1975, p. 4). Además, una vez aprendidas algunas ideas básicas, se pueden adquirir estructuras de pensamiento más formales sobre fenómenos aleatorios, es decir, situaciones donde interviene el azar. "La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilitará si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación adecuada del tópico principal" (Heitele, 1975, p. 1). Dichos conceptos básicos, que deben ser presentados de forma eficaz, conforman las diez *ideas fundamentales de estocásticos para un currículum en* *espiral*, propuestas por Heitele, que son las siguientes: medida de probabilidad, espacio muestra, combinación de probabilidades, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números, muestra.

Eje cognitivo

En este apartado se considera el déficit auditivo, la existencia de esquemas que lo compensen, las dificultades que genera la sordera en la adquisición del lenguaje y las derivadas del proceso lector, y el método de Logogenia para adquirir la lengua escrita.

Déficit auditivo

Mediante una audiometría, que consiste en explorar la respuesta de cada oído a frecuencias en el intervalo de 125 Hz a 8000 Hz enviando sonidos entre 0 dB y 120 dB de intensidad, se obtiene el promedio de los valores de los umbrales auditivos a las frecuencias de 500, 1000 y 2000 hertz (Hz), denominado "promedio de tonos audiométricos" (PTA), valor que determina si la persona tiene una audición normal o el grado de la pérdida auditiva (superficial, moderada, media, severa, o profunda. Estas pérdidas auditivas reciben el nombre general de *hipoacusia*, disminución de la audición en diferentes grados (Ling, 1984).

A las personas que no responden a ninguna frecuencia a la máxima intensidad se les llama *anacúsicas*; se sabe que sólo una de cada mil personas presenta esta situación. Sin embargo, con frecuencia se emplea este término incorrectamente para referirse a personas con umbrales auditivos de entre 70 y 120 dB, ambas hipoacúsicas.

Esquemas compensatorios derivados de la deficiencia

Vygotski (1997) señalaba que es un error creer que la esencia de la labor educativa, con alguien a quien le falte algún órgano de los sentidos, reside en desarrollar en ellos los órganos de percepción restantes. Por el contrario, afirmaba que la idea de compensación biológica debe ser sustituida por la de compensación social del defecto: "… un órgano de percepción (analizador) es sustituido por otro, pero… sigue siendo el mismo… todo el mecanismo de su educación… Si psicológicamente una insuficiencia orgánica implica una dislocación social, pedagógicamente educar a ese niño equivale a insertarlo en la vida…" (Vygotski, 1997, pp. 116-118).

Relación entre sordera y adquisición del lenguaje

Unas investigaciones sobre la adquisición y el desarrollo del lenguaje en personas sordas permiten señalar dos cuestiones centrales: las dificultades que genera la sordera en el desarrollo del lenguaje como facultad biológica, por un lado, y las que se producen en el proceso de la lectura, por el otro. Éstas están determinadas por las interfaces entre sintaxis, semántica, pragmática, léxico y otros factores no lingüísticos que participan en el proceso lector (véase Salas, (año no disponible). Para reforzar la comprensión y producción de la lengua escrita se propuso la utilización de elementos del método de Logogenia, derivado de la lingüística aplicada (Radelli, 1992). En dicho método, se muestran al sordo pares de oraciones que sólo se distinguen en algún elemento que puede modificar el sentido entre una oración y otra. Esta propuesta tiene el fin de facilitar que el sordo identifique las sutilezas del lenguaje, de las que difícilmente adquiere conciencia por la limitación auditiva-verbal.

Eje social

En el contexto de la educación de los sordos, existen distintas posturas sobre cómo integrar al sordo a la sociedad; básicamente se consideran dos: enseñar al sordo a hablar o enseñarle Lengua de Señas Mexicana (LSM). Ambas posturas tienen muchas variantes: en la primera, hay enfoques oralistas que prohíben la expresión facial y corporal y la lectura de labios, pero promueven la repetición de palabras sin comprensión de éstas; otros enfoques permiten la lectura de labios y promueven el entrenamiento auditivo y el habla, comprendiendo lo que se dice y lo que se escucha. Por el contrario, para la enseñanza de la LSM, se desalienta la lectura labial o cualquier intención de usar la voz. Esa polarización de los enfoques Auditivo Verbal, Oralista y de la LSM divide a la comunidad sorda a la división entre Sordos Oralizados y Sordos Señantes, con casos sin interacción entre una y otra, de mezclas de ambas, y heterogeneidad en el dominio del español y de la LSM de un sordo a otro. Algunas consecuencias son: el desconocimiento de la estructura del español y la falta de vocabulario básico y de uso cotidiano, incomprensión de la lectura, construcción deficiente de oraciones, conteo uno a uno, falta de automatización de operaciones aritméticas y falta de generalización de conceptos básicos. Esta situación se identifica continuamente en la mayoría de las personas que con su pérdida de audición transitan por las aulas sin haber recibido la atención necesaria.

En 2005 se publicó la Ley General de las Personas con Discapacidad (Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos) que poco se relaciona con la realidad educativa de este país pues, por ejemplo, los artículos que establecen a la Lengua de Señas Mexicana como lengua natural de la comunidad de sordos, y a la educación bilingüe como un derecho de los sordos, no se pueden poner en funcionamiento por la ausencia de un marco operativo. Particularmente la educación bilingüe es una formulación ficticia, pues no considera la capacitación de maestros, la certificación de intérpretes educativos, los planes de estudio y los medios que posibiliten la comunicación en las dos lenguas para garantizar la plena competencia de los alumnos sordos en la lengua oral/escrita y en la LSM. La escasez de intérpretes de Lengua de Señas certificados y formados para la educación del sordo fue señalada por Shick, Williams y Kupermintz (2006).

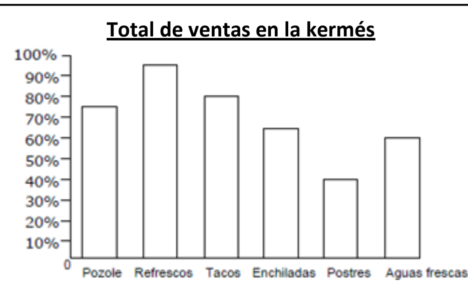
México carece de este tipo de programas para la educación matemática y se desconoce lo que un estudiante sordo puede aprender con una enseñanza mediada por un intérprete.

Método

La investigación, cualitativa y en curso, se organiza en dos fases: experiencia en el aula mediante la aplicación de actividades de enseñanza de temas de estocásticos diseñadas *ex profeso,* y entrevista clínica aplicada a dos casos. Los contenidos de estocásticos para las actividades de aula fueron: variación, descripción y representación de datos, espacio muestra y conteo. En la enseñanza destaca la lengua escrita como medio de comunicación, aunque el método de Logogenia (Radelli, 1992) no se aplicó de manera estricta. Las sesiones fueron de dos horas, dos o tres veces por semana.

Los instrumentos para la recolección de datos fueron las actividades diseñadas *ex profeso*, presentadas impresas en papel, con instrucciones y preguntas para contestarse con lápiz ahí mismo. La atención a los estudiantes fue individual para identificar en lo posible sus dificultades de comprensión de lo planteado en la actividad y se tuvo la intervención escrita del investigador para orientar sus respuestas.

Instrumento y casos



1b) ¿Cuál fue el guisado más popular? El __________ más _________ fue el de _______.
1c) ¿Cuál fue el guisado más frecuente? El __________ más _________ fue el de _______.
2b) Se vendieron más enchiladas que tacos. Sí_____ No_____
El __________ de __________ es ___________ que el de ___________.
1b) ¿Cuál fue el guisado más popular? El __________ más ________ fue el de _______.
1c) ¿Cuál fue el guisado más frecuente? El _________ más ________ fue el de _______.
2b) Se vendieron más enchiladas que tacos. Sí__ No__
El ________ de ________ es _________ que el de ___________.
1b) ¿Cuál fue el guisado más popular? El __________ más ________ fue el de _______.
1c) ¿Cuál fue el guisado más frecuente? El _________ más ________ fue el de _______.
2b) Se vendieron más enchiladas que tacos. Sí__ No__
El ________ de ________ es _________ que el de ___________.
1b) ¿Cuál fue el guisado más popular? El __________ más ________ fue el de _______.
1c) ¿Cuál fue el guisado más frecuente? El _________ más ________ fue el de _______.
2b) Se vendieron más enchiladas que tacos. Sí__ No__
El de es que el de .

Figura 1. Referente para las preguntas e instrucciones de la actividad

La actividad tuvo como objetivos ejercitar la descripción escrita y gráfica de datos estadísticos, usar términos de estadística descriptiva y calcular la media y la moda de un conjunto de datos. Como referente se presentó la gráfica del total de ventas de tipos de alimentos en una kermés. La actividad tuvo dos partes; en la primera se plantearon 11 preguntas y sus respuestas para ser completadas; en la segunda, se presentaron seis pares de proposiciones, la primera del par para marcar si era cierta o falsa y la segunda para ser completada. La Figura 1 presenta dos ejemplos de preguntas de la primera parte y un par de proposiciones de la segunda.

La Tabla 1 resume la distribución del contenido matemático de la actividad, en la que para cada reactivo se trató un contenido matemático dado (frecuencia, moda, promedio, producto cartesiano), mismo que puede identificarse por la referencia textual a cada concepto. Los datos de la situación planteada se agrupan en tres categorías: guisados, bebidas y postres.

Tabla 1. Contenido de la actividad.

Re activo	Contenido	Referente
	Primera parte	
1.a	Número de subcategorías de C_1= 3, números naturales	¿cuántos tipos de?
1.b	Moda C_1, porcentaje, orden	más popular
1.c	Moda C_1, porcentaje, orden	Más frecuente
1.d	Número de subcategorías de C_2, números naturales	¿cuántos tipos de?
1.e	Producto cartesiano, eje x (categorías): xC_{21}; xC_{22}, orden	¿cuáles barras?
1.f	Moda (C_2), porcentajes de subcategorías de C_2, producto cartesiano, eje y (porcentajes): yC_{21}; yC_{22}; orden.	más se vendió
1.g	Número de subcategorías de C_3 = 1, números naturales	¿cuántos tipos de?
1.h	Subcategoría o categoría C_3 con menor porcentaje, orden, eje x	menos se vendió
1.i	Variación, subcategoría o categoría menos frecuente, porcentaje, orden, producto cartesiano, eje x	menos frecuente
1.j	Variación, subcategoría o categoría con 100% de venta, porcentaje, orden, producto cartesiano, eje x	se acabó
1.k	Variable estocástica, asignación numérica (porcentaje) a categorías y subcategorías, producto cartesiano, eje y (frecuencia relativa, altura de barras)	qué representa cada barra
	Segunda parte	
2.a	Moda (C_2), comparación, porcentaje orden	la gente prefirió porcentaje menor que
2.b	Subcategorías de C_1, porcentaje, orden	se vendieron más que porcentaje menor/mayor que
2.c	Datos extraños, subcategoría o categoría con porcentaje menor que 50%, porcentaje, mitad, 50%, orden	sobró más de la mitad porcentaje menor que 50%

2.d	Media, subcategorías de C_1, producto cartesiano, eje x (categorías): xC_{11};; xC_{12}; xC_{13}, porcentaje	se vendió por lo menos 65%
2.e	Subcategoría de C_{21}. complemento del evento "refrescos que se vendieron", porcentaje, orden, producto cartesiano, eje x (subcategorías)	casi se acabaron el 5% no se vendió
2.f	Variable estocástica (porcentajes) y su media, promedio de subcategorías (C_1), de subcategorías (C_2), y subcategorías (C_3), producto cartesiano, eje y (fre-cuencia relativa, altura de barras	Promedio de ventas de alimentos y bebidas

Nota: C_1: guisados. C_{11}: pozole; C_{12}: tacos; C_{13}: enchiladas. C_2: bebidas. C_{21}: refrescos; C_{22}: aguas frescas. C_3: postres.

La actividad fue desarrollada por cuatro jóvenes mexicanos sordos profundos de 17-26 años de edad, dos oralizados (**O**, con entrenamiento verbal) y dos sólo señantes (**S**, utilizan la Lengua de Señas), a quienes además de esta indicación distinguiremos por una inicial. Los cuatro casos tienen educación especial básica terminada y se les considera de alto perfil para ingresar al bachillerato.

Resultados

En las preguntas 1.a a 1.k de la primera parte de la actividad, en tanto S-G, O-F y S-M cometieron a lo más una incorrección (uso de "por ciento" en lugar del genérico "porcentaje", por ejemplo), el caso O-I cometió nueve incorrecciones, de las cuales cinco revelan incomprensión de las expresiones "frecuente", de "popular" como "más frecuente" y de las categorías indicadas en las preguntas (guisados) y de sus subcategorías indicadas en la gráfica. En el mismo sentido, a los "postres" no se les consideró como "alimento" para responder las preguntas referentes a ellos.

En la segunda parte de la actividad, de asignar el valor de verdad a una proposición y completar la proposición que justificaba el valor de verdad correcto de la primera (véase ejemplo en la Figura 1), O-I dejó 13 espacios en blanco, de 28, donde se completaban las proposiciones.

Presentamos tres ejemplos de los reactivos planteados, del valor de verdad asignado por el estudiante y de los enunciados respectivos completados en cursivas.

Ejemplo 1

2.b) Se vendieron más enchiladas que tacos. **SÍ NO**

El porcentaje de __________ es _______ que el _________ de _________.

(O-F) No. *las enchiladas menor porcentaje los tacos*

(S-M) No. *tacos mayor porciento enchiladas*

(O-I) No.

(S-G) No. *enchiladas menor porcentaje tacos*

Al reactivo **2.b** no respondió O-I. O-F y S-G se guiaron por el orden de los guisados en el enunciado del mismo reactivo, mientras que S-M lo invirtió pero conservando la misma relación mayor/menor, a la vez que utilizó *porciento* en lugar de porcentaje; O-F incluyó los artículos en los espacios que correspondían a una sola palabra.

Ejemplo 2

2.e) Casi se acabaron los refrescos. **SÍ NO**

El 5% de ____ ___________ _____ se vendió.

(O-F) Sí. *los refrescos no*

(S-M) Sí. *los refrescos no*

(O-I) Sí. *los refrescos casi*

(S-G) Sí. *los refrescos casi*

Las respuestas al reactivo **2.e** fueron equilibradas entre señantes y oralizados: O-F y S-M respondieron que el 5% de los refrescos *no* se vendió, mientras O-I y S-G que el 5% de los refrescos *casi* se vendió, lo cual lógicamente no es correcto (sí *se vendió* o *no se vendió*).

Ejemplo 3

2.f) El promedio de ventas de alimentos es casi el 70%. **SÍ NO**

La suma de los _______ de ventas de alimentos y _____ dividida _____ el número de tipos de éstos es _____.

(O-F) No. *pocentajes* [sic] *postre entre 52*

(S-M) *porcientos bebidas entre 73%*

(O-I) No. *bebidas*

(S-G) No. *alimentos promedio ventas 70%*

Para el reactivo **2.f** O-I dejó espacios sin responder, como ya se señaló. O-F escribió *pocentajes* sin la r, y S-M *porcientos*, mientras que S-G respondió *alimentos*. S-M y O-I completaron alimentos y *bebidas* donde correspondía, mientras que O-F completó alimentos y *postres*, y S-G alimentos y *promedio.* O-F y S-M respondieron acertadamente donde debía ir *entre*, pero S-G colocó *ventas*. La diferencia en el promedio de los porcentajes de venta de los alimentos y bebidas obedece a si los cuatro estudiantes consideraron los postres o no.

En general, los cuatro estudiantes pudieron efectuar la lectura de la gráfica pero la falta de vocabulario en el sordo señante para distinguir entre los rótulos de las barras dificultó la correcta correspondencia de los datos estadísticos y la completación de los enunciados en lengua escrita y, a la vez, el sordo oralizado no presentó un mejor desempeño que el señante.

Incluso cuando nos aseguramos de su comprensión de los términos empleados en la actividad, hubo confusión entre los términos *postres* y *porcentajes*, *postres* y *guisados*, y en el significado de "frecuencia".

En efecto: **O-F** manifestó respuestas guiadas y corregidas por el investigador y otras, sin guía, acusaron una posible confusión de los términos *postres* con *porcentajes* y de *postres* con *guisados*; también falló en operaciones aritméticas básicas. **O-I**, aunque tuvo autonomía en sus respuestas, éstas no fueron cuidadosas: escribió que dos distintos guisados fueron, respectivamente, el alimento menos frecuente y el alimento que menos se vendió. **S-G**, por su parte, también presentó respuestas guiadas por el investigador pero, al final del ejercicio, ya sin orientación, demostró dificultades para estructurar en lengua escrita ideas y conceptos matemáticos. Al contrario, **S-M** mostró autonomía y comprensión de la situación planteada por lo estructurado de sus respuestas y lo completo de los datos, aunque sin la distinción entre el uso genérico de "porcentaje" y el particular de "por ciento"; no obstante, sus operaciones fueron correctas.

Comentarios

La experiencia apunta a la necesidad urgente de una docencia formada para la enseñanza de matemáticas personalizada al sordo que, si bien ardua, promueva la comunicación escrita para darle acceso a este medio y, con él, a la educación de bachillerato. La intervención en este sentido en la educación básica es esencial.

Referencias bibliográficas

Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos (10 de junio 2005). *Ley General de las Personas con Discapacidad.* México: Diario Oficial de la Federación. Recuperado en septiembre de 2009 de www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LGPD.pdf.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Dordrecht: Reidel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* **6**, 187-205.

Ling, D. (1984). *Early Intervention for Hearing-Impaired Children: Oral Options*. San Diego: College Hill Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La génése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.

Radelli, B. (2002). Una nueva aplicación de la lingüística: la Logogenia. En Z. Estrada. *Sexto Encuentro Internacional de Lingüística en el Noroeste 3*. (189-213) México: U. Sonora, División de Humanidades y Bellas Artes, Depto. de Letras y Lingüística.

Shick, B., Williams K. y Kupermintz, H. (2006). Look Who's Being Left Behind: Educational Interpreters and Access to Education for Deaf and Hard-of-Hearing Students. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education* (Marschark, M. Ed.) **11**, 3-20. Recuperado el 12-10-2009 de http://jdsde.oxfordjournals.org/content/11/1/3.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V*. Madrid: Visor Dis.

UNA EXPERIENCIA EN TORNO A LA ESTRATEGIA DE VISUALIZACIÓN

Anabel Azucena Cárdenas Vázquez, Carlos Oropeza Legorreta
Secundaria "Octavio Paz". FES-Cuautitlán UNAM (México)
azu_1810@hotmail.com, carlos_oropezamx@yahoo.es

Resumen. En el presente trabajo se reportan los resultados obtenidos al implementar una propuesta de situación didáctica diseñada previamente para ayudar a los estudiantes de segundo año de secundaria a mejorar sus procesos de justificación. En el diseño de las actividades se consideró la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau y como herramienta para la elaboración de la secuencia a la Visualización. El contenido central de la propuesta es sobre temas de geometría plana. Por tanto el presente reporte tiene como objetivo dar a conocer los resultados logrados durante la investigación; dentro de los cuales encontramos que a través de los ejercicios de visualización se apoyo a los alumnos comprobar resultados y construir conceptos.

Palabras clave: situación didáctica, procesos de justificación, visualización

Abstract. The paper presented below reports the results obtained after the implementation of a proposal for a didactic situation, designed specifically to help second year high school students to improve their justification process. We considered Brousseau's Theory of Didactic Situations to design the activities involved and visualization as a tool for preparing the situation. The main subject of the proposal is on plane geometry, and so we are reporting the results obtained after the application of the activities, which in our experience turned out to be quite helpful for the students to justify their work and build new concepts.

Key words: didactic proposal, processes of justification, visualization

Antecedentes

Cada vez son más altos los niveles educativos requeridos a hombres y mujeres para participar en la sociedad y resolver problemas de carácter práctico. En este contexto, es necesario que la educación básica contribuya al desarrollo de competencias para mejorar la manera de vivir y convivir en una sociedad cada vez más compleja. Esto exige considerar el papel de la adquisición de los saberes socialmente construidos, la movilización de saberes culturales y la capacidad de aprender permanentemente y aprovechar los saberes escolares en la vida cotidiana y así trasladarlos a la realidad inmediata.

Considerando tales exigencias y derivado del nuevo plan de estudios 2006 de educación secundaria en México, del eje temático Forma Espacio y Medida se desprende como tema central la geometría, que en la currícula juega un papel muy importante toda vez que su estudio ayuda al alumno a desarrollar habilidades como la observación, la abstracción, la comunicación, así como la capacidad de imaginación y deducción, además de que la geometría es una parte primordial en la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en que ésta no aparezca de forma directa o indirecta, en actividades como el deporte, la pintura, el baile o la arquitectura, tan solo por citar algunas. Por ende, es imprescindible el diseño de situaciones didácticas que permitan al estudiante acercarse desde otra mirada al estudio de la materia.

En este contexto, realizamos un análisis preliminar sobre el desempeño de estudiantes de segundo año de secundaria en temas relacionados con geometría; principalmente centramos el análisis, a los procesos que utilizaban para la resolución de problemas, así como en su discurso argumentativo para validar sus procedimientos y respuestas.

Derivado de la observación y análisis del trabajo áulico, encontramos que los estudiantes enfrentan algunas dificultades al estructurar un discurso justificado que ayude a validar sus respuestas, no logran trasladar los conceptos teóricos que conocer a representaciones gráficas, asimismo presentan obstáculos al identificar propiedades de figuras planas y al enunciar características de dichas figuras.

Metodología y marco de referencia

Como instrumentos de investigación utilizamos consistió en la aplicación de un cuestionario de preguntas abiertas dirigidas a explorar los conocimientos previos de los alumnos sobre el tema ángulos entre rectas, así como las dificultades en el uso del discurso matemático. Las preguntas están escritas con la intención de analizar los conocimientos que tienen los alumnos sobre las diversas concepciones que se involucran en el tema de estudio como lo son, recta, rectas paralelas, recta secante, ángulo, inclinación, pendiente; asimismo en las últimas preguntas se espera conocer que tanto manejan el lenguaje matemático los estudiantes.

- Algunas de las preguntas fueron:
- ¿Cómo describes una línea recta?,
- ¿Qué entiendes por inclinación de una recta?,
- ¿Qué elementos caracterizan a la inclinación?,
- Lee el siguiente teorema y contesta:
- Sea q una recta por P secante con r en Q. Tracemos ahora la recta h secante con q por P tal que se formen ángulos colaterales interiores que sumen 180°. Por el corolario de Euclides resultan h // r por P.
- ¿Para qué consideras te sea útil el teorema antes enunciado? o ¿qué cálculos te permite realizar el teorema antes enunciado?

Las respuestas que manifiestan los alumnos ante las preguntas planteadas, dan indicio que tienen concepciones aproximadas sobre el tema, no obstante en su mayoría ante la dificultad de escribir dichos conceptos, acuden a una representación gráfica de la idea mental que tienen del objeto matemático.

Al realizar un trazo dan por entendido que han dado contestación a la pregunta, lo cual da evidencia de la existencia de la dificultad al manejar el discurso matemático.

Identificamos que en algunas preguntas el obstáculo que tuvieron los alumnos fue el lenguaje poco usual, en el caso de la geometría deductiva, por citar un ejemplo, los teoremas que se emplean son deducciones con cierto nivel conceptual, esto obstaculiza en gran medida que los alumnos puedan trabajar únicamente con representaciones que no impliquen diagramas puesto que no entienden el lenguaje empleado, lo cual se constata en las dos últimas preguntas del cuestionario donde en una de ellas se pide identificar la información que aporta el teorema y en la otra se pide mencionar qué cálculos te permite realizar dicho teorema.

Dentro de los elementos teóricos que forman la columna vertebral de esta investigación se pueden señalar, la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau como marco de referencia y la Visualización como estrategia que posibilite el logro de los propósitos de la Situación Didáctica.

En cuanto a la Teoría de Situaciones didácticas Brousseau, lo plantea como una forma para "modelar" el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera tal que este proceso se visualiza como un juego para el cual el docente y el estudiante han definido reglas y acciones implícitas, estableciendo así el contrato didáctico, la consigna establecida entre profesor y alumno, que comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente.

La *Situación Didáctica,* comprende el proceso en el cual el docente *proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento*. De lo anterior se deduce que la situación didáctica engloba las situaciones a-didácticas (el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica), de esta forma, la *Situación Didáctica* consiste en la interrelación de los tres sujetos que la componen (profesor-estudiante-medio didáctico). En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (*situación didáctica*) y pueda el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (*situación a-didáctica*).

En cuanto hace a la visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas.

De acuerdo con Barwise, J. & Etchemendy, J. (1991) algunas de las faltas de entendimiento se deben a fallas al establecer y detallar conexiones entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y procedimientos matemáticos. Aunque los beneficios de la visualización de los conceptos matemáticos se reconoce, con frecuencia, hay reticencia para aceptarlos; se prefiere el pensamiento algorítmico sobre el visual. Eisenberg, T. & Dreyfus T. (1991) afirman que la preferencia de los estudiantes para hacer argumentos no visuales no es accidental.

Propuesta

Consideramos de importancia recurrir a actividades que involucren al alumno en un proceso de reflexión que implique tareas escolares de percepción y de aspectos formales, es decir, la construcción de objetos gráficos con instrumentos e información formal para asegurar la construcción de un dibujo que contenga las propiedades y características poseídas por el objeto en estudio, para avanzar en el desarrollo de habilidades de visualización, de percepción, construcción, clasificación, entre otras.

Consecuencia del análisis preliminar, así como elementos obtenidos del cuestionario aplicado y de las consideraciones teóricas, elaboramos una propuesta de una situación didáctica sobre el tema ángulos que se forman entre rectas, en la cual se consideró algunos principios que según Arcavi (1999) deben respetarse:

a) que el alumno pueda usar su experiencia previa y aplicar su sentido común,
b) que sea posible resolver el problema de más de una manera,
c) que el problema permita elaborar preguntas nuevas,
d) que no siempre haya una respuesta única,
e) que la respuesta no sea siempre el resultado de una sucesión de algoritmos desencadenados como hábitos automáticos, sino el resultado de una conexión entre conceptos o ideas,
f) que el problema invite a reconsiderar una idea o concepto en un nuevo contexto,
g) que haya problemas genuinos de la vida real y de la experiencia de los alumnos

Por otra parte atienden al desarrollo de diversas habilidades que de acuerdo al plan de estudios debe poseer el alumno en el tema de estudio.

Habilidades de visualización matemática: se trata de fines destinados al análisis visual de figuras geométricas que involucran distintas situaciones.

La adquisición de la habilidad de análisis

- Analizar los elementos componentes de una figura geométrica; los ángulos que la forman, rectas que la componen.

- Realizar mediciones para hacer comparaciones de lo que se sabe con lo que se va comprobando.
- Asociar los tipos de ángulos

La adquisición de la habilidad de clasificación

- Establecer relaciones entre propiedades
- Establecer relaciones entre conceptos
- Realizar clasificaciones(inclusivas- exclusivas)
- Demostrar de un modo informal proposiciones
- Formalizar definiciones
- Comprender la estructura de una demostración en varios pasos
- Iniciar a los alumnos en el razonamiento deductivo

Aprendizaje de conocimientos geométricos. En este caso se trata de fines que tienen que ver con el aprendizaje escolar de conocimientos, propiedades, algoritmos, teoremas.

- Conocer y utilizar adecuadamente los elementos que componen a una figura; sus ángulos, rectas que lo componen.
- Adquirir los conceptos de: ángulo, recta, recta paralela, transversal.
- Usar adecuadamente el lenguaje geométrico
- Utilizar distintos instrumentos, especialmente los del juego geométrico.

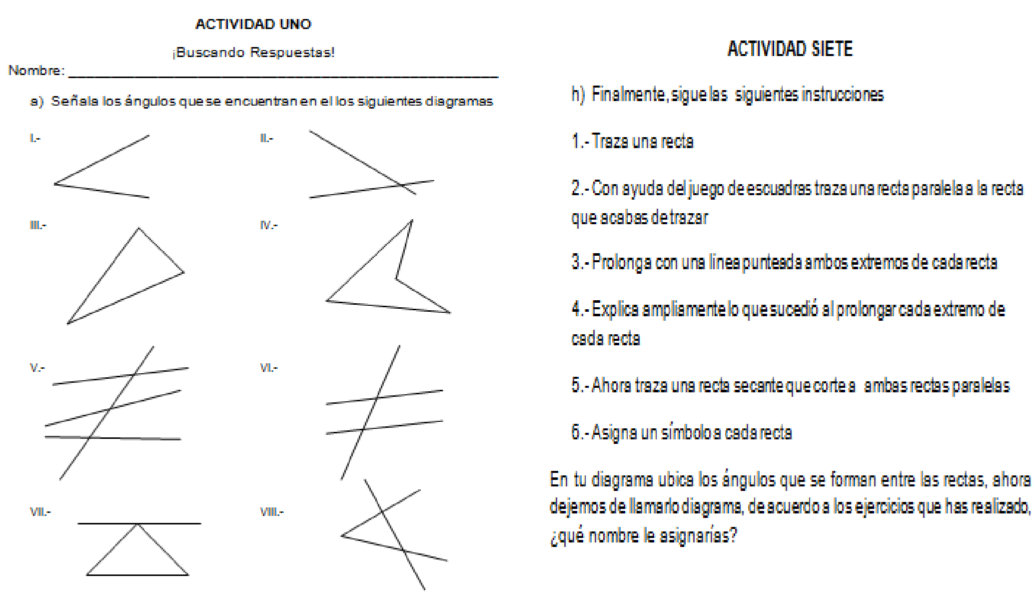


Figura 1. Actividades de la propuesta de situación didáctica

En suma las actividades centraron su atención en aspectos visuales ya que los estudiantes manifestaron la preferencia por dichas representaciones, se trato de presentar al estudiante diversos ambientes en donde se encontraba inmerso el tema de estudio, las persianas de de una ventana, las luces de una discoteca, hasta la estructura de una montaña rusa; dichos planteamientos se realizaron para involucrar al alumno con diversos hechos conocidos por él, y le fuera más sencillo realizar comparaciones y encontrar regularidades.

Conclusiones

La propuesta de situación didáctica fue puesta en escena con 30 estudiantes, de segundo año de secundaria de Ciudad Satélite, Estado de México, México. Tratamos de proponer actividades que permitieran a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer relaciones que los condujera después a la comprensión de cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes.

Con el uso de los ejercicios de visualización se apoyo a los alumnos a comprobar resultados, a generar conclusiones y a construir en algunos casos definiciones aproximadas de los objetos matemáticos, situación que apoyo en la comprensión y no en la memorización, puesto que están siendo actores activos en la construcción de su conocimiento, integrando así diversas habilidades como el justificar los procesos que están elaborando, y pueden dar cuenta de lo sucedido en cada paso.

El hecho de presentarles a los estudiantes diversos escenarios conocidos por ellos y en los cuales se encuentra presente el contenido matemático, los llevó a desarrollar más su creatividad para ir más allá de lo esperado, e integrar conocimientos de otras áreas y así incrementar más la diversidad de procedimientos; lo relevante fue que a partir de los conocimientos que ya poseían lograron integrarlo para argumentar sus procedimientos.

Lograron integrar elementos que les permiten ir caracterizando sus producciones y validando al mismo tiempo su proceder, lo que es parte integrante de la argumentación y justificación; al compartir sus resultados con sus compañeros defendieron sus producciones.

Estas conclusiones, si bien se basan en un caso particular, provienen de pruebas realizadas en situaciones reales de trabajo, sirvieron como apoyo a los estudiantes para establecer relaciones más formales; aunque no se plantearon como una meta primordial, sin embargo tampoco se trata de limitar las posibilidades de los alumnos en la búsqueda de argumentos.

En general las actividades propuestas lograron que los alumnos sintieran la satisfacción que acompaña al descubrimiento de hechos hasta entonces desconocidos y su relación con lo que ya sabían.

Por lo que contrastando los resultados obtenidos con nuestro marco teórico, encontramos que se logro establecer el contrato didáctico que establece Guy Brousseau, es decir los alumnos entendieron que eran la parte central en la construcción de su conocimiento y nosotros como profesores mediadores en este proceso; podemos decir que la mayoría de los estudiantes en el desarrollo de la situación didáctica resolvieron las situaciones de formulación, acción y algunos las de validación que Brousseau propone en la Teoría de Situaciones Didáctica.

Por otra parte durante el desarrollo de la situación didáctica pudimos observar que una parte que favoreció la creación del medio didáctico apropiado, fue el espacio donde se desarrolló, ya que los estudiantes contaban con el suficiente espacio para desplazarse, por lo que sugerimos que siempre que sea posible se busque un lugar adecuado en el que los alumnos cuenten con suficiente espacio y en este caso se trabajo en mesas y así se posibilitó mas el trabajo en equipo puesto que los estudiantes estaban frente a frente y en el mismo espacio para realizar sus actividades.

También el uso de otros materiales, como los rotafolios resultaron de utilidad al momento de plasmar las conclusiones de cada equipo, recomendamos arriesgarnos a dejar a nuestros estudiantes emplear su creatividad para mostrar sus procedimientos y sean primeros actores en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficos

Arcavi, A. (1999). Y en Matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas.* Vol. 38. 39-56.

Bressan, A. M. (Ed.). (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, Construir, Decir y Pensar*. México: Ed. Novedades Educativas.

Broitman, C. H. (2002). *El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad.* México: Ed. Novedades Educativas.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas.* Argentina: Ed. Libros del Zorzal

Eisenberg, T. & Dreyfus T. (1991). *On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunnungham.

LAS REPRESENTACIONES MENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CONTEXTUALIZADO

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
CICATA-IPN/UTVM; ESIME-IPN (México)
elitret@hotmail.com

Resumen. Se reportan los resultados de una investigación de corte cognitivo utilizando como marco teórico a la Matemática en el Contexto de las Ciencias incidiendo directamente en la fase cognitiva. El estudio consiste en analizar el proceso de construcción de las representaciones mentales de un grupo de enfoque en la solución de un problema matemático en el contexto de la química, mismo que es modelado por un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Las representaciones mentales de los estudiantes se infieren a través de lo que dicen y hacen logrando identificarse tres etapas en su construcción permitiendo la solución del problema. En el estudio se encuentra que las representaciones mentales se pueden manifestar con representaciones externas como lo es una gráfica o un sistema de ecuaciones lineales mismas que representan matemáticamente el problema contextualizado. Las etapas de solución del problema se consideran resultado de la vinculación entre matemáticas y química.

Palabras clave: cognición, representaciones externas, matemáticas, química

Abstract. The results of an investigation of cognitive cut using as theoretical frame the Mathematical in Context of Sciences affecting on cognitive phase directly are reported. The study consists of analyzing the process of construction of mental representations of a group of focus in the solution of a mathematical problem in context of Chemistry, same that is modeled by a system of linear algebraic equations. The students mental representations are inferred through which they say and they do managing to identify three stages in their construction being allowed the solution of the problem. In the study, mental representations can be declared with external representations like a graph or a system of same linear equations that mathematically represent the contextualized problem are found. The stages of solution of the problem consider result of the entailment between mathematics and chemistry.

Key words: cognition, external representations, mathematics, chemistry

Introducción

Las representaciones internas o mentales juegan un papel importante en la aprehensión del conocimiento matemático. Desde esta postura, los estudiantes son activos constructores de su conocimiento, por lo que cobra importancia el estudio de la estructura y del contenido de esas formas representacionales con las cuales internamente los estudiantes representan los conceptos matemáticos, convirtiéndose en un núcleo importante de investigación.

La necesidad de entender el papel que las representaciones juegan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es nuevo, existen múltiples trabajos de investigación tales como los de Carpenter y Hiebert (1992), Castro Enc. (1995), Cifarelli (1998), Duval (1998), Filloy y Rubio (1999), Goldin (1998), Hitt (2001), Janvier (1987), Kaput (1989), Stacey y Mac Gregor (2000) quienes han abordado el estudio de las representaciones desde diversas perspectivas. Sin embargo, el interés particular de la investigación es explicar el proceso de construcción de una representación mental utilizado por estudiantes de nivel Técnico Superior

Universitario al resolver problemas matemáticos contextualizados en su área de interés sea esta, profesional, laboral o de su formación.

En esta investigación al hablar de representaciones mentales se asume la postura de Cifarelli (1998), quien las ha utilizado para describir el proceso de resolución de problemas en matemáticas. Este autor sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática. Las representaciones mentales o internas no son observables directamente como las externas (lenguaje, gráficas, figuras, fórmulas, dibujos, entre otras), se infieren a través de lo que dicen y hacen los estudiantes, se analizan desde su forma de comportarse. Adicionalmente, en esta investigación se asume lo señalado por Goldin y Shteingold (2001) quienes consideran que el desarrollo eficaz de sistemas de representaciones internas en los alumnos debe tener correspondencia coherente con una buena comunicación con el sistema matemático establecido, es decir, lo que serían las representaciones externas.

En relación con lo anterior, la pretensión de la investigación consiste en realizar la descripción del proceso de construcción de las representaciones mentales para lo cual se analizan las acciones de los estudiantes al resolver un problema en el contexto de la química mismo que puede resolverse mediante un sistema de ecuaciones lineales. Concretamente se ha seleccionado como evento contextualizado la mezcla de soluciones químicas. Al ser el contexto un factor clave, la indagación utiliza como marco teórico a la Matemática en el Contexto de las Ciencias, incidiendo particularmente en la fase cognitiva de la teoría (Camarena, 2006).

Problema de investigación

En esta investigación se contempla que la construcción de conocimientos matemáticos se centra en la resolución de problemas contextualizados por lo que es preciso determinar cómo se da dicha construcción, es decir, cómo el alumno adquiere dicho conocimiento. Para responder esto se diseño una investigación de carácter cognitivo en donde se propuso a los estudiantes la resolución de un problema contextualizado mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En dicha actividad se describe el proceso de solución de dicho problema, entendiéndose como el proceso de construcción de representaciones mentales exteriorizada con una representación externa. La pregunta que guía la investigación queda definida como: ¿Cuál es el proceso cognitivo que le permite a un alumno resolver un problema matemático en un contexto en particular?

Metodología

El enfoque adoptado para la investigación es descriptivo y consistió en clasificar cada una de las etapas utilizadas por los alumnos hasta lograr la solución del problema matemático contextualizado.

Participantes: Se trabaja con un grupo de enfoque de dos estudiantes del primer cuatrimestre de la carrera de Técnico Superior en Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, México. La característica de los estudiantes es que han cursado la materia de matemáticas I en donde se aborda el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales algebraicas con dos y tres incógnitas y la materia de química donde se revisa como tema especifico la mezcla de soluciones químicas.

Instrumentos: El problema matemático contextualizados (evento contextualizado) sobre el que los estudiantes actuaron para poder describir y clasificar las representaciones mentales, estuvo enmarcado por situaciones de mezclado de sustancias químicas. En la elección del problema se atendieron las recomendaciones de Douady (1984) quien manifiesta que los problemas deben ser comprendidos por los estudiantes, permitieron utilizar sus conocimientos anteriores así como la evolución de los mismos (desafío intelectual).

Procedimiento: Dado el grado de complejidad que significa el indagar las representaciones mentales, se analizan las hojas y filmaciones de las sesiones de trabajo lo que permite establecer y describir las etapas para la solución del problema matemático contextualizado. Las etapas descritas son consideradas como parte del proceso de construcción de las representaciones mentales. Es necesario destacar que en el presente documento solo se presentan algunos elementos investigados sobre las representaciones mentales, mismas que dan luz sobre su importancia en la aprehensión del conocimiento matemático.

Resultados y discusión

El problema a presentar a los estudiantes se construye en torno al fenómeno de mezclado de soluciones porcentuales. Se pide a los estudiantes obtener una nueva solución química con una concentración definida a partir de realizar la mezcla de dos soluciones. El evento contextualizado queda expresado como:

Se cuenta con 100 mL de solución azucarada al 60% y 100 mL de solución azucarada al 35%. A partir de estas soluciones es preciso realizar una mezcla de las mismas para obtener 100 mL de una solución azucarada al 50%.

Para la selección del evento contextualizado se ha cuidado que la lectura del enunciado evoque una situación que, si no es ya conocida por los estudiantes, sea susceptible de ser construida mentalmente por analogía o adaptación de situaciones conocidas.

Sobre el proceso de construcción de las representaciones

Durante las sesiones de trabajo se observó que el proceso para dar solución al evento contextualizado podía describirse en tres etapas, a) Interpretación y selección de información; b) Estructuración de la información y c) Operacionalización.

El paso por las tres etapas se considera como el proceso cognitivo que permiten el desarrollo de las representaciones mentales en el grupo de enfoque y que posibilitan la resolución del problema contextualizado, manifestándose como una representación externa, expresada por una gráfica o una expresión algebraica que representa el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema contextualizado. Es decir el proceso de construcción de las representaciones mentales se traduce en una representación externa, consecuentemente cada una de las etapas de construcción de las representaciones internas se relaciona estrechamente con una representación externa, tal como lo sugieren Goldin y Shteingold (2001). Es importante señalar que durante la observación se identificó que estas etapas estas relacionadas y concatenadas, es decir, para que surja la siguiente etapa es necesario su tránsito por la etapa inmediata(s) anterior(es).

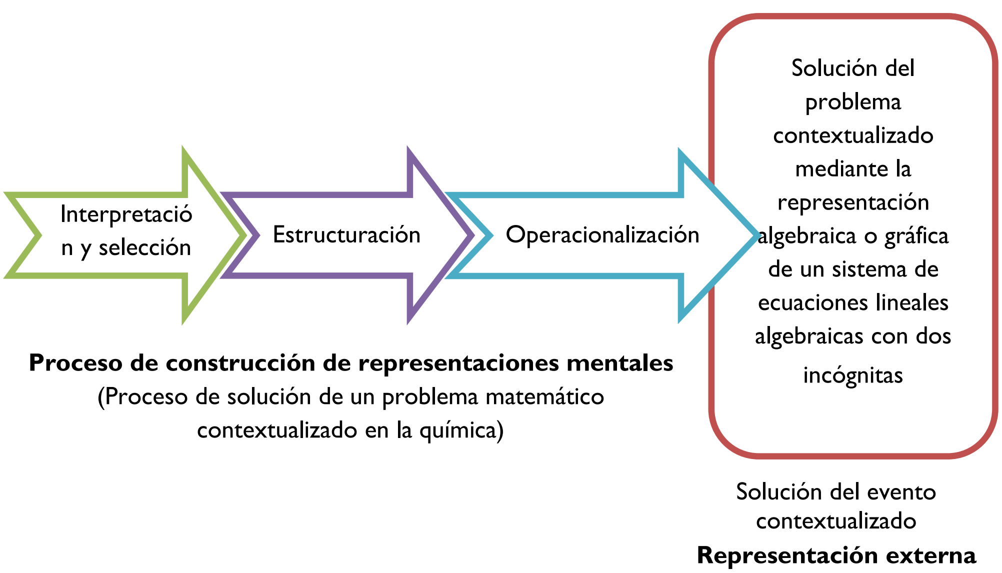


Figura 1. Proceso de construcción de representaciones mentales en la solución de un problema matemático contextualizado.

En la figura 1 se muestra el proceso de construcción de las representaciones mentales que permite dar solución al problema matemático contextualizado, posteriormente se describe cada una de las etapas para finalmente atender algunos aspectos particulares en la solución del problema planteado.

1. *Etapa de interpretación y selección de información,* esta etapa se denomina así dado que surge una vez que el grupo de enfoque realiza la lectura de la información del evento contextualizado y realiza la selección de la información que le parece pertinente, en ésta selección se observa que hace uso de conocimientos previos. Esta primera etapa del proceso de representaciones mentales permite al grupo de enfoque la identificación de las variables y constantes presentes en el evento contextualizado que le posibilitan posteriormente el plantear el modelo matemático del problema. Es posible que durante esta etapa los estudiantes hagan uso de esquemas, figuras como estrategias para entender la información proporcionada.

2. *Etapa de estructuración de la información,* durante esta etapa los estudiantes empiezan a manipular la información derivada del problema y entendida en la etapa anterior. Los estudiantes inician con el proceso de solución del problema. Sin embargo, es común que la estrategia que utilicen presente algunos inconvenientes y no se logre la solución adecuada ante lo cual es necesario la reestructuración de la información, es decir analizar porque la estrategia no es funcional y a partir de ello modificarla. Se observa que para estructurar una posible respuesta al evento contextualizado intervienen el contexto mismo, los conocimientos previos, la similitud con problemas resueltos previamente. Los procedimientos y las estrategias puestas en marcha sufren una reestructuración y avanzan progresivamente conforme van haciendo intentos de resolución, con lo cual se puede establecer que el nivel de conocimientos en los estudiantes también sufre logros significativos. Esta etapa de construcción de representaciones mentales se puede asociar con alguna representación externa como alguna operación aritmética, algebraica o gráfica aun sin ser la solución correcta al problema.

3. *Proceso de operacionalización,* identificada como la última etapa de construcción de las representaciones mentales. Cuando los estudiantes han llegado a esta etapa se considera que la representación mental esta completa y que el problema puede ser resuelto favorablemente, se relaciona con representaciones externas como un sistema de ecuaciones lineales y su representación gráfica. Los estudiantes pueden manipular favorablemente las representaciones externas y logran la resolución del evento contextualizado planteado. Se identifica que durante este proceso el grupo de enfoque aplica los conocimientos operativos que provienen de su experiencia y con ello

formula procedimientos o estrategias. En este proceso los conocimientos previos del grupo de enfoque juegan un papel importante pues permiten modelar el evento y trabajar con el modelo matemático. En consecuencia, esta etapa es considerada como el momento en que el grupo de enfoque se apropia del objeto matemático de interés pues al utilizar sus conocimientos previos y pasar por las dos etapas anteriores se puede modelizar el problema contextualizado y trabajar con el modelo mediante alguna representación externa. Se observa que el proceso de modelización simplifica la representación externa y la vuelve considerablemente más operacional, entonces los estudiantes resuelven el problema y verifican la coherencia de sus resultados, interviniendo nuevamente la experiencia ganada mediante los conocimientos previos.

Las tres etapas de resolución del problema contextualizado identificadas tienen la misma importancia dentro del proceso de construcción de las representaciones mentales. El paso de las dos primeras permite llegar a la etapa de operacionalización, donde se considera que el grupo de enfoque adquiere el conocimiento encontrando la solución del problema. Desde el punto de vista didáctico, la identificación de las etapas anteriores cobra importancia dado que se pueden generar estrategias didácticas que permitan ayudar a los estudiantes a comprender el problema para poderlo resolver. Una manera de lograrlo es presentar el objeto matemático en diferentes contextos, cuidando que estos sean siempre del interés del estudiante.

Atendiendo el problema contextualizado en la figura 2 se muestra el proceso de construcción de las representaciones mentales del grupo de enfoque mismas que se ponen de manifiesto mediante una representación externa. Durante la experiencia realizada se mostró el éxito del grupo de enfoque al resolver el problema contextualizado, éste se debió a varios factores pero el que se debe destacar es el contexto, es decir, al ser un problema seleccionado de su área de formación profesional permitió que el grupo de enfoque tuviera una imagen mental de una situación similar o al menos se garantizó que contaran con los conocimientos previos que le posibilitaron el involucramiento en su solución. Es importante señalar que durante la observación del grupo de enfoque se detectó que el proceso de solución previamente descrito es resultado del problema contextualizado, en otras palabras se deriva de la vinculación de dos áreas del conocimiento (matemáticas –sistema de ecuaciones lineales algebraicas- y químicas –mezcla de soluciones-), es decir, bajo otras vinculaciones pueden o no surgir.

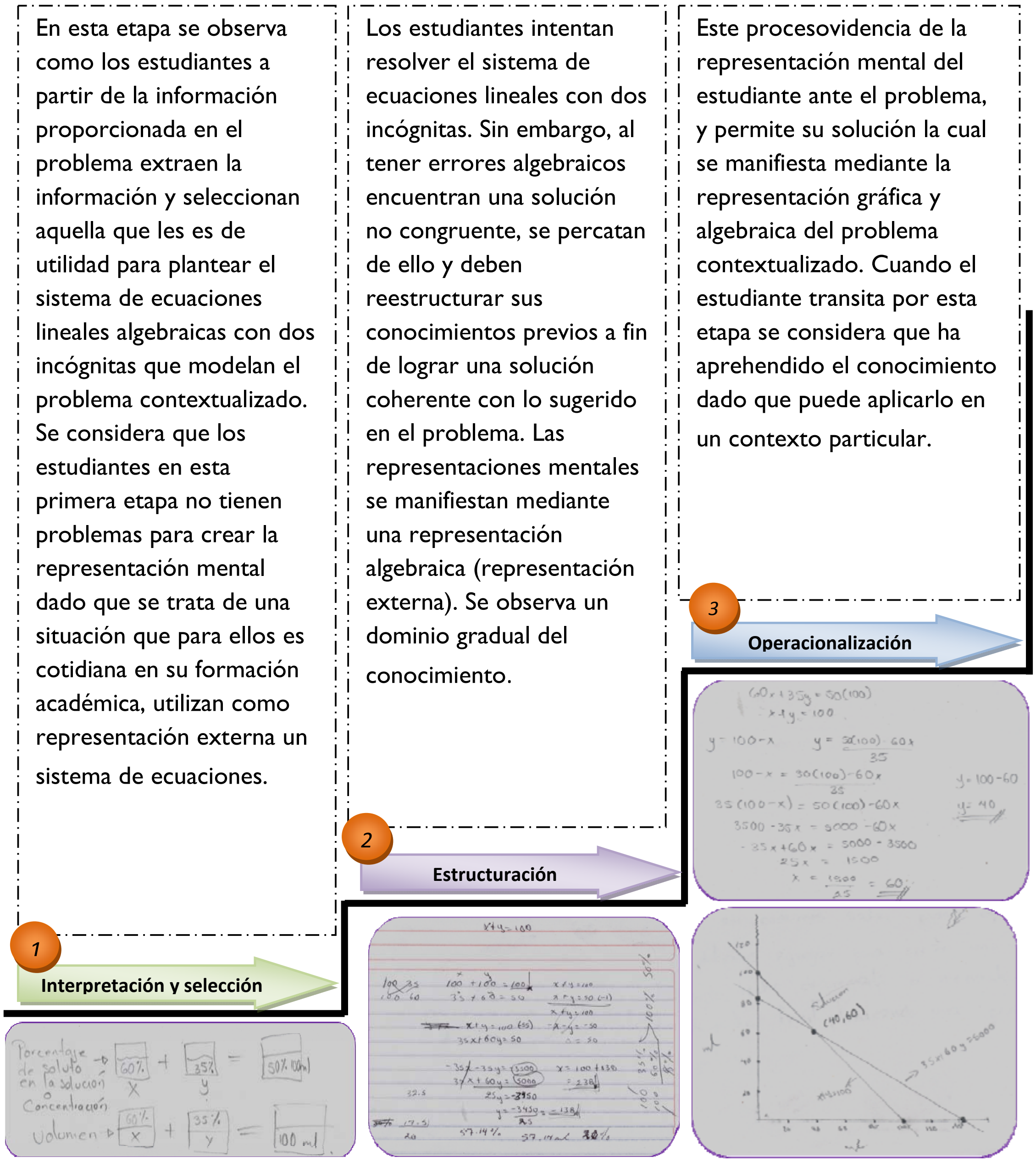


Figura 2. Proceso de construcción de representaciones mentales para la solución de un problema contextualizado.

Conclusiones

La investigación pone de manifiesto que para la construcción de las representaciones mentales es importante que los estudiantes entiendan el problema y muestren interés por su resolución, por lo cual cobra importancia presentar en los salones una matemática contextualizada donde se consideren los conocimientos previos. De igual manera se identificó que cada una de las etapas de construcción de las representaciones mentales (identificación y selección de la información, estructuración y operacionalización) son susceptibles de exteriorizarse mediante una representación externa, para el caso en particular se manifestaron a través de una gráfica o un expresión algebraica (sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas).

La aproximación a las representaciones mentales del grupo de enfoque se realizó mediante el proceso de solución del problema matemático en un contexto particular por lo cual es necesario explorar si en contextos diferentes el proceso y las etapas definidas se mantienen o por el contrario varían como resultado directo de la interacción con el contexto, es decir, con la vinculación de las dos áreas del conocimiento (matemáticas-química).

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica. 10(04).* 167-173.

Douady, R. (1984). Relación enseñanza-aprendizaje, dialéctica instrumento objeto, juego de marcos. *Revista de Didáctica, (03)* Francia: Univ. París 7.

Carpenter, T. y Hiebert, J. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 65- 97. New York: Macmillan Publishing Company.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12- 14 años).* Tesis doctoral. Universidad de Granada

Cifarelli, V.V. (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17 (1),* pp. 239–263.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemáticas Educativa II*., pp. 173- 202. México. CINVESTAV.

Filloy, E y Rubio, G. (1999). La resolución de problemas Aritméticos -Algebraicos. En E. Filloy y col., *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa*, pp.127- 152. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Goldin, G. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior , 17 (1),* pp. 137-163.

Goldin,.G. y Shteingold, M. (2001). Systems of Representat ions and the Development of Mathematical Concepts. En Cuoco y Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics,* pp.1–21. Reston, VA: NCTM.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, pp. 165–178. Universidad de Granada.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, pp. 27–32. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1989). Linking representation in the symbol system of algebra. En S. Wagner y C. Kieran. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp. 167- 194. Reston, VA.: NCTM. Lawrence Erlbaum.

Stacey, K. y Mac Gregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior 18 (*2), pp. 149-167.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES SORDOS

Siegfried van Lamoen, Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
siegfried.vanlamoen@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El estudio de los fenómenos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, suele ser realizado en contextos donde, las discapacidades sensoriales no son un factor influyente. Muy por el contrario, en la presente investigación, se considera esta premisa, frente a la tarea, por parte de los estudiantes sordos, de construir el concepto de función cuadrática. Para ello, desde el paradigma cognitivo, hemos decidido considerar la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica, planteando una descomposición genética hipotética del concepto, basados en las premisas contextuales de los estudiantes, el análisis teórico y en las herramientas teóricas de ambas teorías.

Palabras clave: APOE, registros de representación semiótica, sordera

Abstract. The study of phenomena related to teaching-learning process is often conducted in contexts where the sensory disabilities are not an influentional factor. On the contrary, this research is based on considering deafness as a crucial factor for students with hearing impairment, when faced with the task of constructing the concept of quadratic function. To this end, from the cognitive paradigm, we decided to consider the APOS theory and the theory of the semiotic representation registers, to present an hypothetical genetic decomposition of the concept, based on the students contextual assumptions, the theoretical analysis, and the theoretical tools of both theories

Key words: APOS, registers of semiotic representation, deafness

Introducción

En la enseñanza de la Matemática, es posible observar problemas de diversas índoles, en particular, en el área del álgebra se pueden observar problemas debidos a la complejidad de los conceptos involucrados, el lenguaje algebraico y por su alto nivel de abstracción. Estas problemáticas, en su mayoría son estudiadas en contextos donde las discapacidades sensoriales no afectan, y los alcances que ellas tienen, tampoco.

A partir de las experiencias laborales educacionales en el Centro de Estudios y Capacitación para Sordos de Valparaíso (CECASOV), hemos podido percibir la dificultad que tienen los estudiantes con discapacidad auditiva para acceder a la Matemática. Por una parte, las que nacen de la propia Matemática, la cual se plantea desde la formalidad de la institución escolar de manera abstracta y compleja en sus conceptos, y por otra, las dificultades que poseen los estudiantes con problemas auditivos frente a formulaciones lingüísticas de considerable complejidad. Esta dificultad, principalmente se ha encontrado en los estudios, de corte piagetiano, realizados en la etapa de pensamiento formal, donde la lengua como sistema simbólico de comunicación, adquiere mayor relevancia, y, "son atribuidas a la resolución de problemas matemáticos verbales, debido, no a una discapacidad para razonar matemáticamente sino, posiblemente, a la carga lingüística contenida en ese tipo de tareas". (Serrano, 1995, p.2)

En nuestra investigación, abordamos el aprendizaje del objeto matemático función cuadrática de estudiantes sordos, carentes de algunos conceptos matemáticos previos, tales como: función, parábola, entre otros. Esta situación, se da tanto en su saber personal, como en el social, reflejado en su lengua materna (lengua de señas). Estas condiciones nos sitúan en un contexto donde la percepción visual y el manejo de los registros de los diferentes conceptos, que componen el objeto matemático, juegan un rol fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje y de conceptualización.

Es así, como las aristas que presentan dificultades son variadas e importantes: lenguaje, abstracción, nociones, objetos matemáticos, representaciones, entre otras. Sin embargo, nos centraremos en las construcciones y mecanismos mentales, alrededor del objeto matemático y sus representaciones, tratando de acotar los diversos obstáculos presentes. Surgen entonces, las principales preguntas de esta investigación: ¿Qué conceptos se encuentran involucrados en la construcción del concepto función cuadrática? Y ¿Cuáles son los registros de Representación Semiótica que están presentes en el aprendizaje de estos conceptos?

Consideraremos, desde el paradigma cognitivo, dos teorías que pueden aportarnos a encontrar la respuesta, o por lo menos una luz de ella. Estas son la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica. La primera, nos dotará de un método de análisis para averiguar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes deberán hacer para llegar a construir el concepto función cuadrática y el ciclo de investigación que lineará este trabajo, compuestos por: una primera etapa de análisis teórico del concepto, posteriormente, el diseño y aplicación de los instrumentos, y finalmente, el análisis y verificación de datos. Dicho análisis teórico, nos permite describir el concepto función cuadrática, "esta descripción sistemática es presentada mediante una Descomposición Genética que representa un modelo cognitivo, donde señalamos un camino mediante el cual los estudiantes pueden construir dicho concepto" (Parraguez, 2009, p. 9), y en consecuencia los instrumentos son diseñados en función de dicha descripción.

La segunda, nos dará las herramientas teóricas y conceptuales para analizar y representar de manera óptima, a nivel de tratamientos y conversiones, las diferentes construcciones y mecanismos presentes en la descomposición genética; considerando que la comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural (Guzmán, I. 1998, p. 7), que, para nuestro caso, se expresará en el lengua de señas.

Para entender esta elección, es necesario conocer tanto el contexto cognitivo, como cultural, pues son ellos los que finalmente condicionan, en gran medida, el ambiente educativo de la institución donde se realiza esta investigación.

Contexto cognitivo y cultural

La sordera es considerada una limitación sensorial, originada por un daño en el analizador auditivo, el cual puede ser producido por diversos factores genéticos o ambientales. Estos daños, de diferentes magnitudes, a su vez provocan problemas en la formación y desarrollo del lenguaje (Castellanos, 2004). Este último, una herramienta para la transmisión de conocimientos, y más aún, para la comunicación.

Respecto a esta situación, la comprensión lectora, tal como se ha mencionado en los párrafos anteriores, en los estudiantes sordos no es muy desarrollada, sin embargo, son capaces de traducir a la lengua de señas oraciones, e incluso definiciones. Para el caso de enunciados o definiciones matemáticas, esta situación empeora, puesto que en ellas se encuentran formulaciones donde el pensamiento hipotético deductivo, juega un papel fundamental.

Las investigaciones realizadas a través del tiempo, por investigadores como Furth (1964) o Serrano (1995), por nombrar algunos, nos proponen que los sujetos sordos pasan por las mismas etapas de desarrollo cognitivo que sus pares oyentes, pero más tardíamente. Sin embargo, el poder acceder a las distintas etapas de desarrollo, de manera óptima, está estrechamente ligado a la debida estimulación cognitiva, por medio de un tratamiento adecuado de la información.

De modo general, los conceptos no se obtienen por medio de asociaciones, sino más bien, a través de una operación intelectual, donde las funciones mentales elementales interactúan y son conducidas por la utilización de palabras para fijar la atención y abstraer ciertos rasgos, sintetizándolos y simbolizándolos, "un concepto emerge solamente cuando los rasgos abstraídos son sintetizados nuevamente y la síntesis abstracta resultante se convierte en el instrumento principal del pensamiento" (Vygotsky, 1995, p. 62).

En particular, los diez estudiantes, de entre 17 y 20 años de edad, que participan en la investigación, cursan cuarto año de enseñanza media en el CECASOV, todos hipoacúsicos, la mitad de ellos posee restos auditivos, lo que les facilita de mayor manera, la comprensión lectora respecto a sus compañeros, junto con la anterior, estos mismos estudiantes, poseen un bilingüismo muy desarrollado, es decir, son capaces de leer y hacerse entender tanto en señas, como en lenguaje oral. En cuanto al roce social, son agentes activos en las diferentes actividades realizadas por la comunidad sorda, estimulados por las diversas tareas que en ellas puedan suscitarse.

Marco teórico

La teoría APOE, debe su nombre a sus principales componentes de trabajo, estos, vistos como diferentes tipos de construcciones mentales que pueda presentar un estudiante, de diferentes objetos matemáticos, a saber: acción, proceso, objeto y esquema. La primera de ellas, la construcción acción, es aquella en que el estudiante solo interactúa con el objeto matemático de manera guiada, clara y explícitamente, de esta manera el estudiante posee la construcción acción del concepto. Otro tipo de construcción, son los procesos. Estos, se ven reflejados si un estudiante es capaz de pensar en un objeto matemático, sin necesariamente actuar sobre él, solo manipulándolo en el interior de su mente. Esto es logrado por medio de la interiorización del concepto como acción en el proceso del mismo. En el caso de la construcción Objeto, esta es posible de ser adquirida de dos formas, que detallaremos a continuación: la primera manera de hacerlo es cuando el individuo es consciente del proceso en su totalidad y es capaz de realizar transformaciones en él, conoce tanto acciones como procesos involucrados en el concepto, así; el estudiante para poder conseguir esta construcción utiliza un mecanismo denominado “encapsulación” de un proceso. Otro mecanismo importante que se sucede en esta construcción, es la desencapsulación, llevada a cabo cuando la persona puede descomponer el objeto en los procesos y acciones subyacentes; una segunda forma de conseguir un objeto, es la que se obtiene cuando el sujeto puede actuar sobre un esquema, de similar forma que el sujeto es capaz de hacerlo con un proceso, debe concebir el esquema como un todo y poder realizar acciones sobre él, en este caso el sujeto tematiza el esquema en un objeto. Y finalmente, la construcción Esquema del concepto es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que interactúan de manera coherentemente en una estructura, ya sea de forma consciente o inconsciente. Esta construcción puede ser evocada desde la mente del individuo cada vez que alguna situación problema lo amerite. La coherencia antes mencionada, se manifiesta principalmente al discriminar qué situación está vinculada al esquema y cual no.

Por otra parte, estas construcciones necesitan de mecanismos para interactuar en la mente del estudiante, en la conformación y construcción de un determinado objeto matemático, entre los cuales podemos encontrar distintos tipos de mecanismos inspirados en la abstracción reflexiva planteada por Piaget (1984), algunos de estos son: la interiorización, la encapsulación, desencapsulación, tematización, por nombrar algunas. Tanto las construcciones, como mecanismos, quedan plasmados en una Descomposición Genética Hipotética del concepto, que para nuestro caso sería el de la Función Cuadrática, la cual quedará materializada en un mapa o diagrama.

De manera general, el estudio del aprendizaje de las matemáticas, o cualquier conocimiento, no puede sino estar estrechamente ligado a la utilización de símbolos para plasmar su "saber". Ferrari (2001), nos dice que, la formación del pensamiento matemático se encuentra estrechamente ligada a la formación de símbolos, que permitan representar estos objetos abstractos y sus posteriores relaciones. Esta idea, queda reflejada en la dialéctica establecida entre la noesis y la semiosis; a saber, la primera corresponde a los actos cognitivos como la aprehensión en términos conceptuales de una representación semiótica y la segunda a la producción o la aprehensión de una representación semiótica. Estos símbolos utilizados son estudiados bajo la noción de representación, las cuales son el pilar fundamental para que los sujetos puedan movilizar todos sus conocimientos.

Duval (1999) desarrolla los conceptos de representación semiótica y la de articulación de registros, con el fin de "regular" la participación de estos en los procesos de aprendizaje en la educación formal. El define a las representaciones semióticas como producciones establecidas por el uso de símbolos, y que a su vez estas son remitidas a un sistema particular de signos. Un punto fundamental planteado en esta teoría, son los fenómenos que afectan a los diferentes registros, a saber, la diversificación de los registros de representación semiótica, la diferenciación entre representante y representado, y finalmente, la coordinación entre los diferentes registros disponibles. Bajo el suceso de este último fenómeno, se establece una de las condiciones fundamentales para que una representación funcione como tal en el sujeto: se necesita de al menos dos sistemas semióticos para producir alguna representación del objeto. La otra condición es que, el sujeto realice un traspaso "espontáneo" de un sistema a otro.

Una de las principales contribuciones de esta teoría, y, que fundamenta nuestra investigación, hace referencia a la mejor aprensión de un objeto o concepto, cuando este se es manejado en a lo menos dos tipos de registros. Para nuestro contexto cognitivo-comunicativo, en cuanto a lo comunicativo, el espacio de trabajo es reducido a prácticamente dos tipos de registros, los cuales obedecen a la percepción visual del objeto, pues los estudiantes no poseen comprensión lectora y su vocabulario es reducido, por ende las definiciones escritas quedan descartadas. Es por ello que esta teoría y sus consideraciones nos proveen de las herramientas teóricas necesarias, para el fin de esta investigación.

El estudio y la propuesta

El análisis teórico, realizado al concepto función cuadrática, nos permitió determinar, por medio de un análisis epistemológico-histórico al concepto función, que el objeto matemático función cuadrática, es un concepto "compuesto", esto es, que se compone por un lado del concepto de función, y por otro, de lo cuadrático. Esto último, es o sería una "regla" que, cumple con las condiciones de ser función: "Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real" (Spivak, 1992, p. 49).

Es por ello, que hemos decidido considerar lo "cuadrático" como una característica especial, así como podría ser logarítmica, trigonométrica, lineal, entre otros. "Cada tipo de función tiene un origen en un contexto específico lo que implica que cada una posea su propia naturaleza, que la distingue de las demás, y problemáticas propias relativas a su apropiación" (García-Zatti, M. y Montiel, G. 2007, p.16).

Respecto al concepto de función, los diversos análisis epistemológicos realizados, nos hablan que los inicios de este concepto en la historia, se fundamentan bajo un trabajo o ideas de relaciones entre sucesos y magnitudes, que hoy en día podríamos llamarlas un tanto "básicas", sin embargo, "tal y como se define actualmente en Matemáticas es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años" (Ruiz, 1998; citado en, Farfán, R. y García, M. 2005, p. 489).

Por otra parte, la naturaleza de la regla que rige esta función, la podemos caracterizar, tanto desde su representación gráfica, por medio de la parábola de eje horizontal, como desde su representación algebraica, en su forma $ax^2 + bx + c$. Los distintos tratamientos en ambos tipos de representaciones: traslaciones, simetrías, dilataciones, entre otros, en cuanto al registro grafico; y factorizaciones, completación de cuadrados, por nombrar algunos, en el registro algebraico, son tales que, es posible establecer una correlación entre ellos, facilitando la conversión de registros. Este hecho, aporta a los procesos de generalización.

Según todo lo anteriormente expuesto, hemos formulado una descomposición genética hipotética (Figura 1), basados en: las premisas contextuales de los estudiantes, el análisis teórico y en las herramientas teóricas de ambas teorías.

Según los análisis teóricos realizados, esta descomposición genética propone que, para construir el concepto función cuadrática, reconociéndolo como un objeto, el estudiante debe comenzar activando las construcciones mentales realizadas en torno a la construcción objeto de relaciones entre conjuntos no vacíos, para desencapsular de ellas, por medio del conjunto grafica de una relación, los procesos involucrados, esto es, la identificación de la correspondencia entre elementos, en el producto cartesiano de la gráfica del conjunto y la generalización de esta correspondencia, por medio del uso de la asignación de variables; a continuación, el estudiante deberá coordinar estos procesos, junto con el proceso de

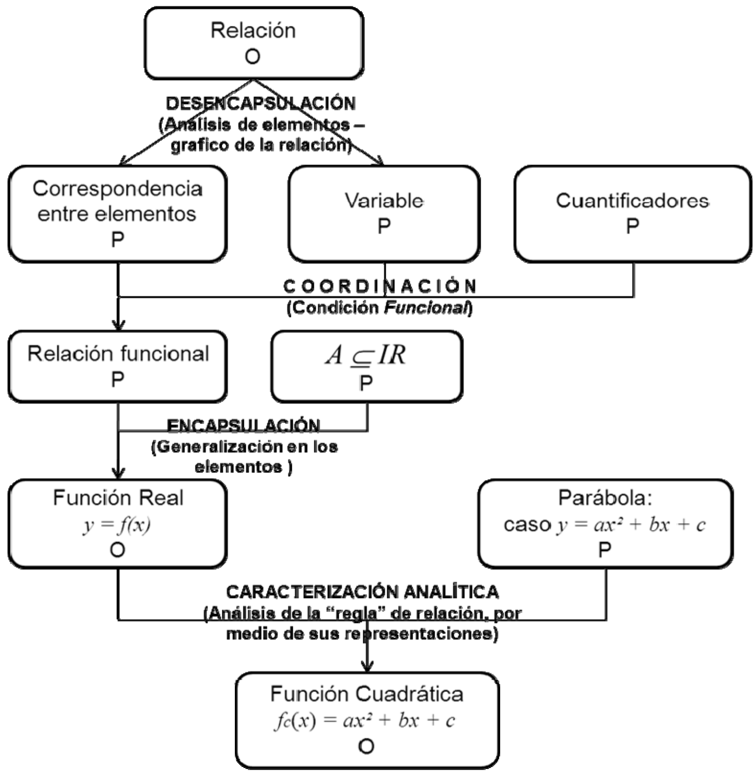


Figura 1: Descomposición genética hipotética del concepto función cuadrática

cuantificadores, tipificando esta relación bajo las condiciones de función, estableciendo un nuevo proceso de relación funcional, a saber, relación que cumple la condiciones de función, donde el estudiante es capaz de determinar en sus representaciones gráficas, sagitales y de lengua natural, si una determinada relación entre conjuntos, con elementos discretos, es función o no. Este proceso de relación funcional, donde el reconocimiento se realiza gracias a lo "contable" o "manipulable" de los elementos, lo encapsularemos generalizando el tipo de elemento, junto con la construcción proceso de números reales, donde los estudiantes son capaces de reconocer la característica continua, logrando la construcción objeto de función real, esto es, que el estudiante reconoce relaciones entre variables, que generalizan subconjuntos de los números reales y que cumplan con las condiciones de función.

Hasta este punto, y en conformidad a la hipótesis de que, la función cuadrática es un concepto compuesto, hemos mostrado, primeramente, la construcción del concepto función real, el cual, según los análisis, dependiendo de la regla a la cual responda, se presenta en objetos matemáticos más específicos: función lineal, función cuadrática, función trigonométrica, entre otras; estos objetos se diferencian y caracterizan en aspectos generales, gracias a sus representaciones. Según lo anterior, caracterizaremos analíticamente el objeto función real con el proceso de la parábola, en el análisis de la regla, ya sea desde su registro gráfico, como en su registro algebraico, obteniendo la construcción objeto de función cuadrática, con la cual, los estudiantes son capaces de utilizarlo en situaciones que se relacionen con este objeto, por ejemplo, la productividad de bombas de agua trabajando en conjunto, el área máxima con determinadas medidas, entre otros; y pudiendo manipular procesos algebraicos de factorización, reflejado en su registro gráfico, y viceversa.

Conclusiones

Si bien es cierto, esta es sólo una arista por la cual se puede abordar los problemas referentes a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en estudiantes sordos, lo cierto es que, la problemática de la comunicación, trasciende a este tipo de enfoque. En la experiencia profesional, hemos podido percatarnos que, pese a que se logre un mejor manejo de la lengua de señas, tanto en estudiantes como en profesores, las maneras de explicar, comprender, generalizar, deducir, por nombrar algunas, son disimiles entre sí.

El alejarnos de las definiciones formales de los objetos matemáticos, presentes en la matemática escolar, y acercarnos a las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes debiesen poseer, y los registros de representación de estos mismos, nos permite generar en ellos, conceptos matemáticos, y las posibles utilidades de ellos, por sobre una instrucción mecánica.

En la actualidad, estos estudiantes se encuentran cursando primer año de enseñanza superior, tanto en diferentes carreras, como instituciones de la región de Valparaíso, que tomaron la responsabilidad de enfrentar la problemática de la comunicación. El sistema de evaluación diferenciada a estos estudiantes, ha permitido una óptima incorporación al sistema, sin embargo, esta no ha estado carente de dificultades, en las clases propiamente tal, que provocan la vuelta de los estudiantes al CECASOV, en busca de apoyo.

Referencias bibliográficas

Castellano, R. Delgado, R. Gómez, I. (2004), *Sordera: aspectos psicológicos*. Cuba: Pueblo y Educación

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle

Farfán, R. y García, M. (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 489-494. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

García-Zatti, M. y Montiel, G., (2008). Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 3(2), 12-26.

Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1)*, 5-21.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto Espacio Vectorial*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias*, Editorial Siglo XXI, México. Libro disponible en http://books.google.cl/books?id=OP_46cTPf8MC&printsec=frontcover&dq=Psicog%C3%A9nesis+e+historia+de+las+ciencias&source=bl&ots=mfgregxDi&sig=cxcSzj2rwtORpHsMlbWcUm21UMs&hl=es&ei=ANijTNqRBIG78gbpltSRCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4&ved=0CCgQ6AEwAw#v=onepage&q=Psicog%C3%A9nesis%20e%20historia%20de%20las%20ciencias&f=false

Serrano, C. (1995). *Procesos de resolución de problemas aritméticos en el alumnado sordo: aspectos diferenciales respecto al oyente*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. España: Reverté

Vygotsky, L. (1995): *Pensamiento y Lenguaje*. Argentina: Ediciones Fausto.

INTRODUCCIÓN DE OBJETOS DE APRENDIZAJE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA DISCRETA EN LA UCI

Danilo Amaya Chávez
Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba)
dach@uci.cu

Resumen. Por su elevada aplicabilidad e importancia en la formación matemática que requiere un profesional de perfil Informático, la Matemática Discreta no puede estar ausente del plan de formación de los futuros profesionales que cursan estudios en la Universidad de las Ciencias Informáticas. Se propone una alternativa para el diseño e introducción de objetos de aprendizaje como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Matemáticas Discretas; basada en la utilización de multimedias interactivas soportadas en programas de fácil acceso y empleo, que a su vez, propician al estudiante una mayor apropiación y asimilación del contenido. De igual forma, estas le brindan los recursos necesarios para la autogestión del contenido que demanda el modelo de formación centrado en el aprendizaje puesto en práctica en dicha institución docente. El trabajo toma como referencia la experiencia de aprendizaje devenida del empleo de una multimedia desarrollada por el autor, la cual se expone al efecto.

Palabras clave: objetos de aprendizaje, enseñanza aprendizaje, matemática discreta, autogestión del contenido

Abstract. Because of its high applicability and relevance in mathematics education that is required for a professional computer profile, Discrete Mathematics cannot be absent from the training plan for future professionals who are studying at the University of Informatics Sciences. We are here proposing an alternative to the design and deployment of learning objects to support the teaching-learning process on the discipline of Discrete Mathematics, based on the use of interactive multimedia programs supported on easy access and use software, which in turn, will led students to greater ownership and assimilation of the content. Similarly, these will provide the necessary resources for self-demand content that the training model focused on learning implemented in such educational institution. The work is based on the learning experience of using a turned-multimedia developed by the author, which was submitted to that effect.

Key words: learning objects, teaching and learning, discrete mathematics, self-management of the content

Introducción

La Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), concebida con el propósito de llevar a cabo la Informatización del país y de impulsar el desarrollo de la industria cubana del software, ha marcado pautas incuestionables en lo que respecta a la aplicación de un modelo de formación que en esencia vincula la formación-producción e investigación.

El autor concuerda con el criterio de Castañeda (2006) al pronunciarse respecto a la decadencia del modelo de enseñanza tradicional, que aún se manifiesta mundialmente, y que se considera incapaz de satisfacer las exigencias actuales en el plano material y espiritual de la sociedad, por lo que se deberá ir transformando paulatinamente a través de las TIC por otros modelos en concordancia con los cambios que ocurran en la sociedad.

La aplicación de las TIC en la Educación Superior, ha propiciado un conjunto de transformaciones que incluyen, fundamentalmente, la adopción y desarrollo de nuevos modelos pedagógicos para la formación pre y posgraduada, inmersa en estos cambios se encuentra la UCI.

Las Universidades deberán apuntar hacia un aprendizaje colaborativo y desarrollador, donde los estudiantes tomen la responsabilidad de su propio aprendizaje, característica fundamental del modelo que se introduce a partir del presente curso académico en la UCI; sin embargo, para lograr tal efecto, se deberán crear ambientes idóneos, sustentados en metodologías específicas para cada disciplina, que propicien este aprendizaje. Para ello se considera el uso de las TIC, dadas sus potencialidades en el proceso de autogestión del conocimiento que requiere la enseñanza aprendizaje en dichas condiciones.

La producción y empleo de Objetos de Aprendizaje (OA) por parte de una comunidad educativa permite mejorar su oferta, tanto en la modalidad presencial, como en la de a distancia, ya que los OA son el medio que permite adquirir ciertas competencias, y esto a su vez permitirá ofrecer currículos más flexibles, donde se responda a necesidades específicas de aprendizaje, siendo el alumno el responsable del mismo. Tanto docentes como alumnos adquirirán ciertas habilidades y competencias con el desarrollo y uso de los OA.

La introducción de Objetos de Aprendizaje como las herramientas multimedia, ofrece como ventajas la interactividad que se logra, la formación de competencias y habilidades específicas en la rama que se empleen, además de que presentan un potencial importante para la formación, ya que favorece el uso de la información en un contexto apropiado y de forma personalizada y propicia la creación de un entorno virtual en el que los alumnos pueden valorar instantáneamente el impacto de sus acciones.

En la disciplina Matemática dichos OA pueden resultar de gran ayuda en el desarrollo de habilidades específicas y en la apropiación teórica y conceptual de elementos que definen determinados procesos. Por la elevada visualización que logra de fenómenos matemáticos de difícil comprensión desde el punto de vista teórico, resultan de gran utilidad para el aprendizaje en estudiantes con estilo de aprendizaje visual y otros.

Por tal motivo se deben diseñar OA, según las metodologías indicadas para su elaboración, que garanticen la disponibilidad necesaria de fuentes de información al alcance de los estudiantes, debido a que en dicho modelo gran parte de los contenidos de aprendizaje debe gestionarlos por sí mismos y para ello es necesario proveerlos de una amplia variedad de recursos de información, medios electrónicos, bibliografía en diversos formatos, etc., fomentándose de esta forma el desarrollo de la capacidad para aprender por cuenta propia.

En efecto resulta vital que la formación matemática sea lo más integral posible y propicie que el alumno "aprenda a aprender", mantenga una actitud abierta y adquiera una cierta confianza en su propio pensamiento.

Por lo antes expuesto se considera una necesidad incuestionable para la UCI el diseño, la elaboración e implementación de objetos de este tipo en las diferentes Disciplinas y asignaturas, al asumir la formación teniendo como eje central el aprendizaje de los alumnos bajo esta perspectiva.

Acerca de los objetos de aprendizaje (OA)

Formalmente no hay una única definición del concepto de objeto de aprendizaje y las existentes son muy amplias. Puede considerárseles como cualquier recurso digital que puede ser utilizado y reutilizado para apoyar el aprendizaje Wiley (2000), el Comité de Estandarización de Tecnología Educativa, plantea que los objetos de aprendizaje son "una entidad, digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada y referenciada durante el aprendizaje apoyado con tecnología" (IEEE, 2001, p.4). Finalmente el destacado profesor e investigador Lorenzo García Aretio los define como "archivos o unidades digitales de información, con cierto nivel de interactividad e independencia, dispuestos con la intención de ser utilizados en diferentes propuestas y contextos pedagógicos" (García, 2005, p.1).

Todas estas definiciones son muy amplias y en la práctica pueden resultar inoperables ya que no hay un elemento claro que distinga a los OA de otros recursos. Por otra parte, dada la amplitud y variedad de las definiciones, así como la diversidad de recursos que pueden considerarse como OA, es difícil llegar a un término estricto, pero para fines de este trabajo, se sostendrá que un Objeto de Aprendizaje *"es un conjunto de recursos digitales, autocontenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. El objeto de aprendizaje debe tener una estructura de información externa (metadatos) que facilite su almacenamiento, identificación y recuperación"* (Fig.1)

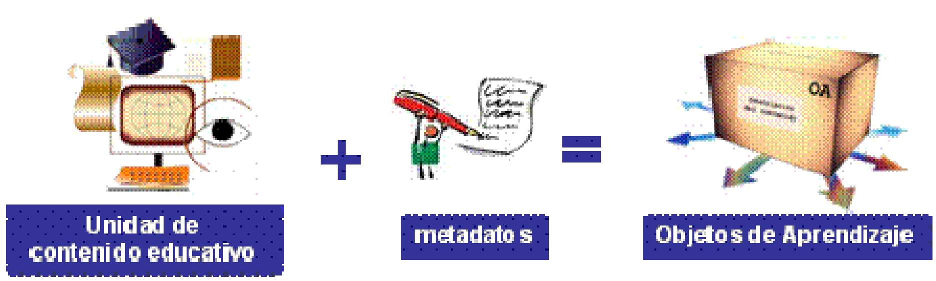


Figura 1

Las ideas en torno a unidades autónomas e independientes y de vincular los recursos con los metadatos, dan una definición más actual y apegada al uso práctico de los OA, ya que estas características son componentes intrínsecos para que el objeto en cuestión pueda identificarse y logre determinados atributos funcionales como son el hecho de que sean: reutilizables, accesibles, interoperables, portables y durables.

Se dan como ejemplos de objetos de aprendizaje los *contenidos multimedia*, el contenido instruccional, los objetivos de aprendizaje, software instruccional, personas, organizaciones o eventos referenciados durante el aprendizaje basado en tecnología (IEEE, 2001). Otros autores incluyen entre estos: imágenes, simulaciones, diagramas, cuestionarios, presentaciones electrónicas, tablas, experimentos, juegos o animaciones, secuencias de video o de audio, aplicaciones informáticas, direcciones URL, entre otras (García, 2005). Cabe resaltar que se mencionan extractos o sólo parte de los recursos y es posible no considerar el recurso completo, como asimismo se hace hincapié en que un OA también puede ser el conjunto de dos o más recursos.

El acento en los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la computación, en la informática, así como en la modelación de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la Matemática Discreta (MD) cuya particularidad principal es la ausencia del paso al límite y la continuidad, lo que es característico de la matemática clásica.

Debido a la importancia que se le confiere a la materia en cuestión, a partir del presente curso académico 2009/2010, se decidió efectuar una reestructuración del Programa de la asignatura MD en la UCI, incrementándose el número de horas clases, e incluso se determinó impartirla en los dos primeros semestres del primer año de la carrera, surgiendo así la MDI y la MDII.

Nuevos temas fueron introducidos a partir de investigaciones que reflejaron las necesidades de aprendizaje de los estudiantes (Amaya, 2008); sin embargo, el reto de llevar a cabo el proceso docente educativo en un modelo de formación centrado en el aprendizaje implicó nuevos desafíos y cambios en los roles a desempeñar por todos los factores implicados en el mismo como se mencionó anteriormente.

De lo hasta aquí mencionado, se deduce la necesidad e importancia de llevar a cabo la producción e implementación de OA, con el fin de apoyar el trabajo en las asignaturas antes mencionadas y de proporcionarle a los estudiantes los medios necesarios para la autogestión del contenido de aprendizaje.

Metodología empleada

La propuesta se basa en el diseño, elaboración e introducción de OA en la disciplina MD; a partir de las transformaciones realizadas al programa y de las necesidades surgidas a los implicados en el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) en el modelo de formación implementado.

La investigación toma como referente el trabajo que se venía desarrollando a través del Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) durante los 6 cursos académicos anteriores y las dificultades detectadas en los estudiantes para llevar a cabo el proceso de autogestión del aprendizaje por mediación de los recursos que dicho entorno ofrece.

Las valoraciones emitidas tienen como referencia la experiencia en el empleo de los recursos propuestos en la Facultad No. 5 de la UCI. Se tomó como muestra un grupo de 175 estudiantes de primer año de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, cuya edad oscila entre los 18 y 19 años; como objeto, el trabajo en la disciplina Matemáticas Discretas. Seguidamente se exponen determinados activadores que se tuvieron en consideración:

1. Actitud ante los materiales:

- Lograr que los materiales que se le presentan al estudiante tengan sentido para él y un objetivo fácilmente identificable;
- Motivar a los estudiantes a que empleen su potencial creativo y habilidades lógicas matemáticas en la solución de los ejercicios;
- Estimular el análisis y replanteamiento de los ejercicios desde otra perspectiva.

2. Modo de utilización de la información:

- Estimular la participación de los alumnos a descubrir nuevas relaciones entre los contenidos de enseñanza y las situaciones planteadas, conllevando a la elaboración de mapas conceptuales afines con los contenidos tratados;
- Evaluar la participación en la solución de los ejercicios, valorando los errores cometidos y las alternativas posibles de solución, el aporte y valoración a las ideas de otros, así como presentar una actitud abierta en relación con dichas ideas y propiciar la búsqueda y detección de los factores clave de un problema.

3. Empleo de materiales:

- Introducir materiales novedosos, con el fin de estimular el interés de los estudiantes en la participación activa y creadora en las actividades de aprendizaje que se den por mediación de los objetos de aprendizaje elaborados.

4. Ambiente de trabajo:

- Generar un ambiente de trabajo flexible, colaborativo y solidario a partir de los diferentes roles que deben asumir los implicados en el proceso, tanto estudiantes como profesores. Tener en cuenta que los materiales son accesibles incluso si no se cuenta con servicio de red local, precisamente por la propiedad de portabilidad que presentan, lo que aporta mayor ventaja y flexibilidad al proceso de enseñanza mediado por dichos objetos de aprendizaje.

Una vez desarrollada la experiencia de aprendizaje, se procedió a la recogida de criterios, valoraciones y sugerencias de los actores del proceso; información que se tuvo en cuenta para perfeccionar los materiales propuestos y hacer que así cumplan con los objetivos para los cuales fueron diseñados, con vistas a su empleo el próximo curso académico.

A continuación se presenta un OA elaborado con el propósito de apoyar el PEA de las asignaturas MDI y MDII en la UCI, enfocado fundamentalmente al reforzamiento de los conocimientos teóricos en algunos de los temas que se tratan en las mismas.

Se propone una multimedia desarrollada con el programa Mediator 8.0, en cuya interfaz principal se muestran las opciones del usuario al acceder a la misma. (Fig.2)

Figura 2

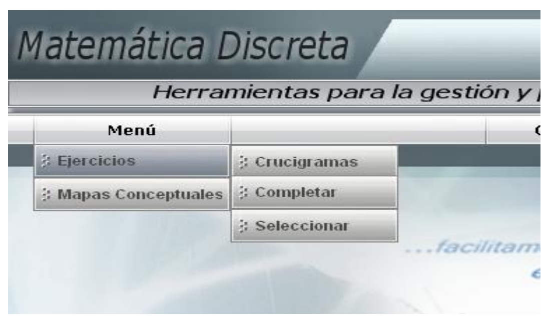


Figura 3

A través de la pestaña Menú se puede acceder a los ejercicios o mapas conceptuales que se desee resolver o visualizar respectivamente. Estos varían de acuerdo al contenido específico que traten. (Fig.3)

Una vez seleccionada la actividad a desarrollar, la misma se visualiza en el panel que aparece en el lado derecho (Fig. 4).

Los ejercicios fueron realizados con el programa Hot Potatoes 6.0 y permiten interactuar con ellos ofreciendo al estudiante la posibilidad de autoevaluarse y regular su ritmo de aprendizaje.

Se dispone de mapas conceptuales que resumen los aspectos teóricos fundamentales sobre algunos temas, estructurados de una forma lógica, lo que propicia la aprehensión de los mismos de una manera más cómoda, sin ignorar los diferentes estilos de aprendizaje que pueden coexistir dentro del mismo grupo docente.

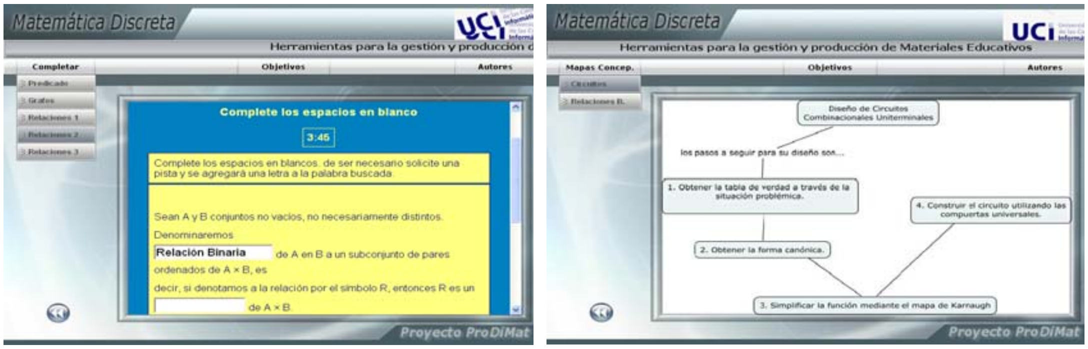


Figura 4

Los Mapas Conceptuales se desarrollaron con el programa CMaps, una herramienta factible para este propósito que ofrece numerosas facilidades al usuario.

Resultados preliminares

Luego de que los estudiantes que conformaron la muestra interactuaron con la multimedia descrita, se pudo constatar en un estudio realizado con el propósito de verificar la efectividad de la misma, que un 72% (124) de ellos incrementaron sus niveles de aprendizaje y asimilación del contenido; detectándose esto a través de la aplicación de instrumentos evaluativos con objetivos específicos. Los restantes estudiantes no manifestaron ningún cambio en cuanto a los niveles citados.

El incremento se hizo palpable desde el punto de vista cualitativo ya que 83 estudiantes (47.4%) fueron evaluados de B y 41(23.4%) de R, quedando los restantes 51 evaluados de M.

Las cifras, si se tiene en cuenta que los porcentajes previos a la aplicación de la propuesta oscilaban entre el 21%, 28% y 51% evaluados de B, R y M respectivamente, con un mismo nivel de dificultad en los instrumentos evaluativos aplicados, indican que los objetivos generales para los cuales se diseñó la herramienta fueron mayormente vencidos.

No se vencieron los objetivos de manera óptima, pero sí lo necesario para reafirmar la teoría en cuanto a las potencialidades y ventajas que aporta el empleo de objetos de aprendizaje, como los recursos multimedia, al desarrollo del PEA en determinadas disciplinas, dentro de estas la disciplina Matemática que tantas dificultades arroja en sondeos realizados a escala mundial.

Conclusiones

A través de la presente herramienta se puede reforzar el trabajo independiente de los estudiantes, a la vez que se potencia la motivación por su auto aprendizaje. Se refuerzan los contenidos referentes a los temas que se imparten en la disciplina MD, muchos de los cuales presentan elementos teóricos indispensables para su posterior comprensión. Tal es el caso de la teoría de grafos con más de 20 conceptos y definiciones incluidas y que se recorren de forma amena en varios de los crucigramas y otros tipos de ejercicios propuestos.

Esta propuesta sólo representa el comienzo de una etapa en la que muchas otras herramientas deberán surgir para el trabajo en el nuevo modelo de enseñanza centrado en el aprendizaje, ya sean objetos de aprendizaje, recursos didácticos, materiales complementarios o recursos para el entorno virtual de aprendizaje (EVA). Todas tendrán en su totalidad, como factor común, el propósito de coadyuvar al logro de los objetivos de la enseñanza en las diferentes Disciplinas y materias, en concordancia con lo establecido en el modelo de formación declarado.

Referencias bibliográficas

Amaya, D. (2008). *Propuesta metodológica para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática Discreta en la UCI*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Referencia para la Educación de Avanzada. Ciudad de la Habana, Cuba.

Castañeda, E. (2006). *Conferencia No 1: Las nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones como proceso cultural y las bases de su impacto en la actividad educativa. Un acercamiento desde lo tecnológico*. Recuperado el 12 de septiembre de 2006 de http://teleformacion.cujae.edu.cu/cvr/.

García A, L. (2005) *Objetos de aprendizaje.* Murcia: España.

IEEE Learning Technology Standards Committee. Draft Standard for Learning Object Metadata. IEEE 1484.12.1-2002 (2002). Recuperado el 30 de junio de 2010 de URL:http://ltsc.ieee.org/wg12/files/LOM_1484_12_1_v1_Fin

IEEE Learning Technology Standards Committee – Specifications. (2001) Recuperado el 15 de octubre de 2008 de http://ltsc.ieee.org

Lockyer, L., Bennett, S. y Harper, B. (2005) Effective Use of Learning Objects in Class Environments. *Handbook of research on learning design and learning objects: issues, applications and technologies* (*1*), 493-514.

Wiley, D. A. (2000). *Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), The Instructional Use of Learning Objects*. Recuperado el 20 de mayo de 2008 de http://reusability.org/read/chapters/wiley

LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA COMPETENCIA "GESTIONAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO" EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA A TRAVÉS DE UN SISTEMA DE TAREAS DOCENTES

Reinaldo Sampedro Ruiz, María Lourdes Rodríguez González, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca
Universidad de Camagüey (Cuba)
reinaldo.sampedro@redu.edu.cu, maria.rodriguez@reduc.edu.cu, olga.perez@redu.edu.cu, nancy.montes@redu.edu.cu

Resumen. La formación de profesionales competentes y comprometidos con el desarrollo social constituye hoy día una misión esencial de la Educación Superior (UNESCO, 1998). La sociedad cubana demanda cada día con más fuerza la formación de profesionales capaces de lograr un desempeño profesional ético y responsable. A través de la utilización de diversos métodos y técnicas de la investigación pedagógica se fundamenta la contradicción que se da entre las nuevas necesidades sociales que exigen la formación de profesionales con competencias relacionadas con la gestión del conocimiento desde el proceso docente educativo de la matemática superior. En el trabajo se muestran las características de un sistema de tareas para favorecer la formación y desarrollo de esta competencia, para los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Informática de la Universidad de Camagüey. La ejemplificación se realiza desde la asignatura Matemática I para ingenieros, en el tema Derivadas de Funciones de una variable.

Palabras clave: sistema de tareas, gestionar el conocimiento, conocimiento matemático

Abstract. The formation of competent and committed professionals in the social development world constitutes an essential mission of the Contemporary Superior Education nowadays, (UNESCO, 1998). Every day the society strongly demands the formation of professionals able to achieve an ethical and responsible professional acting. Through the use of various methods and techniques of pedagogic research, a contradiction appears as new social necessities demand the formation of professionals with competitions related with the administration of the knowledge from the superior mathematics' educational process. In this paper, the characteristics of a system of tasks are shown to favor the formation and development of this competition, with the students of the career of Engineering in Computer Science of the University of Camagüey. The exemplification is carried out from the Mathematical I subject for engineers, in the Derived topic of Functions of a variable.

Key words: system of tasks, to negotiate knowledge, mathematical knowledge

Introducción

Hoy más que nunca la universidad debe demostrar su pertinencia social como espacio promotor de los valores universales, de desarrollo y difusión de la cultura y como generadora y diseminadora de nuevos conocimientos que garanticen el desarrollo humano y sostenible. El egresado de cualquier carrera universitaria debe ser capaz de solucionar los problemas que se encuentran en su práctica cotidiana, de organizar e interpretar la información necesaria y utilizar los métodos de la ciencia para resolver dichos problemas. La formación de un profesional competente es una necesidad del mundo contemporáneo para que pueda responder a las exigencias sociales y estar a la altura del desarrollo científico-técnico de su época. No obstante, tales propósitos quedan incompletos si esa cultura, desde el propio proceso docente-educativo de las diversas asignaturas del plan de estudio, no se concibe como un elemento consustancial del proceso de formación de los estudiantes.

En lo específico: la disciplina Matemática General en la Carrera de Ingeniería Informática tiene como objetivo esencial lograr que el ingeniero informático domine el aparato matemático que le permita modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, utilizando tanto métodos analíticos como aproximados y haciendo uso eficiente de las técnicas de cómputo. Sin embargo, existen dificultades que limitan en los estudiantes estos propósitos, entre las que se destacan: la poca capacidad para identificar, localizar y procesar la información matemática esencial dentro de la fuente del contenido matemático, comprenderla y utilizar sistemas de organización y representación de dicha información para realizar diversas tareas.

La puesta en práctica de vías más efectivas con el fin de formar profesionales capaces de interpretar y transformar la realidad que les toque vivir y brindar soluciones creadoras a los problemas que se les presentan es uno de los grandes retos de las universidades en el presente siglo:

> En las Universidades […] la investigación permite mejorar la formación de los profesionales, conservar, desarrollar, promover y difundir la cultura, obtener nuevos conocimientos científicos y resolver problemas del desarrollo socio–económico, sin embargo, tales propósitos quedan incompletos, si esa cultura, desde el propio proceso docente-educativo, desde la clase, no se concibe como un elemento consustancial del proceso de formación de los estudiantes. (Machado, Montes de Oca y Mena, 2008, p.7).

A partir de la experiencia de los autores como docentes del área de Matemática de la Universidad de Camagüey y específicamente en la asignatura de Matemática I, en la carrera de Ingeniería en Informática, en la cual se imparten los temas de Funciones, Límite y Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable, a través de la aplicación de diferentes instrumentos de investigación (entrevistas, encuestas, y observaciones de clases), en cuanto al desarrollo de habilidades relacionadas con la búsqueda y análisis de la información y resolver problemas que requieran de la utilización de los conocimientos matemáticos, fueron observadas las dificultades siguientes:

- Escasa motivación y toma de conciencia por parte de los profesores de matemática y otras asignaturas de la carrera, de las potencialidades que ofrece la matemática para desarrollar habilidades para gestionar el conocimiento en los estudiantes desde el proceso docente-educativo.
- De manera general no se conciben actividades donde el estudiante deba obtener y procesar información, resolver problemas prácticos, tomar decisiones, reflexionar, formular conjeturas, etc.

- No se explotan lo suficiente las tecnologías de la información y las comunicaciones, ni las bibliotecas escolares como medios potenciadores de competencias de gestión del conocimiento.
- En la generalidad de los casos, no se realiza un trabajo sistémico, sistemático e integrado del colectivo de profesores que imparten la asignatura de matemática, en función de la creación de estrategias comunes para el desarrollo de una cultura en torno a la gestión del conocimiento.

Lo anterior pone de manifiesto que a la gestión del conocimiento desde el proceso docente-educativo de la Matemática no se le presta la atención que requiere, quedando esta básicamente en la espontaneidad del accionar de los docentes, a pesar de la importancia y actualidad que posee.

Desarrollo

En los años más recientes, la gestión del conocimiento se ha convertido en una disciplina que se ocupa de la identificación, captura, recuperación, compartimiento y evaluación del conocimiento organizacional. Ha sido identificada como un nuevo enfoque gerencial que reconoce y utiliza el valor más importante de las organizaciones: el hombre y el conocimiento que este posee, a lo que no escapa la Universidad del siglo XXI. Para varios autores la llamada sociedad del conocimiento significa una precisión cualitativa a la sociedad de la información; es decir, no sólo es importante tener acceso o poseer información, también es necesario hacer un uso adecuado de la misma, para poder desarrollar con calidad cualquier tarea ya sea del quehacer profesional o de la vida cotidiana.

La gestión del conocimiento ha sido definida desde diversas perspectivas; se citan entre los autores que han abordado la problemática a Davenport (1997); Prusak (1998); Macintosh (1997); Quintas (1997); Brooking (1997); Bueno (1999); Cervetti (2000); Rodríguez (2006); Gairin, J. y Rodríguez, D. (2006), Ponjuán (2006), González (2009), quienes han aportado múltiples consideraciones acerca de qué es este proceso.

> Para Ponjuán, […] gestionar el conocimiento es el proceso mediante el cual se adquiere, genera, almacena y comparte conocimiento, información, ideas y experiencias para mejorar la calidad del cumplimiento y desarrollo de la misión de la organización, que prepara a las personas para el cambio y la toma de decisiones. (Ponjuán, 2006, p.34)

Bello define la gestión del conocimiento como, **"**la función consciente y planificada que integra la gestión de datos e información, del conocimiento y de los aspectos cognoscitivos y emocionales de la inteligencia**"** (Bello, 2007. p.23).

Por su parte Rodríguez, considera que "la gestión del conocimiento consiste en un conjunto de procesos sistemáticos de identificación, captación, tratamiento, desarrollo y compartimiento del conocimiento; y su utilización, orientados al desarrollo organizacional y/o personal del individuo" (Rodríguez, 2006, p.12).

Para los autores de este trabajo: *la gestión del conocimiento (GC) es un proceso que tiene como función: obtener, procesar, generar, evaluar, utilizar y comunicar conocimientos de forma consciente y planificada, con el objetivo de que los estudiantes se apropien del conocimiento y lo puedan aplicar a diferentes situaciones*.

A partir del análisis de los autores en relación con la problemática que se investiga y los objetivos del presente trabajo, se establecieron como indicadores fundamentales para el diagnóstico:

- Fortalezas y debilidades relativas a la preparación de los alumnos en la formación y desarrollo de las habilidades relacionadas con la obtención y procesamiento de la información.
- Tratamiento metodológico de la gestión del conocimiento desde las asignaturas de matemática.

En correspondencia con el primer indicador, constituyó un primer acercamiento a la problemática, el estudio diagnóstico realizado, a través de la observación de estudiantes en aquellas actividades y tareas relacionadas con la gestión del conocimiento. En la misma, se destacan las fortalezas y debilidades que presentan los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Informática en la formación y desarrollo de las habilidades "obtener y procesar información".

Para obtener información acerca del tratamiento metodológico que recibe la gestión del conocimiento desde la asignatura de matemática se encuestaron y entrevistaron profesores del departamento de Matemática. Se observaron clases de docentes que imparten la asignatura de Matemática I, con el fin de caracterizar la disposición y el conocimiento que éstos tienen para trabajar en función del desarrollo de competencias relacionadas con la gestión del conocimiento y en qué medida, desde la clase ellos incorporan tareas y actividades que propicien la formación y el desarrollo de estas competencias en los estudiantes universitarios.

Se detectó que los estudiantes presentaban dificultades al momento de:

- Localizar posibles fuentes de información matemática que contengan la información necesaria para realizar una tarea matemática.
- Seleccionar las fuentes de información más convenientes y verificar su pertinencia y relevancia.
- Utilizar diversas fuentes de información, así como el procesamiento de los contenidos matemáticos que aparecen en ellas, limitándose sólo a la utilización de aquellas que propone el profesor.
- Extraer y procesar dentro de la fuente matemática seleccionada la información esencial.

Luego de procesar la información obtenida en cuanto a los profesores, se pudo comprobar que:

- Reconocen que pocas veces proponen tareas a sus estudiantes que promueven la utilización y generación del conocimiento matemático, pero no de forma sistemática.
- No se propicia la comparación de los diferentes criterios científicos en el tratamiento de los contenidos.
- A pesar que se proponen tareas donde se utilizan las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, aún no es suficiente el trabajo con las mismas.
- No se tiene en cuenta la utilización de fuentes vivas (profesores, amigos, familiares y tutores) para la obtención de información.
- Es insuficiente la utilización de métodos y procedimientos que propicien el análisis de información científica, la organización de información, y la comparación de los resultados.
- En la evaluación la mayoría de los profesores siempre o casi siempre evalúan al estudiante sólo teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos y en la mayoría de los casos no toman en consideración los procedimientos utilizados para lograrlo.

Para el último indicador se realizó un análisis del programa de la asignatura de Matemática I para Ingenieros Informáticos y se pudo constatar que en los objetivos no están previstas acciones para contribuir a la formación y desarrollo de habilidades necesarias para la gestión del conocimiento, ni se aprovechan las potencialidades del contenido de la matemática para desarrollar las mismas. En resumen, en el proceso docente-educativo de la matemática existen insuficiencias en el desarrollo de habilidades relacionadas con la gestión del conocimiento y no se aprovechan al máximo las potencialidades de la matemática para el desarrollo de las mismas.

El propósito de este trabajo es presentar un sistema de tareas para favorecer la formación y desarrollo de la competencia "gestionar el conocimiento matemático" para estudiantes de Ingeniería Informática, a través de las cuales los docentes pueden incorporar a su actuación pedagógica lo referido a la gestión del conocimiento en el proceso docente-educativo de la matemática, de manera que permita dirigir la formación y desarrollo de manera explícita de la competencia "gestionar el conocimiento matemático".

Según Sampedro, Rodríguez y Montes de Oca (2009), "para lograr que el estudiante *gestione su propio conocimiento*, se debe utilizar la tarea como la célula del proceso docente educativo, donde, bajo la dirección y orientación del profesor, el estudiante gestiona su propio conocimiento de una manera responsable, crítica y reflexiva para la solución de problemas" (Sampedro, Rodríguez y Montes de Oca, 2009).

Cada tipo de tarea está diseñada para potenciar en el estudiante, en un mayor grado, la o las cualidades que por su función las identifican; sin negar su contribución al desarrollo de aquellas cualidades no menos importantes para el desarrollo de la competencia "gestionar el conocimiento matemático". Para ello se han definido tres grupos de tareas para gestionar el conocimiento matemático.

Tareas para orientar, motivar y/o asegurar condiciones; su objetivo esencial es lograr la disposición positiva necesaria para gestionar el conocimiento matemático y contribuir al logro de la orientación valorativa hacia situaciones relacionadas con la carrera, con la vida, entre otras, donde se pongan de manifiesto determinados valores esenciales en la gestión del conocimiento matemático.

Tareas para gestionar el conocimiento matemático: Las tareas de este grupo se corresponden con la obtención y procesamiento del conocimiento matemático procedente de fuentes escritas y humanas, con el objetivo de integrar, generalizar, sintetizar y por ende generar conocimientos.

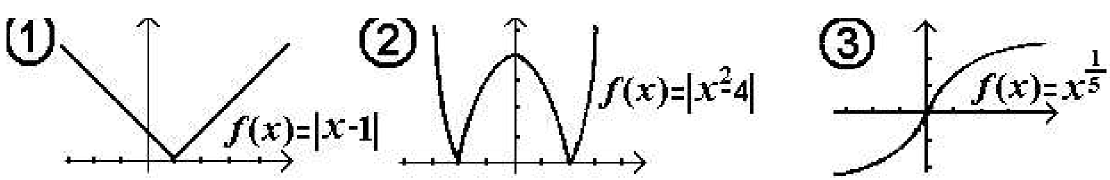
Tareas integradoras, interdisciplinares y/o transdisciplinares: Estas tareas, se orientan también a la obtención, procesamiento y generación de conocimientos necesarios en la solución de problemas. Se distinguen de las anteriores, porque en ellas deben aplicarse de forma creadora los conocimientos adquiridos para buscar alternativas a la solución a dichos problemas. Deben permitir que el estudiante exprese las estrategias asumidas en la ejecución de las mismas y manifestar cualidades de integridad y responsabilidad necesarias en la gestión del conocimiento para solucionarlas.

Las tareas pueden ser individuales o colectivas**,** las primeras permiten que el estudiante de manera individual, en la clase o en su tiempo de trabajo independiente las desarrolle y las segundas exigen la participación de varios integrantes del grupo para su solución. En el trabajo grupal cada cual se responsabiliza con la solución de la tarea, cada uno se prepara y expone sus puntos de vista producto de la actividad individual. En el diseño y ejecución de este tipo de tareas se combinan acciones individuales y colectivas que promuevan la reflexión y esfuerzo intelectual de cada alumno, a través de la interacción alumno-alumno, alumno-profesor, alumno-grupo en un ambiente comunicativo.

Ejemplificación de tareas en la asignatura Matemática I para Ingenieros Informáticos

TAREA 1. El profesor divide el grupo de estudiantes en equipos de seis y ofrece orientaciones para la próxima clase:

- Busca en el libro de Matemática "Cálculo con trascendentes tempranas" de James Stewart, información sobre el concepto de "Derivada de una función de una variable" y su interpretación geométrica. Selecciona la información teórica y gráfica acerca del tema.
- Consulta los libros "Cálculo con trascendentes tempranas" de James Stewart, y el "Cálculo con Geometría Analítica" de Earl Swokowski, para conocer el tratamiento que se ofrece al concepto "Derivada de una función de una variable", su enfoque y cómo son abordados estos conceptos por los autores. Relaciona a tu juicio aspectos comunes y diferentes.
- Visita el centro de Gestión e Información de la universidad, busca información sobre el concepto de "Derivada de una función de una variable" y su interpretación geométrica. Indaga con otros profesores del departamento de matemática, que puedan ofrecerte información al respecto, compara tus informaciones con las que tenias anteriormente.
- Después de haber hecho un análisis sobre el concepto de "Derivada de una función de una variable", diga cuales de las funciones indicadas a continuación tienes derivada en el punto indicado. (1 para x=1, 2 para x=2, 3 para x=0), En caso negativo responda: ¿Por qué no tienen derivada en el punto indicado?



- El profesor le indicará a los estudiantes que para la próxima clase, deben seleccionar de las definiciones encontradas, como resultado de sus búsquedas y entrevistas, aquella que a su juicio mejor se corresponda con el tema propuesto.
- Cada estudiante expondrá ante el resto del grupo entre la definición de "Derivada de una función de una variable" y su interpretación geométrica.

- El profesor estará a la expectativa de cualquier corrección que sea necesaria, enunciará la definición de "Derivada de una función de una variable", analizará su interpretación geométrica y le mostrará a los estudiantes algunos ejemplos en los que deberán identificar, en cada caso, las funciones que tengan derivada en o los puntos indicados.

Evaluación: El profesor realizará las correcciones que sean necesarias y al final de la clase dará a cada estudiante la valoración cuantitativa en la cual se tendrá en cuenta su desempaño dentro de la clase.

Conclusiones

La gestión del conocimiento matemático es un proceso que tiene como función: obtener, procesar, evaluar, generar, utilizar y comunicar conocimientos de forma consciente y planificada. Su valor está en los modos en que se asimila y en última instancia, para resolver problemas y generar a partir de allí nuevo conocimiento. Se reconoce la necesidad de realizar propuestas fundamentadas que tengan en cuenta, desde el proceso docente-educativo de la matemática la necesidad de obtener información, procesarla, comunicarla y utilizarla con efectividad desde la actividad de resolver problemas. Un sistema de tareas adecuadamente planificado, puede favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático para estudiantes de Ingeniería, a través de las cuales los docentes pueden incorporar a su actuación pedagógica lo referido a la gestión del conocimiento en el proceso docente-educativo de la matemática. El sistema de tareas propuesto se está implementado satisfactoriamente en la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad de Camaguey: se ha podido comprobar un cambio en la actitud de los estudiantes, los mismos trabajan con el libro de texto y otras fuentes bibliográficas orientadas, pueden explicar lo que hacen, se ha reducido la tendencia a la memorización, y su disposición positiva para ayudar a sus compañeros.

Referencias bibliográficas

Bello, R. (2007). El aprendizaje automático en la gestión del conocimiento. Una aplicación en el trabajo universitario. *Revista de Enseñanza de las Ciencias,* 11(1), 3-11.

Brooking, A. (1997). The Management of Intellectual Capital. *Journal of long Range Planning* , 2(12), 385-391.

Bueno, E. (1999). *Gestión del conocimiento. Aprendizaje y capital intelectual.* Madrid, España: Ediciones Narcea.

Cervetti, E. (2000). *La Gestión del Conocimiento*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Davenport, T.(1997).*Some principles of Knowledge Management*. USA. Mathematical Education Library, Springer.

Gairin, J. y Rodríguez, D. (2006). La gestión del conocimiento en Red. *Revista La formación sin distancia* 3(5), 31-35.

González, C. (2009). *Estrategia didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes universitarios.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Estudios para la Educación Superior de la Universidad de Camagüey. Cuba.

UNESCO. (1998). La Educación Superior en el Siglo XXI, Visión y Acción. En *Conferencia Mundial sobre la Educación Superior* (pp.54-65). París. Francia.

Machado, E; Montes de Oca, N. y Mena, A. (2008). El desarrollo de habilidades investigativas como objetivo educativo en condiciones de la universalización de la educación superior: la solución de problemas como habilidad compleja e investigadora. En Memorias de *Conferencia Internacional de ciencias de la Educación* (12), (pp.54-58).Camagüey. Editora Pedagógica.

Macintosh, A. (1997). *Position Paper on Knowledge Management.* Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Ponjuán, D. (1998). *Gestión de la información en las organizaciones. Principios, conceptos y aplicaciones*. Habana: Editorial Félix Varela.Cuba.

Ponjuan, G. (2006). *Introducción a la Gestión del Conocimiento*. Habana: Editorial Félix Varela.Cuba.

Prusack, L. (1998). *Gestión del Conocimiento*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Quintas, P. (1997). Knowledge Management: a Strategy Agenda. *Journal of long Range Planning* 30 (3), 385-391.

Rodríguez, D. (2006): Modelos para la creación y gestión del conocimiento: una aproximación teórica. *Educar* 37 (2), 85-100.

Sampedro, R; Rodríguez, M y Montes de Oca, N. (2009). Sistema de tareas para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes de Ingeniería. En Memorias de *XI Congreso de Matemática y Computación*, (pp. 67-76). Habana. Cuba.

El PROYECTO DE AULA". UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez
CECyT 11 Wilfrido Massieu- IPN. ESIME Z-IPN (México)
abenitez@ipn.mx, martha.garcia@gmail.com

Resumen. En el Instituto Politécnico Nacional [IPN] se ha implementado un Modelo Educativo centrado en el aprendizaje del estudiante, en él se tiene la prioridad de implementar el "Proyecto de Aula", como una alternativa para desarrollar una metodología de trabajo, a través de la solución de un problema que es definido en un proyecto. En el CECyT 11 Wilfrido Massieu, se trabaja con ésta metodología, considerando las etapas que marca su desarrollo, particularmente el presente trabajo atenderá la solución de problemas de variación, desde la asignatura de Cálculo Diferencial donde es importante el modelar fenómenos que se refieren a situaciones reales. En este documento se identifica y analizan las funciones cognitivas de tratamiento y conversión que el alumno emplea cuando explora el contenido de las representaciones que emplea. A partir del análisis de datos se tiene evidencia para afirmar que existen dos categorías relacionadas con el tratamiento y la conversión empleados por el alumno: Aspectos Cognitivos y Actitud Matemática.

Palabras clave: proyectos, variación, modelización, representaciones

Abstract. An educational model focused on student learning has been implemented in the National Polytechnic Institute. This model has the "Classroom Project" as a priority and alternative to develop a methodology through problem solving. The CECyT 11 Wilfrido Massieu has implemented this methodology, according to the steps including in its development, particularly the present work is related with problems solving process in differential calculus done by a group of students when resolving mathematical problems related with daily situations involving change or variation. We analyze the cognitive functions of treatment and conversion that the student used when they look for information in different representations. From the data analysis we have found two categories related to the treatment and conversion used by the student: Cognitive Aspects and Mathematics Attitude.

Key words: projects, variation, modeling, representations

Introducción

En el Instituto Politécnico Nacional se ha implementado un Modelo Educativo que tiene como característica principal estar centrado en el aprendizaje del estudiante, para promover: a) Una formación integral y de alta calidad científica tecnológica y humanística; b) el desarrollo equilibrado de conocimientos actitudes y valores y, c) una sólida formación que facilite el aprendizaje autónomo (Materiales para la Reforma, IPN, 2004, p. 69). Este Modelo Educativo, es el marco académico de la institución y en él se fundamenta, el diseño de la oferta educativa y la forma en que se imparte; lo que garantiza que en los distintos niveles de estudio se preserven los mismos aspectos formativos. El Modelo Académico, derivado del Modelo Educativo, incluye dos aspectos básicos: a) la estructura organizacional y, b) los planes de estudio. En particular, en el Nivel Medio Superior los planes de estudio deben orientar la construcción de conocimiento a través de la resolución de problemas, la investigación, el trabajo en equipo y la búsqueda de información, entre otros (Materiales para la Reforma, IPN, 2004, p. 117).

Con esta orientación, en el Nivel Medio Superior se tiene como reto el implementar el "proyecto de aula" (Materiales para la Reforma, IPN, 2004) como una alternativa que desarrolla una metodología de trabajo áulico, innovador, colaborativo e interdisciplinario, a través de la solución de un problema, que es definido en un proyecto.

En este marco, los proyectos, como el proyecto aula, se han convertido en una vía prometedora para elevar los aprendizajes de los estudiantes, en todas las áreas de conocimiento, reconociendo su importancia como estrategia metodológica pertinente para el desarrollo de capacidades y habilidades necesarias en el mundo actual, impulsando la solución de problemas reales (Abrantes, 1994). El trabajo de los estudiantes en proyectos se considera una estrategia potente para la formación de un pensamiento globalizado, que se caracteriza por la búsqueda de las relaciones que se pueden establecer en torno a un tema. Este aspecto adquiere relevancia en la formación de los alumnos, porque permite que vinculen la nueva información con la anterior, lo que trae como consecuencia que su aprendizaje sea relacional y reflexivo (Alsina, 1998; Aravena, 2001).

Como se mencionó en el párrafo anterior, la metodología basada en proyectos se puede implementar para el aprendizaje en cualquier área de conocimiento, en particular resulta conveniente para el aprendizaje de la matemática, debido a que el estudio de esta disciplina se caracteriza por: analizar y modelar problemas derivados de situaciones concretas; buscar diferentes soluciones a problemas matemáticos, organizar e interpretar información y datos; describir relaciones matemáticas; entender la aplicabilidad de los conceptos y procesos; incorporar conocimientos y adaptarse a los cambios tecnológicos y científicos.

Cuando se habla de la actividad matemática en la escuela, se destaca que el alumno aprende matemáticas "haciendo matemáticas", lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, lo que implica que desde el principio se integren al currículo una variedad de problemas relacionados con el entorno de los estudiantes. La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelización. Niss (1989) entiende por modelización el arte de aplicar las matemáticas a la vida real. Gómez (2003), basándose en la definición de Niss, considera que un modelo matemático es una terna donde participan; Objetos del mundo real; conjunto de expresiones matemáticas y, la relación entre ambas. Lesh y Lehrer (2003) mencionan que la modelización matemática es el proceso por el cual se interpreta y se describe matemáticamente situaciones para tomar algún tipo de decisión, lo cual implica centrarse en elementos de la situación, sus relaciones, patrones y características, mientras que "modelo" lo definen como el producto de una descripción matemática de una situación que se construye para describirla, pensar sobre ella, explicarla o realizar predicciones sobre su comportamiento y, por tanto, debe centrarse en las características estructurales de esta situación.

En el CECyT 11 "Wilfrido Massieu" se ha implementado la metodología basada en proyectos, considerando las etapas que marcan su desarrollo. Y se desarrolla un proyecto en el que se busca solución a problemas reales relacionados con fenómenos de variación. El análisis de la variación se lleva a cabo a partir de lo que cambia y lo que permanece constante en el problema, de las variables que intervienen y las relaciones entre ellas, que conducirán a la construcción de un modelo matemático y posteriormente a su análisis. En este documento se identifican y analizan las funciones cognitivas de tratamiento y conversión que el alumno emplea cuando explora el contenido de las representaciones (gráfica, numérica, algebraica y pictográfica) durante el proceso de construcción del modelo matemático para dar solución a un problema real.

Marco Teórico

Para analizar las funciones cognitivas de tratamiento y conversión que el estudiante emplea cuando trabaja con distintas representaciones durante el proceso de construcción del modelo matemático, se hará referencia al trabajo de Goldin & Kaput (1996) quienes analizan la transformación de una representación en otra diferente, considerando las representaciones dentro de un sistema, en el que se encuentran relacionadas (Goldin & Stheingold, 2001).

De una forma más específica, Duval (1995) menciona la operación cognitiva de conversión, que consiste en la transformación de una representación producida dentro de un sistema de representación a otro, de tal manera que la última representación permite explicitar otras significaciones relativas al contenido representado. Enfatiza la condición de que los objetos matemáticos no deben ser confundidos con el contenido de la representación. Es decir, la acción de convertibilidad entre los registros, permite discriminar el concepto, no por medios intuitivos como se maneja tradicionalmente, sino por acciones organizadas para establecer la correspondencia entre los registros, además se debe recordar que toda representación contiene parcialmente el objeto representado, por lo que las representaciones de diferentes registros no contienen los mismos aspectos del contenido conceptual.

La actividad de conversión no es una tarea inmediata en un alumno sino al contrario, la actividad involucra establecer la congruencia entre ambos registros de representación, lo cual es una tarea trivial si ambos registros son homogéneos, por el contrario si los dos registros son heterogéneos entonces se presenta la incongruencia, y ambos contenidos son entendidos como dos diferentes objetos, por lo cual los estudiantes no reconocen elementos que les permitan establecer relaciones. El modelo de Duval expone la necesidad de manejar al menos dos registros de representación semiótica, para llevar a cabo las funciones cognitivas (identificación, tratamiento y conversión) y poder lograr la aprehensión del objeto. Fortalecer la conversión, contribuye a establecer la articulación de varios registro semióticos de representación, y con ello enriquecer las estructuras cognitivas en el estudiante.

El proyecto que aquí se presenta consideró un acercamiento con las distintas áreas del saber para incorporar al trabajo el concepto de función, con la finalidad de que el estudiante analice e interprete el fenómeno desde distintas perspectivas, permitiendo así el uso de diversas representaciones (numérica, algebraica, gráfica, dibujos, lenguaje natural), para llevar cabo tratamientos que beneficien la identificación del contenido, permitiendo su interpretación y en consecuencia la conversión a otra representación (Duval, 2002).

Dicho acercamiento no se pueden entender en forma aislada para el estudio del objeto, sino considerando que las representaciones deben estar articuladas entre ellas. En estas condiciones el aprendizaje de la matemática significa integrar en la Arquitectura Cognitiva todas las representaciones, así como nuevos sistemas de representación, para su coordinación.

Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación.

Metodología

Los programas de estudio del bachillerato destinan una importante cantidad de tiempo al análisis de las funciones reales de variable real, al manejo de las operaciones entre funciones y a la construcción de sus representaciones gráficas. Con esto se espera desarrollar un pensamiento variacional en el estudiante y por consecuencia el desarrollo de los pensamientos; numérico, espacial, métrico y aleatorio. Partiendo de este supuesto, se diseñó una propuesta didáctica relacionada con el tema de variación que se apoyó en la modelización a través de proyectos en grupo, el propósito fue identificar las funciones cognitivas de tratamiento y conversión que el alumno emplea cuando explora el contenido de las representaciones (gráfica, numérica, algebraica y pictográfica) durante el proceso de construcción del modelo matemático.

La investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo; tuvo una duración de cuatro meses; en ella participaron 42 alumnos de cuarto semestre de bachillerato con una edad que oscilaba entre 16 y 17 años. Los estudiantes cursaban la asignatura de cálculo diferencial. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron: reportes escritos elaborados en forma individual; reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes; grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes y reportes elaborados por el profesor-investigador.

El desarrollo del proyecto incluyó las siguientes etapas:

1° Etapa. Reunión de profesores de las X asignaturas impartidas al grupo, para iniciar la planeación de un proyecto que relacionara los objetivos de aprendizaje y los contenidos de las asignaturas involucradas.

2° Etapa. Reunión de profesores, tutores y estudiantes para definir el tema del proyecto, la hipótesis o conjetura provisional, el aporte de cada asignatura, los productos esperados y las formas de evaluar el proyecto.

3° Etapa. Cada profesor elaboró su plan de curso/proyecto, cubriendo los objetivos de aprendizaje de la asignatura y los del proyecto.

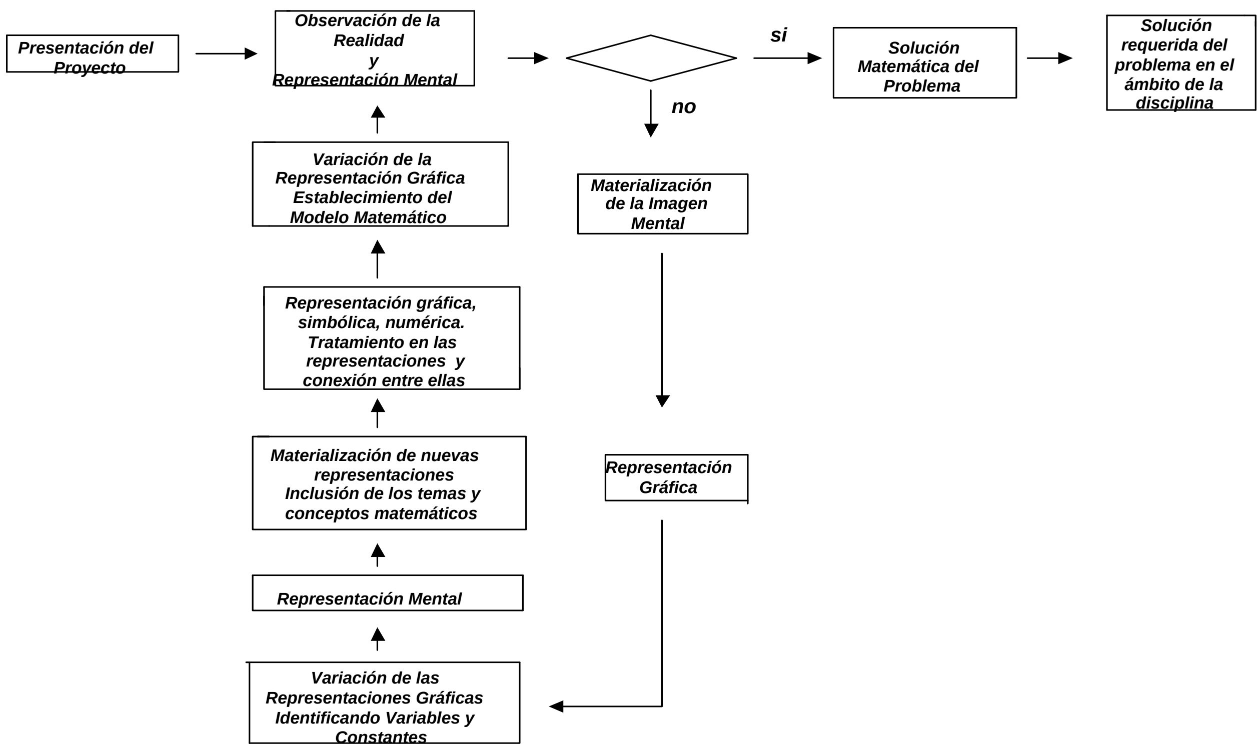
4° Etapa Reuniones para enlazar las actividades entre las asignaturas, calendarizar las sesiones para el control y evaluación participativa así como para elaborar el anteproyecto e informar el área de coordinación.

5° Etapa. Desarrollo de las actividades planeadas en cada asignatura, revisión del cumplimiento de los aprendizajes esperados. En la asignatura de matemáticas el trabajo incluye: la organización y análisis de datos, construcción de gráficas, búsqueda y formulación del modelo y preparación preliminar del informe. De ser necesario se replantea el proyecto para lograr los objetivos propuestos.

En la asignatura de matemáticas, en la etapas 3, 4 y 5 se orientó el trabajo de los estudiantes al tratamiento y la conversión de las representaciones gráficas (Figura 1).

6° Etapa. Elaboración del informe final, difusión de los resultados y evaluación del proyecto. El informe escrito demanda integración de los siguientes elementos: 1) fundamentación; 2) objetivo de estudio e hipótesis; 3) metodología utilizada y planificación; 4) resultados, análisis y modelos matemático y 5) conclusiones.

El trabajo de los estudiantes incluyó las etapas; 1) planteamiento del problema; 2) formular, visualizar y descubrir relaciones; 3) determinación de las variables y de las constantes del problema; 4) incluir los temas y conceptos matemáticos para el desarrollo del modelaje; 5) determinación del modelo matemático; 6) solución matemática del problema e 7)



interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas involucradas.

Figura 1. Las Representaciones Gráficas en la construcción del Modelo Matemático.

1. Planteamiento del problema en el contexto

El proyecto de aula titulado; *Casa Ecológica Autosuficiente, tratamiento de aguas jabonosas y pluviales*, tuvo como objetivo: desarrollar planos de instalaciones básicas residenciales y un modelo físico de una casa habitación aplicando la normatividad vigente, que contara con elementos de insumos para almacenar y dar servicio autosuficiente de manera sustentable a la casa. Las asignaturas que participaron en el proyecto fueron;

Asignatura	Estrategias de Participación para el Proyecto de Aula y etapa que cubre la investigación
Dibujo Arquitectónico asistido por computadora	Representación gráfica de proyectos arquitectónicos de la casa ecológica
Instalaciones Básicas Residenciales	Dibuja con instrumentos la simbología y la trayectoria de las instalaciones básicas (Hidro-Sanitaria)
Química	Propone diversos tipos de filtro para el tratamiento de aguas jabonosas y pluviales
Física	Resuelve problemas relacionados con la mecánica, mediante la aplicación de sus principios sólidos y

	fluidos para el comportamiento del fluido de aguas tratadas en un tinaco a través de un orificio
Dibujo Técnico	Dibujo del isométrico a partir de la planta de azotea y dos fachadas de la casa ecológica (Autocad).
Matemáticas	Modelo Matemático del fluido de las aguas tratadas en términos de una función polinómica

2. *Formular, visualizar y descubrir relaciones*

Al analizar el problema los plantearon las siguientes preguntas: ¿Cuál es el recorrido del agua tratada en la casa ecológica? ¿Qué factores participan en el diseño? ¿Influye la capacidad, ubicación y tipo de agua en el tinaco para el estudio? ¿La ubicación del orificio en el tinaco es importante para el estudio? ¿Cómo influye el tipo de tubería en el estudio? ¿La densidad del agua será la misma para aguas tratadas? ¿Cómo se determina la densidad de las aguas tratadas? ¿Cómo se calcula el gasto y la presión, serán los únicos factores que participan?

También determinaron relaciones entre la cantidad de agua dentro del tinaco y la cantidad de agua que salía a través del orificio; entre la composición química del líquido y las condiciones que presentan físicamente el tinaco y la tubería para determinar los cambios y las constantes.

3. *Determinación de las variables y de las constantes del problema.*

Para analizar el fluido que sale del tinaco los estudiantes recurren al Teorema de Bernoulli (fluido perfecto, incomprensible y en régimen estacionario, la suma de energías cinética y potencial y de presión en cualquier punto de la vena líquida es constante) y al Teorema de Torricelli para determinar la velocidad de salida del líquido por el orificio, como se muestra en el siguiente fragmento:

> *"El volumen se considera una cantidad constante, es decir, el volumen de agua que sale a través de é l, es igual al volumen de agua que descendió del tinaco"*
>
> *"Si el diámetro del tinaco es mucho más grande que el diámetro de la tubería, la altura que se disminuirá en el nivel del agua del tinaco sería prácticamente h, esto se debe a que el resultado obtenido sería mínimo casi cero por lo tanto $h_1 = h$ aproximadamente"*

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = dt$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + c$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \pm 0.47$$

$$h = \frac{g}{2}(t \pm 0.47)^2$$

Variables determinadas: tiempo, Gasto (Q), Presión (P), Velocidad (V), Altura del líquido (h),

Constantes determinadas: Área de la sección transversal (A), Densidad del agua de lluvia (γ), Gravedad (g).

La variación de la presión, gasto y velocidad que experimenta el flujo del líquido cuando transcurre el tiempo es:

$$P = \frac{\gamma g^2}{2}(t \pm 0.47)^2$$

$$Q = Ag\,(t \pm 0.47)^2$$

$$V = g(t \pm 0.47)$$

4. Incluir los temas y conceptos matemáticos para el desarrollo del modelaje

Conceptos relacionados: variación, interpretación de las representaciones gráfica y numérica, áreas, volúmenes, ecuación de la recta, ecuación de la parábola. Expresiones para determinar la presión, gasto y volumen.

5. Determinación del modelo matemático

Los alumnos emplearon la representación numérica para obtener la información referente a las variables identificadas.

Tiempo (t)	Presión (P)	Velocidad (V)	Gasto (Q)
0	10629.27 Pa	4.6107 m/s	.226 m^3/s
5	1439735.36 Pa	53.6607 m/s	2.631m^3/s
10	52747443.94Pa	102.7107 m/s	5.041 m^3/s
15	11515655.03 Pa	151.76 m/s	7.4495 m^3/s
20	20162468.62 Pa	200.81 m/s	9.84 m^3/s
25	31215184.7 Pa	249.86 m/s	12.25107 m^3/s

6. Solución matemática del problema

$$V(t) = \frac{49}{5}t + 4.61 \quad G(t) = \frac{.48}{5}t + .226$$

7. Interpretación de la solución en términos del problema y áreas de las disciplinas involucradas

Los estudiantes interpretaron la información desde las asignaturas: matemática, física, química, dibujo técnico e instalaciones básicas residenciales, para dar solución a la problemática de la casa ecológica y definir los insumos para almacenar y dar servicio autosuficiente a la casa ecológica.

Análisis de datos

Del análisis de los datos obtenidos de las observaciones, las entrevistas y los cuestionarios, realizados durante la experiencia educativa se identificaron 2 categorías de acuerdo al análisis que los estudiantes realizaron a la información contenida en las representaciones empleadas, para llevar a cabo las actividades cognitivas de: tratamiento y conversión.

Categoría I. Aspectos cognitivos

Subcategoría I Interpretación de los datos y organización de la información

Los estudiantes mostraron dificultad para transitar del nivel aritmético al simbólico y del algebraico al nivel gráfico, descripción matemática que interpreta el proceso y la formulación del modelo; efectuaron un tratamiento de las representaciones gráficas y conversión entre las representaciones para su articulación; identificaron variables y relaciones entre ellas identificando permanencia y cambios.

Subcategoría II Habilidades cognitivas

Los estudiantes desarrollaron las habilidades de generalización, técnicas matemáticas, propuesta de contraejemplos, establecimiento de conjeturas y determinación de parámetros. Es importante mencionar que algunos estudiantes utilizan su experiencia en tareas previas y cambian el contexto de la actividad, otros, proponen nuevas situaciones.

Subcategoría III Elementos autorreguladores

Algunos estudiantes no percibieron de manera inmediata el objetivo del proyecto lo cual limitó su participación al inicio, no obstante durante el proceso los estudiantes tuvieron que obedecer el resultado esperado y por ello estuvieron interesados en "dar con la respuesta correcta", sin embargo algunos alumnos establecieron objetivos alternativos durante el proceso.

Subcategoría IV. Comunicación matemática con el equipo de trabajo

La participación entre los integrantes de los equipos al inicio fue escasa, posteriormente se logro establecer comunicación verbal entre sus miembros. En relación con la comunicación escrita, los alumnos entregaron al inicio reportes básicos, durante el proceso lograron hacer secuencias de conjeturas, traduciendo verbalmente las ideas que los alumnos creen verdaderas en conjeturas escritas, es posible conjeturar a partir de las evidencias, que la discusión del proyecto en el salón de clases contribuyó para lograrlo.

Categoría II. Actitud matemática, frente a los retos que se presentan.

Subcategoría I. Confianza en el uso de las matemáticas para resolver problemas y comunicar ideas.

El proyecto de aula permitió identificar ciclos durante el proceso; i) apropiación de información, ii) primera interpretación del contenido y la primera representación, iii) identificación de nueva información y sus conexiones con la antigua información, iv) re-interpretación de la situación en términos de la nueva información y, v) el problema evoluciona hacia una mayor precisión matemática.

Subcategoría II. Perseverancia en la búsqueda de soluciones

Los alumnos desarrollaron la habilidad para la búsqueda de soluciones, desafortunadamente, los recursos que mostraron los alumnos limitaron sus alcances.

Subcategoría III. Tolerancia para escuchar el trabajo de los demás

Al trabajar en equipo los estudiantes superaron algunas tendencias como interrumpir a sus compañeros, nuevamente la discusión del proyecto en salón de clases y en los grupos de trabajo favoreció que desarrollaran mayor tolerancia.

Conclusiones

- Se encontró evidencia para afirmar que el Proyecto de Aula es una metodología que permite la práctica real de las matemáticas y la relaciona con el entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.
- Durante la experiencia de la propuesta didáctica, se advirtió que los estudiantes emplean la representación numérica de manera cotidiana y restan importancia a la representación gráfica.
- Los alumnos establecen relaciones entre las representaciones numérica y gráfica, sin embargo en el caso inverso presentan dificultades en cuanto al tratamiento en la gráfica.
- El proceso de aprendizaje durante la experiencia presentó avances y retrocesos, principalmente durante la interpretación de las situaciones obtenidas.
- El trabajo grupal contribuye para que los estudiantes superen la tendencia calculista. No obstante, cuando trabajan en forma individual, en ocasiones regresan al uso de

tratamientos cuantitativos, mientras que por equipos, emplean tratamientos cualitativos.

- Las discusiones en plenarias favorecen el debate y la defensa de argumentos en un ambiente de análisis y razonamiento.
- La forma de organizar las actividades en el curso, favorecieron la exposición de ideas y conjeturas por parte de los estudiantes.

Nota. Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] para realizar y presentar este artículo. Las investigaciones con números de registro 20100459 y 20100678 han sido apoyadas por la SIP del IPN.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relaçao dos alunos com a matemática en expreriência do projecto MAT789.* Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Lisboa. Portugal.

Alsina, C. (1998b). Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope. En A. Ahmed y H. Williams (Eds). *Mathematical Modelling and its Applications. ICTMA, (pp. 45-67).* Chichester: Ellis Horwoord.

Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Barcelona. España.

Aravena, M., Caamaño C. y Giménez J. (2008). Modelos Matemáticos a través de Proyectos. *Revista Latinoaméricana de Investigación Educativa 11 (1),* 49-92.

Duval, R. (1995). Sémiosis et penseé humaine. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization, North American Chapter of PME* (pp. 311-335). Cinvestav-IPN, México.

Goldin, G. y Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Gómez, J. (2003). La Modelización Matemática. Una herramienta válida en la enseñanza de las Matemáticas Universitarias. *Sumas,* 42, 37-35.

Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 987-439), Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Lesh R. y Lehrer, R. (2003). Models and Modeling Perspective on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning,* 5, 2-3, 109-129.

Instituto Politécnico Nacional. (2004). *Materiales para Reforma. Un Nuevo Modelo educativo para el IPN,* México: IPN.

Niss, M. (1989). Aim and of applications and modeling in mathematics curricula. In W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modeling in learning and teaching mathematics (pp. 22-32).*UK, Chichester: Ellis Horwood.

INGENIERÍA DIDÁCTICA APLICADA AL ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Julio Moisés Sánchez Barrera
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM (México)
sanchezbarrerajm@comunidad.unam.mx

Resumen. Para el diseño de éste taller se toma como base la Ingeniería Didáctica, para las operaciones del álgebra de funciones con aplicaciones prácticas, situando a los participantes al taller frente a un conjunto de actividades, pensadas de tal manera que los participantes puedan tener una estrategia inicial, con la ayuda de sus conocimientos previos, pero muy pronto esta estrategia se muestra ineficaz por lo que se verá obligado a realizar los ajustes necesarios para obtener la respuesta óptima. De este modo se enfrentara a los participantes ante una situación que evoluciona de tal manera que el conocimiento a adquirir se aprenda y sea un medio eficaz para lograr el objetivo didáctico.

Palabras clave: álgebra de funciones, situaciones didácticas

Abstract. For the design of this workshop the Teaching Engineering was taken as a base, for operations of the algebra of functions with practical applications, placing the workshop participants facing a set of activities designed so that participants can have an initial strategy, with the help of their previous knowledge, but soon this strategy is shown ineffective and the participant will be forced to make the necessary adjustments to obtain optimal response. Thus participants will face a situation that evolves so that knowledge is gained and acquired in an effective means to achieve learning objectives.

Key words: algebra of functions, teaching situations

Objetivo

Mejorar el aprendizaje en los estudiantes cuando se enseñe el tema de álgebra de funciones, tomando como base las representaciones de las funciones en su forma sagital en conjuntos y poder articularlo en las diferentes representaciones semióticas: gráfica, tabular, analítica y con aplicaciones a la vida.

Marco teórico

Esté trabajo está basado en la Ingeniería Didáctica, la cual está basada principalmente en dos teorías: La teoría de Situaciones Didácticas (Guy Brousseau) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard), que son los referentes de la ingeniería didáctica.

Ingeniería Didáctica, surge a principios de los años ochentas, al seno de la Didáctica francesa de la matemática, según Douady (1995), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias, de clase, diseñadas, organizadas, y articuladas coherentemente por un “profesor ingeniero” , para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos especifico. Por lo tanto se considera que la Ingeniería Didáctica es un “producto” que resulta de un análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitivas, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis a priori en el cual se decide sobre que variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuara, en este caso se incorpora una cuarta componente, que es la socio-cultural, que es ponerlo en escena.

Brousseau nos habla de una "génesis ficticia" de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo, y utilización. Considera a su vez, la necesidad de retornar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios y su evolución y uso de nuevos problemas.

Según Chevallard, el conocimiento matemático no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que ha denominado transposición didáctica. El "saber erudito" pasa a ser un "saber a enseñar", luego de ser validado por una "noosfera" que le confiere el status de conocimiento a ser aprobado en la escuela.

Brousseau desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas ideas generadas por Piaget, considera que un individuo aprende en la medida en que construye o re significa un concepto incorporándolo a su estructura cognitiva, por medio de un proceso de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Se considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en cuanto a su historia del saber.

El conocimiento proviene en buena parte de hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a situaciones didácticas que le son propuestas, en este sentido, aparece la idea de "devolución", acto seguido por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia. La devolución es la esencia del acto de comunicación entre el profesor y alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos.

El docente debe proponerle al alumno, una situación que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, la situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactué con el saber, es decir formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías que intercambie con otros. La situación debe ser fuente de aprendizaje ciertas ocasiones también criterio de validación de las estrategias puestas en juego.

Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando se es capaz de utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya indicación intencional, denominándose a éstos "situaciones no didácticas", están regidas por el contracto didáctico, es decir, por las obligaciones implícitas que se establecen entre los actores del sistema didáctico, esto es en la tríada docente-alumno-conocimiento. Define "situaciones didácticas", como aquéllas en las cuales el profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo. Brousseau, distingue diferentes tipos de situaciones a-didácticas, que son: acción, formulación y la validación, así como la institucionalización.

Situación a-didáctica de acción: es aquélla donde el conocimiento se intercambia con una o varias personas a través de mensajes escritos u orales. Surgen nociones paramatemáticas, aquéllas que son utilizadas conscientemente como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos, sin ser consideradas como objetos de estudio en sí mismas.

Situación a-didáctica de validación, es aquélla donde el conocimiento toma la forma de conocimiento totalmente admitido.

Por lo que surge "El contrato pedagógico", apunta a reglamentar los cambios entre dos partes que toma, por un periodo limitado, un sistema de derechos y deberes recíprocos; supone el principio de un consentimiento mutuo de las partes ya que se funda sobre el enunciado de reglas de juego a las que cada uno debe libremente someterse.

Brousseau, construye la noción de contrato didáctico, para explicar las relaciones de profesores y alumnos las cuales son condicionadas por un proyecto social exterior a ambos que se les impone y que se les da razón de ser, y difiere del contrato pedagógico en que es perecedero, no establece como aquél, sino que evoluciona y se transforma a la par de los conocimientos puestos en juego.

El profesor de matemáticas tiene una dimensión social que se impone, le compete a él lograr el buen aprendizaje de cada alumno y asegurar la homogeneidad de la construcción de saberes y su coherencia a nivel de toda la clase. Esta dimensión social da al profesor una posición particular, es el eslabón entre los saberes sociales y los saberes construidos en la clase. El contrato debe garantizar la devolución, de no ser así, se producen las rupturas y la búsqueda de nuevos contratos se torna importante.

Brousseau, retoma las ideas de Bachelard, y considera que: los errores no son solo efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas, son efecto de conocimiento anterior que habiendo tenido su interés, éxito, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos ni imprevisibles, se constituyen como obstáculos.

La idea de obstáculo epistemológico tiene a sustentarse, en ciertos casos, en tres categorías como: errores en la enseñanza, insuficiencias en el sujeto cognoscente y como intrínsecas al propio conocimiento. Por lo tanto, Brousseau habla de sendos obstáculos de origen didáctico, ontogénico y epistemológico.

La superación de un obstáculo implica el diseño de acciones racionales que se plasmen en una situación didáctica susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno mediante un proceso dialéctico que permita confrontar las concepciones anteriores y recrear por lo tanto el nuevo conocimiento.

Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de la solución que ponen en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, entre otros). Juega entonces un papel esencial la elección y gestión de variables didácticas, tarea a cargo del profesor o del investigador, al igual que la identificación de los obstáculos inherentes al conocimiento.

Por lo tanto la Ingeniería Didáctica es un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad de los procesos de enseñanza y sobre todo el de aprendizaje en situación escolar.

Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ingeniería didáctica, a saber: análisis preliminar; diseño de la situación didáctica y su análisis a priori; experimentación; análisis de validación.

Análisis preliminar. Se analizan y determinan, desde una aproximación sistemática, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos, por lo cual se toma en consideración: la componente cognitiva, el componente didáctico y el componente socio-cultural.

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica. En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlan y se define la forma que las mismas serán gestionadas. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.

Experimentación. En esta etapa se procede a la "puesta en escena" de la situación diseñada, es decir, se la implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis de validación: Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina, en qué medida, las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

Se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

Antecedentes

Para iniciar con el diseño de esta actividad, se tomo en cuenta como tratan los libros de texto y de consulta el tema de álgebra de funciones y como lo trotan los maestros en clase. Nos damos cuenta que este tema se trata como si fuera álgebra básica y no se le da la importancia que tiene dicho tema, cuando se ve al tratar este tema de álgebra de funciones.

Por lo que esta propuesta toma en cuenta de que el estudiante ya tiene como conocimientos previos el álgebra elemental y también de teoría de conjuntos y que además para explicarle lo que es el producto cartesiano, una relación y una función una gran cantidad de libros y de maestros en clase toma en cuenta la forma sagital de la teoría de conjuntos.

Como se menciona en el párrafo anterior si el álgebra de funciones nos ayuda para que el estudiante comprenda lo que es una relación y diferenciarlo cuando una relación se considera función, por que dejarlo olvidado cuando se trata el tema de álgebra de funciones y solo en los libros se ve favorecido para explicar el producto composición, considerada la operación en la que el estudiante tiene mayor grado de dificultad para comprender.

Presentación del diseño

El diseño se compone de ocho actividades.

Actividad 1. Utilizando la teoría de conjuntos, en especial la notación sagital, se les pide a los participantes que realicen, la suma, resta, multiplicación y división de funciones.

Actividad 2. Se les proporcionaron a los participantes los conceptos para que los comprenda de ejemplos donde aplique el álgebra de funciones y que va a ocupar en el desarrollo de las demás actividades.

Actividad 3. Mediante una aplicación de suma de funciones, obtener la función de egresos, partiendo de representaciones sagital de funciones se representa la de una función de gastos fijos y la segunda función de gastos variables.

Actividad 4. Obtener la función de utilidad, a partir de las representaciones sagitales de la función de ingresos y la función de egresos que se obtuvo de la actividad 3.

Actividad 5. Obtener la función inversa de 2 funciones, representadas en forma sagital, de estas 2 funciones, la primera no va a tener función inversa, ya que al tratar de obtenerla el resultado es una relación y la segunda si va a dar origen a una función inversa, con esto el participante comprenderá el por que solo las funciones biyectivas tienen función inversa.

Actividad 6. De una función de oferta, en la que los elementos del primer conjunto nos representan los artículos y los del segundo conjunto su precio estando en su forma sagital, obtener su función inversa.

Actividad 7. Obtener el producto composición $P \circ R = J$ y $R \circ P = L$, de dos funciones P y R representadas en su forma sagital, con lo anterior se comprueba que el producto composición no es conmutativo y además se verifica las condiciones que se tienen que cumplir para el producto composición.

Actividad 8. Realizar de las actividades que tienen de aplicación, considerar a las funciones sagitales como el método tabular de pares ordenados para construir su gráfica en un plano cartesiano de:

- La grafica de la función de gastos fijos de la actividad 3
- La gráfica de la función de gastos variables de la actividad 3
- La gráfica de la función de egresos de la actividad 3.
- La grafica de la función de ingresos de la actividad 4.
- La gráfica de la función de utilidad que se obtuvo de la actividad 4.
- La gráfica de la función de oferta de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas (al primer conjunto que es el de los artículos).
- La gráfica de la función inversa de la oferta, que se obtuvo de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas al precio de los artículos.
- La gráfica del producto composición $P \circ R = J$

Conclusiones

En el análisis a posteriori de la actividad se logró que los participantes en el taller, comprendieran el por qué y el para qué se ve el tema de álgebra de funciones, teniendo aplicaciones a la vida.

El participante entiende que pasa con cada una de las operaciones del álgebra de funciones, ya que en la actividad comprende su diferente articulación de representaciones semióticas: el de la forma sagital, la tabular, la gráfica y aplicaciones. Ahora puede aplicar el álgebra de funciones en sus estudios profesionales o cuando le sea necesario.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady R., Moreno L., Gómez P. (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986), *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Argentina: FAMAF

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001), *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

Chevallard, Y., (1998), *La transposición Didáctica.* Argentina: Copyright Aique Grupo Editor S. A.

Chevallard, Y., Bosh M., Gascón J. (2000), *Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, España: I.C.E. Universitat Barcelona y Editorial Horsori.

Ferrari, M. (2001), *Una visión socio-epistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV, IPN, México

Rondero, C. (2006), Propuesta didáctica acerca de la articulación de saberes matemáticos. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 151-162). México DF, México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

ARGUMENTOS Y SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA SERIE DE TAYLOR. PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES DE NIVEL EDUCATIVO SUPERIOR

Landy Sosa Moguel, Cynthia Almazán Colorado
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
smoguel@uady.mx, almazan.cc@hotmail.com

Resumen. En este artículo se presentan los argumentos discursivos y visuales formulados por estudiantes de nivel educativo superior al visualizar la Serie de Taylor con tecnología, así como los significados que construyeron sobre la Serie mediante sus argumentaciones. Las producciones de los estudiantes muestran que la predicción y aproximación son prácticas que, en actividades específicas de variación y cambio, promueven la generación de significados de la Serie en los estudiantes.

Palabras clave: serie de Taylor, calculadora, argumentos, significados

Abstract. In this article, we present the discursive and visual arguments formulated by superior educational level students when the Taylor Series is visualized with technology, and the meanings constructed about the Series through its arguments. The productions of the students show that the prediction and approximation are practices that, in specific activities of variation and change, promote the generation of meanings Series on students.

Key words: Taylor series, calculator, arguments and meanings

Introducción

Se presentan en este espacio los resultados correspondientes a un trabajo de investigación desarrollado con el propósito de reconocer los argumentos de presentación y justificación generados por estudiantes de nivel superior en actividades de visualización de la Serie de Taylor a través de tecnología. Así, se pretendían identificar los significados que ellos construyen sobre la Serie y obtener elementos a considerar para un tratamiento didáctico que favorezca su resignificación.

Marcolini y Perales (2005) reportan que coexisten dos modelos didácticos en la enseñanza actual de la Serie de Taylor, uno deviene de trabajos realizados por Newton, Euler y Laplace, donde la Serie lleva consigo un significado asociado a las ciencias experimentales y se construye de forma natural para gran variedad de problemas. El otro se deriva de trabajos realizados por Cauchy, en éstos la Serie es una consecuencia del concepto de límite y del teorema fundamental del Cálculo. Distante del significado y usos de la Serie, el segundo modelo es el que predomina mientras que el primero ha quedado rezagado de la enseñanza actual.

Para construir conceptos y procesos del Cálculo, como la Serie de Taylor, se precisa del desarrollo de nociones y estrategias variacionales (Marcolini y Perales, 2005), en la misma dirección Aparicio y Cantoral (2006), dan evidencia de que la generación de argumentos discursivos, gestuales y visuales de tipo variacional por parte del estudiante favorecen tal proceso de construcción. A este respecto, se ha observado que con el uso de la tecnología informática es posible que el estudiante genere argumentos al tiempo que desarrolla sus nociones y estrategias variacionales (Sánchez, 2006).

Método

El diseño experimental se llevó a cabo siguiendo la ingeniería didáctica como metodología de investigación. Se trabajó con un grupo de 6 estudiantes de nivel educativo superior de la Universidad Autónoma de Yucatán, estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. El instrumento tecnológico empleado por cada estudiante fue una calculadora graficadora.

En el diseño se consideraron aspectos didácticos asociados a la Serie de Taylor asociados al desarrollo del pensamiento variacional, tales como tareas para la construcción de gráficas, estableciendo relaciones entre el lenguaje algebraico y el gráfico (Duval, 1999; D'Amore, 2005); la necesidad de predecir y matematizar un fenómeno, como mecanismos de construcción de los saberes matemáticos de la variación y el cambio (Cantoral y Farfán, 1998); y los modelos de la analiticidad de la Serie de Taylor referidos a distintos contextos y momentos históricos (Cantoral, 2001).

Se pretendió generar argumentos sobre la Serie de Taylor, en particular tres formas de argumentación visual:

1. *Argumento geométrico-numérico***.** Relacionado con la estrategia de diferencias finitas de variables, consiste en aproximar y estimar numéricamente un valor específico a partir de determinar geométricamente incrementos y decrementos entre variables.

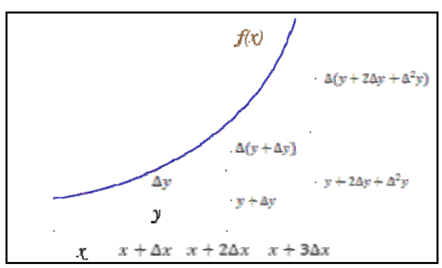


Imagen 1. Argumento geométrico-numérico

2. *Argumento algebraico.* Consiste en poder aproximar un valor específico de una función a partir de determinar algebraicamente los incrementos de las variables e identificar un patrón binomial de desarrollo. Como se muestra en la siguiente tabla:

Cambio en x	Cambio en y	
x	y	y
$x+\Delta x$	$y+\Delta y$	$y+\Delta y$
$x+2\Delta x$	$(y+\Delta y)+\Delta(y+\Delta y)$	$y+2\Delta y+\Delta^2 y$
$x+3\Delta x$	$(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+\Delta(y+2\Delta y+\Delta^2 y)$	$y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
$\vdots$	$\vdots$	
$x+n\Delta x$	$y+n\Delta y+\frac{n(n-1)\Delta^2 y}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y}{2\cdot 3}+\cdots$	

Tabla 1. Desarrollo algebraico de las diferencias finitas de variables

3. *Argumento algebraico-gráfico.* Por medio de la representación gráfica de operaciones algebraicas se pueden aproximar funciones polinomiales.

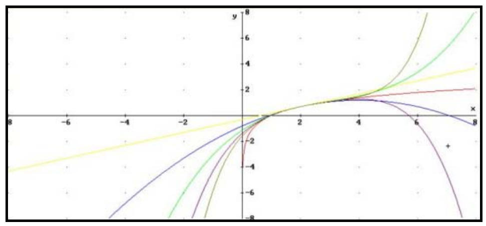


Imagen 2. Argumento algebraico-gráfico

Para construir diferentes significados sobre la Serie, en las actividades propuestas se consideraron estos argumentos y modelos de la analiticidad.

Uso de lenguaje variacional

Con respecto al lenguaje variacional de los estudiantes se observó el uso y presencia de las siguientes nociones, ideas y estrategias:

a) Noción de variación

Una evidencia de esta noción se observó en el momento que se generó una discusión tras la resolución del siguiente problema.

> Al lanzar un pequeño cohete para observaciones meteorológicas se tomaron mediciones de la posición del cohete, desde que se lanzó hasta ocho segundos después. Los datos recabados se presentan en la siguiente tabla:

Tiempo (t)	*Distancia (s)*
0	0
1	5.3125
2	6
3	4.1875
5	1.5625
6	5
7	14.4375
8	32

Instructor: ¿En qué intervalo de tiempo el cohete cambia de dirección?

E1: De 2 a 5 porque el cohete sube y luego baja, porque supuestamente cuando está subiendo va en una dirección y cuando baja esa dirección cambia.

E2: ¿A qué se refieren con que "el cohete cambia de dirección"? Porque según yo, el cohete todo el tiempo cambia de dirección ya que no estamos hablando de una recta sino una curva. Porque lo que estamos midiendo es la posición con respecto al tiempo y si constantemente cambia de posición entonces cambia de dirección.

E1: Ah! Ya entendí tu punto. Como la gráfica no es constante, oscila mucho, entonces en cada intervalo de tiempo tiene cierta dirección, entonces cada que varía el tiempo cambia de dirección.

El estudiante E2 no está mirando la dirección como un "sentido definido" (Norte-sur, Este-Oeste), sino como la inclinación de las pendientes de las rectas tangentes a la curva, es por esta idea que E2 argumenta que la dirección cambia constantemente, esta es una evidencia de la presencia de la noción de variación y del uso de un lenguaje variacional.

b) Practica de predicción y Estrategia de diferencia finita de variables

Con el fin de predecir la posición de un cohete, un estudiante utilizó la estrategia de diferencia finita de variables hacia atrás:

F1 Arch | F2 Gráf | F3 Edit | F4 Desh | F5 $ | F6 Func | F7 Estd | F8 ReCalc

coh	A	B	C	D	E	F
4	3	4.1875	-1.813	-2.5	2.125	
5	4	2	-2.188	-.375	2.125	
6	5	1.5625	-.4375	1.75	2.125	
7	6	5	3.4375	3.875	2.125	
8	7	14.438	9.4375	6.	2.125	
9	8	32	17.563	8.125	2.125	
10	9					

E10:

MAIN RAD AUTO FUNC

$x - 8.125 = 2.125$

$x = 2.125 + 8.125$

$x = 10.3$

$x - 17.563 = 10.3$

$x = 10.3 + 17.563$

$x = 27.863$

$x - 32 = 27.863$

$x = 32 + 27.863$

$x = 59.863$

Imagen 3. Estrategia de diferencias finitas (izquierda) y su predicción (derecha)

En otro ejercicio se observó el intento de los estudiantes por utilizar esta estrategia para predecir la posición de una partícula, sin embargo tuvieron que optar por otro camino.

c) Practica de predicción y la aproximación numérica

Con el fin de predecir la posición de una partícula, un estudiante utilizó el teorema del valor medio como estrategia para aproximarse al valor buscado:

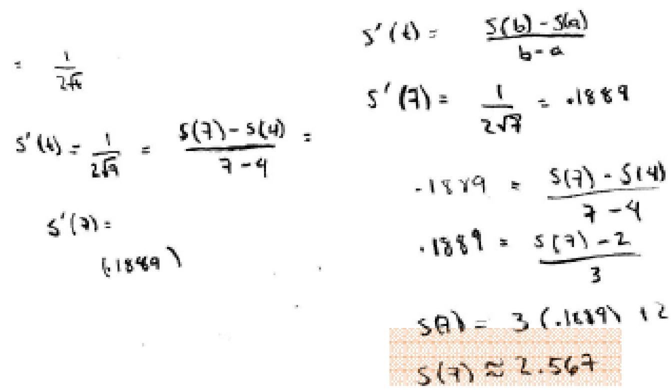


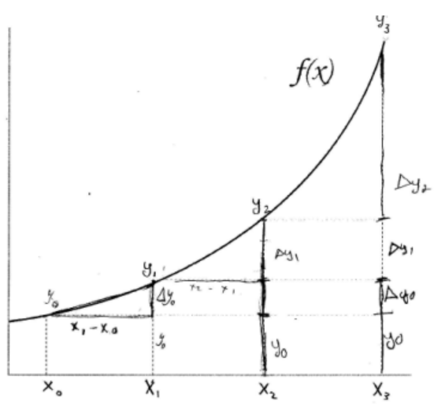
Imagen 4. Aproximación y predicción de la posición de una partícula

Es muy interesante notar que con esta idea el estudiante obtiene una expresión equivalente a la Serie de Taylor.

Argumentos y significados sobre la Serie de Taylor

a) Argumento geométrico-numérico

Un estudiante obtuvo el siguiente resultado al tratar de construir una expresión para predecir la posición de x_3 con el conocimiento del estado de x_1:



La expresión que según el estudiante predice la posición de x_3 es:

$$y_3 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2$$

Imagen 5. Argumento geométrico-numérico generado por un estudiante

Se puede observar en la gráfica que:

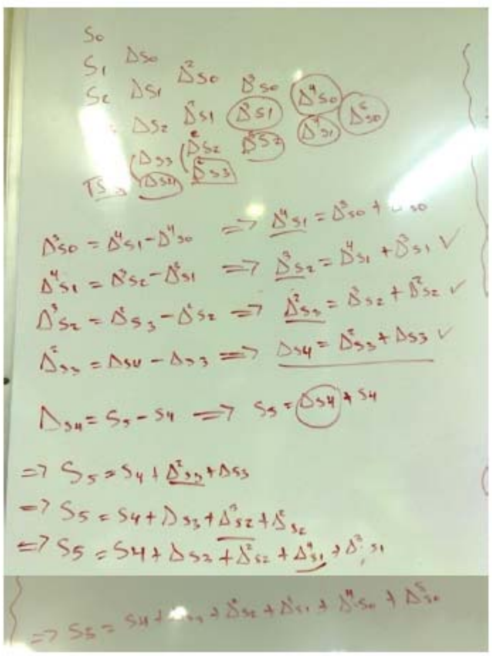
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \text{ y } y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1$$

Sustituyendo la primera expresión en la segunda se obtiene $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, sustituyendo ésta y la primera expresión en la que el estudiante construyó, se obtiene lo siguiente: $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$

Esta expresión es muy similar al desarrollo de diferencias finitas de Euler, si se continua este procedimiento, digamos hasta y_n, obtendremos el binomio de Newton y finalmente la serie de Taylor.

b) Argumento algebraico-numérico

A partir de un arreglo de diferencias un estudiante construyó una expresión binomial para predecir la posición inmediata.



La expresión que construyó el estudiante para predecir el valor de s_5 es:

$$s_5 = s_4 + \Delta s_3 + \Delta^2 s_2 + \Delta^3 s_1 + \Delta^4 s_0 + \Delta^5 s_0$$

Imagen 6. Argumento algebraico-numérico generado por los estudiantes

Procedamos a expresar s_5 en términos de s_0 de la misma forma que se realizó en el argumento geométrico. En este caso nos apoyaremos del siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
s_0 & & & & & & & & & & \\
 & \Delta s_0 & & & & & & & & & \\
s_1 & & \Delta^2 s_0 & & & & & & & & \\
 & \Delta s_1 & & \Delta^3 s_0 & & & & & & & \\
s_2 & & \Delta^2 s_1 & & \Delta^4 s_0 & & & & & & \\
 & \Delta s_2 & & \Delta^3 s_1 & & \Delta^5 s_0 & & & & & \\
s_3 & & \Delta^2 s_2 & & \Delta^4 s_1 & & & & & & \\
 & \Delta s_3 & & \Delta^3 s_2 & & & & & & & \\
s_4 & & \Delta^2 s_3 & & & & & & & & \\
 & \Delta s_4 & & & & & & & & & \\
s_5 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

De lo anterior podemos observar que:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0\,,\ s_2 = s_1 + \Delta s_1\,,\ s_3 = s_2 + \Delta s_2\,,\ s_4 = s_3 + \Delta s_3$$

Si utilizamos estas expresiones realizando las sustituciones convenientes, obtenemos:

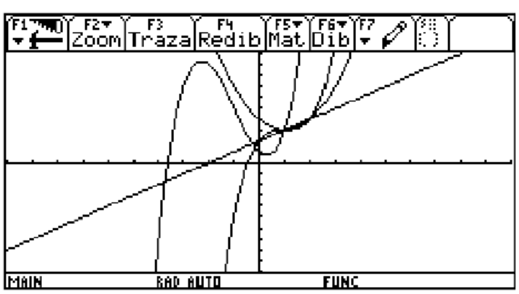
$$s_5 = s_0 + 5\Delta s_0 + 10\Delta^2 s_0 + 10\Delta^3 s_0 + 5\Delta^4 s_0 + \Delta^5 s_0$$

Es bastante evidente el desarrollo binomial en la última expresión. El resultado obtenido por este estudiante es una forma equivalente de la serie de Taylor. Si se continúa el proceso, digamos hasta s_n obtendríamos el desarrollo del binomio de Newton y finalmente la Serie de Taylor.

c) Argumento algebraico-gráfico

Este argumento fue generado en un ejercicio que consistía en construir una función polinomial que se aproximara gráficamente a la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ en el punto $x_0 = 1$. Se generaron dos tipos de resultados concernientes a la noción de "aproximación" que cada estudiante concibió:

1. Aproximación puntual



La expresión que el estudiante construyó para aproximar la función de forma puntual es:

$$f(x) = 3 + 7(x-1) + \frac{12(x-1)^2}{2} + \frac{6(x-1)^3}{6}$$

Imagen 7. Aproximación puntual en $x_0 = 1$

2. Aproximación global

En este argumento intervienen procesos cognitivos para construir con éxito la función correcta y junto con la integración tecnológica el estudiante pudo realizar acciones y estrategias como la integración de registros de representación algebraica, gráfica y numérica. También interviene la operación gráfica de funciones y sobre todo, lograron construir expresiones aproximadas a la función solicitada instrumentando la calculadora gráfica e interactuando con el significado de aproximación polinomial sumergido en la Serie.

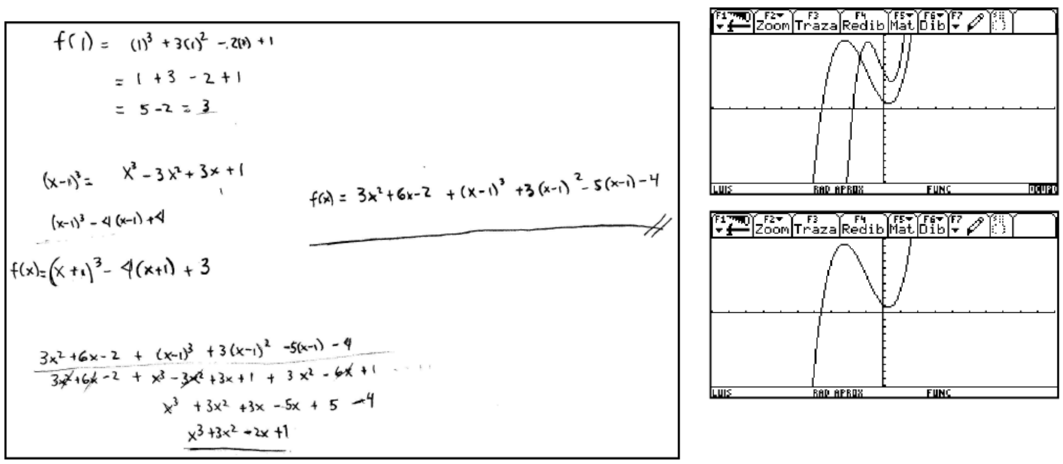


Imagen 8. Aproximación global de forma algebraica (izquierda) y grafica (derecha)

Conclusiones

La argumentación es un medio que permite a los estudiantes justificar una conjetura, resultado o idea, por ejemplo, justificar el proceso para aproximarse a un punto o a la posición de una partícula conociendo un estado ulterior de su posición. Asimismo, es un medio que favorece la construcción de nociones sobre un concepto o proceso matemático, en el caso de la Serie, los estudiantes reconocieron ésta como un proceso de aproximación para predecir el estado de un fenómeno a partir de datos iniciales.

Las producciones de los estudiantes dan evidencia de que la predicción y la aproximación son prácticas que, en actividades específicas de variación y cambio, promueven la construcción de significados de la Serie de Taylor en los estudiantes. En dichas actividades, la visualización con tecnología fue un elemento clave para analizar lo variacional y generar argumentos de justificación de resultados.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9(1)*, 7-30.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *14(3)*, 353 – 369

D'Amore, B. (2005*). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas*. México: Reverté.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1), 25-68.

Sánchez, M. (2006). *Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional. Números* 64. Recuperado el 20 de Octubre de 2008 de http://www.sinewton. org/numeros/numeros/64/ideas_02.pdf.

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS DE PROBLEMAS DE REDES ELÉCTRICAS

Pedro Castañeda Porras, Pedro Fernández de Córdoba, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" (Cuba)
Universidad Politécnica de Valencia (España)
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu, eugenio@mat.upr.edu.cu, pfernandez@mat.upr.es

Resumen. En ingeniería, sobre todo en Telecomunicaciones y Electrónica, es una necesidad modelar problemas de circuitos, convirtiéndose esto en una herramienta invaluable. El estudio de las ecuaciones diferenciales propone estrategias que conducen a entender mejor la modelación por parte de los estudiantes. La construcción de la formulación matemática requiere de cierta habilidad, imaginación y evaluación objetiva. Compartimos el criterio de Judson (1997), que plantea lo importante de propiciar la transferencia de los conocimientos a situaciones relacionadas con la solución de problemas del ejercicio de su profesión. De ahí lo importante de enseñar ecuaciones diferenciales. En este trabajo expondremos la resolución de un problema sobre redes eléctricas, que se modela mediante sistemas de ecuaciones diferenciales. Se plantea una metodología para obtener el modelo que represente lo más fielmente la realidad, lo que propicia llegar de forma acertada a la respuesta deseada.

Palabras clave: sistema de ecuaciones diferenciales, modelo

Abstract. In engineering, mainly in Telecommunications and Electronic, it is a necessity to represent problems of circuits, thus this becomes a powerful tool. The study of the differential equations presents strategies that lead to the better understanding of the models by the students. The construction of the mathematical formulation requires of certain ability, imagination and objective evaluation. We share the Judson (1997) criterion that outlines the importance of helping with the transference from the knowledge to situations related with the solution of problems related to the exercise of a profession. That is why it is important to teach differential equations. In this work we will expose the experience of problems about electric nets that are modeled by systems of differential equations. A methodology is shown to obtain the pattern that represents the more faithfully the reality, what propitiates the arrival to the wanted answer.

Key words: system of differential equations, model

El proceso de imitar la realidad mediante lenguaje matemático se conoce como modelación matemática. La experiencia que abordamos trata sobre el modelado matemático en la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica. Estas ideas se discuten en reuniones de año donde intervienen profesores de las asignaturas Álgebra Lineal, Series y Ecuaciones Diferenciales, Circuitos Eléctricos I y Física I de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Este trabajo se sustenta en el perfeccionamiento de los nuevos planes de estudio, que exigen la vinculación de nuestras asignaturas con el perfil profesional del estudiante.

Nos centraremos en problemas de redes eléctricas que se modelan a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales (SED).

Este método tiene una gran importancia práctica para el ingeniero y se ilustra por medio de una situación de forma genérica.

Se infiere que el estudiante reconocerá que la aplicación de las matemáticas en un problema de ingeniería consiste básicamente en:

- Encontrar un problema del mundo real.
- Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
- Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
- Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso.

Desde este punto de vista, Bassanezi, citado por Biembengut y Hein (sf), afirma que la enseñanza debe estar enfocada en los intereses y necesidades prácticas de la comunidad. "Aunque su interés no se agote allí, no es intención hacer una apología de "para qué sirve".

En este sentido, el sistema educativo debe proveer elementos para que el individuo desarrolle sus potencialidades, propiciándole capacidad para pensar crítica e independientemente. La matemática no sólo contribuye sobremanera para el ejercicio intelectual, sino que también es el lenguaje de la ciencia.

El desarrollo de estas actividades sin dudas juega un papel fundamental para el futuro egresado, pues el estudiante para su evaluación, tiene que discutir ante un tribunal conformado por sus profesores de Matemática, Circuito y Física la situación problemática que le corresponda y según la calidad del trabajo tiene derecho a presentarlo en jornadas científicas estudiantiles, lo que se le refleja en su evaluación. Por eso compartimos con Adler, citado por Biembengut y Hein (sf), cuando destaca la importancia de esta disciplina, defendiendo que "debemos buscar maneras de desarrollar precozmente, en los alumnos, la capacidad para leer e interpretar el campo de la matemática".

Actualmente, este proceso se utiliza en toda ciencia, de modo que contribuye en forma especial en la evolución del conocimiento humano.

Expondremos algunas ideas teóricas sobre cómo representar un SED.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\
. \qquad & \qquad . \\
. \qquad & \qquad . \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n1}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Puede ser escrito como,

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad (2)
$$

A continuación aplicaremos una metodología (Castañeda, Fernández, Quintero, Hernández, 2010, p.437) para aplicar el método de coeficientes indeterminados a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Solución del sistema homogéneo. (Xc)

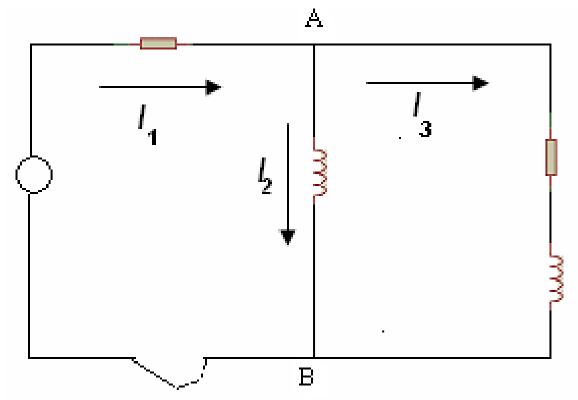
- Conformar la Matriz asociada del sistema homogéneo.
- Plantear la Ecuación matricial.
- Obtener la Ecuación característica.
- Hallar lo valores y vectores propios.
- Plantear la solución general del sistema homogéneo.

Encontrar un vector solución Xp del sistema no homogéneo.

- Proponer una solución particular de la parte no homogénea.
- Ajustar correctamente tal propuesta.
- Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
- Y plantear X = Xc +Xp.

Problema

Determinar las características de las corrientes $I_1(+)$, $I_2(+)$ e $I_3(+)$ en la red eléctrica que se muestra en el siguiente diagrama.



Aplicando las leyes de Kirchoff a cada una de las ramas obtenemos el siguiente modelo matemático:

$$R_1 I_1 + L_2 \frac{dI_2}{dt} = E \qquad\qquad I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$$

$$R_3 I_3 + L_3 \frac{dI_3}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Llevándolo a la forma (1) obtenemos lo siguiente,

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{E}{L_2} - \frac{R_1}{L_2} - \frac{R_1}{L_2} I_3$$

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{R_1}{L_3} I_2 - \frac{R_1 + R_3}{L_3} I_3 + \frac{E}{L_3}$$

Forma matricial según (2).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \\ -\frac{R_1}{L_3} & -\left(\frac{R_1}{L_3} + \frac{R_3}{L_3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L_2} \\ \frac{E}{L_3} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ecuación matricial,

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_2}-\lambda & -\dfrac{R_1}{L_2} \\ -\dfrac{R_1}{L_3} & -\left(\dfrac{R_1}{L_3}+\dfrac{R_3}{L_3}\right)-\lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica.

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_2}-\lambda & -\dfrac{R_1}{L_2} \\ -\dfrac{R_1}{L_3} & -\left(\dfrac{R_1}{L_3}+\dfrac{R_3}{L_3}\right)-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda\cdot L_3\cdot(\lambda\cdot L_2 + R_1) + \lambda\cdot L_2\cdot(R_3 + R_1) + R_1\cdot R_3 = 0$$

$$L_1L_2\lambda^2+(R_1L_3+R_1L_2+R_3L_3)\lambda+R_1R_2=0 \quad (4)$$

Como se observa, la ecuación (4) tiene el tipo de una ecuación cuadrática y como los valores de la resistencia y la inductancia son positivos, ni tiene raíces positivas ni complejas conjugadas, en fin son raíces negativas, entonces el discriminante de (4) tiene la forma,

$$\Delta = l_2 l_3(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)$$

Donde los vectores correspondientes a los valores propios, $-a_1$ y a_2, son:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ a_1\cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2\cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix}$$

Luego la solución general de la homogénea asociada tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot t} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot t} \qquad (5)$$

y la solución particular se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Con B1 y B2 constante.

Sustituyendo (6) en (3) obtenemos,

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Sustituyendo en la solución general sería,

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_g = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot t} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot t} + \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las condiciones iniciales del problema, nos quedaría la solución de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot 0} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot 0} + \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)} \qquad \text{Y} \qquad C_2 = \frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}$$

$$I_2 = e^{-t\cdot a_2}\cdot\frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\cdot R_1 + e^{-t\cdot a_1}\cdot\left(-\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\right)\cdot R_1 + \frac{E}{R_1}$$

$$I_3 = e^{-t\cdot a_2}\cdot\frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\cdot(L_2\cdot a_2 - R_1) + e^{-t\cdot a_1}\cdot\left(-\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\right)\cdot(L_2\cdot a_1 - R_1)$$

$$I_1 = \frac{E\cdot e^{-t\cdot a_2}\cdot a_2\cdot(L_2\cdot a_1 - R_1)}{R_1^2\cdot(a_2 - a_1)} + \frac{E\cdot e^{-t\cdot a_1}\cdot a_1\cdot(L_2\cdot a_2 - R_1)}{R_1^2\cdot(a_1 - a_2)} + \frac{E}{R_1}$$

Según la metodología aplicada se ha hecho un trabajo matricial para resolver el modelo planteado, nos hemos apoyado en un asistente matemático (DERIVE). Se puede observar la relación entre las diferentes disciplinas y el estudiante reconoce su utilidad en su futuro desempeño como profesional. Esta relación entre las disciplinas es muy importante y es algo en lo que debemos ganar y profundizar para que el estudiante se sienta inmerso y motivado dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Hemos analizado un caso en forma genérica donde se aplicó el método de los coeficientes indeterminados, con valores propios simples y reales.

Conclusiones

En la experiencia expuesta se pudo observar el aspecto modelante o la formulación matemática del problema a través de leyes físicas estudiadas por los estudiantes, así como la articulación de las asignaturas de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica y las disciplinas del año.

Se demostró que un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real y su formulación implica:

- Identificar las variables causantes del cambio de un sistema.
- Establecer un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema (leyes empíricas aplicables).
- Las hipótesis de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables que intervienen.

- El enunciado matemático de esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

La adopción de modelos matemáticos, ya sea en forma de presentación o bien en el proceso de creación, adecuadamente dimensionados a la realidad de las comunidades escolares, incorporando nuevas tecnologías, sin dejar de preservar identidades culturales es un medio por el cual el alumno alcanza un mejor desempeño, y logra convertirse en uno de los principales agentes de cambios. En fin, lo que proponemos no es un manual de reglas, sino, un resultado de una vivencia práctica, considerando diversos factores sobre la institución de la enseñanza frente a las necesidades del medio en que vivimos, en creciente y constante desarrollo tecnológico. A pesar de las dificultades encontradas, los resultados positivos nos han llevado, a creer y apostar, cada vez más, en este trabajo que tiene como punto central estimular la creatividad para que el individuo se desarrolle y enfrente con éxito el tercer milenio.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M. y Hein, N. (sf). *Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de Enseñanza-Aprendizaje de Matemáticas.* Recuperado el 09 de agosto de 2010 de http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Castañeda, P. (2010). Propuesta metodológica para la resolución de problemas de corrientes a través de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden utilizando valores y vectores propios. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, (pp. 437-444). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html.

EL JUEGO Y EL APRENDIZAJE COOPERATIVO EN LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Liliana Martínez Hernández, Elvira G. Rincón Flores, Ángeles Domínguez
Tecnológico de Monterrey ITESM (México)
proflili_71@hotmail.com, elvira.rincon@itesm.mx, angeles.dominguez@itesm.mx

Resumen. Este estudio se enfoca en identificar algunas ventajas del juego como actividad de aprendizaje. En particular, las actividades lúdicas que se llevaron al aula, la Balanza y el Memorama, se implementaron aplicando la estrategia de aprendizaje cooperativo. Esto con la finalidad de abordar el estudio de la solución de ecuaciones lineales desde una perspectiva dinámica, interactiva y divertida. El estudio se llevó a cabo en una telesecundaria ubicada en una comunidad semirural y con un nivel socioeconómico bajo. Las condiciones sociales, culturales, y económicas de la comunidad hacen que el impacto positivo de los juegos lúdicos en el salón de clase de la telesecundaria se manifieste de manera clara y contundente. Con la implementación de los juegos se logró el objetivo didáctico: la resolución de ecuaciones de primer grado. Además, se ganó que los alumnos favorecieran la interacción entre iguales, la aceptación de normas y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y la comprensión de los propios errores.

Palabras clave: aprendizaje lúdico, ecuaciones lineales, aprendizaje cooperativo

Abstract. This study focuses on identifying some advantages of the game as a learning activity. In particular, the two games played, Balance and Memorama, were implemented using collaborative learning. The objective of the study is to address the teaching and learning of the solution to linear equations from a dynamic, interactive and fun way. This study was conducted in a "telesecundaria" located in a semi-rural community with low socioeconomic status. The social, cultural, and economic level of the community make the positive impact of recreational games in the telesecundaria classroom more evident. With the implementation of the games, the teaching goal, learning to solve linear equations, was achieved. In addition, students gained favored peer interaction, acceptance of rules and discussion of ideas, recognition of the successes of others and understanding of their own mistakes.

Key words: mathematics games, linear equations, cooperative learning -

El objetivo de este estudio es investigar de qué manera las estrategias constructivistas como el juego y el aprendizaje cooperativo favorecen tanto al proceso enseñanza-aprendizaje como a la motivación de los alumnos para aprender métodos de solución de ecuaciones de primer grado. La investigación se realizó con alumnos de segundo grado de secundaria con modalidad de telesecundaria, esto es, se cuenta con una educación apoyada en medios de comunicación masiva. La escuela está ubicada en una comunidad semirural de un nivel socioeconómico bajo. Las condiciones sociales, culturales y económicas de los alumnos los limitan en generar expectativas de continuar con estudios a nivel superior, lo que algunas veces afecta su rendimiento escolar por considerar que no les va a servir.

Históricamente, los alumnos presentan dificultades para comprender el algoritmo de la solución de ecuaciones de primer grado y más aún para resolver problemas contextuales que impliquen al uso de las mismas, esto aunado a la enseñanza tradicional donde prevalece la enseñanza centrada en el docente y donde inusualmente se utilizan otros recursos distintos al libro de texto (Garrido y Velásquez, 2009,) da origen a una problemática que vale la pena estudiar.

Marco teórico

Guerrero y Blanco (2004) han encontrado que ciertas creencias de los alumnos hacia las matemáticas pueden crear ansiedad, por ejemplo, la creencia de la incapacidad para resolver problemas genera angustia y puede provocar el abandono de la actividad. Hidalgo, Maroto y Palacios (2005) señalan que en la adolescencia se manifiesta una reducción de las actitudes favorables y que comienzan a consolidarse las actitudes que se han desarrollado durante la enseñanza primaria, las cuales tienden a estar fuertemente polarizadas. González (2005) reporta que al trabajar con alumnos de secundaria identificó que cerca del 50% del alumnado manifestó desinterés por las matemáticas desde etapas tempranas de su formación escolar. González argumenta que desde la perspectiva del alumno el desinterés proviene principalmente por: a) la creencia sobre la dificultad que se le atribuye a la materia, b) el cuestionamiento sobre la utilidad de las matemáticas, y c) la calidad de la enseñanza. Por su lado, Arteaga y Guzmán (2005) observaron que los alumnos tienen cierta apatía para las matemáticas y más cuando resuelven problemas de algebra, pues utilizan reglas y procedimientos irreflexivos. Para Guzmán (1993) uno de los factores que más influye en la aparición de las emociones negativas relacionadas con las matemáticas es el método docente, sobre todo en aquel que promueve la pasividad del alumno.

Ante esta realidad, la presente investigación consideró al juego y al aprendizaje cooperativo como estrategias que pueden ayudar a mejorar la motivación de alumnos hacia la matemática. El juego, en la enseñanza de las matemáticas, es considerado por algunos como una estrategia muy eficaz para despertar el interés de los alumnos ya que puede aminorar el temor, el rechazo o la ansiedad por las matemáticas. Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez (2004) afirman que los juegos pueden proporcionar un aprendizaje significativo y pueden fomentar el desarrollo de capacidades mentales, ya sean deductivas, inductivas, experimentadoras y de análisis, que impulsen el pensamiento y las cualidades intelectuales. La introducción del juego en las matemáticas puede despertar el interés de los alumnos y motivarlos, afirma Martín Gardner (1995), quien encontró que el mejor camino para motivar a un estudiante consiste en ofrecerle un intrigante juego de naturaleza matemática.

En un estudio realizado por Amaya y Gulfo (2009) sobre el uso del juego Origami para la enseñanza del tema de funciones, concluyeron que este juego se convirtió en una herramienta amena para repasar conceptos geométricos permitiendo un paso natural de la geometría espacial a la euclidiana y viceversa. En otro estudio desarrollado por Garrido y Velásquez

(2009) en el que aplicaron un juego diseñado por ellas mismas para la enseñanza de operaciones de conjuntos, encontraron que el uso del juego como estrategia de aprendizaje propicia un ambiente que favorece el aprendizaje cooperativo, la sana competencia, la motivación, la confianza, el desarrollo del pensamiento y la capacidad de análisis.

Por su parte, el aprendizaje cooperativo propone que los alumnos trabajen en grupos para resolver problemas y realizar actividades. De acuerdo a Johnson y Johnson (1991), trabajar en grupos colaborativos implica intercambiar información hasta que todos los miembros hayan comprendido y aprendiendo. De esta forma, al aprender colaborativamente se identifican elementos tales como cooperación, responsabilidad, comunicación, escucha empática, autoevaluación, y negociación. Este tipo de estrategia ayuda a mejorar otras áreas cognitivas en los alumnos ya que fomenta el razonamiento superior y el pensamiento crítico. Además, el aprendizaje colaborativo también favorece el crecimiento en la autoestima, ya que los alumnos se sienten más aceptados por los demás, y esto les proporciona más seguridad. Aún más, esta estrategia fomenta valores como el respeto, tolerancia, solidaridad etc., valores universales para todas las áreas del conocimiento (Ormrod, 2005). El trabajo colaborativo promueve la construcción social del conocimiento principalmente a través de la comunicación. Específicamente, el diálogo entre iguales al enfrentarse a una problemática fomenta el análisis propiciando soluciones más complejas (García, Jiménez y Flores, 2006). Mientras que el diálogo entre el alumno y el profesor (como facilitador del conocimiento) promueve que el alumno profundice en su razonamiento para lograr una solución cada vez más completa y compleja. Así mismo, de esta interacción el facilitador identifica los errores que tiene los alumnos al solucionar problemas y tiene la oportunidad de brindar ayuda oportuna para que los alumnos adapten sus estrategias y modifiquen su conocimiento para albergar nuevas y más profundas concepciones. En una investigación realizada por Cedillo (2008), un grupo de docentes observaron como sus alumnos resolvían problemas colaborativamente. De esta observación determinaron que cuando los instructores valoran las capacidades de los estudiantes y guían su razonamiento matemático, los alumnos comienzan a producir ideas. Concluyeron que contrario a lo esperado, no es el conocimiento del docente lo que permite que las actividades en el aula sean fructíferas, sino la manera en cómo el docente organiza su clase, el tipo de material que se emplea, y cómo implementa el aprendizaje cooperativo.

Metodología

El enfoque del estudio es cualitativo de corte descriptivo en el que se busca estudiar el desempeño del alumno ante un modelo de enseñanza basado en el juego y el aprendizaje cooperativo. El contenido matemático se centró en la solución de ecuaciones de primer grado.

Los participantes fueron 27 alumnos de segundo año de telesecundaria, quienes tenían entre 12 y 15 años. El experimento se desarrolló durante 3 semanas en sesiones diarias de una hora. La recolección de datos se basó en la observación (registro diario) y en ocho entrevistas a alumnos una vez que concluían las actividades lúdicas y colaborativas. Los alumnos fueron organizados en binas o en trinas para desarrollar las dos actividades lúdicas que se implementaron: la Balanza y el Memorama.

El juego de la Balanza simula ser una báscula con dos extremos cuyo objetivo es que mantener su contrapeso (ver Figura 1). Este juego se utilizó para explicar las propiedades de la igualdad y posteriormente para resolver las ecuaciones de primer grado, hasta dominar el algoritmo.

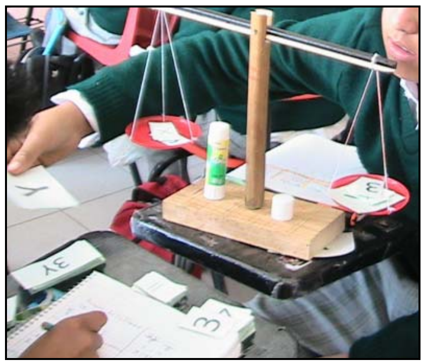


Figura 1. Alumnos resolviendo ecuaciones con el juego de la Balanza

El Memorama es un juego consta de una serie de pares de tarjetas, en una se puede presentar la ecuación y en su par la solución o bien, una puede contener una ecuación y su par una ecuación equivalente (ver Figura 2). Este recurso didáctico se utilizó a manera de reforzamiento para que el alumno continuara ejercitando el algoritmo de resolución de ecuaciones de primer grado pero de una manera distinta.

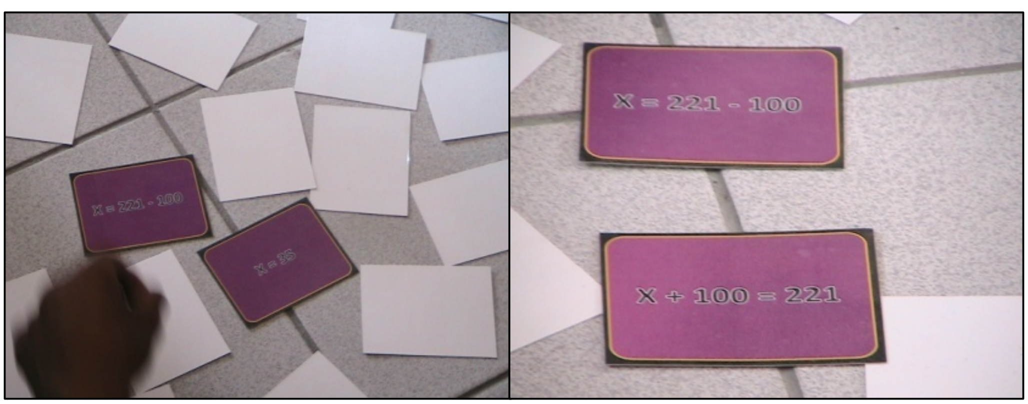


Figura 2. Alumnos resolviendo ecuaciones con el juego del Memorama

Cabe señalar que antes de iniciar el experimento se aplicó un examen exploratorio sobre los conocimientos previos al tema con la idea de homogenizar al grupo y partir, en la medida de lo posible, de una misma plataforma cognitiva. Por otro lado, se aplicó un examen del contenido matemático en cuestión antes y al final de la experiencia (pre- y post-test) con la intención de comparar sus resultados y tener otro parámetro de análisis. Esta prueba estuvo compuesta por una sección para resolverse de manera individual y, por congruencia con la instrucción, una sección para resolverse de manera cooperativa.

Resultados y discusión

En el examen diagnóstico se observó que los alumnos tienen serias deficiencias en el manejo de operaciones con números negativos y positivos. Así como en el manejo de las jerarquías de las operaciones y el uso de paréntesis. También se obtuvieron resultados deficientes en el manejo del lenguaje algebraico. Esto se evidenció en la dificultad que presentaron los alumnos al traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico. Siendo estos conocimientos básicos para poder abordar el tema de solución de ecuaciones, se decidió retomar estas ideas matemáticas por un par de sesiones para aclarar dudas antes de iniciar con el experimento.

En los resultados de la evaluación previa al experimento, se observó que en la resolución de problemas los alumnos obtuvieron mejores resultados individualmente que cuando resolvieron el examen de manera colaborativa. La interpretación que se hace es que probablemente los alumnos tenían algunas deficiencias para trabajar en colaborativamente.

Para abordar el tema de solución de ecuaciones de primer grado se organizaron a los alumnos en binas o en trinas, cada equipo contaba con su juego de la balanza. El juego fue un recurso que sirvió para ilustrar las propiedades de la igualdad y el algoritmo de resolución de las ecuaciones. Los alumnos trabajaron en esta práctica durante 5 sesiones, resolviendo ecuaciones con ayuda de la balanza. En estas sesiones se observó que los alumnos poco a poco fueron entendiendo el concepto de igualdad y sus propiedades, lo que los ayudo a ir resolviendo correctamente las ecuaciones que se les iban presentando. Al principio de esta fase, los alumnos se sintieron motivados y seguros pero conforme los alumnos iban dominando el algoritmo sentían que la balanza los atrasaba en la solución de las ecuaciones. Mientras que los alumnos que todavía tenían dificultades, se sentían más seguros y motivados usando la balanza. Durante estas sesiones se observó como la destreza, la rapidez y la asertividad con que los alumnos resolvieron las ecuaciones linearles aumentó. Esto coincide con lo que Marín (2003) reporta que el conocimiento construido mediante una interrelación entre contenidos conceptuales y procedimentales, confieran al aprendiz estructuras de conocimiento más flexibles, transferibles y duraderas (citado en Arrieta, Marín y Naiz, 2005). Esta interrelación permite al alumno a aprender de forma cíclica, ya que puede tantear, replantear, refinar, es suma, estas acciones se favorecieron con el juego de la Balanza, favoreciendo así que el alumno construya su propio conocimiento. Sin embargo, se requiere promover más interacciones que permitan al alumno sentirse tan cómodo y confiado de trabajar con números racionales cómo se siente con números enteros.

En la siguiente fase los alumnos interactuaron con un juego de Memorama de ecuaciones. Este juego consiste en pares de tarjetas que contienen ecuaciones que son equivalentes, o ecuaciones y su solución numérica. Las tarjetas se revuelven y se colocan sobre la mesa con las ecuaciones hacia abajo de tal manera que no se puedan ver las respuestas sino hasta que se les dé la vuelta. En su turno, el estudiante voltea dos tarjetas, si estas coinciden se queda con el par y voltea dos tarjetas más. Si las tarjeas no coinciden, se vuelven a colocar en su lugar con la ecuación hacia abajo, y pasa el turno al siguiente alumno. El objetivo es encontrar el mayor número de pares de tarjeta que tengan la respuesta correcta, por ejemplo, una tarjeta puede contener una ecuación y la otra su solución. Este juego permitió a los alumnos reafirmar algunos conceptos que todavía no tenían claros de las sesiones de trabajo anteriores o bien para fortalecer el tema en los alumnos más avanzados. Se observó que los alumnos trabajaron con gran entusiasmo durante esta actividad. Se formaron cinco equipos de 5 alumnos cada uno. De estos cinco equipos, cuatro lograron terminar exitosamente su actividad (identificar todas los pares de tarjetas). El quinto equipo se tomó más tiempo en completar la actividad, ya que no habían quedado claras las reglas del juego y algunos de sus miembros tenían deficiencias en la resolución de las ecuaciones. Al igual que el Origami en la investigación de Amaya y Gulfo (2009), el juego del Memorama es una herramienta amena que permitió repasar y fortalecer un contenido matemático previamente abordado.

En cuanto al trabajo cooperativo, en este estudio se observó que durante la colaboración los alumnos se ayudaron unos a otros, expusieron sus dudas y entre todos los miembros del grupo colaborativo trataron de encontrar las respuestas a esas dudas. Las acciones y actitudes de los alumnos dieron muestra de que también se desarrollaron valores como la solidaridad, la responsabilidad y el respeto. Esto se hizo aún más evidente, al tener un grupo colaborativo que no logró sobrellevar las diferencias entre sus integrantes. En este grupo, no se logró la responsabilidad individual ni la interdependencia positiva, prefiriendo trabajar de manera individual que colaborativa. Comparando los resultados de esta forma de trabajo, con modelos de aprendizaje tradicionales, este estudio coincide con lo reportado por Ormrod (2005), ya que se encontró que los estudiantes aprenden más cuando trabajan cooperativamente, recuerdan por más tiempo el contenido, desarrollan habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico y se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás.

En las entrevistas, los alumnos comentaron sobre su percepción hacia la matemática. La mayoría de los entrevistados mencionó que las matemáticas no les gustan o que les gusta pero les parece aburrida. Notoriamente, todos comentaron que el juego de la Balanza y del Memorama les gustaron mucho y que les ayudó a aclarar algunas dudas que tenían en cuanto al modo de resolver ecuaciones. En cuanto al trabajo colaborativo, los entrevistados comentaron que les agradó mucho trabajar en grupos, siempre y cuando sus compañeros sean responsables y se comporten bien. A la luz de estos comentarios se coincide con Garrido y Velásquez (2009), quienes declaran como uno de los resultados de su investigación, que las actividades lúdicas mejoran el entorno de aprendizaje y favorecen el trabajo cooperativo.

Una vez terminada le experiencia didáctica se aplicó nuevamente el examen de conocimientos, el cual contó con una parte de resolución individual y otra cooperativa. Se pudo observar un avance en los resultados y más aún en la sección colaborativa. También se notó una mejora en la aplicación del algoritmo de resolución de ecuaciones de primer grado pero una notable deficiencia cuando tenían que plantearla a partir de un contexto.

Conclusiones

A pesar de la heterogeneidad de los alumnos de Telesecundaria (edades diferentes y condiciones socioeconómicas del entorno), el aprendizaje cooperativo resultó ser una estrategia que favoreció el aprendizaje debido a la interacción entre iguales, la aceptación de normas y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y la comprensión de los propios errores. El juego de la Balanza dio lugar a un espacio que facilitó la construcción del aprendizaje sin mecanizaciones, enfatizando que las ecuaciones, al igual que en la balanza, tienen que conservar el equilibrio o la igualdad para encontrar la solución. Por lo que se concuerda con Chamoso et al (2004) quienes piensan que crear un ambiente lúdico que contribuya a despertar la curiosidad de los alumnos y les ayude a disfrutar de la alegría del descubrimiento, fomentará aprendizajes más duraderos y significativos, de esta manera, la Balanza se puede considerar un juego de conocimiento donde el alumno aprende de manera activa y creativa. Por su parte, el juego del Memorama llamó la atención de los estudiantes lo que provocó que se interesaran más por el tema, esta actividad requirió de esfuerzo, rigor, atención y memoria. Permitió fortalecer conceptos y procedimientos matemáticos para resolver las ecuaciones. Por lo que esta investigación ha permitido ver que el uso de juegos en la enseñanza de las Matemáticas puede ser un recurso efectivo siempre y cuando cumpla una función didáctica y que preferentemente pueda desarrollarse en un entorno de aprendizaje cooperativo.

Finalmente, aunque el juego de la Balanza y del Memorama cumplieron su cometido didáctico es importante resaltar la problemática sobre la deficiencia en el manejo de los números racionales y el planteamiento de ecuaciones a partir de un contexto. Por lo que se recomienda desarrollar propuestas didácticas en torno a estos temas que beneficien el aprendizaje del alumno.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. y Gulfo, J. (2009). De lo lúdico del origami al trabajo con funciones. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23,* 525-533. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, X., Marín, N. y Naiz, M. (2005). Condiciones de enseñanza para el aprendizaje de contenidos procedimentales. *Journal of Science Education, 6(*1), 28-31.

Arteaga Palomares, J. y Guzmán Hernández, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Revista de Educación Matemática, 17*(1), 33-53.

Cedillo, T. (2008). El aula de matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13*(36), 35-58.

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Martin, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *SUMA, 47,* 47-58.

García, O., Jiménez, E. y Flores, R. (2006). Un programa de apoyo para facilitar el aprendizaje de solución de problemas de suma y resta en alumnos de bajo rendimiento. *Educación Matemática, 18*(2). 95-122.

Gardner, M. (1995). *Carnaval matemático*. Colección el libro de bolsillo. Madrid: Alianza.

Garrido, Z. y Velásquez, A. (2009). El juego como estrategia de enseñanza aprendizaje de operaciones con conjuntos numéricos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23,*743-751. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, R. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas. *Educación Matemática, 17*(1), 107-128.

Guerrero, E. y Blanco, L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención de los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*(5), 1-15.

Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura*. Recuperado el 2 febrero del 2009 en http://www.oei.es/edumat.htm

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar. *Educación matemática, 17* (2).89-116.

Johnson, D. y Johnson, R. (1991). *Learning together and alone: cooperative, competitive and individualistic learning*. New Jersey: Prentice Hall.

Ormrod, E. (2005). *Aprendizaje Humano.* Madrid: Pearson-Prentice Hall.

EL JUEGO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL SUPERIOR: "CONJUTRIÁNGULO"

Juan José Díaz Perera, Cristina Antonia Lagunes Huerta, Myrna Delfina López Noriega, Santa del Carmen Herrera Sánchez
Universidad Autónoma del Carmen (México)
jjdiaz@pampano.unacar.mx, clagunes@pampano.unacar.mx, mdlopez@pampano.unacar.mx, sherrera@pampano.unacar.mx

Resumen. El presente trabajo describe el impacto del juego didáctico "Conjutriángulo" en el curso sello de Matemáticas I en la Universidad Autónoma del Carmen a nivel superior, como parte de las estrategias docentes para coadyuvar al aprendizaje. Conjuntríangulo aborda la notación y representación de los diagramas de Venn de manera lúdica. En la investigación se utilizó un diseño cuasiexperimental con pre test y pos test. De acuerdo a los resultados obtenidos se puede afirmar que existe diferencia estadística significativa entre las medias del aprendizaje alcanzado por los grupos (experimental y de control), favoreciendo al grupo experimental después de interactuar con el juego, lo cual indica que el uso de los juegos didácticos en el aula apoyan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, esta actividad rompe con los paradigmas del docente tradicional permitiendo cumplir con uno de los requisitos que el modelo educativo demanda.

Palabras clave: aprendizaje, matemáticas, juego didáctico

Abstract. This paper describes the impact of the educational game "Conjutriángulo" in the course Mathematics I at the Universidad Autónoma del Carmen at higher level, as part of teaching strategies to assist learning. Conjuntríangulo addresses the notation and representation of Venn diagrams in a playful way. The research used a quasi-experimental design with pre-test and post test. The results obtained suggest that there is significant statistical difference between the learning achieved means by the groups (experimental and control). These results favoring to experimental group after interacting with the game, which show the good use of teaching games as support the teaching and learning of mathematics. Moreover, this activity breaks the traditional educational paradigms, making possible an educational model requirement.

Key words: learning, mathematics, game teaching

Introducción

En la actualidad la educación matemática ha incorporado materiales didácticos en el aula como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de estos medios es el juego, debido a que despierta el interés y ganas de participar de los alumnos mediante actividades lúdicas. Las cuales además de ser divertidas trasladan a los alumnos sin darse cuenta a la compresión de algún tema en específico, que de otra manera serían complicadas y sin sentido para ellos.

La actividad lúdica se encuentra inmersa en la vida del ser humano, es por ello que se pretende que el alumno tras su paso por los diferentes niveles educativos al interactuar con el juego se apropie de los contenidos que incluye la programación de los cursos de matemáticas. La Secretaria de Educación Pública menciona que las actividades dentro del aula, además de ser motivadoras y significativas, deben ser planteadas en forma de juego para que puedan ser comprendidas por los alumnos con la finalidad de favorecer la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje (SEP, 1994).

Conceptualización del juego

El juego es considerado como "la actividad lúdica del ser sociable" (Piaget, 1990, p. 194). Sin embargo, también se puede definir como "aquel que permite tareas comunes que transforman la simple coexistencia en convivencia activa, donde se hace necesario sujetarse a unas normas, respetar el derecho ajeno, donde se aprende a ganar y a perder sin perder la compostura" (Aldrete, 1990, p.45).

Por otra parte Vygotsky (1979) señala que el juego se caracteriza fundamentalmente por dar inicio al comportamiento conceptual o guiados por ideas. Sin embargo se puede definir el juego como una actividad placentera cuyos participantes deben acatar las reglas para un mejor disfrute de la competencia.

Para tener una conceptualización más clara de lo que es el juego. A continuación se menciona una serie de características principales del juego según Gairín (1990):

- Un juego se dedica libremente.
- Un juego es un desafío contra una tarea o oponente.
- Un juego se controla por un conjunto de reglas.
- Un juego tiene una clara delimitación en el espacio y el tiempo.
- Un juego termina después de un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.

En la actualidad existen muchos juegos, desde aquellos manuales y de materiales accesibles, hasta aquellos en los que se utilizan las nuevas tecnologías.

Clasificación del juego

Piaget (1990) clasifica el juego distinguiendo el acto intelectual más por su finalidad que por su estructura, ya que el objetivo del acto intelectual es el de perseguir una meta y sin embargo el juego tiene su fin en sí mismo.

Juegos sensoriomotores o de ejercicio. Es este tipo de juego es por "asimilación pura", ya que se realiza por puro placer funcional obteniendo el placer a partir del dominio de las capacidades motoras.

Juegos simbólicos. En este tipo de juegos el niño adquiere la capacidad de codificar sus experiencias con símbolos, por lo que puede recordar imágenes de eventos.

Juegos de reglas. En estos juegos se propicia una mejora en el pensamiento reflexivo a la hora del razonamiento.

Echeverría y Silva (2010) clasifican al juego en dos tipos: i) Juego de conocimiento. En este tipo de juego se exige al jugador utilizar conceptos o fórmulas aprendidas. Cuando el participante empieza a jugar, tendrá que utilizar algún conocimiento como por ejemplo: una multiplicación, suma, entre otros. ii) Juego en primera persona. Este tipo pertenece a la clase de los videos juegos que se centra en la vista del jugador. Este tipo de juegos utiliza uno o más dispositivos de entrada como por ejemplo: el teclado, joystick, mouse, etc.

Si el juego y la matemática tienen muchas características similares desde sus inicios, entonces, la matemática también es considerada como juego solo basta probar que estos rasgos se encuentran presente en ella (Guzmán, 2001).

El juego y el aprendizaje

El juego de conocimiento se puede efectuar en tres niveles de aprendizajes (Gairín, 1990). *Al inicio del aprendizaje:* Se pretende que a través del juego el estudiante pueda asimilar un concepto, teniéndolo como única opción de aprendizaje.

Como recurso del aprendizaje: El juego es uno más de los medios que el profesor puede utilizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un tema. Se puede decir que el juego es un recurso de aprendizaje.

Como refuerzo del aprendizaje: Después de que los estudiantes han recibido la clase de una temática en particular, el juego es utilizado como refuerzo en lo asimilado. Por lo que el juego sirve para alcanzar un aprendizaje significativo.

En el aprendizaje por experiencia, el estudiante aprende mejor, ya que es vivencial, difiere a lo expuesto en el aula o en algún tema educativo, debido a la necesidad de experimentar con conceptos y contenidos tan directamente como sea posible para que el conocimiento pueda permanecer (Winn, 1998).

Según Echeverría y Silva (2010) este aprendizaje puede ser logrado si se:

- Incrementa la motivación interna por medio de una experiencia significativa en donde el estudiante tiene el control.
- Logra un enganche mental y físico con un apropiado número de desafíos y narraciones encaminados a una experiencia diferente de aprendizaje.
- Aprende experiencias dentro de un contexto social comprometiendo a la interacción grupal.

Deulofeu (2001) señala que el uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento– o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia– Nos interesan juegos que incidan en ambos aspectos, es decir, que generen situaciones problemáticas para cuyo abordaje sean necesarios conceptos y técnicas presentes en el currículo y, al mismo tiempo, su práctica promueva el descubrimiento y aplicación de estrategias. En este sentido, las prácticas educativas escolares centradas en juegos y matemáticas pueden servir tanto para generar entornos de resolución de problemas, cuyo objetivo es crear ambientes que inciten a pensar matemáticamente, como para generar situaciones problema que pertenecen al dominio de objetos matemáticos más generales.

Sin embargo, Valiño (2000) considera que el juego es como posibilitador de aprendizaje y estrategia de enseñanza.

Fírvida (2004) en su experiencia didáctica demostró que el juego había logrado significativos avances en aquellos adolescentes que se consideraban problemas o con otros niños con dificultades severas en algunas áreas, pasaban a moderados, de moderados a ligero o eran totalmente erradicados. Se logró principalmente el mejoramiento de la formación escolar, su sociabilidad, su creatividad, su aprendizaje y su satisfacción en la necesidad lúdica. Por otra parte se comprobó que el juego despertó el interés hacia otras disciplinas y desarrolló habilidades en los estudiantes para la creación de juegos relacionados con los temas de las asignaturas.

La Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR) se encuentra localizada en el estado de Campeche, México. La universidad tiene un modelo educativo centrado en el aprendizaje señalado en el Plan Faro U 2010, dicho modelo incide en los cuatro dominios del aprendizaje. Garibay (2002) menciona que son derivados de la propuesta de la UNESCO como pilares de la educación: 1) Saber conocer, 2) Saber hacer, 3) Saber ser y 4) Saber convivir. Esto es, en otras palabras conocimientos, habilidades, actitudes y relaciones, para lograr en los egresados un mejor desempeño en el ámbito laboral.

Con base a lo expuesto, en la UNACAR existe un programa sello de Matemáticas que se imparte en primer semestre a nivel superior, esto significa que todos los programas académicos lo contienen. Desde su implementación se ha tenido que vencer varios obstáculos, entre ellos el rechazo por parte de los alumnos en aquellos programas que tradicionalmente no contienen cursos de matemáticas como Derecho y Enfermería por mencionar algunos, además que provoca altos índices de reprobación, que en ocasiones con lleva a la deserción (Lagunes, 2003). De manera que la motivación que debe sentir el alumno ante la presentación de la información debe ser activa, para que intercambie opiniones, dudas e ideas, que despierte su interés por estudiar matemáticas. Sin embargo la capacitación docente juega un papel importante, ya que en el modelo educativo centrado en el aprendizaje, el docente debe romper con los paradigmas tradicionales de la enseñanza con gis y borrador por un rol de facilitador con apoyo de recursos didácticos. Ante esta situación, los docentes del Cuerpo Académico de Matemática Educativa se dan a la tarea de buscar y aplicar experiencias de aprendizaje que conlleven a un aprendizaje significativo. Debido al constante uso de los recursos didácticos en la educación matemática los docentes de la UNACAR han incorporados materiales didácticos en la programación del curso de matemáticas I, aunque el diseño y producción de estos recursos, en la mayoría de los casos casos son adaptaciones de materiales existentes o disponibles de diversas fuentes. Es por ello que en la UNACAR se emprendieron una serie de proyectos sobre el uso, diseño y elaboración de recursos didácticos dicho programa con la finalidad incorporar los productos en las experiencias de aprendizaje para fortalecer la trasmisión de conocimientos en los estudiantes de nuevo ingreso a nivel superior.

Por tal razón es pertinente señalar que la intención del proyecto de investigación es demostrar que el aprendizaje puede ser mayor con el uso de los medios didácticos en la clase de matemáticas, y en particular que el juego ayuda a reforzar los conocimientos previos obtenidos en el aula. Ya que con una experiencia docente no es suficiente para decir que hubo aprendizaje, por lo que es necesario probarlo.

Materiales y métodos

El *Conjutriángulo* es un material lúdico que fue creado por el Cuerpo Académico Matemática Educativa de la Universidad Autónoma del Carmen con la finalidad de apoyar en la obtención de conocimientos sobre la notación de conjuntos y representación de los diagramas de Venn. Este recurso didáctico se utilizó dentro de la segunda experiencia de aprendizaje del curso sello de matemáticas I, ya que en esta experiencia se aborda la temática de teoría de conjuntos.

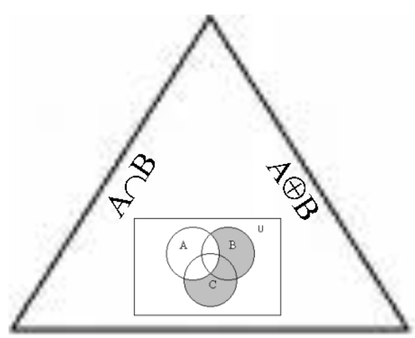


Figura 1. Pieza del conjutriángulo

El juego didáctico *Conjutriángulo* es un rompecabezas que permite relacionar diagramas de Venn con la notación de conjuntos, consta de 9 triángulos equiláteros semejantes al de la figura 1, su solución es un triángulo equilátero formado por las 9 piezas con solución única. Conjutriángulo se encuentra en la clasificación de juegos de conocimientos, ya que en este tipo de juegos los participantes necesitan de los conocimientos previos para poder jugarlo, además de que propicia el pensamiento reflexivo a la hora de armar el rompecabezas. El material puede ser utilizado con los alumnos de forma individual o en equipo dependiendo de la cantidad de material didáctico disponible.

El docente lo puede utilizar como refuerzo del aprendizaje, una vez que los alumnos hayan recibido la clase de diagramas de Venn, el juego es usado como refuerzo en los conceptos asimilado por los alumnos con el objetivo de alcanzar el aprendizaje significativo que demanda el modelo educativo centrado en el aprendizaje de la Universidad Autónoma del Carmen. El juego didáctico fue probado de manera preliminar por los docentes del Cuerpo Académico de Matemática Educativa durante cursos previos a fin de realizar las adecuaciones necesarias.

Para conocer si se genera aprendizaje a través del uso del juego didáctico en la clase de matemáticas I en la temática de teoría de conjuntos, se realizó un protocolo de investigación con la finalidad de probar si existe aprendizaje o no.

El estudio fue de tipo correlacional con diseño cuasiexperimental con pre test y pos test. Una de las razones por la que el diseño es cuasiexperimental es que se trabajo con grupos intactos, debido a que son grupos ya formados. Los alumnos que participaron en el estudio fueron de nuevo ingreso periodo Agosto- Diciembre 2008 de la Universidad Autónoma del Carmen que cursaban la materia de Matemáticas I a nivel superior, la muestra estuvo constituida por 32 alumnos, los cuales estaban distribuidos en dos grupos (experimental y de control). Dichos grupos fueron elegidos por conveniencia, por lo que el criterio de selección tomado por un lado fue la experiencia del profesor en la impartición del curso de matemáticas I bajo el modelo educativo centrado en el aprendizaje, y por otro lado, que el profesor ofreciera por lo menos dos grupos con finalidad de reducir algunas variables externas. Sin embargo no se hizo con una muestra más grande por limitaciones físicas y de tiempo. A continuación se muestra en la tabla 1 la distribución de los grupos.

Tabla 1: Distribución de alumnos de los grupos experimental y de control.

Grupos del tratamiento	
Grupo	N
Experimental	16
Control	16

Total 32

Con la finalidad de medir el aprendizaje de los alumnos sobre el manejo de los diagramas de Venn se diseñaron los instrumentos pre test y pos test para la recolección de datos. Estos instrumentos fueron pruebas objetivas de la temática de conjuntos (diagramas de Venn) cada prueba estuvo constituidas por 23 ítems cuya área de análisis fue la asociación de los diagramas con su expresión conjuntista. Para medir la confiabilidad del instrumento se piloteó con un grupo de 22 alumnos que tenía características similares a los grupos del experimento y se aplicó la fórmula Kr20 obteniendo un índice de confiabilidad moderada. Para su validez el instrumento fue sometido a una revisión con los maestros del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la UNACAR. Además se utilizó una encuesta de 23 ítems para evaluar el juego, el tipo de respuestas utilizadas fue la escala Liker tipo ordinal y las variables planteadas son afirmaciones sobre el grado de aceptación del recurso.

La experiencia con el uso del juego didáctico en la clase de matemáticas se desarrollo de la siguiente manera: i. Se aplicó el pre test a los grupos experimental y de control, para determinar la homogeneidad de los grupos antes del experimento. ii. Seguidamente se abordó la temática de diagramas de Venn en clases para el grupo experimental y el grupo de control. Finalmente se aplicó el pos test para conocer el aprendizaje de los alumnos después de la interacción con el recurso y si existe diferencias en el aprendizaje de los diagramas de Venn entre el grupo experimental y de control, así como la encuesta para valorar el juego didáctico.

Resultados

En este apartado se da a conocer el análisis e interpretación de la información recabadas por los instrumentos (pre y pos test) que miden el rendimiento académico de los alumnos antes y después del tratamiento.

Resultados de los grupos experimental y control en el pre test.

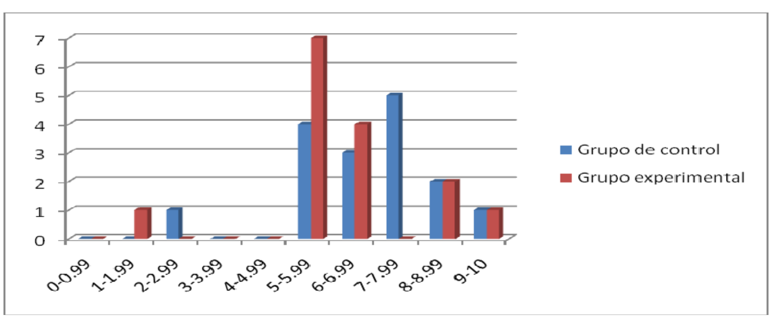


Figura 2. Distribución de calificaciones de los grupos en el Pre-test

En la Figura 1 se muestran los resultados obtenidos en el pre test por los alumnos del grupo experimental y de control. Se observa que las calificaciones mínimas de los grupos experimental y de control, se encuentran entre 1-3. Mientras que el 18.75% de los alumnos del grupo experimental y de control obtuvieron una calificación entre 8-10.

Para comprobar la homogeneidad de los grupos de control y experimental antes del tratamiento se aplicó la t de Student. Se obtuvo un estadístico t de 0.42552549 y valor crítico de 2.13144954 de una prueba de hipótesis de dos colas. Es por ello, que se acepta la hipótesis nula, esto indicó que no había diferencia estadísticamente significativa entre el grupo experimental y el grupo de control al inicio del tratamiento. Por tanto, se puede establecer que los dos grupos son semejantes en cuanto al conocimiento de los diagramas de Venn y su notación al inicio del cuasi-experimento.

Resultados de los grupos experimental y control en el pos test

En la Figura 2 se dan a conocer los resultados obtenidos en el pos test por los alumnos del grupo experimental y de control.

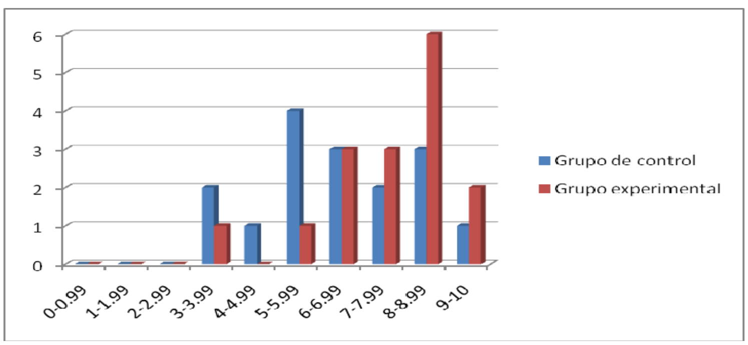


Figura 3. Distribución de calificaciones de los grupos de prueba en el Post-test

Se observa que las calificaciones mínimas de los grupos experimental y de control, se encuentran entre 3-4. Mientras que el 50% de los alumnos del grupo experimental obtuvieron calificaciones entre 8-10 por el 25% que obtuvo el grupo de control.

Con el propósito de determinar la diferencia entre el grupo experimental y el grupo de control al término del tratamiento se aplicó la Prueba t. Se obtuvo un estadístico t de -2.2 y valor crítico de 1.75305033 de una prueba de hipótesis de una cola. Este resultado pone en manifiesto que existe diferencia estadística significativa entre los dos grupos (experimental y de control), por lo que se pudo observar que el rendimiento académico de los dos grupos fueron diferentes al término del tratamiento.

Prueba de hipótesis

Es de gran relevancia señalar que la hipótesis nula (H_0): "No tienen mayor aprendizaje los alumnos del curso sello de Matemáticas I generación 2008 de la Universidad Autónoma del Carmen que utilizaron el juego como auxiliar didáctico en la temática de diagramas de Venn (grupo experimental) con respecto a los que no lo usaron (grupo control)" fue rechazada; y en consecuencia, la hipótesis de investigación (H_1): "Tienen mayor aprendizaje los alumnos del curso sello de Matemáticas I generación 2008 de la Universidad Autónoma del Carmen que utilizaron el juego como auxiliar didáctico en la temática de diagramas de Venn (grupo experimental) con respecto a los que no lo usaron (grupo control) " fue aceptada.

Estos resultados ponen en manifiesto que hubo mayor aprendizaje en el grupo experimental. Como se pudo observar, los dos grupos fueron diferentes en el grado de aprendizaje del tema de diagramas de Venn al término del tratamiento. Por tanto obtuvieron mejores calificaciones los alumnos que utilizaron el material didáctico con respecto a los que no lo usaron. Con respecto a la evaluación del recurso fue considerado como un material educativo que les permitió acceder a los conceptos de una manera diferente, resultando atractivo por su fácil manejo y divertido por sus características lúdicas. Contrastando con investigadores como Fírvida (2004) y Valiño (2000) se puede observar que los resultados fueron similares.

De acuerdo a los resultados de la encuesta sobre la evaluación del juego didáctico se presentan 3 ítems que son de gran relevancia.

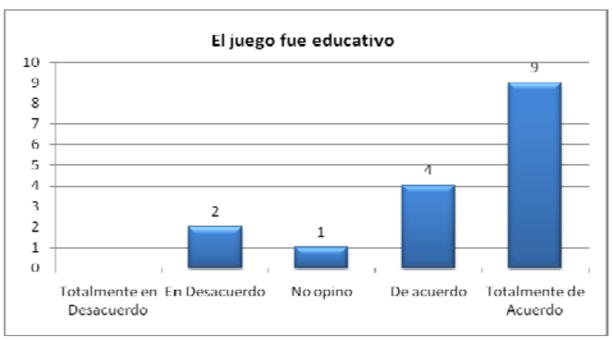


Figura 4

El 81% de los alumnos encuestados estuvieron de acuerdo y totalmente de acuerdo que "*el juego fue educativo*", mientras el 19% no opino o estuvo en desacuerdo.

Figura 5

Se puede observar que el 75% de los alumnos encuestados estuvieron de acuerdo y totalmente de acuerdo que "*el juego tiene relación con la temática abordada*", por otra parte el 18.75% no opino y solo 6.25% estuvo en desacuerdo.

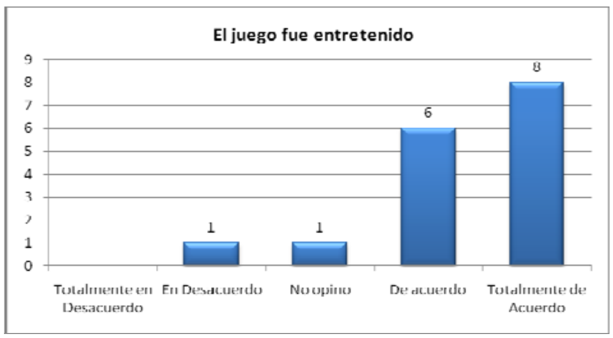


Figura 6

El 87.5 de los alumnos encuestados estuvieron de acuerdo y totalmente que "*el juego fue entretenido*", mientras el 12.5% no opino y estuvo en desacuerdo.

Conclusiones

Existe diferencia estadística significativa entre en el aprendizaje de la temática de diagramas de Venn de los alumnos que usaron el ***Conjutriángulo*** con respecto a los que no lo usaron, favoreciendo a los alumnos del grupo experimental.

En cuanto a la evaluación del material como recurso didáctico fue considerado por los alumnos como divertido, educativo y atractivo.

Se ha observado que muchas de las dificultades que los alumnos tienen con el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas a la falta de comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, si queremos rediseñar los cursos de matemáticas, debemos investigar la naturaleza y magnitud de estas dificultades, buscar nuevos recursos didácticos que apoyen al proceso de aprendizaje por parte de los alumnos.

El material fomenta la participación e interés de los estudiantes, por medio de juegos con riqueza educativa. Este modelo didáctico fue aceptado por los alumnos, aunque la primera impresión para ellos era solo pasatiempo.

En el momento que los alumnos formaron equipos y comienzan la interacción con el recurso se despertó el interés por llegar a la solución, favoreciéndose el intercambio de ideas y propuestas de armado.

Es importante diseñar estrategias de enseñanzas en el aula con juegos didácticos que sean congruentes con los objetivos del programa.

El uso de juegos didácticos en el aula rompe con los paradigmas tradicionales de la educación matemática a nivel superior, permitiendo la creación de ambientes enriquecidos y el fomento de la participación activa de los alumnos de los programas educativos como Derecho y Enfermería.

En base, a la aceptación del modelo se hicieron otras versiones con un grado de dificultad mayor, dadas las múltiples combinaciones con las piezas, tanta fue la aceptación que se presentó en el Maratón de Matemáticas I celebrado en diciembre del 2008 en la Universidad Autónoma del Carmen por el cuerpo académico de matemática Educativa.

En la actualidad, se implementa el juego en modalidad virtual, que consiste en armar una serie de rompecabezas para fortalecer el aprendizaje de los diagramas de Venn.

Para futuras investigaciones con el uso de este juego sería recomendable que utilizaran una muestra más grande y más rompecabezas.

Referencias bibliográficas

Aldrete, R. (1990). *Para educar mejor*. México: Minos

Deulofeu, J. (2001). *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta.

Echeverría, V. y Silva, F. (2010). *Diseño e implementación de un juego matemático de disparos en 3d y análisis de los dispositivos interacción en 2d y 3d*. Tesis de Licenciatura no publicada. Escuela Nacional Politécnica del Litoral. Guayaquil, Ecuador.

Fírvida, C. (2004). *El "Aula de Lúdica" dentro del Currículo de la enseñanza media*. Recuperado el 15 de julio de 2010 de http://www.ilustrados.com/publicaciones/ EEFlFZlFlZTkrDShzx.php

Gairín, J. (1990). *Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 5 de julio de 2010 de http://www.ddd.uab.cat

Garibay, B. (2002). *Experiencias de Aprendizaje.* México: Universidad Autónoma del Carmen.

Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma* (19), 5-19.

Lagunes, C. A. (2003). *Un modelo de aprendizaje de las matemáticas, la evaluación de actividades sobre variación lineal del proyecto EMAT en alumnos a nivel superior en la UNACAR*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México.

Piaget, J. (1990). *La formación del símbolo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

SEP (1994). *"Presentación" y "Qué y cómo usar. Juega y aprende matemáticas", en juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula*. México: SEP.

Valiño, G. (2000). La relación Juego y Escuela: aportes teóricos para su comprensión y promoción. *Revista Conceptos* (2), 77.

Vygotsky, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Winn, W. (1998). *Aprendizaje de la World Wide Web*. Recuperado el 10 de enero de 2008, de http://faculty.washintong.edu/billwinn/uga.htm

UN ACERCAMIENTO A LAS FRACCIONES POR MEDIO DE LA MÚSICA: UN PROBLEMA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Luis Alexander Conde Solano
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
alconde23@hotmail.com

Resumen. Publicaciones actuales dejan ver el interés de los investigadores para que se aprovechen las relaciones existentes entre las matemáticas y la música en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el libro de texto de sexto grado de educación básica primaria de México (SEP, 2000), se retoma esta iniciativa y presenta la lección seis: "Matemáticas y música". En ella se proponen actividades que involucran el uso de los números fraccionarios relacionadas con las figuras musicales. En el marco de la 24va Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa se desea presentar el análisis de la lección antes mencionada, con el objetivo de exponer elementos importantes para vincular eficazmente la música en la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: relaciones, fracciones, figuras musicales

Abstract. Current publications reveal the interest of researchers to exploit the existing relations between mathematics and music in the teaching and learning of mathematics. In the textbook used in sixth grade elementary school in Mexico (SEP, 2000), authors take the initiative and present in lesson six: "Mathematics and music". It proposes activities involving the use of fractional numbers related to the musical figures. As part of the 24th Latin American Meeting of Mathematics Education we want to present the analysis of the lesson above, in order to expose important elements to effectively link the music in the teaching of mathematics.

Key words: relations, fractions, musical figures

Introducción y justificación teórica

Actualmente las relaciones entre las matemáticas y la música en el entorno escolar están en un proceso de construcción. Investigadores como Peralta (2003) y Benson (2007) estudian la naturaleza del sonido, la música y sus relaciones con las matemáticas para luego utilizarlos como material de enseñanza en sus clases de matemáticas. Por otra parte Tulga (2008) se ha enfocado en aprovechar los vínculos matemático-musicales para crear material interactivo con el propósito de acercar a los jóvenes a este tipo de conocimiento.

Particularmente, Liern (2008) expone las relaciones entre las fracciones y algunos elementos musicales como un tema interesante que le ofrece al maestro argumentos para una posible enseñanza del tema. Conde (2009) realiza una investigación cuyo resultado es una propuesta didáctica de carácter interdisciplinario con una visión integradora de contenidos desde tres disciplinas (matemáticas, música y física) del currículo escolar.

Consideraciones iniciales

La lección seis comprende las páginas 20 y 21 del libro de texto de sexto grado de primaria de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2000). Respecto a ésta la lección *Mi ayudante* propone la lista de contenidos ordenados por ejes temáticos que con ella se estudian. Por mencionar algunos:

> …resolución de problemas que involucren el concepto de fracción; equivalencia entre fracciones y resolución de problemas de equivalencia entre fracciones; las fracciones como resultado de fraccionamiento de longitudes, áreas o volúmenes… (SEP, 2000, p. 20)

En *Mi ayudante* también se incluyen habilidades y acciones que se espera sean desarrolladas por el estudiante cuando estudie la lección. De acuerdo con el libro para el maestro (SEP, 2003) se espera que con la realización de la lección los alumnos enfrenten situaciones didácticas significativas que les permitan: Comprender y manejar las fracciones con diferentes significados: medida, cociente y razón y resolver problemas sencillos que impliquen las operaciones de adición o sustracción de fracciones. Propósito que coincide con el objetivo planteado en el libro de texto (SEP, 2000) para el estudiante: *La comparación, equivalencia y suma de fracciones.*

Sobre metodología de análisis

La metodología de análisis consistió en una revisión detallada de la viabilidad del discurso expuesto en la lección, la corrección de los enunciados de los conceptos, descripción de las representaciones de los objetos matemáticos y musicales así como de sus significados asociados. También se revisan y se contemplan los materiales complementarios propuestos por la SEP para el estudio de la lección. Específicamente las recomendaciones didácticas que ofrece *Mi ayudante*, que consiste en un auxiliar didáctico para el maestro de primaria elaborado por la Universidad Pedagógica Nacional (2005) en colaboración con la Sociedad Matemática Mexicana, al igual que el libro para el maestro (SEP, 2003), que ofrece una guía para orientar el desarrollo de las actividades propuestas por el libro de texto de los estudiantes.

Un primer conflicto que muestra la puesta en marcha de esta lección se refiere a su propio diseño. En él se observa limitaciones que impide un acercamiento a la comprensión de las relaciones conceptuales entre los números fraccionarios y las figuras musicales. Un factor apunta a que carece de una experiencia acompañada de sonido para tener un tratamiento significativo en cada contexto. Otro factor indica el uso impreciso del lenguaje para caracterizar los objetos de estudio (de la música y las matemáticas), lo que dificulta la interpretación adecuada por parte de los maestros y los estudiantes. En los párrafos siguientes se llevará a cabo un análisis más detallado al respecto.

Análisis de la lección

El análisis se realizó por partes, cada una de ellas está ilustrada por la imagen original de la parte de la lección en tratamiento. A continuación se presenta el análisis de la lección, por un lado desde la perspectiva de la música y por otro desde la perspectiva de la matemática escolar.

Introducción de la lección

La Figura 1 contiene la introducción de la lección en el libro de texto de sexto grado. En la primera línea aparece una definición de nota musical, misma que tiene un error, ya que se confunde símbolos con notas musicales. Los símbolos se refieren a la representación gráfica de las figuras musicales (redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa) que nos indican el tiempo de duración de los sonidos. Cada figura musical tiene asignado un silencio que representa la misma duración de ausencia de sonido, que al igual que las figuras musicales sin ellos sería imposible la escritura y la interpretación de una partitura. Por su parte, las notas sirven para expresar la altura o tono de un sonido que permite decir que un sonido musical corresponde a cierta frecuencia. Cuando las figuras musicales son ubicadas en el pentagrama, surgen dos interpretaciones, la duración del sonido y la frecuencia de sonido que pueden ser graves o agudas.

Figura 1. Introducción de la lección seis, (SEP, 2000)

El elemento esencial de la música es el sonido lo que se tiene en cuenta en la definición que se da en la lección. Sin embargo, haría falta proponer experimentaciones físicas del sonido por medio de las cuales los estudiantes puedan percibir e identificar sus características para dar un significado real de lo que se está hablando. Particularmente las figuras musicales hacen referencia al tiempo de duración de sonido o tiempo de duración de ausencia de sonido. En este escenario se trata de un medio continuo y el papel de las figuras musicales es discretizar éste medio. Por tal motivo, cuando se dice que la blanca es la mitad del tiempo de duración de la redonda lo que quiere decir es que tiene una medida de dos pulsos ya que la medida de la redonda corresponde a cuatro pulsos en el tiempo musical.

Al definirse la redonda como la unidad de duración, surgen inquietudes como: ¿por qué se toma como la unidad?, ¿a qué se refiere con duración?, ¿cómo se determina la duración?, ¿cómo se mide la unidad? como consecuencia la falta de claridad respecto a la identificación y medida de la unidad puede generar dificultades para los estudiantes cuando se les pide que encuentren la fracción de ésta, pues no se va a tener claro con respecto a qué se debe hacer la equipartición.

Por ejemplo, si remplazamos las figuras musicales (inciso a) de la Figura 2 por otras figuras (inciso b) de la Figura 2, el desarrollo de la lección sin lugar a dudas tendría la misma marcha dado que no se enfatiza en la medida del tiempo de duración de un sonido. Se da por hecho que cada signo está dotado de un significado y que a partir de éste se construye una estructura rítmica.

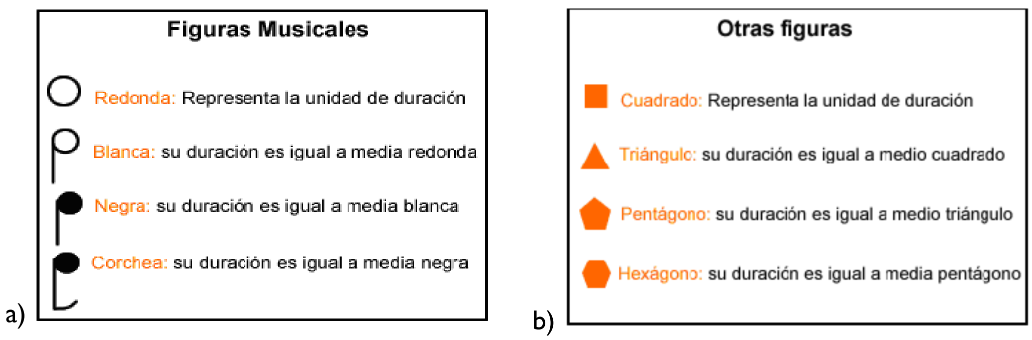
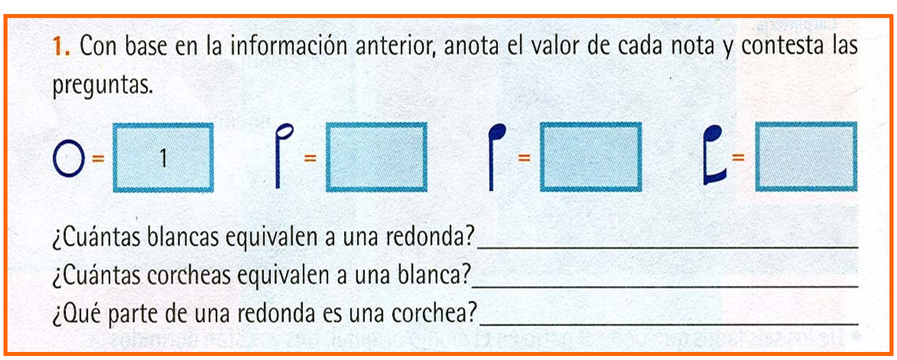


Figura 2. Ejemplo del significado de los signos

Si no se aclara la propiedad de construcción de las figuras musicales ¿cómo el estudiante puede determinar la mitad de la redonda? Es relevante aclarar que no se trata simplemente de un valor numérico como se observa en el inciso b) de la Figura 2.

Comentarios sobre el análisis de los ejercicios de equivalencia



1. Con base en la información anterior, anota el valor de cada nota y contesta las preguntas.

= 1   =   =   =

¿Cuántas blancas equivalen a una redonda?__________
¿Cuántas corcheas equivalen a una blanca?__________
¿Qué parte de una redonda es una corchea?__________

Figura 3. Inciso 1 de la lección 6 del libro de texto de sexto grado, (SEP, 2000)

El inciso 1 de la lección (Figura 3) es un ejercicio sobre equivalencia de fracciones en el que se espera que los estudiantes usen la información dada en la introducción (Figura 1) para completar los espacios. Los estudiantes al observar la información pueden escribir las respuestas dentro de cada recuadro dándole valores a cada signo sin mayor dificultad, ver la Figura 4.

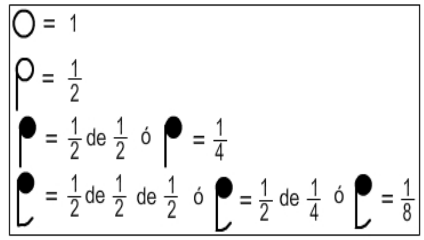


Figura 4. Posibles respuestas

De estas posibles respuestas se puede observar que los estudiantes no le están dando un significado musical a los signos y por ende el acercamiento de la música a las matemáticas no se percibe. También se podría preguntar qué representan los números 1, 1/2, 1/4 y 1/8.

Con relación a las preguntas del inciso 1, Figura 3, ¿cuántas blancas equivalen a una redonda? y ¿cuántas corcheas equivalen a una blanca? estas se pueden resolver con procesos mecánicos ya que el estudiante carece de herramientas para determinar la medida del tiempo de duración de un sonido. La pregunta ¿qué parte de una redonda es una corchea? puede ser ambigua, dado que cuando les piden a los estudiantes hallar una parte de algo, ellos tienden a partir la figura y ¿cómo partir la redonda para que me de una figura igual a la corchea? Las sugerencias que el libro del maestro SEP (2003) da para realizar esta actividad son:

> Esta actividad es relativamente sencilla, pues una vez identificado el valor de la unidad (la nota redonda), se puede deducir el valor de las demás notas. Las preguntas que se plantean enseguida tienen la finalidad de que los alumnos reafirmen esos valores y establezcan relaciones entre ellos (p. 28).

Estas sugerencias parecen indicar al maestro que si a las figuras se les asigna un valor numérico, los estudiantes podrán establecer relaciones de equivalencia con significado en el contexto musical. Sin embargo, el estudiante no puede dar significado a las equivalencias entre las figuras musicales sólo con el valor numérico pues se necesita del sonido para poderles dar una interpretación adecuada. Posiblemente para responder las preguntas del inciso citado se requiera de la representación gráfica de fracciones o alguna forma de visualización para que el estudiante pueda comprender lo que está haciendo.

Comentarios del análisis de los ejercicios de descomposición de fracciones

En el inciso 2 de la lección que se muestra en la Figura 5, se introduce un nuevo concepto musical: Compás. En el libro del maestro, se observa que se da un procedimiento numérico tratando de aplicar la suma y la equivalencia entre fracciones para expresar cierta fracción propuesta llamada compás en términos de otras. En el inciso 2 aparecen dos ideas básicas descritas a continuación:

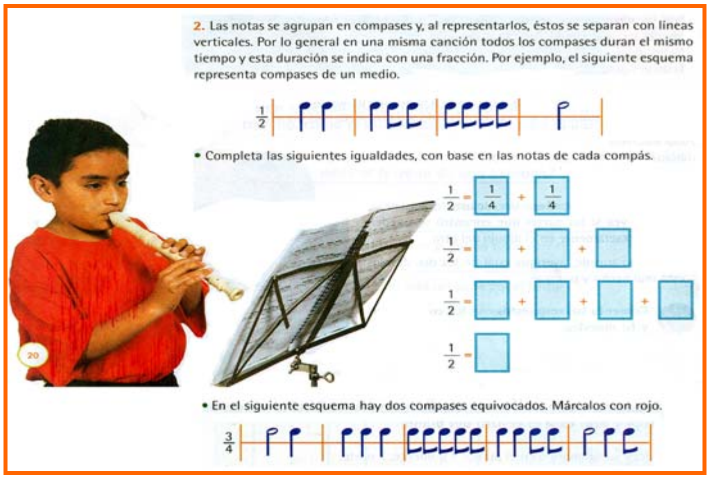
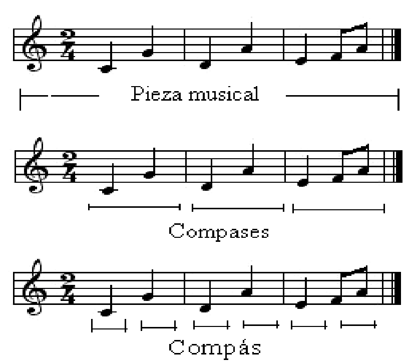


Figura 5. Inciso 2 de la lección 6 del libro de texto de sexto grado

El compás como agrupación de figuras y la representación en la línea de tiempo

Es importante tener en cuenta que cuando se trata de una partitura, ésta es considerada como el todo y los compases son equiparticiones de ella. A continuación se representa un ejemplo para ilustrar su significado teniendo en cuenta la ilustración de la derecha.

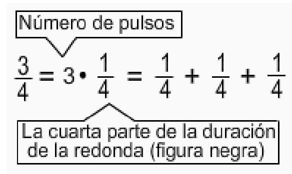
- Se parte de la pieza musical aunque para la explicación con un fragmento es suficiente.
- La pieza musical se divide en partes llamadas compases que cumplen con la característica de partes con igual tiempo de duración.
- A la vez, cada compás está dividido en tiempos iguales fijado con una figura como unidad de medida expresada en la fracción colocada al principio del pentagrama.



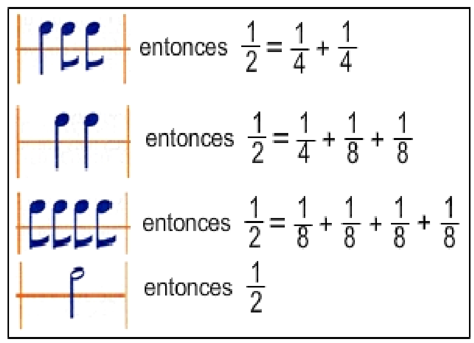
Como se puede observar la medida del compás se centra en la figura que se toma como unidad de medida que a la vez es una partición de la figura de mayor duración (redonda) llamada unidad.

La fracción que indica el compás

Esta fracción ubicada al inicio del pentagrama significa que el numerador representa el número de tiempos que tendrá el compás y la fracción 1/n indica la unidad de tiempo de duración, es decir, la figura que llenará un tiempo o pulso del compás. Por ejemplo, en la imagen de la derecha el compás de 3/4, el 3 indica que cada compás tendrá tres pulsos o tiempos, y la fracción 1/4 indica la unidad de tiempo, en este caso la cuarta parte del tiempo de duración de una redonda, por la tanto la figura negra será la unidad de medida.



En el ejercicio de la primera viñeta del inciso 2, ver Figura 5, se le pide al estudiante llenar los recuadros con fracciones para establecer equivalencias entre ellas, lo que resulta un ejercicio conveniente como una actividad rutinaria para mecanizar una operación aritmética. Al parecer en este ejercicio el estudiante debía observar cada compás y que cada uno de ellos correspondía a una igualdad, es decir, se espera que el alumno complete de la manera como se muestra en la imagen de la derecha.



En el ejercicio de la segunda viñeta del inciso 2 (Figura 5) se pide marcar con rojo compases equivocados. Aquí existirían varias formas de desarrollar el ejercicio, una de ellas sería sumar los valores de las figuras de cada compás y compararlo con 3/4, en este caso se enfrentaría a los estudiantes con sumas de fracciones con diferente denominador, situación que en sexto grado se espera los estudiantes dominen.

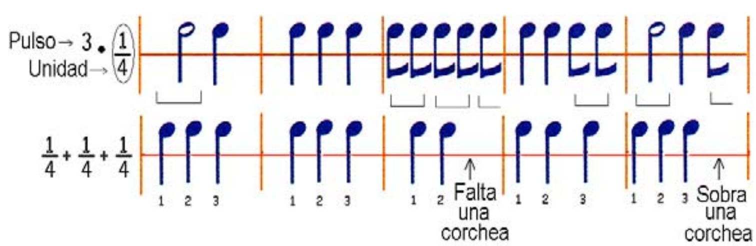


Figura 6. Solución con significado de compás

No obstante, si se diera el significado de la fracción que indica el compás se puede comenzar por identificar la unidad, que es la cuarta parte de la duración de la redonda siendo la figura negra o duraciones equivalentes como dos corcheas y el número de pulsos que posee el compás, en este caso 3 pulsos, es decir, que el patrón rítmico está agrupado en 3 pulsaciones como se observa en la Figura 6.

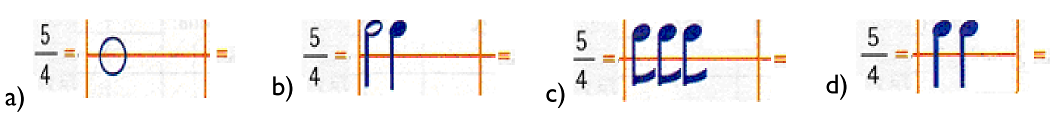
El inciso 3 de la lección 6 del libro de sexto grado, ver Figura 7 consiste en completar el compás ya teniendo algunas figuras fijas en cada uno. Al parecer se espera que la solución se construya por medio de la suma de fracciones teniendo en cuenta el valor de las figuras fijas. La solución se construye sumando a los valores de las figuras fijas los valores fraccionarios faltantes.

Figura 7. Inciso 3 de la lección 6 del libro (SEP, 2000)

Por ejemplo: para el primer compás la redonda como es la unidad se expresa 4/4 faltaría una figura negra o dos corcheas cuyo valor sea 1/4 para completar los 5/4. Para resolver los demás ejercicios se usa el mismo método.

Desde el punto de vista de la música, en el inciso 3 de la lección se presenta una clase de compás complejo llamado amalgama, debido a que el compás de 5/4 es el resultado de la fusión de dos o más compases simples o compuestos, uno de 3/4 y otro de 2/4. El compás 5/4 es poco apropiado para iniciar a los estudiantes en el campo de la música por su compleja estructura e interpretación.

En el primer ejercicio del inciso 3 (Figura 7) se pide completar el ejercicio de tal forma que se cumpla la igualdad teniendo en cuenta las figuras de cada compás. Al parecer las posibles respuestas deben salir de los compases ya construidos y para realizarlo los estudiantes deben interpretar el valor de las figuras como se pude ver en la Figura 8



$\frac{5}{4}=\frac{4}{4}+\dots\dots\dots$.

$\frac{5}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots\dots$.

$\frac{5}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots\dots\dots$.

$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\dots\dots\dots$.

Figura 8. Interpretación de la primera viñeta del inciso 3

El segundo ejercicio del inciso 3 (Figura 7) consiste en aplicar las técnicas que se usaron para resolver el primer ejercicio del mismo inciso 3, pero ahora se debe completar un compás de 9/8 y establecer las igualdades correspondientes.

Consideraciones generales

Se encontró que la lección carece de la identificación de la unidad de medida del compás y su significado, esta situación genera confusión en los estudiantes al no identificar plenamente la unidad de medida con la cual se trabaja en cada momento.

Las deficiencias conceptuales y el diseño metodológico de la lección permitieron valorar que el tema es más complejo de lo que parece, pues el engranaje entre conceptos como el tiempo y el sonido son necesarios en la significación en el contexto musical. Por lo tanto se hace necesario trabajar en la elaboración de experiencias didácticas innovadoras que le permitan al estudiante construir las relaciones entre la música y las fracciones e incorporar objetos matemáticos con significado en un contexto determinado, así como se pretende en el Plan de Estudios de Educación Básica Primaria (SEP, 2009).

Referencias bibliográficas

Benson, D. (2006). *Music: a Mathematical Offering*. Cambridge: Cambridge University Press.

Conde, A. (2009). *Las fracciones al ritmo de la música*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Liern, V. (2008). La música y el número siete. Historia de la relación controvertida. *Revista Suma*, 58, 137-143.

Perata, J. (2003). Matemáticas para no desafinar. *LA GACETA DE LA RSME*, 6.2, 437 - 456.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Libro de texto de sexto grado de matemáticas* México, DF: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2003). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Grado Sexto* México, DF: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2009). *Plan de Estudios de Educación Básica Primaria.* México, DF: Autor.

Tulga, P. (2008). *Music Activities and Arts Integration Lessons*. Recuperado el 27 de agosto de 2008, de http://www.philtulga.com/resources.html

Universidad Pedagógica Nacional. (2005). *Mi ayudante*. Recuperado el 21 de enero de 2009, de http://miayudante.upn.mx/

OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA, RELACIONADOS CON LA TRADUCCIÓN ENTRE CÓDIGOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO, EN EL NIVEL LICENCIATURA

Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara (México)
marisolradillo@yahoo.com.mx

Resumen. Se reportan los resultados parciales de una investigación exploratoria cuyo objetivo fue identificar las dificultades relacionadas con el uso del lenguaje matemático en la resolución de problemas de Geometría Euclideana, que enfrentan los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Guadalajara, México. La metodología se centra en una descripción lingüística de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la solución de diversos tipos de problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas como registros objetivos de su actividad cognitiva. Los errores detectados se clasificaron en relación a los procesos de traducción entre los diferentes códigos del lenguaje matemático. Se comentan algunos errores y se expone el análisis utilizado para su clasificación.

Palabras clave: lenguaje matemático análisis de errores, resolución de problemas, geometría

Abstract. In this article partial results are reported from an exploratory research project aimed at identifying the difficulties faced by students of University of Guadalajara when solving problems of Euclidian Geometry, connected with the mathematic language. The methodology focuses in a linguistic description of the kind of text that corresponds to the solution of a specific problem, and the student's responses considered like objective registration of their cognitive activity. The student's errors were classified in the relation with translate processes between the codes of mathematic language. In this paper we include some errors and expose them to the linguistic analysis for its classification.

Key words: mathematics' language, error analysis, problem solving, geometry

Introducción

Aprender matemáticas es sinónimo de resolver problemas; aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los distintos códigos del lenguaje matemático (verbal, simbólico, gráfico, numérico, etc.) que se requieren para operar con los objetos matemáticos y expresar las relaciones entre ellos. Si un problema matemático es expresado en forma verbal, el estudiante debe comprender la formulación que está expresada, no en el lenguaje cotidiano, sino en un *lenguaje especializado* de las matemáticas, ya que los significados de los términos empleados en este ámbito pueden diferir de sus acepciones en el lenguaje cotidiano (Pimm, 1999; Ortiz, Batanero & Serrano, 2001; Alcalá, 2002; Ardila, 2002; Palencia & Talavera, 2004).

El lenguaje utilizado en los textos y cursos de geometría euclideana suele ser poco familiar para los estudiantes, de manera que un error en la interpretación del planteamiento de un problema puede conducir a una solución equivocada o incompleta. De este tipo de situaciones surgió el interés de brindar mayor atención al lenguaje empleado en la formulación y resolución de todas las actividades didácticas, así como investigar hasta dónde influye el desconocimiento del lenguaje matemático en los errores que cometen los estudiantes geometría euclideana del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México (Radillo, 2009).

El término *obstáculo* se utiliza como sinónimo de *dificultad*, mientras que un *problema* es una cuestión por resolver. Los *errores* son considerados solamente como transgresiones a las normas establecidas. La *representación* de objetos y enunciados matemáticos se aborda desde un punto de vista lingüístico.

Soporte teórico-metodológico

El soporte teórico fue construido desde la lingüística, la lógica teórica y la axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la resolución de cada problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema. Este enfoque difiere respecto a la manera tradicional de proceder en la Matemática Educativa, pero no se contrapone a ella, sino que solamente plantea otra clase de pregunta de investigación: ¿Cuáles son los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclideana que enfrentan los estudiantes del CUCEI?

Para contestar esta pregunta se parte del supuesto de que los *errores* en la solución de problemas de la geometría euclideana se clasifican en tres tipos, no excluyentes entre sí:

(a) de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas; (b) deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado; (c) axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema. El primer tipo de error corresponde al factor lingüístico y los dos últimos a las características esenciales de la materia. Cada tipo de error puede tener consecuencias en los otros dos.

La clasificación de los errores de representación requirió establecer los códigos que rigen las formas de representación más comunes de la geometría euclideana:

- *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en palabras, ya sea de manera oral o escrita. En este caso se utiliza el Español Especializado de la geometría euclideana (EE).
- *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM).

- *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF).

Las tres formas de representación y los *procesos de traducción* entre ellas se muestran en la figura 1. La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en la resolución de problemas de la geometría euclideana. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere un *proceso de traducción* de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

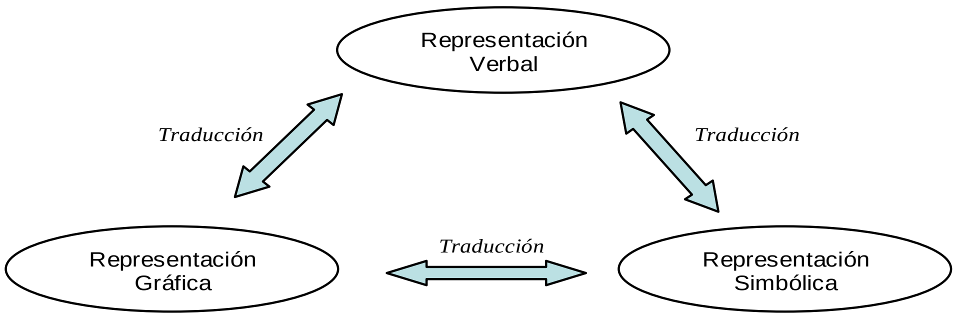


Figura 1. Formas de representación de los objetos y enunciados matemáticos y los procesos de traducción entre ellas.

Los códigos del lenguaje matemático

A cada forma de representación corresponde un *código* o conjunto de normas que la rigen. Algunas normas no son universales, pues difieren de acuerdo al grupo social que las utiliza, lo que en lingüística se denomina *variantes dialectales*. Por ejemplo:

- La notación simbólica para la magnitud de un segmento se puede encontrar como AB ó $|\overline{\mathrm{AB}}|$, mientras que un rayo o semirrecta puede simbolizarse como $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}}$, ó $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, en diferentes textos.
- En algunas instituciones se define el triángulo isósceles como aquel que tiene *solo* dos lados de igual longitud, mientras que en otras se considera que este tipo de triángulo contiene *al menos* dos lados iguales y por tanto el triángulo equilátero también es isósceles.
- El código gráfico es aún más laxo que los anteriores y prueba de ello son las diversas maneras de representar una recta, como se muestra en la figura 2.

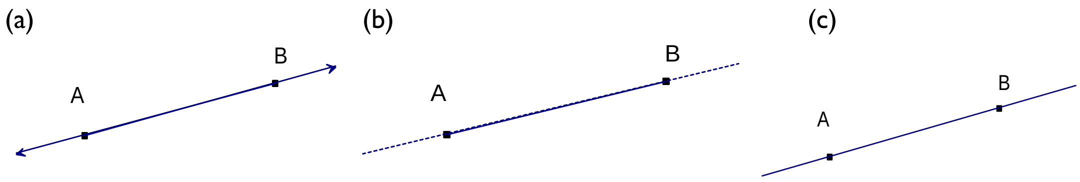


Figura 2. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

A diferencia de los códigos verbal y simbólico, el código gráfico no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (*n*-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden agruparse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a "combinaciones" de elementos tales como puntos, líneas rectas o partes de ellas, ángulos, polígonos, circunferencias, etc.

Para efectos de la investigación se construyeron los códigos de cada forma de representación de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI y a las partes de la Lingüística aplicables al lenguaje matemático: sintaxis, léxico y morfología (Leal, 2000). Una vez que se hubo explicitado cada código fue posible analizar las respuestas de los estudiantes y determinar si se quebrantaba alguna regla determinada. Por ejemplo, en CUCEI se especifica claramente la diferencia entre las notaciones de una recta ($\overleftrightarrow{AB}$), un rayo ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$), un segmento ($\overline{AB}$) y/o la magnitud de un segmento (AB), de manera que si un alumno denota un rayo como $\overrightarrow{\mathrm{B}}$, se considera como un error de sintaxis ya que quebranta una norma institucional. Pero si el enunciado del problema involucra una recta y el estudiante la simboliza como $\overline{AB}$, el error es considerado de traducción entre el código verbal y el simbólico (VERB → SIM), ya que lo que se tradujo a símbolos es "segmento", en lugar de "recta".

Procesos de traducción entre códigos

En una primera fase de la investigación, a 4 semanas del inicio del curso, se aplicó un cuestionario con ejercicios de traducción entre códigos. En el análisis de las respuestas se detectaron algunos términos código verbal que condensan mucha información y cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un *obstáculo* para los estudiantes.

Tal es el caso de la representación simbólica del término "mediatriz de un segmento", pues es necesario expresar que existe una recta (la mediatriz) perpendicular a un segmento ($\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$) y que lo divide en dos partes iguales ($AM = MB$). También es importante simbolizar cuál es el punto de intersección, lo cual se puede hacer de diversas maneras: $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB} = M$, ó $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ en M , o con dos enunciados de pertenencia: $M \in \overleftrightarrow{MN}$, $M \in \overline{AB}$. Solamente de esta manera, las traducciones EE → SIM y SIM → EE darán el mismo resultado de traducción en ambas direcciones (figura 3).

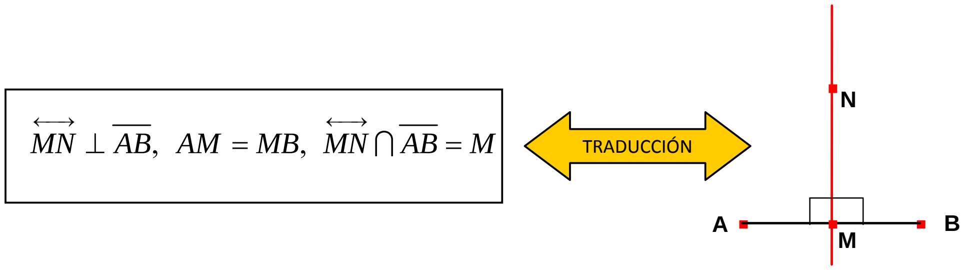


Figura 3. Al planteamiento simbólico dado corresponde la representación gráfica de la mediatriz de un segmento, y viceversa. SIM → GRAF, GRAF → SIM

Si faltase alguna de estas tres expresiones simbólicas, su traducción a gráfica o a enunciado verbal podría ser diferente; esto significa que las funciones de mapeo entre los códigos del lenguaje matemático no siempre son unívocas, como se expone a continuación. En la notación simbólica que aparece en la figura 4 se omite que M es el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento; por tanto hay más de un esquema que le corresponde a la traducción, puesto que en ambos casos se cumple la condición AM = MB.

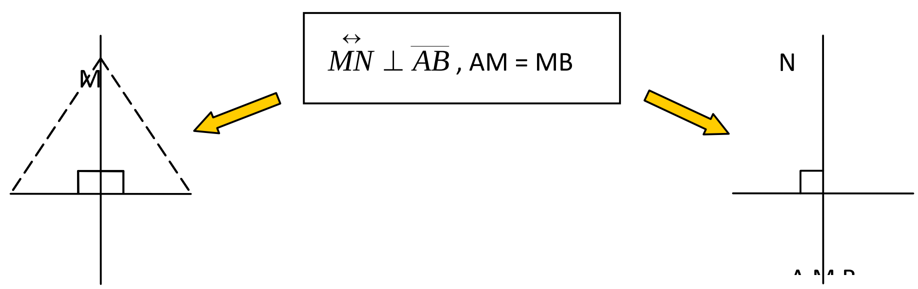
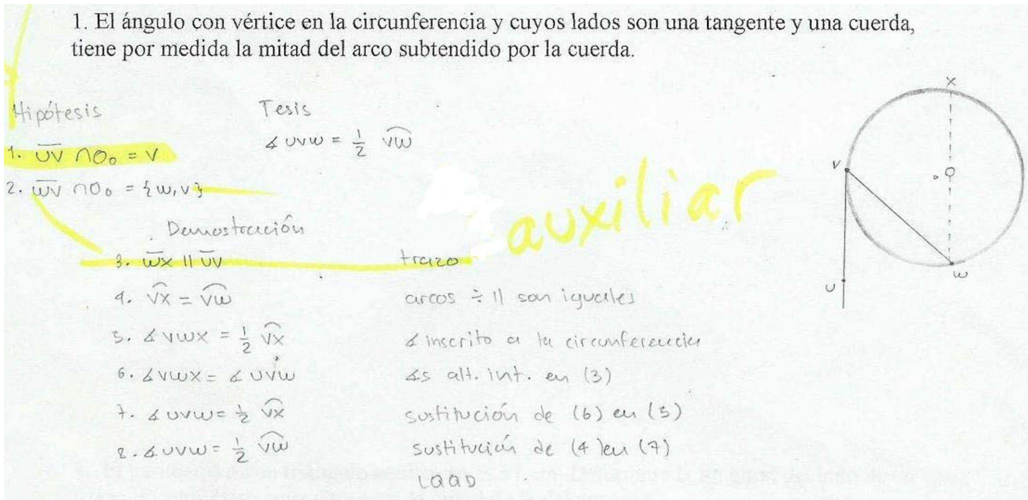


Figura 4. Dos representaciones gráficas que corresponden a un mismo planteamiento simbólico. SIM → GRAF

Errores en solución de problemas

En otra fase de la investigación, a 3 meses de iniciado el curso, se pidió a 37 estudiantes que demostraran el teorema del ángulo semi-inscrito a una circunferencia.

En la figura 5 se aprecia la respuesta de un estudiante que contiene errores de representación sin consecuencias en los otros dos tipos de error, ya que el resto de la demostración es correcta. El primer error de representación está en la hipótesis (1), pues el texto del problema se refiere a una circunferencia (□) pero el estudiante utiliza el símbolo de círculo (□) lo cual se cataloga como un error de representación en la traducción EE →SIM, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI-U. de G.


1. El ángulo con vértice en la circunferencia y cuyos lados son una tangente y una cuerda, tiene por medida la mitad del arco subtendido por la cuerda.

Hipótesis
1. $\overline{UV} \cap \odot_O = V$
2. $\overline{WV} \cap \odot_O = \{W, V\}$

Tesis
$\measuredangle UVW = \frac{1}{2}\widehat{VW}$

auxiliar

Demostración

3. $\overline{WX} \parallel \overline{UV}$	trazo
4. $\widehat{VX} = \widehat{VW}$	arcos ÷ ∥ son iguales
5. $\measuredangle VWX = \frac{1}{2}\widehat{VX}$	∡ inscrito a la circunferencia
6. $\measuredangle VWX = \measuredangle UVW$	∡s alt. int. en (3)
7. $\measuredangle UVW = \frac{1}{2}\widehat{VX}$	sustitución de (6) en (5)
8. $\measuredangle UVW = \frac{1}{2}\widehat{VW}$	sustitución de (4) en (7)
	LQQD

Figura 5. Errores de representación en una demostración (alumno #45).

Otro error de representación en el mismo enunciado consiste en simbolizar la tangente a la circunferencia utilizando un segmento en vez de una recta, lo cual tiene otras interpretaciones. Si se parte de la expresión simbólica utilizada por el estudiante, $\overline{UV} \cap \odot_O = V$ para la traducción SIM → GRAF, se obtendrían las siguientes representaciones gráficas que no corresponden a una tangente (figura 6).

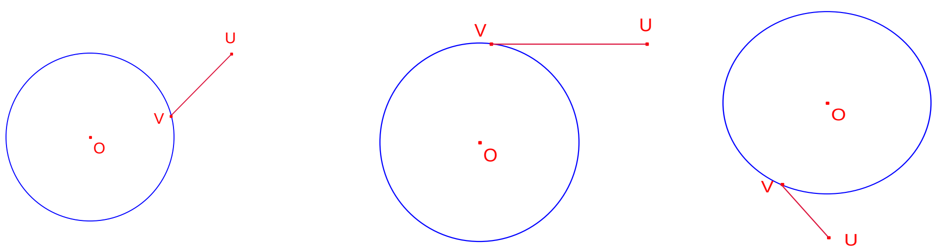


Figura 6. Representaciones gráficas correspondientes a la expresión $\overline{UV} \cap \odot_O = V$

En otro problema planteado a los mismos estudiantes se pide demostrar que "si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa". A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes, su análisis lingüístico y los errores detectados.

La respuesta que se muestra en la figura 7 contiene varios tipos de error:

- Las hipótesis están incompletas, pues no se estipuló que ABC es un triángulo rectángulo; puesto que esta información es indispensable para establecer la semejanza de los triángulos formados, este error cataloga tanto de representación (traducción incompleta EE→ SIM), como de tipo deductivo.
- La tesis está mal planteada, lo cual se considera tanto un error de representación como axiomático. En cuanto a la representación, hay un error de traducción VERB → SIM, pues no se ha simbolizado una media proporcional como se especifica en el teorema; también es un error axiomático (aplicación de teoría) ya que dicha tesis no es una proporción válida entre los triángulos que se forman en la figura, de los cuales tampoco se puede demostrar que sean semejantes porque falta una hipótesis.
- Otro error está en la justificación de la semejanza de triángulo (paso 4), por el criterio "*la*", que no existe. Este último error es de tipo axiomático y está ligado al anterior, de representación y deductivo, ya que forma parte de la cadena de proposiciones que parten de las hipótesis para demostrar la validez de la tesis.

Es de llamar la atención que el estudiante concluye la demostración con la "tesis" que planteó.

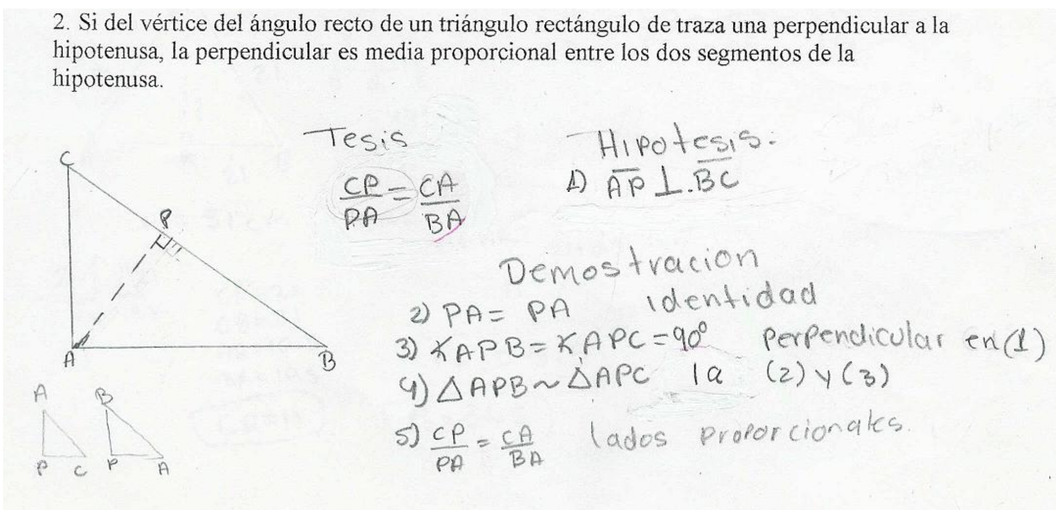


Figura 7. Errores axiomáticos y de aplicación de teoría en la demostración de un teorema (alumno #15).

Consideraciones finales

La solución de los problemas matemáticos implica que el estudiante produzca un texto determinado, el cual es susceptible de un análisis objetivo según los principios explícitos de la sintaxis y la morfología generales. Por ello es que se asume que el análisis lingüístico es la base de un estudio cognitivo completo, mismo que podrá llevarse a cabo en etapas posteriores de la investigación.

Si bien fue posible identificar algunas causas y consecuencias de los errores relacionados con el lenguaje matemático, no es posible hacer generalizaciones debido a la limitada población de estudio. Aún así, se estableció de manera tentativa una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclideana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia y al factor lingüístico:

- Deductivos
- Axiomáticos o de aplicación de teoría
- De representación:
    - En un solo código (SIM, GRAF ó VERB), en referencia a las normas institucionales.
    - De traducción: VERB → SIM, VERB → GRAF, SIM →VERB
- SIM → GRAF
- GRAF →SIM
- GRAF →VERB

Otro hallazgo importante fue identificad los términos complejos cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un obstáculo para los estudiantes. Tal es el caso de términos como "bisectriz", "mediatriz", "equidistar", "circunscrito", "inscrito", "semi-inscrito", y los sintagmas que se forman con ellos en la representación verbal ("punto equidistante de dos rectas", "cuadrilátero circunscrito a una circunferencia", etc.). Se recomienda que los profesores aborden con detenimiento los conceptos matemáticos relacionados con éstos términos y que los alumnos se ejerciten en las diversas formas de representación de cada uno de ellos y los procesos de traducción entre ellas.

En resumen, estos hallazgos aportan herramientas para llevar a cabo el análisis puntual de los ejercicios de los estudiantes en todas las tareas que se utilizan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, así como una exploración más profunda de los aspectos léxico-sintácticos del lenguaje matemático escolar. Se espera que los resultados mostrados constituyan la base para plantear hipótesis y métodos de intervención destinados a mejorar el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas.

Si se ha logrado al menos intrigar al lector y despertar su curiosidad sobre el gran potencial de estas nuevas herramientas, la investigación que se reporta habrá cumplido con creces su principal objetivo.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao

Ardila, A. (2002). El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación. *Acta Latinoamericana de Matemática*, Vol. 15, pp. 1169-1173

Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En: *Una mirada múltiple sobre el lenguaje,* pp. 33-92, coord. Víctor Alcaraz. Guadalajara: Editorial de la Universidad de Guadalajara.

Palencia, A., Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación*, 4 (1) 7-60

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* 2ª Edición. Madrid: Ed. Morata.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. (2001). *El lenguaje probabilístico en los libros de texto*. Consultado el 20 de octubre de 2004 en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/SUMALENGUAJE2001.pdf

Radillo, M., Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en R. Abrate, & Pochulu, M. (Ed.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 263-280). Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclideana en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara, México.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Consultado el 8 de noviembre de 2006 en: http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

PROBLEMAS INVERSOS: LOS CASI OLVIDADOS DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Víctor Martínez Luaces
Fundación Julio Ricaldoni, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (Uruguay)
victorml@fing.edu.uy, victoreml@gmail.com

Resumen. Este trabajo comienza por analizar y clasificar los problemas inversos en la Matemática y en otras disciplinas. En las aplicaciones y el Modelado Matemático es posiblemente donde mejor se pueden explotar los problemas inversos. Cuando problemas inversos y modelado se combinan, surgen naturalmente los problemas de Modelado Inverso, de los cuales en esta conferencia se analizan algunos ejemplos relativamente sencillos, fáciles de plantear y particularmente ricos para un proceso de enseñanza-aprendizaje basado más en la exploración que en la repetición de procedimientos. Para concluir, se presentan algunos resultados de las experiencias realizadas con alumnos de grado y postgrado en los últimos 14 años. También se comentan algunas experiencias recientes en cursos de actualización y perfeccionamiento para profesores.

Palabras clave: problemas inversos, aplicaciones, modelado matemático

Abstract. In this paper, inverse problems in Mathematics and other disciplines are analysed and classified. In modelling and applications is perhaps where best results about inverse problems can be obtained. When both modelling and inverse problems are combined, interesting problems so-called Inverse Modelling problems naturally arise. Several examples are analysed here, from the mathematical education view point, tacking into account their richness for a creative teaching and learning process based on exploration rather than in repetition of procedures. Finally, results of our experiences with graduate and undergraduate courses in the last 14 years are commented here as well as our last experiences in teacher training courses.

Key words: inverse problems, applications, mathematical modelling

Introducción

Investigar es de alguna manera resolver problemas. Sin intención de dar una clasificación rigurosa, en principio se puede hablar de problemas directos e inversos. Los problemas directos, según Groetsch (2001) pueden ser vistos como aquellos en los que se provee la información necesaria para llevar a cabo un proceso bien definido, estable, que lleva a una única solución.

Los problemas inversos, en cambio, son más difíciles e interesantes y esto se debe en gran parte a que, o bien tienen múltiples soluciones o bien son insolubles (Bunge, 2006) y se presentan habitualmente en la práctica profesional de muchas carreras y profesiones. Por ejemplo, dada una cierta enfermedad enumerar los síntomas es un problema directo y sencillo, que ya está resuelto y se puede ver en cualquier texto especializado. En cambio, diagnosticar la enfermedad del paciente a partir de sus síntomas no siempre es sencillo y requiere un médico experimentado.

En las películas o libros de detectives, el personaje central debe identificar a los autores de un crimen conociendo como eran sus víctimas, los testimonios de los testigos y las pistas que surgen de la escena del crimen. Nuevamente, no es más, ni tampoco menos, que un problema inverso.

En la Psicología, o simplemente en nuestro trato diario con otras personas, intentamos adivinar las intenciones de los demás sobre la base de cómo es su comportamiento. Esto implica que todo el tiempo en nuestras relaciones laborales, afectivas, etc., estamos permanentemente resolviendo problemas inversos.

Finalmente, en la Filosofía, cabe citar esta frase de Bunge (2006): "El que casi todos los filósofos hayan ignorado las peculiaridades de los problemas inversos plantea este otro problema inverso: el de adivinar los motivos de este descuido descomunal por parte de los filósofos".

Clasificación de los problemas inversos

En principio hay dos tipos diferentes de problemas inversos, pero para caracterizarlos correctamente comencemos por esquematizar el problema directo, adaptando un estudio realizado por Groetsch (2001, p. 89). Para este autor, un problema directo responde al siguiente esquema:

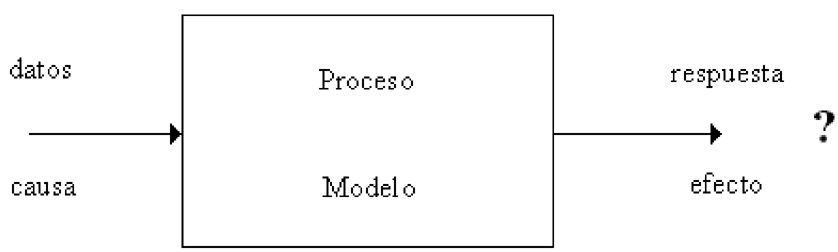


Figura 1. Esquema de los problemas directos.

En el esquema de la Figura 1, se dispone de datos y de un cierto procedimiento y se solicita el resultado, por ejemplo se dan dos polinomios, se conoce el algoritmo de división y se solicitan como respuesta, los polinomios cociente y resto.

Ahora bien, cambiando un poco el esquema resultan dos problemas inversos: el problema de causalidad (Figura 2) y el de especificación (Figura 3):

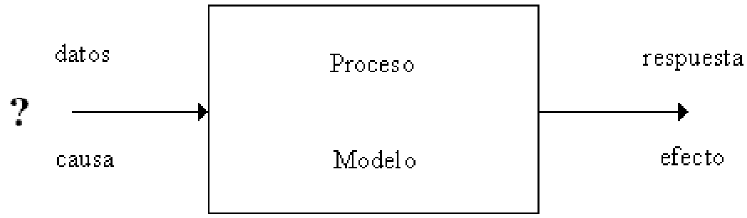


Figura 2. Esquema de los problemas de causalidad.

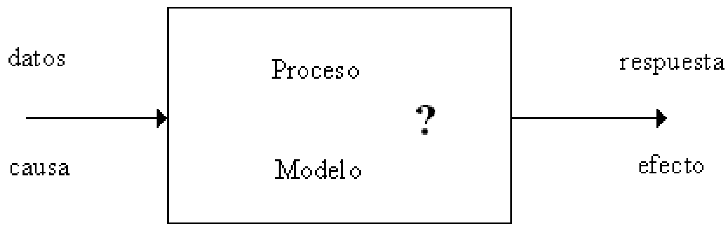


Figura 3. Esquema de los problemas de especificación.

Ambos tipos de problemas son comunes en las carreras químicas (en Ing. Qca., Bioquímica, Qca. Farmacéutica, etc.). Por ejemplo en Análisis Químico Cualitativo es común suministrar al alumno un tubo de ensayo con una solución problema que contiene tres o más cationes, en principio desconocidos. El estudiante debe realizar una secuencia de reacciones preestablecida y de acuerdo a sus resultados descartar o confirmar la presencia o ausencia de ciertos cationes más comunes. Ese procedimiento, denominado "Marcha sistemática de cationes", permite, a partir de los resultados (formación de precipitados, turbidez, coloreado de la solución, etc.), deducir cual sería la composición de la muestra problema. Evidentemente, es un claro ejemplo de problema de causalidad, pues el procedimiento esta preestablecido, los resultados están a la vista y el objetivo es conocer qué composición de la solución es compatible con los resultados obtenidos.

En Qca. Inorgánica, por ejemplo, suele ser más común el problema de producir una cierta sal a partir de sustancias más simples (óxidos, hidróxidos, anhídridos, etc.). Una práctica típica de Qca. Inorgánica es el proceso Solvay donde se obtienen Na_2CO_3 y $NaHCO_3$ (utilizados en la industria del vidrio, papel, jabón, etc.) a partir de $NaCl$ y el CO_2 , mucho más comunes y fáciles de obtener. El problema no está entonces en conocer los reactivos y/o los productos sino en conocer y realizar correctamente el proceso que permite llegar a los productos deseados a partir de reactivos fácilmente disponibles y económicos. Claramente, se trata de un problema de especificación.

Finalmente, en Qca. Orgánica suele estar presente en forma simultánea el doble problema inverso (causalidad y especificación). Por ejemplo en el tema "síntesis orgánica", se suelen presentar cuatro formas distintas de preparar acetona, partiendo de 4 reactivos diferentes: acetato de etilo, acetonitrilo, acetaldehído o incluso 2-metilpropeno. Obviamente ni los reactivos, ni mucho menos el proceso, están determinados y sólo se conoce el producto final o molécula objetivo a ser obtenida.

Problemas inversos en matemática educativa

Como señalan algunos autores, los problemas directos dominan el currículo en los cursos tradicionales de Matemática. No obstante, si se desea modernizar los contenidos de los cursos, los problemas inversos deberían tener un papel preponderante ya que proveen una plataforma para explorar cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad (Groetsch, 2001 y Martínez Luaces, 2009) a la vez que plantean situaciones más interesantes y cercanas a la vida real. Esto además, se puede hacer a todo nivel como veremos en los siguientes ejemplos.

A nivel de escuela primaria se enseña desde muy temprano a multiplicar los números naturales, lo que evidentemente es muy sencillo y carece de dificultades. Mucho más interesante es el problema inverso, consistente en escribir un número natural como producto de otros dos. Este problema siempre tiene solución gracias al rol excepcional de la unidad como neutro del producto, sin embargo la unicidad conduce al concepto central de número primo. El planteo reiterado de este problema inverso desemboca en el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Pasando al siguiente nivel, por ejemplo, la Enseñanza Secundaria, sucede algo similar con el producto de polinomios (problema directo de solución muy sencilla y algorítmica) y su inverso: el factoreo de expresiones polinómicas. Para este problema no hay una solución definitiva, por lo que en general se suele presentar el tema en seis casos con sus respectivas variantes: factor común, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados, suma y resta de potencias de igual exponente (este último con 3 variantes, según sea suma o resta y en este caso, a su vez, según la paridad de los exponentes). El factoreo de polinomios conduce a otro teorema central de la Matemática (el Teorema Fundamental del Algebra), pero su aplicabilidad se ve limitada, del punto de vista algebraico por las dificultades para hallar raíces complejas de polinomios de grado tres o superior y la imposibilidad (en general) a partir del quinto grado.

Pasando ya al nivel superior, un problema directo de Matemática Financiera consiste en calcular cuánto cobrará a su retiro un trabajador que desarrolló su actividad por N años, realizando aportes mensuales $a_1, a_2, \dots, a_k$ (si fueran N años completos, sería $k = 12N$).

Esto puede ser un poco engorroso, pero no es difícil y de hecho, en la vida real hay programas que se encargan de hacer automáticamente dicho cálculo. Mucho más interesante y complicado es el problema inverso: ¿cuántos años se debe trabajar y cuánto se debería aportar para tener derecho a un retiro razonable? La solución no es sencilla ni es única y tampoco esta claro cuál puede ser la mejor opción de las varias disponibles. De hecho, esto es lo que motiva a las diversas opciones que compiten en el mundo real: seguros, jubilaciones privadas, administradoras de fondos provisionales, etc.

Finalmente, un problema directo extremadamente sencillo, de Aritmética Elemental, consiste en sumar dos números primos impares. El resultado obviamente es un número par, pero, ¿qué sucede con el problema inverso? ¿Es posible descomponer un número par como suma de dos números primos? Esta pregunta dio origen a la famosa "conjetura de Goldbach" (postulada en 1742), cuya solución mas de 250 años después sigue siendo desconocida ("Conjetura de Goldbach", sf).

Nuestras experiencias y el modelado inverso

En 1996 se nos encomendó organizar un nuevo curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos. Desde un comienzo se intentó dar a este curso, originalmente denominado Matemática III, un enfoque netamente aplicado, con problemas de otras asignaturas y de la vida real y profesional. Particularmente, los problemas de Cinética Química (Martínez Luaces, 2005, 2007 y 2009) mezclas y reactores (Martínez Luaces, 2005 y 2009), entre otros, sirvieron para proveer ejemplos interesantes de aplicación y modelado con E.D.O., Transformación de Laplace y E.D.P. (Martínez Luaces, 2003 y 2009).

En 1997 comienza una línea de colaboración con investigadores de Electroquímica (Facultad de Ciencias) y de Corrosión (Facultad de Ingeniería) en la que se hace necesario proponer mecanismos de reacciones electroquímicas y/o electrocatalíticas (Martínez Luaces, 2009) que expliquen, o al menos sean compatibles con las curvas que se obtienen experimentalmente. Se inicia así una nueva etapa en la cual se proponen o se descartan mecanismos de reacciones electroquímicas/electrocatalíticas – y concomitantemente se aceptan o se rechazan eventuales modelos matemáticos – en función de su ajuste o no a los resultados de laboratorio. A partir de agosto del año 2000 (Martínez Luaces, 2009) este nuevo tipo de problemas que hemos dado en llamar de *modelado inverso,* se integran definitivamente a nuestros cursos.

En dos artículos publicados en *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (iJMEST), del año 2005 (Martínez Luaces, 2005) y 2009 (Martínez Luaces, 2009) respectivamente, damos a conocer nuestras experiencias educativas con *modelado directo* y *modelado inverso*, las cuales comenzaron con problemas de cinética de reacciones químicas, electroquímicas y electrocatalíticas (Martínez Luaces, 2009), pero luego se extendieron a otros problemas de diferentes áreas como problemas de mezclas, circuitos eléctricos, reactores, dinámica de poblaciones, etc.

Estos problemas y otros fueron recopilados en un libro (Martínez Luaces, 2009) y también fueron expuestos en distintos cursos para docentes e investigadores, como los realizados en RELME XV, EMCI XII, EMCI XV y RELME XXIV (Martínez Luaces, 2005, 2009 y 2010).

Resultados

En uno de los artículos antes mencionados (Martínez Luaces, 2009), se han publicado resultados estadísticos referentes a las experiencias anteriormente comentadas. En este trabajo se ha optado por un criterio distinto, dando prioridad a los comentarios de los propios alumnos. Cronológicamente, estas opiniones pueden dividirse en dos períodos bien diferentes: un primer período experimental, en el cual se puso en marcha un "curso piloto", previo a la puesta en marcha del nuevo plan (que comenzó a regir en el año 2000) y el curso posterior a la implantación de dicho plan.

En el nuevo plan se propuso incrementar la carga horaria del curso en 2 horas semanales, lo cual era conocido por los docentes con suficiente anterioridad. Por este motivo, en los últimos años previos a la puesta en vigencia de este nuevo plan de estudios, se decidió agregar un módulo de una hora y media semanal, de carácter opcional, con problemas de aplicaciones. Si bien todavía estaba vigente el plan anterior, prácticamente el 100 % de los alumnos se quedaban a dicho módulo adicional de una hora y media. Sus opiniones al final del curso, reflejaban una actitud muy positiva hacia el mismo, como surge de los comentarios siguientes:

> *"Ahora le encuentro utilidad a la matemática..."*
>
> *"...un curso súper bueno, me aporto muchísimo."*
>
> *"...curso interesante, con bastantes aplicaciones a la vida real, ..."*

En especial, en lo que refiere a las aplicaciones, incluidas en el módulo optativo de una hora y media semanal, dijeron:

> *"...si no se dan...sería un curso de matemática mas, seguiría siendo una materia 'pesada' con solo métodos, cálculos, números,..."*

Una vez puesto en marcha el nuevo plan de estudios, el módulo de aplicaciones pasó de ser opcional a obligatorio y pasó a ocupar dos horas semanales en lugar de la hora y media que tenía durante el curso piloto. La ampliación e incluso la obligatoriedad del mismo no cambiaron sustancialmente la situación, como lo revelan las opiniones de los estudiantes frente a una encuesta abierta realizada a la finalización del mismo.

Algunas de sus opiniones, fueron las siguientes:

> *"Muy aplicable a la carrera, da un nuevo gusto por la matemática y está bien dada, guiando la resolución del ejercicio y no haciéndolos todos..."*
>
> *"El curso me pareció muy útil y dinámico y pienso con gran aplicación para los próximos años."*

En lo que refiere a las aplicaciones, estas fueron algunas de sus opiniones:

> *"...incentivan ya que se observa la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y muestra claramente la interacción que existe con otras materias."*
>
> *"...tengo realizados cursos que se aplican a los temas tratados en las aplicaciones."*
>
> *"...son muy útiles para seguir la carrera..."*

Como se puede ver, los alumnos valoraron muy positivamente no sólo el curso que recibieron (antes y después de la puesta en marcha del nuevo plan), sino que también apreciaron especialmente dentro de este curso, el módulo de aplicaciones.

Los resultados estadísticos publicados en (Martínez Luaces, 2009) confirman estas opiniones, oportunamente vertidas en las encuestas abiertas ya comentadas.

Conclusiones

Como dice Bunge, "El problema de los problemas inversos es de gran interés teórico porque se refiere a las investigaciones más difíciles en todos los campos..." y además "...la resolución de un problema inverso involucra síntesis o razonamiento regresivo, o sea de conclusiones a premisas o de efectos a causas" (Bunge, 2006).

A nosotros como docentes, esto nos deja un margen enorme para plantear problemas creativos, que permiten desarrollar las habilidades, estrategias y pensamiento crítico de los estudiantes.

Particularmente, en lo que refiere a las estrategias, Bunge (Bunge, 2006) menciona algunas:

> *Transformar el problema en uno diferente, pero soluble*
>
> *Atacar la familia de los problemas directos, ya que uno de sus miembros puede dar la clave para resolver el problema inverso considerado*
>
> *Suponer distintos escenarios en el pasado que pueden haber desembocado en los resultados del presente*

Inventar y ensayar hipótesis plausibles hasta dar con la verdadera

La sola enumeración de estas y otras eventuales estrategias ya nos da una idea más que clara de su potencial educativo, en tanto permite proponer eventuales hipótesis, mecanismos, modelos, etc., ensayarlas y evaluar sus resultados. Por otra parte, de estos problemas resulta una plataforma invalorable para el trabajo multidisciplinario (Martínez Luaces, Camarena y Sallet, 2004).

Nuevamente citando a Bunge: "los problemas inversos son tan difíciles y han sido tan discriminados que el primer congreso internacional sobre el tema se realizo recién en 2002" y "los tratados sobre el tema se cuentan con los dedos de la mano". Esto quiere decir, que si bien los problemas inversos (al menos en Matemática) datan de 5 siglos – el primero es atribuido a Tartaglia (Groetsch, 2001) en 1537 – es muy poco lo que se ha avanzado. Teniendo en cuenta este hecho y su innegable potencial educativo, creemos firmemente que la investigación y desarrollo de problemas inversos, constituye un desafío ineludible para los Educadores Matemáticos de este nuevo siglo.

Referencias bibliográficas

Bunge, M. (2006). *Problemas directos e inversos*, Recuperado el 30 de abril de 2010 de http://grupobunge.wordpress.com/2006/07/20/119

Groetsch, C.W. (2001). Inverse problems: the other two-thirds of the story, *Quaestiones Mathematicae, Supplementary Issue (1)*, 89-93.

Martínez-Luaces, V. (2003). Mass Transfer: the other half of parabolic P.D.E. *New Zealand Journal of Mathematics, 32 (Supplementary issue)*, 125-133.

Martínez Luaces, V., Camarena Gallardo, P. y Sallet Biembengut, M. (2004). Modelos Matemáticos. En Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17(1)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez Luaces, V. (2005). Engaging Secondary School and University Teachers in Modelling: Some Experiences in South American Countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 36(2-3)*, 193-205.

Martinez Luaces, V. (2005). Laplace Transform across boundaries. In M. Bulmer (Ed.), *Proceedings of Kingfisher Delta '05, Fifth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*. Australia: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2007). Inverse-modelling problems in chemical engineering courses, En A. D'Arcy-Warmington, V. Martínez Luaces, G. Oates y C. Varsavsky (Eds.) *Proceedings of*

Calafate Delta '07, Sixth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning. Uruguay: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2009). *Aplicaciones y modelado: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Transformación de Laplace, Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Montevideo: Matser.

Martínez Luaces, V. (2009). Modelling and inverse-modelling: experiences with O.D.E. linear systems in engineering courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 40(2)*, 259-268.

Martinez Luaces, V. (2009). Modelling, applications and inverse modelling: innovations in differential equations courses. En D. Wessels y C. Snyman (Eds.), *Proceedings of Southern Right Delta '09, Seventh Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*. South Africa: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2009). Problemas de modelado directo e inverso con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Transformación de Laplace. En R. Fanjul (Ed.), *Memorias de EMCI-XV*. Argentina: Comité Permanente de EMCI.

Martínez Luaces, V. (2010). EDO y EDP: Aplicaciones y problemas inversos. En C. Lara (ed.), *Programa y Libro de Resúmenes de RELME 24.* Guatemala: Comité de RELME 24.

Conjetura de Goldbach. (sf). Recuperado el 30 de abril de 2011 de http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Goldbach

EL CAMBIO DE VARIABLE EN LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: RESULTADO DE UNA INVESTIGACIÓN

Ramón Flores Hernández
Instituto Tecnológico de Saltillo y Universidad Autónoma de Coahuila (México)
rnfloresh@hotmail.com

Resumen. En este documento se presenta la parte final de una investigación acerca del cambio de variable (cv) y el estado que guarda en la matemática escolar. Se presenta los resultados de varias puestas en escena de secuencias didácticas, donde se involucra la transformada de Laplace en el contexto de las Ecuaciones Diferenciales con el fin de utilizar el cv de manera protagónica, produciéndose el diseño de una situación de aprendizaje. Lo anterior se ubicó dentro de las fases de Experimentación y, Análisis a Posteriori y Validación de una Ingeniería Didáctica.

Palabras clave: cambio de variable, ecuación diferencial, transformada de Laplace

Abstract. In this document we present the final part of an investigation about the variable change (cv) and the state that keeps in the school mathematics. We are laying the results of several stages of didactic sequences, where the Laplace transformed becomes jumbled in the context of differential equations, in order to use the variable change playing a leading role, producing the design of a learning situation. All of this, was located within the phases of Experimentation and, Posteriori Analysis and Validation of a Didactic Engineering.

Key words: variable change, differential equations, Laplace transformed

Introducción

El problema de investigación consistió en hacer explícito el cv, de tal manera que se pudiera descubrir estrategias y propiedades inherentes al cv que ayudaran a facilitar la enseñanza-aprendizaje de elementos del cálculo estudiado en la Ingeniería.

El planteamiento inicial permitió proponer algunas preguntas del problema, que llevaron a determinar si es o no posible tener un mecanismo que induzca a establecer un proceso explícito de enseñanza del cv. Debido a esto, dichas interrogantes fueron tomadas como guía para solventar la problemática planteada, que enseguida se enuncian:

1) ¿Cómo vive actualmente el cv en la enseñanza? 2) ¿Qué significados posee el cv dentro del sistema didáctico? 3) ¿Qué papel juega el cv en la comprensión del cálculo? 4) ¿Qué mecanismos cognitivos subyacen al surgimiento de una variable adicional que permita minimizar la dificultad de un proceso? 5) ¿Qué es lo que posibilita la epistemología del cv? 6) ¿Qué obstáculos están asociados al cv? 7) ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito?

Marco teórico y metodológico

Las primeras seis preguntas permitieron abordar la pregunta siete que fue tomada como el objetivo general. Además, estas interrogantes coadyuvaron a estructurar el marco teórico, ya que sus dominios cubren las componentes del sistema didáctico: el profesor, el estudiante y el saber enseñado.

Así por ejemplo: las preguntas 1 y 2 caen en el ámbito de la Transposición Didáctica, ya que se observó en qué medida el cv ha sufrido ajustes didácticos y cuáles son, y cuales actualmente encontramos en el "saber enseñado" (Chevallard, 1991). Las preguntas 3 y 4 se ubican dentro de la cognición y fueron tratadas con base en la actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas de un registro a otro bajo la noción de no-congruencia de las representaciones (Duval, 1995; 1998). Las preguntas 5 y 6 se ubican en la dimensión epistemológica, elemento primordial en las investigaciones en matemática educativa, ya que nos conduce a estudiar el conocimiento; de hecho, nuestro trabajo docente es indudablemente un problema epistemológico debido a que siempre tiene que ver con la construcción del conocimiento matemático. Así pues, la componente epistemológica implicó conocer el origen y desarrollo del conocimiento del cv, así como su funcionamiento y sus diversas formulaciones (Cauchy, 1981; Collette, 1986; Edwards, 1979; Newton, 2001; Ríbnikov, 1987).

Respecto al aspecto metodológico, se utilizó la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995; Douady, 1995). En esta metodología resalta la Teoría de las Situaciones Didácticas, la que debe conducir a los estudiantes a situaciones de acción, situaciones de formulación y a situaciones de validación. Mientras la actividad del profesor es primordial en la fase de institucionalización del nuevo saber adquirido (Brousseau, 1998).

Antecedentes

Con base en los resultados obtenidos de las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica: Análisis Preliminar, presentado en Flores (2007), referido a la planeación y; Concepción y Análisis a Priori, presentado en Flores (2009), referida al diseño; se llegó a las fases de Experimentación, que es la puesta en escena de la situación didáctica y; al Análisis a Posteriori y Validación, refiriéndose a la validación de las hipótesis al confrontar los análisis a priori y a posteriori.

Todo lo anterior condujo al diseño de una primera secuencia didáctica exploratoria compuesta por cuatro actividades, utilizando principalmente el tema de la Transformada de Laplace bajo el contexto de las Ecuaciones Diferenciales. La actividad 1 pretende abrir camino al cv, al mostrar y hacer que el estudiante trabaje con el cv como acción principal, en el contexto de la integral. En cuanto a la Actividad 2, contiene aspectos iniciales sobre las ecuaciones diferenciales y el cv. Además, contiene la Transformada de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv. La Actividad 3 contiene la Transformada Inversa de Laplace en las Ecuaciones Diferenciales y el cv, y el concepto de solución de una ecuación diferencial. La Actividad 4 permite reafirmar y sintetizar lo aprendido en las actividades anteriores.

Bajo esta secuencia didáctica se pretende que el estudiante logre los siguientes objetivos (conjunto de hipótesis):

1). Construir el método que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a través de un medio que involucra un cv como lo es, la Transformada de Laplace. 2). Construir la noción de solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, utilizando como medio al cv. 3). Que sea capaz de localizar y manipular el cv en las diferentes actividades. 4). Que logre ver la importancia del cv en la resolución de las actividades planteadas. 5). Se espera que en la fase de institucionalización se refuercen las nociones generadas por los estudiantes. 6). Se espera que el último problema lo resuelvan satisfactoriamente al aplicar los elementos construidos en los anteriores problemas.

La fase de experimentación

Esta secuencia se fue modificando a través de las diferentes puestas en escena, debido a las observaciones hechas en las situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación, además en la fase de institucionalización. Las modificaciones fueron en cuanto a redacción, en cuanto a modificar elementos matemáticos y en cuanto al número de actividades. Se conservó la estructura básica de la secuencia; es decir, la resolución de una ecuación diferencial (no se cambió la ecuación utilizada), resaltando el cv.

La implementación

La secuencia se aplicó en 5 ocasiones en un periodo de 2 años. Utilizando una videograbadora en la fase de institucionalización y grabadora de audio en el resto de las fases, apoyos aplicados para analizar de manera más adecuada los procesos cognitivos de los estudiantes en situación escolar.

Se formaron equipos de 3 o 4 estudiantes de ingeniería de la materia de matemáticas V. La duración de aplicación varió: de 1:30 a 2:00 horas, incluyendo la fase de institucionalización.

La secuencia que sigue muestra el resultado final de cuatro aplicaciones modificadas en cada puesta en escena. A continuación se explica brevemente dichos cambios: en la segunda aplicación se modificó la Actividad 4, cambiándose la ecuación diferencial $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t)$ y condiciones iniciales $y(0)=m,\quad y'(0)=n$ por la que aparece en esta secuencia. En las aplicaciones tercera y cuarta las modificaciones fueron de redacción, además, en la cuarta puesta en escena se omitió la Actividad 1 sólo para economizar el tiempo de aplicación, pero en general, es necesario incluirla para mayor comprensión del cv.

Actividad 1

Si en la integral $\int \left(1/e^{x} + e^{-x}\right)dx$ se hace el cambio de variable $e^{x} = t$ para poder integrarla,

a. ¿Podrías calcularla? ¡Inténtalo!

b. ¿Qué cambio de variable puedes inventar para integrar $\int \left(1/1+\sqrt{x}\right)dx$? ¡Resuélvela!

Actividad 2

Cuando se tiene una ecuación diferencial donde las variables han sido separadas, por ejemplo $(3x^2 + x)dx = e^{y}dy$, el siguiente paso es aplicar la integral en ambos miembros de la igualdad, quedando $\int (3x^2 + x)dx = \int e^{y}dy$.

a. Si nos ubicamos en la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$ sujeta a $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ y le aplicamos en ambos miembros de la ecuación la Transformada de Laplace, ¿cómo quedaría planteada?

b. La Propiedad de Linealidad para la Transformada de Laplace indica que:

   Si la Transformada de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ existe; y a,b son constantes, entonces $L\{af(t) + b\,g(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$ Sabiendo que $f(t) = y(t)$ o simplemente $y(t) = y$ aplica la Propiedad de Linealidad en $L\{2y'' - 3y'\}$

c. Encuentra las dos Transformadas de Laplace que surgen en el inciso **b**, aplicando la transformada de la derivada y simplificando totalmente el resultado, sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, de tal manera que solo se tenga un solo término que contenga la Transformada de Laplace. Recuerda que la transformada de la derivada es $L\{y'(t)\} = sL\{y(t)\} - y(0)$ y $L\{y''(t)\} = L\{y''\} = s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$

d. Si $L\{2y' - 1\} = 1$; basándote en los incisos **b** y **c** resuelve la parte izquierda de esta ecuación y encuentra el valor de $L\{y\}$, sabiendo que $y(0) = 0$

e. Aplica los procesos realizados en los incisos **b** y **c** a la ecuación diferencial planteada en el inciso **a**. Además, encuentra el valor de $L\{y\}$ tal como ocurrió en el inciso **d.**

f. ¿En que parte del inciso **e** detectas que hay un cambio de variable?

g. ¿Influye el cambio de variable para encontrar $L\{y\}$? ¿Por qué? ¡Discútelo con tus compañeros de equipo?

Actividad 3

Consideremos ahora la pregunta: Dada $F(s)$ ¿qué función $f(t)$ hace que $L\{f(t)\} = F(s)$?

Por ejemplo, si $L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$ ¿Cuál es el valor de $y(t)$? En el lenguaje matemático esto cae en la categoría de un inverso, donde se dice que $y(t)$ es la Transformada Inversa de Laplace de $\frac{1}{s^2}$ y se escribe $y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}$, por lo que el valor de la función buscada $y(t)$ es: $y(t) = t$, donde se tiene de nuevo la variable original t.

a. Bajo esta idea, encuentra la Transformada Inversa de Laplace de la Actividad 2, inciso e; es decir, encuentra el valor de $y(t)$.

b. Si sustituyes la solución de la Transformada Inversa de Laplace en la Ecuación Diferencial dada, ¿estas haciendo un cambio de variable? Por otra parte, ¿qué relación tiene esta solución con la Ecuación Diferencial?

Actividad 4

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos: $y'' + 6y' + 34y = 0$ y condiciones iniciales $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

a. Resuelve esta ecuación siguiendo los procesos de la Actividad 2, incisos a y e; y de la Actividad 3, inciso h.

b. Indica en qué partes de la resolución de la ecuación diferencial lineal se está haciendo un cambio de variable.

Aplicación de una última secuencia

Finalmente se aplicó una quinta secuencia, modificada solo en cuanto a la redacción. Esta secuencia ya es estable; es decir, en su exploración arrojó resultados favorables.

Actividad general

Sea la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$ sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$:

Actividad 1

Aplica la Transformada de Laplace en ambos miembros de la Ecuación Diferencial y encuentra cada transformada de Laplace planteada.

a. Observa bien los resultados e indica qué variable cambió y por cuál

Actividad 2

Al aplicar las condiciones iniciales en el proceso realizado en la Actividad 1 y despejar la $\mathcal{L}\{y\}$:

b. La nueva variable que surgió en dicha Actividad 1 y que ahora se encuentra en el despeje de esta Actividad 2, ¿corresponde a la variable dependiente o a la variable independiente?

Actividad 3

Aplica la Transformada Inversa de Laplace en el resultado obtenido en la Actividad 2 y además resuélvela:

c. Bajo este proceso, ¿qué le ocurrió a la nueva variable obtenida en la Actividad 1?

d. Si sustituyes la solución de la Transformada Inversa de Laplace en la Ecuación Diferencial dada, ¿estas haciendo un cambio de variable? Por otra parte, ¿qué relación tiene esta solución con la Ecuación Diferencial?

Actividad 4

Aplica todo el proceso anterior a la Ecuación Diferencial $y'' + 5y' + 6y = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 2,\quad y'(0) = -3.$ Incluye las preguntas planteadas en cada inciso, ubicadas en las Actividades 1, 2 y 3.

El proceso de validación interna

Aquí se muestra la última fase de la Ingeniería Didáctica: el análisis a posteriori y validación. Con base en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamentará la validación interna de las hipótesis formuladas en el análisis a priori.

A partir del análisis a posteriori se concluye que:

1. Los resultados de la primera secuencia evolucionada tocante a la construcción del método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, no fueron los esperados según el análisis a priori. Solo una minoría logró resolver el problema planteado. En la fase de institucionalización si se logró, con rapidez, construir el método.

2. Tampoco se logró construir la noción de solución de una ecuación diferencial, como se esperaba en el análisis a priori. Nadie logro hacerlo (hasta la fase de institucionalización).
3. La localización de un cv y ver la importancia de utilizar un cv, si se logró construir.
4. El último problema, en su mayoría, no lograron resolverlo, contrario a lo previsto en el análisis a priori. Éste problema se logró resolver en la fase de institucionalización y aquí es cuando se logra construir el método de la transformada de Laplace con la ayuda del maestro.
5. La fase de institucionalización no cumplió lo previsto según el análisis a priori. Ya que se pretendía que en esta fase se reforzaran las nociones construidas.

Sobre la última secuencia didáctica:

Al examinar la última secuencia aplicada y modificada en su texto (quinta aplicación), los resultados fueron los siguientes a partir del análisis a posteriori:

6. Lograron en su mayoría, construir el método de la transformada de Laplace según lo previsto en el análisis a priori.
7. Lograron localizar y ver la importancia del cv en el contexto estudiado, como se esperaba en el análisis a priori.
8. Se logró por mayoría, resolver el último problema al utilizar los elementos construidos en las actividades anteriores. Esto se esperaba en el análisis a priori.
9. No se logró construir la noción de solución. Esta se logra construir, de manera rápida, en la fase de institucionalización bajo el apoyo del profesor.
10. A partir del análisis a posteriori se observa que la fase de institucionalización si cumplió con lo previsto según el análisis a priori, de reforzar las nociones generadas por los estudiantes; excepto con la noción de solución.

Primeras conclusiones

Después de analizar los datos arrojados por cada secuencia y de compararlos con el análisis a priori, se puede decir que:

Básicamente se trabajó con dos secuencias: la primera de texto denso y una segunda secuencia de texto cómodo.

Se observa que bajo la primera secuencia no funcionó en su totalidad, pero es aceptable. Un elemento que contribuyó a tal resultado es la comprensión de textos, donde necesariamente entra un cambio de registro y esto se logra a través de la actividad de conversión de representaciones (Duval, 1995). Entonces la causa de que el estudiante no lograra en las situaciones de texto denso (en algunos casos), llegar a una situación a-didáctica de formulación o de validación es por la falta de la actividad de conversión de representaciones bajo una no-congruencia de las representaciones. En un futuro se modificará esta secuencia en cuanto a la estructura del texto.

Para la segunda secuencia, que posee un texto más accesible, llama la atención el hecho de que el estudiante no logró construir la noción de solución bajo la situación a-didáctica; sin embargo en la fase de institucionalización, mediante la interacción con el profesor y bajo la influencia del cv, si la construyeron. Tal tardanza en construirse se debe a que el estudiante no logró evocar un registro de ecuación algebraica y cambiarlo a un registro de ecuación diferencial; estos son dos registros diferentes de la representación de "ecuación". Claro que la significación operatoria del significante en el álgebra (la ecuación algebraica) es diferente de la significación operatoria del significante en el cálculo (la ecuación diferencial), puesto que los procedimientos de tratamiento son diferentes en cada caso. Uno emplea solo operaciones algebraicas y el otro, además, emplea la derivada. Hay que recordar que la actividad solicitaba sustituir la solución de la transformada inversa de Laplace en la ecuación diferencial dada (o sea la solución de la ecuación diferencial) e indicar qué relación tiene esta solución con la ecuación diferencial dada.

Finalmente, creo que lo que evitó relacionar un registro de ecuación algebraica con un registro de ecuación diferencial fue la significación operatoria del significante, por ser diferente para cada caso.

Conclusiones generales

El cv es una herramienta que es utilizada en los libros y por los profesores de manera implícita y no es un saber enseñable. Se observó que los libros generan un consenso para el trabajo del profesor, resultados reportados en Flores (2007).

La importancia del cv radica en que permite aplicar métodos, hacer demostraciones y resolver problemas. Esta es su epistemología de origen. Pero por otro lado, para el estudiante es un tema difícil, que en algunos casos no le da mucha importancia, ya que cuando lo aplica no lo ve como un cv; es decir, no es consciente cuando aplica esta herramienta, de que está haciendo un cv. Esto, causado por el discurso matemático escolar vigente.

Un aspecto importante por mencionar fue la aplicación de la teoría de las situaciones didácticas, donde las situaciones-problema presentadas a los estudiantes fueron elementos importantes para hacer evolucionar sus representaciones y sus procedimientos.

También, otro elemento que influyó para la no construcción satisfactoria, en algunos casos, del método para resolver ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace; fue la localización de un obstáculo epistemológico, localizado en la relación funcional entre variables, más específicamente: la relación entre la variable dada y la nueva variable es una función, pero este hecho de ser una función, donde hay una variable independiente y una variable dependiente, fijas, por la propia naturaleza del concepto de función, evita que en la concepción de función que se usa en el cv, se intercambien los papeles de las variables, por el aspecto operacional que ya han interiorizado de una función. Por lo que un obstáculo localizado es el aspecto operacional de una función. Las preguntas de las actividades planteadas estaban encaminadas a solventar este obstáculo.

Finalmente, se puede hablar de la pregunta de investigación: ¿Qué elementos de orden didáctico podemos obtener para la enseñanza del cálculo al reconocer el cv como un proceso explícito? Este trabajo de investigación, por el simple hecho de haberlo llevado a cabo, ya se está mirando el cv como un proceso explícito. Indudablemente que los elementos de orden didáctico que se obtuvieron y que se pueden seguir generando, son las secuencias didácticas de las ecuaciones diferenciales aplicando el método de la transformada de Laplace. También, de acuerdo al análisis preliminar y éste centrado en la componente didáctica, se obtuvo una clasificación extensa de la ubicación y aplicación del cv en los diferentes temas de la matemática de ingeniería. Aunado a esto, el análisis preliminar arrojó una clasificación exhaustiva de los usos que conlleva el cv.

Estos aspectos ayudarán en un futuro a diseñar secuencias didácticas de los diferentes temas matemáticos de la ingeniería bajo la influencia del cv, y bajo las variables didácticas localizadas en Flores (2009), lo cual cerrará el círculo acerca de este proceso según la transposición didáctica: actualmente ha pasado de ser un saber científico a un conocimiento a enseñar (la forma en que aparece un contenido en los programas escolares, libros de texto o en tradiciones de enseñanza), pero falta la última etapa, pasar a ser un objeto de enseñanza (la forma de existencia del conocimiento en el aula) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Esta es la pretensión futura.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques* 1979-1990. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Cauchy, A.L. (1981). *Écuations Différentielles Ordinaries*. Paris: Éditions Études Vivantes.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editorial SA.

Collette, J-P. (1986). *Historia de las matemáticas*. Vol. II. México: Siglo vintiuno editores.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. (pp.213-226). *Cuadernos de Educación* Nº 22. Institut de Ciéncies de L' Educació (Universitat de Barcelona) y Editorial Horsori. Barcelona, España.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 61-96). Colombia: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag.

Flores, R. (2007). El cambio de variable: ¿un proceso matemático o un artificio de la matemática? En C.R. Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 145-150. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Flores, R. (2009). Una primera secuencia didáctica exploratoria: El cambio de variable en la transformada de Laplace. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 844-853. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. México: UNAM [I. Newton. Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum. 1671]

Ríbnikov, K. (1978). *Historia de las Matemáticas*. URSS: Mir Moscú.

Stewart, J. (1995). *Calculus*. USA: Brooks/Cole Publishing Company

ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Sara Inés Ottonello, Margarita del Valle Veliz, Sonia Patricia Ross
Facultad de C. Económicas, Universidad Nacional de Tucumán (Argentina)
mveliz@face.unt.edu.ar, margaveliz@yahoo.com.ar, soniagepner@hotmail.com

Resumen. Es importante formar a los alumnos de modo que acrecienten capacidades y aprendan diferentes estrategias de aprendizaje que les permitan una asimilación crítica de la información y mayor autonomía en el proceso educativo. En este trabajo se muestran los resultados obtenidos al realizar un diagnóstico para determinar con qué estrategias metacognitivas contaban los estudiantes de primer año universitario que cursaban Álgebra en el año 2008, es decir estrategias de reflexión y control de la propia actividad cognitiva. Esto dio lugar a implementar según los resultados logrados, una propuesta con tareas de aprendizaje basada en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje; en ellas el profesor asumió el papel de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del alumno, retirando paulatinamente el apoyo que proporcionaba hasta dejar el control del proceso en manos del estudiante, apuntando así a un aprendizaje autorregulado. La experiencia arrojó resultados positivos, lo que incentivó a seguir trabajando en este sentido.

Palabras clave: diagnóstico, autorregulación, estrategias metacognitivas, propuesta

Abstract. It is important to teach students how to enhance their learning skills, and to assimilate different strategies that allow a critical incorporation of information and a wider autonomy in the learning process. In this paper, we show the results of a diagnosis test applied to determine which metacognitive strategies -those of thinking and controlling their own cognitive activity- used students of Algebra, in 2008. That test permitted us to implement a proposal built upon learning activities based on the gradual transference of learning control philosophy. In that proposal, at the beginning, the teacher assumed the role of a model, and guided the cognitive and metacognitive activity of the student; later on, he performed a gradual withdrawal until the student had the complete control over that practice, leading him to an auto-regulated learning process. The whole experience brought up a positive response that motivated us to continue working in that direction.

Key words: diagnosis, auto-regulation, metacognitive strategies, proposal

Introducción

Uno de los propósitos del ciclo de formación básica en la Universidad de Tucumán, es entre otros, el de proveer al estudiante los conocimientos, actitudes, procedimientos y herramientas esenciales para que pueda analizar, comprender y aplicar los contenidos del área de formación profesional, como así también**,** suministrar las herramientas necesarias para el autoaprendizaje, la formación permanente y la tarea interdisciplinaria.

De aquí que aprender a aprender ha pasado a ser una necesidad formativa básica.

> La metacognición se refiere al conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos, por ejemplo, las propiedades de la información relevantes para el aprendizaje. Así practico la metacognición (metamemoria, metaaprendizaje, metaatención, metalenguaje, etc.) cuando caigo en la cuenta de que tengo más dificultades en aprender A que B. . . La metacognición hace referencia, entre otras cosas, a la

> supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de alguna meta u objetivo concreto. (Flavell, 1976, p.232).

En el presente trabajo se muestra los resultados logrados al efectuar un diagnóstico entre los alumnos de primer año que cursaron la asignatura Álgebra en 2008, para determinar si contaban con estrategias metacognitivas, es decir de reflexión y control de la propia actividad cognitiva, a fin de implementar según los resultados logrados, tareas de aprendizaje que los incentivaran en ese sentido.

Estos resultados permitieron contar con una descripción de las debilidades y fortalezas de las estrategias de aprendizaje tanto cognitivas como metacognitivas, que los alumnos utilizaban al comienzo de la formación universitaria como así también de sus intereses, motivación y actitud en el estudio del Álgebra. Fueron la base de una propuesta de trabajo para las clases prácticas de la mencionada asignatura, que se implementó posteriormente, consistente en ofrecer a los alumnos herramientas metacognitivas en las tareas de aprendizaje para el estudio de la asignatura, que se considera esenciales en el proceso de aprender a aprender. También se puede observar los resultados logrados en su aplicación.

Marco teórico

Según Chrobak (2005), la metacognición (Mc.) se destaca por cuatro características: llegar a conocer los resultados o productos que se quieren alcanzar con el esfuerzo mental (objetivos); la posibilidad de la elección de las estrategias para conseguir los objetivos (planificación); la autoobservación del propio proceso de elaboración de conocimientos, para comprobar si las estrategias elegidas son las adecuadas (autorregulación) y la evaluación de resultados para saber hasta qué punto se lograron los objetivos (control).

Esta práctica se basó en la "filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje" (Mateos, 2001, p.103), donde el profesor asume el papel de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del alumno, llevándole poco a poco a participar en un nivel creciente de competencia, al tiempo que va retirando paulatinamente el apoyo que proporciona hasta dejar el control del proceso en manos del alumno.

Se tuvo en cuenta también los cuatro grupos que plantea Mateos (2001) en cuanto al nivel decreciente de ayuda que ofrece el profesor y, consecuentemente, el grado de autonomía que se otorga al alumno, que son: Instrucción Explícita, Práctica Guiada, Práctica Cooperativa y Práctica Individual.

El concepto de metacognición se identifica, por una parte, con el conocimiento de la actividad cognitiva y, por otra, con el control sobre la propia actividad cognitiva.

> El conocimiento metacognitivo constituye el componente declarativo de la metacognición y comprende al conocimiento de los propios recursos cognitivos, persona, de las demandas de la tarea y de las estrategias que pueden ser usadas.
>
> El control metacognitivo constituye el componente procedimental e incluye, de acuerdo con la mayoría de las propuestas descriptas en la literatura, procesos de planificación de las estrategias más adecuadas para resolver una tarea, de supervisión y de regulación del uso que se hace de las mismas y de su efectividad así como del progreso hacia la meta establecida y de evaluación de los resultados obtenidos. (Mateos, 2001, p.32).

La Mc. se destaca por cuatro características:

1- Llegar a conocer los resultados o productos que se quieren alcanzar con el esfuerzo mental (objetivos).

2- Posibilidad de la elección de las estrategias para conseguir los objetivos (planificación).

3- Autoobservación del propio proceso de elaboración de conocimientos, para comprobar si las estrategias elegidas son las adecuadas (autorregulación).

4- Evaluación de resultados para saber hasta qué punto se lograron los objetivos (control).

En la literatura se suele resumir esta secuencia diciendo que la Mc. requiere *saber qué* (objetivos) se quiere conseguir y *saber cómo* se lo consigue (autorregulación o estrategia). (Burón, 1996, citado por Chrobak, 2005).

Objetivo

Determinar en qué medida los alumnos contaban con estrategias metacognitivas, es decir de reflexión y control de la propia actividad cognitiva a fin de implementar según los resultados logrados, tareas de aprendizaje que los incentivaran en ese sentido.

Metodología utilizada

Para atender a esta problemática, de manera que esto sea una realidad en nuestras aulas, se considera necesario no sólo justificar con claridad su necesidad social y pedagógica, sino también estudiar la manera en que puede desarrollarse. Es por ello que a partir de los resultados obtenidos en el diagnóstico, se efectuó una propuesta donde se trató de integrar estas ideas.

Muestra: Se consideró una muestra de 292 alumnos elegida mediante un muestreo aleatorio simple de una población total de 1483 alumnos que cursaron la asignatura Álgebra en el primer cuatrimestre del año 2008.

Instrumento: Se diseñó y trabajó con una Encuesta diagnóstica, validada por el método de expertos, donde se utilizó una escala Likert para las mediciones, cuyos objetivos fueron:

1. Recabar información sobre las características de la población.

2. Conocer mejor el proceso de aprender de nuestros alumnos analizando la mayor o menor presencia de actividad metacognitiva en su desempeño frente a tareas de aprendizaje.

Las dimensiones que se estudiaron para medir la presencia de *estrategias metacognitivas* como desencadenante de *procesos autorreguladores* durante la solución de las situaciones problemáticas planteadas tanto en el diagnóstico como después de implementada la propuesta, fueron: Apropiación de objetivos (metas o producto esperado), Orientación en la tarea (reconocimiento de conceptos, nexos, operaciones y propiedades inherentes a la tarea), Apropiación de los criterios de evaluación (criterios de comparación, ejecución) y Autogestión de las dificultades y errores (cómo subsanar errores cometidos).

Propuesta de intervención educativa

La práctica propuesta se basa en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje. El profesor en esta instrucción, asume el papel de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del alumno, llevándole poco a poco a participar en un nivel creciente de competencia, al tiempo que va retirando paulatinamente el apoyo que proporciona hasta dejar el control del proceso en manos del alumno.

Atendiendo al nivel decreciente de ayuda que ofrece el profesor y, consecuentemente, el grado de autonomía que se otorga al alumno, se clasifican estos métodos en cuatro grupos: Instrucción Explícita, Práctica Guiada, Práctica Cooperativa y Práctica Individual. (Mateos M., 2001)

Entre las ayudas que se ofrecen a los alumnos en las prácticas guiadas (Mateos, 2001) figuran las "Tarjetas de apoyo" que contienen indicios útiles para recordar a los estudiantes las posibles acciones a realizar durante la planificación, la ejecución y el control de las actividades de estudio como un recurso del andamiaje educativo en actividades que propicien la autorregulación del aprendizaje. Entre algunas de las preguntas orientadoras se menciona:

> ¿Qué tipo de problema debo resolver?, ¿Cuál es la meta o producto esperado?, ¿Qué elementos intervienen?, ¿Resolví un problema similar?, ¿Qué conceptos y operaciones debo conocer para poder resolverlo?, ¿Qué resultados teóricos necesito aplicar?, ¿Cuáles son los pasos a seguir para resolverlo?, ¿Qué me conviene controlar durante la resolución?, ¿Verifiqué el resultado?, ¿Necesité realizar consultas para aclarar dudas?, ¿En qué momento?, ¿Conozco otro camino para resolverlo?, ¿Cuál?. (Mateos, 2001, p.111).

Instrucción explícita: generalmente la enseñanza de las estrategias comienza con una instrucción explícita de las mismas donde el profesor proporciona a los alumnos información sobre las estrategias que van a ser después practicadas.

Práctica guiada: la característica distintiva de esta práctica es el diálogo entre profesor y alumno.

Práctica cooperativa: se trata de la interacción con un grupo de iguales que colaboran para completar una tarea. Al tratar de explicar, elaborar y justificar sus propios puntos de vista, se potencia en cada uno de los miembros del grupo una mayor conciencia, reflexión y control de sus procesos cognitivos.

Práctica individual: para aumentar la responsabilidad del alumno a la hora de aplicar las estrategias se propone un trabajo individual que puede apoyarse externamente mediante guías de autorregulación.

El esquema de trabajo para estas prácticas fue el siguiente:

Práctica Guiada
(Actividad N° 1)

Práctica Cooperativa
(Actividad N° 2)

Práctica Individual
(Actividad N° 3)

Al resolver el ejercicio propuesto señala:

1) ¿Cuál es el resultado que quieres obtener? (*Objetivo* a lograr)
2) ¿Cuáles son los conocimientos necesarios para su realización? (*Exploración*)
3) ¿Cuáles son los pasos a seguir en la ejecución de la tarea? (*Planificación*)
4) ¿Cuáles son los ajustes o correcciones realizados durante la resolución? (*Autorregulación*)
5) ¿Conoces otras vías de solución del ejercicio?

Al finalizar la tarea responde:

1) ¿Verificaste el resultado? ¿Cómo?
2) ¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste en el estudio del tema?
3) ¿Cuáles son las acciones que crees conveniente realizar para superar errores o dificultades detectadas? (*Autocontrol*)

Resultados

Resultados de la encuesta diagnóstica

Apropiación de Objetivos

Como ya se sabe, la solución de problemas es, en la mayoría de las ocasiones, una actividad autorregulada; el carácter autorregulado le viene conferido por su orientación al alcance de determinado objetivo y cualquier acción que no conduzca al mismo, es modificada por el sujeto.

Se observa que un 78% de los alumnos no reconoce la meta a la que debe llegar. En este momento el alumno ya ha elaborado una representación inicial del camino a seguir, esto es, el pensamiento comienza a moverse con un propósito definido.

Orientación en la tarea

Sólo un 25% de los alumnos reconocen en grado "Alto" la lógica de las relaciones, nexos y cualidades de los objetos incluidos en el problema (Valor Absoluto) y las Propiedades de las Inecuaciones vinculadas al mismo. Un 11% lo hacen en grado "Medio". Un 64% de alumnos posee un grado de orientación bajo o nulo, lo que resulta preocupante desde la labor docente. Se puede interpretar por un lado que en ellos no se manifiesta la función de análisis que orienta al alumno en la tarea propuesta y por otro que los conocimientos específicos del tema necesarios para la ejecución de la misma son, en general, insuficientes.

Apropiación de los criterios de evaluación

La búsqueda de medios para lograr el objetivo o fin propuesto y su puesta en práctica, exige al alumno repasar en su memoria a largo plazo, los métodos y procedimientos que pueden ser congruentes con la tarea. Los resultados obtenidos informan el grado de valoración de los procedimientos empleados.

Se observa que un 70% de alumnos poseen un grado "Malo" o "Bajo" de selección, ejecución y valoración de la estrategia adecuada; mientras que sólo un 5% alcanza un grado "Bueno" y un 25% el grado "Alto".

Estos resultados muestran un porcentaje muy bajo de alumnos que activan los patrones de observación y comparación para la realización de la tarea, que se apropian de las normas y criterios con las que se evaluará la actividad y que ponen en práctica los conocimientos y procedimientos necesarios para la ejecución de la tarea.

Autogestión de las dificultades y errores

Con respecto al momento de control valorativo, dado que el pensamiento es un proceso dirigido, éste debe expresarse junto con la reflexión metacognitiva en el curso de la solución, a partir de la generación de momentos reguladores de la actividad, es decir, de la introducción de mecanismos que permitan por un lado mantener el proceso que se efectúa dentro de los límites determinados por el fin propuesto, y por otro valorar la información que le ofrecen los resultados obtenidos en cada paso (posibles errores), para tomar decisiones con respecto a la continuación del proceso.

Se observa que el 67% de los alumnos no detectan o detectan muy poco, errores en la ejecución de la tarea, o sea que hay en ellos una ausencia de la función de control valorativo (grado Nulo y Bajo); en grado "Medio" en un 4% y en grado "Alto" en un 29%.

Autorregulación y autocontrol del aprendizaje, en el estudio exploratorio

A los efectos de medir la variable Autorregulación del aprendizaje se adjudicaron a los tres indicadores siguientes: Orientación en la tarea, Apropiación de los criterios de evaluación y Autogestión de dificultades y errores, sus correspondientes grados y puntajes, una vez analizados los reactivos en su totalidad, ya que se había trabajado con una escala Likert.

En lo analizado, la presencia de habilidades metacognitivas favorecedoras del aprendizaje autorregulado es "Baja" o "Nula" en un 70% de los alumnos de la muestra. Sólo un 6% manifiesta un grado "Medio" y un 24% alcanza un grado "Alto" de autorregulación.

Estos resultados pueden interpretarse por un lado, aceptando que el alumno de primer año no tiene conciencia de la responsabilidad necesaria para el perfeccionamiento y la formación de sus propios procesos intelectuales. Por otro, como consecuencia de la metodología empleada en el dictado de las clases prácticas de la asignatura Álgebra, que no contemplaba entre sus propuestas de trabajo, actividades que propicien el desarrollo de la autorregulación de los alumnos en el plano metacognitivo.

Resultados después de implementada la propuesta

Se efectuó el análisis de cada una de las dimensiones ya analizadas en el diagnóstico. Se muestran los resultados logrados al efectuar el análisis de la totalidad de los reactivos, donde se observan los logros en la variable Autorregulación del aprendizaje.

En lo analizado, la presencia de habilidades metacognitivas favorecedoras del aprendizaje autorregulado es "Baja" o "Nula" en un 39% de los alumnos de la muestra. Un 58% manifiesta un grado "Medio" y un 3% alcanza un grado "Alto" de autorregulación.

A los efectos de estudiar el comportamiento de la variable autorregulación en las distintas etapas (Actividades) de la experiencia y comparar sus resultados, se consideran para su análisis dos niveles conformados por los dos grados más bajos y los dos grados más altos. Esto es: Nivel no adecuado conformado por el Grado Nulo y Grado Bajo y Nivel adecuado, conformado por el Grado Medio y Grado Alto

Para analizar si existen diferencias significativas con Autorregulación adecuada en cada actividad se realizó un test de homogeneidad cuyo resultado fue $\chi^2_{(3)} = 24{,}08$ (p=0,00002) lo que indica que hay evidencias para aceptar las diferencias porcentuales entre las etapas.

Para analizar en cuáles de las actividades se observan diferencias, se realizó un test de comparaciones múltiples (Berenson y Levine, 1996, p.628), determinándose que las etapas Nº 1, 2 y 3 difieren de la exploratoria, es decir que el porcentaje de los alumnos con Autorregulación Adecuada en el Estudio Exploratorio es significativamente menor que en todas las demás actividades.

El porcentaje de alumnos en el Nivel Adecuado luego de la Actividad Nº 1 es significativamente menor que después de las dos Actividades siguientes (2ª y 3ª).

Los niveles alcanzados en el Estudio Exploratorio y en las Actividades Nº 1, Nº 2 y Nº 3 se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 1: Resultados de la autorregulación en las diferentes etapas de la investigación. Álgebra 2008.

Autorregulación	Estudio Exploratorio	Práctica Guiada (Actividad 1)	Práctica Cooperativa (Actividad 2)	Práctica Individual (Actividad 3)
Nivel Adecuado (Ad)	30%	50%	59%	61%
Nivel no Adecuado (No Ad)	70%	50%	41%	39%
Total	$100_{(220)}$	$100_{(220)}$	$100_{(220)}$	$100_{(220)}$

Conclusiones

El índice de actividad metacognitiva en el desempeño de los alumnos de Álgebra es en general muy bajo. Esto nos muestra la necesidad de implementar estrategias metacognitivas a fin de favorecer en ellos el desarrollo de habilidades que contribuyan al proceso de aprender a aprender.

Los estudiantes deben ser advertidos sobre la importancia que tiene el reflexionar sobre sus propios saberes y la forma en que se producen, no sólo los conocimientos, sino también el aprendizaje, teniendo en cuenta cómo actúan durante el mismo las herramientas derivadas de los estudios sobre metacognición.

Una de las funciones de la educación futura debe ser promover la capacidad de los alumnos de gestionar sus propios aprendizajes, adoptar una autonomía creciente en su carrera académica y disponer de herramientas intelectuales y sociales que le permitan un aprendizaje continuo a lo largo de toda su vida.

El aprendizaje metacognitivo puede ser desarrollado mediante experiencias de aprendizaje adecuadas como por ejemplo la que se propone en este trabajo, ofreciendo así a los alumnos instrumentos que le ayuden a aprender a aprender.

Los resultados logrados pueden ser analizados en investigaciones posteriores, conjuntamente con la información recabada respecto a las características de la población en estudio, a fin de obtener resultados que reflejen la incidencia de dichas características en la utilización de estrategias metacognitivas.

Se puede inferir que la modalidad de trabajo empleada en las actividades propuestas tuvieron influencia positiva sobre los componentes relacionados con el aprendizaje autorregulado.

Referencias bibliográficas

Berenson, M. L. y Levine, D. M. (1996). *Estadística básica en Administración*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Chrobak, R. (2005). *La Metacognición y las herramientas didácticas*. Recuperado el 28/3/2006 del sitio web http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Chrobak.htm

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspect of problem solving. En Resnick, L.B. (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231 – 235). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y Educación.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

EL PROCEDIMIENTO DE "RESULTADOS PARCIALES" Y LA PRODUCCIÓN DE SENTIDO EN TORNO A LA DIVISIÓN MEDIANTE UN APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón, Marta Elena Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
mmramiremx@yahoo.com.mx, mevaldemoros@hotmail.com

Resumen. Se presenta lo encontrado en un estudio piloto ya concluido, el que se efectúo con alumnos de cuarto grado de primaria para investigar el aprendizaje autónomo de la división con dos cifras en el divisor. Se llevó a cabo con una intervención didáctica de corte constructivista, en la cual el docente fue ajustando la ayuda a los estudiantes y éstos tuvieron la oportunidad de hallar la solución por sí mismos a través de toma de decisiones y trabajo grupal empleando fichas de trabajo que le proporcionaban pruebas para autoevaluarse. Mediante un entorno de resolución de problemas se propició darle sentido a las operaciones aritméticas utilizadas y transitar de la división con divisor de una cifra a la de dos. En relación con el algoritmo de la división, se aplicó un procedimiento que consiste en dividir por partes y se encontró que éste fue eficaz en la comprensión de dividir, puesto que el educando va dejando "huellas" de su manera de restar y multiplicar dentro del algoritmo de la división.

Palabras clave: aprendizaje autónomo, división, resultados parciales

Abstract. Results from a pilot study which has already finished are shown in this paper. Such study was carried out with fourth grade elementary school students in order to investigate about the autonomous learning of a division with two-figure divisor. A didactic intervention of a constructivist type was implemented, which the teacher gradually adjusted assistance to students so that the latter had the opportunity to find the solutions by themselves through a process of decision making and team work using work cards which provided evidence for students to self-assess themselves. By means of a problem solving environment, sense could be assigned to the arithmetic operations used and thus move from one figure-divisor divisions to two-figure divisor divisions. In relation to an algorithm of the division, a procedure consisting in dividing by parts was applied, finding that this was efficient in the comprehension of dividing, since the pupil leaves "traces" of his/her way of subtracting and multiplying within the algorithm of the division.

Key words: autonomous learning, dividing by parts

Introducción

El algoritmo de la división crea desconcierto en los alumnos porque, entre otras cosas, vincula otras operaciones, se aprende de manera mecánica, ignorando el valor posicional de los numerales y el divisor compuesto por dos cifras es tratado como si estuviese integrado sólo por una, etcétera; por ello, nos planteamos como *problema de investigación* indagar *las dificultades que enfrenta el estudiante de cuarto grado cuando desarrolla el aprendizaje autónomo de la división con dos cifras en el divisor* y nuestro *objetivo* es *explorar el aprendizaje autónomo de la división, recuperando el sentido que el alumno otorga a los componentes de la división.* En el estudio piloto concluido encontramos algunas respuestas a la *pregunta de investigación*: *¿Qué obstáculos de cálculo y de sentido enfrenta el escolar cuando comienza a resolver la división con dos cifras en el divisor?*

En nuestra investigación empleamos fichas de trabajo donde se le presentan al alumno situaciones problemáticas para que efectúe los procesos de cálculo; en algunas de ellas introducimos un procedimiento que llamamos "resultados parciales", el cual tiene sus antecedentes más remotos en los antiguos egipcios. Este procedimiento se basa en descomponer el dividendo para irlo repartiendo o agrupando equitativamente entre una cantidad dada. Este algoritmo de la división por partes mostró ser un apoyo eficaz en el tránsito de la división de una cifra en el divisor a la de dos cifras, sin perder el sentido y después pasar, con menos dificultades, a efectuar una generalización (esto es, integrar una cantidad variable de cifras en el divisor). Además de las fichas se utilizaron otros instrumentos metodológicos para guiar al estudiante a llegar al algoritmo canónico de la división por medio del trabajo grupal; el alumno fue tomando sus propias decisiones mediante la autoevaluación y logró un aprendizaje autónomo. En el estudio fue enriquecedora la contrastación entre los resultados de la autoevaluación y la evaluación efectuada por los observadores no participantes.

Marco teórico

En la literatura relacionada con la división, Gómez (1993) indica que este algoritmo tiene un alto grado de complejidad debido a que se resuelve de izquierda a derecha y los otros algoritmos se aprendieron comenzando con el orden menor; esto se acentúa porque en el desarrollo de la división se necesitan la sustracción y la multiplicación. Investigadores como Lamb y Brooker (2004) señalan que el origen de varias dificultades son los procedimientos rutinarios que implican la sucesión de acciones como "divide, multiplica, sustrae y baja la cifra siguiente" lo cual se complica cuando la división tiene dos dígitos en el divisor, circunstancia en la cual es posible perder la comprensión de dicha operación.

Otros conocedores que consideramos fundamentales son Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985, p. 7), quienes definen dos tipos de modelos de la división: como reparto y como medida. En el reparto (división partitiva), "un objeto o colección de objetos es dividido en un número de iguales fragmentos o sub-colecciones". Conforme el significado de "medida" (división cociente), "se busca determinar cuántas veces una cantidad dada está contenida en otra cantidad más grande". También, Carraher (1990, p. 216), entre otros, trata la división definiéndola de la siguiente forma: "dados los enteros A y B, existen enteros Q y R, tales que $A = QB + R$ donde $0 \leq R < B$. Esto puede ser transformado en $(A – R)/B = Q$; donde A es el dividendo, B el divisor, Q el cociente y R el residuo".

Así mismo, retomamos a Vergnaud (1991), pues apunta que un algoritmo adquiere sentido a través de problemas y situaciones concretas, mientras que Brown (1981) anuncia diferentes características que tiene la acción de dividir, entre ellas está el marco en el que se plantea el problema a resolver y la correlación entre la comprensión y las habilidades de cálculo. En consecuencia con lo anterior, nuestras fichas de trabajo fueron diseñadas para considerar las fases de la resolución de problemas: a) comprender el problema, b) planear cómo resolver el problema, con base en lo que sabe el estudiante, c) efectuar lo que se planeó y d) después de encontrar la solución, revisarla y discutirla (Polya, 2001).

Por otro lado, en nuestra indagación consideramos la enseñanza como una ayuda ajustada, mediante la cual se orienta al alumno para que vaya construyendo su conocimiento con ayuda de otros, para ello planeamos actividades que favorecieran un aprendizaje autónomo (Becker y Varelas, 1995, Coll y Martín, 1999, Carter y Fleener, 2002, entre otros). También incluimos la institucionalización del conocimiento (Brousseau 2000), para establecer el algoritmo canónico de la división que se fue creando en la dinámica de la situación.

Método

Para describir lo que sucede en el aprendizaje autónomo de la división se trabajó, durante un ciclo escolar, con alumnos de cuarto grado de una primaria oficial de una comunidad que presenta un adecuado rendimiento escolar, necesario en nuestra investigación, la cual es cualitativa y bajo la modalidad de observación participante, donde la observadora-investigadora se compromete e involucra en las mismas actividades que examina; además, toma nota de los rasgos relacionados con el problema de investigación para reflexionar sobre la relevancia de éstos. A continuación se menciona el *plan general* a efectuarse.

Escenario y sujetos

Se efectuó con 18 alumnos de cuarto grado de una escuela vespertina de la ciudad de México, donde la mayoría de los padres de familia ha cursado la educación secundaria y se involucra en las actividades organizadas en el plantel. Los alumnos presentan un adecuado rendimiento escolar, de acuerdo con la Evaluación Nacional para el Logro Académico en Centros Escolares de la Secretaría de Educación Pública. Se eligió a estos alumnos porque la reflexión y regulación de un aprendizaje autónomo requiere de adecuados niveles de comprensión, así como del dominio de los conocimientos previos para resolver problemas de división de dos cifras en el divisor.

Instrumentos metodológicos

Se emplearon dos *cuestionarios*, uno *inicial y* otro *final*, los cuales tuvieron las mismas tareas, con la finalidad de comparar las respuestas de los alumnos respecto al sistema decimal de numeración y las cuatro operaciones fundamentales (evaluación a cargo del investigador). Para promover el aprendizaje autónomo de la división se desarrolló una intervención didáctica constructivista, apoyada en 15 *fichas de trabajo* resueltas de manera individual o en pareja y explicadas después en el pizarrón por algunos compañeros que encontraron soluciones diferentes. En seguida, el alumno escribía en su Diario una reflexión sobre el contenido estudiado y estas ideas fueron expresadas en la última clase durante el debate. La autoevaluación fue llevada a cabo mediante un *portafolios*, el cual contenía las fichas de trabajo y un comentario breve que cada alumno hacía respecto al contenido tratado en esa sesión**.**

También en el estudio piloto se utilizó una *guía de observación* y la *entrevista individual*; para el registro de aspectos fundamentales que se manifestaban en el grupo y obtener información; se eligió la entrevista semi-estructurada por la flexibilidad y libertad en introducir aclaraciones, modificaciones o ampliaciones en el transcurso de su ejecución.

Procedimientos de validación

En este estudio piloto se emplearon dos estrategias de validación: controles cruzados y triangulación. Los controles cruzados fueron efectuados con dos observadoras no participantes, quienes registraron en una guía lo que sucedía en 5 sesiones de enseñanza y en cuanto a la triangulación, ésta fue de carácter mixto, contrastándose los datos aportados por las fichas de trabajo, los cuestionarios, las anotaciones que los alumnos escribieron en su portafolios y las entrevistas individuales.

Modelo de análisis

Para la valoración de resultados se adoptó el enfoque interpretativo con la perspectiva del interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000), pues en éste se pone énfasis en las relaciones entre el docente, los estudiantes y la tarea matemática; asimismo, se emplearon entrevistas individuales aplicadas a tres alumnos, quienes fueron seleccionados por representar un alto, mediano y bajo rendimiento, respectivamente (Cohen, Manion y Morrison, 2004). En cuanto al proceso de autoevaluación, se incluyó el portafolios como un instrumento que ayuda al estudiante a reflexionar acerca de su propio aprendizaje (Aebli, 1991 y Danielson y Abrutyn, 2000). En este estudio analizamos los resultados obtenidos durante las 15 sesiones de acuerdo con dos categorías: a) dificultades de cálculo y b) atribución de sentido a través del algoritmo de "resultados parciales".

Análisis de los resultados

En el estudio piloto ya concluido encontramos resultados originales, esto es, contenidos y procesos que no han sido reportados en investigaciones previas. Mostramos observaciones de los *cuestionarios* (I), una *ficha de trabajo* (II) y las *entrevistas individuales* (III).

I. En los *cuestionarios* se observaron diversos errores que el estudiante tiene (A) al utilizar la resta, (B) aplicar la multiplicación dentro del algoritmo de la división, (C) colocar las cifras en el cociente, (D) fragmentar el divisor y otorgar un significado al cero, así como (E) resolver correctamente el algoritmo, pero mostrando falta de sentido en la respuesta dada al problema planteado.

<table>
<tr><td>A) 11
9⟌119
- <u>9</u>
110</td><td colspan="3">2 alumnos (2/18) colocaron los números para resolver la sustracción como se les había enseñado el algoritmo, es decir, consideraron cantidades totales sin distinguir que estaban restando una cantidad de acuerdo con su valor relativo, señalamos que algunas restas fueron resueltas de manera equivocada.</td></tr>
<tr><td>B) 340 ÷ 18 = 2 + 4 525 ÷ 25 = 4 + 5 + 1
- <u>216</u> - <u>100</u>
094 425
- <u>432</u> - <u>105</u>
462 320

Por ejemplo:
18 × 2 = 216 ; 25 × 5 = 105 (sólo el 5 de 25)</td><td colspan="3">Se encontró que 2 alumnos (2/18) resolvieron su respectiva ficha de trabajo con el procedimientos de “resultados parciales” y hallamos cómo construyen sus tablas de multiplicación: doblando o quintiplicando por separado cada dígito.

Nota: corresponde al primer paso de la secuencia de cálculo; es el segundo paso.</td></tr>
<tr><td>C) 985 ÷ 24 = 6 + 30 + 5
<u>– 144</u>
841 635
<u>– 720</u> 24 985
121 <u>– 144</u>
<u>– 120</u> 841
01 …</td><td colspan="3">1 alumno (1/18) colocó erróneamente las cifras en el algoritmo convencional, pues suponemos que no tiene un adecuado concepto de valor posicional de los números, ya que “acomodó” las cifras de acuerdo con los resultados parciales que obtuvo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Resuelve el siguiente problema:

Josefina tiene 562 botones para repartir en 13 montones, si en cada montón debe poner el mismo número de botones ¿cuántos botones colocará en cada montón? ___________ ¿Cuántos botones no quedan en algún montón?__________</td></tr>
<tr><td>D) 12
13⟌562
- <u>3</u>
26
- <u>26</u>
002
- 0</td><td>2 alumnos (2/18) separaron los dígitos del divisor cuando se les dificultó considerar el número completo y no colocaron el cero, porque conjeturamos que le otorgaron el significado de “nada” por repartir.</td><td>E) 43
13⟌56,2
42
3</td><td>1 alumno (1/18) escribió: “3 sobran y caben 43 montoncitos”. Suponemos que el sentido se concentra en las palabras “montón” y “cabe”. Así, la división de reparto fue comprendida como de agrupamiento.</td></tr>
</table>

II. En una *ficha de trabajo* se encontró la falta de valor posicional como se muestra:

Cuando se tiene la tabla de múltiplos del divisor, 2 alumnos (2/18) resuelven la división de la siguiente manera:			
201 18⟌340 20 2	18 x 20 = 320; 340 – 320, 20; 20 entre 18, 1 18 X 1 para 20, 2	5 50 11⟌598 558 8	11 x 5 = 55; 55 y se baja el 8; 11 x 50 = 550 para 558, 8.

III. Las *entrevistas individuales* se aplicaron a 3 alumnos y se obtuvieron estas respuestas:

Rendimiento del alumno / Pregunta	Alto	Mediano	Bajo
Para ti ¿qué fue lo más difícil del procedimiento de "resultados parciales"?	*No se me hizo difícil.*	*Entenderle al principio.*	*Las tablas de multiplicar*
¿Cómo le explicarías el procedimiento de "resultados parciales" a otro compañero que aún no lo conoce?	*Hay una división, después a un lado vas multiplicando hasta que ya no puedas dividir, debajo de la división vas anotando lo que te salió, uno por uno, y se va restando igual hasta que ya no puedas restar.*	Es una división pero de restas, p.e. 156 ÷ 15, ahí le pones un número el que tú quieras y lo multiplicas.	No lo sé.
¿Qué tan fácil o difícil se te hizo resolver los problemas con "la casita" de la división?	*Se me hizo fácil porque le entendí, porque me sabía las multiplicaciones.*	*Fácil porque adentro de la casita se pone el número mayor y afuera el número menor y después se divide.*	Difícil pues no sabía dividir.

En seguida, nuestros hallazgos asociados con las categorías de análisis de este estudio.

a) *Dificultades de cálculo* de algunos estudiantes, quienes:

- Tuvieron desconocimiento de ciertas tablas de multiplicar (particularmente, las correspondientes al 6 y subsecuentes dígitos) y por ello recurrieron a las adiciones o sustracciones iteradas, así, el algoritmo les resultó confuso.
- Les faltó la escritura del cero, tanto en el cociente como en los residuos parciales, por la debilidad de las nociones posicionales construidas anteriormente y las ideas intuitivas de lo que significa el cero (nada, carencia o vacío).
- Presentaron errores en la resolución de las restas con transformación, debido a la ausencia de la noción de agrupamiento y desagrupamiento.

b) *Atribución de sentido a través del algoritmo de "resultados parciales",* de diversos estudiantes que:

- Regularon y controlaron los repartos o agrupamientos efectuados, avanzando hacia la construcción del algoritmo canónico con conocimientos propios.
- No fragmentaron las cantidades del dividendo ni del divisor.
- Transitaron de una a dos cifras en el divisor sin conflicto alguno, pues el procedimiento utilizado era el mismo.
- Algunos alumnos no consideraron el último residuo como la cantidad que quedaba sin dividir y continuaban restándola aún cuando lo sobrante o resto fuera menor que el divisor.

Conclusiones

El procedimiento de "resultados parciales" propició que el alumno tomara decisiones, al elegir el tamaño de los repartos o agrupamientos que fue haciendo él/ella y con ello, desarrolló su aprendizaje autónomo; además, el uso del portafolios le ayudó a reflexionar en sus aciertos y errores respecto de la división. Asimismo, le sirvió para revisar las fichas resueltas y leer sus comentarios, dándose cuenta de sus avances.

El trabajar diversas tareas inmersas en la resolución de problemas y en particular, el uso del procedimiento de "resultados parciales", favorecieron que el alumno pudiera darle sentido al algoritmo de la división, identificando las operaciones involucradas.

En el algoritmo canónico de la división, algunos alumnos tuvieron errores al colocar los residuos parciales, lo cual comprobamos que puede evitarse utilizando el procedimiento de "resultados parciales" porque en éste no se fragmenta el dividendo (el inicial y los parciales), ni el divisor; por ello no se les presentaron dificultades al realizar el pasaje de una a dos cifras en el divisor.

Resolver las diversas tareas de las fichas a través de varias modalidades (individual, en equipo y grupal), apoyó que el alumno aprendiera a dividir mediante sus propias habilidades y con ayuda de los compañeros. Además, la actividad en pareja fomentó mayor involucramiento de los alumnos.

Aunque no todos los alumnos llegaron a utilizar el procedimiento de "resultados parciales", principalmente por el desconocimiento de las tablas de multiplicar, a algunos estudiantes les fue de utilidad cuando se les presentó un problema donde necesitaban resolver una división con dos cifras en el divisor y no habían llegado a comprender "la división de la casita" como ellos le llaman al algoritmo canónico.

En general, en el cuestionario final se observó que hubo un claro avance en la comprensión de lo que implica la división y, por otra parte, los estudiantes mostraron interés en el debate, llegando a importantes conclusiones como: i) El procedimiento de "resultados parciales" es una división pero por partes, ii) cada quien puede poner diferentes números y iii) es necesario saber multiplicar y restar para poder dividir. Nosotros observamos que los alumnos tuvieron necesidad de colocar "letreros" arriba de los datos numéricos para darle sentido al algoritmo (esto es, construyeron categorías semánticas)s. Todo ello ratificó el logro del aprendizaje autónomo de la división.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1991). Aprender a aprender (151- 175). En *Factores de enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo.* Madrid: Narcea.

Becker, J. & Varelas, M. (1995). Assisting Construction: The Role of the Teacher in Assisting the Learner's Construction of Preexisting Cultural Knowledge (433-446). En L. Steffe & J. Gale (Eds.) *Constructivism in Education*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, M. (1981). Number operations (23-47). En *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16*. London: Alden.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. (D. Block & P. Martínez (Trads.). *Educación Matemática, 12*(1). 4-38. E. Wenzelburger (ed). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Carraher, D. W. (1990). Understanding the division: algorithm from new perspectives (215-222). En *Proceeding of the 14th* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Gobierno del Estado de Morelos, IBM de México y Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.

Carter, A. & Fleener, M. (2002). Exploring the teacher's role in developing autonomy (819-829). En Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting.North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (V.2), D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.). Columbus, OH: Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). Interviews. En *Research Methods in Education* (pp. 267-292). Great Britain: RoutledgeFalmer.

Coll, C. & Martín, E. (1999). La evaluación del aprendizaje en el currículum escolar: una perspectiva constructivista. En *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó. 163-183.

Danielson, Ch. & Abrutyn, L. (2000). *Una introducción al uso de portafolios en el aula.* México: Fondo de Cultura Económica.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics education 16* (1), 3-17. Georgia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J. D. & Llinares S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1). E. Wenzelburger (Ed.), México: Grupo Editorial Iberoamérica. 70-92.

Gómez, B. (1993). *Numeración y cálculo* (Vol. 3). España: Síntesis.

Lamb, J. & Booker, G. (2004). The impact of developing teacher conceptual knowledge on students' knowledge of division (177-184). En *Proceedings of the 28thConference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3). M. Johnsen Hornes & A. Berit Fuglestad (Eds.). Bergen, Norway: Bergen University College.

Polya, G. (2001). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas. 17-53.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas. 135-267.

Apéndice. Procedimiento de "resultados parciales"

manzanas cajas manzanas 59 ÷ 5 = 2 + 8 + 1 <u>- 10</u> 49 <u>- 40</u> 09 <u>- 5</u> 04 *Metimos 11 manzanas en cada caja y sobraron 4 manzanas.*	*Si tenemos 59 manzanas para repartir en 5 cajas y en cada caja tenemos que meter la misma cantidad ¿cuántas manzanas van a ir en cada caja? ¿Cuántas quedarán sueltas?* Se escribe el dividendo y el divisor en el orden en que se leen. Inicia el alumno eligiendo un número y lo coloca después del signo igual, el cual es multiplicado por el divisor y su producto es restado del dividendo para dar paso a un residuo parcial; este modo de proceder continúa (colocando un signo de adición entre cada número elegido), hasta que el residuo parcial es menor que el divisor.

EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Marger da Conceição Ventura Viana
Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
margerv@ terra.com.br

Resumen. Este artículo contiene una breve reseña histórica acerca de la evaluación, considerándola integrante del proceso de enseñanza/aprendizaje como un sistema de actividades realizadas con la participación conjunta de profesores y alumnos, en un continuo proceso de investigación. Detalla, también, sus funciones fundamentales. Es el marco teórico para contestar la pregunta científica de un proyecto acerca de la evaluación en la clase de Matemáticas en la Región de los Inconfidentes, provincia de Minas Gerais, Brasil. Presenta los resultados de ocho investigaciones realizadas en esa región.

Palabras clave: concepciones de evaluación, funciones de la evaluación

Abstract. This article contains a brief history about evaluation, which is an integral part of teaching and learning as a system of activities carried out cooperatively by teachers and students in an ongoing investigation process while also detailing its key functions. It is the theoretical framework to answer the scientific question of a project regarding assessment in mathematics classrooms in the Inconfidentes Region, in the state of Minas Gerais, Brazil. Here are presented eight results of research conducted in this region.

Key words: conceptions of testing, evaluation functions

Introducción

Este es un estudio de la evaluación del aprendizaje de las Matemáticas en investigaciones ya concluidas por la investigadora y sus alumnos de iniciación científica y del Curso de Especialización en Educación Matemática, concluyendo un proyecto cuyo objetivo fue estudiar el proceso de la evaluación del aprendizaje de las Matemáticas en la Región de los Inconfidentes, que contribuye al esclarecimiento público acerca del conocimiento de la situación vigente, al aumento de la literatura sobre el tema, al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y ayuda a la elaboración de políticas públicas en la educación. La región está ubicada a lo largo de la Carretera de los Inconfidentes y abarca las ciudades de Belo Horizonte, donde comienza, Itabirito, Ouro Preto, Mariana y Ponte Nova. Dichas investigaciones son las siguientes: La evaluación de las Matemáticas en escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales de Ouro Preto-MG (Diniz, 2003), La Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas en escuelas de Enseñanza Media de Ouro Preto-MG (Silva, 2004), La Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas en Escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales, de Mariana-MG (Pereira, 2005), La Evaluación de las Matemáticas en Escuelas de Enseñanza Media de Mariana-MG (Duarte, 2005), La evaluación de las Matemáticas en escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales de Itabirito-MG (Reis, 2005), La Evaluación como instrumento de promoción del aprendizaje de las Matemáticas (Vieira, 2006), Concepciones de profesores de Matemáticas de la EJA, de la ciudad de Belo Horizonte, sobre la evaluación del aprendizaje de las Matemáticas (Jalles, 2007) y La Evaluación de las Matemáticas en escuelas de la Enseñanza Media de Itabirito-MG (Almeida, 2007).

Un resultado del estudio es la preparación de un libro que contiene las investigaciones en detalle.

Justificaciones

La Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional-LDBEN (Brasil, 1996), en su artículo 13, trata de los deberes de los profesores y constituye un indicador importante para los cursos de formación, situando a los docentes como aquellos a quienes incumbe velar por el aprendizaje del alumno, incluso de aquellos que sigan ritmos diferentes de aprendizaje. Toma como referencia en la definición de sus responsabilidades, el derecho de aprender del alumno y ello refuerza la responsabilidad del profesor en su éxito en el aprendizaje, lo que se encuentra directamente relacionado con el sistema de evaluación. De esta forma, la comprensión de cómo ocurre el proceso de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas en clase, para perfeccionarlo, es algo relevante, pues es de conocimiento público los desastrosos resultados de alumnos brasileños en el área de las Matemáticas, en exámenes tales como el PISA, SAEB, Examen Brasil y otros.

Procedimientos

Se realizó un rastreo sobre el desarrollo histórico de la evaluación, considerada parte integrante del proceso de enseñanza aprendizaje, a partir de la comprensión de este proceso por diversos autores, y por la autora (Viana, 2002). Esta conceptuación obtenida por la profundización en la literatura culminó con la elaboración de una concepción de la evaluación capaz de ser seguida en el proceso escolar. Se establecieron exigencias para evaluar mejor a partir de los estudios teóricos realizados y de los datos obtenidos. El análisis de los datos fue realizado desde una perspectiva cualitativa y cuantitativa, a partir de los resultados contenidos en los informes de las ocho investigaciones realizadas, para responder a la pregunta: ¿Cómo se realiza la evaluación en la clase de matemáticas en la Región de los Inconfidentes?

Historial

En su sentido amplio, la evaluación se presenta como actividad asociada a la experiencia cotidiana del ser humano; está arraigada en la cultura, es inherente a cualquier actividad humana y, en consecuencia, a la educación. Así, evaluar es algo fundamental para tomar decisiones y hacer elecciones, siendo importante en la vida de cualquier ciudadano. Por esta razón se juzga necesario conocer sus funciones para utilizarla con el mayor provecho en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, históricamente, no ha sido utilizada como instrumento para el aprendizaje y sí como fin en sí misma. Midiendo, clasificando, aprobando y suspendiendo, termina por seleccionar y excluir. De este modo, ha sido un mecanismo de conservación y reproducción de la sociedad. En general, ocurre a partir de criterios externos. Muchas veces, al evaluado no se le dan a conocer las reglas, no participa del planeamiento ni de los análisis de los resultados. Ser suspenso en una evaluación es ser incompetente, irresponsable, incapaz. El proceso es de tal forma explosivo que en algunas instituciones aún recibe el sobrenombre de "bomba". De ahí la necesidad de su revisión (Viana, 2004).

Según Depresbiteris (1989), la práctica evaluativa por medio de exámenes, surgió en China, para seleccionar hombres que serían admitidos en el servicio público, hacia 2205 a. C. Así el examen aparece no como una cuestión educativa, sino como un instrumento de control social. Se puede inferir que el examen no es un elemento inherente a la práctica educativa, pues no surgió en el contexto escolar. Se habría ligado al sistema escolar en la Edad Media cuando, citando a Durkheim, habría surgido en la universidad medieval.

Al final del siglo XVII e inicios del XVIII, Comenius, en su Didáctica Magna (1657), considera el examen un problema metodológico, que debería contribuir para el aprendizaje pero apenas contribuye a la verificación de resultados. La Salle, en la Guía de las Escuelas Cristianas (1720), propone el examen como supervisión permanente.

Solo en el siglo XIX el examen se introduce en el contexto escolar en la forma que estamos acostumbrados: como un instrumento que utiliza notas para medir y clasificar. El test se entiende como instrumento de constatación y medida y no para investigar, y por considerarse incompleto no permite por sí solo percibir el desarrollo del alumno. De esa forma se presta solo al control, procurando seleccionar y, por tanto, incluir a algunos y excluir a otros.

Según Depresbiteris (1989), la denominación de evaluación es reciente y surgió con la creación de sistemas de test, siendo uno de los primeros el desarrollado por Orase Mann, que sustituye los exámenes orales por los escritos, buscando patrones más objetivos para la escuela. Los primeros tests objetivos fueron concebidos por el profesor inglés Fisher. Así, a comienzos del siglo XX, la mayor parte de la actividad que estaba caracterizada como evaluación educativa formal, estaba asociada a la aplicación de tests, lo que imprimía un carácter exclusivamente instrumental al proceso evaluativo.

A partir de la década de los 70, del siglo XX, la evaluación se transformó en un campo profesional definido. Se amplió la literatura sobre el tema y, al final de esa década, surgieron fuertes críticas al modelo tecnicista, que enfatizaba la técnica y el rigor científico en la elaboración de exámenes y tests objetivos para medir el conocimiento. Comenzaron a surgir los primeros trabajos bajo una óptica cualitativa de evaluación, valorizándose más aspectos subjetivos.

Actualmente el término evaluación del aprendizaje, a veces aparece con otras denominaciones, tales como evaluación cualitativa del rendimiento escolar, evaluación del aprendizaje escolar, entre otras. En general, traen una crítica al modelo tecnicista privilegiando aspectos cualitativos y subjetivos en detrimento de la objetividad con foco en resultados.

La LDBN (Brasil, 1996), utilizando la nomenclatura rendimiento escolar, normaliza algunos criterios generales para su verificación en el artículo 24, inciso V, p.17: (…) "la evaluación continua y acumulativa de la actuación del alumno, con predominio de los aspectos cualitativos sobre los cuantitativos y de los resultados a lo largo del periodo sobre los de eventuales exámenes finales", descartando así la evaluación del aprendizaje centrada en el producto final.

A principios de la década de los 80, del siglo XX, surgió, con gran fuerza, un nuevo enfoque sobre la evaluación: se trata del modelo comunicativo o psico-social, que adquiere relevancia especial en el contexto social en que se produce el aprendizaje.

Desde los años 90, del siglo XX, hasta hoy, el énfasis ha estado en la negociación de resultados con la participación de los educandos en la definición de criterios e indicadores. Se percibe entonces una tendencia a concebir la evaluación del aprendizaje como una herramienta pedagógica al servicio del crecimiento cognitivo y social del alumno.

De manera que, actualmente, la evaluación ya está siendo reconocida como instrumento auxiliar e integrante del proceso de enseñanza aprendizaje (Luckesi, 2003; Viana, 2002 y 2004). En esa perspectiva, el uso constante de procedimientos evaluativos diferenciados, refuerza el aspecto cualitativo del proceso y enfatiza el carácter investigativo del mismo.

Así interpretada, la evaluación del aprendizaje necesita ser realizada por profesores y alumnos que analizan procesos, recursos, estrategias y resultados de las actividades para aprender matemáticas, durante interacciones discursivas en clase. Para Ballester (2003), la evaluación es un proceso que acontece en tres etapas: recogida de información, análisis de la misma y conclusión sobre el resultado de dicho análisis y la toma de decisiones de acuerdo con la conclusión.

Concepción del sistema de evaluación

Según nuestra compresión del proceso de enseñanza/aprendizaje, la evaluación forma parte integrante de este y por eso debe cumplir diferentes funciones que ayuden al profesor y al alumno a elevar el nivel del resultado de sus actividades hasta que el alumno alcance un nivel de independencia. De esa forma, concebimos la evaluación como un sistema de actividades.

Hay varias propuestas de clasificación de las funciones de la evaluación (Luckesi, 2003; Viana, 2002; Domínguez Trelles, 1982; Vilarroel, 1980; Castro, 1992), pero admitiremos las siguientes por considerarlas fundamentales: de diagnóstico, de control, educativa y proyectiva.

La función de diagnóstico

Un diagnóstico bien conducido revela avances, retrocesos, dificultades, facilidades, las posibles causas o naturaleza de los éxitos o fracasos en el logro de los objetivos propuestos. Esto conduce al conocimiento del estadio de desarrollo individual y grupal de los educandos, y es por este motivo que esta función de diagnóstico es importante en el proceso de evaluación. Además:

…el diagnóstico del aprendizaje no se reduce al conocimiento y a lo que pueden hacer los alumnos con el mismo, sino que incluye, también, el profundizar en cómo el alumno aprende, qué hábitos de estudio posee, qué métodos de estudio emplea, si desarrolla métodos de autocontrol y si ha puesto en práctica acciones de auto-evaluación. (Silvestre y Zilberstein, 2000, p.36)

El diagnóstico no debe ser realizado apenas en la fase inicial del trabajo - comienzo del año, semestre o unidad, sino de forma continua para hacer posible la función proyectiva que consiste en proyectar las acciones futuras, nuevas actividades de acuerdo con las necesidades del alumno y del contexto. Así, la función de diagnóstico permite, también, la realización de la función proyectiva de la evaluación.

La función educativa

En la función educativa de la evaluación, el profesor comienza por dar a conocer a sus alumnos el proceso evaluativo curricular y lo que el mismo representa en el contexto educativo del país. Forma parte de esa función fortalecer y apreciar lo positivo, demostrando al mismo tiempo las carencias cognitivas y las deficiencias en el logro de los objetivos.

La función educativa de la evaluación se cumple cuando el profesor y el alumno tienen actitudes positivas en relación con la evaluación y, prestada la atención pertinente a las diferencias individuales, existe una buena relación entre ellos durante el proceso; es dada, también, la atención a las condiciones objetivas y subjetivas que puedan ocurrir en la evaluación, hay entendimiento en los términos y conceptos empleados.

Es preciso que haya transparencia ayudando a profesores y alumnos para la definición del contenido de la evaluación y de su consolidación. Debe ser diaria, es decir, continua, pues a través de esta práctica, los actores involucrados pueden sentir de forma práctica las necesidades y mejoras que se deben introducir en el proceso de enseñanza - aprendizaje. De esta manera, se refuerza el compromiso con el aprender, no pensando solo en la nota. Los objetivos de la asignatura deben ser claros, adecuados y posibles de ser alcanzados por los alumnos.

Para que la evaluación cumpla su función educativa, hay que tener en consideración el desarrollo afectivo y los valores que caracterizan la personalidad del estudiante. Este aspecto no es el único en la toma de decisiones justas y acertadas, sino que se tiene que considerar la integración de lo afectivo con lo cognitivo, que favorece actitudes responsables ante el estudio, tales como la atención voluntaria y el esfuerzo personal, así como la responsabilidad para consigo y para con el otro. Comprender esto es un paso en la construcción de la autonomía moral e intelectual del alumno. En la medida en que esa comprensión acontece, el alumno aumenta la capacidad de controlar su propio proceso de aprendizaje de matemáticas, ampliando su repertorio de habilidades académicas y estrategias de estudio.

También es necesario considerar el establecimiento de auto-análisis y el fortalecimiento del carácter. Aquí se destaca la importancia de un proceso democrático que respete el derecho de los alumnos a conocer los procesos de aprendizaje y los criterios de evaluación adoptados, garantizando su participación en el proceso evaluativo, a través de negociaciones y acuerdos establecidos con el profesor.

La función de control

En la función de control, se compara el objetivo planeado con el alcanzado; su función pedagógica consiste en adquirir conciencia del nivel de los objetivos alcanzados por el grupo y por cada alumno, incluso instituyendo clasificaciones (si fuese el caso), haciendo visibles las partes débiles y las fuertes (Viana, 2002 y 2004; Valle Lima, 2000).

En esta función hay una atribución de cualidad a las conductas de los estudiantes, teniendo un patrón individual predeterminado. El profesor atribuye una cualidad, manifestada en notas o conceptos. "El juicio se hace con base en los datos relevantes del objeto de la evaluación, que son las conductas aprendidas y manifestadas por los alumnos" Luckesi (2003, p.33).

Para evaluar el aprendizaje de Matemáticas es necesario tener "los indicadores específicos del conocimiento y del raciocinio matemático" (idem, p.33). Luckesi resalta, además, que la evaluación "conduce a una toma de decisión sobre el qué hacer con el alumno cuando su aprendizaje se manifiesta satisfactorio o insatisfactorio. Si no se toma una decisión sobre esto, el acto de evaluar no completó su circulo constitutivo" (2003, p.71).

Esta función tiene un carácter informativo y comparativo, a diferencia del control autoritario que se puede ejercer sobre los alumnos por medio de tests y exámenes. Aquí, el control se refiere al aprendizaje y tiene, según Viana (2002), la finalidad de informar al profesor, si hay necesidad de reorganizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, por medio de la comparación entre los objetivos previstos y los alcanzados. En este sentido, la evaluación se ve como soporte para identificar las potencialidades del alumno y darle la oportunidad de mejorar su aprendizaje, proporcionándole el beneficio de su actuación. En posesión de las informaciones proporcionadas por la evaluación, el profesor debe planear medidas para salvar las dificultades de los alumnos y, junto con los mismos, analizar la causa o causas de las mismas.

La función proyectiva

Teniendo en cuenta el diagnóstico y el control ya realizados, tendrá lugar la función proyectiva de la evaluación. Se trata de un momento de retroalimentación, en el sentido de determinar el nivel de partida para el proceso o tarea siguiente, la asimilación de nuevos conocimientos, la comprensión de los errores, de las dificultades y sus causas, el grado de corrección y el alcance y profundidad de los conocimientos y habilidades para que sea posible reorientar caminos para aprender.

Es necesaria la elaboración de un plan exacto y detallado para la inclusión de determinadas formas organizativas, métodos y medios de enseñanza para la obtención de determinados objetivos, teniendo en cuenta aquellos ya alcanzados. La evaluación se debe ver como la materia prima para la replanificación:

> …necesitamos aprender sobre y con la evaluación. Ella actúa, siendo así, al servicio del conocimiento y del aprendizaje, así como de los intereses formativos a los cuales, esencialmente, debe servir. Aprendemos con evaluación cuando la transformamos en actividad de conocimiento y en acto de aprendizaje el momento de la corrección. Solo cuando aseguramos el aprendizaje podemos asegurar la evaluación – la buena evaluación que forma – transformada ella misma en medio de aprendizaje y en expresión de saberes. (Álvarez Méndez, 2002, p.14)

Es decir, la evaluación escolar hace posible reorientar caminos para enseñar, por lo que es imprescindible que las funciones fundamentales de la evaluación estén presentes como instrumentos pedagógicos. Es así como debemos concebir una nueva forma de evaluar, no centrada en tests y exámenes sino, principalmente, en la auto-evaluación, en la valoración del trabajo conjunto, en el diagnóstico del nivel de desarrollo individual y grupal, para la orientación y ayuda necesaria en consonancia con los objetivos que se desean alcanzar. En consecuencia, para realizar la evaluación de una manera satisfactoria, se constituirá en un sistema de actividades, haciendo posible el cumplimiento de las funciones.

Y en lo referente a la evaluación específica del aprendizaje de matemáticas, se deben considerar las soluciones propias del alumno o del grupo, el uso y aceptación de los múltiples lenguajes de las matemáticas (numérico, algebraico, geométrico y gráfico), de la lengua materna y del diseño, el uso de cuestiones contextualizadas e interdisciplinares, la disminución y énfasis en cuestiones que prueban detalles y procesos mecanizados, etc.

Resultados de las ocho investigaciones

En relación con la forma como conducen los profesores el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas en clase, fue posible llegar a la conclusión de que la mayoría aún da prioridad a la clase expositiva y a la pizarra, con pocas excepciones. Algunos comentaron que utilizan problemas, diálogos, material concreto, trabajos en grupo o algún aparato, como el ordenador. Sobre la oportunidad que tuvieron de estudiar el tema de la evaluación en sus carreras de formación inicial, se percibió que, en general, no recibieron instrucción, hasta algunos que hicieron la Licenciatura en Matemáticas.

Los instrumentos de evaluación más citados fueron los exámenes individuales y los ejercicios en clase, que contribuyen poco en la ayuda al aprendizaje de los alumnos, según investigadores. Y las funciones de la evaluación no se cumplen.

Se habló también de exámenes individuales bimestrales, escritos u orales. Es posible que la evaluación así realizada se resuma a “dar notas”, clasificar, seleccionar y excluir a los alumnos, aunque algunos profesores se refirieran a trabajos evaluativos en grupos o individuales hechos en clase, y a tests. Sobre la comprensión, por parte de los profesores, de la evaluación como integrante del proceso enseñanza-aprendizaje, puede decirse que ellos no lo conciben así, sino como algo aislado.

Se concluye que la evaluación no forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Región de los Inconfidentes, de modo que contribuye muy poco para el éxito del proceso.

Referencias bibliográficas

Almeida, V. L. (2007). *La Evaluación de Matemáticas en escuelas de la Enseñanza Media de Itabirito-MG*. Informe de Investigación de Iniciación Científica, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Álvarez Méndez, J. M. (2002). *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*. Porto Alegre: Artmed.

Ballester, M. (2003). *Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.

Brasil (1996), *Lei nº 9.394 Diretrizes e Bases da Educação Nacional-LDBEN*. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Seção I.

Castro, Pimienta, O. (1992). *La Evaluación Pedagógica.* CEPTP. La Habana: ISPETP.

Depresbiteris, L. (1989). *O desafio da avaliação da aprendizagem: dos fundamentos a uma proposta inovadora*. São Paulo: EPU.

Diniz, M. P. (2003). *La evaluación de Matemáticas en escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales, de Ouro Preto-MG*. Informe de Investigación de Iniciación Científica, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Domínguez, Trelles, J. (1982). *Evaluación del Aprendizaje*. En Didáctica Universitaria. Serie/Ensaios. Universidad de Lima. Perú.

Duarte, A. P. S. (2005). *La Evaluación de Matemáticas en Escuelas de Enseñanza Media de Mariana-MG*. Informe de Investigación de Iniciación Científica, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Jalles, M. L. S. (2007). *Concepciones de profesores de Matemáticas de la EJA, de la ciudad de Belo Horizonte, sobre la evaluación del aprendizaje de Matemáticas.* Monografía de Especialización en Educación Matemática no publicada, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Luckesi, C.C. (2003). *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições.* São Paulo: Cortez.

Pereira, E. M.(2005). *La Evaluación del Aprendizaje de Matemáticas en Escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales, de Mariana-MG*. Informe de Investigación de Iniciación Científica, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Reis, A. A. (2005). *La Evaluación del Aprendizaje de Matemáticas en escuelas de Enseñanza Fundamental, series finales, de Itabirito-MG.* Monografía de Especialización en Educación Matemática no publicada, Universidad Federal de Ouro Preto.Brasil.

Silva, A. V. (2004). *La Evaluación del Aprendizaje de Matemáticas en escuelas de Enseñanza Media de Ouro Preto-MG.* Informe de Investigación de Iniciación Científica, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Valle Lima, A. D. (2000). *Maestro Perspectivas y Retos.* México: Editorial del Magisterio Benito Juarez.

Viana, M. C. V. (2002). *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matematica en la UFOP.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.

Viana, M. C. V. (2004). *O processo de Ensino/Aprendizagem de Matemática Sob diferentes Olhares.* Brasil: Universidade Federal de Ouro Preto.

Vieira, L. A. G. (2006). *La Evaluación como instrumento de promoción del aprendizaje de Matemáticas.* Monografía de Especialización en Educación Matemática no publicada, Universidad Federal de Ouro Preto. Brasil.

Silvestre, M. y Zilberstein J. (2000) ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje? México: CEIDE

EL ISOMORFISMO DE MEDIDAS COMO ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS EN EL TERCER GRADO DE LA ESCUELA PRIMARIA

Hugo Cerritos Amador
Cinvestav-IPN (México)
hugoca@sep.gob.mx, hcerritos@cinvestav.mx

Resumen. La presente investigación, de orden cualitativo y en curso, forma parte de una tesis de maestría en México respaldada por el CONACYT. El interés es identificar las dificultades de estudiantes del segundo ciclo de primaria (8-9 años) al resolver problemas multiplicativos según la estructura propuesta por Vergnaud (1995) en el "Isomorfismo de Medidas". La propuesta teórica es basada en el "Modelo Teórico Local" (Filloy, 1999). En su primera fase, de dos, se realiza la revisión de la propuesta institucional (Secretaria de Educación Pública, [SEP] 1993), bibliografía complementaria respecto a la enseñanza de problemas multiplicativos, y el diseño de pruebas y ejercicios de diagnóstico. Como resultados preliminares, se tiene que los niños muestran modos de resolución de problemas deficientes, debido a que en la propuesta oficial no se tratan problemas relacionados con el "Isomorfismo de medidas". Los niños presentan dificultades al resolver problemas de la vida cotidiana planteados en el aula.

Palabras clave: "isomorfismo de medidas", resolución de problemas, multiplicación

Abstract. This research, qualitative and ongoing, is part of a thesis of master´s in Mexico supported by the CONACYT. The interest is to identify the difficulties of students at the second primary cycle (8-9 years) to solve multiplicative problems according to the structure proposed by Vergnaud (1995) in the "Isomorphism of Measures". The theoretical proposal is based on the "Local Theoretical Model" (Filloy, 1999). In its first of two phases, the revision of the institutional proposal is carried out (Secretary of Public Education, [SEP] 1993), bibliography complementary to the teaching of multiplicative problems, and the design of tests and exercises of diagnosis. As preliminary results, we found that children use deficient ways of resolution of problems, because in the official proposal they do not deal with problems related to the "Isomorphism of Measures". Children then, have difficulties solving problems of everyday life raised in the classroom.

Key words: "isomorphism of measures", problem-solving, multiplication

Introducción

La sociedad del tercer milenio en la cual vivimos, es de cambios acelerados en el campo de la ciencia y tecnología: los conocimientos, las herramientas y las maneras de hacer y comunicar la matemática evolucionan constantemente; por esta razón, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la matemática deben estar enfocados en el desarrollo de las destrezas necesarias para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas cotidianos, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo. El saber matemática, además de ser satisfactorio, es extremadamente necesario para poder interactuar con fluidez y eficacia en un mundo "lleno de matemáticas".

Es decir, los problemas y la resolución de los mismos no es sólo una actividad del matemático, sino que también es una actividad de personas o niños que aún cuando no tienen un conocimiento profundo de la matemática, realizan acciones semejantes a las del matemático, es decir resuelven problemas que la sociedad o la necesidad y su medio le presentan constantemente.

En este sentido, la resolución de problemas se ha convertido en una forma de indagar los procesos del pensamiento que generan los alumnos cuando resuelven una situación problemática o problema, a la vez que permite determinar los procedimientos informales o estrategias que utilizan al enfrentarse a dichos problemas y su nivel de dificultad.

Así pues, en los últimos años se ha abordado la resolución de problemas multiplicativos con el fin de elaborar una clasificación de los mismos, indagar las estrategias que utilizan los alumnos cuando los resuelven y a la vez determinar su grado de dificultad.

Antecedentes

A lo largo de la historia el estudio de las matemáticas se ha realizado desde perspectivas diferentes, a veces enfrentadas, subsidiarias de la concepción del aprendizaje en la que se apoyan. Ya en el período inicial se produjo un enfrenamiento entre los partidarios de un aprendizaje de las habilidades matemáticas elementales basado en la práctica y el ejercicio y los que defendían que era necesario aprender unos conceptos y una forma de razonar antes de pasar a la práctica y que su enseñanza, por tanto se debía centrar principalmente en la significación y en la comprensión de los conceptos.

Thorndike en su teoría de tipo asociacionista y su ley del efecto fue muy influyente en el diseño del currículo de las matemáticas elementales en la primera mitad del siglo pasado. Por otro lado, Piaget, reaccionó también contra los postulados asociacionistas, y estudió las operaciones lógicas que subyacen a muchas de las actividades matemáticas básicas a las que consideró como herramientas para la comprensión del número y de la medida.

Otros autores como Asubel, Bruner, Vygotsky, también se preocuparon por el aprendizaje de las matemáticas y por desentrañar que es lo que hacen realmente los niños cuando llevan a cabo una actividad matemática, abandonando el estrecho marco de la conducta observable.

Por tal motivo las matemáticas se han convertido en la necesidad del quehacer humano al paso de la historia y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas.

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos; así, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro. En esas actividades las matemáticas serán para el niño herramientas funcionales y flexibles que le permitirán resolver las situaciones problemáticas que se le planteen.

Así la resolución de problemas es parte fundamental y es generadora de un proceso en el cual se combinan elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente aprendidos para solucionar una nueva situación. Es así como la resolución de problemas se considera la verdadera esencia para hacer matemáticas. Algunas de las discusiones sobre las estrategias (o heurísticas) de resolución de problemas en matemática, comienzan con G. Polya (1965) que fue el primero en proponerse enseñar conscientemente el proceso de resolución de un problema. Su obra tuvo como objetivo fundamental llevar al salón de clases procedimientos, principios y recursos en general, propios del quehacer matemático. El aporte principal lo constituye el modelo planteado por él basado en las conocidas cuatro etapas: comprender el problema, elaborar un plan de solución, ejecutar el plan y análisis de la solución obtenida.

En su criterio, lo más importante es lograr que el individuo aprenda a realizar conscientemente el tránsito por este camino, lo cual requiere del estudio de los métodos de solución llamados heurísticos; este es otro de sus innegables resultados.

El término resolución de problemas no es privativo de la Matemática, pero la relación entre ésta y la resolución de problemas parece estar implícita tanto en las creencias populares como en determinados modelos pedagógicos.

Justificación de la investigación

Para comprender la naturaleza de las dificultades de las matemáticas es necesario conocer cuáles son los conceptos y habilidades básicas que conlleva, cómo se adquieren y qué procesos cognitivos subyacen a su propia ejecución.

Por lo tanto el objetivo de la enseñanza de las matemáticas no es sólo que los niños aprendan las tradicionales cuatro reglas aritméticas, las unidades de medida y unas nociones geométricas, sino su principal finalidad es que puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana.

La orientación adoptada para la enseñanza de las matemáticas pone el mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas. Este enfoque implica, organizar la enseñanza en torno a seis líneas temáticas: los números, sus relaciones y las operaciones, la medición; la geometría, procesos de cambio, tratamiento de información y predicción y azar.

Para lograr el aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés.

Pregunta de investigación

Con el objetivo inicial de analizar cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza dentro del aula el planteamiento y la resolución de problemas multiplicativos con el "Isomorfismo de Medidas" y realizando el estudio de la primera fase orientado hacia la pregunta: ¿Cómo se desarrolla y relaciona el "Isomorfismo de Medidas" en la resolución de los problemas multiplicativos en el tercer grado de la escuela primaria? En particular muestro los primeros resultados de dicha fase, se lleva a cabo con treinta niños que cursan el grado señalado anteriormente dentro de un contexto escolar enmarcado en el cumplimento de objetivos y contenidos señalados por el currículo oficial.

Perspectiva teórica

La investigación se llevará a cabo en base al *Modelo Teórico Local* (MTL) donde el objeto de estudio se enfoca en cuatro componentes transversales, en donde sólo se abordarán dos: Modelos de Enseñanza y Modelos de Procesos Cognitivos.

Para dicha investigación considero a un modelo de enseñanza como un conjunto de secuencias de textos matemáticos -porciones bastas de discurso- cuya elaboración y descodificación por el alumno le permiten dar una interpretación a aquellos textos, propuestos en un Sistema Matemático de Signos (SMS) más abstracto, y descodificarlos como mensajes con un código matemático socialmente bien establecido, es decir logra la meta educativa de dicho modelo (Filloy, 1999).

Los procesos cognitivos (Filloy, 1999) que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático, van afinando los elementos complejos como los que se utilizan en la percepción, en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con el proceso de comprensión, en el uso cada vez más intensivo de la memoria, el desencadenamiento de proceso de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problemáticas, en el aprendizaje ligado a los procesos de resolución de problemas, que requieren del uso novedoso de los SMS de la matemática escolar.

En la siguiente figura (véase figura 1) se muestra de manera detallada el diseño, organización y curso de la investigación.

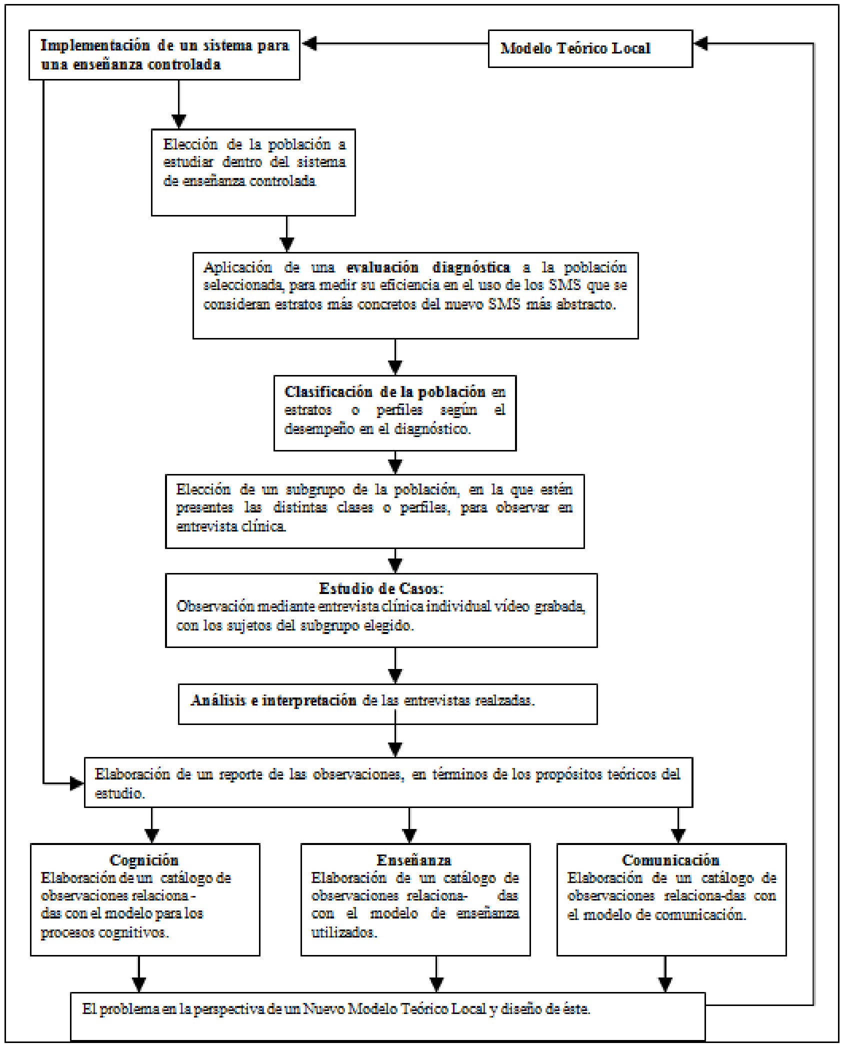


Figura 1. Organización de la investigación y Modelo Teórico Local (MTL).

Diseño: escenario y sujetos

La investigación se lleva a cabo en una Escuela Primaria del Distrito Federal situada en la delegación Iztacalco, se está trabajando con treinta alumnos de tercer grado del turno matutino, cuyas edades oscilan entre los 8 y 9 años; se proyecta trabajar con ellos en un período máximo de cuatro semanas.

Para realizar el análisis de la dimensión curricular se parte por examinar los planes y programas de estudio de tercer grado de la escuela primaria, los ficheros de actividades didácticas y los libros para el maestro de los grados respectivos, así como los objetivos y contenidos que se mencionan en el eje de “los números sus relaciones y sus operaciones” y al interior de éste, el campo de los problemas multiplicativos y el algoritmo de la multiplicación. También se consultarán algunas investigaciones y libros relacionados con el tema.

El análisis continúa considerando la organización matemática propuesta en los textos escolares con respecto a los problemas multiplicativos, y para ello se analizó los libros de texto oficiales distribuidos por la Comisión de Libros de Texto Gratuitos del Gobierno Federal. En lo sucesivo se señalaron algunas coincidencias y diferencias de la organización matemática propuesta en los Planes y Programas de estudio con las propuestas en dichos libros. Una vez finalizado el análisis entre ambos se formularon hipótesis que se contrastaron empíricamente.

Para llevar a cabo esta primera fase se aplicaron ejercicios y cuestionarios exploratorios, exámenes de diagnóstico, con la finalidad de detectar las problemáticas existentes con respecto al planteamiento y resolución de problemas multiplicativos y así generar la propuesta de uso del "Isomorfismo de Medidas" -que a continuación hago referencia- para abordar estos problemas en el tercer grado de la Escuela Primaria.

La resolución de problemas

Para trabajar la multiplicación desde el contexto de la resolución de problemas, se opta por la conceptualización propuesta por Vergnaud (1995), autor que ubica los problemas multiplicativos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa. Vergnaud ha abordado las relaciones y operaciones y otros conceptos, creando la noción de campo conceptual: "un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados." (Vergnaud, 1995, p. 127)

Tradicionalmente la operación multiplicativa se ha presentado como una relación ternaria **a x b = c**. Para Vergnaud se trata de una relación cuaternaria entre 4 cantidades y dos tipos de medidas. Dos cantidades corresponden a medidas de un cierto tipo (por ejemplo, número de objetos) y las otras dos, son medidas de otro tipo (por ejemplo, su precio) Este análisis genera el siguiente tipo de esquema que ejemplifica los espacios de medida que se establecen y las relaciones entre las cantidades:

M1	**M2**
A	B
C	D

Isomorfismo de medidas

El Isomorfismo de medidas es una estructura que consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas. En el "isomorfismo de medidas" con respecto a los problemas multiplicativos (Vergnaud, 1995, p. 197), se menciona que es una estructura que consiste en una proporción múltiple entre los espacios de medida: medida uno (M1) y medida dos (M2).

Considérese el siguiente problema:

> *"Roberto compra cuatro paletas al precio de cinco pesos cada una. ¿Cuánto debe pagar Roberto? "* .

En el siguiente esquema se observa el "Isomorfismo de Medidas" del problema anterior, donde **M1** es el espacio de medidas (número de paletas), y **M2** es el espacio de medidas el (costo de las paletas).

M1	M2
1	5
4	?

Para este autor los datos numéricos son tres: 4 paletas y una paleta que cuesta 5 pesos, entre las cuales se establece una relación de proporcionalidad directa simple.

La multiplicación puede concebirse de dos formas: como ley de composición binaria ó como una operación unitaria.

En el caso de la Ley binaria el niño reconoce que debe multiplicar 4 por 5 ó 5 por 4 para solucionar el problema.

Según Vergnaud (1995), en la estructura "Isomorfismo de Mdidas" se observa que:

a) Se establece entre dos espacios de medida una relación cuaternaria, es decir intervienen 4 magnitudes o términos, en la cual se debe hallar el valor de una de ellas para su solución.

b) El procedimiento de solución es de tipo escalar o vertical y de operador función horizontal. En el primero se establece una relación entre magnitudes del mismo espacio, mientras que en el segundo consiste en establecer una relación entre magnitudes de espacio de medida diferente.

Resultados preliminares

Del análisis de la propuesta institucional y del primer acercamiento empírico con los ejercicios de diagnóstico aplicados a los estudiantes resulta escaso el tratamiento de problemas multiplicativos relacionados con el Isomorfismo de Medidas y sólo se centra en el uso del algoritmo con respecto a una relación ternaria (véase figura 2) en donde al observar a los alumnos durante el desarrollo de la clase con el profesor titular la mayoría siempre preguntaba si era de suma, resta, multiplicación y división.

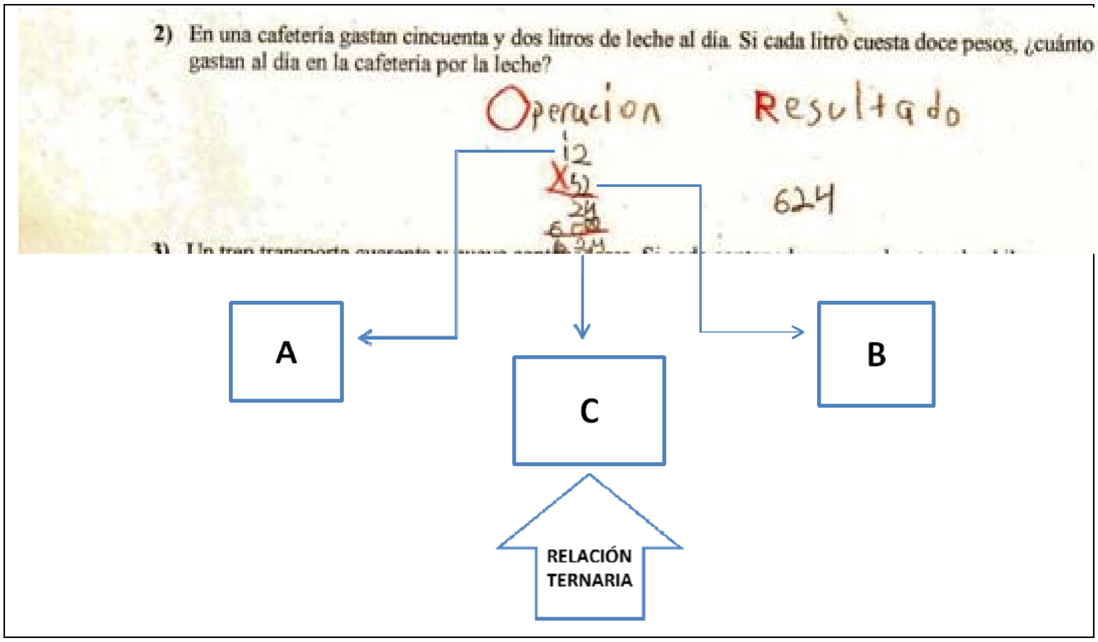


Figura 2. Relación ternaria

Por otra parte los alumnos no dominan el algoritmo (relación ternaria) como lo señala la currícula oficial (véase figura 3). En el Plan y Programas de Estudio de la Escuela Primaria no se aborda el isomorfismo de medidas. El docente tiene escaso conocimiento sobre el "Isomorfismo de Medidas" y por consiguiente no lo aplica ni lo relaciona con el aprendizaje de sus alumnos.

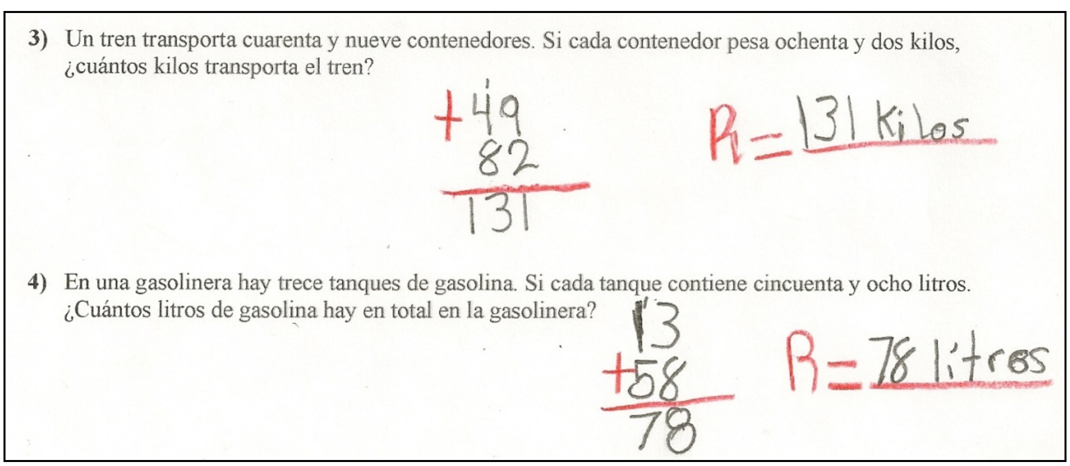


Figura 3. Ejemplos que evidencian que los estudiantes no dominan la relación ternaria.

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*, México: Trillas.

Secretaría de Educación Pública. (1993). *Plan y Programas de estudios 1993*. Educación Básica Primaria. Dirección General de Desarrollo Curricular perteneciente a la Subsecretaría de Educación Básica, México.

Secretaría de Educación Pública. (1994). *Fichero de actividades.* Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública, México.

Vergnaud, G. (l995): *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela.* México: Trillas.

PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN EDUCACIÓN ESPECIAL

José Marcos López Mojica, Ana María Ojeda Salazar
CAM 18; DME, Cinvestav-IPN (México)
jmlopez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. La investigación, de carácter cualitativo, se enfoca en el pensamiento probabilístico de niños de educación especial básica. La sustentan elementos teóricos de tres órdenes: epistemológico, cognitivo y social. El proceso de la investigación sigue los lineamientos del órgano operativo y de la célula de análisis de la enseñanza. En su segunda fase, de tres, participaron ocho niños (13-15 años) con distintas afecciones, en actividades de enseñanza en el aula que distinguen los vértices del triángulo epistemológico para introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad, el cual, según Fischbein, promueve el razonamiento probabilístico. Se utilizó el método de experienciación y la técnica de registro de datos fue la videograbación. Los niños interactuaron con el fenómeno aleatorio, identificaron sus posibles resultados, registraron sus frecuencias en una tabla, existe ausencia de la idea de azar y se mantiene el animismo en sus respuestas. En el proceso se evidenció el uso de los esquemas motriz y visual en la producción de respuestas de los niños.

Palabras clave: educación especial, pensamiento probabilístico

Abstract. This qualitative research is devoted to the probabilistic thinking of children of basic special education. The theoretical framework considers the epistemological, cognitive and social aspects. The research followed the guidelines of the operative organ and the cell for analyzing the teaching. In the second of its three phases eight children (13-15 years) with different affections carried out an activity based on the epistemological triangle to introduce the frequential approach of probability that after Fischbein promotes the probabilistic reasoning. The methods were the experiencing of the teaching and the log: the sessions were videotaped. Children registered the frequencies in a table provided to them. The children dealt with the random phenomenon, from which they identified its possible results and their frequency, even the relative frequency. Evidence was given of their use of motor and visual schemes for answering the questions posed.

Key words: special education, probabilistic thinking

Introducción y planteamiento del problema

Pocos trabajos ahondan en el estudio del pensamiento probabilístico en comunidades con necesidades especiales (López-Mojica, 2009). Las investigaciones que se interesan en estas comunidades indagan en la noción de número, procesos multiplicativos, o algunos conceptos lógico-matemáticos (seriación, relación uno a uno, clasificación).

Actualmente se considera como estudio la introducción de fenómenos aleatorios de una manera sistemática, así como la entrada de otros conceptos matemáticos convocados por los conceptos de estocásticos en comunidades con necesidades especiales (López-Mojica, Ojeda y Cantoral, 2009). En López-Mojica (2009) se identificó el uso de algunos esquemas compensatorios en la adquisición de nociones de estocásticos. Respecto al *Síndrome Down*, debido a su desarrollo cognitivo lento, es necesario enfatizar en el uso del esquema visual, motriz y auditivo, repetir las instrucciones es un aspecto favorable en la comprensión de las mismas.

El estudio de aspectos del pensamiento matemático de tales poblaciones es importante para la elaboración de estrategias de enseñanza por parte del docente. Pues investigaciones como ésta ofrecen a los profesores referencias para el tratamiento de conceptos matemáticos a poblaciones con necesidades especiales, y en particular para la enseñanza de estocásticos.

Nuestra investigación, de carácter cualitativo, se enfoca en la enseñanza de la probabilidad a niños de educación especial básica. El objetivo es caracterizar su desempeño en tareas donde intervenga el azar e identificar esquemas compensatorios que se pudieran poner en uso ante ese contenido (Vygotski, 1997).

Perspectiva teórica

El estudio considera dos supuestos. El primero se refiere a que la experiencia favorece el desarrollo de las intuiciones, por lo que el registro de frecuencias contribuye a la adquisición de la idea de probabilidad. El otro supuesto refiere a que frente a *ausencias o limitaciones existen esquemas compensatorios que permiten el desarrollo del pensamiento en el niño con alguna deficiencia* (Vygotski, 1997).

La investigación está sustentada por tres ejes rectores (Ojeda, 2008). El *epistemológico*, considera la propuesta de Heitele (1975) respecto a diez ideas fundamentales de estocásticos como guía para un curriculum en espiral, que parta de un plano intuitivo y arribe a un plano formal. Las etapas de la constitución de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951). En el eje *cognitivo* se considera el desarrollo de la intuición como base del pensamiento probabilístico del niño. En particular, se considera la intuición de frecuencia como base del pensamiento probabilístico. De manera más general, se consideran en este eje los procesos compensatorios en el desarrollo del infante con alguna *ausencia* o *limitación*. Vygotski (1997), que a su vez, se complementan con las especificaciones de las funciones del cerebro (Luria, 2005).

El eje *social* se interesa en las *interacciones* resultantes del proceso educativo. Steinbring (2005) propone que para la adquisición de un concepto matemático es necesaria la interacción entre el contexto de referencia en que se implica el concepto, el signo y el concepto matemático.

Proceso de investigación

En la segunda de las tres fases de la investigación, se analiza la enseñanza de estocásticos en el aula de sexto grado de primaria pública especial con actividades propuestas por los investigadores, que no forman parte de la enseñanza impartida por la institución. Se siguen los lineamientos del *órgano operativo* y de la *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006). Se utilizaron como instrumentos un guión de clase y un cuestionario de preguntas abiertas relativo a la actividad desarrollada sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad. Las técnicas para el registro de datos fueron la videograbación, las transcripciones y la escritura en papel. Los instrumentos se aplicaron en aula alterna (Ojeda, 2006), llamada así por ser una alternativa al aula tradicional, pues conjuga docencia e investigación, durante duración de 30 minutos cada una conducidas por el investigador, a ocho niños de 13 a 15 años [**M** y **W** con síndrome Down y problemas de lenguaje; **A**, **An** y **Ye** con retraso mental; **Mi** con problemas motrices y de lenguaje; y **T,** autista; **Ar**, trastorno de hiperactividad y déficit de atención]. Los criterios de análisis de los datos recopilados fueron ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos que aluden a estocásticos, situación y contexto, es decir se considera las condiciones en las que se realizó la actividad.

Actividad propuesta

El objetivo de "La carrera" es la introducción del enfoque frecuencial de la probabilidad. La actividad consiste en realizar giros de una ruleta con seis sectores iguales, que se distinguen por figuras de círculos, triángulos y cuadrados (véase Figura 1). El resultado de cada giro se registra en una tabla impresa en papel, marcando una celda de la fila correspondiente a la figura indicada por la flecha al cabo del giro. A continuación de la tabla se plantean cuatro preguntas abiertas sobre la figura "ganadora", cuyos registros alcanzan primero la meta, por qué resultó ganadora, sobre el total de giros realizados y la frecuencia resultante de la figura seleccionada al inicio de la actividad por cada alumno. Las orientaciones en la enseñanza, las interacciones resultantes entre los niños y la actividad permiten el acceso al contenido conceptual (Steinbring, 2005).

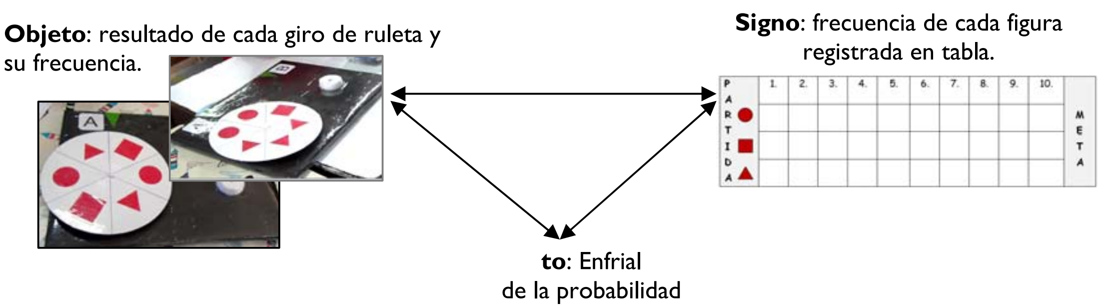


Figura 1. Triángulo epistemológico en la actividad desarrollada en el aula.

La disposición de la figura (véase la Figura 1) permite distinguir que a un nivel de objeto lo que interesa es el resultado de los giros de las ruletas, a un nivel de signo interesan los registros de frecuencias en las celdas, la interacción de los vértices anteriores permitirían la adquisición del enfoque frecuencial de la probabilidad; con la asignación numérica de cada frecuencia absoluta la adquisición de la idea de variable aleatoria también interesa.

La Tabla 1 presenta los resultados del análisis de la actividad según los criterios que propone la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006) señalados en la sección 4.

Tabla 1. Resultado del análisis de la actividad "La carrera"

Criterios de Análisis	"La carrera"
Situación	Giros de una ruleta con sectores iguales y diferentes cantidades de figuras: círculos, triángulos y cuadrados.
Ideas fundamentales de estocásticos	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, equiprobabilidad.
Otros conceptos matemáticos	Números naturales, adición.
Recursos Semióticos	Tablas, lengua natural escrita, figuras geométricas.
Términos empleados	"del total de giros, cuántas veces", "marca con", "elegir", "lo que indique la flecha", "gira la ruleta", "llena una casilla".
Esquemas compensatorios	Se requiere del uso del esquema visual y el esquema motriz.

Primeros resultados

Los niños operaron el material, lo que les proporcionó una experiencia directa con la situación aleatoria de la que pudieron identificar sus posibles resultados. Ellos realizaron el registro, en la tabla que se les proporcionó, de la figura indicada por la flecha al final de cada giro de la ruleta, anotando una cruz en la celda correspondiente o bien un dibujo de la figura. Para dar respuesta a las preguntas planteadas, primero se pedía a los niños que respondieran de manera oral, después se pedía que escribieran lo argumentado.

Figura 2. T señala las figuras de la ruleta.

Ideas fundamentales de estocásticos. Los niños distinguieron los posibles resultados al girar la ruleta, es decir distinguieron el *espacio muestra* [7, 8, 26, 27]:

[7] I: ¿Qué figuras tenemos?
[Ruleta con dos, triángulos, dos círculos, dos cuadrados].

[8] An: Cuadrados, triángulos, círculos…

[9] M: Cuadado [murmura].

[22] I: ¿Cuántas figuras en total tenemos?

[23] Ye: No sé… Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis
[cuenta de uno en uno, señalando las figuras].

[24] I: ¿Cuántas figuras tenemos en total?

[25] An: Tres.

[26] I: Son tres tipos de figuras, pero ¿cuántas son?

[27] An: Seis.

[28] I: ¿Cuántas tiene el triángulo? [Dos triángulos]

[29] An: Dos.

[30] I: ¿Cuántas el círculo? [Dos círculos]

[31] An: Dos.

[32] I: ¿Cuántas el cuadrado? [Dos cuadrados]

[33] An: Dos.

M y **W** (síndrome Down) sólo identificaron las frecuencias absolutas de las figuras. **A**, **An** (retraso mental) y **Mi** (problemas motrices y de lenguaje) dieron evidencia de nociones de la *frecuencia relativa*, pues se refirieron a la frecuencia de cada figura y a su relación respecto al total de giros [204, 206, 213, 215]:

[200] **I**: ...Ahora díganme, ¿cuántos giros realizamos en total? Para el triángulo ¿cuántos [giros] tenemos?

[201] **A**: Ocho, diez…

[202] **An**: ¡Ocho!

[203] **I**: ¿Cuántos tiene el triángulo?, ¡No adivinen…!

[204] **An** y **Mi**: ¡Tres!

[205] **I**: Tres, ¿Y el cuadrado?

[206] **Mi**: Oco [Ocho, problemas de lenguaje].

[207] **I**: Ocho, ¿Y el círculo?

[208] **A**: Diez…

[209] **I**: En total, ¿cuántos tenemos?, ¿Cuántos giros hicimos? Sumemos…

[210] **A**, **An** y **Mi**: Uno, dos, tres,… [murmurando].

[211] **Mi** y **An**: ¡Veintiuno!

[212] **I**: Mi, del total de giros, de veintiuno, ¿cuántos son para tu figura?

[213] **Mi**: Die [problemas de lenguaje].

[214] **I**: An, para tu caso, del total de giros, ¿cuántos le corresponden a tu figura?

[215] **An**: Tres [sonriendo].

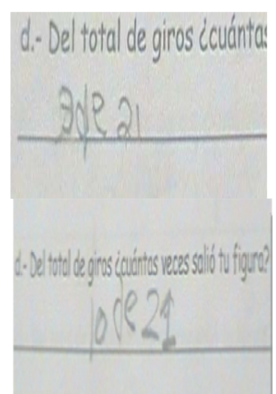


Figura 3. Respuesta escrita que refiere al enfoque frecuencial.

Esquemas compensatorios. Mi (problemas motrices y de lenguaje) respondió a las preguntas con expresiones mímicas, pues presenta problemas de lenguaje. **A** (retraso mental) también utilizó la mímica, pero ella al ayudar a responder una pregunta a **M** (síndrome Down) (véase Figura 4. Izq.).

M y W (síndrome Down) tenían que fijar su mirada en la ruleta y en el resultado para realizar el registro efectivo del resultado, así como en la tabla para identificar las frecuencias absolutas. T (autista) respondió a las preguntas con la intervención de la docente, quien le leía la pregunta del cuestionario y T respondía, y cuando escribía la respuesta la docente dictaba las palabras que T no podía escribir.

Figura 4. (Izq.) Uso de expresiones mímicas. (Der.) Uso del perceptual visual para identificar las frecuencias absolutas.

Otros conceptos matemáticos. Se obtuvo evidencia del uso del *conteo uno a uno*, pues al preguntarles a los niños sobre la cantidad de figuras en la ruleta, Ye (retraso mental) realizó el conteo de manera rápida [23]; también cuando se les preguntó sobre el total de giros realizados A, An (retraso mental) y Mi (problemas motrices y de lenguaje) realizaron el conteo [210]. An, en toda la actividad realizaba la suma de las frecuencias relativas de cada figura, y recuperaba el total de giros realizados.

[27] An: Seis.
[28] I: ¿Cuántas tiene el triángulo?
[29] An: Dos.
[30] I: ¿Cuántas el círculo?
[31] An: Dos.
[32] I: ¿Cuántas el cuadrado?
[33] An: Dos.

Recursos semióticos. La tabla permitió organizar el registro de los resultados de cada giro; el registro de las frecuencias absolutas de las figuras y recuperar el total de giros efectuados.

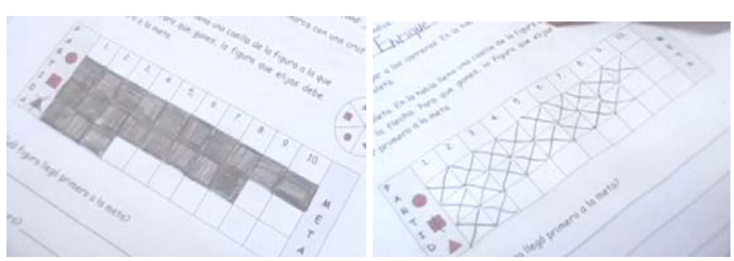


Figura 5. Registros de frecuencias (Izq. Producción de Ye; Der. Producción de An)

Debido a los problemas de lenguaje (W, A y Ar), tuvieron problemas con la lecto-escritura, por lo que se escribían oraciones cortas; requerían de una referencia, así que se les escribía en el pizarrón la palabra que se les dificultaba (véase la Figura 6).

Términos que aluden a estocásticos. Con la pregunta "*¿ganó tu figura, por qué?*" Se pretendía indagar si en las justificaciones que los niños realizaran, se podían identificar nociones de azar. En sus respuestas los niños tendían a buscar causas como "giré muchas veces", "le ayudé a ganar", "porque quiso", "porque le ayudamos los niños".

Figura 6. Escritura en el pizarrón como referente.

Tabla 2. Características de los niños en el aula alterna del sexto grado.

Afección y casos	**Ideas fundamentales**	**Problemas de lenguaje**	**Esquemas compensatorios**
Síndrome Down			
M	Espacio muestra Frecuencia absoluta	Poca oralización	Esquema visual: observaban la figura indicada por la flecha y la casilla que le correspondía
W	Espacio muestra	Pronuncia en su mayoría palabras monosilábicas. Problemas con la expresión "llena una casilla"	Esquema visual Esquema motriz
Retraso mental			
Y	Espacio muestra Frecuencia absoluta	Oralizada Fluidez en el habla	Esquema visual
A	Espacio muestra Frecuencia relativa	Pronuncia pocas palabras. Las oraciones incompletas	Esquema visual
An	Espacio muestra Frecuencia relativa Variable aleatoria	Habla fluida	Esquema auditivo Esquema motriz Memoria de trabajo
Trastorno de hiperactividad y déficit de atención			
Ar	Espacio muestra	Habla fluida	Esquema visual
Problemas motrices			

Mi	Espacio muestra Frecuencia relativa Variable aleatoria	No pronuncia palabras, emite sonidos	Esquema visual Esquema motriz
Autismo			
T	Frecuencia absoluta	Habla fluida	Esquema visual Esquema motriz Memoria de trabajo

Comentarios

En un primer acercamiento, la actividad "la carrera" ofreció a los niños el contacto con un fenómeno aleatorio y medios para su estudio. Consideramos necesario proponer en la enseñanza actividades como ésta, referidas a una diversidad de situaciones azarosas [urnas, tómbolas, dados] que, mediante el enfoque frecuencial de la probabilidad, suministren una base para introducir el enfoque clásico.

La Tabla 2 resume los resultados de nociones de estocásticos y las características de los niños.

En las respuestas de los niños no identificamos algún indicio de la idea de azar. En cambio, siempre trataron de encontrar alguna causa de que cierta figura saliera muchas veces. A esta edad bajo las características presentes en los niños aun no superan la etapa del animismo.

La actividad enfatiza la distinción de los vértices del triángulo epistemológico, pues según la propuesta de Steinbring (2005), las relaciones que se establezcan entre el objeto, signo y concepto favorecen la adquisición de conceptos matemáticos. Lo anterior proporciona una oportunidad de acceso, a los contenidos matemáticos de una manera efectiva, por parte de los niños con necesidades especiales.

Referencias bibliográficas

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in children*. Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An Espistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 6, pp. 187-205. Holanda: Reidel.

López-Mojica, J.M. (2009). *Estocásticos en el Segundo Grado de Educación Especial.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

López-Mojica, J.M., Ojeda, A.M. y Cantoral, R. (2009). Estocásticos en el segundo grado de educación especial. En Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 22. México, D.F., págs. 5-13. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Luria, R. A. (2005). *Funciones corticales superiores en el hombre*. México: Fontamara.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (ed). *Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Ojeda, A. M. (2008). Probabilidad y Estadística en Matemática Educativa: Ejes rectores [Resumen]. *Vigesimosegunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, D.F.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. París: PUF.

SEP. (2009). *Matemáticas Sexto Grado*. México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología*. *Obra Escogidas V*. España: Visor Dis.

ARGUMENTAR-CONJETURAR: INTRODUCCIÓN A LA DEMOSTRACIÓN

Efrén Marmolejo Vega, Gema Rubí Moreno Alejandri
Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas (México)
efrenmarmolejo@yahoo.com, alejandrigemath@gmail.com

Resumen. Presentamos como potenciar a la Argumentación para la producción de conjeturas, asumiendo que es precisamente la formulación de conjeturas la actividad central de la construcción de conocimiento matemático en la educación secundaria y la Argumentación una competencia fundamental a desarrollar. Exploramos cómo fortalecer conjeturas a partir de la fortaleza de los argumentos que las soportan, y al lograrlo, generamos las condiciones de partida para su Demostración. Así, caracterizamos a la Argumentación en sus facetas de preformal y formal, al tiempo que proponemos una metodología para fortalecer los argumentos en la fase preformal, mediante mecanismos de afirmación y refutación.

Palabras clave: argumentar, conjeturar, demostración

Abstract. We present in the following article, a proposal to potentiate argumentation for conjecture's production, assuming precisely that conjectures formulation is the main activity in the construction of mathematical knowledge at high school and the argumentation an essential activity to develop. We explore ways to fortify conjectures as from fortitude of arguments that endure them, and when it is achieved, we generate the beginning conditions for its demonstration. Thereby, we characterize the argumentation in its preformal and formal facets, while we propose a methodology to strengthen the arguments in preformal phase, through affirmation and refutation mechanisms.

Key words: argue, conjecture, demonstration

Durante las dos últimas décadas, ha tomado interés investigar con propósitos didácticos, la relación Argumentar–Demostrar, concebida la primera como el acto de convencer en base a la pertinencia de los razonamientos plausibles, en tanto que Demostrar es el proceso de deducir un enunciado o proposición a partir de otras que le preceden, al lado de reglas bien determinadas, aceptadas por la comunidad matemática. En tales investigaciones, surge la necesidad de definir conceptos tales como Explicar, Probar, Demostrar y Razonamiento; teniendo en común todos ellos de manera explícita o implícita a la Argumentación con acepciones específicas en sus definiciones.

Entre las investigaciones realizadas, destacan por su interés didáctico las desarrolladas por Raimond Duval (1999) y Balachev (1982 y 1988), quienes postulan que la Argumentación conduce a la generación de obstáculos epistemológicos para Demostrar. Por otro lado, Efraim Fishbeim (1987) y Paolo Boero (1999), consideran que argumentar y demostrar, forman una unidad cognitiva.

Paolo Boero explica la dualidad argumentar-demostrar como el resultado de la unidad cognitiva de un teorema, el que transcurre en dos etapas, la de la producción de la conjetura que implica producirla mediante la exploración, discutir las conjeturas elaboradas y la sistematización de los enunciados construidos, la otra etapa, es la construcción de la prueba la cual se logra mediante las exploraciones y encadenamiento reglado de argumentos. Considera que los resultados de los alumnos variarán enormemente de los producidos por los matemáticos, que el maestro juega el papel de mediador en la formulación de los enunciados, incluyendo todos los instrumentos efectivos para expresar y probar teoremas y que el proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación.

Por nuestra parte, en Marmolejo y Solano (2005), desarrollamos la tesis de que en efecto, Argumentar–Conjeturar–Demostrar, constituyen una unidad cognitiva, y que la Argumentación tiene un papel relevante en esta relación. Distinguimos que en el razonamiento demostrativo lo importante es diferenciar una prueba de una intuición, en tanto que para el razonamiento plausible, lo importante es distinguir (a partir de sus argumentos) entre intuiciones, unas más y otras menos razonables. Los objetivos de una Argumentación son la deliberación, la justificación y la transmisión de una convicción, y sus reglas preformales se basan en la experimentación, los procedimientos heurísticos y las intuiciones, pero también en los saberes científicos estables en el campo semántico del alumno, en tanto que las reglas de la argumentación formal, son los de la lógica.

Esclarecer la relación existente entre demostrar, probar y argumentar como procesos que producen razonamientos matemáticos, parte del hecho histórico del uso de la intuición, la heurística y la inducción como formas de búsqueda y descubrimiento de enunciados matemáticos, potenciales de ser probados lógicamente. Junto al desarrollo y perfeccionamiento de la demostración matemática, surgieron los conceptos de explicación, argumentación, conjeturar, probar y razonamiento lógico deductivo, cuyas definiciones establecen las diferencias entre ellos. No es en la matemática, sino en su enseñanza donde de manera frecuente se confunden y sustituyen unos con otros, dando pie a un aprendizaje incorrecto y limitado; se aduce que ello ocurre a causa del uso del lenguaje natural como forma básica de comunicación de resultados matemáticos en la escuela.

Requerimos, en efecto establecer las diferencias y relaciones de los conceptos involucrados. Así: *Explicar*, consiste de un discurso inteligible que caracteriza la verdad sobre una proposición o un resultado que se dirige a un interlocutor, los argumentos empleados, transcurren entre discutir, refutar y aceptar; la *Prueba*, es una explicación aceptable para una comunidad en un momento y tiempo determinados, esta decisión ocurre entre el objeto de un debate y la significación, determinando un sistema de validación compartida entre los interlocutores; *Demostrar*, es el proceso sistemático de deducir una proposición de otras que le son precedentes, a partir de reglas lógicas que sólo admiten como criterio de verdad la no contradicción lógica; y finalmente, la *formulación de un Razonamiento* en matemáticas, se asume como una actividad intelectual de manipulación de información a partir de enunciados previos que producen nueva información.

La intencionalidad de la demostración ha variado del mismo modo en que la sociedad ha evolucionado, así, para los griegos la idea primaria subyacente a la demostración es *convencer en medio del debate*, en tanto que para Newton en su época, se buscaba que las demostraciones *aclararan más que convencieran* y no es sino hasta el siglo XIX en que demostrar es en *rigor* en la matemática necesario, pues ello permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos.

Si bien entre argumentar y demostrar se establecen diferencias, la relación entre estas es consustancial a su existencia, la una precede a la otra, pero el fin de ambas es la búsqueda de la "verdad". Una demostración es correcta o incorrecta según el criterio de la no contradicción lógica en el proceso deductivo, en tanto que la argumentación se valida por la plausibilidad aceptada entre los dialogantes (alumno-alumno-maestro) y es tanto o más verdadera según el grado de pertinencia.

Asumida la relación argumentar-demostrar como la unidad cognitiva cuyo eslabón es la conjetura, no ha lugar la tesis del obstáculo epistemológico de la demostración y si a lo postulado por Polya en relación a que el objetivo de la argumentación es la deliberación, justificación y transmisión de una convicción y que al proceso de construcción y maduración de las argumentaciones conlleva a la formulación de conjeturas.

En un primer momento en situación escolar, los argumentos serán muchos y plurales, corresponde al profesor en su papel de promotor que el grupo discrimine los argumentos esenciales hasta lograr "coherencia" entre los argumentos, en un segundo momento habrá que dar fuerza y orden a los argumentos hasta producir el enunciado conducente, la conjetura formada.

Planteamos la hipótesis de que la conjetura es el objetivo de la argumentación preformal, e inicio del proceso demostrativo, es pues el punto de inflexión que explica la unidad cognitiva *Argumentar–Conjeturar–Demostrar*. La confianza en una conjetura disminuye cuando un fundamento posible para ella es refutado y aumenta cuando una conjetura incompatible es refutada.

En cuanto a la Argumentación, diferenciamos:

Argumentación Inductiva

Fundada en hechos, verificaciones y predicciones utilizando como recursos los procedimientos heurísticos durante el proceso de estructuración de conjeturas por la vía inductiva

Argumentación Deductiva

Resulta del encadenamiento lógico de proposiciones conforme a las reglas de la lógica proposicional

Una argumentación deductiva, es correcta o incorrecta, en tanto que la argumentación inductiva se valida por la plausibilidad aceptada entre los dialogantes y es tanto o más verdadera según el grado de pertinencia.

El valor lógico de una argumentación deductiva es intrínseco a ella y se substrae de la persona que la realiza, es independiente al sujeto, por el contrario, la argumentación inductiva depende del sujeto que la realiza.

Los objetivos de una argumentación inductiva, son la construcción de conjeturas, mediando en ello, la deliberación del acuerdo, la transmisión de una convicción y la justificación.

Bajo la hipótesis de la Unidad Cognitiva Argumentar – Conjeturar – Demostrar, identificamos dos momentos del proceso, la construcción de la conjetura y la demostración de la misma. Procesos que transcurren el primero de manera inductiva a partir de generar argumentos que van desde explicar hechos específicos que mediante la experimentación logran ser generalizados a nivel de convicción pertinente, para luego perfeccionar los argumentos hasta la estructuración y fortalecimiento de la conjetura, y que ésta alcance la condición de enunciado de una proposición susceptible de ser probada vía la demostración, lo que define el segundo momento del proceso.

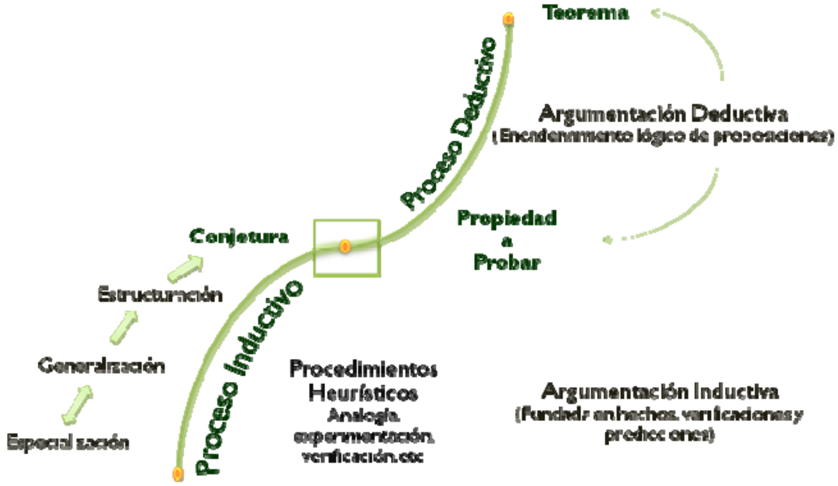


Fig. 1 Esquema de los procesos que intervienen en la argumentación inductiva y en la argumentación deductiva

La formación de la conjetura, parte de la pluralidad de argumentos, unos más que otros bien direccionados y fundados en ideas intuitivas o heurísticas, dándoles coherencia y orden e incorporando saberes científicos ya estables en los estudiantes, fortaleciendo los argumentos hasta el punto de perfeccionar el enunciado de la conjetura, incorporando el lenguaje y simbología más próximos a la proposición matemática de la que sea equivalente.

Fig. 2 Fortalecimiento de Conjeturas

Una vez estructurada la conjetura, habrá de darse paso a su fortalecimiento, el cual no es un proceso desordenado y carente de sistematicidad, todo lo contrario, se prevé un programa heurístico, basado en las ideas de Polya referidas a que en lo plausible como lo es la formación de conjeturas bajo la argumentación inductiva, está presente un patrón inductivo isomorfo al demostrativo, desde luego con intencionalidades y reglas diferentes, pero ambos en busca de la verdad una plausible y otra lógica.

Fig. 3 Isomorfismo de reglas de inferencia

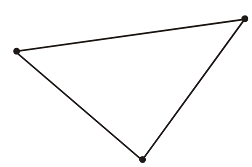
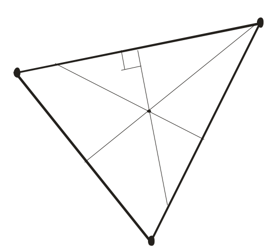
En el fortalecimiento de las conjeturas se transita por las fases de confianza-confirmación-certidumbre de las mismas. Así, es necesario precisar algunos aspectos de esta transición:

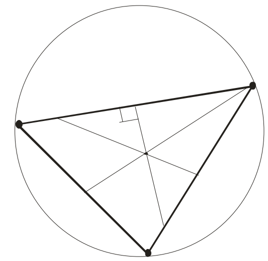
- Una conjetura adquiere más credibilidad con la verificación de una nueva consecuencia.
- Una conjetura alcanza más credibilidad si una conjetura análoga adquiere mayor credibilidad.
- Se utiliza un procedimiento típicamente inductivo para examinar las consecuencias de una conjetura y juzgarlas sobre la base de tal examen.
- Las consecuencias son más o menos creíbles según el mayor o menor acuerdo con los hechos de sus consecuencias observables.

Tabla. 1 Ejemplo de construcción de conjeturas realizado con un grupo regular de bachillerato

Objetivo:
A partir de un problema particular, generar una generalización global que concluya en la construcción de una conjetura equivalente a una propiedad geométrica.

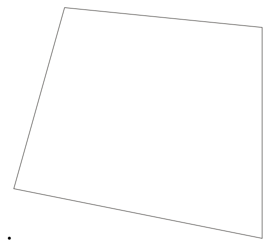
Diálogo

Maestro	**Alumnos**	
M: ¿Por tres puntos del plano no coloniales, puede hacerse pasar una circunferencia?	**A:** Sí, porque si unimos los puntos obtenemos un triángulo, a éste le puedo circunscribir una circunferencia.	
M: ¿Cómo lo haces? ¿Cuál es el centro de esta?	**A:** La intersección de las mediatrices	



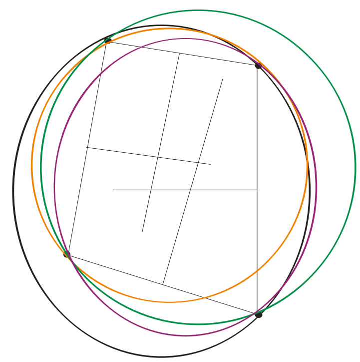
M: Muy bien, ahora consideren la siguiente situación ¿Por cuatro puntos (cualesquiera) coplanares, no colineales tres a tres, puede hacerse pasar una circunferencia?

A: Si es posible, que cada punto quede en una misma circunferencia



M: ¿Cualesquiera cuatro puntos? Intenta la construcción.

A: No, no siempre es posible.

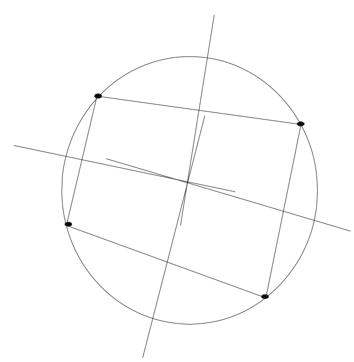


M: ¿Por qué no?

A: Porque resultan distintas intersecciones de las mediatrices, y con ello por cada tres un centro, y entonces resultan cuatro circunferencias que pasan por tres puntos respectivamente.

A: Pero….en algunos casos debe ser posible, tal parece que….bueno, para que los cuatro puntos estén en una circunferencia, será necesario que……hagámoslo al revés.

A: Sea un cuadrilátero inscrito, entonces el centro será la intersección de las mediatrices.



A: ¡Sí!, así es…

M: ¿Cuál es, entonces, tu conclusión?

A: Para que por cuatro puntos del plano no coloniales pase una circunferencia, es necesario que al unir consecutivamente los puntos con segmentos de recta, las mediatrices de éstos sean concurrentes.

Esta última afirmación, constituye una propiedad geométrica que en la literatura del área es equivalente a la proposición: "Para que un cuadrilátero sea inscriptible a una circunferencia, es necesario y suficiente que la suma de sus ángulos opuestos formen un ángulo llano, es decir que los ángulos opuestos respectivos sean suplementarios".

Conclusiones

- Es necesario mirar la matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación (argumentación) de conjeturas, y estar dispuestos a buscar patrones y regularidades
- Existe la necesidad de reconceptualizar a la demostración, en situación escolar.
- La argumentación con bases empíricas y científicas debe ser encausada a la construcción de conjeturas.
- Potenciar el paso de la conjetura a la prueba (fortalecer la misma hasta disponerla como una proposición que evidencia la necesidad de la prueba).
- En el proceso Formación-Fortalecimiento-Prueba, la veritatividad de las conjeturas ha de darse del consenso a la prueba.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1982). Preuve et demostration en mathematiques ou collage. *Recherches en didactiqué des mathematiques*, 3, 261-304.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les éleves de collége. Thése d´etat*. Université Joseph Fuourier, France.

Boero, P. (1999). *Argumentación y Demostración. Una relación compleja, productiva* e *inevitable en las Matemáticas y la Educación Matemática*. En *Preuve*. [En línea] Disponible en: http://www.lettredelapreuve.lt/Newsletter/990708Theme/ ES.html.

Duval, R. (1999) *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México Iberoamerica..

Fishbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics* . Holanda: CIP..

Marmolejo, E., y Solano, M., (2005) Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 18, págs. 139-146

DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA. SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Santiago Ramiro Velázquez, Hermes Nolasco Hesiquio
Universidad Autónoma de Guerrero, Secretaría de Educación Guerrero (México)
sramiro@prodigy.net.mx, nolascohh@hotmail.com

Resumen. En este artículo hacemos un estudio de las competencias matemáticas, particularmente la de comunicar en el ámbito del sentido numérico y pensamiento algebraico, describimos el problema de investigación en términos de que a 4 años de haberse propuesto el desarrollo de competencias, los profesores y los textos no necesariamente comparten este enfoque. Además presentamos un estudio de las competencias y del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, en el que se destacan los contenidos programáticos de este eje y la relevancia de desarrollar acciones mentales como hacer y deshacer, construir reglas para representar funciones y abstraer desde los cálculos, como una manera de formar el pensamiento algebraico. También se determinan las acciones que conforman la competencia de comunicar, se analizan algunos planes de clase y las actividades que los profesores realizan para desarrollarla. Los resultados reflejan que el desarrollo de las acciones mentales referidas y de la competencia de comunicar, es parcial e incipiente.

Palabras clave: competencias matemáticas, comunicar, acciones mentales

Abstract. In this work we make a study of the mathematical competitions, particularly the one referring to the communication in the numerical sense and algebraic thinking, we describe the investigation problem in terms that after 4 years of have been proposed the development of competitions, the professors and the textbooks do not necessarily share this approach. Besides we present a study of the competitions and the axis referring to the numerical sense and algebraic thinking, the study highlight the programmatic content in this axis and the relevance to develop mental actions like doing and undoing, build rules for the representation of functions and abstracting from the calculus, as a mode to shape the algebraic thinking. As well the actions that conform the competition of communicate are determinate, some lesson plans and the activities that the professors apply to develop in the classroom are analyzed. The results reflect that the development of the mental actions referred and the competition of communicate is partial and incipient.

Key words: mathematical competitions, communicate, mental actions

Introducción

Uno de los aciertos de la reforma 2006 en educación secundaria consiste en remarcar un modelo didáctico enfocado al desarrollo de competencias, en matemáticas se propone el desarrollo de la competencia de plantear y resolver problemas, de argumentar, de comunicar y de manejar técnicas (SEP, 2006). Sostenemos que las competencias matemáticas consisten en una integración de saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales, de modo que una persona es competente cuando hace evolucionar sus saberes al plantear y resolver problemas y tareas matemáticas que lo sitúan como matemático. Es decir, que transforma sus conocimientos en saberes en las prácticas donde dichos conocimientos tienen presencia. Construir saberes encaminados al desarrollo de competencias asegura el estudio de las matemáticas en forma organizada y sostenida, superar la atomización del aprendizaje y compartir responsabilidades entre los sujetos de este proceso (Chevallard, Bosch, y Gascón, 1998). A su vez considerar al discurso matemático escolar y la práctica educativa de aula, integrados con prácticas sociales donde se construyen saberes.

Esta manera de orientar la construcción de saberes matemáticos revela el sistema didáctico que se desarrolla en el aula, en el que se muestran principios como los siguiente: la investigación y las prácticas sociales dan vida a las matemáticas, se pueden descubrir nuevos significados de los objetos matemáticos, se promueve que los alumnos aprendan de los errores al enmendar, difundir, discutir, negociar, debatir y descubrir (Velázquez y Nolasco, 2009).

El presente trabajo centra la atención en el sentido numérico y pensamiento algebraico –snypa- como uno de los ejes que dan forma a las matemáticas en educación secundaria, y que uno de sus propósitos es de tender puentes entre la aritmética y el álgebra. De manera que se consolide el sentido numérico que se desarrolla a través del estudio de la aritmética, y sobre esta base se realicen acciones mentales (Sociedad Matemática Mexicana, 2008) al resolver problemas y tareas matemáticas, en los que se construyen patrones y modelos tabulares, gráficos, simbólicos y textuales. Se trata de patrones y modelos que son manifestaciones del pensamiento algebraico y que están inmersos en las prácticas sociales. De esta manera existen evidencias de que el surgimiento del cero en las culturas mesoamericanas está ligado a sus deidades, ya que el dios Tláloc tenía diversas representaciones, algunas significan vida y abundancia y otras destrucción. En estas condiciones se puede conjeturar que el cero en estas culturas surge para significar la ausencia y a la vez la transición entre el bien y el mal, esta ausencia y transición son significados del cero en algunos dominios numéricos modernos. En el mismo sentido los investigadores al observar, experimentar, conjeturar y comprobar construyen modelos que explican el comportamiento del medio físico y social. Así Galileo en el siglo XVII constata que todos los objetos caen con aceleración uniforme sin importar su masa, es decir que un cuerpo en caída libre que parte del reposo obtiene incrementos iguales de velocidad en intervalos iguales de tiempo. Galileo usando planos inclinados experimenta y confirma que en el movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo, la distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo invertido en el descenso.

De estas afirmaciones sostenemos que las condiciones de surgimiento, difusión y uso social del conocimiento constituyen un principio didáctico fundamental, para desarrollar competencias matemáticas y que dicho conocimiento adquiere el estatus de saber en las prácticas en las que está inmerso. Lo que implica que en la actividad matemática escolar los alumnos realicen un conjunto de prácticas generadoras de saberes, en las que impere la interacción discursiva entre estudiantes y profesores, en la que los primeros conforman su propio discurso matemático.

Esta concepción no necesariamente la comparte el profesor y los libros para el alumno, de manera que se constata la imposición de un discurso que “escolariza” el saber y hace dependientes a los alumnos de los modos de pensar del profesor y de los autores de los textos. Esta situación afecta negativamente el desarrollo del pensamiento y de las competencias, también es contraria a las orientaciones didácticas propuestas en el programa de estudio, en el sentido de desarrollar el trabajo colegiado y autónomo de los alumnos.

El objetivo de esta investigación consiste en reconocer las acciones que conforman la competencia de comunicar en lo referente al sentido numérico y pensamiento algebraico, y explorar las actividades que realizan los profesores con sus alumnos, encaminadas a desarrollarla.

Para el logro del objetivo se hace un estudio documental, en el que se analizan diversos trabajos sobre competencias matemáticas y en particular sobre la de comunicar, a fin de reconocer las acciones que la conforman. También se exploran las actividades que realizan los profesores con sus alumnos referentes al sentido numérico y pensamiento algebraico, encaminadas a desarrollar esta competencia. En esta parte se analizan los planes de clase de los profesores de tercer grado cuando abordan el tema:

> Significado y uso de las literales, subtema relación funcional, apartado 3.1. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, biología, economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica. (SEP, 2006, p. 123).

Además se observan clases y se estudian procesos y productos de dichas clases, la observación y estudio de procesos y productos está en proceso por lo que no se reporta en este trabajo.

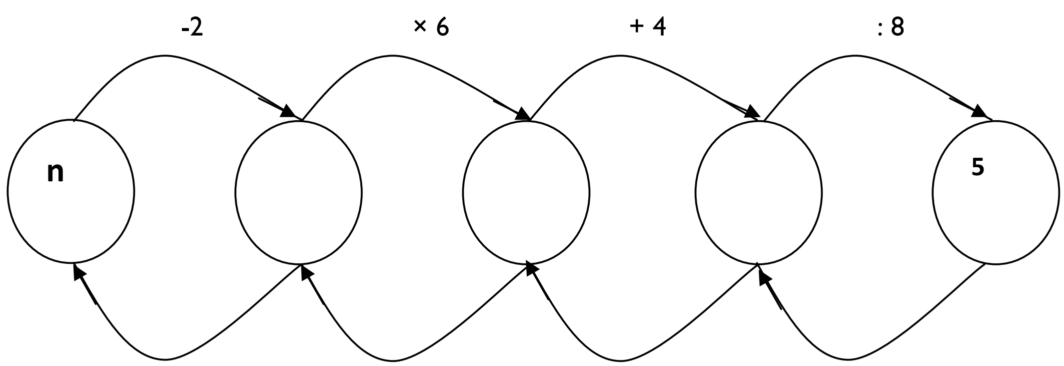
Sentido numérico, pensamiento algebraico y competencias matemáticas

De acuerdo al Diccionario Enciclopédico Grijalbo (1995) lo numérico se refiere a una actividad que se realiza con números, en tanto que el pensamiento algebraico hace referencia a un proceso de evolución desde un pensamiento primitivo y empírico hacia un pensamiento simbólico. En educación secundaria acertadamente se hace énfasis en aspectos conceptuales y de construcción de significados propios de los objetos y procesos que se enmarcan en el eje snypa. Los programas de estudio de matemáticas en este nivel educativo (SEP, 2006), resumen estos objetos y procesos en los temas significado y uso de los números, significado y uso de las operaciones y significado y uso de las literales. Destaca además el desarrollo de habilidades de cálculo aritmético y algebraico, el estudio de funciones, modelos, patrones y fórmulas.

No obstante el tratamiento didáctico que se propone en los referidos programas, por lo general, se limita a señalar algunos ejemplos que los profesores pueden utilizar en el trabajo con sus alumnos. Si bien se insiste en el desarrollo de competencias matemáticas, poco se dice de cómo planear, gestionar y evaluar dicho desarrollo. Se esperaba que propusieran cómo desarrollar acciones mentales (Sociedad Matemática Mexicana, 2008) básicas para formar el sentido numérico y el pensamiento algebraico, como hacer y deshacer, construir reglas para representar funciones y abstraer desde los cálculos. Hacer y deshacer es una acción que significa doble implicación o bien ir de los datos hacia la respuesta y viceversa, componer y descomponer. Además es una potente estrategia para el cálculo mental, el trabajo con sucesiones y el estudio de ecuaciones, esta acción mental y estrategia se ilustra de la siguiente manera:

Pienso un número, le sumo -2, lo multiplico por 6, le resto -4, lo divido entre 8 y obtengo 5. ¿Qué número pensé?, para contestar se puede expresar el texto en forma analítica como

$1/8\ [\ 6\ (\ n-2\ )+\ 4\ ] = 5$, o bien en el siguiente diagrama.



Construir reglas para representar funciones es fundamental para modelar o representar diversas situaciones, reconocer patrones, fórmulas y regularidades y consiste en visualizar la situación planteada y responder a la exigencia planteando diversas acciones, como las siguientes: visualizo detenidamente la situación, ¿Hay alguna similitud con situaciones ya resueltas?, ¿Cuáles son las variables involucradas?, corresponde a ¿Algún tipo de movimiento que conozco? rectilíneo uniforme, de caída libre, uniformemente acelerado, etc., ¿Contiene la recursividad?, ¿Tiene que ver con plusvalía o devaluación?, ¿Puedo representarla a través de un modelo tabular o gráfico?

Abstraer desde los cálculos es una acción mental necesaria para el desarrollo del pensamiento algebraico, que se manifiesta cuando se identifican las regularidades inmersas en un cálculo determinado, de manera que se pueda visualizar ese cálculo con cierta independencia de los números particulares que lo conforman. Esta manera de pensar utilizó Gauss al sumar 1 + 2 + 3 + 4 + …+ 100, considerando (100 + 1) +(99 + 2) + (98 +3) + …

Consideramos que esta forma de concebir el sentido numérico y el pensamiento algebraico integrado con las acciones mentales referidas, puede contribuir a desarrollar competencias matemáticas, en particular la de comunicar.

Un escenario de investigación

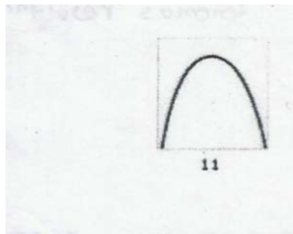
Para reconocer las acciones que conforman la competencia de comunicar hacemos un estudio documental en diversas fuentes (Balbuena, 2006; SEP, 2006). De esta manera identificamos las siguientes: utilizar diversas formas de representar la información, comunicar con claridad las ideas matemáticas, deducir e inferir propiedades, y reconocer las ideas matemáticas en las prácticas sociales en las que están inmersas.

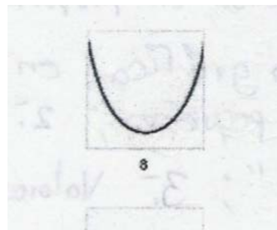
Utilizar diversas formas de representar la información es equivalente a utilizar diversos registros de representación (Duval, 1998), y es imprescindible en la actividad matemática, en particular en esta competencia enmarcada en el eje snypa. De esta manera se promueve la representación coordinada de los conceptos, y se negocian significados de los aspectos matemáticos involucrados. "Los alumnos usan las matemáticas como parte integral de las actividades del salón de clases. Representan su trabajo con objetos y dibujos y lo discuten. Reconocen y usan patrones y relaciones simples". (Balbuena, 2006, p. 104).

Como se afirma en líneas anteriores en el desarrollo de competencias matemáticas se insiste en la construcción de significados, pero en la práctica imperan aspectos procedimentales. De manera que al proponerse el estudio de significado y uso de las operaciones, se hace centro en el uso en detrimento de los significados.

Comunicar con claridad las ideas matemáticas consiste en que las personas incorporen a su discurso los conceptos y formas de trabajo propios de las matemáticas, que puede lograrse al desarrollar las acciones mentales ya referidas, a través de un enriquecimiento mutuo del discurso matemático y el discurso cotidiano.

Deducir e inferir propiedades es fundamental para la construcción de significados, deducir consiste en explicar la información inmersa en las representaciones de una situación o relacionar un modelo con los acontecimientos que puede representar, inferir es identificar las propiedades del fenómeno y/o del modelo que lo representa. De manera que si consideramos las gráficas 8 y 11 y las situaciones A) y B) como se muestra a continuación, la acción de deducir e inferir propiedades se manifiesta al relacionar la gráfica 8 con el acontecimiento B) y la 11 con el A). Ya que en el acontecimiento B) la variable es la temperatura y la función es el grado de satisfacción, situación que se ve en la gráfica 8 donde el grado de satisfacción es grande cuando la temperatura es pequeña y cuando es grande, en tanto que la satisfacción mínima cuando la temperatura da lugar a que el té esté al tiempo.





A) Al terminar un concierto hubo un silencio total, entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir y gradualmente los demás asistentes se le unieron, de pronto todos aplaudían y animaban a la orquesta.

B) Disfrutamos del té frío o caliente pero nos disgusta el té tibio.

Reconocer las ideas matemáticas en las prácticas sociales en las que están inmersas, consiste en visualizar los conocimientos matemáticos integrados a las diversas actividades que realiza la sociedad, en la ilustración anterior se trata de las comunidades cuyo gusto corresponde a las bebidas frías o calientes, para el acontecimiento B) y la manera de aplaudir de los asistentes a un concierto en el A).

En el análisis de los planes de clase se parte del hecho de que los profesores utilizan los planes entregados por la Secretaría de Educación Pública, de manera que como se afirma en líneas anteriores, se analizan los planes del apartado:

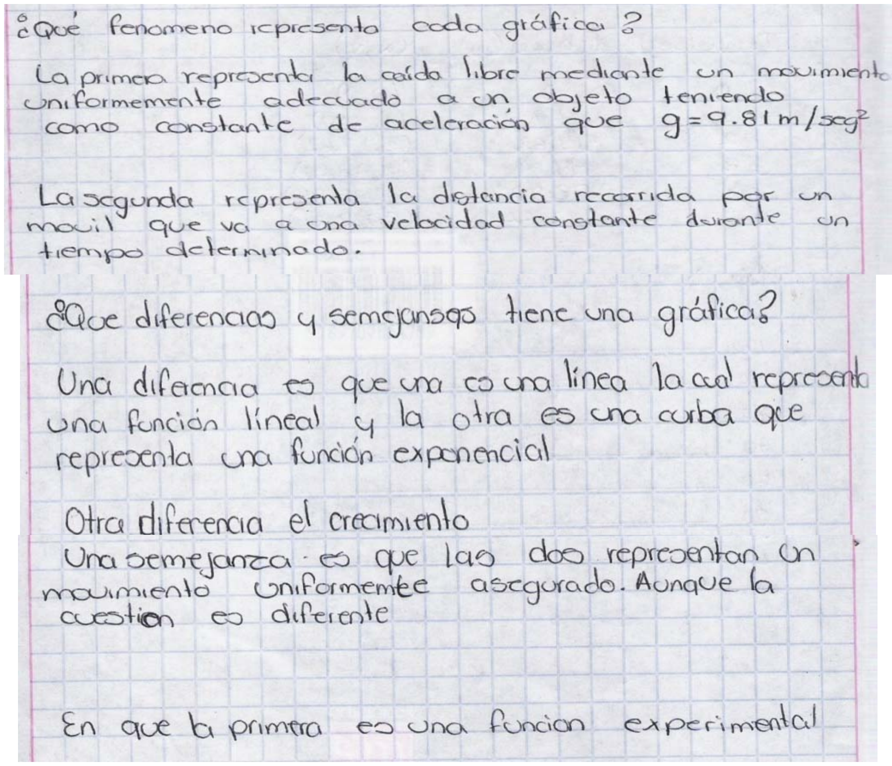
> 3.1. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, biología, economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica. (SEP, 2006, p. 123).

Este análisis se hace mediante una confrontación de los planes con cada una de las acciones que conforman la competencia de comunicar. Para este apartado se trabajan cinco planes de clase, cada plan contiene los conocimientos y habilidades esperados, que es propiamente el apartado, las intenciones didácticas, actividades para el alumno y orientaciones para el profesor. Las intenciones didácticas en su conjunto expresan que los alumnos representen en tablas y expresiones algebraicas, relaciones funcionales lineales y no lineales. Por su parte en las actividades para los alumnos se proponen situaciones como se expresa en la siguiente tabla.

Planes	Actividades
1	Se tiene un recipiente con agua a 20°C, el agua se calienta de tal manera que su temperatura aumenta 4°C por minuto, representa esta situación en una tabla y en una expresión algebraica.
2	Un barco de carga tiene un tanque de almacenamiento para combustible de 2 400 litros. Al navegar, cada día consume 150 litros de combustible. Construye la tabla y la expresión algebraica que representan esta situación.
3	Una cierta cantidad de agua a una temperatura de 80°C se pone en un congelador que está a 0°C. En el proceso de enfriamiento se observa que la temperatura se reduce en un 5% por cada minuto que transcurre. Construye la expresión algebraica que representa esta situación.
4	Un helicóptero dejó caer un automóvil desde una altura de 245 metros. Algunos datos que se registraron son los siguientes: Tiempo Distancia de caída altura a la que se encuentra el automóvil 0 0 245 1 5 240 2 20 ----- 3 45 ----- Completa la tabla y determina la expresión algebraica que representa esta situación.
5	Cuando se proyecta una película, el área de la imagen depende de la distancia entre el proyector y la pantalla, como se ilustra a continuación: Distancia entre el proyector Área de la imagen en (m^2) y la pantalla (m) 1 4 2 16 3 36 --- --- Escriban la expresión algebraica que muestra esta relación.

Al hacer la confrontación de los planes con las acciones de la competencia de comunicar se constata que al proponer los registros de representación, no se consideran las gráficas cartesianas y su correspondiente lectura, que da lugar a la construcción de significados. Esta lectura nos llevaría a visualizar cómo se pasa de un registro a orto, y destacar las características, conceptos y significados de lo lineal, lo cuadrático y lo exponencial.

Lo anterior impide comunicar con claridad las ideas matemáticas de las situaciones que se están manejando, que se pone de manifiesto en las producciones de los alumnos como la que en seguida se muestra.



¿Qué fenomeno representa cada gráfica?

La primera representa la caída libre mediante un movimiento uniformemente adecuado a un objeto teniendo como constante de aceleración que g = 9.81 m/seg²

La segunda representa la distancia recorrida por un movil que va a una velocidad constante durante un tiempo determinado.

¿Que diferencias y semejansas tiene una gráfica?

Una diferencia es que una es una línea la cual representa una función líneal y la otra es una curba que representa una función exponencial

Otra diferencia el crecimiento

Una semejanza es que las dos representan un movimiento uniformemente asegurado. Aunque la cuestion es diferente

En que la primera es una funcion experimental

También afecta negativamente deducir e inferir propiedades ya que en los planes de clase no se propone el trabajo de esta acción, de manera que se pida explicar la recursividad como una característica asociada a lo exponencial.

En lo referente a reconocer las ideas matemáticas en las prácticas sociales en las que están inmersas, en los planes no se propone esta acción, no obstante, los profesores la pueden considerarla en el trabajo con sus alumnos. De manera que en las actividades del plan 3 donde se estudia lo exponencial, se explique que la depreciación y plusvalía están asociadas a lo exponencial y reconocer que los vendedores de automóviles y los de bienes raíces, realizan prácticas en estos campos.

Reflexiones finales

La constatación de la problemática en el desarrollo de competencias matemáticas en educación secundaria, a través de explicaciones y evidencias obtenidas del análisis de los documentos oficiales de apoyo didáctico y de las primeras producciones de los alumnos, contribuyen a despertar el interés por este campo. Consideramos que caracterizar las competencias matemáticas a través de acciones orienta a los docentes en la planeación, gestión y evaluación de aprendizajes con este enfoque. De manera similar las acciones que logramos reconocer de la competencia de comunicar, constituyen un aporte para el desarrollo de esta competencia.

Por su parte el desarrollo de las acciones mentales que proponemos, conforman una manera de formar el sentido numérico y el pensamiento algebraico.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (2), 253-265.

Cordero, F. y Flores, R. (207). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 7-38 .

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México, D. F: Secretaría de Educación Pública.

Palacios, O. (2008). Un estudio sobre el uso de las gráficas en las obras de Evangelista Torricelli y Daniel Bernoulli. *En History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite meeting of ICME 11,* realizado en El Centro Cultural del México Contemporáneo, D. F, México.

SEP. (2006). *Programa de estudio de matemáticas en educación secundaria*. México, D, F: Secretaría de Educación Pública.

Sociedad Matemática Mexicana. (1998, Septiembre). Las matemáticas y su enseñanza en la escuela secundaria. Sentido numérico y pensamiento algebraico. Curso estala realizado en los Centro de Formación Continua. México.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia* 1 (2), 26-31.

Velázquez, S. y Santos, R. (2008). Un estudio socioepistemológico del discurso matemático escolar. *En History and Pedagogy of Mathematics. The HPM Satellite meeting of ICME 11,* realizado en El Centro Cultural del México Contemporáneo, D. F, México.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RACIONAL, MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Lucía González Rendón, Marisol Radillo Enríquez, Irma Yolanda Paredes Águila, Ana Rosa Sahagún Castellanos, Rosalba Espinoza Sánchez
Universidad de Guadalajara (México)
lgrendon2@yahoo.com.mx, marisolradillo@yahoo.com.mx

Resumen. En este trabajo se propone una secuencia didáctica de actividades para la enseñanza del límite de una función racional, en el caso 0/0, mediante la visualización y con el uso de las nuevas tecnologías, de manera que los estudiantes manejen diferentes representaciones semióticas relacionadas con el concepto de límite

Palabras clave: visualización, representación, concepto de límite

Abstract. In this article we propose a didactic sequence for teaching the concept of limit of a rational function, the 0/0 case, by using visualization and supported in computer technology. The purpose is to help students to coordinate different semiotic systems of representation of the limit concept.

Key words: visualization, representation, limit concept

Introducción

Una dificultad que se presenta en la comprensión de toda noción matemática, en particular en la noción de límite, es la de articular los diferentes registros semióticos. Por otra parte la enseñanza tradicional del concepto de límite de una función racional suele involucrar únicamente la representación algebraica. No obstante, en aquellos casos en los cuales se obtiene por sustitución directa una indeterminación del tipo 0/0 y posteriormente se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el límite de la función, el uso de una sola forma de representación resulta insuficiente, ya que se dejan de lado otros aspectos que enriquecen la formación del concepto de límite.

Contexto

La idea de este trabajo surgió de la experiencia docente en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que se ofrecen a las diversas licenciaturas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México. En esta institución se tiene una estructura departamental de tal manera que cada grupo de matemáticas se integra con alumnos de hasta 13 diferentes licenciaturas; aproximadamente 2300 alumnos cursan cada semestre la materia de Cálculo Diferencial e Integral, en 62 grupos atendidos por más de 30 profesores. La formación de los grupos no es aleatoria, pues se permite a los alumnos elegir libremente las materias y horarios cada semestre, hasta completar los créditos previstos en el Plan de Estudios. El único prerrequisito para inscribirse en un grupo de Cálculo Diferencial e Integral es haber aprobado el curso de Precálculo.

La propuesta parte de algunas dificultades que hemos detectado en los estudiantes del CUCEI al resolver problemas de límite de funciones racionales, cuando éstas presentan un punto de discontinuidad y, al determinar el límite por sustitución directa, se obtiene la indeterminación 0/0. Si bien hay varios conceptos matemáticos involucrados en este caso, nos enfocamos en dos situaciones:

1. Al resolver el límite mediante la factorización y simplificación de la función, el estudiante cree que la función que "no existía" en cierto valor de x ($x = c$), ahora "ya existe". Es decir, que en las actividades tradicionales la manipulación algebraica de la función está desvinculada del contexto geométrico y no contribuye al aprendizaje de las nociones de límite y discontinuidad de funciones.
2. Con la mera manipulación algebraica, al estudiante le resulta más difícil comprender que el límite de una función cuando x tiende a c no es el valor que toma la función en $x = c$, sino que tiene que ver con el comportamiento de la función en las vecindades de c.

Por lo anterior, pretendemos mejorar el aprendizaje del concepto de límite, mediante actividades apoyadas en las nuevas tecnologías y diseñadas para que los estudiantes se familiaricen con las representaciones algebraica, numérica y gráfica de las funciones y construyan el concepto de límite a partir de sus propios hallazgos.

Soporte teórico

La base de la propuesta son los conceptos de visualización y la premisa de que para lograr la comprensión de toda noción matemática es necesario conocer sus principales representaciones, sus significados, así como articular sus diferentes formas de representación (Duval, 1998; Font, s/f). La visualización es abordada como el proceso de formar imágenes con el apoyo de la computadora y utilizar dichas imágenes para la comprensión del concepto de límite de funciones racionales (Zimmermann& Cunningham, 1991; Negrón, et. al, 2004).

El soporte teórico de la propuesta se complementa con la noción de representación semiótica y la conveniencia de implementar diferentes sistemas de representación del concepto de límite (Duval, 1998; Blázquez y Ortega, 2001). Consideramos de gran importancia que el estudiante de Cálculo haga la transferencia o traducción entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas de una función racional para construir el concepto del límite, en particular en los casos que se presenta la indeterminación 0/0, ya que se involucran aspectos fundamentales tales como los significados de las expresiones "tiende a", "valores cercanos a", "x se acerca a c por la derecha", "x se acerca a c por la izquierda", entre otras.

Si bien existen diferentes programas para la enseñanza del cálculo que pueden ayudar a crear estas condiciones, en esta propuesta se utiliza Graphics Calculus ya que facilita las actividades de visualización de los puntos de discontinuidad de las funciones y la sintaxis que se emplea para generar y manipular las gráficas es más sencilla que en otros programas tales como Winplot, MatLab, Derive o Cabri-Geometre.

Metodología

Se pretende que el alumno trabaje con funciones tales como $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, y utilice el programa Graphics Calculus para realizar una secuencia de actividades en la computadora que implique:

(1) Tener un acercamiento visual que permita explorar el comportamiento de la "gráfica" en el punto de discontinuidad $x=c$.

(2) Manipular los tamaños de los intervalos alrededor del punto de acumulación y observar el comportamiento de la función.

(3) Agregar una función extra *g*(*x*), que resulta de la simplificación de *f*(*x*) y con ayuda del zoom observar ambas gráficas en $x=c$ y próximos a *c*.

(4) Contrastar sus propias observaciones y conjeturas con el concepto del límite.

Al ejecutar el programa, aparece el menú principal mostrado en la figura 1.

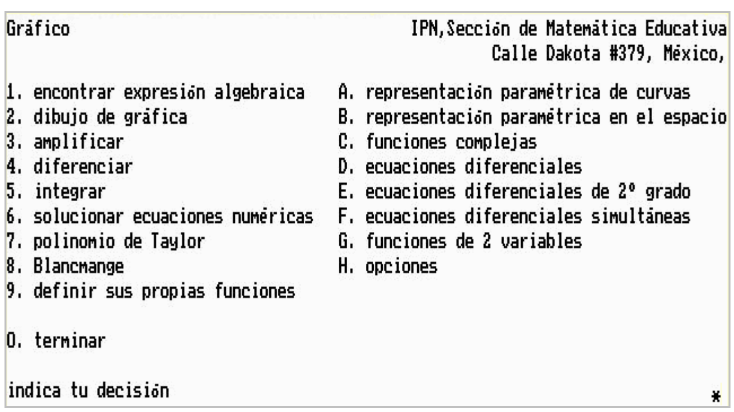


Figura 1. Menú principal del programa Graphics Calculus.

Se selecciona la opción 3: "amplificar", se escribe la función a investigar, en este caso, $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ obteniéndose la gráfica de la figura 2. En la parte inferior de esta pantalla, se tienen las leyendas de las acciones ejecutables, las cuales se realizan oprimiendo la tecla correspondiente (indicada en letra mayúscula). Con las "flechas del cursor", es posible mover éste a través de la gráfica, el tamaño del paso se define con las teclas **<** y **>**.

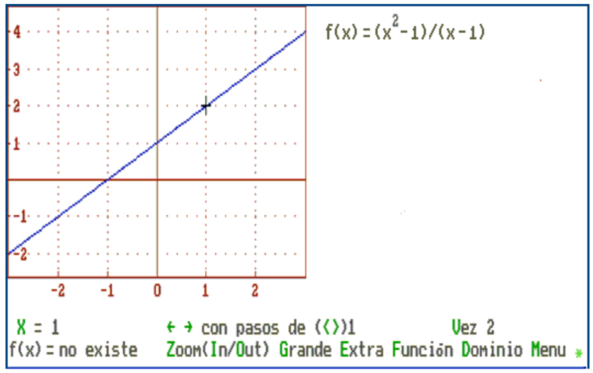


Figura 2. Gráfica de la función a investigar

Actividad I

Tener un acercamiento visual que permita explorar el comportamiento de la "gráfica" en el punto de discontinuidad.

Al colocar el cursor en $x = 1$, se observa en pantalla (figura 3) que *f*(*x*) no existe. Se deja el cursor en esa posición y se procede a amplificar.

Al presionar *Z* (Zoom), aparece a la derecha de la pantalla la gráfica amplificada al doble (Vez 2) como se ve en la figura 3. Con la tecla C se cambia a la izquierda para reemplazar a la primera gráfica.

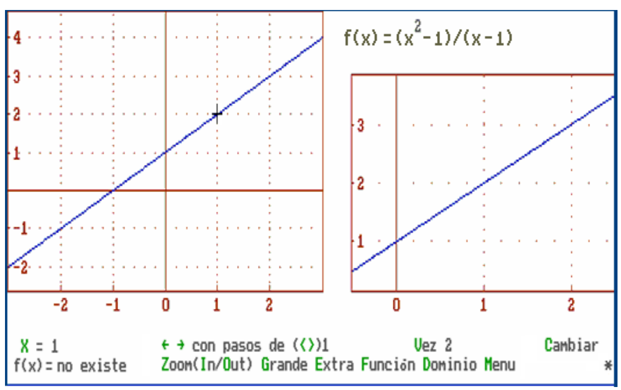


Figura 3. Primera amplificación de f.

Se repite este proceso de presionar alternadamente Z y C para obtener una secuencia de amplificaciones, hasta lograr la deseada, que puede ser como se ve en la figura 4, donde se observa la discontinuidad de la gráfica en $x = 1$. En esta amplificación, los alumnos pueden hacer sus propias conjeturas sobre el comportamiento de la gráfica.

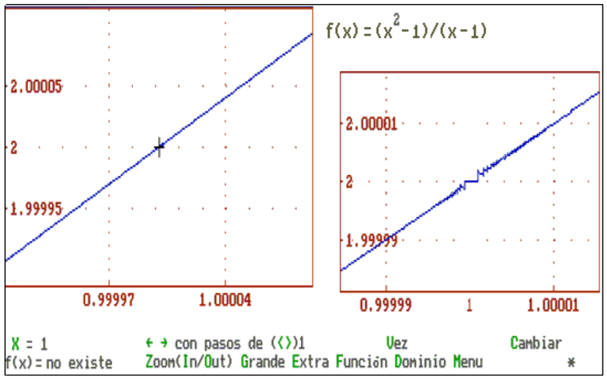


Figura 4. Amplificación que muestra la discontinuidad en $x=1$.

Actividad 2

Manipular los tamaños de los intervalos alrededor del punto de acumulación y observar el comportamiento de la función.

A pesar de que la función no está definida en $x=1$, el cursor puede acercarse a un punto de la gráfica a pasos o distancias deseadas. Si el paso es muy pequeño, el cursor dará "saltos" de este tamaño, mostrándose en la pantalla las coordenadas de su posición. Bajo amplificación es posible disminuir cada vez el tamaño del salto del cursor.

Al colocar el cursor tan cerca como se quiera de $x=1$, tanto por la izquierda como por la derecha, se pueden leer en pantalla los valores respectivos de *x* y *f*(*x*). El paso del cursor se puede disminuir tanto como se quiera, haciendo cada vez la amplificación adecuada para observar los saltos. En las figuras 5 y 6, el cursor se encuentra a una distancia de 0.0001 a la izquierda y la derecha de $x=1$, respectivamente.

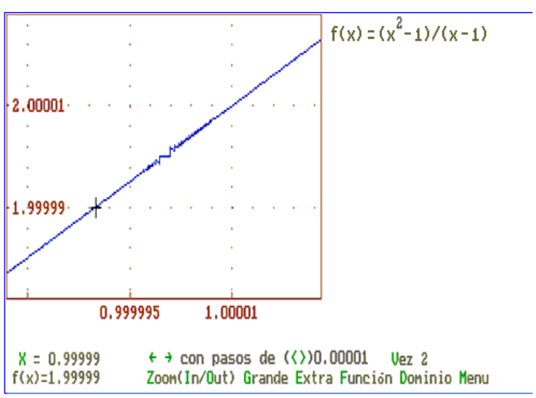


Figura 5. Paso de 0.00001 a la izquierda de 1

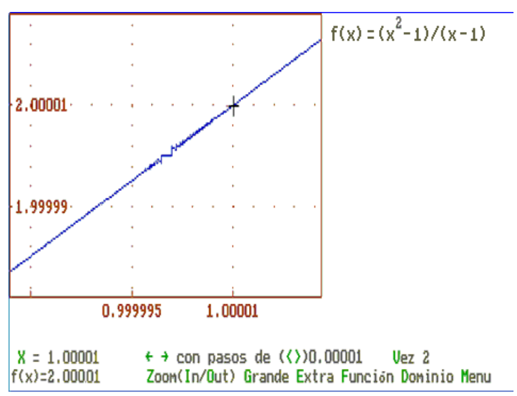


Figura 6. Paso de 0.00001 a la derecha de 1

Vemos que conforme *x* está más próxima a uno, tanto por la izquierda como por la derecha, *f*(*x*) se acerca cada vez más a dos. La visualización en estos procesos de aproximación, pueden ayudar al alumno, a comprender la noción intuitiva de límite, y que éste, no es el valor que toma la función en el punto que se está considerando (a menos que sea continua en ese punto), sino que tiene que ver con el comportamiento de la función en vecindades que contengan el punto.

Actividad 3

Agregar una función extra *g*(*x*), que resulta de la simplificación de *f*(*x*) y con ayuda del zoom observar ambas gráficas en $x = 1$ y próximos a 1.

Si $g(x) = x + 1$ es la simplificación de *f*(*x*), entonces $f(x) = g(x)$, en todo su dominio excepto en $x = 1$. A la función *g*(*x*) se le llama "función extra".

Al presionar la tecla *E*, el programa permite agregar la función extra. En pantalla aparecerán escritas tanto *f*(*x*) como *g*(*x*). Al situar el cursor en $x = 1$, se puede leer que *f*(*x*) no existe y $g(x) = 2$. Con el cursor en esa posición se amplifica lo suficiente para observar la discontinuidad de *f*(*x*) y la continuidad de *g*(*x*), como se muestra en la figura 7.

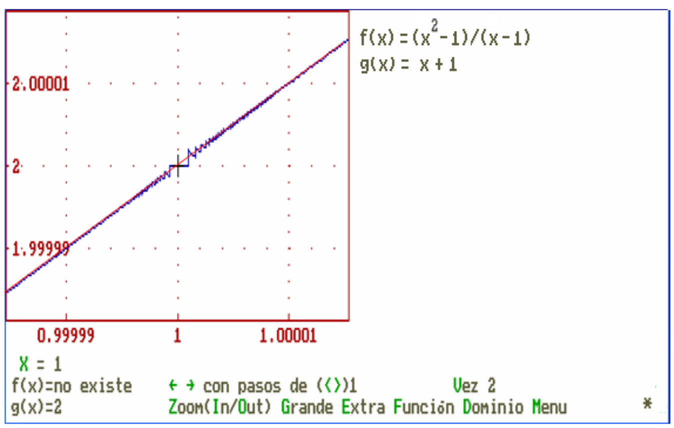


Figura 7. La gráfica de g(x) es continua en $x = 1$, mientras que f(x) no existe.

Repitiendo el proceso de acercamiento a $x = 1$, tanto por la izquierda como por la derecha, se pueden leer los valores que van tomando ambas funciones, observando que $f(x) = g(x)$, excepto en $x = 1$. En las figuras 8 y 9, el cursor se encuentra a una distancia de 0.00001 a la izquierda y a la derecha de $x = 1$, respectivamente.

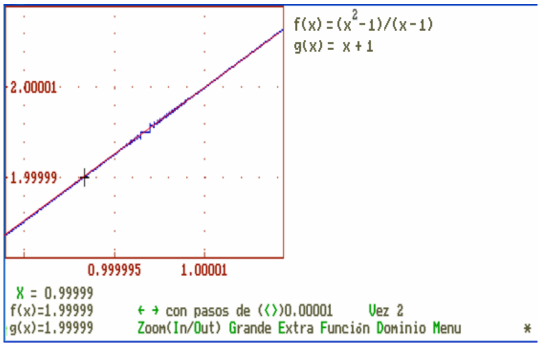


Figura 8. Paso de 0.00001 a la izquierda de 1

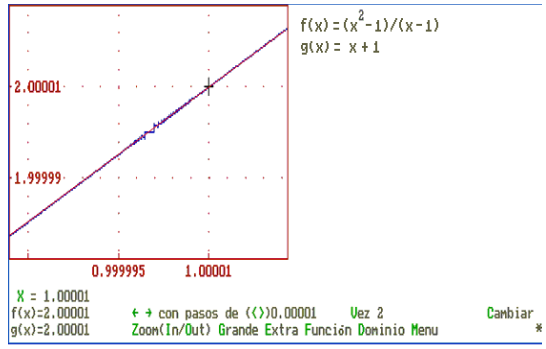


Figura 9. Paso de 0.00001 a la derecha de 1

Cuando x está más próxima a uno, $f(x)$ y $g(x)$ se acercan cada vez más a dos, es decir, ambas funciones tienen el mismo límite, por tanto, cuando se hagan los procesos algebraicos para calcular el límite de $f(x)$, existe la alternativa de calcularlo con la función extra $g(x)$, con un simple proceso de sustitución. Es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Comentarios finales

Con estas actividades, se pretende generar las condiciones que ayuden a establecer conexiones entre las diferentes representaciones del concepto de límite de una función racional: algebraica, numérica y gráfica. De esta manera se propicia una comprensión más amplia de la noción intuitiva del límite de una función al manipular el tamaño de los intervalos y se aprecia que el límite de una función se relaciona con el comportamiento de ésta en los alrededores de $x = c$. Por otra parte los estudiantes desarrollan los procesos de visualización centrados en los conceptos matemáticos involucrados en el problema, tales como el punto de discontinuidad de una función y el significado geométrico de las operaciones algebraicas que se ejecutan sobre la función.

Si bien se pueden utilizar diversos programas computacionales para generar estas actividades, el Graphic Calculus tiene la ventaja de la simplicidad en los comandos y un excelente apoyo gráfico para apreciar los puntos de discontinuidad.

Si no es posible usar la tecnología, se debe buscar la forma de generar actividades de visualización con los elementos que se tengan para no limitarse únicamente a la ciega manipulación algebraica. El propósito es ayudar al estudiante a una mejor comprensión de conceptos matemáticos que le provean de una estructura cognitiva sobre la cual pueda construir conceptos más abstractos.

Referencias bibliográficas

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (4) 3,* 219-236

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (s/f). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Consultado el 27 de Agosto de 2009 en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf

Hitt, F. (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Revista Educación Matemática*, *(7) 1*, 63-75.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En L. Guerrero, R. García R, A. Sepúlveda & C. Cortés (Ed.). *Memorias de las conferencias plenarias del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas*. Morelia, México, 1-26.

Negrón S, C., Estrada D, M., Hernández B, J., Sánchez S, J. L., Campano P, A. (2004). *El uso del programa cabri geometre en la enseñanza del análisis matemático*. Consultado en noviembre de 2005 en: http://www.mfc.uclv.edu.cu/scmc/Boletin/N2/cap11.htm

Torregrosa, G., Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. Relime, (10) 2,* 275-300. Consultado el 5 de abril de 2010 en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&nrm=iso>

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* USA: Mathematical Association of America.

LOS VOLADORES DE PAPANTLA Y LA TRIGONOMETRÍA

Alejandro Miguel Rosas Mendoza, Leticia del Rocío Pardo Mota
CICATA-IPN, SEV (México)
alerosas@ipn.mx, rociopardo2000@yahoo.com.mx

Resumen. En este trabajo abordamos el diseño de una actividad didáctica cuya finalidad involucra el uso de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación para ser lo que llamamos una Actividad Didáctica en Línea. Basados en la Teoría de las Situaciones Didácticas proponemos la creación de situaciones a-didácticas que permitan a los estudiantes crear conceptos relacionados con la trigonometría utilizando actividades didácticas en línea que exploten las características de internet. Los diseños están dirigidos a estudiantes de escuelas secundarias (12 a 15 años) del sistema educativo del Estado de Veracruz en México.

Palabras clave: actividad didáctica, actividad a-didáctica, aprendizaje en línea, trigonometría

Abstract. This work deals with the design of a didactic activity whose main goal is the use of the so called new Information and Communication Technologies. We used the Theory of Didactic Situations as a frame work to create a number of a-didactic situations that let students to create mathematical concepts related to trigonometry. The use of on-line didactic activities to exploit the internet capabilities is our way to get students involve in their learning. Activities were designed for boys of 12 to 15 years of the school system of the State of Veracruz in Mexico.

Key words: didactic activity, a-didactic activity, on line learning, trigonometry

Introducción

El Estado de Veracruz (México) ha iniciado una actualización en su sistema educativo, dicho sistema cuenta con escuelas de nivel secundaria oficiales federales y estatales que atienden a chicos de 12 a 15 años de edad. Debido a las grandes diferencias geográficas con las que cuenta el estado ha sido difícil garantizar la cobertura educativa para todos los jóvenes. Se han iniciado programas (a nivel federal) para la transmisión de cursos de nivel secundaria en canales especiales de televisión, lo que ha dado origen al sistema escolar llamado telesecundaria.

Pese a los esfuerzos mencionados, la cobertura no ha sido total. Al mismo tiempo los nuevos estándares internacionales de evaluación como la prueba PISA y las evaluaciones nacionales como la prueba ENLACE han mostrado un panorama negativo en cuanto al nivel alcanzado por los estudiantes que participan en esas pruebas.

Una forma de resolver esta problemática consiste en utilizar las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Dentro del proyecto "*Diseño, desarrollo y generación de materiales didácticos en línea para la enseñanza de la matemática en el Sistema Educativo Veracruzano*" auspiciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México y el Gobierno del Estado de Veracruz, se está trabajando en la creación de actividades didácticas basadas en la tecnología de acuerdo a las especificaciones indicadas en (CONACYT, 2008).

Marco teórico

De acuerdo a Brousseau (1997), las situaciones a-didácticas fuerzan al estudiante a construir conocimiento y ponerlo en práctica aún en ausencia de indicaciones intencionales, esto permite observar que ha adquirido el conocimiento involucrado en la situación a-didáctica. Para lograr su objetivo de enseñar, el profesor hará diseños de situaciones a-didácticas que determinan el conocimiento enseñado en un momento dado.

En el caso de actividades didácticas diseñadas para ser utilizadas en línea, el alumno enfrentará las actividades a-didácticas conociendo sólo elementos básicos de lo que representa la actividad. Mediante animaciones realizadas por la computadora, basadas en valores proporcionados por el estudiante o por otras formas de interacción computadora-alumno.

Al momento de resolver las acciones que solicita el programa generado en la actividad didáctica en línea, el estudiante realizará operaciones relacionadas con las definiciones de funciones trigonométricas como cocientes de los lados de un triángulo rectángulo. De la misma manera utilizará definiciones correspondientes a las funciones trigonométricas inversas.

Situación Actual

Tomando en cuenta que las actividades deben estar basadas en el uso de la trigonometría decidimos diseñar una actividad basada en un modelo simple del movimiento que describen los Voladores de Papantla al ejecutar su danza.

Fig. 1 Danza ritual de los voladores de Papantla, Veracruz, México.

La danza ritual de Los Voladores de Papantla se remonta a la época prehispánica. En sus inicios los trajes eran confeccionados con verdaderos plumas de aves que representaban águilas, búhos, cuervos, guacamayas, quetzales, calandrias, etc. Los voladores inician la danza desde lo alto de un tronco de árbol de 30 metros de altura que recibe el nombre de Palo del Volador. Atados de la cintura con una cuerda inician un lento descenso colgando de cabeza y girando alrededor del Palo del Volador. Mientras descienden un danzante más, que recibe el nombre de Caporal, interpreta música con un pequeño tambor y una flauta desde lo alto del palo, tan sólo manteniendo el equilibrio sin red ni cuerdas que lo protejan de una posible caída.

Fig. 2 El Caporal, de pie, y los voladores, sentados, listos para iniciar la danza ritual

En la actividad didáctica en línea que se diseñó para ser utilizada en nivel secundaria los alumnos tienen disponibles videos de la danza completa y ligas a las páginas oficiales del Gobierno del Estado de Veracruz para conocer la historia y significado completo de la danza. Para realizar la programación de las actividades se ha elegido el lenguaje Java® que permite una gran portabilidad en los programas y animaciones, logrando que las actividades que ya han sido programadas puedan ser ejecutadas en diferentes sistemas operativos. El proyecto incluye la posibilidad de instalar las actividades en servidores pertenecientes al Gobierno del Estado de Veracruz, en los laboratorios de cómputo de las escuelas y hasta en las computadoras personales de los estudiantes logrando una cobertura mayor del sistema educativo.

Los estudiantes deben aplicar las definiciones de las funciones trigonométricas en términos de cocientes de los lados de un triángulo rectángulo para calcular la altura a la que se encuentran los voladores en determinado momento conociendo el ángulo formado por la cuerda y el palo del Volador, así como la longitud de la cuerda que se ha desenrollado. En una variante de la actividad a los estudiantes se les proporciona la longitud de la cuerda que se ha desenrollado y la distancia horizontal entre el volador y el palo, con lo que deben calcular el ángulo que forma la cuerda con el palo utilizando la definición de función trigonométrica inversa.

En una última variante, el estudiante puede conjeturar si ciertos valores proporcionados forman un triángulo rectángulo. Las diferentes variantes de la actividad mencionada aquí responden a las características marcadas en (CONACYT, 2008) y (Rosas, Castañeda y Molina, 2009).

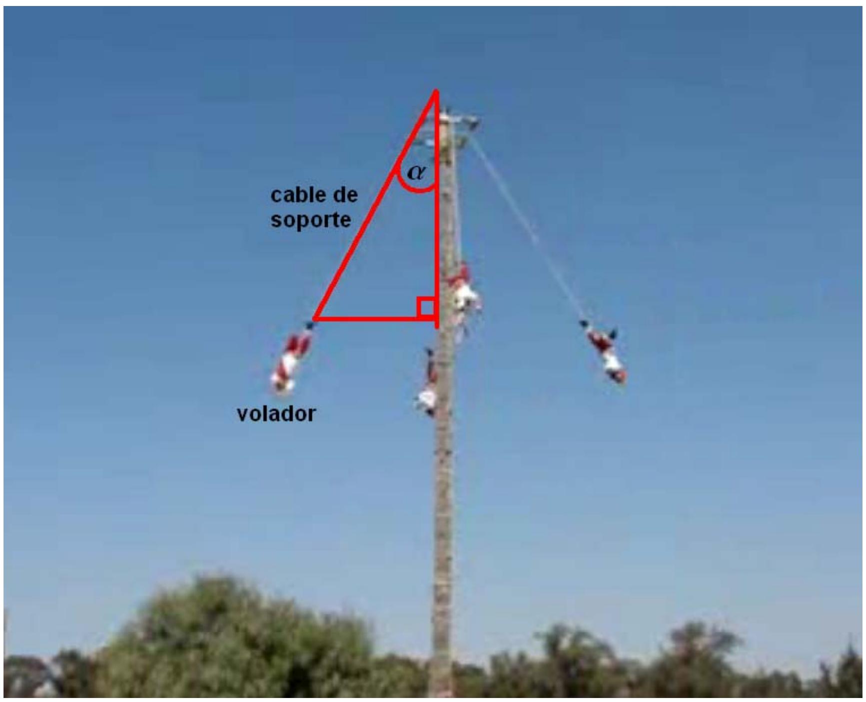


Fig. 3 Esquema triangular de los Voladores de Papantla

Avances

Hasta el momento la actividad ha sido diseñada, y los miembros del grupo de trabajo han realizado un análisis a priori de la actividad didáctica en línea. Ya se cuenta con la programación y se están realizando las primeras pruebas con alumnos y profesores del nivel académico mencionado.

Cada actividad incluye sugerencias de cómo realizar modificaciones o adecuaciones que permitan realizarlas en el salón de clase, aún sin utilizar computadoras. También se tiene contemplada la generación de materiales audiovisuales que expliquen a los profesores el uso de las actividades con la intención de lograr un mayor aprovechamiento.

Los comentarios iniciales presentan un buen punto de partida para depurar y mejorar el diseño.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (2008). *Demandas específicas, convocatoria 2008-02*. Recuperado de www.conacyt.gob.mx/Fondos/Mixtos/convocatoria_FondosMixtos.html el 30 de enero de 2009.

Rosas, A., Castañeda, A. y Molina, J. (2009). *Protocolo de trabajo*. Manuscrito no publicado.

CAMBIOS EN FIGURAS DE ÁREA IGUAL, CONSERVACIÓN Y RELACIONES FIGURALES

María Victoria Popoca Yáñez, Claudia Acuña Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal (México)
mvpopoca2@hotmail.com, claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen. Esta investigación indaga cómo los estudiantes de bachillerato enfrentan tareas de identificación de áreas iguales en figuras geométricas que cambian de posición, forma o son reconfiguradas. Nos apoyamos en manipulables para representar las figuras de área igual y la comparación se hizo luego que hemos dibujado, cortado y doblado las figuras. El problema de la conservación del área aparece junto con la del perímetro. Nuestra exploración nos sugiere que el reconocimiento del área igual se dificulta conforme aumenta el número de cortes, también observamos que la estimación del perímetro es global. En general el estudiante observa la figura por su apariencia y aspecto global, en ausencia de sus propiedades figurales, por tanto no pueden establecer las relaciones matemáticas.

Palabras clave: relación área-perímetro, conservación del área, reconfiguración, propiedades figurales

Abstract. This research was carried out in order to learn how high school students face identification tasks of equal areas in different geometrical figures when these change position, shape or they are reorganized. We used objects of equal areas that could be manipulated and comparisons were made after they were cut, pasted and folded. The area conservation problems and the perimeter´s problem are presented subsequently. Our research suggests that recognition of equal area becomes increasingly difficult as the number of cut's inflicted to the objects increase and that global estimation of the perimeter occurs. In general, students support their impressions of the shape based on its appearance without taking into account its properties as a shape and cannot establish mathematic relations.

Key words: area-perimeter relationship, area conservation, reorganized by cuts, figural properties

Antecedentes

Los conflictos presentados por los estudiantes respectos a la relación área-perímetro se reconoce desde el punto de vista de la epistemología desde hace mucho tiempo, y es considerado ya en la literatura de la matemática educativa como el tipo de dificultades que se consideran como obstáculos conceptuales en Rogalski (1979) esta relación ha sido estudiada por ejemplo relacionadas a cierto tipo de razonamiento geométrico en particular apoyados en la teoría de niveles de pensamiento geométrico de van Hiele en Gutiérrez (1998) o más contemporáneamente se incluyen en las variables de investigación consideraciones como las concepciones de los estudiantes D'Amore et al (2007) quienes afirman que los problemas no sólo son epistemológicos sino también didácticos.

stos resultados de investigación se formulan al margen de la intervención de la computadora que ha puesto a la disposición de la enseñanza gran cantidad de recursos que implican nuevas perspectivas en las que no abundaremos en este trabajo.

En el presente caso, sin embargo deseamos observar esta relación con manipulables de doblado y recortado de papel en donde la conservación de áreas se postula a partir de un trabajo de reconfiguración debido a que una de las características figurales que los estudiantes deberían estar en condiciones de observar es la de la igualdad de áreas en dos figuras de forma y posición distinta, especialmente si se trata del mismo objeto el cual ha sido manipulado frente a sus ojos.

La enseñanza de la geometría en el bachillerato requiere que el estudiante conozca no sólo las figuras geométricas con las que se le ha familiarizado desde la primaria, sino que sea capaz de identificar sus características y establecer las relaciones entre sus propiedades

Marco teórico y pertinencia de constructos de investigación

Para enfocar mejor los significados asociados a las figuras geométricas, nos referiremos a las llamadas representaciones en la matemática. Consideramos que todo concepto matemático requiere de representaciones, ya que no tenemos acceso directo a estos, sino que realizamos una evocación de ellos.

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas en las que se emplean signos, son un medio con el que un individuo comunica sus ideas. En el caso de la matemática llamamos objetos matemáticos de los que Godino y Batanero, (1994) dicen "El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos" (p.335).

De acuerdo con Duval (1999 y 2006), es necesario diferenciar el objeto matemático de sus representaciones semióticas, debido a que el objeto representado nunca se puede reducir a su representación, por ello, el cambio de forma y posición establece en el estudiante por un lado la idea del reconocimiento de la figura cuando esta no está alineada como de costumbre o se trata de una figura distinta a la del prototipo.

Las representaciones pueden tomar la forma de manipulables, siempre que se les de el tratamiento matemático respectivo y este no se centre en las propiedades que les confiere su corporeidad.

Considerando los niveles de pensamiento de van Hiele, Jaime y Gutiérrez (1990) el tratamiento del objeto de estudio de este trabajo, se puede colocar en el nivel **1** donde el conocimiento es puramente físico y visual, se perciben las figuras geométricas de forma global y como objetos individuales, los estudiantes en este nivel no son capaces de generalizar.

Este acercamiento didáctico corresponde al paradigma de la Geometría Natural desde el punto de vista de los espacios de trabajo de Houdement y Kuzniak (2006) quienes consideran tres paradigmas de ellos: la intuición, la experiencia y el razonamiento deductivo, este trabajo se sitúa en el primero debido a que la se uso la intuición, entendida como evidencia, para dar forma a la estructura de pensamiento geométrico.

De manera que en esta investigación se considera la importancia de la transformación de la figura en posición, forma y sentido a través de manipulables que serán modificados conservando el área y variando el perímetro con base en la intuición y la experiencia, por lo que el desarrollo de las actividades se encuentra dentro de la Geometría Natural antes mencionada.

Mientras que lo referente a los distintos tratamientos a la figura geométrica encontramos que Duval (1995) se refiere a cuatro distintos tipos de aprehensiones: perceptual, secuencial, discursivo y operativo, en este trabajo haremos uso de la aprehensión perceptual para identificar la figura, secuencial en la transformación de la figura, del discursivo al expresar estos cambios, pero no del operatorio.

Metodología

La idea del área que requerimos en el nivel bachillerato, no está relacionada solamente con su cálculo, sino con tratamientos como el de la comparación. Decidir cuándo tenemos más área y cuándo menos, es un trabajo que hace que el estudiante centre su atención en el área pensada como superficie confinada. Esta idea no es una habilidad desarrollada, tan frecuentemente como es necesario en el trabajo en clase.

La estrategia de trabajo que usaremos para la conservación del área es la llamada recomposición de figuras en donde se requiere de un tratamiento figural del objeto que debe ser transformado en términos de tus propiedades de representación actual. Para indagar, cómo se lleva a cabo la identificación del área igual en figuras a las que se han transformado con base en la forma, la posición y la recomposición de la figura, usamos cuestionarios y manipulables. Por otro lado, la idea de área está muy relacionada con la idea de perímetro, por tal razón, las actividades propuestas involucran en un inicio estos dos elementos, en otro momento sólo observaremos el área a través del doblado de papel donde hacemos trabajos de recomposición.

Los datos se obtuvieron con base en las respuestas a los cuestionarios, las sesiones fueron filmadas y transcritas, además se desarrollaron algunas entrevistas para profundizar y aclarar algunas de las respuestas.

Las actividades se llevaron a cabo con 25 alumnos de primer semestre (de 15 años de edad) y 25 alumnos de tercer semestre (de 16 años de edad), esto es con el propósito de comparar sus niveles de razonamiento. Las tres actividades que se trabajaron fueron las mismas para cada grupo y ambos grupos ya trabajaron el tema de perímetro y área. A cada actividad se le dedicó una sesión. La primera duró una hora, y las otras dos, hora y media cada una.

Los contenidos y propósitos de las actividades diseñadas son los siguientes:

Actividad 1: Esta actividad es de diagnóstico, donde se trata de indagar sobre el significado que hasta ahora tienen sobre área y perímetro de una figura plana. En particular si se cambia la posición de las figuras y cuando se hace una recomposición sencilla. Las preguntas planteadas se refieren al área y al perímetro de figuras básicas, hacen comparaciones entre estas al cambiar de posición y forma cuando se usa la recomposición.

Actividad 2: El trabajo aquí es en forma de taller donde, aumentando el grado de dificultad, analizan las figuras y las transforman al recortarlas y unirlas. Mientras forman nuevas figuras, siguen comparando áreas y perímetros, e incorporamos la idea de porción de área.

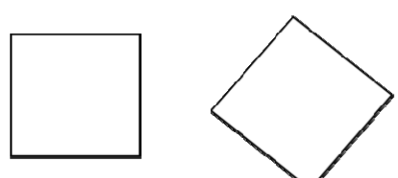
Actividad 3: Se trabaja en forma de taller, pero ahora con doblado de papel. Se hace mayor énfasis en la idea de porción de área, de tal forma que las acciones que se efectúan van dirigidas a mostrar la igualdad de áreas entre tres figuras transformadas por recomposición. En esta actividad, a diferencia de las dos anteriores, además de hacer doblados de papel, el alumno debe de considerar las propiedades figurales para que lleguen a percibir la igualdad de áreas y dar sus justificaciones correspondientes. Para esto, primero se debe identificar la cantidad de área que queda después de cada división que se hace al cuadrado de papel cuando este se va doblando. La principal diferencia de esta actividad y la anterior es que hay información que no está a la vista, para poder indagar qué tan adecuados tienen sus referentes sobre las propiedades figurales.

A continuación mostraremos algunos ejemplos con sus respectivos resultados para cada actividad. En adelante g-A y g-B se refieren al grupo de 15 años y al de 16 años respectivamente.

ACTIVIDAD 1: de diagnóstico

En particular si se cambia la posición de las figuras

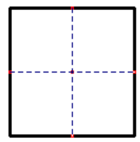
¿Son iguales las áreas de las figuras **C** y **D**?
Respuestas: Si g-A: 84 %, no g-B: 68%
Pregunta 2c) ¿Y sus perímetros son iguales?
Respuestas: Si g-A: 88 %, no g-B: 92%

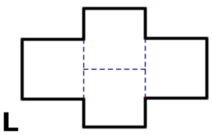


C **D**

Cuando se hace una recomposición sencilla

Si a la figura **K** le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las piezas formamos la figura **L**, ¿son iguales las áreas de **K** y **L**? Respuestas: Si g-A: 56%, no g-B: 68%





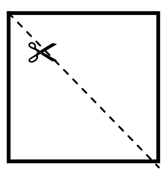
c. ¿Qué figura tiene mayor perímetro? Respuestas: La L g-A: 44% g-B: 92% ;
La K g-A: 36% g-B: 8%

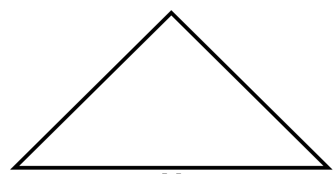
Las evidencias obtenidas nos mostraron que en estas figuras elementales no hay grandes dificultades en la apreciación de la conservación del área cuando estas cambian de posición y forma.

ACTIVIDAD 2: Taller de recorte

En el caso de una recomposición

La figura **G** de "fomy" es un cuadrado. Recorta sobre una de sus diagonales como se ve en la figura, y con las 2 piezas que te quedan forma el triángulo **H**.



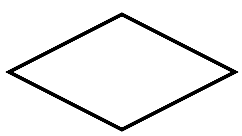


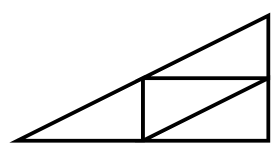
a) ¿Tienen áreas iguales las figuras **G** y **H**? Respuestas: Si g-A: 84% g-B: 68%

Observación: Los "No", argumentaron, por ejemplo, que al ser diferentes figuras, se usa diferente fórmula para calcular el área.

c) De las figuras **G** y **H**, ¿cuál tiene mayor perímetro? Respuestas: La H; g-A: 72% g-B: 64%

Hacer dos cortes al rombo **I** de "fomy", de tal forma que con todas las piezas que obtengas, puedas formar el triángulo **J**. Como se ve en la figura.



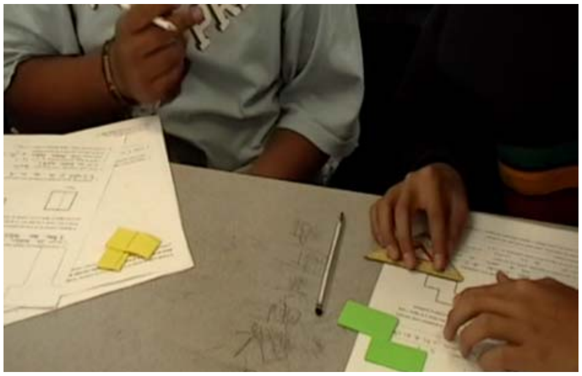


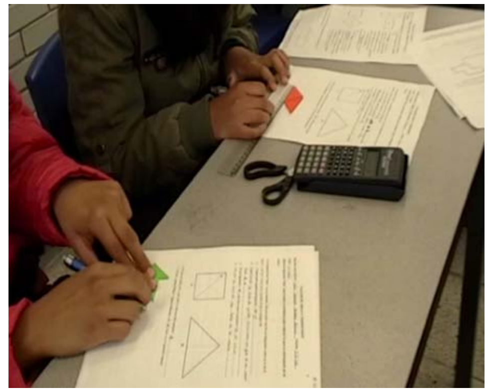
a) ¿Cómo son estas áreas entre si? Contestaron correctamente: g-A: 44% g-B:76%

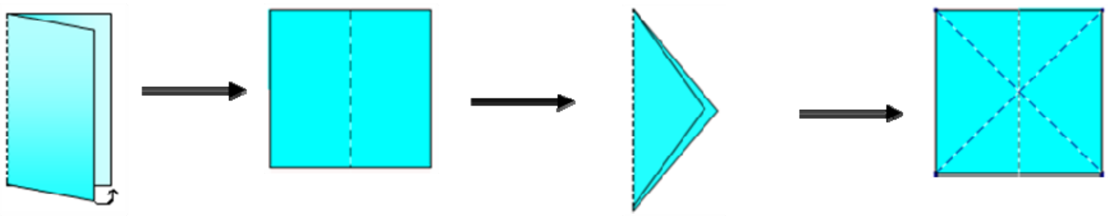
b) ¿Cuál tiene mayor perímetro? Contestaron correctamente: g-A: 32% g-B:72%

Podemos observar que los porcentajes van cambiando en los casos anteriores los pedazos a ensamblar aumenta y la certeza sobre la igualdad disminuye, de manera que la idea del todo es una idea enraizada para toda situación de corte.

En las siguientes imágenes se puede observar como los alumnos usan herramientas de cálculo en lugar de utilizar las propiedades de las figuras.



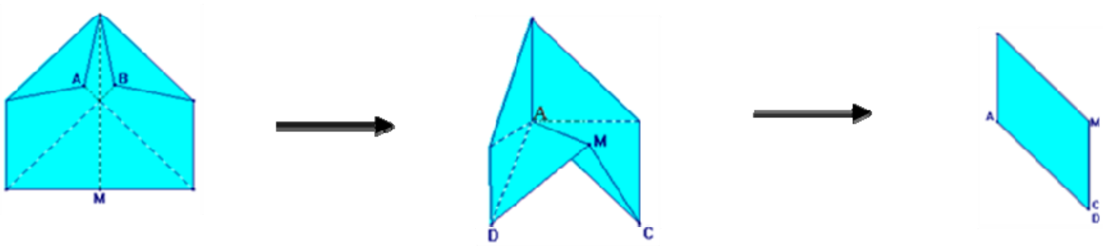




Las evidencias muestran que varios alumnos observaron la figura por su apariencia, sin considerar las indicaciones dadas para sus particiones.

Por ejemplo en cierto momento, al indicarles "llevando los vértices A y B hacia el centro del cuadrado, y presiona fuertemente sobre los dobleces. El área de la pieza resultante ¿qué parte es del área del *cuadrado original?*"

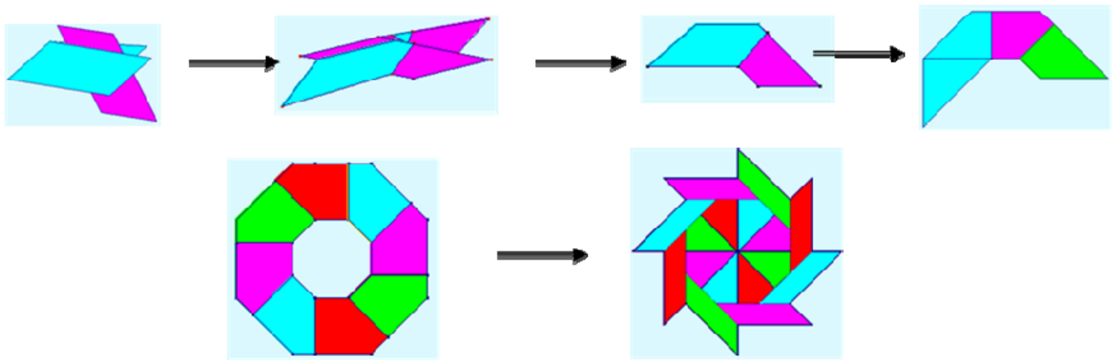
Contestaron correctamente: g-A: 50% g-B: 63.6%



Pero, en la pregunta 5 a) El área de la pieza que finalmente obtuviste ¿qué parte es del área del *cuadrado original*? Contestaron correctamente: g-A: 66.7%; g-B: 90.9%

A pesar de que a varios alumnos se les dificulta encontrar la figura útil para dar sus respuestas, esto es debido a que no tienen a la vista la información que les servirá para llegar al resultado deseado, al final contestan correctamente basándose más en su intuición.

Al continuar con la actividad, finalmente realizan varios dobleces más para obtener finalmente la dona octagonal plana que se puede transformar en una estrella.



El objetivo de esta actividad es que lleguen a la conclusión de que el área del cuadrado de papel original es igual al área de la dona y también es igual al área de la estrella y que pasen por los distintos tipos de aprehensión. Los alumnos por si solos no perciben la conservación del área de las partes de una figura, y llegar a la conclusión deseada, mucho menos.

Análisis de las respuestas

Observamos que las respuestas son determinadas por una apreciación global, la idea del todo y las partes, en estos casos no son homogéneas, de manera que el elemento determinante en la identificación de la recomposición se apoya en una observación sobre la cantidad de piezas y cortes de cada tarea siendo más difícil de identificar conforme estos aumenten, es decir, la reconfiguración del área es una tarea que se ve afectada por las concepciones de los estudiantes en lo referente a la mayor dificultad de identificación.

Ante esa situación los recursos de nuestros estudiantes regresan a los ámbitos conocidos como el del cálculo cuando se afirma que: "*al recomponer una figura sus áreas eran diferentes porque al ser figuras diferentes las fórmulas para calcular sus áreas también deben ser diferentes*".

No se apoyan en las propiedades figurales que les permitirían hacer una comparación, porque en principio tampoco reconocen su relevancia en este tipo de problemas que sería lo esperado debido a que la tarea se encuentra colocada dentro de la geometría Natural.

En el caso del perímetro la frecuencia de resultados correctos es mayor, ya sea porque los estudiantes consideran que la figura "*tiene más lados*", "*es más grande*" o porque pusieron más cuidado considerando que la solución no era trivial donde podemos observar una preponderancia de cálculos aritméticos y el uso de calculadora. El realizar estas acciones las denominamos "pensamiento numérico", mientras que el hecho de involucrar las relaciones figurales lo identificamos como "pensamiento geométrico". Estas denominaciones de pensamiento tiene algunos aspectos similares a los modos de pensamiento teórico y práctico desarrollado por Sierpinska, et al. (2002).

Conclusiones

Las dificultades generadas por el cambio de posición y de forma de las figuras, tienen una explicación parecida a la obtenida en las reconfiguraciones, en las situaciones sencillas, es decir con pocos cortes las respuestas suelen ser correctas. No así en los casos en donde lo trascendente es la comparación de las unidades figurales para obtener los resultados, es decir con una visión global de las figuras no pueden hacer comparaciones locales que son las que les permitirían resolver correctamente las tareas planteadas.

En la recomposición de figuras, podríamos afirmar que la dificultad en la comparación de áreas y perímetros se relaciona con la situación de la tarea, es decir, tenemos que en la tarea de doblado, algunas de las partes no son visibles por la superposición de las piezas que forman la estructura final.

Además, parece que nuestros estudiantes no aceptan la idea de que la figura es la misma que está siendo transformada frente a ellos, porque él área, al parecer, depende de la forma que toma, si esta cambia, el área también.

Encontramos que el pensamiento numérico está más arraigado que el geométrico cuando pierden la ruta para resolver las comparaciones figurales, en particular, la comparación del perímetro fue acompañada de mediciones y asignación de valores a través de lo cual daban sentido a la tarea.

El pensamiento numérico está más arraigado que el geométrico. Aplican argumentos intuitivos de la forma: "A más A, más B". Por ejemplo: "*Si tienen la misma área entonces tendrán el mismo perímetro*", la figura "*tiene más lados*" ó "*es más grande*".

El reconocimiento de las propiedades figurales de las representaciones de los objetos geométricos, resulta relevante para estar en condiciones de hacer comparaciones de figuras de área igual que han sido transformadas mediante cambio de forma, posición o recomposición, la observación de el cambio de dimensión de los elementos figurales de las representaciones y la apreciación global-particular emerge como un prerrequisito no sólo para observar la igualdad sino para el tratamiento correcto de las representaciones en geometría.

Observamos que la aprehensión perceptual de la figura conforme se van dando los cambios tiende a perder seguridad sobre lo observado, las conclusiones que deberían ser directas, tienden a ser más inciertas.

La aprehensión secuencial, en este caso no proporciona información sobre las transformaciones sufridas por la figura para la conservación del área.

Finalmente la aprehensión discursiva no pudo ser desarrollada por nuestros estudiantes debido a la falta de certeza sobre sus afirmaciones

Referencias bibliográficas

CCH, UNAM. Planes de estudio, (s.f.). Extraído el 20 de abril de 2011 desde http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté S.A. de C.V.

D'Amore, B. & Fandiño, M.I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. l0-1, 39-68. México.

Duval, R. (1995), Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlín: Springer.

Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. pp. 147-174.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación. *La gaceta* de la RSME, 9.1 pp.143-168.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, (3), pp. 325-355.

Gutiérrez, A. (1998): *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización* (texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM-98. Centre de Recerca Matemática, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscrito.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, pp. 175 – 193.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Linares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática, (*pp. 295-384). Sevilla Spain: Alfar.

Popoca, V. (2009). *Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rogalski, J. (1979) Quantités physiques et structutes numeriques. Mesures et quantificatio: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de L'APMEP* 320, pp. 565-586

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra.* Reporte de investigación, Universidad de Concordia, Canadá. Obtenido de http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

EL MÉTODO DE LAS FRACCIONES CONTINUAS: APLICACIÓN AL DESARROLLO DE ALGORITMOS EFICIENTES DE CÁLCULO DE FUNCIONES DE BESSEL

Eugenio Hernández Vargas, María Jezabel Pérez Quiles
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pinar del Rio (Cuba)
Instituto de Matemática Pura y Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia (España)
eugenio@mat.upr.edu.cu, jperezq@mat.upv.es

Resumen. En este trabajo se presentan los elementos necesarios sobre el método de las fracciones continuas para entender su uso en el desarrollo de algoritmos de computación eficientes para el cálculo de funciones de Bessel. El enfoque que se da a esta contribución es pedagógico, resaltando los aspectos docentes del método, y pretende ser enmarcada en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas y sus aplicaciones en física y/o ingeniería. En ella se ofrece un material didáctico dirigido a profesores de matemáticas que imparten docencia en carreras técnicas en cursos avanzados de cálculo numérico.

Palabras clave: fracciones continuas, funciones de Bessel

Abstract. In this work we present the necessary elements of the method of the continuous fractions to understand their use in the development of efficient calculation algorithms for the calculation of functions of Bessel. The focus that is given to this contribution is pedagogic, standing out the educational aspects of the method, and it seeks to be framed in the environment of the teaching of the mathematics and its applications in physics and/or engineering. So, we offer didactic material for professors of mathematics in technical careers in advanced courses of numeric calculus.

Key words: continuous fractions, functions of Bessel

Introducción

El trabajo docente que aquí presentamos versa sobre el desarrollo de algoritmos de computación eficientes para el cálculo de funciones de Bessel (FB). Los métodos usuales para su evaluación incorporan relaciones de normalización (Luke, 1975).

Los algoritmos para evaluar funciones de Bessel que se muestran en este trabajo se basan en los métodos desarrollados por Ratis y Fernández de Córdoba (Ratis y Fernández de Córdoba, 1993, pp. 381-388). Estos algoritmos no requieren re-evaluaciones a través de relaciones de normalización y evalúan tanto funciones de Bessel regulares (o de primera especie) como irregulares (o de segunda especie). Su método, además, mantiene la estabilidad de cada relación de recurrencia pues utiliza relaciones de recurrencia ascendentes para FB de segunda especie y relaciones de recurrencia descendentes (Miller, 1952) para FB de primera especie.

Estos algoritmos hacen uso de las relaciones de recurrencia ascendentes para generar FB irregulares e incorporan el método de las fracciones continuas para evaluar las FB regulares de alto orden. A partir de estos valores, se generan las FB irregulares aplicando relaciones de recurrencia descendentes.

Debido a esta estructura, en la que no se hace uso de ninguna relación de normalización, estos algoritmos se muestran especialmente útiles en la evaluación de FB de alto orden.

Algunos elementos sobre fracciones continuas

Durante los años 1650 y 1660 se desarrollaron una gran cantidad de métodos infinitos (Boyer, 1994), incluyendo el método de la fracción continua infinita para el cálculo de π. En realidad, los inicios de la teoría de fracciones continuas datan de principios del siglo XVI y tuvieron lugar en Italia, donde ya se expresaban raíces cuadradas de esta forma. Así, por ejemplo, si queremos despejar x de la ecuación $x^2+2x-1=0$ (o equivalentemente de $2=(1+x)^2 \leftrightarrow \sqrt{2}=1+x$) se tiene que como $x(x+2)=1$, entonces:

$$x=\frac{1}{x+2}, \quad \text{con lo que finalmente}$$

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}.$$

En la actualidad citaremos como referencias básicas a la teoría de las fracciones continuas fundamentalmente los trabajos de Wall (Wall, 1967) y Brezinski (Brezinski, 1990, 1991) y siguiendo la notación de (Wall, 1967) una fracción continua viene dada por:

$$f(x)=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\ldots}}}},$$

donde a_i, *i=1,2,…,* y b_j, *j=0, 1,2,…,* pueden ser a su vez funciones de la variable *x*.

Aplicación del método de las fracciones continuas a la evaluación de Funciones de Bessel

En esta sección vamos a presentar a modo de ejemplo de aplicación del método de las fracciones continuas para la evaluación de FB, el procedimiento para generar funciones de Bessel Esféricas (FBE) o de orden semi-entero tanto de primera como de segunda especie.

Seguimos la notación estándar de Abramowitz y Stegun (Abramowitz y Stegun, 1972) e introducimos las FBE de primera especie j_n y las FBE de segunda especie y_n como soluciones particulares de la ecuación diferencial

$$z^2w''(z)+2zw'(z)+(z^2 - n(n+1))w(z)=0,\ n = 0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Con el algoritmo que presentamos en esta sección se calculan simultáneamente las FBE de todos los órdenes por debajo de $N_{máx}$, i.e. se genera el conjunto:

$$BE(z)=\{\ j_n(z),\ y_n(z)\ ;\ n=0,1,2,\ldots,\ N_{máx}\ \}.$$

El método se ha organizado según los pasos siguientes:

1. Evaluamos todas las FBE de segunda clase {yn(z), n = 0,1,2,...Nmáx} teniendo en cuenta que conocemos los valores de y0(z)=-cos(z)/z e y1(z)=-sin(z)/z –cos(z)/z^2 con la fórmula de recurrencia ascendente

$$y_{n+1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} y_n(z) - y_{n-1}(z).$$

2. Mediante el método de las fracciones continuas (Abramowwitz et al, 1972) evaluamos el cociente

$$H(z) \equiv \frac{j_{N_{máx}}(z)}{j_{N_{máx}-1}(z)} = \frac{j_{N_{máx}+\frac{1}{2}}(z)}{j_{N_{máx}-\frac{1}{2}}(z)} =$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{2N_{máx}}{z} + \cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+1)}{z} + \cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+2)}{z} + \cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+3)}{z} + \ldots}}}}.$$

Este método se programa en el código de Ratis y Fernández de Córdoba usando el algoritmo de Steed (Barnett, Feng, Steed y Goldfarb, 1974, pp. 377-395).

3. Calculamos las FBE de primera especie jNmáx(z) y jNmáx-1(z) teniendo en cuenta que conocemos los valores de yNmáx(z) y yNmáx-1(z), el cociente H(z) y el valor del Wronskiano de las FBE

$$W\{j_{N_{máx}}(z), y_{N_{máx}}(z)\} \equiv$$
$$\equiv j_{N_{máx}}(z) y_{N_{máx}-1}(z) - j_{N_{máx}-1}(z) y_{N_{máx}}(z) = z^{-2}.$$

Se llega a que

$$j_{N_{max}-1}(z) = \frac{1}{z^2(H(z)y_{N_{max}-1}(z) - y_{N_{max}}(z))},$$

y, por tanto,

$$j_{N_{\max}}(z) = H(z)\, j_{N_{\max}-1}(z).$$

4. Se generan todas las FBE de primera especie, {jn(z), n=0,1,2...,Nmáx}, considerando los valores calculados de jNmáx(z) y jNmáx-1(z), y usando la relación de recurrencia descendente,

$$j_{n-1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} j_n(z) - j_{n+1}(z).$$

En el apéndice A de este trabajo presentamos un esquema resumiendo los pasos del algoritmo indicados en esta sección.

Algoritmos tradicionales para la evaluación de Funciones de Bessel

El algoritmo de Miller en el que se basan los programas que encontramos en (Press, Flannery, Teukolsky y Vetterling, 1986) para el cálculo de FBE de diferentes órdenes y de rango muy amplio se explica a continuación. Este algoritmo comienza calculando directamente y para órdenes bastante altos digamos m las FBE de primera clase *(m>>N*$_{máx}$*)* utilizando la fórmula de recurrencia descendente

$$\hat{j}_{n-1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} \hat{j}_n(z) - \hat{j}_{n+1}(z),$$

dando valores 0 y 1 a $\hat{j}_m(z)$ y $\hat{j}_{m-1}(z)$ respectivamente. Estos valores se eligen al azar. Así, se genera el conjunto $\{\hat{j}_n(z), n=0,1,2,...,m\}$. Entonces se consideran los valores calculados para $\hat{j}_0(z)$ y $\hat{j}_1(z)$ y utilizando los valores bien conocidos de $j_0(z)$ y $j_1(z)$ se calcula la re-normalización constante

$$p(z) = \frac{j_0(z)}{\hat{j}_0(z)}.$$

Finalmente se genera el conjunto

$$j_n(z) = p(z)\hat{j}_n,\; n = 0,1,2,...$$

En el apéndice B de este trabajo presentamos un esquema resumiendo los pasos del algoritmo indicados en esta sección.

Conclusiones

En este trabajo presentamos el método propuesto por Fernández de Córdoba y Ratis (Ratis, *et al,* 1993, pp. 381-388) especialmente útil y eficiente para el cálculo de FB de orden alto, y que es numéricamente muy estable. La característica primordial de este algoritmo es que no requiere las re-evaluaciones de las FB propias de los procedimientos habituales que incorporan relaciones de normalización. La base de su código es el uso del Método de las Fracciones Continuas para relacionar las FB irregulares (de alto orden) con las regulares del mismo orden. Estos códigos tienen aplicación directa en una gran variedad de problemas donde se necesitan FB de alto orden.

Referencias bibliográficas

Abramowitz, M. y Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc.

Barnett, A.R., Feng, D.H., Steed, J.W. y Goldfarb, L.J.B. (1974). Coulomb Wave Functions for all real η and ρ. *Computer Physics Communications 8*, 377-395.

Boyer, C.B. (1994). *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad Textos.

Brezinski, C. (1990). *Continued Fractions and Padé Approxiamtions*. Elsevier Science Publishers B.V.

Brezinski, C. (1991). *A Bibliography on Continued Fractions, Padé Approximation, Sequence Transformation, and Related Subjects.* Universidad de Zaragoza.

Carta, J.A., Ramírez, P. y Bueno, C. (2008). A joint probability density function of wind speed and direction for wind energy analysis. *Energy Conversion and Management (49),* 1309-1320.

Luke, Y.L. (1975). *Mathematical Functions and their approximations*. Academic Press.

Miller, J.C.P. (1952). *Bessel Functions, Part II, Functions of Positive Integer Order. Mathematical Tables 10*. Cambridge University Press.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. y Vetterling, W.T. (1986). *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge: University Press.

Ratis, Yu.L. y Fernández de Córdoba, P. (1993). A code to evaluate (high order) Bessel functions based on the continued fraction method. *Computer Physics Communications 76*, 381-388.

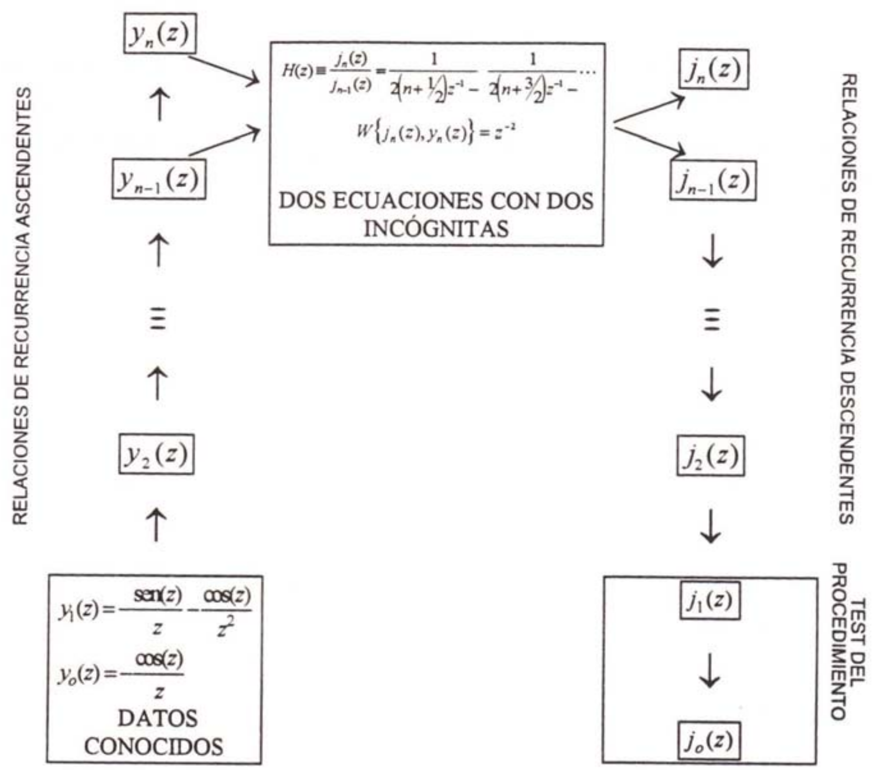
Vaganov, R.B., Korshunov, I.P., Korshunova, E.N. y Shatrov, A.D. (2008). Selection of the microwave-beam parameters in a wireless system for energy transportation from a space electric power station to the Earth. *Journal of Communications Technology and Electronics 53(2)*, 195-198.

Wall, H.S. (1967). *Analytic Theory of Continued Fractions*. Bronx, N.Y.: Chelsea Publishing Company.

Apéndice A

ALGORITMO DE FRACCIONES CONTINUAS

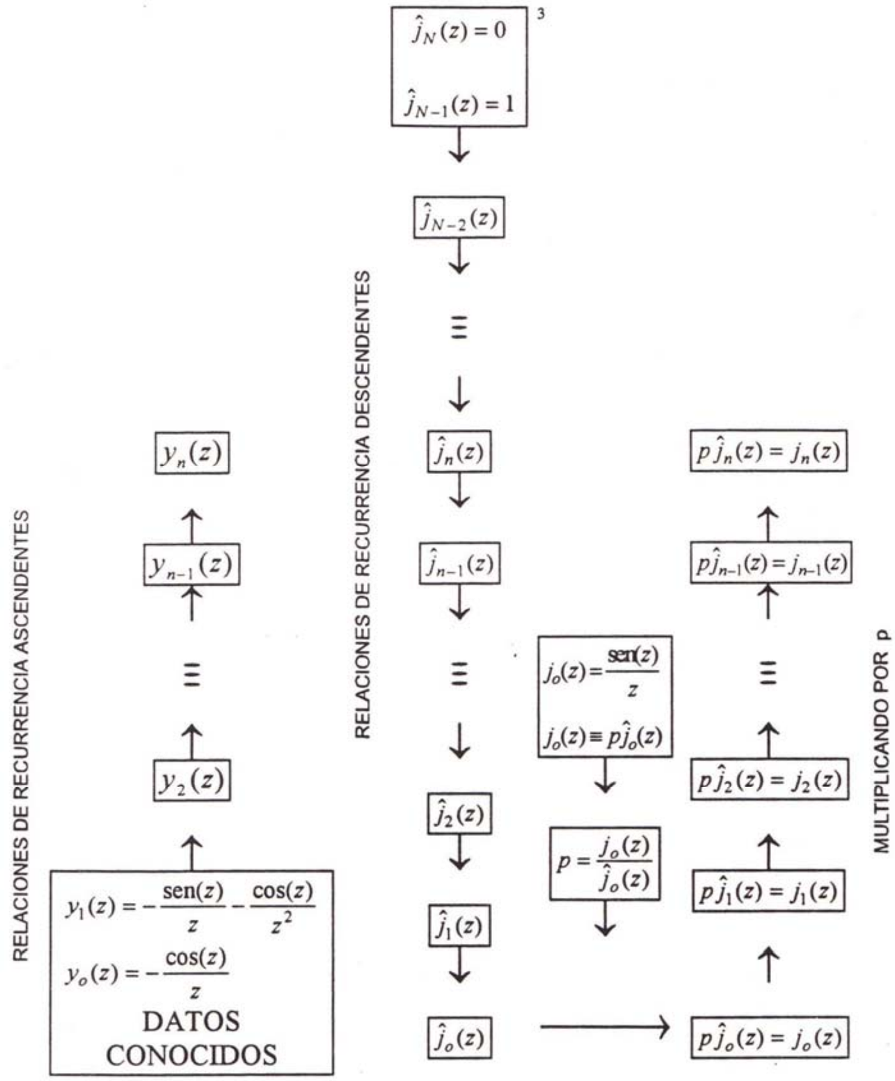
EVALUACIÓN DEL CONJUNTO $BE(z) = \{j_k(z)\ ,\ y_k(z)\ ;\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n\}$ [1]



Apéndice B

ALGORITMO DE MILLER

EVALUACIÓN DEL CONJUNTO $BE(z) = \{j_k(z)\ ,\ y_k(z)\ ;\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n\}^2$



APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

Nohemí Baca Chávez, Oscar Jesús San Martín Sicre
Universidad Pedagógica Nacional. Universidad Pedagógica Nacional-IFODES (México)
noe_baca@hotmail.com, osicre@hotmail.com

Resumen. Se presenta un estudio de caso donde se explora y describe lo que sucede en un grupo de segundo grado de primaria cuando se aplica una propuesta didáctica que combina de manera no contradictoria una situación didáctica de Brousseau con una didáctica de aprendizaje por descubrimiento. Un primer objetivo del estudio fue que los niños aprendieran de manera significativa las "Tablas de multiplicar", un segundo objetivo, fue explorar la conjetura de que nuestra propuesta resulta operativamente más viable en el sentido de que requiere menos tiempo para su tratamiento didáctico; propicia más la intervención del profesor respetando la actividad del alumno, y simplifica el proceso de evaluación. La metodología empleada utiliza tres instrumentos de generación de datos: 1) Actividades diseñadas para la implementación de la propuesta, 2) Filmación de videos y 3) Entrevistas a niños, maestros y padres de familia. Los referentes teóricos están constituidos por aportes de J. Piaget, G. Brousseau y D.P. Ausubel. Las conclusiones del estudio se presentan más adelante.

Palabras clave: situación didáctica de Brousseau, aprendizaje por descubrimiento, aprendizaje significativo, tablas de multiplicar

Abstract. A case study is presented where we explore and describe the application of a didactical strategy that combines in a non contradictory manner a Brousseau's didactical situation with learning by discovery didactic in a elementary second grade school group. As a first objective of the study we intended that the children learned significatively the so called "multiplication tables", a second objective was to explore the conjecture that the didactic that we investigate resulted operationally more viable in the sense that it required less time for its didactic treatment, promoted further intervention of the teacher, at the same time it respected the student's activity and simplified the evaluation process. The methodology employed three data generation tools: 1) the didactic activities designed for the implementation of the proposal, 2) The filming of videos and 3) interviews with children, teachers and parents. The main theoretical references are those of J. Piaget, G. Brousseau and D.P. Ausubel. Some conclusions of the study are presented later

Key words: didactic situation of Brousseau, learning by discovery, significative learning, multiplication tables

Problemática general

El enfoque didáctico constructivista centrado en la construcción del conocimiento por el niño ha modificado el papel que desempeñaba el maestro en la didáctica tradicional. Este cambio de funciones didácticas ha traído aparejado una serie de problemas operativos asociados a la implementación en el aula del nuevo enfoque. Se destacan tres de ellos:

1) En el enfoque constructivista el tiempo requerido para el tratamiento de un tema puede ser de tal magnitud que: O no alcance el tiempo asignado a la materia o que se dificulte el cumplimiento de los programas normales en los tiempos establecidos. El maestro típico está de tal manera condicionado a los formatos institucionales que el cumplimiento burocrático de los programas escolares en los tiempos establecidos le resulta de capital interés.

2) En una situaciòn didàctica de Brousseau suele tenerse que a pesar del tiempo y esfuerzo dedicado por maestros y alumnos a la construcción de una cierta noción matemática puede darse que el alumno no construya lo requerido. Como se trata de que el niño sea el constructor, el maestro no debe indicar cómo hacerlo porque sería tanto como volver al enfoque didáctico tradicional con un maestro activo y un alumno pasivo.

3) En el constructivismo educativo el aprendizaje debe ser significativo y no memorístico (Ausubel, Novak y Hanesian, 1991) y sin embargo las tablas de multiplicar suelen enseñarse de manera memorística. La situación didáctica de Brousseau combinada con la situación didáctica de aprendizaje por descubrimiento que aquí se ha diseñado incide en la solución de los problemas citados.

Algunos referentes teóricos y conceptuales

En el trabajo se asume que un estudiante aprende por descubrimiento cuando descubre por sí mismo sin que se lo transmita el profesor. El aprendizaje por descubrimiento es descrito por Orton (1990, p.108), "Como una especie de mezcla de Piaget y Platón". Piaget aportaría sus ideas acerca de la necesidad de la interacción activa del niño con su entorno físico y social; Platón aportaría sus ideas mayéuticas. Aquí se piensa que los autores que critican el aprendizaje por descubrimiento enfocan su ataque a dos posiciones extremas de este tipo de de conocimiento, a saber: Un descubrimiento fortuito tan laxo que no resulta aplicable a las realidades del currículo y un descubrimiento fortuito tan determinado (Por ejemplo la enseñanza programada) que no sirve a los propósitos del pensamiento heurístico, innovación y creatividad requeridos en los currícula actuales. El aprendizaje por descubrimiento demasiado guiado provoca según Aebli (1958), que se pierda la visión problemática de conjunto. El combinar una situación didáctica de Brousseau con una situación de aprendizaje por descubrimiento persigue eliminar las desventajas asociadas a las dos posiciones extremas antes citadas. El complementar el aprendizaje por descubrimiento con un contexto constructivista como los propuestos por Brousseau (1997), permiten agregar al primero las dimensiones específicas de motivación, desequilibrio de las estructuras cognitivas, interacciones de tipo empírico- concreta y social e institucionalización del conocimiento descubierto.

Para propiciar el logro de un aprendizaje significativo sin memorización a través de aprendizaje por descubrimiento, se utilizó un material didáctico diseñado en base al antiguo sistema de cálculo y numeración chino propuesto por San Martín (1995) el cual resultó potencialmente significativo en el sentido Ausubeliano.

Algunas observaciones en pilotajes

Previo a la aplicación del instrumento se realizó un primer pilotaje en el grupo de segundo grado sección "A" en el que las tablas de multiplicar no habían sido tratadas, se le explicó a la maestra del grupo la intención de la actividad y aceptó por la razón de que no había encontrado en los planes y programas alguna forma en que los alumnos se apropiaran del conocimiento, de una manera satisfactoria a su juicio, ya que las maneras conocidas por ella son solamente la introducción del conocimiento tradicional.

Inicialmente y con el grupo a solas, se les comentó que había un pequeño problema en el cual ellos podían ayudar: "Una parte del perímetro de la escuela que estaba sin protección necesitaba ser cercado y sólo se tenían las columnas y tiras de alambrón, pero se ignoraba la cantidad de sujetadores a utilizar". Una de las alumnas comentó que para saber cuántos clavos necesitaban debían conocer si la cerca era alta o "chiquita" y hasta dónde iba a llegar, refiriéndose a la longitud de la misma. Por equipo realizaron dibujos con las características que ellos pensaban adecuadas y dibujaron los clavos que se requerían.

Se pegaron las hojas en el pizarrón y se procedió a verificar resultados, para ellos se solicitó a tres alumnos de los más rápidos para contar; en ese momento la maestra se adelantó con la respuesta diciendo "Conté más rápido", lo cual les sorprendió, a ello la maestra respondió que había un "secreto" que permitía contar más rápido que cualquiera. Esto fue tomado como un reto por los estudiantes y se observó lo siguiente en la "competencia":

1) Los dos primeros alumnos fueron vencidos por la maestra, sin embargo la alumna que participò en tercer turno resultò muy rápida, para esto, se observó que realizaba conteos con sus manos colocadas detrás de la espalda agrupando de 2 en 2, y en períodos regulares de tiempo. Al preguntarle como lo hacìa contestó que sólo había puesto 2 dedos por cada tira de alambrón que veía.

2) La motivación aumentó y pidieron más retos, gritando los resultados en cuanto los obtenían, sin embargo pidieron revelarles el "secreto"

3) Al informarles que el uso de las tablas de multiplicar y su memorización servìa para ganar el juego, entonces escribieron la tabla del 2 con sus resultados tomando como referencia el dibujo de los cercos, luego preguntaron si existían más tablas, las cuales se fueron realizando el mismo procedimiento.

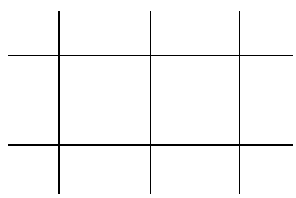
4) Pidieron informar a su maestra sobre los retos y le solicitaron su participación, lo cual ella aprovechó para pasar al pizarrón a los alumnos considerados con bajo rendimiento

académico, estos estudiantes lo pudieron realizar aunque de manera un poco más lenta. Pidieron les dejara de tarea las tablas del 4, 5, 6 y 7.

5) En el otro grupo de segundo grado, desde inicios del ciclo ya se encontraban memorizando lo relativo a las tablas, y como se apreciaba en un registro de la maestra pegado a la pared, la mayoría de ellos ya había memorizado hasta la tabla del 7, se les aplicó la misma estrategia, el clima del grupo fue parecido, sólo que no relacionaron por ellos mismos en ningún momento los conteos con las tablas de multiplicar como era de esperarse, sino que hasta que se les dijo el “secreto”, fue justo en ese momento cuando el entusiasmo decayó.

Conclusiones de la aplicación

La situación didáctica en su desarrollo requirió el uso y manejo de material concreto por parte de los alumnos y que consistió en varitas de madera (multiplicandos) para simular la construcción de una cerca para un corral, y utilizando bolitas de plastilina (Resultado de la multiplicación) para unir las varitas horizontales con verticales para luego facilitar su esquematización en su cuaderno. Ejemplo:



3 x 2

1) La combinación de los dos tipos de situaciones didácticas permitió que los alumnos construyeran por si mismos las tablas de multiplicar, pero esto no resuelve todos los problemas del aula, las maestras que presenciaron las actividades didácticas insistían en que los niños construían en efecto las tablas de multiplicar, pero que éstas debían aun ser memorizadas, ya que el aprendizaje posterior de los algoritmos de multiplicación y división así lo requerían. Para resolver este problema se diseñó y aplicó un equivalente multiplicativo del juego llamado “memorama”.

2) El aprendizaje resultó significativo en el sentido de que los niños descubrieron por si mismos dos significados de la multiplicación, a saber, el de la multiplicación como conteo abreviado y el de la multiplicación como suma abreviada.

3) Los padres de familia que inicialmente conceptualizaban al juego como una actividad no didáctica que no propiciaba el aprendizaje, ante el entusiasmo y los logros académicos mostrados por sus hijos, cambiaron su actitud al respecto.

4) El aprendizaje obtenido por los estudiantes también fue significativo en el sentido de que mejoró su desempeño en la resolución de los problemas de multiplicación.

5) Al realizar giros en los esquemas de multiplicación encontraron que al cambiar el orden de los factores, el resultado no cambiaba. (Conmutatividad)

6) Cuando obtuvieron resultados coincidentes procedentes de otras tablas "descubrieron" resultados iguales con multiplicadores diferentes, por ejemplo $4 \times 3 = 6 \times 2$ fueron introducidos de manera "natural" a la factorización

7) Avanzaron por sí mismos y rápidamente en los ejercicios de mayor complejidad del libro de texto hasta casi agotarlo.

8) Al llegar a los ejercicios y problemas donde se requería del uso y significados de la multiplicación les resultó más fácil su resolución.

9) En la parte final del libro de texto se presentan los arreglos rectangulares, a los cuales les encontraron casi de inmediato la similitud con el dibujo del cerco. (Significado de la multiplicación como arreglo rectangular).

10) Ellos mismos elaboraron memoramas para enseñar las tablas a niños de primer grado por iniciativa propia. (Motivación)

11) Al memorizar las tablas sus propios procedimientos continúan y lo expresan mediante su lenguaje muy particular, comunican a sus compañeros y lo validan; un ejemplo de ello es cuando enuncian "No necesitas aprenderte toda la tabla, te aprendes uno sí y uno no, porque le sumas al que te aprendiste". Ejemplo:

$3x4 = (3x3) + (3x1)$

12) Se observó que para los alumnos canalizados a educación especial por problemas de aprendizaje, la actividad, aparte de divertirles y motivarles les resultó sencilla y lograron al igual que los demás la memorización (Por interés propio como también el resto del grupo) de las tablas de multiplicar hasta el 9 en un lapso de tiempo de una semana aproximadamente.

Algunas consideraciones generales

Aunque se invirtió más tiempo en la aplicación de la estrategia que el acostumbrado en la forma tradicional, éste se recuperó al momento de que los alumnos pudieron resolver rápidamente muchos de los ejercicios y problemas de mayor complejidad que se presentaban en los últimos bloques del libro de texto.

Después de memorizada una tabla de multiplicar, había que pasar a otra para realizar el juego, ya que dejaba de ser un reto y les resultaba demasiado aburrida como lo comentaron en uno de los videos.

Cuando se organizó el trabajo en equipos, las niñas solicitaron que estos fueran conformados separando niños y niñas por la razón de que los alumnos eran demasiado lentos, se respetó esta petición y curiosamente en los videos se aprecia que todos los equipos de niñas terminan antes que los de niños, se preguntó a la psicóloga del equipo de apoyo si existía teoría que respaldara lo anterior y respondió afirmativamente, pero no se consideró de importancia para el tema.

Se realizó a los alumnos, aparte de la evaluación del postest, un examen oral sobre las tablas de multiplicar que se filmó en video donde resultan muy pocos errores, y un examen escrito en el que se aprecia un margen de error menor al 5% (incluidos los resultados de los alumnos canalizados a educación especial por problemas de aprendizaje), es de mencionar especialmente a uno de los alumnos canalizados al grupo de apoyo, por una inseguridad y timidez demasiado marcada (aparte de un problema de lenguaje muy severo y que afecta su socialización), quien participó de manera totalmente normal y desinhibida en la actividad grupal y en la evaluación oral, ambas filmadas.

Cabe mencionar que desde la aplicación de la estrategia, los alumnos se resistieron a las actividades tradicionales y comenzaron a pedir realizar los ejercicios no sólo de matemáticas con sus propios procedimientos.

Despertó su curiosidad el indagar de donde "salieron" o quien "inventó" las tablas de multiplicar, motivo por el cual se dieron a la tarea muchos de ellos de buscar en internet algo al respecto, comunicando después a sus compañeros de manera informal sus hallazgos con un lenguaje manejado a su nivel de madurez, y unos pocos dudando de la información encontrada dando sus argumentos.

Por último se menciona que el abordar este tipo de situación didáctica en el aula resultó aparte de enriquecedora tanto para el alumno como para el maestro una manera muy divertida e innovadora que invita a dar un giro en la práctica docente propia.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1958). "Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget" Argentina: Editorial Kapelusz

Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H. (1991). *Psicologìa Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathematics 1970- 1990*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Madrid: Ediciones Morata.

San Martìn, O. (1995). Las varitas del antiguo sistema de numeración chino, ¿Un super recurso manipulativo? *Memorias del XIII Congreso Nacional de la enseñanza de las matemáticas*. Universidad Autónoma de Sinaloa.

LA PRÁCTICA DE MODELACIÓN Y SUS IMPLICACIONES EN EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. EL CASO DEL DENGUE CLÁSICO

Luis Daniel Huerta Calixto, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante, José Geiser Villavicencio Pulido
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
luisdhcx@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx, jgeiserv@hotmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos una investigación en proceso, que tiene como propósito construir una red de prácticas y herramientas en el análisis de la modelación sobre la incidencia del dengue clásico en el estado de Guerrero, con la intención de que sea base para el diseño de una secuencia de aprendizaje en el contenido referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución, (UAG, 2000). Entendiendo por una red de prácticas y herramientas en la modelación como la articulación de modelos y el fenómeno. Entendiendo por modelos como entidades o representaciones para comprender, describir, explicar, predecir e intervenir en un proceso de modelación o modelado (Arrieta, 2003). En este caso los modelos son, gráficas, tablas numéricas, expresiones algebraicas y el fenómeno es el dengue clásico. Dicho análisis de la modelación se realiza mediante una metodología la cual consiste en encontrar las intenciones que se dan en la modelación.

Palabras clave: modelación, ecuaciones diferenciales, red de prácticas, herramientas

Abstract. We present an ongoing investigation, which aims to build a network of practices and tools in the modelling analysis on the incidence of dengue in the state of Guerrero, with the intention of being a basis for designing a learning sequence in the content of ordinary differential equations of first order, solution concept (UAG, 2000). We understand a network of practices and tools in shaping as the articulation of models and the phenomenon and we understand as models or representations the entities to understand, describe, explain, predict and intervene in the process of modelling (Arrieta, 2003). In this case the models are graphs, numerical tables, algebraic expressions and the phenomenon is the classic dengue. This analysis of the modelling is done using a methodology which is to find the intentions that occur in the modelling

Key words: modelling, differential equations, a network of practices, tools

Planteamiento del problema

Sigarreta, Ruesga y Rodríguez (2008) sostienen que la enseñanza de ecuaciones diferenciales se limita a la enseñanza de procedimientos que pasan por alto los significados y conceptos. Esta manera de proceder hace que los estudiantes las perciban como algo acabado, con un orden lógico indiscutible y que siempre se han desarrollado en forma lineal. Consideramos que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden en los cursos tradicionales, frecuentemente está dedicada a la resolución algebraica.

Por su parte Lee (2009) muestra a través de un diagnóstico realizado a 30 estudiantes que han recibido un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, incapacidad para construir una ecuación diferencial a partir de conceptos clásicos del cálculo (diferencial e integral) e imposibilidad de resolver ecuaciones diferenciales clásicas (variable separables y diferencial total).

Por nuestra parte, al realizar una entrevista a dos profesores de nivel superior constatamos la ausencia de la modelación en cursos de *ecuaciones diferenciales* ordinarias que ellos imparten siendo que la modelación contribuye en alguna medida a desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos. Así mismo se destacan las técnicas para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias como herramienta que se utilizan en la modelación.

Por lo que el *problema de investigación* consiste en que por lo general, el aprendizaje de las *ecuaciones diferenciales*, se limita a procedimientos que pasan por alto los significados del concepto de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución, dedicándose a la resolución algebraica con diferentes métodos, por ejemplo variables separables y diferencial total.

Perspectiva teórica

La perspectiva teórica que sustenta esta investigación es la sociopeistemología y una de sus tesis principales es que son las prácticas sociales las que permiten la generación de conocimiento matemático. Nos centramos en la práctica de modelación donde los estudiantes construyen saberes mediante el ejercicio de prácticas, (Méndez, 2008). La práctica de modelación en la que nos basamos es la numerización de fenómenos, que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y su uso se toma como central. Así mismo esta perspectiva teórica considera a los fenómenos educativos como un todo complejo, donde intervienen múltiples dimensiones, a saber, la relativa a los conocimientos, referida a cuáles son las prácticas que le dan origen y su vivencia en diferentes comunidades, la dimensión epistemológica; la cognitiva, que se refiere a las interacciones de los humanos en el proceso de construcción de los conocimientos; la didáctica, referente a cuáles son las formas de intervención en los contextos escolares para propiciar la construcción del conocimiento; confluyendo en un lugar y en un tiempo, en un contexto social.

Bajo esta perspectiva, el trabajo de alumnos y profesores cuando abordan el estudio, en este caso, de ecuaciones diferenciales, debiera servir como un espacio para el ejercicio de prácticas, donde los estudiantes y profesores participen en la construcción de sus conocimientos.

Proceso de investigación

Para lograr el objetivo de la investigación realizamos las siguientes acciones:

--Un estudio del *estado del arte* referente al aprendizaje de las *ecuaciones diferenciales*, constatando el problema de investigación y a la modelación como práctica social y su importancia en el aula de clases, para encontrar ideas y principios relevantes en la conformación de la base, que sirva como orientación para el diseño de una secuencia de aprendizaje en el contenido referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución. Nos centramos en las aportaciones de estas investigaciones en el campo de las prácticas sociales de modelación nos centramos en la "Numerización de los fenómenos" que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos los cuales son: numéricos, gráficos y algebraicos. Las prácticas ponen atención en el uso de los modelos referidos, tales prácticas se desarrollan en interacción con fenómenos, físicos, químicos o sociales (Arrieta, 2003). En estos términos nos interesa conocer los saberes que se producen al ejercer prácticas sociales de modelación por los estudiantes.

1) Un estudio del *marco teórico,* que consiste en hacer una exploración y análisis bibliográfico de la aproximación socioepistemológica para establecer los aspectos teóricos que dan sustento a nuestra investigación los cuales son: Práctica social, herramientas, modelos, prácticas, contexto social y red de prácticas y herramientas. Así mismo contestarnos las siguientes preguntas, ¿por qué mi investigación se encuentra dentro de la socioepistemología? ¿Para qué me sirve el marco teórico? ¿qué aspectos son fundamentales de la socioepistemología?

De este estudio obtendremos, principalmente, ideas y argumentos para establecer la red de prácticas y herramientas y así conformar la referida base.

2) Proponemos una metodología que es utilizada para analizar a la modelación de la incidencia del dengue clásico. Dicha metodología consiste en encontrar las intenciones que se dan en la modelación. Los pasos que dan lugar a dicha metodología son los siguientes:

- La elección de la práctica, su contexto y las intencionalidades
- El análisis de tareas y actividades, estableciendo las intencionalidades de cada una de ellas.

Es importante mencionar que en el análisis de tareas y actividades se establece la red prácticas y herramientas. Dicha red consiste en la explicación de prácticas y herramientas que se construyen o aplican durante la modelación, que dan cuenta de la esencia de las *ecuaciones diferenciales* en general, y en particular de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, lineal y homogénea que se espera como modelo del fenómeno referido. El propósito del análisis de la modelación es construir una red de prácticas y herramientas que oriente y guíe como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje en el contenido referente de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución.

3) Conformación de la base para el diseño de una secuencia de aprendizaje en el contenido referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución, (UAG, 2000). En este caso entendemos por base, a la construcción de la red de prácticas y herramientas que se establece en el análisis de la modelación, en esta red se articulan los modelos y el fenómeno que se estudia.

Por lo tanto la conformación de la base consiste en la explicación de la red de prácticas y herramientas que se establece en el análisis de la modelación de la incidencia del dengue clásico, se parte del supuesto de que en esta explicación de red de prácticas y herramienta se revelan las actividades que son necesarias para la construcción de saberes en el contenido referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución.

Establecimiento de la red de prácticas y herramientas.

En forma breve describimos las fases de la red de prácticas y herramientas que se construye en el análisis de la modelación de la incidencia del dengue clásico que es base para el diseño de secuencia de aprendizaje en el contenido referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución.

α Fenómeno

El fenómeno es el dengue clásico en el cual nos interesa establecer un modelo diferencial y así mismo una función que modele la incidencia de dicho fenómeno en el año 2006. Partimos con la búsqueda de datos. Una vez teniendo los datos lo organizamos en un modelo numérico (tabla de datos).

t = tiempo en meses	w(t) = Enfermos del dengue clásico
0 (Enero)	31
1 (Febrero)	179
2 (Marzo)	438
3 (Abril)	454
4 (Mayo)	587
5 (Junio)	1176
6 (Julio)	1543
7 (Agosto)	1859
8 (Septiembre)	2373
9 (Octubre)	696

Figura 1. Cantidad de enfermos por mes

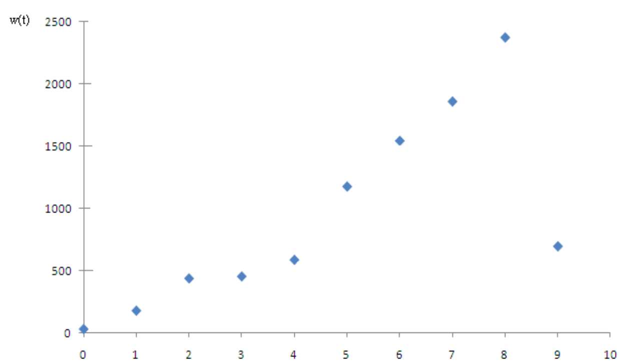


Figura 2. Gráfica del número de enfermos por mes

α Modelo numérico

En este modelo numérico hacemos una exploración numérica y gráfica. En la exploración numérica encontramos el porcentaje de la incidencia que aumenta de un periodo a otro.

t	P(t)	Porcentajes	Δt
0	4.77	477 %	1
1	1.44	144%	1
2	0.03	3%	1
3	0.29	29%	1
4	1.00	100%	1
5	0.31	31%	1
6	0.20	20%	1
7	0.27	27%	1
8	-0.70	-70%	1
9			

Figura 3. Tabla de la vacriación porcentual y el crecimiento del tiempo

α Modelo gráfico

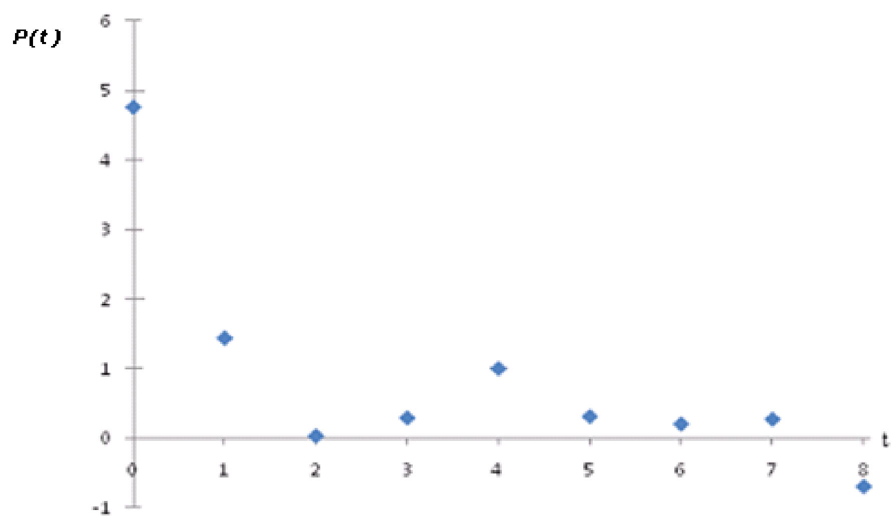


Figura 4. Gráfica de la variación porcentual con respecto al tiempo

Utilizamos este modelo gráfico para interpretar como es la tendencia de los datos en este caso los porcentajes. La tendencia de los datos los describe una función cúbica.

α Modelo diferencial

La variación porcentual es proporcional a la función cubica y se describe matemáticamente como $\frac{1}{w(t)}\frac{dw}{dt} = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$. Así mismo resolvemos el modelo diferencial haciendo operaciones algebraicas para encontrar la función que nos modela la incidencia del dengue clásico en el año 2006.

$$w(t) = 31e^{\left(-0.\frac{0365443175}{4}t^4 + 0.\frac{4830001843}{3}t^3 - 1.\frac{909157698}{2}t^2 + 2.556113468\,t\right)}$$

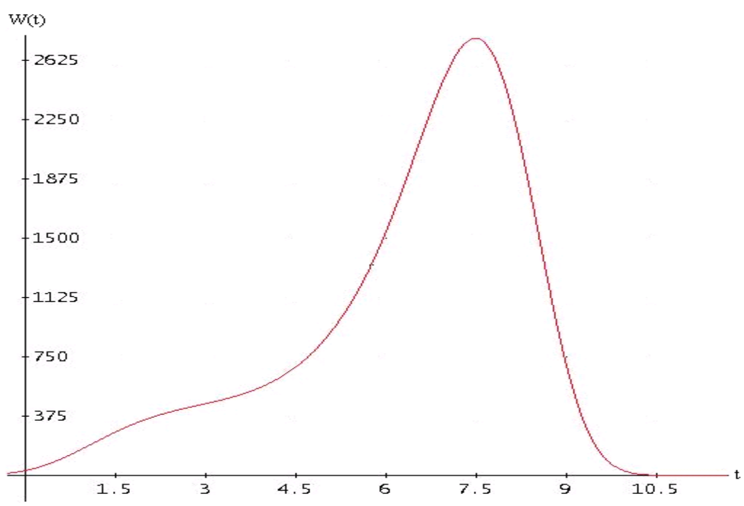
α Modelo algebraico

(Función que modela la incidencia del dengue clásico)

Comparamos la incidencia del dengue clásico.

t = tiempo en meses	W(t) = número de enfermos	Aproximación con la función encontrada
0	31	31
1	179	179
2	438	354
3	454	454
4	587	573
5	1176	867
6	1543	1543
7	1859	2539
8	2373	2441
9	696	696
10		24
11		0

Figura 5. Aproximación a los datos de la figura 1



Reflexiones finales

Consideramos que el trabajo de alumnos y profesores cuando abordan el estudio, en este caso, de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, concepto de solución, debiera servir como un espacio para el ejercicio de prácticas, donde los estudiantes y profesores participen en la construcción de sus conocimientos.

Por otro lado la red de prácticas y herramientas que se construye en el análisis de la modelación de la incidencia del dengue clásico es base para el diseño de una secuencia de aprendizaje en el contenido de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Consideramos que esta red es una propuesta para elaborar diseños de aprendizajes en base otros tipos de fenómenos

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Lee, S. (2009). *La heurística en la solución de ecuaciones diferenciales*. Tesis de maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Programa de Estudios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 1994-2000, Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Académica de Acapulco.

Sigarreta J. M., Ruesga P. y Rodríguez J. M. (2008). Analogies in Differential Equations. Far East Journal of Mathematical Education 2(1), 31-48

DOS CASOS REFERIDOS AL REPARTO CON FRACCIONES

Eliza Minnelli Olguín Trejo, Marta Valdemoros Álvarez
CINVESTAV- IPN (México)
minnelli_angel@yahoo.com.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. Análisis del contraste entre dos sujetos del estudio de casos, Miriam y Mario (Olguín, 2009), quienes al trabajar el reparto con fracciones utilizan con frecuencia la estrategia "Divide cada unidad en el mismo número de personas"; sin embargo, al dar la respuesta numérica él utiliza números naturales y ella da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto. Pero en la entrevista emplearon otras estrategias consistentes en otorgar a la unidad diversos sentidos y con base en ello realizar el reparto, manteniendo distintas interpretaciones personales de la unidad.

Palabras clave: fracciones, reparto, cociente, estrategias de resolución

Abstract. Analysis of the contrast between two subjects of case studies Mario and Miriam (Olguín, 2009), who when working the deal with fractions often used the strategy "Divide each unit in the same number of people", however, to give the answer number he uses natural numbers and she gives an equivalent fraction that corresponds to the distribution. But in the interview used other strategies of giving different meanings to the unit and based on that make the deal, maintaining different personal interpretations of the unit.

Key words: fractions, share, ratio, solving strategies

Introducción

El presente trabajo comunica el análisis efectuado en torno a dos de los casos que sometimos a estudio. El problema de la investigación es identificar estrategias en la resolución de problemas de reparto con fracciones. Todo esto se realizó con el fin de reconocer los procesos empleados por los niños, para comprender cómo se inicia la construcción del número fraccionario. Así, dimos énfasis a la identificación de las diferentes estrategias que utilizan en la resolución de problemas de reparto con fracciones, las estrategias más frecuentes y las dificultades que pudieran presentar en la resolución de dichos problemas, los cuales constituyen los objetivos del estudio.

El primer caso es el de Miriam, una alumna que se destacó por mostrar una buena comprensión de la equivalencia en sus estrategias de reparto, pues pese al procedimiento que utilizó en la resolución del problema ella prefirió dar un número equivalente al resultado de su reparto; la estrategia que utilizó consistió en dividir cada unidad en el mismo número de personas, pero en su respuesta numérica se ajustó a la categoría de estrategia expresada como "Da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto".

El otro caso es el de Mario, quien destacó por tener una fuerte tendencia a dar la respuesta numérica de sus repartos con números naturales, la estrategia que utilizó con más frecuencia es "Divide cada unidad en el mismo número de personas".

Marco teórico

Afirma Kieren (1984) que la partición y la equivalencia son dos mecanismos constructivos que permiten al niño construir los cinco significados asignables a la fracción, a los cuales identifica como subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo. Éste último va relacionado con los otros cuatro significados de la fracción y es definido como un todo que ha sido cortado, prevaleciendo en esta situación la equidad e igualdad; se utiliza la idea de fracción como un medio para cuantificar la relación entre el todo y un número designado de partes, significado que asociado al de la fracción como cociente permite la cuantificación de los resultados en situaciones de reparto, al dividir cada unidad dentro de un número dado de partes (Kieren, 1980).

De acuerdo con Lamon (1996), el reparto con fracciones debería de ser aprovechado como una herramienta didáctica para ayudar a los niños a desarrollar ideas elementales de número racional.

Por su parte, Valdemoros (1993) ha enfatizado que el estudiante, para poder incorporar las fracciones, necesita mucho más que simplemente desarrollar designaciones y significados nuevos, sino que requiere de la creación de distintos instrumentos, como la incorporación de nuevas reglas sintácticas y la consideración de varias redefiniciones que incluyen, entre otras cosas, la identificación específica de la unidad que corresponde a ese conjunto numérico, el reconocimiento de expresiones equivalentes, modalidades particulares de operación aritmética, por mencionar sólo algunas. Valdemoros (2001) propone que en la enseñanza escolar deben ser tomados en cuenta y esclarecidos los enlaces entre las relaciones referenciales y el significado de la unidad, lo que le permitirá al niño experimentar y desenvolverse en el ámbito del uso de las fracciones; dichos enlaces son introducidos a partir de actividades de partición, reparto, equivalencia y la utilización de material manipulativo (Perera, 2001).

En cuanto a estrategias utilizadas al resolver problemas de reparto con fracciones, Lamon (1996) apoyándose en Behr analiza las estrategias de partición de los niños en términos de las marcas y cortes, quien ha identificado la “Estrategia de marcar todo”. En ella, todas las piezas se señalan, inclusive aquéllas que permanecen intactas, pero sólo la(s) pieza(s) que requieren cortarse se partirán. Ejemplo: Cuando reparten 4 galletas a 3 niños marcan todas las galletas en tercios y al distribuirlas sólo una galleta la cortan, dando a cada niño una galleta y un tercio. En la “Estrategia de distribución” todas las piezas del entero se marcan y cortan, y las piezas más pequeñas se distribuyen. Ejemplo: Para repartir 4 galletas entre 3 niños dividen cada una en tercios, las cortan y dan a cada niño 4/3.

En cambio, Charles & Nason (2000) identificaron la "Estrategia fundante del cociente partitivo", en la cual el sujeto reconoce el número de personas (Y), genera el nombre de la fracción de acuerdo al número de personas, reconoce la relación entre el nombre de la fracción y el número de pedazos del entero, parte cada objeto en pedazos iguales, efectúa el reparto y cuantifica cada parte. Ejemplo: Al repartir 1 pizza entre 4 personas, de acuerdo al número de personas, los estudiantes deciden dividir en cuartos, los reparten y entregan un cuarto a cada uno.

Empson, Junk, Domínguez & Turner (2005) identifican la "estrategia de coordinación de un solo artículo" que implicó repartir cada artículo en un número de piezas (n) igual al número de gente (p) que comparten los artículos. Lo llamaron así porque los niños coordinaron el número de personas con el número de partes en cada artículo individual. Ejemplo: Para repartir 4 caramelos entre 6 personas dividieron cada caramelo en sextos y dieron 4/6 a cada persona.

La investigación efectuada por Mamede, Nunes & Bryant (2005) aseveran que en las fracciones en situaciones de cociente, el denominador señala el número de personas del reparto y el numerador el número de partes que les corresponde a cada persona. Entonces, 2/4 puede representar 2 chocolates divididos entre 4 personas (lo que corresponde a un reparto). Y mencionan que puede haber dos significados: la división (2 chocolates para 4 personas) y la cantidad que recibe cada persona (cada uno recibió 2/4 del chocolate).

Para el seguimiento de las estrategias, Valdemoros (1993, 2004) pone en práctica el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal), en situaciones fraccionarias ligadas al reparto. Este modelo de análisis presenta una naturaleza eminentemente lingüística, permitiendo identificar los siguientes planos constituyentes de todo lenguaje: el plano semántico, el plano sintáctico, el plano de la "traducción" de un lenguaje a otro lenguaje o a un sistema simbólico, el plano de la escritura numérica y el plano de la lectura. Además, confirma la pertinencia de utilizar el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal) a través del desempeño de los niños en situaciones ligadas al reparto con fracciones, permitiendo reconocer algunos de los múltiples conflictos cognitivos comúnmente enfrentados por los estudiantes.

Método

La escuela donde se realizó el estudio pertenece al sistema público y está localizada en una zona del área urbana de la Ciudad de México. Los alumnos cursaban el cuarto grado de primaria y tenían 9 años.

Los instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación fueron: observación en el aula, un cuestionario y entrevistas individuales.

Se destinaron sesiones a obtener información sobre lo que se prioriza y lo que se deja a un lado en la enseñanza del reparto con fracciones, permitiendo la reconstrucción de características primordiales de la enseñanza recibida por el grupo escolar. Para fines de la investigación era importante observar en qué grado influía la enseñanza recibida en las estrategias que los niños utilizan para dar solución a los problemas de reparto con fracciones.

El cuestionario fue el instrumento que permitió hacer una exploración de las ideas, nociones y conocimiento previos con los que contaban cada uno de los alumnos respecto al significado de fracción como relación parte-todo y como cociente; además de observar diversas estrategias que utilizaron cuando se enfrentaron a problemas de reparto con fracciones, permitiendo la identificación de las más empleadas. También, constituyó el punto de partida para la selección de los sujetos del estudio de casos. Constaba de problemas de reparto que admiten una interpretación continua y discreta de los mismos en modelos circulares, rectangulares y cuadrados; incluimos en el cuestionario tareas para producir medios, cuartos, tercios, sextos y una tarea de equivalencia para comparar medios y cuartos en un modelo circular.

Las entrevistas fueron individuales, semiestructuradas y videograbadas, aplicadas a Miriam y Mario, por exhibir procesos relevantes de aprendizaje en la resolución del cuestionario. Los cuatro problemas utilizados fueron diseñados con base en las tareas utilizadas por Streefland (1991); nos apropiamos de su idea de la familia Quebrado porque con su utilización se elimina la calidad abstracta de participantes sin nombre y con ello el estudiante no sólo es capaz de dividir más fácilmente los objetos a repartir, sino que puede vincular las porciones producidas con los nombres de los participantes, además de ofrecer un ambiente familiar. Se usaron modelos circulares, rectangulares y cuadrados, contemplando tareas para producir medios, tercios, cuartos y sextos, además de tareas de equivalencia para comparar medios y cuartos en modelos circulares, y tercios y sextos en modelos rectangulares.

En las actividades fue indispensable el papel que jugó el material manipulativo (Perera, 2001) que constó de muñecos que representaban a los sujetos de los problemas, mesas y sillas permitiendo la experimentación del arreglo de asientos que de acuerdo con Streefland (1991) son el terreno de cultivo en el que un proceso de matematización vertical hace raíces y en el cual, las proporciones y las fracciones se distinguen y se relacionan entre sí. Todo ello genera un ambiente real en el cual se puede trabajar el reparto y la equivalencia.

Análisis de resultados

En la instrucción comúnmente recibida no se aceptan modos alternos para dar solución a un problema, por tal motivo nos atrevemos a suponer que ambos sujetos aprendieron que sólo hay un procedimiento para resolver los problemas, por lo que tienden a emplear únicamente una estrategia de resolución hasta que se les indica que resuelvan la actividad de otra forma (situación a partir de la cual pueden llegar a diversificar sus procesos de resolución de problemas).

El caso de Mario

Mario presentó en los problemas verbales del cuestionario una fuerte tendencia a dar la respuesta numérica de sus repartos con números naturales, utilizando expresiones como "dos partes cada uno","una parte de la barra". Utilizó únicamente la estrategia "Divide cada unidad en el mismo número de personas", sólo en tres problemas realizó el reparto escribiendo el nombre de la persona dentro de cada parte. En un problema no consideró la equidad y en otro, la exhaustividad.

Durante la entrevista, la estrategia que utilizó fue la misma que en el cuestionario pero al pedirle que resolviera el problema de otra manera, Mario utilizó la estrategia "Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias" que consistió en dividir cada unidad igual a como lo hizo en su primera estrategia; posteriormente, cada pedazo lo dividió a la mitad, así primero dividió en cuartos y después obtuvo octavos (Figura 1).

Figura 1. Estrategias de partición que utilizó Mario en el ejercicio 1.

No le fue difícil observar que el resultado de las dos estrategias que empleó para resolver el mismo problema eran equivalente, realizó comentarios como "las dos comieron igual, porque en el momento en que los dividí me di cuenta que estas dos partes (los cuartos) hacen la mitad del pastel y las dos comieron la mitad del pastel".

Durante la entrevista demostró que no tenía problema alguno para asignar al resultado de su reparto un número fraccionario; sin embargo, para él le era más cómodo expresar su respuesta con naturales.

El caso de Miriam

Miriam fue seleccionada porque al solucionar los problemas verbales empleó la estrategia "Divide cada unidad en el mismo número de personas", pero, además, utilizó la estrategia "En su respuesta numérica, da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto".

En el problema 1 del cuestionario, dividió cada pizza en el mismo número de personas y les asignó de cada unidad una parte, la respuesta numérica de acuerdo a su estrategia de solución es 2/4, sin embargo, ella prefirió expresar una equivalencia y escribió "1/2 le toca a cada niño" (Figura 2).

Marisol, Ernesto, Jorge y Lalo van a compartir 2 pizzas de modo que cada uno reciba lo mismo. ¿Cuánto le corresponde a un niño?

1/2 le toca a cada niño

Divide las pizzas de abajo y escribe el nombre de cada uno, al lado de la porción que les darás.

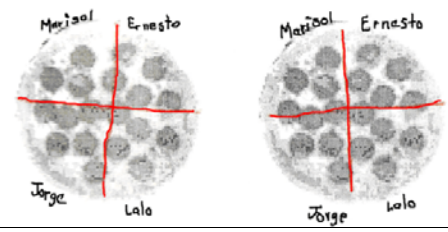


Figura 2. Estrategia de reparto que empleó para el problema 1.

En la entrevista, Miriam empleó tres estrategias diferentes a las utilizadas en el cuestionario. Primero "Interpreta la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hace el reparto, obteniendo una parte para cada persona"; así, al repartir dos pizzas entre cuatro personas dividió cada una en medios. También, utilizó las estrategias "Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones" y "Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias".

Contraste de los casos

Ambos alumnos optaron por resolver los problemas utilizando la misma estrategia "Divide cada unidad en el mismo número de personas", aunque Miriam diera su respuesta numérica con una equivalencia a Mario le fuera más fácil comunicarla con números naturales.

De acuerdo al cuadro de análisis propuesto por Valdemoros (2004), en el plano de la escritura, Mario tradujo los aspectos cuantitativos al lenguaje de los naturales, situación que nos hace presumir que en la enseñanza recibida hubo exclusión de tales problemas. Estas situaciones nos indican que había comprendido el problema pero no pudo expresar su resultado con una fracción, evidenciando una comprensión básica de las tareas y de los contenidos semánticos, aun cuando no llegó a una identificación de la fracción. A diferencia de ello, en el plano de la traducción, Miriam pudo ir y venir de una representación a otra, sin ningún problema, manejando adecuadamente la equivalencia entre los resultados obtenidos en los pictogramas y las respuestas numéricas y preservando los contenidos semánticos sustanciales para los modelos considerados. Ella empleó simultáneamente distintos lenguajes, a nivel de la respuesta escrita y pictogramas.

En cuanto a la equivalencia, a Mario le ayudaron los ejercicios de la entrevista para apropiarse de dicha idea, la que de acuerdo con Streefland (1991), al trabajar en la entrevista los arreglos de asientos, facilitó el proceso de matematización vertical, en el cual las proporciones y las fracciones se distinguen y se relacionan entre sí.

Respecto al plano de la semántica, Miriam no presentó dificultades en el reconocimiento de las restricciones semánticas introducidas por el modelo fraccionario del reparto y Mario, en algunos problemas, no tomó en cuenta algunas de estas restricciones; sin embargo, él superó dicha dificultad a través de la realización de los problemas en la entrevista, tomando en cuenta el requisito de una distribución equitativa y exhaustiva.

Conclusiones

La estrategia más utilizada es aquélla donde dividen cada objeto de la colección en el número de personas que intervienen en el reparto y asignan una de esas partes a cada persona.

No es coincidencia que ambos alumnos optaran por utilizar la estrategia "Divide cada unidad en el mismo número de personas" ya que es una estrategia común observada por otros investigadores, aunque sea denotada con diversos nombres (Charles & Nason, 2000, Empson, et al., 2005, Lamon, 1996, Mamede, et al., 2005).

La utilización de otras estrategias sólo se dio cuando fue requerido por ambos sujetos del estudio de casos, en las que emplearon diversas nociones de equivalencia. Se caracterizaron por mantener distintas interpretaciones de la unidad. Partieron cada objeto en el mismo número de personas que intervinieron en el reparto, dividieron cada objeto en un número de partes equivalentes a la cantidad de personas que participan, asignaron objetos enteros a cada persona y subdividieron los sobrantes, si así lo favorecían las condiciones generales del reparto. Las estrategias fueron “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias”, “Interpreta la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hace el reparto, obteniendo una parte para cada persona”, “Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones” y “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias”.

En cuanto a la escritura de la respuesta numérica se observó que les resulto más cómodo asignar un número natural al resultado de su reparto que identificar una fracción. Sin embargo, el ambiente del reparto requiere modos de simbolización que permitan establecer la correspondencia entre los objetos repartidos y las personas que intervienen en el reparto y a través de la idea de la familia Franco, el arreglo de asientos y la distribución se trabajan formas de representación y significación derivadas de la relación parte-todo, enriqueciéndolas y ampliándolas en las diferentes estrategias de reparto, todo lo cual ayuda a construir el número fraccionario.

Referencias bibliográficas

Charles, K. & Nason, R. (2000). Young children’s partitioning strategies studies in mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education,* 43, 191-221.

Empson, S., Junk. D., Domínguez. H., & Turner. E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: Across- sectional study of children’s thinking. *Educational Studies in Mathematics Education*, 63, 1-28.

Kieren, T. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. En: T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, Ohio ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics teacher as consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education,*187-194.

Lamon, S. (1996). The Developmental of unitizing: its role in children’s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(2), 170-193.

Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 281-288.

Olguín, E. (2009). Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones. Tesis de maestría. Matemática Educativa – Cinvestav, México.

Perera, P. (2001). Ayuda manipulativa en la resolución de problemas verbales de reparto de todos continuos y discretos. Tesis de Maestria. Matemática Educativa – Cinvestav, México.

Streefland, L. (1991). The course in theory and practice. En L. Streefland (Ed.). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research* (46-134). Dordrecht: Kluwer Academic.

Valdemoros, M. (1993). La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él. (Tesis Doctoral no publicada). Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: Estudio de caso. *Educación Matem*ática, 13(1), 51-67.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 7(3)*, 235-256.

¿PROBLEMAS CON EL LÍMITE O EL LÍMITE DE LOS PROBLEMAS ENSEÑADOS?

Clarisa Noemí Berman, Ana María Narvaez, Marcela Rodríguez
Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional (Argentina)
bercla@gmail.com, ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, iqborbollon@speedy.com.ar

Resumen. La enseñanza universitaria de la Matemática tiene como eje central el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto. El objetivo del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de la Facultad Regional Mendoza en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos. Para validar las hipótesis de partida, se realizó una evaluación cuanti-cualitativa que nos hace reflexionar sobre el material de la cátedra. La presente investigación se enmarca en la Teoría APOS, desarrollada inicialmente por Dubinsky (1996). Las principales conclusiones en esta etapa del proyecto son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite al nivel de esquema; la necesidad de interiorización de los conceptos previos al Límite y el replanteo del tratamiento didáctico del mismo.

Palabras clave: límite funcional finito. teoría APOE

Abstract. Math's university teaching has as a main topic the "Functional Limit". It is well known the fact that this concept is difficult for the students to understand. The objective of this work is to understand the problems that students in Mendoza's local college of National Technological University face regarding that topic, to design didactic material that allows them overcome cognitive obstacles. To validate our starting hypothesis, a quantitative-qualitative evaluation has been made and this has made us think about the material that we are using in the area. The present investigation is framed in the APOS theory, developed initially by Dubinsky (1996). The main conclusions at this stage of the project are: the absence of cognitive concepts in the students to understand "Limit" as a scheme, the necessity of internalizing concepts previous to "Limit" and the rethinking of the didactic strategies used.

Key words: functional finite limit. APOS theory

Introducción y antecedentes

La enseñanza universitaria de Matemáticas en ingeniería tiene como eje central en Análisis Matemático I, el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto en los estudiantes, tópico investigado por numerosos autores, entre los que destacamos a Sierpinska (1985,1987); Cornu (1983,1991); Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, Vidakovic (1996); Asiala, Brown, De Vries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996), entre otros. Es relevante citar el artículo *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas?* de Artigue (1996) en el que realiza un interesante resumen de las investigaciones sobre el tema obtenidas hasta la fecha citada. Reporta las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis, clasificándolas en tres categorías no independientes: las ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos (números reales, funciones y sucesiones), a la conceptualización de la noción de límite y a su dominio técnico y a la necesaria ruptura con los modos característicos de pensamiento algebraico.

Problema

Los estudiantes mostraron dificultad en dar una definición precisa de límite y una comprensión clara del mismo. Más aún, no se vio la coordinación entre el concepto y la aplicación propuesta que solicitaba determinar el valor δ que verifica la definición de límite para la función $f(x) = x^3 - 7$ en $x = 2$ con ε = 0,4 (en el otro tema, $f(x) = x^3 - 26$ en $x = 3$ con ε = 0,6).

Diagnóstico

El problema señalado ha sido detectado en el análisis de una muestra de exámenes correspondientes a 6 cursos (180 alumnos) de Análisis Matemático I de una población de aproximadamente 500 alumnos distribuidos en 17 cursos, en una evaluación que se denomina institucionalmente *primera evaluación global* en 2009.

Los resultados cuantitativos obtenidos en la muestra se observan en el siguiente diagrama:

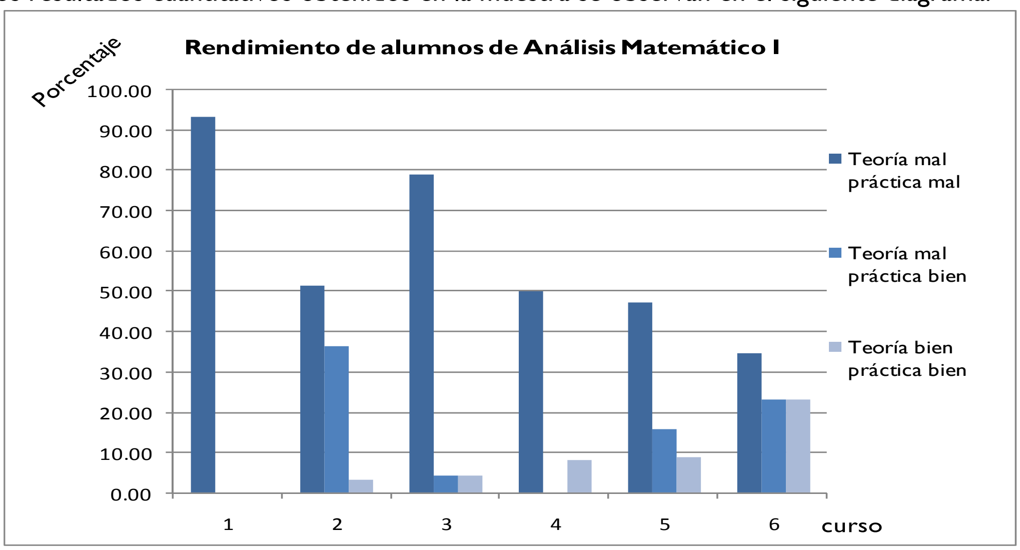


Gráfico Nº 1: Rendimiento de alumnos

Análisis de los resultados y posibles explicaciones

Se observan definiciones incorrectas o no contestadas y ejemplos bien hechos, lo que estaría indicando la memorización del algoritmo de cálculo o equivalentemente la tarea rutinaria, puesto que este trabajo había sido realizado por los docentes.

Los errores más comunes en la definición de límite son: ausencia del signo ⇒; en lugar del signo ⇒, escriben el signo ⇔; no escriben los cuantificadores, solamente se observa la siguiente expresión $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$; además no pueden escribir en lenguaje semántico la definición de límite.

Los errores más frecuentes en el ejercicio consisten en no aplicar correctamente propiedades de valor absoluto, en consecuencia no resuelven la inecuación correspondiente y, si llegan a obtener los dos valores δ_1 y δ_2 correctamente no expresan las conclusiones solicitadas en la consigna.

A continuación se presentan dos producciones de estudiantes que son revisadas a la luz de la Teoría APOE, corresponden a Juan y Pedro, respectivamente.

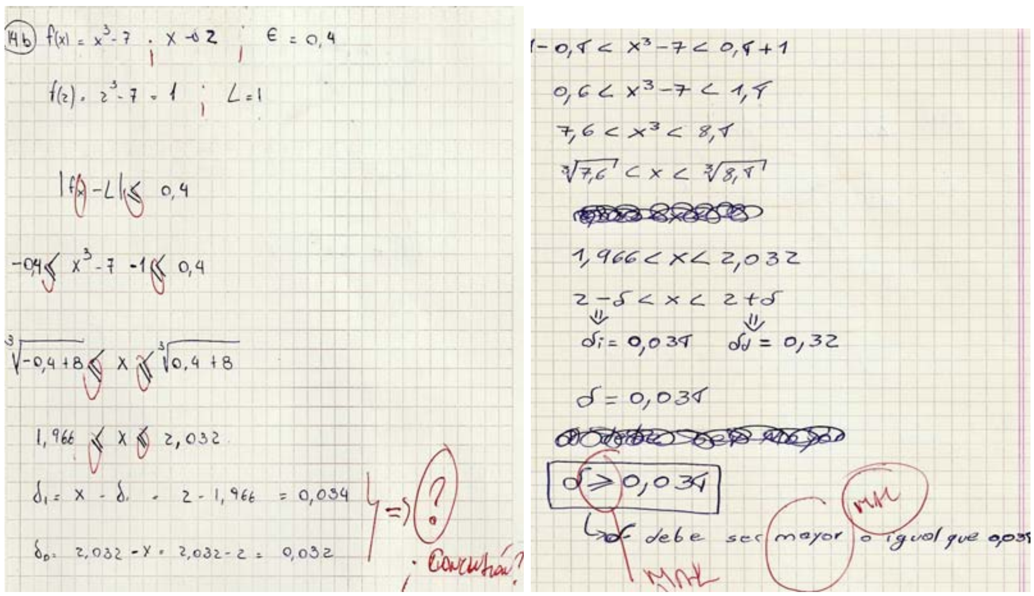


Imagen Nº 2: Fotos de la producción de Juan (izquierda) y Pedro (derecha)

El examen de Juan no contiene la definición de límite finito en ningún registro de representación, no aparece ninguna expresión en símbolos conteniendo el límite *l*. Se observa que está en la etapa de *acción* pues a pesar de escribir una inecuación incorrecta, trabaja bien en forma algebraica, no pudiendo concluir respecto del valor adecuado δ. Parecería que, como dicen Contreras de la Fuente y Font Moll (2002), este estudiante ha enfrentado el conflicto semiótico "considerar que el entorno es siempre simétrico".

En el escrito de Pedro se observa que no aparece la definición de límite, si bien propone una inecuación correcta y resuelve adecuadamente, se observa que no reflexiona sobre la *acción*, no logra interiorizar en *proceso* pues da como resultado un valor δ carente de sentido (recuadra la expresión que considera δ mayor o igual que 0,034); no se observan gráficos ni verificaciones.

Hipótesis de trabajo

A partir del diagnóstico realizado y habiéndose revisado, a partir de la Teoria APOE, los trabajos prácticos de Funciones y Límites de Análisis Matemático I correspondientes al año 2009, la bibliografía de la asignatura y el cuadernillo del Seminario Universitario, se elaboraron las siguientes hipótesis de trabajo.

H1) En el material de estudio correspondiente al curso de ingreso sólo aparecen ejercicios rutinarios y no se observa una red de problemas que le otorguen significación a los conceptos matemáticos básicos para lograr la internalización de los mismos.

H2) En el material de estudio de la cátedra referido a los temas que son prerrequisitos para el estudio del Límite Funcional (conjuntos numéricos, distancia, inecuaciones, entornos y funciones) aparecen ejercicios que son utilizados, en general, sólo en las fases de acción y proceso (estadíos cognitivos de menor profundidad desde la teoría APOE).

Objetivo de investigación

Diseñar un material didáctico que permita superar a los estudiantes la insuficiente comprensión del concepto de límite funcional finito.

Ahora bien ¿cómo se realiza el diseño?

Marco teórico

Para lograr el objetivo, el marco privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) o APOS (Action-Process-Objet-Schema) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky quien a partir del constructivismo de Piaget explica la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos. El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo.

La siguiente proposición muestra la base de la Teoría APOE "El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p. 32-33). Se observan tres tipos especiales o estructuras básicas para la construcción del conocimiento matemático: *acción*, *proceso* y *objeto* que están organizados en estructuras que se denominan esquemas. Los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas tales como *interiorización*, *encapsulación* y *coordinación*.

El manejo de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde desde una *concepción acción*, desde una *concepción proceso* o desde una *concepción objeto.* En esta teoría, comprender un concepto matemático, comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construídos para formar *acciones*; acciones que son *interiorizadas* para formar *procesos*; procesos que son *encapsulados* para formar *objetos*; los objetos pueden ser *desencapsulados* de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados; acciones, procesos y objetos pueden ser organizados es *esquemas*.

Esta teoría es un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el tema en cuestión, pues es un marco en el que es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas.

Metodología

La metodología de investigación es la Ingeniería Didáctica ya que la misma se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, esto es sobre la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza. El problema planteado en la presente investigación es la renovación de la enseñanza del concepto de límite funcional con un nuevo material didáctico. Las investigadoras se encuentran frente a un objeto de enseñanza instalado y se hacen los siguientes interrogantes:¿porqué modificarlo?¿qué dificultades son esperables?¿cómo superarlas?¿cómo determinar el mejor conjunto de actividades para lograr la aprehensión del tema?. Con esta metodología se tratará de dar respuesta a estos interrogantes siguiendo las fases que la caracterizan, esto es: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995).

Diseño del material didáctico

Para el diseño, se tienen en cuenta: la teoría APOE, la Teoría de Registros y Representación Semiótica (Duval, 1999), el estudio histórico epistemológico del concepto (Valdive y Garbin, 2008), (Boyer, 1968),-cuyos principales propósitos son el de permitirnos determinar obstáculos epistemológicos, obtener los campos de la ciencia que hacen uso del mismo y generar situaciones de enseñanza que permitan al estudiante "hacer matemática" (Narvaez, 2006)-y nuestra práctica docente.

A modo de ejemplo de la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, se presenta la siguiente actividad que permite observar las respuestas de los estudiantes y construir una descomposición genética (considerada preliminar), cuyo aporte es enriquecedor en la confección del material didáctico deseado.

Un fabricante diseña una pelota que tiene un volumen de 268 cm3.

a) ¿Cuál es el radio de la pelota?

b) Si el volumen puede variar entre 266 y 270 cm3 ¿cuánto puede variar su radio?

Utilice la definición e - d de límite para describir esta situación. Identifique e y d. Interprete gráficamente.

Nota: Cabe destacar que el enunciado se encuentra en libros de textos usuales y es utilizado en la enseñanza tradicional. Se entiende por enseñanza 'tradicional' *a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos* (Alvarenga, 2003, p.199).

La actividad fue realizada en clase, con alumnos de dos cursos durante el primer semestre de 2010. Se planteó el problema y se analizaron los distintos niveles de conocimiento alcanzado por los mismos, los que fueron comparados con la descomposición genética realizada por Cotrill y colaboradores. Posteriormente, se indujo a los estudiantes a que avanzaran hasta alcanzar una concepción *objeto* del concepto definición de límite finito.

Los alumnos comenzaron a resolver el ejercicio utilizando distintas estrategias.

A continuación, se describe el orden del razonamiento utilizado por la mayoría de los estudiantes. Comienzan utilizando la fórmula de volumen de una esfera y hallan el valor del radio correspondiente a 268, 266 y 270 cm^3, respectivamente, resolviendo algebraicamente la ecuación. Sin embargo, no pudieron interpretar gráficamente la función volumen, lo que implica que estaban en la fase *acción* del concepto función, ya que obtenían algebraicamente valores en algunos puntos aislados pero sin interpretar, como se mencionó anteriormente, el concepto de función gráficamente.

Cuando la mayoría de los estudiantes logró interpretar gráficamente la función volumen, se pasó a la segunda etapa, es decir, utilizar los objetos matemáticos: inecuaciones y entornos, expresados mediante la notación de valor absoluto. Cabe destacar que si bien varios alumnos pudieron escribir la notación simbólica de límite funcional, otros tantos tenían dificultades en utilizarla, más aún en realizar los tratamientos en los distintos registros semióticos involucrados y en la conversión entre ellos. Fue general la dificultad detectada en el pasaje del lenguaje semántico al sintáctico, es decir, en interpretar que el volumen varía entre 266 y 270 cm^3 se corresponde con la inecuación $|v(r) - 268| < 2$, donde $v(r)$ indica el volumen de la pelota en función del radio. Frente a esta dificultad, el docente intervino induciendo a la escritura de una primera expresión simbólica, la correspondiente a la inecuación $266 < v(r) < 270$. Posteriormente el docente expresó en lenguaje natural "la distancia de $v(r)$ a 268 debe ser menor de 2 unidades” para que los estudiantes escribieran simbólicamente la inecuación deseada, lo que en efecto pudieron realizar.

No tuvieron dificultades en la resolución algebraica de la inecuación, pero persistía la problemática de la interpretación gráfica de la solución de la inecuación como un subconjunto del dominio en la variable radio *r*. Estaban en la etapa *acción* del objeto matemático inecuación en sus dos concepciones: interpretación y resolución (Alvarenga, 2003).

Una vez alcanzada una concepción *objeto* de los conceptos inecuación y función se pasó a la tercera etapa, esto es, la de elegir el valor δ que verifica la definición de límite. Aplicaron los pasos algebraicos en forma correcta y lograron interpretar la definición de límite, gráficamente, ya que habían realizado varios cambios entre los registros de representación semiótica y tratamientos en cada uno de ellos.

Una descomposición genética

Parte de la teoría APOE consiste en analizar cada unidad de enseñanza para producir lo que se conoce como “descomposición genética del concepto”, esta es una descripción de las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* involucrados en la enseñanza del concepto y de la manera en que se interrelacionan. La descomposición propuesta es la siguiente:

(1) la acción de evaluar la función *f* en puntos *x* próximos y no tan próximos al valor *a;*

(2) la acción de evaluar la variable *x* para valores próximos de *f* a un cierto valor de la función (este paso se denomina “inversión” en la teoría APOE);

(3) interiorización del paso (1) y (2) para construir un proceso – rango con radios variables en entornos con centro en el límite *l*;

(4) construcción de un proceso-dominio en el cual se observe la dependencia del entorno de *x* a partir del entorno en la variable dependiente *y*. Observar la posibilidad de la asimetría del entorno con centro en *a*;

(5) construcción del objeto matemático “para todo ε existe por lo menos un valor δ”;

(6) coordinación de (3) y (4) a través de *f*. Es decir, la función *f* se aplica al proceso ‘*x*

aproximándose a *a* ’ para obtener el proceso ‘*f(x)* aproximándose a *l*’;

(7) reconstruir el proceso (6) en términos de desigualdades e intervalos;

(8) aplicar el esquema de cuantificación para vincular (5) y (7) y obtener una definición formal de límite;

(9) encapsular (8) para obtener el objeto “definición de límite finito”.

Conclusiones

Las conclusiones en esta etapa de la investigación son: -la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite funcional al nivel de *esquema*; -la necesidad de la *interiorizació*n de los conceptos previos al Límite funcional; -las dificultades detectadas para relacionar los diferentes registros semióticos y elaborar traducciones adecuadas entre ellos; -las dificultades presentes para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico; -la insuficiencia del material de enseñanza y aprendizaje en cuanto a la calidad de las situaciones didácticas planteadas para promover la aprehensión del concepto; -la sugerencia didáctica de concentrarse en la construcción de los procesos dominio y rango y en la aplicación de la función para lograr el vínculo entre ambos, de acuerdo con Cottrill, Dubinsky et al. (1996); de igual modo respecto de los cuantificadores; -la riqueza implícita de cierta clase de problemas presentes en libros de textos usuales cuando son tratados desde la teoría APOE.

Es importante conocer el esquema de interpretación o el pensamiento del alumno (descomposición genética del concepto) para generar situaciones didácticas adecuadas, esto es, diseñar una gama de actividades que permita, a la mayoría de los estudiantes, la comprensión del concepto.

Por lo expuesto, las reflexiones finales se refieren al replanteo del tratamiento didáctico que como docentes le estamos imprimiendo al objeto de estudio, la necesidad de realizar estos análisis didácticos de forma permanente y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003) La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 119-199

Artigue, M., (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación, la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, M. Alvarez, M.Niss, A´erez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Asiala, M., Brown, N., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education 6*, 1-32.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(3), 163-197.*

Boyer, C. B. (1968). *Historia de la Matemática*. New York: Ed. John Wiley & sons.

Contreras de la Fuente, A.y Font Moll, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica? XVIII Jornadas del SI- IDM, (pp.1-23), Castellón.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking 1*, 153-166. Boston/London: Kluwer Academic Pres Dordrecht.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols D.; Schwingendorf K.; Thomas K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior 15*, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática 8*(3), 24-45.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Narvaez, Ana María (2006). *Una reflexión sobre los que fueron considerados inútiles, inservibles, imposibles, y ocultos números complejos.* Tesis de Maestría, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Sierpinka, A. (1987). Obstacles épistémologique relatifs á la notion de limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques, 6*(1), 5 -67.

Valdivé, C., Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 413 - 450.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN IDENTIFICAR DE MANERA CONSTANTE LA UNIDAD DE REFERENCIA: UN ESTUDIO DE CASO

Patricia Lamadrid González, Marta Elena Valdemoros Álvarez
CINVESTAV-IPN (México)
malishlama@yahoo.com.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. Un elemento importante para el diseño de secuencias didácticas es el conocimiento matemático que tienen los docentes acerca de las fracciones. En este artículo nos centramos en identificar el conocimiento que tiene el profesor en relación a las fracciones y la identificación de la unidad de referencia, así como el manejo del todo continuo y el todo discreto. El estudio se realizó a través de observaciones, cuestionarios, entrevistas de corte didáctico, y diseño de una planeación didáctica. La investigación es de corte cualitativo y está enfocada a realizar un estudio de caso. Mostramos en este documento el análisis de los resultados obtenidos en los cuestionarios que implicaban el planteamiento y la resolución de problemas correspondientes al caso del profesor José en quien identificamos el dominio adecuado de la partición, así como el uso de pictogramas como estrategia de resolución.

Palabras clave: profesores, problemas verbales,unidades divisibles

Abstract. An important element in the design of didactic sequences is the mathematical knowledge that teachers have of fractions. This article focuses on identifying the knowledge that the teacher has in relation to fractions and on the identification of the unit of reference, as well as the use of the continuous whole and the discrete whole. The study was carried out by means of observations, questionnaires, interviews of didactic type, and the design of a didactic planning. The research is of a qualitative type and is focused on carrying out a case study. We show in this document the analysis of the results obtained from the questionnaires which implied the setting out and the solution of the problems corresponding to the case of teacher José in whom we identified the adequate command of partition, as well as the use of pictograms as a strategy of solution.

Key words: teachers, verbal problems, divisible units

Introducción

Identificamos que los niños presentan dificultades en el aprendizaje de las fracciones. Sin embargo, nos centramos en el docente para identificar su conocimiento en relación a las fracciones. Analizamos la enseñanza de las fracciones desde distintos aspectos involucrados en este proceso. Tomamos en cuenta algunos elementos como la planeación didáctica, los recursos empleados, el diseño y la puesta en práctica de las estrategias didácticas y los conocimientos que tienen los docentes acerca de las fracciones. En este momento nos enfocamos en la resolución de problemas que impliquen identificar la unidad de referencia. Para ello empleamos un cuestionario en dos etapas que permitieran al docente, resolver y plantear problemas que implicaran el uso de los significados de la fracción. Presentamos el estudio de caso del Profesor José quien cuenta con cuatro años de servicio.

Marco teórico

La fracción se establece a partir de dos relaciones fundamentales, la relación parte-todo y la relación parte-parte. Lo anterior requiere la existencia de un todo divisible, compuesto por elementos separables. La acción reversible de separar las partes trae consigo la conservación del todo. Una fracción implica un número determinado de partes. El número de partes en que se divide un todo continuo establece una relación fija con el número de intersecciones. La división del todo es exhaustiva y equitativa. Una fracción es una parte del todo inicial al mismo tiempo que cada una de las partes, pueden ser partes en si mismas divisibles nuevamente. (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1966).

La conservación del todo requiere su identificación como unidad arbitraria. Establecer la unidad arbitraria, es decir, el estado-unidad, fortalece, para el concepto de fracción, su naturaleza particularmente relativa. El estado-unidad nos refiere a la descripción de un estado de cosas inicial sobre el que puede realizarse una orden de ejecución de una operación que da como resultado un estado de cosas final o simplemente un estado de cosas. La fracción es considerada como un estado o un operador que actúa sobre una unidad arbitraria y a partir de ella se generan las cadenas estado-operador-estado (Dienes, 1967).

El todo, como unidad arbitraria, puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura (Freudenthal, 1983). El todo continuo puede representarse con una figura geométrica, una parte de esta unidad es indicada por una fracción que relaciona la parte con el todo. En el todo discreto, expresado como un conjunto, donde un subconjunto contenido en él se indica con una fracción, ésta es empleada como un medio que establece la relación entre ambos (Hart, 1981).

La fracción es un recurso fenomenológico del número racional, en tanto que puede identificase y representarse concretamente de distintas maneras (Freudenthal, 1983). Kieren (1988) señala cinco "constructos intuitivos" (significados) de la fracción inmersos en el campo de cocientes del número racional: operador multiplicativo, cociente, medida, razón y relación parte-todo. Además, ubica a la partición, la equivalencia y la formación de unidades tan próximos a la realidad como a los constructos mentales humanos.

La relación parte-todo es definida como la división de un todo en partes equivalentes, señalando como resultado un número determinado de partes. Éste significado genera el lenguaje de la fracción ya que se relaciona con los demás significados a partir de identificar la unidad de referencia.

Identificar de manera constante la unidad de referencia es primordial en el trabajo con fracciones. La Reforma Integral de Educación Primaria enfatiza que el docente diseñe estrategias didácticas que propicien en el alumno el reconocimiento de la unidad divisible (Secretaría de Educación Pública, 2009). Monereo, Castelló, Clariana, Palma, Pérez, (2007) plantean que el diseño didáctico y la aplicación de estrategias didácticas deben promover en el alumno la identificación del objetivo de las actividades, reflexionar sobre sus posibilidades de llevarlas a cabo, identificar sus conocimientos previos y la información que necesitará, promover el análisis sobre cómo realiza el aprendizaje y no sólo sobre los resultados obtenidos así como justificar su elección de los procedimientos usados para resolver la tarea. Dichos autores reconocen al conocimiento disciplinar como un apoyo fundamental del docente para el diseño de estrategias didácticas.

La forma en que el profesor comprende las matemáticas determina el tipo de tarea que selecciona y las representaciones que utiliza en la enseñanza (Llinares y Sánchez, 1998). Shulman (1986) destaca la importancia y necesidad de que el docente adquiera conocimientos específicos para la enseñanza y sus fundamentos pedagógicos, refiriéndose a estos últimos como la forma de representar y formular la materia que la haga comprensible a otros.

Problema de investigación

Identificamos a la fracción como uno de los contenidos que presenta dificultades para su aprendizaje. Nos centramos en uno de los actores principales del proceso enseñanza-aprendizaje: el docente. Planteamos nuestro problema de investigación como: *"El desarrollo de la enseñanza de las fracciones por parte del maestro de primaria, en servicio."*

Nuestro objetivo es identificar en el docente la relación entre su conocimiento acerca de las fracciones, el diseño didáctico y la puesta en práctica de estrategias didácticas, para ello hemos formulado las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cuáles son las estrategias didácticas del docente en la enseñanza de las fracciones?*
- *¿Cuál es la relación entre el desarrollo de la clase, la planeación didáctica y los recursos empleados para la elaboración de ésta?*
- *¿Cuáles son los conocimientos que tiene el docente acerca de las fracciones?*

Método

Nuestra investigación de corte cualitativo fue desarrollada en escuelas primarias públicas del Distrito Federal, México, durante el turno vespertino, su horario escolar es de las catorce a las dieciocho treinta horas. Cabe mencionar que todas las asignaturas son abordadas por los profesores frente a grupo. En la educación básica de nuestro país, las fracciones, como contenido, son incorporadas de manera formal a la currícula en el tercer grado de educación primaria, Es por ello que nuestros sujetos de estudio son docentes de este nivel educativo.

Instrumentos metodológicos

- **Cuestionario inicial** en el que recabamos información del profesor en relación a su experiencia laboral, su formación, capacitación y actualización docente.
- **Observación directa de la clase** en la que el profesor determinó el contenido específico a desarrollar enfocado a las fracciones.
- **Observación indirecta en las actividades cotidianas** plasmadas en los cuadernos y libros de los alumnos. Realizamos observación participante sin intervenir durante el desarrollo de la clase, la selección y el diseño de tareas y estrategias didácticas.
- **Cuestionario en dos etapas**: en la primera, el docente resolvió algunos problemas que implicaron utilizar operaciones básicas con fracciones en sus procesos de resolución, a partir de ello explicó, justificó y buscó diversas formas de solucionarlos al mismo tiempo que se le pidió identificar los significados de las fracciones implícitos en cada problema. En la segunda etapa, diseñó problemas en relación a los significados de las fracciones adecuándolos al grado que atiende y realizando el mismo proceso que en la primera etapa. Esto nos permitió identificar el uso que da al todo discreto y al todo continuo así como su conocimiento acerca de los constructos de las fracciones.
- **Entrevista en profundidad y de "corte didáctico"** (Valdemoros, 1998) en dos momentos, iniciamos con la construcción de una planeación didáctica por parte del docente, la cual se enfocó al desarrollo de la partición y la equivalencia. En otro momento resolvió dos problemas dados, planteó y resolvió dos más empleando los significados de las fracciones para los que presentaron mayor dificultad.
- **Observación final** en la que se llevó a cabo la aplicación de la planeación didáctica en el aula.

La validación de esta investigación se determinó a partir del empleo de controles cruzados entre el investigador y un observador entrenado, los dos permanecieron en las clases y el análisis de las actividades en los materiales del alumno. Se empleó la triangulación entre los instrumentos metodológicos, identificando semejanzas y diferencias entre el cuestionario, la entrevista y la planeación didáctica. Contrastamos estos elementos con la observación del desarrollo de la clase y la interacción del docente con sus alumnos.

Resultados: El caso de José

En este apartado presentamos el caso del profesor José, quien atiende un grupo de tercer grado de educación primaria. Él cuenta con treinta y dos años de edad y cuatro años de trabajo docente, además es egresado de la licenciatura en Educación Básica en la Escuela Normal Rural de Campeche. Cabe mencionar que también, en dicha institución, cursó hasta el segundo semestre de la licenciatura en español.

Uno de los problemas verbales que el profesor José resolvió en el cuestionario de la primera etapa es el siguiente:

> 3/8 de un afinca se venden, 2/5 del resto se siembran de caña y lo que sobra de tabaco. ¿Qué parte de toda la finca se siembra de tabaco? ___3/5___

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 16}{40} =$$

La estructura de este problema es compleja y es posible que José al leer el texto "del resto" determinara que el proceso de resolución estaba a cargo de una sustracción, la cual se muestra a continuación:

El uso del algoritmo no le permitió hallar una solución, puesto que no concibió que el minuendo pueda ser mayor al sustraendo. Al no obtener una respuesta adecuada para él, decidió emplear el rectángulo dado en la tarea (Ver *Figura1),* el cual fue emplearlo como un pictograma (Valdemoros, 1993).

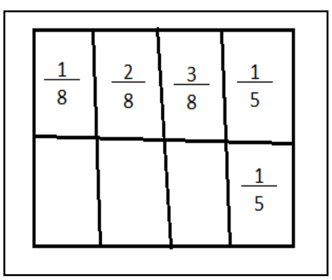


Figura 1. Solución de José.

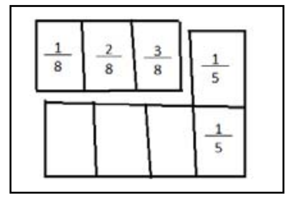
En el pictograma realizó el conteo de uno a tres para cada una de las partes que corresponden a lo que se vende de la finca y lo indica. Señalando como fracciones unitarias los dos quintos correspondientes a lo que se siembra de tabaco. Además recurrió al conteo de las partes sobrantes, expresando y escribiendo como resultado tres quintos. Menciona que pueden ser también tres octavos ya que tres octavos y tres quintos son equivalentes porque son del mismo tamaño

Como ya hemos señalado, el problema es complejo, implica identificar la unidad de referencia en dos momentos distintos. El primer momento se presenta cuando se requiere vender una parte de la finca (tres octavos), el todo es la finca. El segundo momento, requiere redefinir el todo que ahora está constituido por lo que se siembra de caña y lo que se siembra de tabaco. La pregunta del problema implica el paso por los dos momentos y regresar al primero.

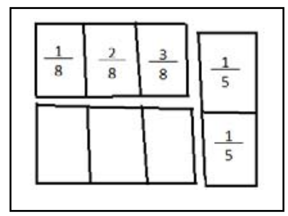
Ahora detallaremos paso a paso el proceso de solución del profesor José.

Primero identificó el todo y realizó las particiones necesarias para llegar a octavos y reconoció la parte correspondiente de venta y la de siembra de tabaco.

Posteriormente, separó mentalmente lo que se vende y el resto le permitió redefinir el todo. “El resto” se convirtió en el nuevo todo, ya dividido en cinco partes facilitó la “toma” de dos de ellas para la siembra de tabaco, y el restante lo identificó para la siembra de caña.



Después observó las tres partes restantes, que de acuerdo con el nuevo todo, son tres quintos que al compararlos con los tres octavos del primer todo, lo encuentra congruentes, señalándolos como equivalentes porque son del mismo tamaño. En este punto es donde el docente no consigue cambiar del segundo todo al todo original, al que se refería la pregunta.



Reunir las partes, redefinir la unidad de referencia y realizar el conteo de las que no están marcadas eran componentes importantes de una estrategia de resolución.

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}\quad\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{2}{5}\text{ de }\frac{5}{8}\quad\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{8}\quad\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}\quad\ldots\ldots(4)$$

Retomando el uso de algoritmos presentamos el siguiente proceso de resolución. Identificando el todo, la sustracción habría sido como se expresa en (1), donde cinco octavos corresponden al resto de los cuales dos quintas partes se siembran de caña (2), este momento emerge una relación parte-parte que es el soporte de lo multiplicativo (3). Finalmente, al restar a la parte de la finca que no fue vendida lo que se siembra de caña, se obtiene lo que de la finca se siembra de tabaco (4). Este proceso no requiere la redefinición del todo, sin embargo, es necesario hacer uso de la relación parte-todo, parte-parte y nuevamente parte-todo.

En el segundo momento de la entrevista en profundidad se pidió a José resolviera dos problemas y plantearan otros dos. Una de las tareas a resolver, donde se hace uso del todo discreto, fue:

> De una caja de fresas, 3/8 se pudrieron, 4/5 de las que no se pudrieron las preparamos con crema y con las que sobran hicimos licuado.
>
> ¿Qué parte de toda la caja de fresas utilizamos para el licuado? ___1/8___

En primera instancia, José buscó un común denominador como consecuencia de recordar el primer procedimiento que empleo en el problema del cuestionario de la primera etapa (mostrado anteriormente) con las mismas características. En esta nueva tarea no desarrolla la estrategia de sustracción porque el enunciado no incluye la expresión “el resto”.

Cabe mencionar, que el problema tuvo apoyo de dibujos al presentársele un conjunto de fresas, las cuales son utilizadas para la resolución del problema (Ver *Figura 2*).

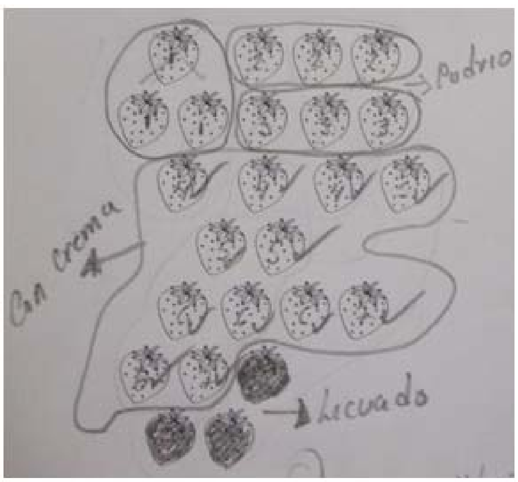


Figura 2. Resolución de José empleando todo discreto

Contó las fresas y dividió el total entre ocho, dividió el todo agrupando de tres en tres. Señaló tres de los subconjuntos con la palabra “pudrió”. Contabilizó los agrupamientos que le quedan, redefinió el todo y reservó cuatro grupos de tres indicando que eran las fresas que se preparan con crema. Observó que le queda un subconjunto, de tres fresas y corresponde a un octavo del total del grupo que había en la canasta, describió que son las que se licuan. Contestando la pregunta, expresa que un octavo de fresas es lo que se utiliza para licuar.

Al pedirle que resuelva de manera distinta el problema anterior transformó el todo discreto en continuo para solucionarlo de manera similar al problema del terreno, descrito con anterioridad.

José utilizó el mismo pictograma, señalando con color tres partes y en una de ellas escribió la fracción un octavo, además comentó que estas son las que se pudren. Posteriormente, dibujó una marca a cuatro partes de las restantes representado las que se preparan con crema. Finalmente marcó la última expresando nuevamente que un octavo es lo que se emplea para licuar (Ver *Figura 3*).

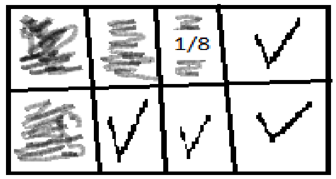


Figura 3. Pictograma realizado por José.

Al término de la resolución con el todo continuo, el profesor José, regresa al todo discreto y a cada elemento de los subconjuntos les pone un numeral, uno para cada una de las que integran el primer subconjunto y así consecutivamente hasta el marcar tres elementos con el número ocho. Dándole mucha importancia a los números naturales para poder dar una respuesta en fracción.

Conclusiones

La fracción se establece a partir de dos relaciones fundamentales, la relación parte-todo y la relación parte-parte, en el caso de José no se observa una adecuada conceptualización del segundo tipo debido a que no concibe a cada una de las partes como partes en sí mismas divisibles.

Además muestra mayor seguridad en relación al uso del modelo discreto, porque utiliza los números naturales y el conteo como apoyo a su resolución.

Asimismo, justifica sus pensamientos y establece códigos en la solución y plantea diversas estrategias para obtener una respuesta satisfactoria.

Referencias bibliográficas

Dienes, Z. (1967). *Fracciones*. Editorial Varazén. México.

Freudenthal, H. (1983). D*idactical Phenomenology of Matematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Hart, K. (1981). *Fractions, en Children's Understandings of Mathematics, (11-16), London: Murray.*

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert y M. Ber (Ed), *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston, E. E. U.:National Council of Theachers Matematics. P. p. 162-181.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En L. Rico y M. Sierra (Eds) *Actas I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. SEIEM: Granada, P. p. 15 – 26.

Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., Pérez, L. (2007). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Ed. Graó, México, D. F.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1966). *The child´s conception of geometry*, London, England: Routledge and Keagan Paul.

Secretaría de Educación Pública. (2009). Programa de estudio 2009. Sexto grado. Educación Básica. Primaria. México.

Shulman, L. S. (1986): "Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher*, febrero, P. p. 4-14.

Valdemoros, M. (1993). La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él. Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Valemoros, M. (1998). La construcción de la unidad en la suma de fracciones: Estudio de caso. (465-481). En F. Hitt (Ed) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Editorial Iberoamericana.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN

José Benjamín Chan Domínguez, Rocío Uicab Ballote
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
benjac100@hotmail.com, uballote@uady.mx

Resumen. En nuestro trabajo de investigación nos centramos en la regla de los signos para la operación de multiplicación y nuestro interés se enfoca en generar una propuesta didáctica orientada a provocar un espacio de análisis y reflexión que permita a los escolares esclarecer las reglas de los signos para la multiplicación. Nuestro diseño contempla la naturaleza histórica y epistemológica de las reglas de los signos para multiplicación; y considera un enfoque centrado en el alumno; es decir; el escolar como agente activo; tomando en cuenta una estructura didáctica, epistemológica y cognitiva; enmarcada en la ingeniería didáctica como metodología.

Palabras clave: multiplicación, reglas de los signos

Abstract. The main issue in our research is the rule of signs for the multiplication operation and our interest is focused on generating a didactic proposal that is oriented to cause a space of analysis and reflection that allow students to clarify the rules of signs for multiplication. Our design contemplates historical and epistemological nature of the rules of signs for multiplication, and considers a student-centered approach, i.e., the student as an active agent, taking into account a didactic structure, epistemological and cognitive, framed in a didactic engineering as methodology.

Key words: multiplication, rules of signs

Introducción

Desde nuestra perspectiva, el tratamiento escolar presentado para abordar los números con signos y en especial la regla de los signos para la operación multiplicación, se convierten en una dificultad para el aprendizaje de nuevos contenidos, pues en el aula de clase, el saber está enfocado a que el estudiante conozca y memorice las reglas: *(menos) (más) = menos*, *(más) (más) = más* y *(menos) (menos) = más*, y posteriormente, éstas se apliquen en la resolución de ejercicios. Aunque esta temática corresponde al nivel educativo básico (segundo de secundaria), alumnos de niveles educativos posteriores, presentan confusiones para aplicar correctamente las reglas.

Al igual que otros conceptos matemáticos, consideramos que un buen aprendizaje de la regla de los signos, contribuirá al aprendizaje de otros contenidos propios de la matemática. Cuando hacemos referencia a un buen aprendizaje, contemplamos que el estudiante en la construcción de su aprendizaje vaya apropiándose adecuadamente de la matemática, de tal forma que las definiciones, propiedades, teoremas, objetos matemáticos, etc. tengan un sentido lógico, ordenado y correcto que le permitan hacer uso de esa información adquirida y convertirla en conocimiento. Bajo ese esquema, la intención de nuestro trabajo se centra en generar una propuesta sistemática y estructurada que permita didácticamente que el estudiante construya la regla de los signos para la multiplicación.

Problema de investigación

¿Por qué *(menos) (menos) = más* y *(menos) (más) = menos*? Como matemáticos, sabemos que hay dos teoremas que al demostrarse bajo los axiomas de campo de los números reales, justifican las reglas de los signos.

> **Teorema 1:** El producto de un número positivo por un número negativo es un número negativo.
>
> **Teorema 2:** El producto de dos números negativos es un número positivo.

Sin embargo, es claro para nosotros que un enfoque axiomático de la regla de los signos en un nivel básico no sería quizá el camino adecuado para que el estudiante adquiera el aprendizaje de dichas reglas, entonces ¿cómo diseñar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes construir dichas reglas de los signos?

Marco teórico

Nuestra propuesta se fundamenta bajo el marco de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y empleamos a la ingeniería didáctica como metodología de investigación. La teoría de las situaciones didácticas sostiene que el estudiante aprende matemáticas mediante la conducción de actividades diseñadas en un medio en el que se propone resolver una situación problemática para la cual de inicio se tiene una estrategia de solución que generalmente falla y de preferencia se pretende que el mismo medio comunique al estudiante que es necesario cambiarla lo que genera en él una nueva estrategia que lo adapta al medio (Nieto, Viramontes y López, 2009).

La ingeniería didáctica tiene una vinculación con la teoría de las situaciones didácticas, apreciada especialmente en la concepción y el análisis a priori de la ingeniería. Las elecciones que presiden a la organización de situaciones (didácticas) que provoquen que se logre un cierto aprendizaje, son explicitadas haciendo aparecer las variables didácticas sobre las cuales se ha intervenido, los *milieux* que estas elecciones determinan, buscan anticipar las interacciones posibles de los alumnos con estos *milieux* y sus efectos posibles en términos de construcción de conocimientos, en un funcionamiento en principio supuesto a-didáctico. Se manifiestan también en una estructuración del conjunto de las situaciones, frecuente aunque no sistemático, en relación con las tres dialécticas distinguidas por Brousseau para analizar las relaciones del sujeto con el conocimiento matemático: las dialécticas de la acción, de la formulación y de la validación. Finalmente, el papel del docente también es previsto en el análisis, en referencia a los dos procesos antagonistas que, en la teoría de las situaciones didácticas, gobiernan las relaciones entre saberes y conocimientos: el proceso de devolución y el proceso de institucionalización, en los cuales el docente es un actor central (Artigue, 1995).

Metodología. Ingeniería didáctica

El término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Douady:

> El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1996, p.241).

Diseño de la propuesta didáctica

Artigue (1998) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

Dichas dimensiones fueron consideradas en nuestro trabajo porque aportan elementos para el diseño de la propuesta. A continuación un resumen de dichas dimensiones.

Dimensión epistemológica

Revisando el contexto histórico, presentamos un acercamiento a las prácticas relacionadas con el surgimiento de la regla de los signos de multiplicación en los diferentes períodos del desarrollo del álgebra que propone Nesselmann (1842). Uno de los aspectos que merece especial atención son los números con signo, pues el surgimiento y desarrollo de la regla de los signos para la multiplicación, depende del conocimiento tanto práctico como conceptual de dichos números. Presentamos brevemente cómo se dio el surgimiento y desarrollo de la regla de los signos a través de las etapas de desarrollo del álgebra.

- Etapa retórica. En este período notamos que el conocimiento sobre los números con signos era limitado, pues las culturas desarrollaron su matemática a partir de cantidades positivas, de esa manera en dicho periodo no se podía hablar de la regla de los signos para la operación de multiplicación.
- Etapa sincopada. En esta etapa observamos que las culturas recurren a los números negativos por la necesidad de representar deudas, aunque no todos los matemáticos otorgaban a los negativos el estatus de números, se comenzó a trabajar a menudo con los negativos, lo que trajo como consecuencia que algunos matemáticos propusieran alguna especie de regla de los signos para la multiplicación, pero, observamos que dichas reglas sólo se enunciaban, ya que en ese período la demostración no constituía un elemento fundamental de las matemáticas. De esa forma Diofanto (siglo III), haciendo alusión al producto de dos diferencias escribe una especie de regla de los signos: “lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es lo que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta” (Gómez, 2001, p.259).
- Etapa simbólica. En esta etapa observamos que varios matemáticos plantearon demostraciones diferentes para la regla de los signos y esto se debió al dominio que tenían de los números negativos y en un sentido amplio al propio desarrollo de las matemáticas, por ejemplo, Euler en sus Elementos de Álgebra (1770) argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que $-a$ por $-b$ será ab ya que no puede ser $-ab$ que es lo que vale $-a$ por b (Gómez, 2001).

De este análisis consideramos que la regla de los signos, generó dificultades a los matemáticos a lo largo de la historia, algo similar sucede en las aulas de clase pues los alumnos no logran darle significado a esa regla, y tienen que recurrir a la memorización.

Dimensión didáctica

Llevamos a cabo un análisis acerca del tratamiento que se le da a la regla de los signos en los libros de texto. Se revisaron 7 libros que son lo que se contemplan como libros de texto o de apoyo en la enseñanza básica, los años de edición se encuentran entre 1993 y 2010. Consideramos como ejes del análisis los siguientes aspectos:

- *Temas antecedentes, es decir temas que aporten elementos para el estudio del tema en cuestión.*
- *Temas consecuentes, relacionado con temas donde se vea una aplicación de la regla de los signos.*
- *Estructura seguida para abordar el tema, es decir cuáles son las actividades para iniciar y concluir el tema.*
- *Enfoque de los ejemplos que presentan, es decir si son con enfoque algorítmico, demostrativo, o aplicativo.*
- *Institucionalización, es decir quién es el encargado del proceso de formalización del saber, el profesor o el alumno.*
- *Ejercicios o actividades para el alumno, consideramos los mismos aspectos de los ejemplos.*

Por ejemplo, en el libro de Martínez y Struck (2001), la estructura seguida para abordar el tema consiste en primera instancia en mostrar una gráfica de la cual es posible construir la "tabla de multiplicar de algún número positivo" (en particular el libro trabaja con la tabla de multiplicar del número 3) (Imagen 1).

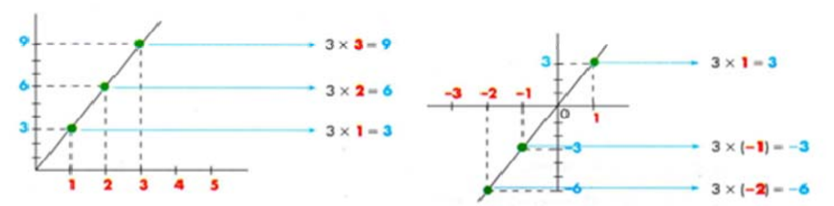


Imagen 1. Gráfica de la cual es posible construir la "tabla de multiplicar de algún número positivo".

Con dicha referencia, posteriormente se pide construir la tabla de multiplicar de un número positivo y un número negativo, y a partir de ahí, se plantea la pregunta (retórica) acerca de la representación gráfica de dos números negativos. Seguidamente dan respuesta a dicha pregunta presentado el procedimiento a seguir para obtener la representación gráfica del producto de dos números negativos (Imagen 2).

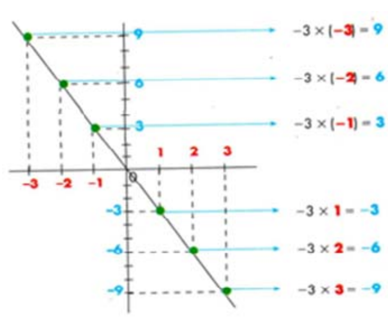


Imagen 2. Gráfica de la "tabla de multiplicar de un número negativo por algún otro número negativo".

Observamos que este libro relaciona lo gráfico con lo aritmético, de tal forma que el alumno puede transitar entre estas dos representaciones en ambos sentidos. Al término de dicha actividad, se lleva a cabo la formalización de la regla de los signos, la cual se realiza de dos formas, primero en forma de enunciados y después en una tabla donde se sintetizan los enunciados.

Si se multiplica un número positivo por uno negativo, el resultado es negativo.

Si se multiplican dos números con signos iguales, el resultado tiene signo positivo.

x	+	–
+	+	–
–	–	+

Una vez realizado el proceso de formalización, el tema de la regla de los signos finaliza con un bloque de ejercicios, los cuales pertenecen a un enfoque algorítmico, pues la tarea del alumno se reduce a la aplicación operatoria de la regla de los signos.

Consideramos que aunque algunas de las actividades presentan situaciones de interés, existe una ruptura entre el desarrollo y la institucionalización del saber, porque al final los autores se centran en proporcionar las reglas, en vez de provocar que sea el estudiante quien las conjeture.

Dimensión cognitiva

Con la intención de recabar información relacionada al conocimiento de los alumnos sobre la regla de los signos, aplicamos un instrumento conformado de tres secciones y dos categorías de reactivos. En las secciones 1 y 2, conformado por 12 reactivos, se solicitó al alumno que coloque el signo que resulta del producto de dos o más factores. La sección 3 constó de un reactivo en la cual el estudiante debía plantear un situación (problema) cuya solución involucre necesariamente alguna de las regla de los signos.

Se aplicó el instrumento a 23 estudiantes de tercer grado de secundaria de seis diferentes escuelas. La intención era averiguar los errores y dificultades más frecuentes que tienen los estudiantes al realizar el producto de números con signo y la relación de dichas reglas en situaciones de contexto. Se observó que los estudiantes (86%) aplican correctamente las reglas para productos con dos factores, pero cuando se involucran más factores tienden a errar, y tampoco pueden plantear problemas que involucren la regla de los signos, es decir no tienen un vínculo fuerte de la regla en situaciones que la involucren; las conexiones cognitivas son débiles.

Diseño de las actividades que conforman la propuesta didáctica

En el diseño de las actividades consideramos los tres elementos fundamentales del triángulo didáctico: estudiante, profesor y medio didáctico**.** El estudiante es el actor principal y tiene la tarea de experimentar, analizar, conjeturar, discutir y concluir acerca de las actividades de la propuesta. El medio didáctico es importante en nuestro diseño ya que deseamos que el conocimiento sea adquirido por el alumno. Finalmente, el profesor tiene como tarea, guiar al alumno (cuando éste lo requiera) durante el desarrollo de las actividades e institucionalizar el conocimiento.

Las actividades son desarrolladas en el software de geometría dinámica Cabri Geometry II Plus, a través de 8 escenas en las cuales pueden apreciarse los siguientes momentos.

- *Introducción. En este momento se presenta tanto el contexto de la actividad (una historia ficticia a manera de videojuego con niveles de reto) y se proporcionan las instrucciones de la misma.*

- *Desarrollo. En este momento se aborda la problemática de la regla de los signos, por medio de dos actividades. En el relato de la historia, un caballero debe rescatar a una princesa quien ha sido secuestrada, para ello debe ir seleccionando caminos que lo conducirán hasta donde se encuentra la princesa. La selección de los caminos se realiza por medio de un movimiento horizontal y uno vertical sin importar el orden. Así cuando el caballero selecciona caminos adecuados (del mismo color) se sombrean áreas de color amarillo, haciendo alusión a la regla* (menos) (menos) = más *o* (más) (más) = más *y cuando selecciona caminos inadecuados (de diferente color) se sombrean áreas de color naranja, implícitamente relacionado a la regla de los signos* (menos) (más) = menos *(ver Imagen 3).*

Imagen 3. Escena 2 que forma parte de la propuesta didáctica.

- *Cierre. Este momento se divide en dos secciones, la primera contiene una actividad que tiene la intención de verificar si el alumno conjetura las reglas de los signos y la otra contiene el final de la historia y las instrucciones para guardar su archivo.*

Después de terminar con las actividades, el alumno continúa con una hoja de trabajo, donde se le cuestiona sobre las características de los movimientos del caballero de tal forma que a través del tránsito de las etapas del álgebra, etapa retórica, sincopada y simbólica, obtenga la noción de la regla de los signos.

Parte 2. Ham realizó algunos movimientos para rescatar a la princesa, los cuales los representó simbólicamente, coloca el símbolo (+) si el área correspondiente a esos caminos proviene de un movimiento adecuado y coloca el símbolo (-), si el área correspondiente a esos caminos proviene de un movimiento inadecuado.

(%)(#) =	(-) (-) =
(+)(-) =	(&) (&) =
(>)(<) =	(+)(+) =

Imagen 4. Instrucciones que llevan a obtener las reglas de los signos.

Consideraciones y reflexiones

El diseño de la propuesta contempla los análisis preliminares, en la cual observamos que se alcanza los objetivos deseados de la misma, sin embargo encontramos algunos inconvenientes que podemos mejorar, tal es el caso de la ruta de los caminos, los colores utilizados. Con nuestra actividad alcanzamos a darle significado a la regla de los signos, además que dicha regla se convierte en aprendizaje para los alumnos, pues los alumnos participaron en el proceso de construcción del mismo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), XV Jornadas de ASEPUMA y III Encuentro Internacional (pp. 1-12), Colombia.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.

Douady, R. (1996). Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. *En* Barbin, E., Douady, R. (Eds). Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Topiques éditions. (pp. 241-256) Francia: Publicación del I.R.E.M.

Gómez, P. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds), En Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (pp. 257-276), Granada: Editorial Universidad de Granada.

Martínez, M., Struck, F. (2001). *Matemáticas 2*. México: Santillana.

Nieto N., Viramontes J. y López F. (2009). ¿Qué es matemática educativa? *CULCyT, 6(35),* 16-21.

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA SUMA DE FRACCIONES DESDE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Juan Manuel Salas Martínez, Jairo Cucunubá Toledo, Luz Aida Pastor Pastor, Néstor Fernando Guerrero
Universidad Distrital Francisco José De Caldas (Colombia)
manueloco5@gmail.com, jairocucunuba@gmail.com, luzaidapastor@gmail.com, nfguerrero63@hotmail.com

Resumen. Se hace necesario que los estudiantes den significado y sentido a las fracciones, no desde el punto de vista algorítmico, sino apoyados en la representación gráfica y concreta, relacionándolas en contexto continuo y discreto; reconociendo la importancia de conservar la unidad como un aspecto primordial para comprender la relación entre la parte y el todo; continuando con el reconocimiento de las equivalencias entre las fracciones, reconociendo las partes que se relacionan con el todo, lo que conlleva a hallar el común de las partes de la unidad, para luego realizar el proceso de suma de fracciones, despojándolas de la suma habitual de fracciones dada a partir del algoritmo.

Palabras clave: suma de números fraccionarios, tratamiento gráfico

Abstract. It is necessary that the students make a meaning and a sense to the fractions, not from an algorithmic point of view, but supported by a graphic and concrete representation, relating them in a continuous and discrete context; recognizing the importance to conserve the unit as a primordial aspect to comprehend the relationship between the part and the everything; continuing with the recognition of the equivalences between the fractions, recognizing the parts that relate with everything, what leads us to find the common in the unit parts, so we then make the sum of a fraction process, getting rid from the usual sum of fractions given as part of the algorithm.

Key words: um of the fractionary numbers, graphic treatment

Planteamiento del tema

En la implementación de la presente propuesta, se inicia el trabajo con los estudiantes en torno al concepto de suma de fracciones a partir de la interpretación de medida, como aproximación inicial al concepto de número racional. Siendo necesario pensar en la manera de cómo abordar y dotar de significado el proceso, mediante situaciones que conduzcan a los estudiantes a utilizar, relacionar y aplicar los conceptos que se van desarrollando, desde la representación concreta, gráfica, simbólica y verbal.

En las pruebas piloto se evidenció que en la escuela se presentan problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, debido a que el trabajo, en donde se involucran, se reduce a la mecanización del algoritmo, sin detenerse a analizar el proceso que se genera, el cual se hace evidente en tareas que requieren de la representación gráfica, concreta o en situaciones cotidianas.

Marco de referencia

Se tuvo en cuenta tres aspectos necesarios para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, éstos son la relación parte - todo, el contexto de referencia de la fracción y las dificultades en la adquisición del significado de operaciones entre fracciones.

La relación parte todo

En investigaciones nacionales llevadas a cabo por algunos autores como Guevara (2006) se encontró que cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones que involucran variables como el tipo de tarea, tipo de magnitud y modo de representación; la variable modo de representación tiene un alto efecto sobre el desempeño en los estudiantes facilitando su comprensión. Así mismo, "la manera como las representaciones y el lenguaje se utilizan ayuda a dotar de significado a los símbolos y su manipulación" (Kieren, 1993, p.175).

Como se hace necesario que los estudiantes le den sentido y significado a las fracciones contextualizándolas, Freudenthal (1973, citado en Llinares y Sánchez, 1988) menciona sobre el contexto dado a las fracciones, el cual debe darse desde un ámbito real, acercándose al estudiante mediante un lenguaje que entienda teniendo en cuenta las aproximaciones cotidianas y el contexto social, como base principal para el acercamiento a la representación de la fracción.

El contexto de referencia para la fracción en la clase

Teniendo en cuenta el contexto de referencia de los estudiantes, el cual está dado a partir de su cotidianidad, Mora, Romero, Rojas, Rodríguez, Castillo, Bonilla y Sánchez (2006) mencionan que este contexto puede no corresponder a los contextos asociables con significados matemáticos, lo cual se puede mantener de no darse una acción encaminada a reconocer la nueva significación.

Así mismo, Romero y Segura (1992) señalan la importancia de enseñar las fracciones a partir de las relaciones entre medidas evitando dificultades en la comprensión y generando una enseñanza significativa.

Las dificultades en la adquisición del significado de operaciones entre fracciones

Streefland (1982, Llinares y Sánchez, 1988) señala las inconsistencias y limitaciones que han incidido en la enseñanza de las fracciones siendo las más importantes el tratamiento mecanizado de la operatoria de la fracción aplicándose al momento de desarrollar los algoritmos y la ausencia de contextos significativos siendo necesario emplear un contexto concreto o significativo.

En las indagaciones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en grado séptimo en las Instituciones Educativas Distritales: Jonh F. Kennedy y San Bernardino, mostraron que la falta comprensión de la suma de fracciones en los estudiantes están vinculados con el poco trabajo en el contexto continuo y discreto, dominando la falta de sentido que se le da al algoritmo desde la interpretación parte - todo donde el manejo incorrecto de los procesos algorítmicos es generado a partir de los esquemas aritméticos previos, ya que durante la primaria el estudiante ha profundizado sobre el conocimiento del número natural, la ruptura de la unidad no es objeto de discusión y mucho más su conceptualización.

Respecto al manejo algorítmico, el cual está ligado a la comprensión del concepto de suma de fracciones, en general los estudiantes presentan dificultad cuando las fracciones tienen distinto denominador, porque se adentra en otra perspectiva diferente al algoritmo común utilizado para sumar dos naturales, además de ello involucra procesos multiplicativos.

> Lógicamente, si el niño está manejando reglas sin ningún sentido para él, resulta bastante natural que a lo largo del tiempo, deje de utilizarlas y las sustituya por otros procedimientos más «naturales» o, que olviden o modifiquen algún paso en el algoritmo, convirtiéndolo así en un procedimiento erróneo. (Llinares y Sánchez, 1988, p.132).

Cuando los estudiantes vinculan la idea de fracción y su comprensión desde el modelo simbólico les impide entender las relaciones matemáticas implícitas (de donde viene o que justifica una manera particular de operar) que están detrás del algoritmo, ya que cuando se introducen para el trabajo en el aula se ve que no toman en cuenta la relación parte-todo, el manejo de los atributos no se considera como una consecuencia lógica del concepto sino como una simple mecanización sin sentido.

La suma de fracciones debería inducir a la compilación de los atributos de la fracción en su interpretación parte todo dotando de significado al algoritmo, es decir, poder establecer el correlato entre el trabajo a nivel de los símbolos y la representación gráfica en contexto continuo y discreto.

No hay un significado adecuado para el concepto si solo se tiende a profundizar con la simbología numérica, es indispensable tener en cuenta la representación gráfica o concreta.

Llinares y Sánchez (1988) indican que la enseñanza de la fracción se da a partir del contexto continuo referente a modelos de área y contexto discreto a partir de colecciones de objetos, así como su reconocimiento verbal. El estudiante debe a partir de la representación gráfica y establecer control simbólico, es decir, conectar esta representación mentalmente con la representación verbal y simbólica.

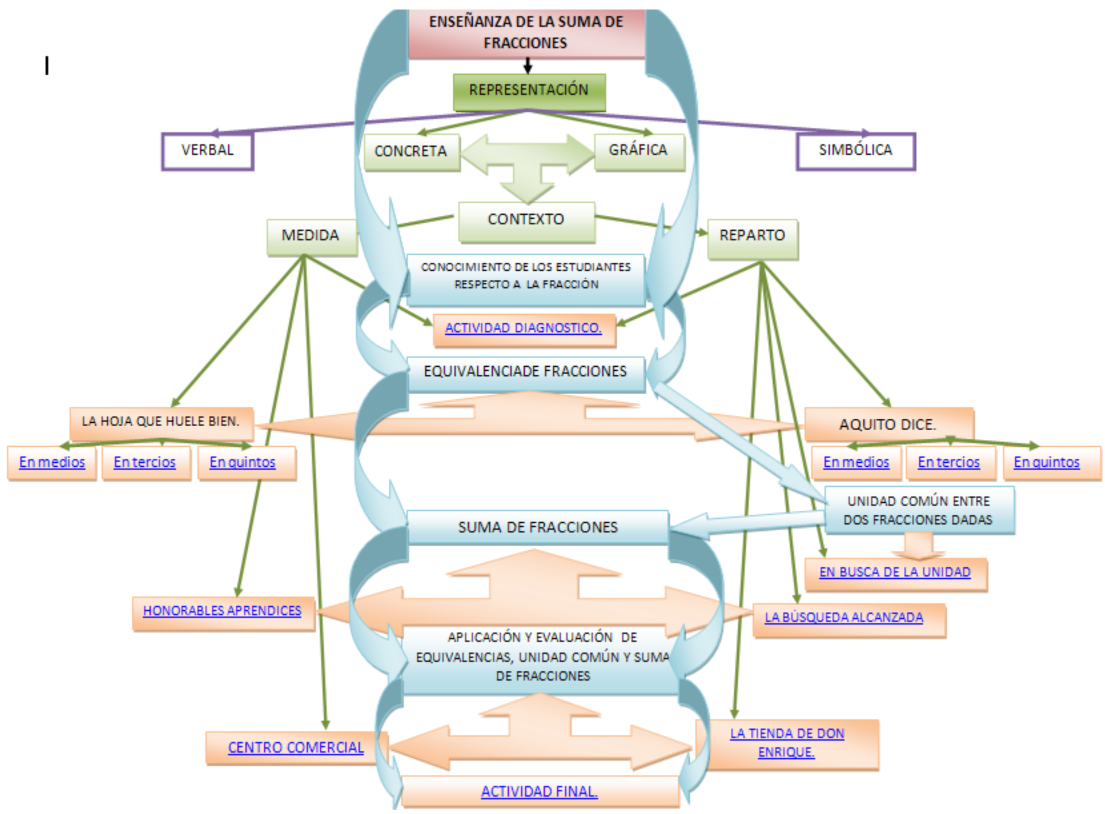
Por lo anterior, esta investigación se realiza con la intención de dar a conocer una mirada a la suma de fracciones a partir de la interpretación de la medida en un contexto tanto continuo como discreto, trabajando con hojas o fichas y sus representaciones gráficas, mediante de una secuencia de actividades.

Metodologia y análisis de datos

La presente propuesta de investigación se puede denominar de tipo cualitativo, ya que, se centra en la indagación, teniendo en cuenta las características y cualidades de un concepto determinado. De esta manera los datos se toman de los registros de las acciones y procesos de los estudiantes, dichos registros pueden ser escritos en protocolos donde se relate o describa el desarrollo de una acción del estudiante frente a una situación y se mira la reacción y formas de proceder, generando unas manifestaciones que son observables a partir de sus representaciones como palabras, gestos, iconos, gráficas, símbolos y signos, entre otros.

Se adoptó el estudio de caso como lo propone Stake (1995, Vasilachi, 2006), este se hizo seleccionando casos significativos sociales y culturales por su relevancia respecto al objeto de estudio, en este caso la suma de fracciones desde la interpretación de medida.

Mapa conceptual de actividades



(Mapa conceptual elaborado y diseñado por los autores de la propuesta).

El mapa conceptual muestra la secuencia de actividades de la investigación, en esta se parte de la interpretación de medida iniciando el trabajo en cada una de las actividades a partir de la representación concreta y gráfica primordialmente, pero también se presenta la correspondencia a la representación verbal y simbólica.

Al lado izquierdo de mapa se observan las actividades propuestas en contexto continuo y al lado derecho del mapa se observan las actividades propuestas en contexto discreto, en el cuadro azul se muestran los temas a tratar en cada una de las actividades iniciando con la indagación del conocimiento de los estudiantes respecto a la fracción a partir de la interpretación de medida en contexto continuo y discreto mediante la actividad llamada "actividad diagnostico". Se continua con el reconocimiento de las equivalencias de la fracción en medios, tercios y quintos a partir de la interpretación de medida, dando paso a la segunda actividad llamada "la hoja que huele bien" en contexto continuo y la tercera actividad llamada "Akito dice" en contexto discreto.

Luego se trabaja el reconocimiento del común de las partes de la unidad y la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto continuo, mediante la cuarta actividad llamada "honorables aprendices". Enseguida para trabajar la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto discreto, se requiere de una actividad diseñada exclusivamente para el reconocimiento del común de las partes de la colección en contexto discreto, dando paso a la quinta actividad llamada "en busca de la unidad" y continuando con el reconocimiento de la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto discreto mediante la sexta actividad llamada "la búsqueda alcanzada".

Por último se pretende evaluar todas las estrategias y conceptos que se profundizaron en las actividades anteriores sobre las equivalencias, el común de las partes de la unidad y la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida, mediante la séptima actividad llamada "proyecto Jamuel" en contexto continuo y la octava actividad llamada "la tienda de don Enrique" en contexto discreto. Finalmente se da a conocer una propuesta mediante una actividad diseñada para que los estudiantes relacionen la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida con el algoritmo, esta guía del estudiante no se aplicó debido a que esta propuesta final no hace parte de la investigación planteada.

Datos de la investigación

En contexto discreto para reconocer el común de las partes de la unidad, los estudiantes amplifican la colección correspondiente a la primera fracción al igual que la colección correspondiente a la segunda fracción, cuando el número de elementos correspondiente a las partes de la colección sea la misma para ambas fracciones los estudiantes encuentran el común de las partes de la colección.

Así mismo, los estudiantes para reconocer la suma de fracciones en contexto continuo, luego de hallar el común de las partes de la unidad, determinan en la unidad las partes tomadas correspondiente a ambas fracciones y de esta manera obtienen la suma entre las fracciones. Para evidenciar la suma de fracciones en contexto discreto los estudiantes, luego de hallar el común de las partes de la colección, establecen las partes tomadas de la colección de ambas fracciones y así determinan la fracción correspondiente a la suma.

A lo largo de las sesiones de clase se pudo evidenciar el avance a nivel conceptual y procedimental de los estudiantes frente a la noción de suma de fracciones a partir de la interpretación de medida, siendo muy enriquecedor tanto para los estudiantes como para nosotros el hecho de iniciar el trabajo con el uso de material tangible y con este evidenciar distintos atributos de la fracción, realizando la correspondencia a la representación gráfica, verbal y simbólica, sin necesidad de suministrarles definiciones, ni inducirlos a la mecanización del algoritmo.

Población de estudio

La investigación se realizó en Escuela Pedagógica Experimental, esta escuela se caracteriza por las investigaciones y propuestas educativas.

Este hecho permitió desarrollar la propuesta de investigación con total disposición por parte de profesores y estudiantes teniendo en cuenta las actividades características de la EPE como lo son “la formulación de proyectos, la configuración de grupos de estudio, el desarrollo de eventos y las actividades cotidianas, inmersas en el protagonismo individual y el juego,” Tomado de: epe.edu.co. Recuperado el 20 de febrero de 2010 en http://www.epe.edu.co/La-E-P-E-un-proyecto-cultural.

Los estudiantes con los cuales se desarrolló el estudio de caso se encuentran entre los 11 y 13 años de edad aproximadamente. Con características emocionales y familiares estables en general. Se realizó con los seis estudiantes seleccionados un seguimiento especial, para analizar los procesos puestos en juego de cada uno en las diferentes actividades propuestas teniendo en cuenta que “para la E.P.E, lo más importante es que las aproximaciones de niños y jóvenes al conocimiento, sean procesos colectivos, de especulación y de vivencias que les permitan construir un mundo y entender la existencia de múltiples realidades.” ¿Cómo procedió la investigación específicamente? Tomado de: epe.edu.co. Recuperado el 20 de febrero de 2010 en http://www.epe.edu.co/El-aspecto-pedagogico.

Conclusiones

Frente a las habilidades adquiridas en los estudiantes de grado séptimo, se puede afirmar luego del contraste de la actividad diagnostico y de cada una de las actividades con las actividades de evaluación, que los estudiantes durante el proceso de desarrollo de la secuencia de actividades fueron modificando y adquiriendo la noción de suma de fracciones a partir de la interpretación de medida.

En cuanto las actividades de evaluación los estudiantes lograron hacer uso de sus destrezas y habilidades en torno a la suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto continuo, logrando resolver cada una de las inquietudes. Así mismo, aplicaron el concepto de equivalencia, el común de las partes de la unidad y suma de fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto discreto, siendo notorio que a los estudiantes se les facilita más el trabajo con fracciones a partir de la interpretación de medida en contexto continuo.

Referencias bibliográficas

Escuela Pedagógica Experimental. (s.f.). *La E.P.E un proyecto cultural*. Recuperado el 20 de febreo de 2010, del http://www.epe.edu.co/El-aspecto-pedagogico

Guevara, J. (2006). *Significados otorgados a la noción de fracción en estudiantes de grados noveno, décimo y undécimo*. Monografía no publicada, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En C. Chamorro (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones. La relación parte todo*. Madrid, España: Síntesis.

Mora, L., Romero, J., Rojas, P., Rodríguez, J., Castillo, E., Bonilla, M. y Sánchez, N. (2006). Aspectos históricos y psicológicos de la multiplicación. En P.R. (Presidente), Memorias Séptimo Encuentro Colombiano De Matemática Educativa. (pp. 122-125). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Romero, J. y Segura, D. (1992). Las matemáticas en el aula: posibilidades de construcción significativa. *Revista Planteamientos De Educación*, *1*(3), 6-24.

LABORATORIO DE CIENCIAS: UN ESCENARIO PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
CICATA-IPN/UTVM; ESIME-IPN (México)
elitret@hotmail.com

Resumen. Actualmente se plantea la necesidad de que el alumno sea competente en matemáticas para en la resolución de problemas reales. Esta necesidad es más evidente en el nivel de Técnico Superior Universitario pues en su vida profesional y laboral dan solución a problemas técnicos donde se requiere hacer uso de las matemáticas. Razón por la cual se propone hacer uso del laboratorio de ciencias para establecer una situación problema a resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para el diseño de la situación se utilizó la fase didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias y para su análisis la Teoría de Situaciones Didácticas. En este documento se presentan los primeros resultados de la situación didáctica.

Palabras clave: matemáticas, matemática en contexto

Abstract. Nowadays, the need for students to be competent in mathematics when solving real life problems is raised. This need is even more evident in the case of students of the University of Superior Technicians, since their professional life is going to require their ability to solve technical problems, where maths is going to be used. That is why we propose to ude the science lab to establish a situation that should be solved using simultaneous linear equations with two unknowns. In order to design such a situation, the didactic stage of Matemática en Contexto de las Ciencias was used, and the Didactic Situations Theory implemented to analyze the outcomes. Here we present oru initial findings.

Key words: mathematics, mathematics in context

Introducción

Durante muchos años en el sistema educativo se consideró el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como una actividad ubicada en el aula, siendo el único espacio donde el que sabe, el profesor dota de conocimientos al que aprende, el alumno. Esta situación está cambiando y actualmente es común encontrar el interés por relacionar la enseñanza de las matemáticas con contextos reales a partir de "problemas contextualizados", "problemas del mundo real", "problemas relacionados con el trabajo" o "problemas situados" (Font, 2006). Este interés no es nuevo ni focalizado, pues a nivel mundial investigadores como Riodan & Noyse (2001) y Meyer y Diopulus (2002) están trabajando matemáticas con problemas contextualizados y se están publicando con el título de *Contemporary mathematics in contex, a unified approach* (Hirsch, et al., 2003), Freudenthal (1991), propone una enseñanza matemática realista. Estas líneas de investigación se ubican en el nivel básico y medio. Mientras que a nivel superior en México desde 1982, en el IPN se realiza trabajo con matemática contextualizada y se tiene una línea de investigación denominada Matemática en el Contexto de las Ciencias (Camarena, 2006).

En el nivel Técnico Superior Universitario la enseñanza en la que se considera el contexto (en este caso el laboratorio) es importante debido a que los que aprenden son estudiantes que en el ejercicio de su profesión requieren de habilidades y conocimientos que les permitan resolver problemas reales. Razón por la cual, se propone aprovechar como escenario el laboratorio de química para aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (en el quehacer profesional de referencia, difícilmente se hace uso de mayor número de incógnitas). Podría pensarse que en este nivel educativo los estudiantes dominan el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, dado que las han abordado con éxito desde secundaria y preparatoria, sin embargo la experiencia indica que no es así.

Para que el estudiante se apropie del conocimiento matemático: *sistemas de ecuaciones lineales*, se propuso una situación didáctica (Brousseau, 1986) con un alto contenido a-didáctico que permita por descubrimiento de conocimientos nuevos e integración de los que el alumno ya dispone la construcción del conocimiento de interés.

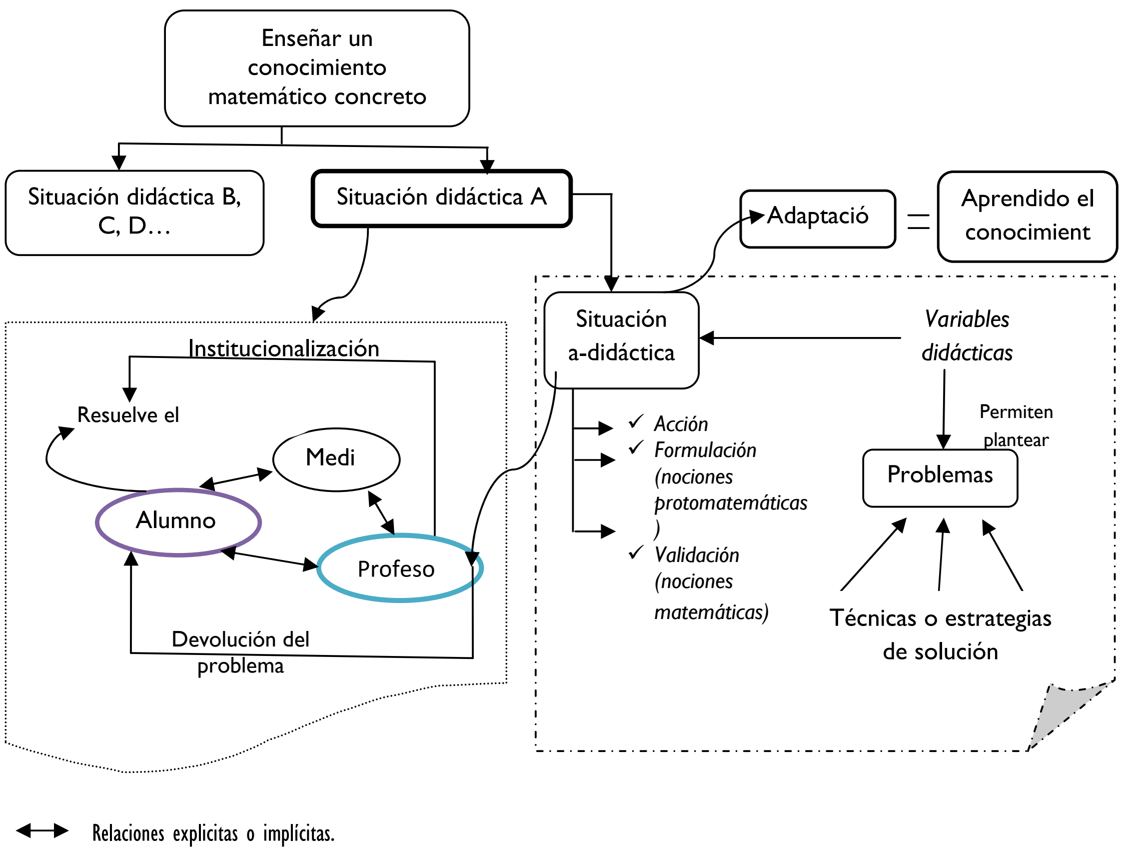


Figura 1. Teoría de situaciones didácticas.

Dicha situación didáctica tiene el objetivo explícito de que el estudiante aprenda a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a partir de problemas contextualizados, teniendo como escenario el laboratorio de química. Para alcanza dicho objetivo fue necesario utilizar la teoría de situaciones didácticas (figura 1) (Brousseau, 1986) pues permite analizar cómo funcionan éstas y cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Esta teoría, postula que cada conocimiento concreto debe poder "determinarse" mediante una o más situaciones matemáticas, cada una de las cuales recibe el nombre de situación matemática específica de dicho conocimiento.

En la definición de situación adidáctica interviene la noción de variable de una situación matemática, entendiéndose como aquellos elementos del juego formal que pueden tomar diferentes valores y que al hacerlo, provocan cambios modifican la estrategia óptima. Una variable de una situación adidáctica se denomina variable adidáctica si sus valores pueden ser manipulados por el profesor.

Si se considera que la investigación se ubica en el nivel de Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos, donde es necesario vincular a las ciencias básicas (caso específico matemáticas) con las áreas específicas-técnicas fue necesario adoptar como marco metodológico a la matemática en contexto, que corresponde a la fase didáctica de la Matemática en el Contexto de las ciencias. Esta estrategia didáctica se caracteriza por presentar conocimientos integrados a los alumnos a partir de una situación problemática de otras disciplinas (Figura 2), cuya característica principal es que se trata de problemas reales del área de estudio del alumno. La matemática en contexto toma el problema, lo resuelve e interpreta la solución en el mundo de la disciplina del contexto.

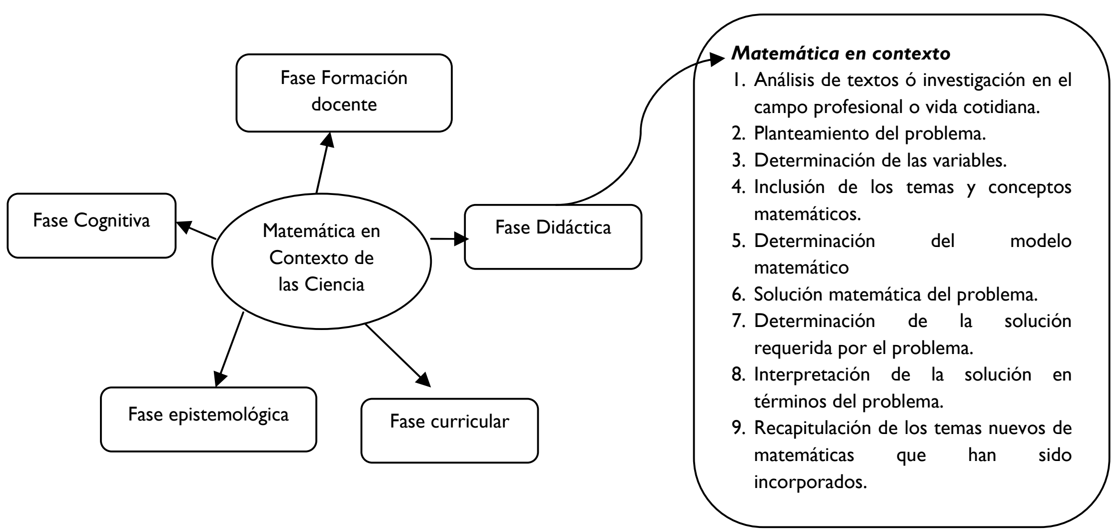
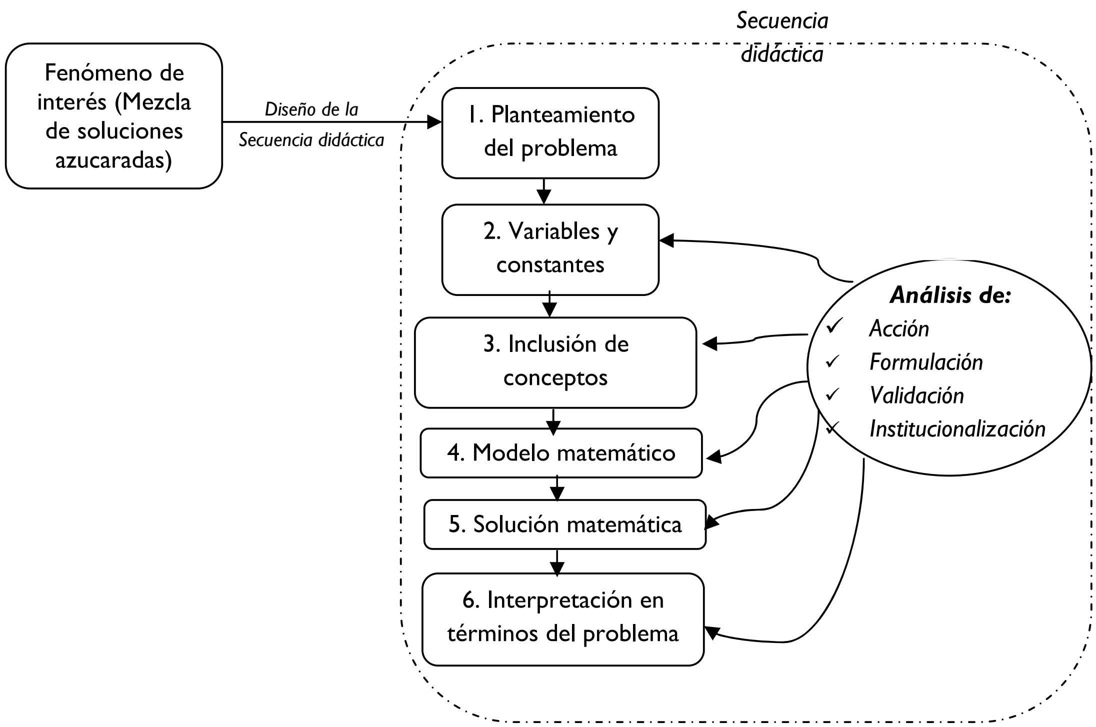


Figura 2. Marco metodológico: Matemática en contexto. Fuente: Camarena (2002).

Metodología (o métodos)

Para hacer uso del laboratorio de ciencias como escenario para aprender matemáticas fue necesario trabajar en dos etapas: a) Desarrollo de la contextualización, para presentar un problema contextualizado se realizó previamente una investigación con profesores del área técnica y egresados para determinar el objeto matemático que con mayor frecuencia se utiliza en el ámbito laboral y/o profesional, así como la razón de uso, encontrándose que repetidas veces se utilizan sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para problemas de mezclas. La contextualización se realizó en base a las etapas de la matemática en contexto (Camaranea, 2002), en cada una de ellas se observaron las situaciones de acción, validación, formulación e institucionalización (figura 3). Entonces, en la situación didáctica se plantea un problema matemático contextualizado, teniendo como escenario el laboratorio de ciencias. El problema consiste en preparar dos soluciones azucaradas al 35 y 60% y comprobar su concentración a través del refractómetro. Una vez que se tienen preparadas se solicita que a partir de ellas se realice una mezcla para tener 100 mL de solución azucarada al 50%, se debe comprobar la concentración con el uso del refractómetro. La situación didáctica se desarrollo con 15 estudiantes organizados en equipos de tres y se describe en términos de las decisiones que los alumnos tomaron en cada momento y de las diferentes estrategias que adoptaron para llegar al estado final (solución del problema).



1,2,…,6 Etapas de la matemática en contexto.

Figura 3. Metodología utilizada para el desarrollo de la propuesta didáctica.

Resultados

La situación didáctica presentada corresponde a un problema de mezclado de soluciones azucaradas a resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Permitió que los alumnos incorporaran sus conocimientos previos para la toma de decisiones en las diferentes situaciones y llegar al resultado final. En seguida se presenta la secuencia didáctica y por espacio únicamente se muestran los resultados obtenidos de la observación de un equipo.

Situación didáctica

Utilizando como escenario para la situación didáctica al laboratorio de ciencias se planteó a cada uno de los equipos la situación mostrada en la tabla 1. En una situación didáctica determinada se debe identificar el estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado en la situación. Es entonces cuando se hacen explícitas las reglas que permiten pasar de un estado a otro. En esta investigación, la situación se describe en términos de las decisiones que los alumnos pueden tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que adoptan para llegar al estado final.

Tabla 1. Situación propuesta a los equipos.

Situación didáctica	Descripción
1	Preparar 100 mL de solución azucarada al 35%, verificar su concentración con el refractómetro.
2	Preparar 100 mL de solución azucarada al 60%, verificar su concentración con el refractómetro.
3	A partir de las soluciones azucaradas preparadas preparar 100 ml de solución azucarada al 50%.

En relación con la situación 1 y 2, el equipo no tuvo problemas para la realización de la actividad 1 (tabla 2).

Tabla 2. Identificación de las situaciones en la preparación de soluciones azucaradas al 35 y 60%.

Situación	Descripción	Estrategias
Acción	Los integrantes del equipo interactúan y toman decisiones para organizar su actividad de resolución del problema.	*"Se trata de la preparación de una solución de concentración porcentual, hay que hacer cálculos, pesar, transferir a un vaso de precipitado, añadir el solvente (agua destilada) y verificar la concentración con el refractómetro. Entonces vamos a ver que hacemos cada uno."*
Formulación	Los alumnos se comunican	*"Por cada 100 mL de solvente será necesario*

	entre ellos para determinar las actividades que a cada uno de ellos corresponden. Modifican su lenguaje utilizado habitualmente para utilizar el lenguaje técnico y poder solucionar el problema.	*colocar 35 g de soluto, entonces se trata de una solución azucarada masa-volumen (m/v), por lo que hay que pesar esa cantidad en la balanza granataria, transferirla y completar con 65 mL de agua destilada. Debemos comprobar la concentración colocando una gota de la solución en el refractómetro.*
Validación	Los alumnos se deben convencer de la validez de las afirmaciones que se hacen.	*"si cada grado brix (°Bx) corresponde a un gramo de sacarosa, entonces la lectura deberá ser de 35°Bx, lo que significará que hemos puesto la cantidad necesaria de azúcar para la concentración pedida. Debemos tener cuidado al momento de pesar el azúcar y transferirlo para que no falte o sobre y quede bien la concentración."*
Institucionalización	Los alumnos del equipo deben llegar a una convención en relación con las etapas anteriores.	*"Se pude comprobar la concentración de una solución azucarada utilizando para ello el refractómetro y con eso se tiene la confianza de qué se cumple con lo pedido".*

Durante la realización de la situación: A partir de las soluciones azucaradas al 35% y 60% preparar 100 mL de solución azucarada al 50%, se pido a) Determinar las variables y constantes; b) Establecer el modelo matemático para resolver la situación problema; c) Resolver el modelo matemático y d) Interpretar la solución en términos de la situación. Incorporando en esta etapa las fases de la matemática en contexto y a su vez analizando los tipos de situaciones. Los resultados se muestran en la tabla 2.

Tabla 3. Tipos de situaciones en relación con las etapas de la matemática en contexto.

Etapa de la matemática en contexto	**Situación**			
	Acción	**Formulación**	**Validación**	**Instituciona-lización**
Determinación de las variables y constantes.	Los miembros del equipo discuten que es lo que cambia (variables) y que es lo que no cambia en la situación dada.	Identifican que para la situación dada: a) cambian los mL a tomar de solución al 35 y 60%. b) no cambia la concentración pedida (50%) ni la concentración de las soluciones con que deben trabajar (35% y 60%).	Después de analizar los datos de la situación verifican que las concentraciones y el volumen pedido no cambia y que lo que cambia es el volumen a añadir de la concentración al 35 y 60%.	Se asume que se deberá trabajar con la concentración y el volumen tanto de las soluciones dadas como de la requerida.

Etapa de la mat. en contexto	**Situación**			
	Acción	**Formulación**	**Validación**	**Instituciona-lización**
Modelo matemático	Los miembros del equipo discuten cómo resolver la situación. Plantean las siguientes estrategias. a) Algunos alumnos proponen ir mezclando volumenes de cada una de las soluciones y verificar su concentración con el refractómetro. b) Otros señalan que como están en matemáticas deben utilizar alguna estructura para poder resolver la situación.	Al analizar la propuesta "a" coinciden en que es poco probable que les de resultado porque cuántas combinaciones tienen que hacer para tener los 100 mL al 50%, indican que es probable que la solución se termine antes de tener la combinación adecuada. Después del análisis anterior se preguntan que estructura matemática puede resolver la situación.	Al optar por utilizar una estructura matemática, inician con una ecuación de primer grado, percatándose que requieren de un sistema porque hay dos incógnitas a)el volumen y b)la concentración. Con una sola ecuación no pueden resolver la situación. Después de varios intentos logran obtener el modelo matemático (figura 4)..	El equipo asume que el modelo matemático que permite resolver la situación está dado por: $x + y = 100$ $0.35x + 0.60y = 50$
Solución del modelo matemático	Recuerdan que hay diferentes métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y deciden utilizar el de igualación.	Proceden a resolver el modelo matemático (figura 5).	Para demostrar que los resultados matemáticos obtenidos satisfacen la situación problema, proceden a comprobar los resultados (figura 6).	Establecen que los problemas de mezclas pueden ser satisfactoriamente resueltos mediante un sistema de ecuaciones lineales.
Interpretar la solución	En la definición de variables se discute que A corresponde a la solución al 35% y B representa la de 60%.	En función de los resultados obtenidos determinan que se requieren 40 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60% para tener 100 mL de solución azucarada al 50%.	Con los datos obtenidos proceden a realizar la mezcla y utilizando el refractómetro verifican la concentración que es del 50%.	Consensan que para la solución de problemas de mezclas es posible resolverlos mediante sistemas de ecuaciones lineales y comprobar matemáticamente la solución. Si están bien planteados los problemas el resultado es

				confiable, lo cual se puede verificar si se trata de soluciones azucaradas con un refractómetro.

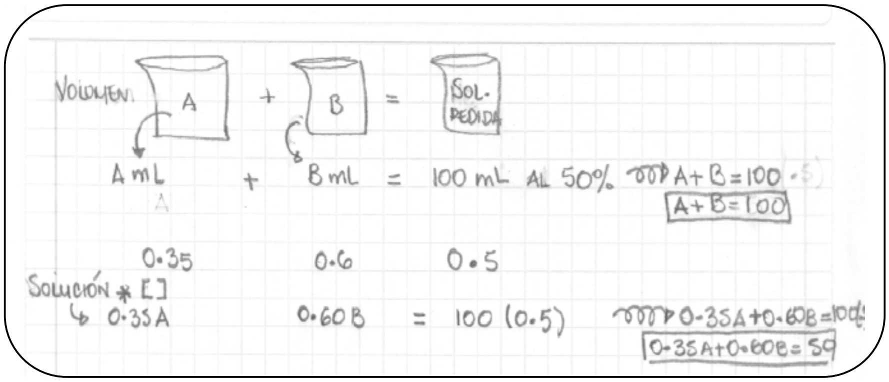


Figura 4. Obtención del modelo matemático.

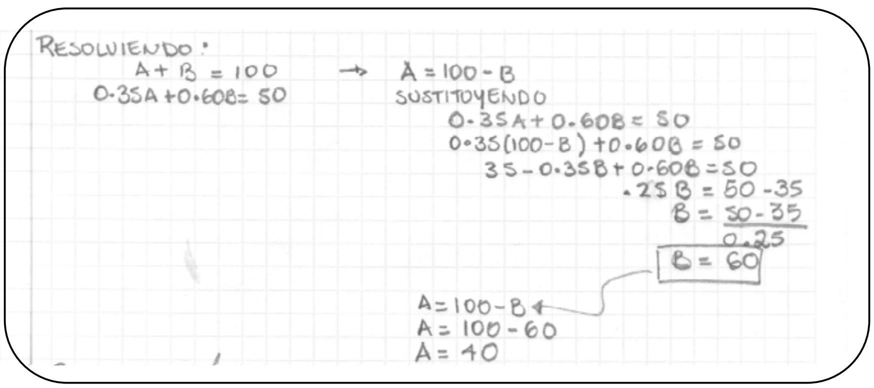


Figura 5. Resolución del modelo matemático de la situación problema propuesta.

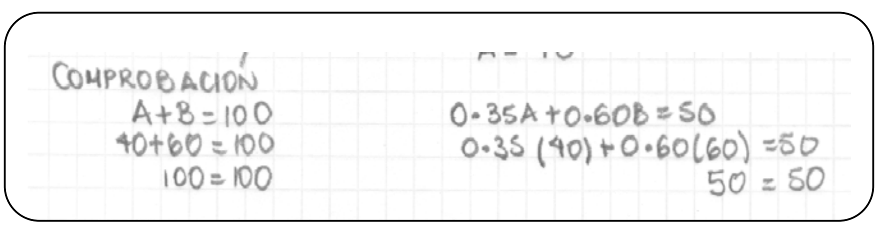


Figura 6. Comprobación de la solución matemática (situación de validación).

Es necesario destacar que durante el desarrollo de la actividad el equipo analizado, logra pasar por cada una de las situaciones durante las etapas de la matemática en contexto. Al final de la sesión el profesor interviene para formalizar el conocimiento, dándose la ultima etapa de institucionalización del conocimiento pues se indicar que el problema de mezclas de soluciones puede hacerse mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Conclusiones

El presente trabajo permitió las siguientes conclusiones:

- Es posible utilizar escenarios diferentes al salón de matemáticas para fomentar el aprendizaje de las mismas.
- El presentar problemas contextualizados o reales al estudiante constituyen una herramienta para la enseñanza de las matemáticas.
- Mediante el análisis de las situaciones en la situación didáctica es posible evaluar el avance cognitivo de los estudiantes en relación a un concepto en particular.
- Es necesario presentar a los estudiantes una matemática novedosa fuera del salón de clases sobre todo con problemas del área de su interés profesional para que sean competentes en problemas de carácter práctico.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986).Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recgerches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Camarena, G. P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica*. 10(04). 167-173.

Freudenthal , H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. Cuadernos de pedagogía, 355, 52-54.

Hirsch, C.R., Coxford, A.F., Fey, J.T. & Schoen, H.L. (2003). *Contemporary mathematics in context:a unified approach*. USA: Glencoe/McGraw-Hill.

Meyer, M. R. & Diopoulos, g. (2002). Anchored learning in context. *Mathematics Teaching in the Midfle School* 8(1),16.

Riodan, J.E. & Noyce, P. E. (2001). The impact of two standards-bases mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(4), 368.

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA APLICAR MÉTODOS PARTICIPATIVOS EN UN MODELO PEDAGÓGICO CENTRADO EN EL APRENDIZAJE

Carmen Luisa Méndez Fabret, Juan Raúl Delgado Rubí, Marelis Virgen Pérez García
Universidad de Las Ciencias Informáticas (Cuba)
menlui@uci.cu

Resumen. En el presente trabajo se expone un sistema de actividades diseñado con el objetivo de incorporar los métodos de enseñanza-aprendizaje participativos en la preparación y desarrollo de las clases de matemática en un modelo de formación centrado en el aprendizaje. El sistema cuenta con un contenido cuidadosamente seleccionado y acciones para: contribuir a interpretar la esencia, las características y los requerimientos de los métodos en estudio; elaborar sistemas de orientaciones previas y preparar clases empleando algún método participativo previamente seleccionado. La metodología se basa en la participación activa de los profesionales participantes, a partir de las reflexiones y valoraciones de su propio quehacer pedagógico.

Palabras clave: métodos participativos, enseñanza, aprendizaje

Abstract. The present work describes a system of activities designed with the objective of incorporating participative methods of teaching and learning in mathematics lessons in a training model focused on learning. The system features a carefully selected content and actions, to contribute to interpret the essence, characteristics and requirements of the methods under study, to elaborate preliminary guidance systems and prepare lessons using participative methods previously selected. This methodology is based on active participation of the professionals involved, taking as the starting point, the reflections and evaluations of their own pedagogical practice.

Key words: Participative methods, teaching, learning

Introducción

La universidad de hoy y especialmente la del futuro tienen la ardua responsabilidad de transmitir y generar nuevas y cada vez más innovadoras formas de conocimiento.

Según las bases y principios del proceso de formación centrado en el aprendizaje (PFCA) en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) "*Un mundo de cambios acelerados requiere de nuevos aprendizajes, y la posibilidad de disponer de múltiples saberes alternativos en cualquier dominio del conocimiento humano, plantea la necesidad de lograr una integración y relativización del conocimiento que no puede seguir siendo sustentada en la tradicional forma de aprender por simple reproducción*." (Documento oficial, 2008)

Lo anterior requiere un cambio de paradigma, en el cual, el rol del estudiante y el profesor deben ser distintos a como ha sido hasta hoy, el primero ha de tomar el centro del proceso de enseñanza aprendizaje y el segundo ejercer el papel de tutor, de guía y orientador del mismo (Casas, 2005). No se puede seguir pensando como hace años atrás, se impone revolucionar la forma de enseñar y de aprender.

Un claustro integrado mayormente por profesores muy jóvenes, que poseen poca experiencia en el tema de la metodología para impartir clases, y que las experiencias en un PFCA, son aún escasas, se hace necesario ubicar en un lugar cimero su capacitación. De ahí surgió la idea de elaborar actividades que pudieran contribuir a la preparación de los docentes sobre los métodos pedagógicos requeridos por este modelo, a saber, aquellos que propicien el diálogo, el debate, el ejercicio crítico con la argumentación necesaria y el uso consciente de recursos de enseñanza-aprendizaje en la concepción y desarrollo de las actividades educativas.

El presente trabajo tiene el objetivo de exponer un sistema de actividades, diseñado para contribuir a incorporar los métodos participativos en la preparación y desarrollo de las clases en un modelo pedagógico donde el PFCA.

Desarrollo

Un requerimiento de la educación en la actualidad es desarrollar en los estudiantes cualidades y actitudes para que se desempeñen como sujetos activos, independientes, capaces de adquirir por sí mismos nuevos conocimientos que le posibiliten participar creadora y positivamente en el mejoramiento de la sociedad en que vive. (Guzmán, 2002)

Pero ¿Cómo el educador puede contribuir desde su propia práctica a lograr este magnífico propósito? ¿De qué manera puede concretar esas acciones verdaderamente desarrolladoras de las nuevas cualidades y actitudes que se desean formar? ¿Cómo conducir el proceso de enseñanza-aprendizaje para lograr mayor eficacia y eficiencia en la labor de incorporar estas prácticas en el actuar del estudiante?

Las respuestas a esas interrogantes tienen muchas aristas, una de ellas conduce hasta los métodos, estrategias y procedimientos a emplear en el accionar docente.

Las investigaciones señalan que entre los métodos de enseñanza y aprendizaje, los que más aportan a un modelo, que tiende a jerarquizar la actividad del estudiante, son los métodos participativos. Los métodos participativos comprenden las diversas técnicas participativas y los métodos activos, entre los cuales se encuentran, los problémicos. Según (Castellanos, Ojalvo y Viñas, 1995) del Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES) de la Universidad de La Habana, son estos los métodos de enseñanza que ofrecen las mayores ventajas para lograr una práctica transformadora y creadora.

Poder guiar al estudiante, incidir en el desarrollo de sus habilidades metacognitivas para que aprenda a monitorear su trabajo, auto controlarlo, retroalimentarse, regular su forma de pensar y actuar, es una labor bien difícil pero realmente muy importante y necesaria. En esta tarea el éxito del docente va a estar condicionado por el dominio que posea de los métodos de enseñanza-aprendizaje y de la adecuada selección y aplicación de los mismos.

La propuesta de un "sistema de actividades para aplicar los métodos participativos" estaría encaminada a identificar las características generales y los requerimientos esenciales a observar por los actores del proceso como paso previo a su utilización. A partir del diseño de actividades de aprendizaje que deben realizarse en las asignaturas donde se aplique el modelo pedagógico centrado en el aprendizaje se puede ilustrar el actuar del docente en la conducción de la actividad y promover el debate y la reflexión de los participantes, en torno a cómo puede incidir el uso de los métodos y técnicas participativas en la creación de ambientes positivos para que lo más importante pase a ser lo que se aprende a través de la construcción y apropiación activa y consciente de los conocimientos, de las habilidades, de las actitudes y formas de actuación características del estudiante en el marco de ese modelo.

Forma parte de la concepción de la propuesta propiciar que el docente se involucre en la preparación de actividades de la asignatura que imparte haciendo explícito tanto el método que ha seleccionado para usar en su clase como las ideas previas que permitirán dar la orientación al estudiante sobre la actividad que se pretende desarrollar.

Juegan un papel fundamental identificar las aportaciones didácticas que puedan contribuir a presentar las actividades en forma clara, flexible donde se dé facilidad y se tienda a motivar al estudiante a aceptar el reto que representa asumir su propio aprendizaje. El diseño de las actividades atendiendo a las categorías didácticas y las indicaciones metodológicas está concebido como a continuación se presenta.

Objetivo general: Aplicar los métodos participativos en la preparación y desarrollo de las clases en un modelo pedagógico donde el proceso de formación es centrado en el aprendizaje de los estudiantes.

Contenidos

Sistema de Conocimientos:

- Modelos de formación. Comparación entre los principales rasgos distintivos del proceso de formación centrado en la enseñanza (PFCE) y el PFCA.
- Métodos de enseñanza. Métodos activos y metodologías educativas. Reflexión como método general del aprendizaje activo. (Huber, 2008)
- Métodos Participativos. Los métodos de enseñanza y aprendizaje mutuos
- Métodos y técnicas que propician la asimilación de conocimientos.
- Problémicos: Exposición problémica; Conversación heurística; Búsqueda parcial.

- Aplicación de los métodos de enseñanza-aprendizaje en un PFCA: Diseño de actividades. Elaboración de sistemas de orientaciones previas.

Sistema de habilidades:

- Identificar las diferencias esenciales entre el modelo de formación tradicional y el PFCA.
- Comparar las características de ambos modelos y valorar las condiciones para su aplicación en la asignatura.
- Interpretar la esencia de los métodos de enseñanza-aprendizaje en estudio y aplicarlos en la preparación de las clases
- Seleccionar el método participativo a emplear en correspondencia con el tipo de actividad y las categorías didácticas.
- Crear condiciones previas y adecuar el método participativo seleccionado a estas.
- Preparar clases de la asignatura que imparte aplicando un método participativo seleccionado.
- Elaborar el sistema de orientaciones previas o secuencia de tareas.
- Aplicar métodos participativos en la elaboración de actividades educativas.

Sistema de valores:

- Fomentar el compromiso con el éxito del modelo pedagógico donde el proceso de enseñanza-aprendizaje es centrado en aprendizaje como consecuencia de dominar la aplicación de los métodos que lo favorecen.
- Motivar a partir del conocimiento más profundo y la valoración adecuada de los elementos positivos del modelo.
- Desarrollar la responsabilidad, sobre la base de la interiorización y convencimiento de la importancia del rol de orientador y guía que asume el docente en este modelo.
- Estimular la creatividad a partir de valorar la clase como el principal producto científico y creativo que elabora el profesor.

Métodos

La metodología se basa en la participación activa de los profesionales participantes, a partir de las reflexiones y valoraciones de su propio quehacer pedagógico. Serán usados los mismos métodos participativos y enfoque del modelo pedagógico donde el PFCA**,** a saber:

De discusión. De reflexión, tanto en pequeños grupos como en plenaria. Técnica Rejilla. Panel. De situaciones. Casos. Problémicos (Exposición problémica, Conversación Heurística, Búsqueda parcial conocido también como Descubrimiento Significativo).

Medios:

- PC para la presentación de las actividades mediante PPTs y además para la revisión de documentos en formato digital, Videos etc.
- Máquina repositorio para guardar y dar servicio de la bibliografía con que se cuenta.
- Correo electrónico para el envío de información y tareas orientadas y el uso de los mensajes de difusión del jabber para los temas a debatir.
- Entorno Virtual Aprendizaje.

Formas

Semipresencial: se desarrollarán 2 actividades presenciales con una duración de 2 horas cada una y por cada hora presencial, 3 horas inducidas, para un total de 16 horas que se emplearán en la realización del sistema de tareas previamente orientadas.

Evaluación

Será de forma participativa a través de trabajos que presenten y preparen los asistentes y la realización de valoraciones críticas acerca de materiales que se lleven a discusión y de ejemplos prácticos de clases preparadas donde se muestre cómo aplicar e implementar los métodos en estudio. Aplicación de test para recoger las opiniones positivas, negativas, e interesantes (PNI), que faciliten el control y regulación del sistema de actividades.

Indicaciones Metodológicas

La estructura de cada actividad sigue el mismo modelo ya descrito para el sistema; los objetivos como categoría rectora en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Zilberstein, 2006) y a continuación las restantes categorías didácticas en forma desplegada.

La primera actividad inicia con un test (diagnóstico) para conocer la preparación inicial de los participantes y adecuar las actividades a esa situación inicial. Mediante el intercambio y entrevistas se procede a investigar las expectativas de participación en actividades como las que se están proponiendo.

Se plantean tareas para involucrar a los participantes, para propiciar su intervención de forma reflexiva, activa y crítica en la adquisición del contenido, es lo mismo que debe lograr en el salón de clases con sus estudiantes. Las actividades junto a la bibliografía básica y otros materiales considerados como recursos de aprendizaje están ubicadas en un portafolio al que tienen acceso todos los participantes.

Las actividades están preparados sobre el contenido de las asignaturas de Matemática, específicamente de Matemática1 (M1) para ingeniería donde se imparte los temas de Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones reales de una variable y las Matemáticas Discretas por ser las que ya se encuentran aplicando el programa rediseñado para los requerimientos del modelo de enseñanza aprendizaje centrado en el aprendizaje.

Elaboración de sistemas de orientaciones previas que guíen los actores del proceso

Para cada clase se ha elaborado un sistema de acciones o indicaciones (tareas) para compulsar y lograr que cada participante pueda avanzar: Ello permite delimitar cuáles serán las acciones a realizar por el profesor y cuáles ha de realizar el estudiante en cada tarea, y qué recursos necesita, es a lo que se denomina secuencia de orientaciones previas, su función fundamental es guiar la actuación de los actores del proceso durante la actividad educativa. Una muestra de algunas tareas que se realizan durante el taller es la siguiente:

Tarea 2

Los estudiantes	El profesor
a) Elaborar un resumen en el que precise la definición, las características generales y los requisitos para la selección y aplicación de los métodos participativos en una clase. (Puede consultar el libro *Los métodos participativos ¿una nueva concepción de la enseñanza?*. Capítulo 4. Métodos y técnicas participativas en el proceso de enseñanza. Página 61 de las autoras (Castellanos, Ojalvo, Viñas, 1995).	Orienta crear los equipos. Revisa la calidad de los resúmenes que se van elaborando.
b) El resumen con las ideas y conclusiones más importantes de los aspectos estudiados en a) y comparta con sus colegas la exposición resumida.	Dirige la discusión de los resúmenes elaborados

Para la próxima actividad se orienta realizar:

Tarea 4

Los estudiantes	El profesor
Seleccionar un tema y hacer la descripción sobre cómo elaborar una clase (referirse a todas las categorías didácticas) donde pueda aplicar una metodología participativa. Explicar cómo elaborar la secuencia de indicaciones sobre las acciones del profesor y del estudiante. (Puede consultar el libro *Los métodos participativos ¿una nueva concepción de la enseñanza?*. Capítulo 4. Métodos y técnicas participativas en el proceso de enseñanza. . Página 105 de las autoras (Castellanos, Ojalvo, Viñas, 1995).	Revisa la actividad elaborada
Presentar la actividad diseñada y someterla al análisis critico de los demás	Dirige la discusión de los

participantes.	resúmenes elaborados

En la tarea seis se indica elaborar una clase de la asignatura que imparte utilizando metodología participativa. Un ejemplo de la misma es el que se presenta

Aplicación de los métodos de enseñanza-aprendizaje en un PFCA

A modo de ejemplificar se presenta una actividad de la asignatura M1 que ha sido seleccionada para la elaboración y presentación de la siguiente actividad práctica.

En el estudio del tema de Límite la primera actividad tiene una importancia especial; con ella se crean las bases para la asimilación del concepto sobre el cual se sustenta el desarrollo posterior del tema y en gran medida del cálculo diferencial. Las características de este tema ofrecen condiciones favorables para usar de manera intensiva y sistemática diferentes recursos que estimulan la participación activa de los estudiantes. Esta clase se ha preparado para su impartición con el uso de la técnica de Rejilla.

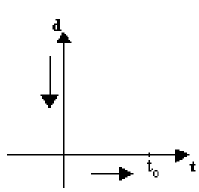
Para el desarrollo de la clase se orienta el análisis de tres situaciones problémicas que permiten caracterizar el proceso de límite que en ellas se describe.

Situación problémica 1

Un viajero observa en la pizarra electrónica de la estación, la hora y la distancia a la que se encuentra el tren que espera. Analizar la relación que se establece entre el tiempo de llegada del tren y la distancia que lo separa de la estación.

Los estudiantes deben disponer del tiempo necesario para realizar el análisis de la situación problémica, durante este tiempo el profesor indica o sugiere:

- El uso de preguntas como: ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?
- Realizar consideraciones: asumir como tiempo cero el momento en que el hombre mira la pizarra por primera vez; que el tren se mantiene en marcha.
- Designar las magnitudes con variables: Sea t el tiempo, t_0 el tiempo de llegada y d la distancia.
- Hacer una figura de análisis.



Otras preguntas pueden ser:

¿Qué características pueden observarse en el proceso que describe la situación problémica?

¿Cómo son las magnitudes que intervienen en el proceso? Hacer notar que intervienen magnitudes variables

¿De qué tipo es la relación que se establece entre las magnitudes del problema?

La distancia depende del tiempo $d = d(t)$. Hacer notar que la relación es funcional

El tiempo aumenta la distancia disminuye. Hacer notar que la relación es de causa y efecto

¿Hacia dónde tienden las magnitudes del proceso?

Cuando el tiempo t esté muy próximo a tiempo t_0 la distancia d estará muy próxima a 0

Cuando el tiempo $t \to t_0$ la distancia $d \to 0$. Hacer notar que el proceso es de "convergencia"

Cuando el tiempo $t = t_0$ la distancia $d(t) = 0$. Hacer notar que la convergencia es a un valor real

¿De cuántas formas podemos acercarnos al punto t_0?

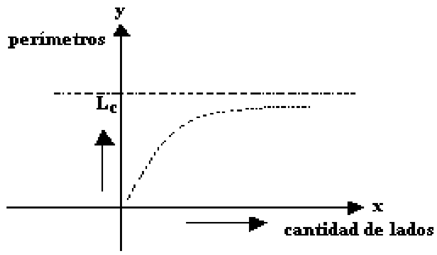
Esta relación sólo puede establecerse por la izquierda de t_0

¿Cómo pudiéramos plantear el problema utilizando una expresión más breve? $\lim_{t \to t_o} d(t) = 0$

Situación problémica 2

Considere una circunferencia de radio R y la sucesión formada por los perímetros regulares de n lados inscritos en esta circunferencia. Compare la longitud de la circunferencia con el perímetro del polígono cuando el número de lados del polígono aumenta

Análisis: Puede construirse una figura donde se represente gráficamente la relación entre la cantidad de lado del polígono y la longitud de la circunferencia



L_c longitud de la circunferencia; p perímetro; x número de lados

Cuando el número de lados aumenta infinitamente el perímetro p tiende a ser igual a la longitud de la circunferencia.

Aquí podrán identificar las características específicas de esta situación problémica como son:

- Que las x crezcan infinitamente significa que estas se "acerquen" a un punto muy alejado del origen de coordenadas (∞ punto impropio).
- El perímetro del polígono inscrito sólo sería igual a la longitud de la circunferencia mediante un proceso infinito.
- Cuando la variable x crece infinitamente el perímetro del polígono se acerca a un punto que es la longitud de la circunferencia.

En forma abreviada podría expresarse que el $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = L_c$

De forma análoga se procede con la tercera situación problémica planteada a los estudiantes. Posteriormente puede pedirse a los estudiantes hacer la descripción del concepto de límite y formular definiciones no formales de este concepto. Transcurrido el tiempo asignado para el análisis se realiza una sesión con la participación de todos los estudiantes y se exponen las conclusiones a las que se arriban (resumen de las características comunes a las tres situaciones problémicas). El profesor al estimular el debate propicia que los estudiantes expongan y argumenten sus ideas que establezcan analogías y busquen las diferencias entre las situaciones problémicas, ejemplo ilustra el uso de una técnica participativa para obtener un concepto. De esta forma se muestra la participación activa que tiene el estudiante en este proceso y la guía del profesor para el logro de este objetivo.

Conclusiones

Ha quedado elaborado un sistema de actividades que contribuye al conocimiento de los métodos participativos y la importancia de su aplicación en un modelo pedagógico donde el PFCA como el que se implementa en la UCI. El sistema de actividades así concebido cuenta con el diseño de un sistema de contenidos que comprende los conocimientos, las habilidades y los valores, así como las indicaciones metodológicas que contribuyen a desarrollar en los participantes la preparación adecuada para usar distintas técnicas, estrategias y métodos como una herramienta ideal para ejercer acciones transformadoras en aras de lograr actitudes, valores y conductas morales en los estudiantes acordes con este modelo. Desde el punto de vista práctico el sistema de actividades le ofrece al docente un espacio donde actualizar sus conocimientos y compartir sus experiencias de aula. Además le brinda la posibilidad real de someter a un análisis crítico la preparación de sus actividades, lo que se traduce en poder llevar al aula un producto mejor elaborado.

Referencias bibliográficas

Calderón, R. y Hernández, L. (2005). *Didáctica de la Matemática para la ingeniería*. La Habana: Universitaria, Universidad de La Habana.

Casas, M. (2005). Nueva universidad ante la sociedad del conocimiento. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento 2(2),* 1-18

Castellanos, A.V., Ojalvo, V. y Viñas, G. (1995). Métodos y técnicas participativas en el proceso de enseñanza. En CEPES (Ed). *Los métodos participativos ¿una nueva concepción de la enseñanza?* (pp. 61-133). La Habana: Editorial Universitaria.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación 43*, 19-58

Horruitiner, P. (2006). *La Universidad Cubana: El Modelo de Formación*. La Habana: Félix Varela.

Huber, G. (2008). Aprendizaje activo y metodologías educativas. *Revista de Educación, número extraordinario 2008*, 59-81

Mazario, I. (2002). *La resolución de problemas en Matemática I y II de la carrera Agronomía*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Matanzas. Cuba.

Universidad de las Ciencia Informáticas. (2008). *Bases y principios del proceso de enseñanza-aprendizaje centrado en el aprendizaje*. (Documento oficial).

Zilberstein, T. (2006). Categorías en una didáctica desarrolladora. Posición desde el enfoque histórico-cultural. En M.E. de la Vega (Ed). *Preparación Pedagógica integral para profesores integrales* (pp. 33-43). La Habana: Félix Varela.

LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN PRIMARIA

Elisa A. Mendoza González, Roberto M. Bula M., Carmen C. Rodríguez M.
Universidad de Panamá (Panamá)
emendoza2729@gmail.com

Resumen. El desarrollo de la didáctica de la Estadística requiere de considerables esfuerzos que conlleve no sólo a la motivación de alumnos (as) y maestros (as) en el aprendizaje significativo de la Estadística y la Probabilidad, sino también a la implementación de estrategias decisivas por las autoridades educativas con el fin de contribuir al fortalecimiento de la calidad de la enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Probabilidad desde los primeros grados. Los aspectos desarrollados en esta investigación, tratan sobre la experiencia de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad a maestros de educación básica general, basados en la metodología Estadística y el desarrollo de textos como recursos didácticos para maestros (as), así como el texto de actividades para los alumnos y las alumnas de educación básica general.

Palabras clave: metodología, enseñanza, estadística, probabilidad

Abstract. The development of the teaching of statistics requires considerable effort that involves not only the motivation of students and teachers in the meaningful learning of Statistics and Probability, but also the implementation of critical strategies for the education authorities to help strengthen the quality of teaching of Mathematics, Statistics and Probability from the earliest grades. The main aspects of this research, dealing with the experience of the teaching of statistics and probability to basic general education teachers, based on statistical methodology and the development of textbooks and teaching resources for teachers (as), and the text activities for students of general basic education.

Key words: methodology, education, statistics, probability

Introducción

En los últimos años el desarrollo de la ciencia y la tecnología se ha dado de una manera acelerada y de cambios importantes en todos los contextos, económico, social, cultural. En el plano de la educación y la preparación de las nuevas generaciones para enfrentar los nuevos retos, surgen importantes interrogantes y desafíos, así como todo un marco de incertidumbre, en donde el éxito para el desarrollo de los países y de las regiones depende totalmente, del actuar del hoy pensando en el mañana.

En las cuestiones que tocan el componente curricular, se deben considerar aspectos fundamentales como, ¿qué se debe enseñar?, ¿qué elementos metodológicos se deben incorporar?, ¿qué competencias se deben lograr en el proceso educativo – alumnos (as) – docentes?, entre otros. La dinámica curricular, no sólo debe comprender los aspectos señalados, si no también incorporar aquellas que vienen con la denominada globalización, apertura de mercados, desarrollo científico y tecnológico, la tecnología de la información y la comunicación. Aunados a estos desarrollos, debe haber un importante desarrollo social y cultural; sin dejar de lado una decisiva formación en los valores éticos y morales, y competencias del ciudadano eficiente comprometido con sí mismo y la sociedad.

Aunque los problemas formativos – curriculares, que enfrenta el sistema educativo en sí son múltiples, nuestra preocupación fundamental, objeto de esta investigación, está orientada hacia el desarrollo del razonamiento científico en particular del desarrollo del razonamiento lógico – Matemática y la Estadística, considerando que los procesos que la Estadística involucra como ciencia contribuye con las competencias curriculares del paradigma constructivista, basadas en aprender a aprender, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir.

Nuestro contexto de investigación, se basa en que el aprendizaje de la Estadística, desarrolla competencias de pensamiento crítico – reflexivo, el desarrollo de investigaciones, así como el análisis e interpretación de datos. La Estadística "es una forma de razonar (el razonamiento que en situaciones de incertidumbre permite realizar inferencias y guiar la toma decisiones a partir de los datos" (Batanero, 2009, p.1). Los mayores retos que enfrenta la educación panameña y la de América Latina es precisamente el aprendizaje del razonamiento eficientemente sobre aquellos aspectos cotidianos, públicos, científicos y tecnológicos que se presentan a diario. Tal es el caso, de los medios de comunicación, quienes a diario presentan datos e informes resultados de encuestas de opinión pública, informes de salud, estadísticas educativas, económicas, deportivas y agropecuarias, sólo por mencionar algunas. La Estadística, implica el saber leer dichas informaciones, razonar sobre los datos presentados y valorar intrínsecamente dichos datos. Involucra por otro lado, el conocimiento sobre el proceso que conlleva, la obtención del dato estadístico para ser presentado en tablas y gráficos estadísticos. Además de una clara comprensión de los conceptos relacionados con probabilidades, predicciones de los resultados posibles ante un fenómeno o determinadas decisiones.

Al respecto, "la estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos" (Batanero, 2000, p.1). Lo positivo de este aprendizaje, y apropiarlo es el de poder estar en la capacidad de leer y comprender las tablas, gráficas y datos estadísticos que son presentados y publicados en los textos y revistas de otras áreas del saber, como por ejemplo, las ciencias naturales y las ciencias sociales.

El currículo de educación básica general de Panamá, incorpora en la asignatura de Matemática, el área de Estadística y Probabilidad, desde el primer grado. Sin embargo, es común encontrar docentes que tienen poco o ningún conocimiento de estos temas, por lo que evitan desarrollar o profundizar en su contenido.

Por otro lado, en la Universidad de Panamá, se incluye como curso Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial en la formación pedagógica, que se dicta en la Facultad de Ciencias de la

Educación, en la carrera de Formación Pedagógica con énfasis en Primaria; el mismo sólo representa un aproximado del 2% de horas, respecto al total correspondiente a la formación profesional docente. El curso de didáctica de la Matemática para primaria, consta de 6 horas total, distribuidas en dos semestres, cada uno de tres horas, representando el 4% de horas clases en toda la formación docente.

La formación de profesionales capaces de comprender la estadística y la probabilidad y la interpretación de datos, depende en gran medida de la formación que tenga el docente y la docente en estos temas. Es por esto que en este estudio se analiza el nivel de conocimiento que tienen los y las docentes sobre temas básicos de la Estadística y la Probabilidad.

Los objetivos propuestos fueron los siguientes:

Contribuir con la formación integral de la cultura de investigación de los docentes y educandos en las escuelas de educación básica general del país.

Fortalecer el aprendizaje de los educandos en la asignatura de Matemática a través de la enseñanza de los temas del área de Estadística y Probabilidad y el desarrollo de investigaciones.

Materiales y métodos

Las características del y la docente en cuanto a la enseñanza de la Matemática, se describen en el estudio no publicado por Mendoza, E. y Larriva, M., (2007) sobre los principales factores que caracterizan al docente de primaria en su enseñanza de la Matemática y la Estadística, en el mismo se consideró aspectos sobre su formación académica, perfeccionamiento docente, metodología empleada y preferencia de cursos. Los resultados más relevantes en el mismo, destacó que el 85.7% cuenta con un nivel universitario. El 61.9% de los docentes señaló haber participado en los dos últimos años, en cursos o seminarios de Pedagogía. Con referencia a los cursos o seminarios de Matemática o Estadística, el 23.8% ha tomado de 1 a 3 cursos o seminarios de Matemática y el 14.3% ha participado en 1 a 3 cursos o seminarios de Estadística.

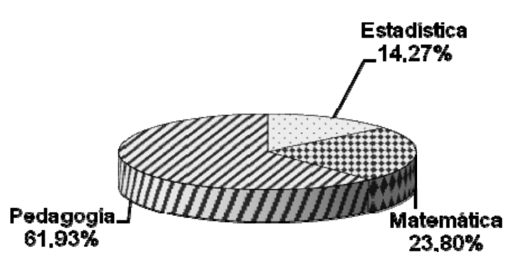


Figura No. 1. Participación de los docentes en 1 a 3 cursos o seminarios, según tema.

Con relación al uso del programa curricular, el 92.9% de los docentes lo utiliza en el planeamiento de sus clases. También se determinó que el 70% logra completar los contenidos del programa oficial de matemática y de este programa, el área particular de estadística sólo es completada por el 26% de los docentes.

Uno de los aspectos fundamentales en la práctica docente es la administración del tiempo para el desarrollo de los contenidos de todas las asignaturas. En este sentido, el 78% de los docentes, indicaron que el tiempo no es suficiente para completar el programa.

Como conclusión de esta investigación, se plantea la necesidad de desarrollar programas de perfeccionamiento docente en los temas de Matemática y Estadística. Por otro lado, suponemos que con un mayor nivel de aprendizaje de la Matemática y la Estadística, así como de aquellos temas de las ciencias que se requieren profundizar y ampliar, se logra un mejor aprovechamiento del tiempo para culminar los programas curriculares.

Los docentes entrevistados, sugirieron el desarrollo de seminarios en temas de Matemática, Estadística y Geometría.

A partir de estos antecedentes, se inicia con la presente investigación. La misma es de tipo cuantitativa descriptiva-experimental; sin embargo, también se utilizó el método cualitativo utilizando técnicas de investigación documental y entrevistas de expertos. Los datos analizados, fueron los obtenidos de dos talleres dirigidos a maestros y maestras, desarrollados en dos fases, con una muestra de 50 maestros de educación básica general primaria en ejercicio, provenientes de dos regiones educativas de la provincia de Panamá. Los mismos se recogieron de las evaluaciones aplicadas a los participantes en los talleres en un pre y pos test, en cada uno de ellos. Los test diseñados y aplicados fueron dos, uno en el primer taller (pre y post) y otro en el segundo taller (pre y post). El primer test contiene 15 ítems, lo cuales proporcionaron información sobre la comprensión del concepto de estadística, promedios, probabilidad, frecuencia, reconocimiento e interpretación de gráficas. El segundo test contiene 6 ítems, los cuales proporcionaron información sobre el razonamiento estadístico y probabilístico.

Los talleres estuvieron divididos en cinco sesiones, con una duración aproximada de 8 horas cada una de ellas. Se inician con una introducción teórica y práctica del tema del día, para luego involucrar a los participantes en actividades prácticas. Al finalizar el primer taller los y las maestras presentaron una micro-clase de cómo trasmitirían los conocimientos y técnicas adquiridas en el taller para enseñar lo aprendido a sus estudiantes. En el primer taller se esperaba que los (las) maestros (as) aumentaran su conocimiento sobre el contenido y la enseñanza de la estadística y la probabilidad. En el segundo taller se contó como facilitadora a la Profesora Olga López del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) de México y en el mismo se llevaron a cabo actividades como juegos didácticos, ejercicios prácticos, entre otras. El principal objetivo se basó en fomentar el desarrollo del razonamiento estadístico y probabilístico de los (las) maestros (as). El uso de materiales didácticos, estrategias dinámicas, talleres e instrumentos de evaluación, fueron claves en el desarrollo de los seminarios. Los contenidos, ejemplificaciones sobre la Estadística y la Probabilidad, fueron basados en el área de estadística y probabilidad del programa curricular oficial de Matemática del Ministerio de Educación.

La tercera fase del estudio, comprendió la elaboración de los textos para el maestro y el libro de actividades, tomando en consideración las experiencias obtenidas en los talleres, la investigación documental y la consulta a expertos, los cuales, fueron otros elementos significativos en este estudio.

Resultados

Los aspectos más importantes detectados por observación, que afectan al docente de Educación Básica General en la Enseñanza de la Estadística y la aplicación de la metodología de investigación son:

- Desconocimiento o poco manejo del proceso de investigación.
- Un nivel medio de conocimientos de elaboración de gráficas, en particular las circulares.
- Cierta predisposición y renuencia a temas de Estadística, ya que es considerado como tema difícil.
- Necesidad de más formación en temas de Estadística enfocados a la enseñanza de los niños y el desarrollo de pequeños proyectos de investigación en el aula – mayor pedagogía.

Las evaluaciones indican que antes de iniciar el programa, existían en los (as) docentes poco conocimiento sobre Estadística y Probabilidad, con un promedio en las pruebas que oscilan entre 43 y 48 en una escala sobre 100 puntos; sin embargo, una vez concluido el seminario, estas mismas evaluaciones muestran importantes aprendizajes, demostrado con promedios entre 68 y 72 puntos. No obstante, es necesario continuar apoyando a los (as) maestros (as) en su labor docente en lo referente a este y otros temas de la Matemática.

Los temas tratados en las capacitaciones y el desarrollo de las actividades muestran que los docentes, requieren fortalecer su aprendizaje en temas como:

- Elaboración e Interpretación de gráficas

- Procesos de recolección de datos
    - Elaboración de instrumentos
    - Definición de las etapas de una metodología estadística
- Reconocimiento de los conceptos de probabilidad
    - Discriminar entre eventos determinísticos y no determinísticos.

Otros de los aspectos que son necesarios desarrollar en el docente y la docente son sus capacidades de:

- Desarrollar la metodología de proyectos
- Mayor comprensión del empleo de los términos relacionados con la Estadística y Probabilidad.
- Mayor dominio y comunicación lingüística para explicar y sustentar datos estadísticos.

Discusión

El desarrollo de este tipo de seminario, juega un papel muy importante en el desarrollo profesional del maestro y la maestra, ya que en la medida que logren mayores conocimientos podrán compartirlos con sus alumnos (as) con mayor seguridad, a la vez, que aprende a utilizar los conceptos en su vida cotidiana, como lo son la interpretación de gráficas, los cálculos de promedios, la comprensión de los estocásticos y el desarrollo de proyectos de investigación.

Es necesario que para lograr las competencias en los (as) alumnos (as), nuestros (as) docentes las hayan logrado primero en la mayor medida de lo posible. De esta forma, estarán familiarizados al realizar el proceso de enseñanza – aprendizaje más eficiente, con calidad, contribuyendo así a la cultura estadística y a la de investigación.

La Ley Orgánica de Educación en Panamá es muy clara en la importancia del desarrollo del pensamiento crítico – reflexivo, por ende al razonamiento crítico – analítico, que defendemos en este proyecto, para lograr el desarrollo del pensamiento estadístico y la cultura estadística.

Los objetivos establecidos en dicha ley, señalan claramente, que la educación que se proporciona a la población estudiantil, le debe permitir ser capaz de aplicar el razonamiento lógico-matemático, en identificación, formulación y solución de problemas relacionados con la vida cotidiana, a su vez y muy importante emplear dichos procesos del razonamiento crítico – reflexivo, para desarrollar la habilidad para observar, analizar, sintetizar, comparar, inferir, investigar, elaborar conclusiones, resolver problemas y tomar decisiones.

En lo referente a la contextualización, se observa que el programa de estudio, en sus diversas asignaturas, la Estadística y la Probabilidad pueden ser integradas y transversalizadas, se presentan algunos ejemplos que pueden ser utilizados.

De acuerdo a lo observado en los seminarios y lo analizado en el contexto curricular, se diseñan los recursos didácticos con actividades que interrelacionan la Estadística y la Probabilidad con otras áreas del saber.

La Estadística y Probabilidad y las Ciencias Naturales.

Las áreas tratadas en esta asignatura, como por ejemplo, *los seres vivos y sus funciones*, y *los seres vivos y su ambiente*, en los primeros grados de estudio permiten una integración de la Estadística en el contenido de la Alimentación, el entorno ambiental, y las enfermedades que afectan al sistema respiratorio, sólo por mencionar algunos. En este ámbito, existen muchos ejemplos en cuadros y gráficas que pueden ser utilizados para hacer interpretaciones, como también, los mismos temas se prestan para realizar proyectos de investigación, por ejemplo, registrando en un cuadro o tabla, durante una semana, cuántos vasos de agua tomó el niño o la niña; o cuántas veces comió alguna fruta y cuál fruta, o tal vez sea de interés observar y anotar diariamente, el estado del tiempo, soleado o lluvioso. Es decir, las aplicaciones de la Estadística, e inclusive la introducción del término aleatorio es muy factible en el primer ciclo de estudios de primaria, al diseñar proyectos de investigación por muestras aleatorias.

	Recolección de datos: Diseñando el cuestionario
EJEMPLO: Encabezado de la encuesta	Escuela Pedro Pablo Sánchez Proyecto: Encuesta sobre Vacunación Objetivo: Determinar el conocimiento que tienen los niños sobre las vacunas que se deben poner en las edades de 0 a 5 años. Instrucciones: Responda cada pregunta con total honestidad. Sus respuestas son confidenciales.
EJEMPLO: Pregunta abierta	¿Sabes de qué enfermedades te ayudan a proteger las vacunas que se deben poner los niños de 0 a 5 años de edad? ________
EJEMPLO: Pregunta cerrada	¿Sabes de qué enfermedades te ayudan a proteger las vacunas que se deben poner los niños de 0 a 5 años de edad? *a. Sí* *b. No*
¿Qué otros temas de te gustaría estudiar por medio de un cuestionario?	

Fig. 2. Ejemplo de un proyecto para realizar una investigación en el contexto de las Ciencias Naturales.

La estadística y probabilidad y las ciencias sociales

En la asignatura de las Ciencias Sociales, las áreas de la naturaleza y la sociedad, dinámica e interacción del ser humano con el medio ambiente, convivencia armónica con el medio natural y social, a través de sus contenidos, sobre la estructura familiar, la participación de los miembros de la familia en las actividades del hogar. Las ocupaciones, los medios de transporte y de comunicación, las composiciones sociales, las poblaciones por área geográfica, sus costumbres, la migración; entre otros temas, pueden ser objeto de estudios para aplicar la Estadística, de forma práctica, se puede pedir a los (as) estudiantes la búsqueda de datos estadísticos, sea en boletines estadísticos, por Internet, o en medios escritos, como revistas o periódicos, cuadros, tablas o gráficas para que se presenten ante la clase y expongan sus hallazgos, utilizando un lenguaje propio al contexto.

La estadística y probabilidad y la educación física

La Estadística y Probabilidad contextualizada en la Educación física, puede ser a través del registro de datos como anotaciones de goles, de carreras, o la cantidad de juegos ganados por equipos, por jugadores, o países. Puede también, realizarse proyectos, por encuesta en donde se analice una muestra en donde se pregunte sobre la práctica de deportes, los favoritos y los menos favoritos. También durante la clase, la práctica de los ejercicios, gimnasia o la realización de algún deporte en las clases, se formen equipos en donde se realicen mediciones, por ejemplo del salto más largo, el tiempo de carrera, u otras anotaciones o mediciones que sean de interés para los y las alumnas.

Las actividades con los y las docentes muestran que la motivación para la enseñanza de la Estadística y Probabilidad está relacionada con el conocimiento sobre estos temas, los conceptos y sus aplicaciones. Las presentaciones realizadas demostraron un alto nivel conceptual y dominio de los términos desarrollados en los contenidos de los seminarios. La transversalización de los temas en el resto de las asignaturas es posible toda vez que exista confianza en la comprensión de la Estadística y Probabilidad como método de aprendizaje y el desarrollo de proyectos de ciencia y tecnología (Batanero, 1996).

Conclusiones y recomendaciones

Los resultados de las pruebas objetivas, evidencian un mayor aprendizaje adquirido por los maestros y las maestras que culminaron el seminario. Sin embargo el promedio del post-test no superó los 72 puntos, por lo que es necesario reforzar los conocimientos de los maestros y las maestras con más capacitaciones sobre estos temas.

Es necesario fomentar las capacitaciones docentes sobre actividades didácticas de la Estadística y Probabilidad, que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de estos temas en los cursos de Matemática que se imparten en las aulas de clases.

Incorporación efectiva del tema de Estadística y Probabilidad en la formación del docente de Educación Básica General. Si bien es cierto, dentro del plan de estudio universitario estos temas se tratan, es necesario revisar el número de horas, y las estrategias o metodologías de clases empleadas.

Instar a las autoridades del Ministerio de Educación y del sector de Educación Superior al desarrollo de programas especializados en la Didáctica de la Estadística y la Probabilidad.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2009). *Presente y Futuro de la Educación Estadística*. Recuperado el 2 de febrero de 2010 de http://www.deie.mendoza.gov.ar/aem/material/pte%20futuro.pdf

Batanero, C. (2000). *¿Hacia dónde va la educación estadística?*. Recuperado el 02 de febrero de 2010 de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm

Batanero, C. (1996). *Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo.* Recuperado el 11 de septiembre de 2009 de *www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf*

Bressan, A. (2008). *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes: construyendo paso a paso herramientas y conceptos*. Buenos Aires: Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico.

Hernández, R. (2003). *Metodología de la investigación*. Chile: McGraw Hill.

Jiménez, L., Jiménez, J. (2000). *Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?*. Recuperado el 20 de enero de 2010 de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html

Mendoza, E., Larriva, M. (2007). *Enseñanza de la Matemática y la Estadística en el nivel de educación básica general*. Investigación no publicada, Centro de Investigación y Consultoría Estadística de la Universidad de Panamá.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS

Edwin Chaves, Mario Castillo
Universidad Nacional de Costa Rica. Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
echa@una.ac.cr, mcastill@una.ac.cr

Resumen. El presente artículo corresponde a un planteamiento didáctico para la enseñanza de la Estadística basado en la formación por competencias desde el pensamiento complejo. Debido a los tradicionales problemas que enfrenta la enseñanza de esta disciplina en el ámbito universitario, la cual se caracteriza por altos índices de deserción y reprobación de los estudiantes, se hace necesario buscar alternativas didácticas tendientes a revertir el proceso. La propuesta está dirigida hacia un módulo de Estadística Descriptiva dentro de un curso básico de Estadística y Probabilidad o Estadística General, y propicia una ruptura con la metodología tradicional que se ha venido empleando. Con ello se espera propiciar conocimientos y habilidades estadísticas que el estudiante pueda utilizar en concordancia con su perfil profesional.

Palabras clave: educación estadística, formación por competencias

Abstract. This paper corresponds to a didactic approach to the teaching of statistics based on competences from complex thinking. Because the traditional problems on the teaching of this discipline in the universities, which are characterized by high dropout and failure of students, it is necessary didactical alternatives to reverse the process. The proposal is directed toward a Descriptive Statistic Module for a basic course in Statistics and Probability or Basic Statistics, and generates a breakdown with the traditional methodology that has been used. With this, it is expected to promote statistics knowledge and skills that students can use according with their professional profile.

Key words: statistic education, competences complex thinking

Introducción

La Estadística ha tenido un impresionante desarrollo en los últimos 60 años. Por su naturaleza, el conocimiento estadístico se ha convertido en una herramienta fundamental para la mayoría de disciplinas, esto ha provocado que en la formación específica de sus profesionales se incluyan diferentes cursos en esta área (Chaves, 2007; Batanero, 2002). A pesar de la anterior, se han determinado importantes críticas en el desarrollo de dichos cursos. Se les reprocha que, a pesar que enfatiza en el análisis de diferentes contenidos específicos, no se presenta una formación integral que propicie habilidades y destrezas para emplear esos conceptos en concordancia con las exigencias de su área profesional (Batanero, 2002).

En este sentido, el presente estudio es una contribución para atender la problemática anterior. Se plantea una propuesta que, desde el enfoque "Formación por competencias desde el pensamiento complejo", permita atender, de una forma diferente a la tradicional, la enseñanza de la Estadística Descriptiva en un curso universitario básico de Probabilidad y Estadística o de Estadística General.

La conceptualización del término competencia resulta difícil y depende del ámbito en donde se le ubique. En este sentido, han surgido varias definiciones, en el presente artículo, se analizan dos de las más utilizadas en esta línea: la sugerida por Sergio Tobón, desde una perspectiva general y la definición aportada por el Proyecto PISA (Programme for International Student Assessment), específicamente relacionada con las competencias matemáticas y que tiene una importante trascendencia para el estudio. Seguidamente se detallan los principales aspectos teóricos relacionados con el tema.

Formación por competencias

Tobón (2008) considera que aunque las competencias se vienen abordando en los procesos educativos desde diferentes enfoques, es dentro del enfoque sistémico-complejo donde logra desarrollar el mayor potencial. Esto se debe a la prioridad que se le da a la formación de personas con compromiso ético, en busca de la autorrealización y capaces de convertirse en profesionales idóneos e integrales. Desde esta perspectiva, dicho investigador define a las competencias como:

> Procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético, con la meta de contribuir al desarrollo personal, la construcción y afianzamiento del tejido social, la búsqueda continua del desarrollo económico-empresarial sostenible, y el cuidado y protección del ambiente y de las especies vivas (Tobón, 2008, p.4).

Dentro de los elementos más interesantes en esta definición destaca el hecho de considerar las competencias como un verdadero proceso, es decir, dinámico y con fin bien determinado, capaces de articular el conocimiento que se produce con criterios de eficacia, eficiencia, efectividad y pertinencia, y responsabilidad social.

Diferentes especialistas señalan que las competencias no pueden considerarse como un modelo pedagógico sino como un enfoque educativo teórico (Vasco, 2003 y Tobón, 2008). De acuerdo con esto, las competencias se focalizan en determinados aspectos conceptuales y metodológicos, así como en la gestión de la capacidad humana. Para los procesos de formación profesional, Tobón (2008) indica que, el modelo complejo sistematiza, las competencias con base en los siguientes principios:

1. Las competencias se determinan a partir de la identificación de problemas sociales, profesionales y disciplinares, presentes o del futuro.
2. Los problemas se asumen como retos que a la vez son la base para orientar la formación.
3. Cada competencia se describe como un desempeño íntegro e integral, en torno a un para qué.
4. En cada competencia se determinan criterios con el fin de orientar tanto su formación como evaluación y certificación.
5. Los criterios buscan dar cuenta de los diferentes saberes que se integran en la competencia. Es así como se tienen criterios para el saber ser, criterios para el saber conocer y criterios para el saber hacer (Tobón, 2008, p. 9).

Desde esta perspectiva, la situación actual de globalización y crisis mundial refleja la necesidad de realizar cambios trascendentales en los sistemas educativos. Ante estos nuevos retos se requiere formar ciudadanos con espíritu creativo, capacidad de innovación, autonomía y capacidad de organización y planeación**,** entre otras competencias que deben poseer los estudiantes. El desarrollo de estas habilidades supera la enseñanza tradicional, donde el dominio de los contenidos se ha considerado como requisito necesario y suficiente para el ingreso al campo laboral.

Así entonces, la enseñanza por competencias desde el pensamiento complejo resulta de gran impacto para integrar el proceso formativo con las dinámicas sociales y políticas del contexto y paralelamente con el proyecto de vida y de autorrealización personal. En este sentido, como bien se expone en Tobón (2008), el enfoque de competencias puede llevarse a cabo desde cualquiera de los modelos pedagógicos existentes, o también desde una integración de ellos. El enfoque de competencias implica cambios y transformaciones profundas en los diferentes niveles educativos, y seguir este enfoque es comprometerse con una docencia de calidad, buscando asegurar el aprendizaje de los estudiantes.

La enseñanza de la matemática por competencias

Para el proyecto PISA, competencia matemática es sinónimo de alfabetización matemática y se define como las habilidades o capacidades que tienen los estudiantes para analizar, razonar y resolver problemas, así como comunicar de una manera eficaz las soluciones en una variedad de situaciones. Es decir, tiene ver con la capacidad para comprender el papel de las matemáticas para satisfacer las necesidades de la vida personal y profesional. (Rico, 2006)

Las matemáticas en sus conceptos, habilidades y procesos son fundamentales para el desenvolvimiento en la vida cotidiana, resulta innegable el impulso que ellas le han dado al desarrollo científico y tecnológico, debido a que constituye un medio de comunicación importante para representar, interpretar, explicar y predecir. Las matemáticas son más que destrezas y conceptos, conllevan investigación, razonamiento, comunicación, conocimiento del contexto y desarrollo de la confianza en sí mismo. (Rico, 2006)

Se puede indicar que el enfoque por competencias y específicamente en el área de la matemática es el fundamento para el desarrollo de las habilidades básicas y las destrezas de pensamiento que todo individuo necesita. Es importante desarrollar habilidades como la expresión oral y escrita del lenguaje matemático y desarrollar destrezas de pensamiento para planear, formular, resolver y analizar.

En un estudio realizado por Villanueva (s.f) se recoge las opiniones de expertos en el área de la formación por competencias matemáticas y las clasifica en transversales y específicas.

Dentro de las transversales se encuentran las siguientes:

- Competencia Interpretativa
- Competencia Argumentativa
- Competencia Propositiva
- Competencia de pensamiento lógico
- Competencia de Pensamiento Analógico
- Competencia de Pensamiento Deliberativo
- Competencia de Resolución de Problemas

Las competencias específicas del área de matemáticas son:

- Competencia Lógica
- Competencia Numérica
- Competencia Geométrica
- Competencia Métrica
- Competencia Algebraica
- Competencia Estadística

Además del reconocimiento de las competencias y de su importancia, destaca un elemento primordial en lo que se refiere al proceso educativo, el cual es el papel que juega la evaluación, dentro de la propuesta de enseñanza por competencias.

En el proceso tradicional se evalúa la adquisición de procedimientos y se fomenta la memorización de algoritmos, sin importar la aplicación correcta de conocimientos matemáticos a situaciones reales. En el enfoque por competencias, el eje primordial se centra en la manera como los estudiantes utilizan lo aprendido para resolver problemáticas de la vida real. (Rico, 2006)

No se puede olvidar que las competencias tienen tres dimensiones fundamentales, el saber hacer, el saber ser y el saber conocer, los cuales integran la teoría, la práctica, habilidades y actitudes en busca siempre de la autorrealización humana. Esto conlleva una modificación en el protagonismo del docente y en su rol dentro del proceso educativo, convirtiéndose en un facilitador y administrador del proceso, asimismo los estudiantes juegan un papel de mayor compromiso y dedicación. De igual manera exige una adecuación de los programas de estudio y un compromiso real para el cambio.

Competencia Estadística

Los elementos anteriores resultan claves para el favorecimiento de la enseñanza de la Estadística. De acuerdo con Chaves (2008), en Costa Rica esta actividad se ha desarrollado en forma equivocada, pues se ha dado más énfasis a la aplicación de procedimientos y fórmulas vacías, sin tomar en cuenta la naturaleza de la disciplina, por lo que se desaprovecha su potencial. El énfasis, dentro de la Estadística Descriptiva ha estado basado en la elaboración de cuadros, gráficos, y al cálculo de medidas estadísticas, sin que prive la discusión del para qué se hace esto y el rol que ello juega dentro de un proceso de análisis estadístico; es decir se enfatiza en los conceptos y no así en su papel dentro de un marco más complejo.

Por su parte, Godino (1995) indica que la comprensión estadística deja de ser meramente un proceso mental y se convierte en un proceso social, por medio de la interacción de estos conceptos con el contexto. La destreza en la lectura crítica de los datos es un componente de la alfabetización cuantitativa y una necesidad para lograr una cultura estadística. Al respecto, Curcio (1989, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994) describe tres niveles distintos de comprensión básicos para el análisis estadístico:

1. Leer los datos: este nivel de comprensión requiere una lectura literal; no se realiza interpretación de la información.
2. Leer dentro de los datos: incluye la interpretación e integración de los datos; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.

3. Leer más allá de los datos: requiere que el lector realice estimaciones y deducciones a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente (Curcio,1989, citado por Batanero et al,1994,p.3)

Como puede notarse, estos aspectos pueden ser muy bien capitalizados al emplear una estrategia didáctica vinculada al enfoque por competencias desde el pensamiento complejo.

Propósito de la propuesta

Como se indicó al inicio, la propuesta va dirigida a un módulo de Estadística Descriptiva, de un curso de Probabilidad y Estadística, o un curso de Estadística General.

En la Universidad Nacional de Costa Rica, se ha determinado que este tipo de cursos presenta una alta tasa de reprobación y deserción, por lo que una hipótesis sobre dicha problemática podría estar asociada con el proceso de mediación pedagógica que se ha venido utilizando, el cual está basado en estrategias didácticas tradicionales, donde las lecciones magistrales son el componente fundamental. Al respecto Martín (s.f.) indica que en estas lecciones "el profesor era el portador oficial de los conocimientos y su papel fundamental era la transmisión de los mismos en el aula, ante un auditorio, que lo consideraba como fuente principal, cuando no única del conocimiento" (Martín, s.f.,p.2).

De acuerdo con lo planteado por Rico (2006) y Villanueva (s.f.) y discutido en este mismo artículo, hay evidencias que esta problemática podría mostrar una mejora significativa si buscan alternativas que modifiquen el enfoque tradicional basado en contenidos y la estrategia didáctica empleada en el proceso.

Por lo anterior, se ha considerado pertinente llevar a cabo una intervención en el proceso de mediación pedagógica en el módulo de Estadística Descriptiva, con el fin de evaluar los logros de dicha propuesta. La misma consiste en replantear este módulo, determinar las competencias que en dicha materia un especialista en el área requiere para realizar su labor profesional. Para ello se propone una estrategia pedagógica en la cual el estudiante tenga una fuerte participación dentro del proceso de aprendizaje y el docente sea un mediador, con la responsabilidad de institucionalizar los contenidos al final del proceso. Para esto se propone complementar la labor con el uso de tecnologías digitales.

Descripción de la propuesta

Elementos de la propuesta

A continuación se detallan los principales componentes que constituyen el cuerpo de la propuesta:

Unidad de aprendizaje: Enseñanza de la Estadística por medio de competencias: módulo de Estadística Descriptiva

Descripción: Esta unidad ofrecerá al estudiante la oportunidad de desarrollar habilidades y destrezas en el área de la Estadística básica, lo que le permitirá adquirir las principales nociones de esta disciplina y su implementación en procesos de sistematización, análisis y presentación de información que se genere en su entorno.

Competencia: Comprender los principios básicos asociados con el uso de la Estadística Descriptiva dentro del entorno profesional.

Elementos de la competencia:

- Comprender los conceptos básicos relacionados con la naturaleza de la Estadística
- Utilizar adecuadamente técnicas especializadas para la presentación y el análisis de información estadística.
- Utilizar adecuadamente medidas de posición y variabilidad para la caracterización y el análisis de la información estadística.

El Cuadro 1 complementa la información anterior, se describen los distintos componentes asociados con los saberes esenciales de la competencia y de sus elementos.

Cuadro 1: Saberes esenciales de la competencia

CONOCER	HACER	SER
1) Conceptos básicos: • Importancia de la Estadística en el desarrollo científico • Unidad estadística • Observación • Característica o variable • Población • Muestra	1) Reconoce la importancia de la Estadística dentro de su campo laboral y dentro de la cultura general del ciudadano. 2) Identifica los conceptos básicos relacionados con un problema cuya solución requiera de un análisis estadístico.	1) Valora el papel de la Estadística en la formación del ciudadano 2) Reconoce la importancia de la Estadística como instrumento básico para la producción del conocimiento. 3) Valora la necesidad de comprender los conceptos básicos de la Estadística para entender la naturaleza de la disciplina.
2) Tipo de variable • Cuantitativas (discretas y continuas) • Cualitativas (nominales y ordinales)	3) Diferencia entre los tipos de variables o características dentro de una base de datos con información estadística.	4) Distingue los diferentes tipos de variables o características según su naturaleza.
3) Recolección de información estadística	4) Distingue entre las diferentes técnicas de recolección de	5) Aprecia la importancia de emplear diferentes estrategias

• Entrevista • Observación • Registro	información estadística. 5) Caracteriza los procesos de recolección de información mediante: entrevista, observación o registro.	para el proceso de recolección de información estadística.
4) Presentación de información estadística • Tabular • Gráfica • Distribuciones de frecuencias	6) Identifica los problemas relacionados con el proceso de presentación de la información estadística para su análisis y discusión 7) Identifica los principales elementos que deben incluirse en una tabla, cuadro o gráfica donde se resuma la información estadística. 8) Elabora correctamente cuadros, tablas o gráficos que resumen información estadística 9) Caracteriza las distribuciones de frecuencias como un caso particular de cuadro estadístico de gran utilidad práctica.	6) Valora la importancia de utilizar cuadros, tablas o gráficos para resumir y analizar la información estadística de modo que se pueda comunicar un mensaje coherente y simplificado al lector. 7) Reflexiona sobre las diferencias en el tipo de información que se desea comunicar al lector según el tipo de cuadro, tabla o gráfico que se vaya a utilizar.
8) Medidas de resumen de información estadística • Medidas de posición (moda, mediana, media aritmética, cuartiles y percentiles) • Medidas de variabilidad (rango, variancia, desviación estándar y coeficiente de variación)	10) Identifica la importancia de las medidas de posición en los procesos de resumen y análisis de la información estadística. 11) Calcula las principales medidas de posición a un conjunto de datos estadísticos. 12) Interpreta las principales medidas de posición a un conjunto de datos estadísticos. 13) Reconoce la importancia del concepto de variabilidad para los análisis estadísticos. 14) Calcula las principales medidas de variabilidad a un conjunto de datos estadísticos. 15) Interpreta las principales medidas de variabilidad a un conjunto de datos estadísticos.	9) Valora la importancia de las medidas de resumen estadístico (posición y variabilidad) dentro de los procesos de análisis de información. 10) Reflexiona sobre el rol de la variabilidad para un análisis estadístico.

Orientación metodológica propuesta

Para acompañar la implementación del enfoque descrito, se requiere un cambio del paradigma en la dinámica del trabajo en el aula. Como lo indican los estudios de PISA, sin una transformación en las estrategias metodológicas de enseñanza no es posible propiciar un aprendizaje significativo (Rico, 2006). Para ello, las estrategia metodológica debe basarse "en la construcción e investigación del conocimiento, basado en las experiencias concretas, vivencias cotidianas, hechos científicos y tecnológicos, de tal manera que el aprendizaje sea significativo para el estudiante" (MEP, 2005, p.34).

Para satisfacer estas estos requerimientos, se propone actividades que permitan una mayor integración del estudiante en la generación del conocimiento, de modo que el rol del docente sea el de orientar y guiar el proceso. Pero además tienen la responsabilidad de institucionalizar y articular los conceptos teóricos que surjan de los análisis realizados por los estudiantes. Para ello, estrategias fundamentadas en la resolución de problemas se consideran un importante vehículo para lograr el objetivo. El docente diseña situaciones, con las características requeridas, y luego propone, guía, orienta, organiza y anima las actividades; pero son los estudiantes quienes, motivados con el reto que representa el problema, deciden la forma en que lo resuelven.

La evaluación debe verse como un proceso permanente, por medio del cual el profesor interactúa con los estudiantes y recopila información cuantitativa y cualitativa sobre el nivel de avance en el aprendizaje. El docente debe interpretar y valorar la información recopilada para establecer estrategias tendientes a definir si se están logrando los diferentes componentes de la competencia establecida, de modo que pueda establecer un plan de acción que brinde las condiciones al estudiante para comprender, fortalecer y facilitar aquellos aspectos que no haya podido alcanzar a plenitud. Este propósito se logra si el carácter formativo de la evaluación prevalece sobre el sumativo.

Discusión

El documento se ha concentrado en formular una propuesta para la enseñanza de la Estadística Descriptiva en un curso universitario básico, basado en un enfoque por competencias desde el pensamiento complejo. El objetivo fundamental consiste en generar una ruptura con la estrategia tradicional basada en contenidos específicos, la cual ha demostrado que no es eficiente para lograr un aprendizaje significativo en el estudiante. Al mismo tiempo se propone que las estrategias metodológicas y evaluativas que acompañen esta visión estén en concordancia con los fundamentos teóricos del enfoque.

Por lo anterior, se espera que al modificar la orientación curricular, en donde el contenido pasa a un segundo plano y el proceso se enfoque hacia las competencias que se generarían con el análisis de esos conceptos, se pueda romper con la enseñanza tradicional. De esta manera la formación de profesionales que logren integrar competencias cognitivas, transversales y genéricas, les permitirá estar en la capacidad de enfrentar los retos que la profesión le exija al momento de integrarse al campo laboral; pero, al mismo tiempo, se espera que la adquisición de estas habilidades le conviertan en un ciudadano más integral.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Godino, J., Green, D.; Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25 (4), 527-547.

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística*. Conferencia inaugural de las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.

Chaves, E. (2007) Inconsistencia entre los programas de estudio y la realidad en el aula en la enseñanza de la estadística de secundaria. *Actualidades Educativas en Educación*. Vol. 7, N° 3, Setiembre – Diciembre 2007. http://revista.inie.ucr.ac.cr/

Chaves E (2008). *Problemas de formación matemática en graduados de Bachillerato*. Ponencia presentada en el Sexto Festival Internacional de Matemática, celebrado entre el 29 y 31 de mayo del 2008 en Palmares, Costa Rica.

Godino, J. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística?. *UNO,* 5, 45-56.

Martín, F (s.f.) *El papel o función del profesor en el aula.* Recuperado el 05 de noviembre del 2009 de http://www.profes.net/rep_documentos/Monograf/PTEI%20Papel_profesor.PDF

Ministerio de Educación Pública [MEP] (2005). *Programas de estudios de matemática: Tercer Ciclo*. San José, Costa Rica.

Rico, L. (2006). *La competencia matemática en PISA*. *PNA*, 1(2), 47-66.

Tobón, S. (2008). *La formación basada en competencias en la educación superior: el enfoque complejo*. Universidad Autónoma de Guadalajara. México.

Vasco, C. (2003). Objetivos específicos, indicadores de logros y competencias ¿y ahora estándares? *Educación y Cultura*, 62, 33-41.

Villanueva, G. (s.f.). *Las Matemáticas por competencias*. Recuperado el 5 de agosto del 2010 de http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_67.pdf

COMPRENDO LAS FÓRMULAS DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Cayetano Salvador, Rina Rouanet, Alejandro Asijtuj
JICA-Ministerio de Educación (Guatemala)
guatematica.jica@gmail.com, csalvador@mineduc.gob.gt, rina.rouanet@gmail.com

Resumen. La comprensión de las fórmulas para el cálculo de medida de área de las figuras geométricas, es un proceso que requiere de la participación activa de los alumnos. Esto implica la realización de actividades como manipulación de material, recorte de figuras para transformar una figura en otra en donde la fórmula ya se conoce y, proponer diferentes maneras de calcular el área de una figura determinada. El proceso de aprendizaje es de manera constructivista, hasta llegar a la generalización que constituyen las fórmulas. Con esta forma de aprendizaje se garantiza que el alumno pueda aplicarlas a diversidad de problemas que implica cálculo de área.

Palabras clave: constructivismo, comprensión procedimental, comprensión relacional, conflicto cognitivo, cálculo de área.

Abstract. The understanding of the formulas for area measurement of geometric figures is a process that requires active student participation. This involves activities such as material handling, cutting shapes to transform a figure in another where the formula is already known and propose different ways to calculate the area of a particular shape. The learning process is constructive manner, reaching generalization constituent formulas. With this form of learning ensures that students can apply to different problems involving area calculation.

Key words: constructivism, procedural understanding, relational understanding, cognitive conflict, area calculation.

Antecedentes

La enseñanza y aprendizaje de la geometría en las escuelas primarias de Guatemala, parece estar en un segundo plano, en comparación con el interés que prestan las y los docentes a la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. Las razones de dicha situación, se pueden resumir principalmente en la falta de dominio que tienen los docentes de los contenidos y en una débil metodología de enseñanza, como producto de la deficiente formación recibida en las Escuelas Normales o Centros de Enseñanza de formadores de docentes. En algunos casos, el tema de geometría se aborda al final del ciclo escolar y se realiza de una manera mecánica y memorística, por ejemplo: se aprenden de memoria las fórmulas para el cálculo de área de las figuras geométricas, sin comprender cómo se originan, esto trae como consecuencia un aprendizaje sin ningún sentido para los estudiantes, haciendo difícil de reproducción, transformación y aplicación a la vida cotidiana.

Según lo establece el Currículum Nacional Base –CNB-, del nivel primario en Guatemala, "El aprendizaje es un proceso activo, en donde el alumno o alumna, selecciona, organiza y transforma la información que recibe y establece relación con los conocimientos previos, que permitirá generar cambios en el significado de la experiencia y de los conocimientos" (Ministerio de Educación, 2008, p.18). Visto el aprendizaje de esa manera, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, deberá dar un cambio de enfoque de manera radical, es decir, trasladar de un aprendizaje memorístico y mecánico a un aprendizaje constructivo y transformador, en donde el alumno o la alumna asuma un papel protagónico en el proceso.

Para lograr lo anterior, en la propuesta ha jugado un papel preponderante la concepción que tiene el docente en relación a la comprensión de los conceptos, procedimientos o fórmulas a utilizar. Razón por la cual es pertinente hacer una diferenciación entre comprensión instrumental y comprensión relacional.

La comprensión instrumental se basa en la aplicación de conocimiento aprendido relacionado con conceptos, procedimientos o fórmulas sin saber el por qué o como se originan; mientras que, la comprensión relacional consiste en hacer uso de lo aprendido para generar nuevos conocimientos, es decir, entender el por qué funciona de esa manera, para aplicarlo en otras situaciones (Godino, 2004).

Desarrollar la comprensión relacional debe ser la prioridad de la enseñanza de la matemática para desarrollar las competencias matemáticas en las y los alumnos.

El desarrollo de competencia matemática en las o los alumnos implica dotarlos de habilidades y destrezas para utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos en la solución de problemas que se presentan en la vida cotidiana.

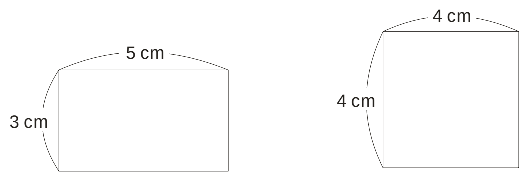
Es necesario entonces habituar a los alumnos a resolver problemas como base para la construcción de nuevos conocimientos.

Comprensión del concepto de área desde la propuesta metodológica de GUATEMÁTICA

A continuación se presenta la secuencia didáctica que se recomienda dentro de la propuesta metodológica para la comprensión del tema de cálculo de área de figuras geométricas, desde el enfoque de GUATEMÁTICA (Agencia de Cooperación Internacional del Japón/Ministerio de Educación, 2008).

Para comprensión del concepto de área es importante realizar con los alumnos actividades de manipulación de materiales con el propósito de que ellos formulen sus primeras nociones o ideas y que posteriormente ellos mismos lo profundicen hasta llegar a la conceptualización. A continuación se presenta el proceso de construcción del concepto de área, a través de los pasos siguientes:

a) Cada alumnos utiliza dos tarjetas hechas de cartulina con las dimensiones siguientes: 3 x 5 cm y 4 x 4 cm.



b) La pregunta clave a realizar será la siguiente ¿cuál de las tarjetas es más grande? Con esta pregunta los alumnos se interesan en la búsqueda de respuesta, a través de la comparación directa (sobreponiendo las tarjetas), otros utilizan lo aprendido en clases anteriores comparando perímetros. Cuando realizan la comparación directa de las superficies de las tarjetas, los alumnos adquieren la noción área; es decir, toman conciencia que lo que necesitan hacer es comparar ambas superficies. En el segundo caso, cuando comparan perímetro se encuentran con la dificultad que son iguales, sin embargo, por percepción se dan cuenta que una de las tarjetas es de mayor tamaño, creándose en el alumno o alumna un conflicto cognitivo, por lo que se interesará en buscar la solución pertinente y su atención se enfocará en comparar las superficies.

Según los resultados obtenidos en el desarrollo del contenido, se ha observado que la mayoría de los alumnos concluyen que el cuadrado es más grande que el rectángulo.

c) Al profundizar el concepto de área a través de la cuantificación, se puede lanzar la siguiente pregunta: ¿Cuánto más grande? Esta pregunta que se presenta a los alumnos, tiene el propósito de cuantificar la diferencia entre las dos figuras, para ello los alumnos piensan en estrategias, tales como: recortar y descomponer las figuras, otros sugieren cuadricularlas utilizando como unidad de medida cuadrados de un centímetro por lado. Después de pensar en las soluciones los alumnos llegan a la conclusión que el cuadrado es el de mayor tamaño, ya que tiene un cuadrado de un centímetro por lado de más. Es en este momento cuando se capta que una de las unidades que se puede utilizar para la comparación de las superficies de las dos figuras es el centímetro cuadrado. Se enfatiza el uso del cuadriculado para que los alumnos comprendan que una de las unidades para medir superficies es el centímetro cuadrado.

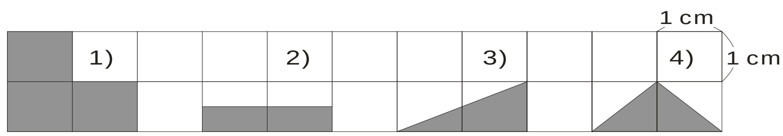
En este tema hay algunos aspectos muy importantes a los que se debe prestar atención, tales como:

Uso del cuadriculado para comparación de superficies contribuye a que los alumnos comprendan que para el cálculo de la medida de área no hay instrumento alguno que se pueda utilizar directamente, tal como sucede con la medición de longitud, peso, capacidad etc., razón por la cual se recurre al cuadriculado.

La comprensión de la unidad de medida de área es brindar oportunidad a las o los alumnos para que recorten y manipulen cuadrados de un **centímetro** por lado. Para ampliar los conocimientos de las unidades de medición de área se puede elaborar el metro cuadrado utilizando hojas de periódico, y otros necesarios para la actividad.

Es importante para el fortalecimiento del concepto de área trabajar ejercicios como los siguientes:

¿Cuántos cm^2 mide el área de cada figura pintada?

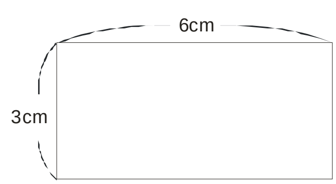


Ejercicios como los anteriores permiten desarrollar en los alumnos la capacidad de percibir el centímetro cuadrado en diferentes formas, aunque la cantidad se mantiene. Este concepto es importante porque tiene que ver con la reversibilidad de los conceptos que los niños adquieren para futuros grados en escolar.

Esta habilidad es indispensable para captar la construcción y el sentido de las fórmulas de de figuras geométricas que se abordarán posteriormente; además, aplicar el conocimiento de cálculo de área a diferentes situaciones cotidianas, pues bien sabemos que en la vida real las formas no siempre se presentan de manera estándar.

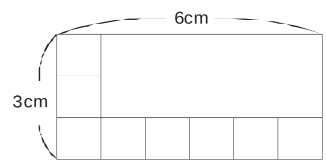
Cálculo de área del rectángulo

Comprendido el concepto de área por los alumnos se iniciará con el cálculo de medida de área del rectángulo. Para esto se pedirá a los alumnos que piensen la manera cómo calcular la medida de área del siguiente rectángulo.



Es indispensable dejar cierto tiempo para que las o los alumnos trabajen individualmente, ya que permitirá que cada uno, aplicando lo aprendido, piense en diferentes maneras de resolver el problema, para que después puedan socializar sus ideas. La socialización de ideas entre las o los alumnos y el docente es indispensable para desarrollar el proceso de la comunicación matemática. “El proceso de comunicación ayuda a construir significado y permanencia para las ideas y permite hacerlas públicas” (Godino, 2004, p. 40). Algunas formas de resolver el problema que pueden surgir en esta etapa pueden ser: trazar cuadricula en la figura tomando como unidad de medida el centímetro cuadrado, sobreponer el centímetro cuadrado en la superficie para determinar cuántas veces cabe, por mencionar algunas. Estas ideas se deben aprovechar para lograr vivencialmente el proceso de construcción de la fórmula para el cálculo de área del rectángulo.

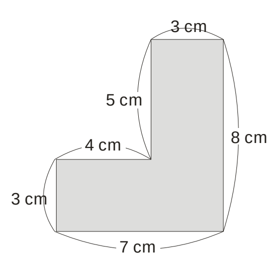
Para orientar la comprensión del procedimiento de cálculo de área se realizan las preguntas siguientes: ¿Cuántos cuadrados de 1 cm^2 caben verticalmente? ¿Cuántos cuadrados de 1 cm^2 caben horizontalmente? Con estás preguntas se espera que los alumnos piensen en las respuestas ayudándose con imágenes mentales como las que se presenta en la siguiente figura.



Finalmente se preguntará ¿cuántos cuadrados de 1 cm^2 caben en total en el rectángulo? Para responder a esta pregunta los alumnos pueden utilizar diferentes procedimientos tales como el conteo de uno en uno de los cuadrados de 1 cm^2 que caben, sumando la cantidad de cuadrados que caben verticalmente (3+3+3+3+3+3) o aplicando una multiplicación (6 x 3).

Todas estas ideas deben ser compartidas con todos los alumnos ya que todas conducen a la respuesta del problema planteado inicialmente y contribuye a mejorar la comunicación de las ideas matemáticamente; acá la tarea del profesor es orientar a los alumnos para que tomen conciencia de cual es el procedimiento que resulta más práctico cuando se presentan situaciones de cálculo de área de rectángulos, cuyas medidas de largo y ancho son de magnitudes grandes, como por ejemplo 10 cm de largo por 15 de ancho. Con las orientaciones y por razonamiento propio de los alumnos se puede llegar a la conclusión que el procedimiento que facilita el proceso es el de la multiplicación. Entonces se concluye que para el cálculo de área de un rectángulo basta multiplicar la medida del largo por el ancho.

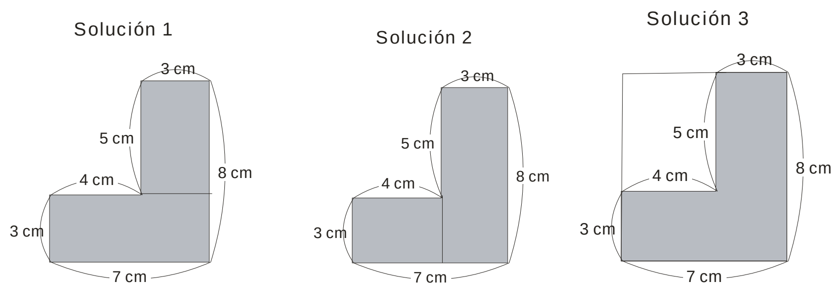
Para continuar con el aprendizaje del cálculo de área de figuras geométricas y como una manera de reforzar lo aprendido en el cálculo de área del rectángulo y cuadrado, se desarrollarán ejercicios de cálculo de área de figuras combinadas. Para esto se pide a los alumnos que piensen la manera cómo calcular la medida de área de la siguiente figura:



De acuerdo a lo aprendido los alumnos pensarán en dividir la figura en rectángulos o cuadrados. En este proceso es importante que cada alumno piense en diferentes maneras de resolver el problema, aquí es donde se hace uso de la creatividad y se fortalece el pensamiento divergente. Además, desarrolla en las o los alumnos la habilidad de argumentar, justificar y razonar matemáticamente en función del procedimiento aplicado.

"El razonamiento y la demostración matemática no se pueden enseñar impartiendo un tema sobre lógica, o unas demostraciones aisladas sobre temas como la geometría. Este componente del conocimiento matemático deberá estar presente en la experiencia matemática de los estudiantes desde los niveles de educación infantil" (Godino, 2004, p. 41). Razón por la cual en la metodología GUATEMÁTICA la justificación de una solución es primordial.

Entre las posibles soluciones que los alumnos podrían presentar están las siguientes:

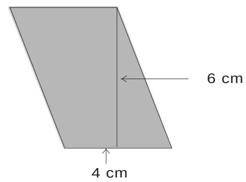


En la solución 1 y 2 el nivel de razonamiento utilizado es similar, ya que se dividió la figura en rectángulos para luego hallar las áreas parciales y por último aplicar una suma para el área total. La solución 3 se hizo una completación de la figura para luego quitar la parte agregada, lograr el desarrollo de esa idea requiere de un nivel más alto de pensamiento. .

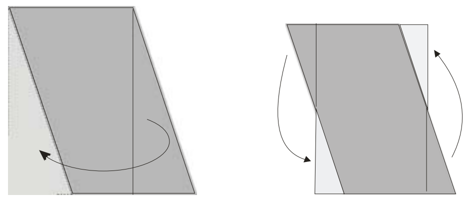
El aprendizaje de cálculo de área de figuras combinadas es clave para aplicarlo en el descubrimiento del procedimiento de cálculo del área de triángulos y de diferentes cuadriláteros, tales como: romboide, trapecio y rombo, así como del círculo, pentágono y hexágono.

Cálculo de área del romboide

Adquirido el conocimiento del cálculo de área de un rectángulo y ejercitado el cálculo de área de figuras combinadas, se procederá al cálculo de área del romboide. Para ello se presentará como desafío a las o los alumnos pensar la manera cómo transformar el romboide en un rectángulo, para así poder aplicar la fórmula de cálculo de área del rectángulo, que ya fue aprendido por los alumnos.



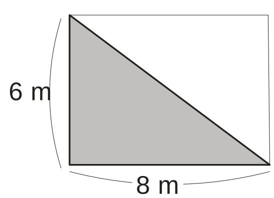
Entre las soluciones que pueden dar las o los alumnos están las siguientes:



Las gráficas anteriores muestran la transformación del romboide en un rectángulo, por lo tanto, la fórmula del área del romboide será la misma que la del rectángulo (área de rectángulo=largo x ancho o base x altura). Para el ejemplo anterior la respuesta es 24 cm^2

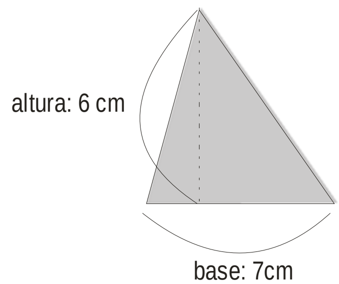
Cálculo de área de triángulo

Al igual como se realizó el cálculo de área del romboide, la comprensión del cálculo de área de triángulo también se realiza por descomposición o transformación de la figura en otra, cuya fórmula de área ya es conocida. Para lograrlo es importante que los alumnos tengan la oportunidad de experimentar, manipular, recortar el triángulo hasta transformar en otra figura cuya fórmula es conocida. Por ejemplo, para el área de triángulo, los alumnos rápidamente percibirán que es la mitad del rectángulo, cuyo largo es la base del triángulo y el ancho es la altura, pero en este caso deben dividirlo entre 2.



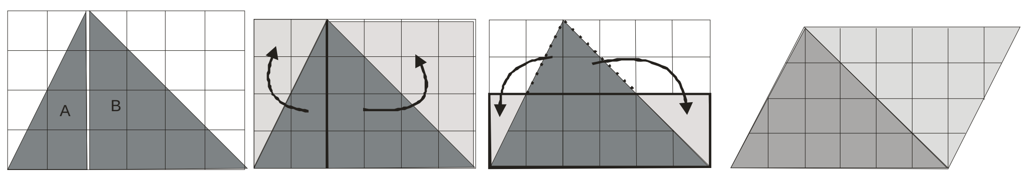
Área del triángulo rectángulo = 6 x 8 ÷ 2 = 24

Comprendido el cálculo de área de un triángulo rectángulo se procederá con la comprensión del cálculo de triángulo no rectángulo. Por ejemplo se puede pedir a los alumnos que piensen la manera como calcular la medida de área del triángulo no rectángulo a través de la descomposición o transformación en rectángulo o romboide.



Las posibles soluciones que pueden presentar los alumnos pueden ser las siguientes:

Solución 1 Solución 2 Solución 3 Solución 4



La **solución 1** consiste en pensar en dos triángulos rectángulos, se calculan parcialmente y luego se suman.

La **solución 2** consiste en un rectángulo, el triángulo es la mitad del rectángulo, se calcula el área del rectángulo y se divide entre dos.

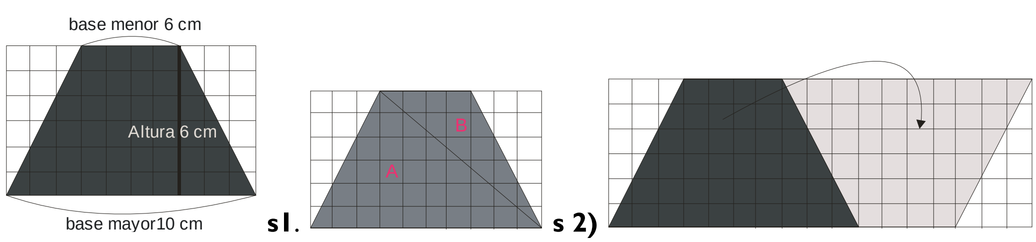
La **solución 3** consiste en recortar el triángulo y se transforma en un rectángulo en donde la base es la misma y la altura es la mitad de la altura del triángulo.

La **solución 4** consiste en transformar la figura en un romboide utilizando dos triángulos no rectángulos en forma invertida, se calcula el área del romboide y se divide entre dos.

En cualquiera de las soluciones la respuesta es **12 cm²**

Cálculo de área de trapecio

En igual forma para el cálculo de área del trapecio se utiliza el procedimiento de transformación en otra figura que ya se conoce la fórmula. Se pide a los alumnos que piensen cómo calcular el área de un trapecio, como el que a continuación se presenta:



La **solución 1** consiste en dividir el trapecio en 2 triángulos, se realizan los cálculos y luego se suman los resultados parciales.

La **solución 2** consiste en transformar el trapecio en un romboide cuya base es la base mayor mas base menor del trapecio y la altura es la misma. Se aplica la fórmula de área de un romboide y se divide entre dos porque se unieron dos trapecios

Es de esta manera como se ha enseñado el cálculo de área de figuras geométricas, según la propuesta metodológica de GUATEMÁTICA, por los resultados alcanzados hasta el momento creemos que esta modalidad puede transformar sustantivamente la forma de enseñar y aprender la matemática en la escuela primaria guatemalteca.

Referencias bibliográficas

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: GAMI, S. L.

Agencia de Cooperación Internacional del Japón/Ministerio de Educación. (2008). *GUATEMATICA 5º grado*. Guatemala: CIMGRA.

Ministerio de Educación. (2007), *Currículum Nacional Base*. Guatemala: Tipografía Nacional.

CAPITULO 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Patricia Lestón

Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". (Argentina)
patricialeston@gmail.com

Las producciones que se presentan a continuación en este capítulo están orientadas hacia una de las tareas que le dan sentido a la Matemática Educativa: el análisis de la matemática escolar actual y las perspectivas que deben atenderse para el rediseño de su discurso. La investigación como producción científica en cualquier ámbito resulta suficiente para justificar la tarea de los investigadores, pero en el caso de una ciencia social, como es la nuestra, y más aún, de una ciencia que pretende cambios en el ámbito educativo, la investigación por sí misma como producción de nuevo conocimiento no alcanza. Es necesario que lo que se investiga, se detecta y se propone llegue a las aulas de matemática de todos los niveles, que afecte de manera sustancial la tarea de docentes y alumnos, para que pueda pensarse en un verdadero sentido de la tarea del matemático educativo.

Los aspectos socioepistemológicos que se consideran en estas producciones se vinculan con una mirada particular del hecho educativo, en la cual se involucran a modo de sistema las miradas sobre el conocimiento y su naturaleza epistemológica, su acercamiento didáctico, las posibilidades de comprensión de quienes serán constructores de esos conocimientos, y la mirada social (Cantoral, 2001), según la cual se pueden comprender las relaciones entre todas las otras miradas en un escenario cultural, espacial y temporalmente ubicado (Crespo Crespo, 2007).

La socioepistemología postula como uno de sus principios que no ha de atenderse a lo que enseñamos en sí sino a los motivos de construcción y relevancia de eso que enseñamos.

> La perspectiva socioepistemológica no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Es decir, intenta crear un modelo que refiera la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales: el reto es formular epistemologías sobre las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático. (Cordero, Cen, Suárez Téllez, 2010, p. 190)

Hablar y pensar en modelos es tener pretensiones de llegar de manera real a la escuela, a sus actores, a rediseñar y resignificar el discurso matemático escolar. La socioepistemología plantea la necesidad de problematizar lo que ocurre en las aulas, y de lograr una mirada que salga de los salones y que observe y analice todo aquello que de una manera u otra ingresa en ella. No es sino a través de la investigación que un problema, una vez que se ha detectado, puede enfrentarse y estudiarse para poder encontrar alguna respuesta que permita construir una propuesta. Pero no es sino en el aula y con los docentes donde esas propuestas pueden tomar dimensión real, afectar el discurso y llenar de sentido la tarea educativa de alumnos y docentes.

Los trabajos que aquí se presentan están dirigidos en ese sentido, intentan analizar la realidad de las aulas de matemática actuales y lo que las afecta, y devolver a ellas algunas ideas que puedan servirles para modificar lo que se hace. Esperamos que el lector pueda observar cuáles son las miradas de los autores y comprender las necesidades y preguntas que llevaron a los investigadores a producir estos escritos

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (2),* 187-214

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México

LA NOCIÓN DE PREDICCIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES VARIACIONALES. UN ESTUDIO DE CONSTRUCCIÓN DE DISCURSO

Leslie Torres, Eddie Aparicio
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
torres_leslie09@hotmail.com, alanda@uady.mx

Resumen. En este escrito se reporta la forma en que el gesto y la interacción entendida en un sentido sensorial, forman parte de un discurso matemático construido en el contexto de una actividad predictiva. Se describe cómo el gesto y la interacción pueden favorecer –mediar– la predicción matemática en las personas.

Palabras clave: predicción, discurso, estudiantes

Abstract. In this paper we report how the gesture and interaction understood in the sensorial sense, are part of a math discourse constructed in a predict activities context. We also describe how the gesture and interaction can foster –mediate- math prediction in humans.

Key words: prediction, discourse, students

Objeto de estudio

Con el propósito de identificar procesos y mecanismos de carácter social que permitan potenciar un discurso matemático escolar más centrado en prácticas que en conceptos, interesó indagar mediante un estudio clínico de corte transversal, formas en que jóvenes escolares de distintos niveles educativos (Secundaria, Bachillerato y Universidad), emplean y construyen un discurso asociado a la noción de predicción matemática.

Se consideró a la noción de predicción matemática, en tanto que en la actividad predictiva se reconoce una práctica social que posibilita la generación de herramientas y conocimiento matemático. Así, para alcanzar tal propósito se analizó lo escrito, discutido y gesticulado por estudiantes al momento de resolver una secuencia de actividades de naturaleza predictiva, diseñadas a partir de considerar a la predicción matemática en tanto actividad escolar y práctica social, pues la necesidad de predecir y la posibilidad de hacerlo, constituye una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos (Cantoral, 2001).

En el estudio se consideró que el *discurso* es una forma de comunicación que permite articular y codificar mensajes, sensaciones, emociones y socializar significados. En este sentido se asume que el análisis del discurso es un medio que posibilita entender y obtener evidencia empírica sobre el papel del habla, el gesto y la escritura referente a un contexto específico de interacción social entre las personas.

En Aparicio y Cantoral (2006) se menciona que al estudiar el discurso empleado por estudiantes en la realización de diferentes actividades en un ambiente de interacción, se puede obtener información acerca de las nociones e ideas con las que un estudiante construye un conocimiento específico. En la misma dirección, Buendía y Carrasco (2009) identifican que los argumentos generados por los individuos al enfrentarse a una situación específica, da evidencia de las nociones con las que asocian dicha situación, manifestándose el tipo de razonamiento utilizado por los estudiantes, así como los conceptos matemáticos.

Por ello, a través del discurso generado por los estudiantes se pretendió observar si en el Discurso Matemático Escolar – DME –, se favorece el desarrollo de situaciones que involucran la puesta en juego de la noción de predicción matemática. En este sentido, se realizó en primera instancia un análisis de los ejemplos y ejercicios propuestos en libros de texto empleados en cada uno de los niveles educativos considerados. De dicho análisis se determinó que la predicción es una acción presente en los ejemplos y ejercicios, observándose algunas aplicaciones de conceptos matemáticos, sin embargo, en las situaciones predictivas no se exige una predicción matemática en un sentido amplio, pues en la situación misma se ofrece información explícita y guiada sobre el comportamiento del fenómeno supuestamente a modelar, excluyéndose la necesidad de un análisis fino por parte de los estudiantes, reduciendo su acción a la sustitución de valores dados o solicitados. Véase el siguiente ejercicio 4.9 tomado de Stewart, Redlin y Watson (2001, pp. 164):

Los gastos por importaciones energéticas de un país en miles de millones de dólares entre 1990 y 1995, están expresados en la siguiente tabla:

x (año)	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**
y (millones de dólares)	45	90	135	180	225	270

- *¿Cuál es la razón de cambio para el comportamiento de los gastos por importaciones energéticas en el lapso 1990 -1995?*
- *Suponiendo que el comportamiento se mantenga lineal, <u>predice</u> el gasto que se tendrá en 2003.*

En el libro de Cantoral, Castañeda, Farfán, Lezama, Martínez, Montiel y Sánchez (2007) *Matemáticas 2,* se plantea la siguiente situación:

> *Las siguientes dos tablas describen el descenso de temperaturas en dos cámaras de refrigeración. Calcula los datos que faltan en ambas tomando en cuenta que el descenso de temperatura fue constante e inició en 0 ºC.*

Minutos	Temperatura
1	
2	
3	
4	
5	-15 °C
6	
7	
8	
9	

Minutos	Temperatura
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	-13.5 °C

En ambos ejercicios se hace referencia al comportamiento variacional del fenómeno o situación. Por tanto, la actividad predictiva no representa la necesidad de realizar una predicción en un sentido amplio, sino el reconocimiento de la posibilidad de aplicar un concepto o modelo matemático y sustituir valores dados o solicitados.

Marco teórico

En la perspectiva socioepistemológica se asume que en el estudio de procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático, no solo se ha de considerar epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática, sino también, epistemologías modelizadas a través de la actividad humana. Y en consecuencia, se asume una nueva base didáctica sobre la cual la matemática escolar ha de reorganizar la obra matemática (Cordero, 2001).

Dicho así, desde esta perspectiva teórica interesa analizar no solo a los participantes en sí mismos, los conceptos o la relación entre ambos, sino a la actividad y práctica social, pues la atención está puesta en las formas de constituir conocimiento (Cordero, 2005).

En ese sentido, un trabajo enmarcado en lo socioepistemológico no se circunscribe en los conceptos o en las personas, sino en el papel de los contextos. Esto es, en los usos del conocimiento, en lo funcional, en la manera que se construye y comparten significados y los tipos de razonamientos asociados.

Por lo anterior, el presente trabajo se enmarcó en la perspectiva socioepistemológica, pues el interés estaba justo en modelar una actividad humana en el contexto de una práctica predictiva y no en los conceptos o en la actividad matemática.

Método de investigación

Participantes

En el estudio participaron tres estudiantes de secundaria, tres de bachillerato y tres de universidad, haciendo un total de nueve estudiantes por los tres niveles educativos, considerando para cada nivel, la presencia de un hombre y dos mujeres o viceversa, como se muestra en la siguiente tabla 1.

	Nivel educativo		
	Secundaria	Bachillerato	Universidad
Edad en años	15 – 15 – 14	17 – 18 – 18	20 – 18 – 20
Género	M – M – H	H – H- M	H – M – H

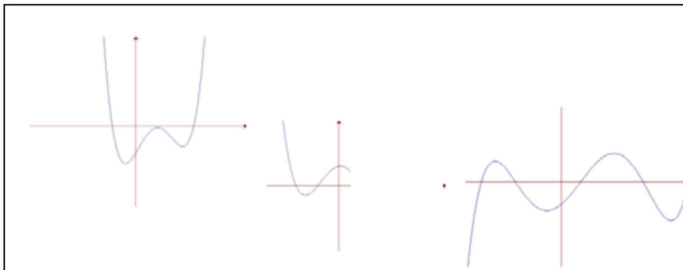
Tabla 1. Población participante en el estudio

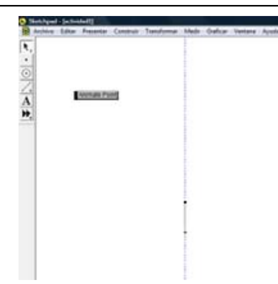
Los participantes en el estudio fueron voluntarios, no recibieron beneficio alguno por su participación. Cabe señalar que los estudiantes de secundaria y bachillerato eran del último grado, los de universidad iniciaban su formación en enseñanza de las matemáticas.

Instrumento

El instrumento empleado en el estudio constó de cuatro actividades matemáticas que combinaban lo estático con lo variacional en un escenario gráfico-numérico computacional que precisaba de una actividad predictiva por parte de los estudiantes. En las primeras dos actividades se presentaban situaciones dinámicas – animaciones en el programa Sketchpad 4.5 de geometría dinámica – que favoreciere la observación de movimientos. La actividad dos involucraba a los estudiantes en una situación contextualizada.

Actividad 1. Las gráficas representan la distancia recorrida por una partícula con respecto al tiempo. Indica la gráfica que consideres corresponde al movimiento presentado en la animación a la derecha de las gráficas. Si te es posible explica tu respuesta.

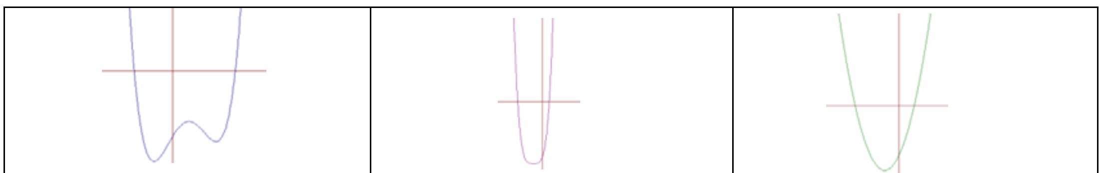




Actividad 2. La animación representa un concurso de ***"Jala Soga"*** *donde la idea es que se amarra un paño a la mitad de una soga, se forman dos equipos en cada extremo y estos deberán jalarla hasta obtenerlo. Gana el equipo que obtenga primero el paño. ¿Qué equipo (1 o 2) ganará el concurso? Si te es posible explica tu respuesta.*

La actividad tres se centró en el aspecto variacional esperando que los participantes determinaran lo variable y la variación. Por razones de espacio se omite mostrar la actividad. En la actividad cuatro se solicitaba "predecir" ciertos estados globales y locales, solo mostrando información de estados locales parciales. El estado global se mostró en un código gráfico y los estados parciales en uno numérico.

Actividad 4. Determina qué gráfica le corresponde a cada tabla de valores y completa los valores faltantes en ellas. Si te es posible explica tu proceder. Sobra una gráfica.



x	-2				0				2
y	-9				-9				71

x	-2				0					
y	-9.75				-7.75					

Al término de cada actividad se promovía la discusión de las respuestas para observar la forma en que los participantes explicaban sus razonamientos.

En la aplicación del instrumento se video registraron las producciones verbales, escritas y gestuales de los participantes.

Resultados

Se identificó que los participantes de los tres niveles educativos lograron predecir de un escenario dinámico a uno estático, empleando argumentos fundamentados principalmente en el análisis del movimiento, explicando el comportamiento que seguían las situaciones planteadas. Apoyándose en la forma de la gráfica lograron describir el movimiento que debería seguir la partícula – punto en la animación – para obtener una tal representación.

De igual manera se observó que en las actividades tres y cuatro, los participantes logran determinar lo variable y la variación, prediciendo así en las situaciones. Sin embargo, se observó que en los argumentos empleados no se hace referencia a conocimientos matemáticos formales, sino a nociones matemáticas asociadas. Esto es, el uso de los conceptos matemáticos escolares como tal, no se hizo presente explícitamente.

Del análisis de los videos registros se identificó que los aspectos intervinientes en la construcción del discurso por parte de los participantes asociado a la noción de predicción matemática, son *el gesto* y *la interacción* en un sentido sensorial.

El gesto

Lo gestual es una forma de comunicación cultural que sirve de enlace entre los significados y la comunicación de las sensaciones, nociones e imágenes internas. El gesto precede al lenguaje escrito y a las representaciones, es denotativo.

En el estudio se identificó al gesto en dos momentos, primeramente, acompañando al sujeto en el entendimiento de las situaciones y posteriormente, en sus discursos. El gesto permitía comunicar de forma "más clara" sus razonamientos y argumentos en los procesos de socialización. El gesto se observó asociado a un discurso racionalizado, esto es, que los participantes razonaban la situación conforme desarrollan su discurso, advirtiendo que el empleo del gesto permite diversificar el discurso conforme éste se desarrolla.

Se cita como caso lo acontecido con los jóvenes de secundaria.

El estudiante E_1, quien no gesticulaba mostró respuestas muy cortas. Por ejemplo en la Actividad 1 decía:

E_1:*"es el inciso (a) porque conforme pasa el tiempo, la distancia va aumentando"*

En cambio la estudiante E_2 del mismo nivel que si gesticulaba, mostró un discurso más diversificado y argumentos más profundos. Por ejemplo en la misma actividad 1 decía:

E2: "Al ver el movimiento del punto se puede observar como recorre la distancia la partícula, lo que me hizo llegar a la conclusión de que la respuesta es el inciso (a), porque hace referencia al movimiento que realizó. Ya que las otras van así (mueve sus manos en la forma en la que se comporta el fenómeno descrito en las gráficas)*, y no corresponden a la animación. Esta (inciso (a)) por el movimiento te vas fijando y no hace mucho así* (mueve de manera oscilante la mano).

En los jóvenes de bachillerato lo gestual era parte de su discurso explicativo y justificaciones de sus respuestas. Por ejemplo:


E_1 decía: *"pude observar que el equipo dos jalaba fuerte pero el equipo uno respondía con mayor fuerza, luego el equipo dos jalo con fuerza que casi gana entonces supongo que el equipo uno al responder con mayor fuerza debe ganar. Sin embargo, hay que considerar que el equipo uno tiene que resistir la fuerza del equipo dos, pero creo que el uno gana"*.

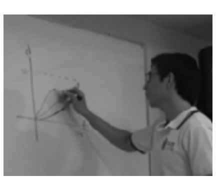
Durante el discurso emplea el gesto de manera que refuerza sus comentarios y con él representa la idea de fuerza. Su compañero se limita a mirar la animación.

La interacción en un sentido sensorial

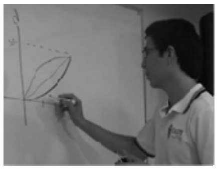
La interacción en un sentido sensorial se refiere a que las personas para la construcción de su discurso necesitan, previo a la argumentación, armonizarse, tratar, ya sea de manera tangible o mental, la situación planteada. Por ejemplo, se identificó que en la actividad tres los participantes hacen referencia a la gráfica, la representación visual, pero al mismo tiempo durante su discurso la repintaba, hacían trazos auxiliares, de manera que "interactuaban" con la situación para hallar alguna conjetura sobre lo que se les solicitaba.

En lo general se pudo advertir que los participantes durante la construcción de su discurso predictivo precisaban de una fase de interacción con el fenómeno – situación – que no necesariamente se restringía a lo físico – tangible –, sino una interacción sensorial en la que pueda manipular y "sentir" la situación.

Este aspecto empleado en la construcción del discurso se pudo identificar con mayor claridad en la actividad tres, cuando se planteaba curvas a los estudiantes, pues a partir de interactuar con éstas pudieron establecer respuestas precisas a la situación. Por ejemplo:



E_2 de bachillerato decía: *"La forma en la que lo resolví es solo percepción. Consideré que la curva que recorre mayor distancia es la tres porque para mí todos van a llegar a la misma distancia y en el mismo tiempo, entonces lo que varía es la aceleración, y la curva uno me da la impresión de que empieza a disminuir su aceleración conforme pasa el tiempo, la dos la mantiene constante y la curva tres la aumenta debido a que en algún momento tiene que alcanzar la*



misma distancia en el mismo lapso de tiempo. Entonces yo considero que la curva tres, pero es solo percepción. Supongo que en el lapso de A a B la curva tuvo que acelerar mucho.

Conclusiones

Se considera que al combinar el gesto con la interacción aparecen argumentos predictivos más sólidos y acertados. Y por el contrario, cuando las personas se ven "limitados" para emplear los dos o alguno de los dos recursos, la predicción se vuelve aun más compleja. Esto se ejemplifica con un cuadro de imágenes de la última actividad, en donde los participantes a pesar de emplear estrategias para responder, al verse limitado en la interacción con la situación no logran una respuesta concreta y fundamentada.

Además véase lo dicho por participantes de secundaria, bachillerato y universitarios respectivamente:

E_3: La tabla 1 es la gráfica (b) y la 2 es la (c). No supe cómo justificar...

E_2: La tabla 1 es (b) por la distancia que hay entre las x positivas y yo dije avanzo mucho en y y no avanzó mucho en x y por eso. Siento que para completar la tabla necesitaríamos de la fórmula..., las gráficas pueden ser muy engañosas...

E_1: puede ser cualquiera, el eje de las x no sabes en que numeritos corta es poca información la que nos brindan pero la 1 es la más factible para (b) …

Se concluye que el gesto y la interacción sensorial constituyen parte de un discurso que se construye en una actividad predictiva específica de naturaleza variacional.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 9(1), 7-30.

Buendía, G. y Carrasco, E. (2009). Gráficas de variación: reflexiones sobre la visualización de la curva. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 22, 35-43.

Cantoral, R. (2001). Introducción: los contextos de significación. En Grepe, N. Matemática Educativa un estudio de la formación social de la analiticidad. México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Castañeda, A., Farfán, R.-M. (Directora), Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G., Sánchez, M. (2007). *Matemáticas 2*. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: McGraw Hill.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 4(2). 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 8(3). 365-386.

Stewart, Redlin y Watson. (2001). *Precálculo 3*. México: Thomson Learning.

REPRESENTACIÓN SOCIAL DE LAS MADRES SOBRE LA CIENCIA, EN UN ENTORNO DE DIVULGACIÓN DEL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO. UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Francisco Cordero Osorio, Maribel Moreno Ochoa
CINVESTAV - IPN (México)
fcordero@cinvestav.mx, mmoreno@cinvestav.mx

Resumen. A partir de los estudios sobre divulgación que se han realizado dentro de la teoría socioepistemológica, se quiere dar paso a la importancia que juega el rol de las madres dentro de las familias, a explorar la funcionalidad del conocimiento en su cotidiano y éste como posible influencia hacia sus hijas(os), ya que se está convencido que es en el seno familiar, en el que pudiera nacer el interés a los temas científicos, para tal propósito se trabajará con aspectos metodológicos de la teoría de representaciones sociales, los cuales brindan el apoyo necesario para tal objetivo.

Palabras clave: divulgación, ciencia, funcionalidad, cotidiano

Abstract. Taking as a base the studies on popularization that have been done within the socioepistemology theory, we want to introduce the importance of the roll of the mothers within the families plays, to explore functionality of knowledge in everyday life and the latter as possible influence towards daughters and sons, since we are sure that it is in the family life, in which could be born to be interested to scientific subjects, for such intention we will work with methodological aspects of the theory of social representations, which offer the necessary support for such an objective.

Key words: popularization, science, functionality, everyday life

Introducción

La importancia de la ciencia conlleva al desarrollo de la sociedad, a su evolución y gracias a la cual se cuenta con los avances tecnológicos, científicos, filosóficos, etcétera, que hasta el momento la han caracterizado (Gómez, 2009). No es fácil tal desarrollo, ya que se requiere de un esfuerzo en conjunto, tanto de entidades gubernamentales, de los recursos económicos, de políticas que le apuesten en un principio a la educación, de las(os) actoras(es) sociales inmersos, donde se persiga fomentar una cultura científica entre la población con el fin de incrementar las vocaciones científicas (Zaldívar, 2009).

Interesa saber cómo acercarse a las(os) ciudadanas(os) con el propósito de fomentar el conocimiento científico, bien podría ser por medio de la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia en la escuela, donde se denuncia que el principal problema al igual que la investigación en didáctica de la ciencia son las inapropiadas y negativas actitudes de los estudiantes hacia esta, y más específicamente, la falta de interés hacia la ciencia de la escuela (Fensham, 2004; citado en Vázquez y Manassero, 2008).

Según Vázquez y Manassero (2008), "la preocupante y progresiva depresión actitudinal hacia la ciencia se atribuye a que la ciencia escolar se va ganando una creciente imagen negativa (autoritaria, aburrida, irrelevante para la vida diaria y causa de los problemas medio-ambientes que preocupan a la opinión pública) en la mente de los estudiantes".

Pero, no se debe dejar de lado que, están inmersos en una cultura, y por lo cual, se habrá que dar cuenta de su realidad, la manera que perciben la ciencia dentro de su vida cotidiana. Donde deberá de alcanzar mayor robustez y ser entendido en los procesos de socialización del conocimiento, así como en las actividades que condicionan al humano: el trabajo, la labor y la acción (Arendt, 2005; citado en Cordero y Gómez, enviado para su publicación), en ese sentido la vida cotidiana se presenta como una realidad interpretada por las mujeres y los hombres y que para ellas(os) tiene significado subjetivo de un mundo coherente que comparte con otras(os), reflejando un "aquí y ahora" (Cordero y Gómez, enviado para su publicación).

Una manera de acercarse a su cotidiano, es por medio de los escenarios de divulgación de la ciencia, los cuales una de sus funciones es socializar el conocimiento para que el público tenga una mayor cantidad de puntos de referencias que le permitan orientar sus acciones a partir del análisis y la comprensión del mundo físico y sociocultural en el que vive. (González, 2003; citado en Zaldívar, 2009, p.10).

En ese sentido, la divulgación científica intenta afectar al cotidiano de las(os) ciudadanas(os), de la comunidad no necesariamente científica (Cordero, Gómez, enviado para su publicación), ciudadanas(os) que convergen en un momento histórico particular llevando consigo intereses particulares y un bagaje cultural que influye en su forma de significar o de ignorar el conocimiento científico que se divulga (González, 2003, citado en Zaldívar, 2009, p.9).

De ahí que se problematice los factores que entran en juego dentro de la divulgación de la ciencia para una sociedad no necesariamente científica, en tanto que no se ha considerado como objeto de estudio (Cordero, Albores, Asomoza, Briceño, Cabrera, Canché, Cen, Gómez, Miguel, Silva, Simón, Soto, Viramontes y Zaldívar, 2009; Cordero y Gómez, enviado para su publicación), en particular importa el rol de las madres dentro de la familia. La representación social de las madres como un factor de puente entre el dominio científico y el dominio cotidiano dentro de los escenarios de divulgación científica, que pueda permitir tener indicadores de la funcionalidad del conocimiento cotidiano, pero entonces, ¿Un programa de divulgación de la ciencia da elementos que permitan realizar un estudio de género? ¿Por qué? ¿Qué tan pertinente puede ser?

Gómez (2009), enfatiza sobre la importancia de hacer estudios referentes al carácter científico sin dejar de lado el conocimiento que se origina en la cotidianidad.

Actualmente existen investigaciones educativas que han puesto su atención en estudios de género, especialmente como un medio por el cual se inicie la creación de condiciones para la equidad, y con el cual la educación pueda asumir la bandera de lucha contra cualquier tipo de discriminación, y en especial, de las que devienen de la construcción sociocultural (Araya, 2001).

El género no sólo se ha considerado como “filtro” cultural con el que se interpreta el mundo, sino también como una especie de armadura con la que se constriñe la propia vida, cobrando relevancia en ámbitos tanto políticos, económicos, educativos así como en la construcción del conocimiento científico (Rodríguez, 2008).

Polanco (2004, p. 6), menciona que “Tras treinta años de los movimientos feministas y cambios sociales de la mujer en México, la maternidad continúa siendo de gran importancia para esta cultura. La población estudiada de ambos sexos menciona el ser “buena madre” como un rol con gran peso social”.

Jiménez (2008, p. 8), señala que “las evidencias muestran que los(as) padres y madres motivados(as), están convencidos de que pueden apoyar e impulsar el aprendizaje sus hijos(as) y poner empeño en ello”. De aquí que tenga relevancia la influencia de estos en sus hijas(os), donde las madres pueden facilitar el desarrollo cognitivo y en particular su motivación para aprender, proveyendo condiciones y experiencias apropiadas (Jiménez, 2008).

“La noción de representación social concierne a la manera en que nosotros sujetos sociales, aprendemos los acontecimientos de la vida diaria, las características de nuestro medio ambiente, las informaciones que en él circulan, las personas de nuestro entorno próximo o lejano” (Jodelet 1986, citado en Rodríguez, 2009, p. 26).

Marco teórico

Este trabajo se apoya en la Teoría Socioepistemológica, porque en su afán de estudiar los fenómenos que circundan dentro y fuera de la enseñanza-aprendizaje de la matemática se ha dado a la tarea de indagar con una mirada más cercana a las(os) ciudadanas(os) como actoras(es) sociales dentro de una realidad que les permita construir su propio conocimiento.

Permite incorporar cuatro dimensiones fundamentales en la construcción del conocimiento; su dimensión sociocultural, su naturaleza epistemológica, los planos de lo cognitivo y los modos de transición vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003). Donde el análisis de las partes permite entender el todo; es decir, la socioepistemología no separa entre individuo y sociedad ni separa entre acto escolar y acto cotidiano, sino que intenta analizar una realidad concreta, tangible y modificarla; por ello, su tesis básica es el rediseño del discurso matemático escolar (Espinosa, 2007).

Donde una representación social es una forma de conocimiento socialmente construida cuya función es la elaboración de los comportamientos, las prácticas y la comunicación entre los individuos, un medio de construcción de la realidad social (Arellano, 2008).

Recientes investigaciones bajo la Teoría Socioepistemológica intentan abrir brecha teniendo como objeto de estudio a la divulgación del conocimiento, (Gómez, 2009; Viramontes, 2009; Zaldívar, 2009), los cuales dan sustento a este trabajo.Podemos ver el cotidiano como el conocimiento de sentido común, donde las representaciones sociales son sólo una expresión de tal conocimiento, el cual en sus diversas expresiones debe ser reconocido y aprehendido en sus respectivas dimensiones por los estudiosos de las ciencias, porque de acuerdo con él se puede comprender el sentido que adquieren las prácticas educativas específicas (Piña y Cuevas, 2004).

Metodología

La motivación para la realización de este trabajo nació por la puesta en escena de un programa de divulgación del conocimiento científico, llamado Cinvesniñ@s (Cordero, Albores, Asomoza, *et al.*, 2009), en su edición tercera, dentro de las instalaciones del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), unidad Zacatenco, ubicado en la ciudad de México, llevado a cabo los días 27 y 28 de noviembre de 2009. Además de ser parte de su organización en el núcleo de difusión.

Sólo para contextualizar, el total de asistentes al evento fue de 5049, distribuidos de la siguiente manera:

- Total de niñas y niños: 2758 participantes, 1438 niñas y 1320 niños.
- Total de gente adulta: 2291 participantes, 1496 mujeres y 795 hombres.

Dentro del evento, se realizaron encuestas con el fin de recabar las opiniones del público participantes. Del total de encuestas, se aplicaron a 1,953 personas de las 5,049 que asistieron al evento. De las personas encuestadas 792 fueron del sexo masculino, 1127 del sexo femenino y 34 personas sin especificar sexo.

Fueron cuatro diseños de encuestas para atender dos rubros:

- El primer rubro, fue para obtener las opiniones de los talleres y las visitas a laboratorios.
- El segundo, para obtener las opiniones de niñas y niños y gente adulta respecto al evento.

De las cuales, 164 personas se entrevistaron para las visitas a laboratorio, 799 personas para los talleres, 456 gente adulta, 534 niñas y niños.

Para la recopilación de la información, usamos una metodología de corte cualitativo la cual se realizó por medio de entrevistas semiestructuradas. Por el momento esta investigación se encuentra en el análisis de los datos, el cual será un indicativo para su posible rediseño, se entrevistaron a 29 personas, entre las cuales, 15 fueron mamás y 14 niñas(os) que oscilan desde la educación primaria hasta nivel superior. Cuyo principal objetivo es investigar acerca del papel que juega la ciencia es su cotidiano.

Se está reflexionando acerca de la vinculación de algunos constructos de la Teoría Socioepistemológica, las representaciones sociales y el género, que den sustento a este trabajo.

Referencias bibliográficas

Araya, S. (2001). *La equidad de género en la educación*. Recuperado el 29 de septiembre de 2009, de: http://www.publicaciones.cucsh.udg.mx/pperiod/laventan/volumenes/ventana13.htm.

Arellano, Y. (2008). *Representación social del aprendizaje de las matemáticas, en los participantes del programa Niñ@s Talento del Distrito Federal.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cordero, F., Albores, A., Asomoza, R., Briceño E., Cabrera L., Canché E., Cen C., Gómez K., Miguel, M., Silva H., Simón G., Soto D., Viramontes I., y Zaldívar, J. (2009). Cinvesniñ@s. Una experiencia de difusión del conocimiento científico. *Avance y perspectiva*. 2 (4), 33 – 47.

Cordero, F. y Gómez, K. Los procesos de difusión del conocimiento matemático: La funcionalidad y el cotidiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (enviado para su publicación).

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa,* 6(1), 27-40.

Espinosa, G. (2007). *Estudio de las interacciones en el aula desde una perspectiva de género*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Jiménez, M. (2008). *El papel de las madres en la motivación que presentan sus hijos hacía el aprendizaje escolar.* Tesis de Doctorado no publicada. Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México.

Piña, J. y Cuevas, Y. (2004). La Teoría de las Representaciones Sociales. Su uso en la Investigación Educativa en México. *Perfiles Educativos*, 26, 102 – 124: México.

Polanco, G. (2004). *El nuevo papel de la mujer mexicana en la sociedad.* Recuperado el 31 de octubre de 2009 de: http://www.uia.mx/actividades/nuestracom/05 /nc152/6.html.

Rodríguez, H. (2008). *El enfoque de género en la construcción de conocimiento científico.* Recuperado el 7 de septiembre de 2009 de: http://www.revista.unam.mx/vol.9/num7/art48/int48.htm#a.

Vázquez, Á. y Manassero, M. (2008). *El declive de las actitudes hacia la ciencia de los estudiantes: un indicador inquietante para la educación científica.* Recuperado el 5 de septiembre de 2009 de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ ArtPdfRed.jsp?iCve=92050303.

Viramontes, I. (2009). *La justificación funcional en el marco de difusión de la ciencia. Una mirada socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de IPN. México

Zaldívar, J. (2009). *Una caracterización de la función de un escenario de difusión de la ciencia desde una visión socioepistemológica. El caso de la resignificación de lo estable.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de IPN. México.

ARGUMENTACIONES GESTUALES Y VISUALES EN ESCENARIOS ESCOLARES

Nora Inés Lerman, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
lerman@infovia.com.ar, crccrespo@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta algunos resultados de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico que se centra en identificar y analizar la presencia de argumentaciones gestuales y visuales en el discurso matemático escolar. En esta investigación se muestran algunos ejemplos de aplicaciones de lenguaje no verbal observados en estudiantes del profesorado de matemática y se explicitan las características y funciones que tiene ese tipo de comunicación. Para ello, con los datos recogidos se presenta un análisis cualitativo para detectar y clasificar los hallazgos e inferir posibles formas de aprovechamiento en las aulas.

Palabras clave: argumentaciones gestuales, argumentaciones visuales, lenguaje no verbal, sociolingüística, pragmática

Abstract. This paper presents some results of a socioepistomological investigation about the social construction of knowledge centered in identifying and analyzing the presence of gestural and visual argumentations at scholar mathematical discourse. This research shows some examples and applications of nonverbal communication observed among students of mathematics and the features and functions that that kind of communication has. With the data collected, this report presents a qualitative analysis to detect and classify the findings and realize the possible ways to use them in the classroom.

Key words: gestural arguments, visual arguments, nonverbal language, sociolinguistics, pragmatic

Introducción

El lenguaje utilizado en el aula de matemática es básicamente verbal, presentando características formales sobre todo en su expresión escrita. Sin embargo, la presencia de la comunicación no verbal o paraverbal en el aula de matemática es innegable y el escaso o nulo conocimiento por parte del profesorado acerca de su utilidad en las dinámicas de enseñanza-aprendizaje de la disciplina es el problema de investigación que motiva el presente trabajo. Entendiendo este fenómeno como resultado de acciones de una comunidad en un escenario sociocultural y como producto de un pensamiento heterogéneo, puede ser tomado en cuenta para beneficiar el proceso de construcción y adquisición de nuevos objetos y conceptos matemáticos por parte de los alumnos.

En esta investigación se muestran algunos ejemplos observados en estudiantes del profesorado de matemática y se explicitan las características y funciones que los definen. Para ello, con los datos recogidos se presenta un análisis cualitativo para detectar y clasificar los hallazgos e inferir posibles formas de aprovechamiento en las aulas.

Las preguntas que se intentan responder en esta investigación son las siguientes:

¿Cuáles son algunas de las formas de argumentación no deductivas no verbales que están presentes en los escenarios escolares?

¿Cómo pueden detectarse, comprenderse y aprovecharse para la construcción de objetos matemáticos?

La sociolingüística, la pragmática, la comunicación no verbal y la proxemia, entre otras, proveen el marco conceptual al presente estudio, y la socioepistemología, como aproximación sistémica y situada, el marco teórico de referencia. La pragmática es considerada pues entiende las relaciones entre el lenguaje y el contexto como básicas para dar cuenta de la comprensión del lenguaje, ejemplo de ello son los procesos inferenciales (Figura 1).

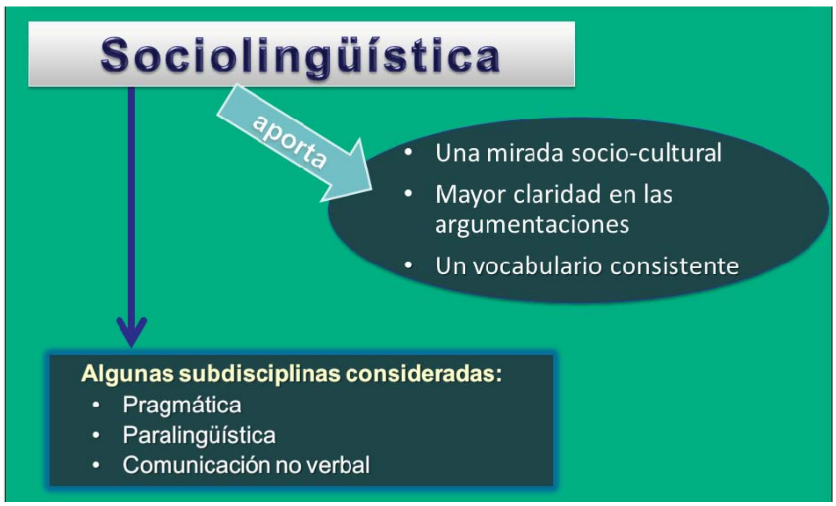


Figura 1. Sociolingüística como marco conceptual de la presente investigación

Es interesante decodificar estos aspectos gesticulativos o argumentaciones gestuales y visuales porque muchas de ellas llevan implícitas y están acompañadas por nuevas herramientas con las cuales pensamos, es decir, que las mismas han alterado el carácter de los símbolos (Tedesco, 1995) y se pueden detectar ciertas formas de argumentación no deductivas, que normalmente son descartadas por los docentes, a pesar de producir convicción en los estudiantes. Este hecho ya ha sido identificado en investigaciones previas (Crespo Crespo, 2007).

Los tipos de razonamiento que propician las argumentaciones gestuales y visuales son varios, entre ellos pueden mencionarse: las inferencias de la abducción, que son explicativas y aparecen en las etapas iniciales de aprendizaje científico. Es en estas primeras fases donde se formulan las hipótesis para determinar su plausibilidad. Asimismo, las argumentaciones gestuales y visuales se pueden asociar al razonamiento analógico y el metafórico.

Austin (1971) afirma que con el lenguaje se pueden "hacer cosas", son los enunciados performativos, los cuales no brindan información ni describen acciones sino que las realizan directamente –realizativos- si es que están dadas las condiciones adecuadas en cuanto a los interlocutores, lugar y momento. Aunque el autor se refiere al lenguaje verbal, existen algunos gestos equivalentes que pueden suplantarlos.

Campbell (2001), coincide sosteniendo que la información gestual puede suplementar el discurso y su clasificación es factible.

En consonancia con los anteriores investigadores, Ekman (1969) afirma que el significado de un gesto puede ser informativo-comunicativo -es decir, de contenido- o interactivo, siendo importante el saber distinguirlos en las clases (Figura 2). En consecuencia, la tarea emprendida en la presente investigación está orientada a esclarecer estas afirmaciones.

Figura 2. Características de las argumentaciones gestuales.

Interpretación de algunas argumentaciones gestuales y visuales observadas

A partir de registros de video provenientes de clases con estudiantes de profesorado de matemática, se analizan en este trabajo algunos gestos y expresiones no verbales utilizadas por ellos para explicar y argumentar sus afirmaciones. Se menciona nuevamente que para el análisis y comprensión de los mismos, se han utilizado algunas nociones provenientes de la sociolingüística, la cual ha servido de marco conceptual.

Se presentan algunos tipos de actividades que se han estudiado en la presente investigación, como por ejemplo:

Resolución de un cuestionario

En la presente actividad exploratoria, se solicita al alumno que dé las coordenadas de un punto previamente ubicado y marcado en un sistema de ejes cartesiano. En la **Figura 3** puede observarse la forma en la que procede para responder a la consigna:

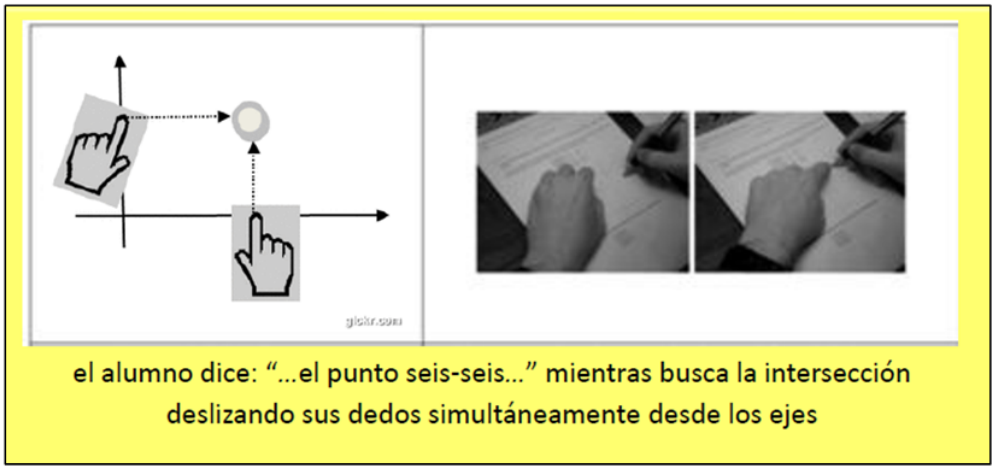


Figura 3. Ubicación de coordenadas

Las *estrategias no verbales* que aplica el alumno con el gesto realizado son las siguientes:

- *Describe*: las convenciones de elaboración y lectura de gráficos cartesianos cuando señala los puntos de partida y realiza trayectorias paralelas a los ejes hacia su punto de convergencia.
- *Asocia*: cuando une los puntos en trayecto simultáneo
- *Compara*: cuando se desplaza hacia arriba y hacia la derecha, lo cual significa que conoce la relación de precedencia u orden de los números reales en el gráfico
- *Clasifica* cuando reconoce que el punto pertenece la intersección de las rectas paralelas a los ejes
- *Evalúa*: cuando constata que al punto hallado le corresponden efectivamente como abscisa y ordenada el valor "6" respectivamente en cada eje.
- *Sintetiza*: cuando posiciona ambos dedos índices sobre el punto para describirlo como un par ordenado.

Las *funciones lingüísticas predominantes* son:

- *Fática*: en el material del profesor, pues el mismo intenta, por diferentes medios, mantener interesado al estudiante

- *Conativa*: en el gesto del alumno, pues su propósito es argumentar, convencer, persuadir al intentar dar respuesta a lo consignado.

Proxemia: el grado es de intimidad pues permanece inclinado sobre el gráfico en actitud interactiva a menos de 45 cm y no existe contacto visual con el profesor en el momento en que el estudiante está atento al texto escrito.

Se observa en sus acciones el inmediato cumplimiento del *principio de cooperación* (Grice, 1975) -un acuerdo tácito o interés compartido por el emisor y el receptor, independientemente del tipo de relación o afinidad que tengan, para lograr una óptima comunicación-. Esto último se puede vincular conceptualmente con el llamado *contrato didáctico* (Brousseau, 2007).

El hecho de señalar el punto (6; 6) corresponde a un *acto de habla ilocutivo* -por su fuerza, lleva una intención y presupone que el interlocutor comparte el código- y se manifiesta como *enunciado performativo,* o sea que es de tipo realizativo, constatativo –se hace algo con el gesto directamente más que describirlo-.

Mediante un *acto de habla perlocutivo* –por sus efectos-, el alumno argumenta utilizando implícitamente formas de representación gráfica, usando sus dedos como *vehículo*.

En el gesto observado en este ejemplo se hace referencia a:

- *Sobrentendidos*: pues apela a convenciones matemáticas compartidas durante la situación comunicativa –objetos, conceptos y relaciones-.
- *Implicaturas* -presuposiciones-: pues infiere argumentando con todo lo que asume como conocido sobre un sistema gráfico cartesiano: escala, dirección, orden, paralelismo, perpendicularidad, cuadrante, intersección, relación funcional, movimiento de traslación, etc.

Producción de texto sintético para utilizar durante una tutoría virtual

En la actividad que se describe a continuación se solicitó a los alumnos que produjeran un material didáctico para utilizar en una tutoría virtual de matemática.

En el mencionado material se simulaba la respuesta a un estudiante vía mail o foro para auxiliarlo con la resolución de un ejercicio o problema por parte de su profesor tutor.

Se pidió expresamente que el material contuviera elementos paratextuales a modo ayudas visuales para facilitar la comprensión del texto y asegurar la comprensión del contenido a comunicar por parte del receptor.

En síntesis, debían producir un pequeño tutorial mediante texto sintético.

En la Figura 4 puede observarse un ejemplo y el análisis de las funciones lingüísticas predominantes en el mismo:

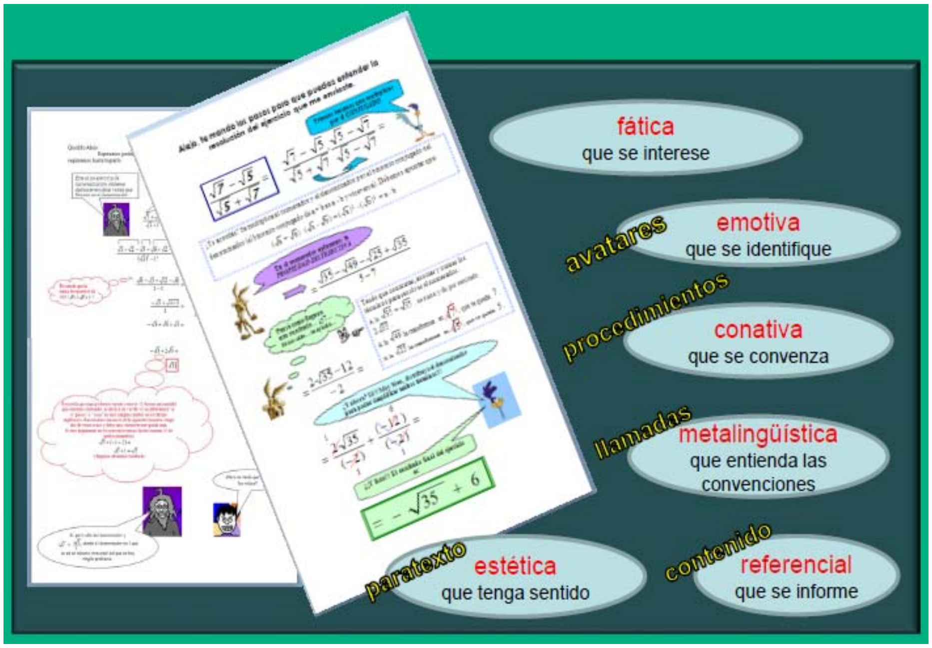


Figura 4. Material didáctico producido para responder a la consulta de un alumno en una tutoría virtual

Algunas conclusiones sobre la presencia de argumentaciones gestuales y visuales

Las argumentaciones funcionan como emblemas, son significativos y conscientes, van culturalmente a la par de una lengua. Equivalen y muchas veces sustituyen a un mensaje verbal pues admiten una transcripción directa.

Articulan o son un nexo entre el lenguaje técnico y el común en los procesos de comunicación y construcción de conocimiento matemático en las aulas y en el discurso escolar. Por lo tanto son recursos o estrategias no verbales útiles para desarrollar o argumentar un tema, en consecuencia son inherentes a los procesos de transposición didáctica.

Los actuales profesores son más que sólo transmisores de conocimiento, pues son mediadores, facilitadores, propiciadores de situaciones de enseñanza y de aprendizaje.

No se pueden ignorar y desaprovechar en la praxis docente los estudios que tienen que ver con las formas de comunicación en las que se manifiestan, claramente, normas sociales y culturales propias del contexto en que se desenvuelven los estudiantes pues:

Si los actos perlocutivos significan hacer cosas con palabras, entonces, las argumentaciones no verbales significan decir cosas sin palabras.

Referencias bibliográficas

Austin, J. L. (1971). *Cómo hacer cosas con palabras*. Buenos Aires: Paidós.

Brousseau, G. (2007). *Introducción al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cambpell, L. (2001). *Visual Classification of Co-Verbal Gestures for Gesture Understanding*. Tesis de doctorado. Massachusetts Institute of Technology. USA.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA. IPN. México.

Ekman, P., Friesen, W. (1969). The repertoire of nonverbal behavior: Categories, origins, usage, and coding. *Semiótica 1*, 49-98.

Grice, H. (1975). Logic and conversation. In *Cole, P. and Morgan, J. (eds.) Syntax and semantics*. Vol. 3. New York: Academic Press.

Tedesco, J. (1995). *El nuevo pacto educativo.* Madrid: Anaya.

LAS FIGURAS DE ANÁLISIS EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
monikmathis@gmail.com, crccrespo@gmail.com

Resumen. Este trabajo forma parte de una investigación llevada a cabo sobre la utilización de las figuras de análisis en geometría y su presencia en el aula de matemática. La investigación, dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático, se enmarca en la socioepistemología. Se centra en el proceso de visualización en el cual las figuras de análisis juegan un papel importante, analizando cuáles son los obstáculos que pueden encontrar los alumnos al realizar dichas figuras. Se presentaran situaciones de aula en las cuales se analizan las formas en que los estudiantes hacen uso de las figuras de análisis y los obstáculos que se ponen de manifiesto en cada caso.

Palabras clave: figura de análisis, obstáculos, visualización

Abstract. This work is part of an investigation about the use of the figures of analysis in geometry and its presence in the classroom of mathematics. The investigation about the social construction of the mathematical knowledge is framed in the socioepistemological theory. This paper reports results on the visualization process in which the analysis figures play an important role, analyzing which are the obstacles that students can find when they use them. We describe classroom situations in which students use analysis figures and obstacles that appeared in each case.

Key words: analysis figures, obstacles, visualization

Las figuras de análisis en geometría

Poincaré afirmaba que "la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites" (Poincaré 1913, p.27), lo que podría traducirse que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas". Pero la pregunta que surge es el ¿por qué de esta afirmación, proveniente de un gran matemático? Puede encontrarse respuesta en las explicaciones dadas por Santaló "Los griegos (...) dibujaban las figuras en la arena, que tenía la ventaja de poder borrar, pero faltaba precisión. Por esto se dijo que la Geometría era el arte de sacar consecuencias de figuras mal hechas" (citado en Galina, 2008, p.15). Pero actualmente, aún esas figuras mal hechas realizadas sobre el papel a modo de bosquejo de ideas internas es que surgen conclusiones correctas, pero ¿cómo se logra encontrar dicho éxito?

El presente trabajo forma parte de una investigación llevada a cabo sobre las dificultades de la utilización de las figuras de análisis en la clase de geometría con alumnos que serán futuros docentes (Micelli, 2010). En dicha investigación se intentó dar respuesta a una serie de preguntas que tienen su origen en una problemática detectada en la dificultad de los alumnos de nivel terciario al usar figuras de análisis, especialmente en la materia geometría del profesorado de Matemática. Durante las clases, pudo observarse que los estudiantes no representan correctamente los datos dados en los enunciados de un problema o toman figuras que representan casos particulares, obviando situaciones generales llegando a conclusiones erróneas o incompletas. Ante dicha problemática se formularon las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?
- El uso de las figuras de análisis en geometría, ¿es comprendido por los estudiantes como necesario y útil o como algo impuesto por el discurso matemático escolar?
- ¿Qué factores influyen en el uso que se da a las figuras de análisis en las clases de geometría?

Los objetivos que se intentaron alcanzar fueron:

- Detectar los factores que llevan a resultados erróneos en problemas de geometría.
- Descubrir la naturaleza de las figuras de análisis en la clase de matemática
- Detectar si las figuras de análisis son impuestas por el discurso escolar o nacen naturalmente en la resolución de problemas de geometría

La investigación se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático. Se ha elegido esta línea de investigación porque en ella se considera a la matemática no sólo como un saber dado sino que se la ubica en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas.

En el presente trabajo, se presenta sólo uno de los aspectos desarrollados en la investigación mencionada centrándonos en el proceso de visualización en el cual las figuras de análisis juegan un papel importante, se analizan además cuáles son los obstáculos que se pueden presentar a los alumnos al realizar una figura de análisis frente a un problema a resolver, este problema puede ser un ejercicio donde deba aplicarse conceptos geométricos, construcciones geométricas con uso de regla y compás o demostraciones.

Para comenzar, es importante determinar a qué se hace referencia cuando se habla de figuras de análisis. Las mismas pueden definirse como aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada o con el uso de regla pero sin respetar la medida o estar elaborada según una determinada escala numérica. Ampliando esta idea puede decirse que son "figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica" (Micelli, 2010, p. 11). Estas figuras de análisis podrían categorizarse dentro de las nociones paramatemáticas (Chevallard, 1997) que no se encuentran dadas en forma explicita, muchas veces, dentro del discurso matemático escolar pero que viven en su hacer diario. Existen libros de texto escolares que promueven su uso aunque muchas veces no se especifica a que se refiere al hablar de figuras de análisis, también llamada figura auxiliar o bosquejo en otros países. Como antecedente de su existencia dentro del aula se encuentran las afirmaciones de Nieto, "hacerlo [refiriéndose al dibujo] es la primera tarea que debemos realizar", fundamentando que "un dibujo nos ayuda en primer lugar a comprender el problema. Además estimulará nuestra imaginación y es posible que nos sugiera algún plan para hallar la solución. Si tiene a mano instrumentos geométricos úselos; sin embargo incluso un bosquejo aproximado suele ser de mucha ayuda" (2004, p.22).

Las figuras de análisis en el proceso de visualización

Las figuras de análisis cumplen un rol importante en el proceso de visualización pues permiten representar en el papel las imágenes mentales que el sujeto se construye al leer los datos del problema y sobre las cuales se van pensando ideas hasta arribar a la solución buscada. Para definir que se entiende por proceso de visualización se tomaran las palabras de Zazkis y otros "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (en Torregrosa y Quesada, 2007, p.278).

Con respecto a las figuras geométricas y los dibujos realizados en la clase de geometría, Fischbein hace una distinción entre estas dos ideas, refiriéndose a estas últimas establece que son "modelos materializando las entidades mentales con las que el matemático trata", mientras que para las primeras afirma que "no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual" (Fischbein, 1993, p.2). Otros autores como Torregrosa y Quesada (2007) emplean otros términos como "figura" entendido por tal a la "imagen mental" o "imagen conceptual", mientras que el objeto físico es el "dibujo" propiamente dicho. Muchas veces los alumnos confunden estos conceptos, estas imágenes conceptuales, en el propio hacer, ejemplo de ello es cuando sacan una conclusión basándose solo en lo que ven en el dibujo, pero dicha conclusión no pertenece a la figura geométrica, concepto abstracto, acción que conduce a los errores observados en el inicio de esta investigación y la lo cual para lograr interpretarlos se trabajo sobre los hechos que conducen a dichos errores. Estos dos mundos tan distintos, el conceptual y el físico, coexisten y es el alumno quien debe aprender a vivir en ambos terrenos. "El alumno pasa así del 'universo de los dibujos' al 'universo de las figuras'. Este pasaje requiere una serie de rupturas en donde el alumno deberá aprender que no todo lo que se ve es verdadero y que una figura es una representación de los objetos geométricos 'perfectos' o 'ideales'" (Rodríguez, 2005, p.1).

Pero no siempre estas figuras de análisis realizadas por los alumnos se convierten en una verdadera herramienta útil, sino que presentan obstáculos que ellos no pueden franquear y la herramienta cambia su finalidad inicial, pero si no es un herramienta útil ¿Por qué, los alumnos, las siguen realizando?

Como trabajos que se pueden referir como antecedentes a esta investigación, trabajos que aluden a los obstáculos en la visualización al emplear figuras de análisis se encuentra los trabajos de Crespo Crespo y Farfán quienes mencionan que "las figuras de análisis dificultan la comprensión de los razonamientos cuando se utiliza argumentaciones por el absurdo" (2005, p.303), pero en la investigación lo que se intentó hacer fue ampliar el campo y ver que sucedía no sólo con aquellos problemas que se demostraban por el absurdo sino a los problemas que se pueden plantear en una clase de geometría en general.

Por otro lado, como se ha señalado las figuras de análisis tienen un papel importante en el proceso de visualización, y como tal dicho proceso a veces acarrea errores particulares (de Guzmán, 1996). Muchos de esos errores están asociados a lo que los ojos perciben y lo que el cerebro interpreta ante dicha figura, estos obstáculos son denominados "falacias de tipo geométricas" (de Guzmán, 1996) o también conocidas como ilusiones ópticas, relacionadas con imágenes que engañan al ojo humano conduciéndolo a generar ideas que son erróneas.

Muchas veces los alumnos afirmar que un determinado cuadrilátero es cuadrado solo valiéndose por la estimación que los lados tienen igual longitud, sin hacer una lectura profunda de los datos, solo guiado sobre lo observable quedando al alcance de las ilusiones ópticas, que puede provocar verdaderos engaños. Ilusiones ópticas hay muchas, pero a continuación se detallan algunos casos geométricos para ejemplificar y verificar que vulnerables que es el ojo humano.

En la ilusión de Jastrow (figura 1) puede suponerse a simple vista que los segmentos a, b, c y d no tiene igual longitud, pero este es un engaño producido por el ángulo de inclinación de los segmentos de menor longitud que se encuentran en los extremos. En verdad, los cuatro segmentos tienen igual longitud.

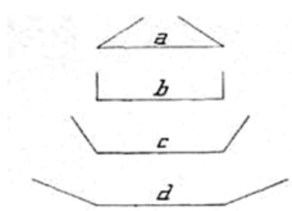


Figura 1: Ilusión de Jastrow referida a la longitud

En la figura 2 pueden observarse dos rectángulos que "parece" tener sus bases distintas según la forma en que es intersectado por un segmento (Perelman, 1975).

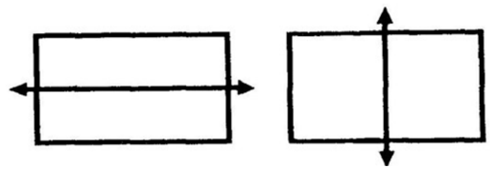


Figura 2: Ilusión óptica sobre rectángulos

En un tercer ejemplo (figura 3), los segmentos internos del paralelogramo, AB parece de mayor longitud que el AC, pero en realidad esto es falso, pues son congruentes (Perelman, 1975).

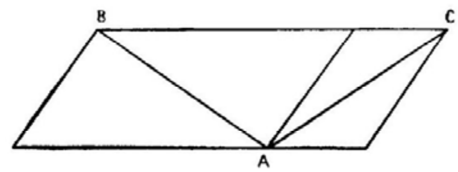


Figura 3: Ilusión de Sander sobre la longitud

Estas falacias evidencian a los engaños que pueden estar expuestos los alumnos frente a sus propias construcciones, hay situaciones visuales pueden conducir a aceptar relaciones que son tan evidentes que no hay necesidad de justificarlas (de Guzmán, 1996).

Adams, en lugar de hablar de dificultades frente a la visualización, hace referencia a "bloqueos mentales", entendiendo por ellos a las "barreras que nos impiden percibir un problema en la forma correcta y encontrarle solución" (Nieto, 2004, pp.6-7). A estos bloqueos mentales los clasifica en: perceptivos, emocionales, culturales, ambientales, intelectuales y expresivos. Muchos de estos bloqueos pueden relacionarse con las figuras de análisis, entre ellos los bloqueos perceptivos que son esteotipos, relacionado con los que Scaglia y Moriena llaman prototipos; o los bloqueos intelectuales que refiere a la "inhabilidad para seleccionar un lenguaje apropiado para el problema (verbal, matemático, visual); uso inadecuado de las estrategias; falta de información o información incorrecto" (Nieto, 2004, p.7).

Volviendo al tema de los prototipos, estos son otro obstáculo estudiado por varios autores, que se puede relacionar con la utilización de las figuras de análisis. Entendiendo por prototipos a los "ejemplos que tienen un mayor 'parecido familiar' con el resto de los ejemplos del concepto" (Scaglia y Moriena, 2005, p.109), son modelos "de imágenes que tienen los alumnos de los conceptos geométricos" (Scaglia y Moriena, 2005, p.106). Estos prototipos, de gran utilidad didáctica, pueden llegar a tornarse en obstáculos a la hora de resolver problemas.

A continuación se recopilan algunos prototipos identificados en varios trabajos:

Una posición preferida en el plano, por ejemplo el triángulo rectángulo: se encuentran graficados "con el ángulo recto en la posición vertical-horizontal" (Plasencia, 2000, p.54).

Determinadas proporciones que guardan las figuras, volviendo al caso del triángulo, se encuentra que su altura, por lo general, se encuentra contenida en el mismo (Scaglia y Moriena, 2005, p.109).

Preferencia por las figuras simétricas, encontrando al cuadrado "como ejemplo prototípico de los cuadriláteros" (Scaglia y Moriena, 2005, p.110).

Estos y otros prototipos están asociados a los esquemas mentales elaborados por los alumnos que se ven, muchas veces, reflejados en sus figuras de análisis y que pueden conducir a conclusiones incompletas, pues solo son validas para un caso en particular, perdiendo la generalidad del enunciado del problema.

Otro obstáculo, esta planteado por Hegarty y Kozhevnikov quienes identifican dos tipos de representaciones diferentes: representaciones esquemáticas (dentro de las cuales se pueden incluir a las figuras de análisis) y representación pictóricas las cuales dificultan la comprensión. Afirman que las representaciones utilizadas en la resolución de un problema de matemática tiene su influencia en el resultado obtenido, considerando que las representaciones esquemáticas pueden conducir a un buen resultado mientras que las representaciones pictográficas harán más difícil el camino y la llegada a la meta deseada (Ferrero, 2009).

En este reporte, se muestran ejemplos de situaciones de aula en las que los estudiantes del nivel superior, utilizan figuras de análisis y se analiza en ellas la manera en las que hacen uso de las figuras y los obstáculos que se manifiestan.

Ejemplo A: "Calcular el perímetro y el área de un cuadrado sabiendo que un lado mide 3x-1 cm y el otro x+3 cm."

En esta resolución se arrastra al trabajo algebraico el error cometido al construir la figura de análisis. No sería un error haber confeccionado un rectángulo, no cuadrado, cuando el enunciado habla de un cuadrado, sino que el error fue al momento de simbolizar los lados como de longitud diferente. Con respecto a los estereotipo puede observarse que la base tiene una dirección horizontal y que dicha base es de mayor longitud que la altura (Scaglia y Moriena, 2005).

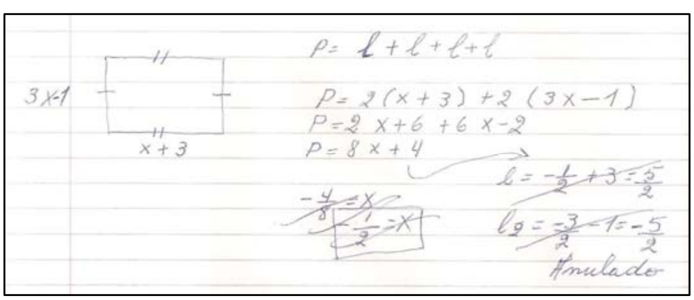


Figura 5: resolución del ejemplo A

Ejemplo B: "Las dimensiones de un prisma recto se dan a continuación: ancho 3x+4, largo 3x y alto 3x-6. Hallar la expresión desarrollada del área total del prisma e indicar de qué grado resulta."

En este ejemplo la figura de análisis no es funcional ya que no existe correlación ni entre los datos del ejercicio y la figura realizada, así como tampoco entre la misma figura y el desarrollo algebraico. Este ejemplo puede, además, relacionarse con el "bloqueo expresivo" (Adams, en Nieto, 2004) por el uso inadecuado de una técnica al registrar una idea. Error que se parece agravarse pues las figuras de análisis deben ser una técnica desarrollada por el mismo sujeto, porque es el propio alumno quien desarrolla sus propios códigos ya que no es necesario intercambiar con un otro.

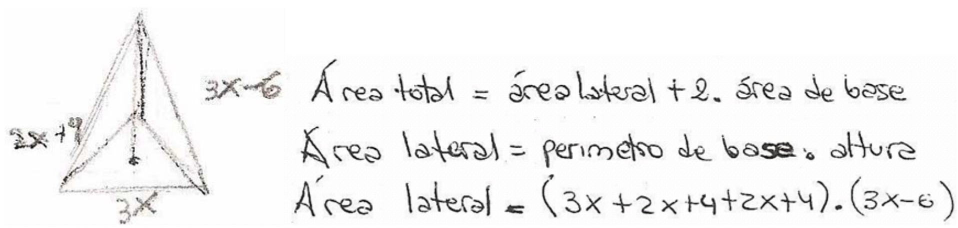


Figura 6: resolución del ejemplo B

Ejemplo C: "Toda paralela a la mediana de un triángulo abc, determina en las rectas de los lados y segmentos y proporcionales a esos lados."

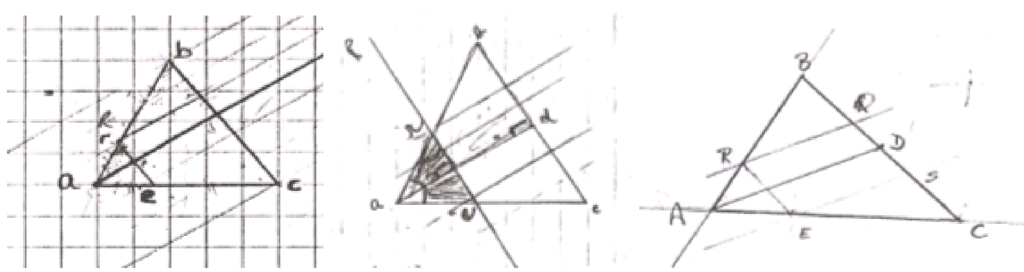


Figura 7: resoluciones del ejemplo C

En estas tres resoluciones de un mismo problema puede observase las similitudes entre las tres construcciones, aún habiendo resuelto, los alumnos, el ejercicio en forma aislada. Puede además identificar estereotipos como es un triángulo escaleno y acutángulo que tiene su base horizontal (Scaglia y Moriena, 2005). Otra similitud, para destacar, es que las rectas paralelas trazadas mantienen una dirección semejante y en algunos casos hasta equidistantes (error que se arrastra a la demostración).

"Para esbozar una figura de análisis, es necesario tener un conjunto de conocimientos de la Geometría (figuras, cuerpos geométricos, construcciones geométricas, etc.) y un conjunto de habilidades (intelectuales y prácticas) que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en una figura una situación dada y explicarla. Por ello, asegurar, que el alumno tenga creadas estas condiciones, es un elemento determinante en la consecución del objetivo de aprender a modelar gráficamente" (González, García y Lamothe, 2005).

Entre las conclusiones a las cuales se arriba son que se ha observado errores de distinta naturaleza, por ejemplo representaciones pictóricas, representaciones esquemáticas, no generalizadas o de lectura e interpretación de datos. Además, puede notarse la presencia de los estereotipos en las figuras de análisis, estereotipos que tienen que ver con una transmisión social que también puede observarse en las graficas que se encuentran presente en los libros de texto escolares. Aunque son un objeto de construcción propia, están explícitamente o implícitamente normadas en quehacer del docente o los libros de texto, aspectos del discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287-317.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

de Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

Ferrero, M. (2009). Caracterización de representaciones visuales en una demostración en geometría. En H. Blanco (Ed.), *Acta VIII CAREM* (pp.596-603). Sociedad Argentina de Matemática. Buenos Aires

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.

Galina, E. (2008). Medida*, geometría y el proceso de medir.* LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Mendoza.

González, M., García, L. y Lamothe, M. (2005). *Resolución de problemas geométricos a través de la modelación gráfica.* Instituto Superior Pedagógico "Raúl Gómez García", Guantánamo, Cuba. Recuperado el 16 de marzo de 2009, de http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EEEluVAupkSELGakrT.php

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN, México.

Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas Matemáticos. Material de apoyo de un taller de formación matemáticas en la Licenciatura de Matemáticas*. Maracaibo. Recuperado el 30 de marzo de 2009, de http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

Perelman, Y. (1975). *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú: Mir.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de La Laguna, España.

Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion.

Rodríguez, R. (2005). *El aprendizaje de la demostración en geometría: el pasaje de la geometría experimental a la geometría deductiva*. IUFM de Basse-Normandie Caen Francia. Recuperado el 12 de enero de 2009, de www.math.unicaen.fr/irem/internat/Ruben/geometria.doc

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática 17* (3), 105-120.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 275-300.

LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN UNA SOCIEDAD EDUCATIVA

Liliana Homilka
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
lhomilka@gmail.com

Resumen. La sociedad reclama un cambio en la escuela (Barbero, 2008; Tenti Fanfani, 2008). Por lo que ya no es pensable una formación matemática rigida. El trabajo que se presenta forma parte de una investigación desde el enfoque socioepistemológico, centrada en analizar algunas características que presenta la formación del profesor. En el mismo se describen aspectos que son relevantes para estudiantes y docentes, los que son necesarios tener en cuenta al reflexionar acerca de la realidad del aula, para actuar de la mejor manera en ella, de forma que nos posibilite lograr una reconstrucción del discurso matemático escolar.

Palabras clave: formación docente, sociedad educativa, socioepistemología

Abstract. Society is strongly asking the school to change (Barbero, 2008; Tenti Fanfani, 2008). We can no longer think of a rigid mathematical education. The paper presented here is part of an ongoing research conducted within the socioepistemological theory, aimed at characterizing the training process of a teacher. We present some of the issues that are relevant for both teachers and students, what we think is important to take into consideration when considering the reality of our classrooms, in order for us to be able to perform better, in such a way that will allow us to reconstruct the mathematical discourse.

Key words: teacher's training, educational society, socioepistemology

La formación del profesor de matemáticas es producto de las necesidades y demandas educativas de la sociedad, la misma se da en su seno, responde a condicionamientos socioculturales, políticos, ideológicos, filosóficos y a tradiciones institucionales que a lo largo de la historia, en complicados procesos de naturaleza cultural han generado practicas formativas que hoy son necesarias modificar. En la actualidad, muchas de las transformaciones que se han producido en las diferentes dimensiones de la vida social interactúan permanentemente con las de la vida escolar. Esta interacción se da en ambos sentidos afectando lo que las instituciones educativas hacen y producen. No solo ha cambiando el sentido de la experiencia escolar de profesores y estudiantes, familia, etc., también ha cambiado la realidad del aula de matemática. En ella se presentan nuevas necesidades y problemáticas, para comprenderlas se requiere mirar lo que ocurre "fuera y dentro de la escuela" porque es la manera de comprender las características de nuestros estudiantes, de modo que su cultura y su lenguaje coincida con las de la matemática escolar.

Para repensar la formación del profesor se requiere entonces de nuevas miradas y conceptualizaciones que posibiliten su estudio e intervención. La investigación en matemática educativa desde el enfoque socioespistemológico aporta elementos que permiten caracterizar los escenarios de formación y acción profesional en los que se construye socialmente el rol profesional del docente. Entre ellos podemos considerar:

Las características de la escuela actual

"*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2006, p. 3). Es decir que la educación atraviesa a todos los individuos en cualquiera de los lugares en los que actúan. Por lo que, la escuela actual no es el único espacio donde se construye conocimiento.

La tecnología que no fue pensada con fines didácticos ha entrado en la escuela; "se debe percibir la empatía que tienen nuestros estudiantes con ellas y reconocer la forma en que las utilizan en las tareas escolares, de modo que las mismas se constituyan en recursos didácticos apropiados para la construcción de ideas matemáticas." (Crespo Crespo, 2009, p.1302)

La escuela se vio en muchos casos sobredemanda cumpliendo diversidad de tareas que desvían su función de desarrollar conocimientos poderosos en las personas, lo que ha llevado a que bastos sectores de la sociedad a que desvaloricen la escuela pública y la profesión docente. (Tenti Fanfani, 2008).

Para que la escuela pueda cumplir con la transmisión de la herencia cultural, capacitación para el trabajo y el estudio y con la formación del ciudadano, el profesor debe reconocer la crisis que están atravesando los sistemas escolares y sus instituciones; debido a:

- *Pretender conservar las características institucionales de la modernidad*: Los estudiantes y sus familias no son los que se deben adaptar a la cultura y reglas de las instituciones educativas. Sino que en ellas conviven diversidades culturales, utilización de lenguajes diferentes y que los alumnos son los portadores de la cultura social que encontramos en los ámbitos escolares. Se requiere de un dialogo institucional en el que todos participen de la experiencia escolar. Los profesores deben abandonar la pretensión de imponer en forma unilateral las reglas escolares. Es necesario mantener un dialogo permanente entre la escuela y la sociedad.

- *La escuela de hoy intenta ignorar el modelo de comunicación escolar:* En algunos casos es diferente a las dinámicas comunicativas de la sociedad actual, se hace necesario reconocer y aceptar que el escenario en el que los estudiantes se desenvuelven es distinto del escolar. Ellos actúan simultáneamente en escenarios académicos y no académicos. Los estudiantes no pueden separar ambos escenarios, para ellos su vida se desarrolla entre ambos, en ambos aprenden y transfieren conocimiento. Nuestra sociedad ya no construye conocimiento sólo en las instituciones educativas y lo transfiere fuera de ellas. Sin embargo, la no comprensión de ese "ida y vuelta" del conocimiento entre esos escenarios hace que la escuela siga con un discurso unidireccional y no comprenda el origen de algunas dificultades que aparecen en el aula. Dichos escenarios, están estrechamente vinculados a la construcción de las ideas que caracterizan los diferentes significados que se otorgan a lo que es ser docente de matemática y que condicionan sus actividades y roles (Homilka 2008).

- *Resistencia a transformar la identidad profesional*: Según Lezama (2009) la actividad del profesor es determinante del logro didáctico de sus estudiantes. Pero, si durante la misma siente que pierde el control de los que está acostumbrado a hacer, producto de sus saberes y su proceso de formación se resiste al cambio. Por lo cual, es necesario que durante su formación entienda que la escuela de hoy le plantea el desafío de modificar aquellas tareas fijas y delimitadas, lo que conlleva a la transformación de algunos rasgos de la identidad profesional.

Los nuevos desafíos en la formación del profesor de matemáticas

> *La actividad tradicional de enseñar matemáticas, se ha visto impactada por dificultades tales como la masificación escolar y los enormes desequilibrios sociales y culturales que impactan las pretensiones de uniformidad en los aprendizajes. El profesor de matemáticas enfrenta cada vez mayores dificultades para alcanzar los objetivos de aprendizaje con sus alumnos. El profesor requiere de profunda reflexión sobre el contenido objeto de su instrucción, así como de una ampliación de su campo de saberes que le permitan enfrentar, junto con la escuela, una realidad social compleja.* (Lezama y Mariscal, 2008, p.1585).

En la búsqueda reflexiva de un modelo de profesor que requiere la sociedad actual, Lezama (2007) Señala la influencia de las prácticas de investigación como uno de los elementos esenciales para mejorar la formación del profesorado y como vía de regulación de la práctica docente. Dado que, el conocimiento que produce la Matemática Educativa aporta a los docentes y estudiantes herramientas para el desempeño de un rol activo, un diálogo entre ellos, que aunque pueda, muchas veces ser difícil, es muy necesario en las instituciones educativas de hoy.

La formación del formador se desarrolla en un escenario específico pero diferente al de épocas pasadas. Esto requiere ampliar la mirada, el profesorado debe ser visto desde afuera y desde adentro simultáneamente, para que pueda lograr sus funciones y objetivos.

Entonces, se requiere percibir que el aula de hoy es diferente, demanda otras necesidades, presenta al docente de matemáticas desafíos diferentes por lo que se requieren nuevas miradas sobre ella.

El aula es un escenario en el que el profesor debe prever reacciones, circunstancias o problemáticas que se manifiestan de manera regular, si el comprende el origen de esas manifestaciones le será mas fácil planificar y coordinar mejor el desarrollo de la clase.

La diversidad de visiones que coexisten en las instituciones educativas acerca de la actividad del profesor es innegable, muchos docentes aun conciben su rol como transmisores de información por lo que el alumno se ve a si mismo como mero receptor de esos conocimientos transmitidos. Esta situación, en muchos casos no llama la atención porque forma parte de una práctica escolar heredada, por la visión que se tiene acerca de la matemática y de lo que significa aprenderlas, la matemática escolar que figura en programas y planes de estudios, en los libros y en el discurso del profesor aun es interpretada desde diferentes enfoques. Por eso es fundamental visualizar y modificar la manera en que aun se comunican las ideas matemáticas en las clases.

El discurso matemático escolar

"Es aquel que atiende formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluyendo aspectos de organización temática y profundidad expositiva" (Castañeda, 2006, p.255).

Nos permite observar cómo se interpreta, usa y se comparte la matemática en la clase, por lo tanto es resultado de una transposición didáctica. Es decir, en él se refleja una ideología a través de forma de presentar y tratar los objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden, para qué, etc.) (Castañeda, 2009, Castañeda, Rosas y Molina, 2010). Por lo que se constituye en un factor determinante en la construcción de la representación que tienen los estudiantes de profesorado y docentes acerca de de la labor docente en el aula.Se formula a través de programas, libros de textos, se manifiesta en las interacciones que se producen en el aula, en este último caso, puede ser comprendido como parte de la normativa que impone el contrato didáctico.

Las instituciones educativas necesitan replantear sus actividades y roles. Como se ha planteado anteriormente, se debe "buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y tratar de identificar la manera en la que se los construyen" es fundamental entonces, reflexionar acerca del discurso matemático escolar, el que debe ser observado a partir de las manifestaciones escritas, orales, gestuales y visuales.

En la actualidad, es necesario que el profesor y los futuros profesores reflexionen acerca del discurso matemático escolar que hemos heredado y que aun en muchos casos se sigue practicando. Porque la escuela actual demanda en nuestra profesión la reconfiguración de la comunicación escolar. Cobra relevancia entonces observar el lenguaje que utilizan alumnos y docentes.

El lenguaje utilizado en el aula

En la clase de matemática se presentan dificultades referidas al lenguaje utilizado, ya sea cuando los estudiantes deben leer algún texto o cuando se les solicita traducir del lenguaje simbólico al coloquial. Se sostiene que:

> *"Nuestros alumnos muchas veces desconocen o no comprenden el significado de palabras que frecuentemente son conceptos matemáticos",… "se pide a los alumnos un tipo de razonamiento que requiere instrumental simbólico más elaborado que el que poseen"…" En otros casos hay dificultades ocasionadas por la pobreza de la lengua materna y con mayor notoriedad de lenguaje propio de las Matemáticas"…"Si el alumno no resuelve un problema, frecuentemente se debe a obstáculos ocasionados por el lenguaje"*(Lomelí Plascencia, 2009 ,p. 331)

Al respecto un estudiante de segundo año del profesorado comenta lo siguiente:

En clase se presentan demostraciones bien complejas y no se tiene en cuenta o simplemente no se comenta, si ese resultado tiene o no alguna aplicación. Ser demasiado formales en las explicaciones, no mostrar aplicaciones, tener un discurso muy complejo, frustra a los alumnos, porque no pueden "traducir" lo que les enseñamos, no pueden "ver" un real significado, y frustra a los profesores también porque no logran comunicarse, no logran una respuesta.

El discurso que utiliza el profesor en el aula es la manifestación de su posición didáctica. A partir del mismo se puede comprender cuál es su concepción acerca de la matemática escolar, el significado que le otorga al rol docente, la visión que tiene sobre la escuela y la dinámica de la clase.

A modo de ejemplo se presenta una reflexión de un estudiante del profesorado acerca de una experiencia áulica.

"*La profesora se sentía algo molesta porque notaba que la mayoría no la seguía en su discurso. Terminó de definir simetría axial y sus propiedades, a partir de ello definió rectas perpendicular- res y, finalmente, mediatriz de un segmento."*

"Una compañera expresó que a pesar de haber leído los apuntes y de escuchar su explicación había tenido que recurrir a un libro para comprender mejor la definición de mediatriz."

"La definición del libro era más clara, sin embargo usaba elementos que aún no habíamos definido en clase, entonces, no servía. ¿Por qué no servía? uno de los objetivos del curso de Geometría I es que, como futuros profesores de matemáticas, los alumnos comprendan cómo se construye una ciencia formal, por lo tanto la "regla de oro" de la materia es que NO se pueden usar elementos para las demostraciones o definiciones que no hayan sido previamente definidos o demostrados en clase."

"La clase se convirtió en un lamento en masa por las dificultades que presentaba la materia al ser tan formal y, por lo tanto, poco comprensible."

Experiencia que la llevó a formularse los siguientes interrogantes:

¿Cuántos de esos alumnos pudieron terminar felizmente el curso? ¿Cuántos se quedaron en el camino y tuvieron que recursar o simplemente dejaron la carrera? ¿De quién es la culpa: de la escuela secundaria que no sienta bases firmes o del estricto enfoque formal al que defendemos a muerte? ¿Cómo lograr un acercamiento de los alumnos a la matemática formal sin que esto resulte frustrante?

Es importante considerar que cada elemento que el profesor utiliza para comunicar ideas Matemáticas, en cada una de las variantes del lenguaje, ya sea verbal, escrito, gestual o grafico, debe llegar de manera significativa al alumno, que tenga sentido y utilidad para él, pues de lo contrario, serán ideas que no contribuyen a una comunicación adecuada, será un monólogo que limita la construcción de esas ideas.

Al respecto una alumna de segundo año del profesorado de matemática sostiene que:

*El lenguaje matemático, en la medida que se va avanzando en el estudio de la matemática, generalmente presenta diversas dificultades para los alumnos que se manifiestan en el aula en expresiones como "lo leí cien veces, pero no lo entiendo", "¿lo podría explicar en castellano?". Estas dificultades, de no resolverse, serán una gran piedra en el camino***.** *Si los alumnos no logran manejar este lenguaje difícilmente podrán aprender matemática.*

Pensemos en lo frustrante que resulta estar en otro país y no poder comunicarse en la propia lengua,… El discurso matemático que en el aula sobrevalúa la formalidad y abstracción de la matemática termina por frustrar a los alumnos en general, es decir, en todos los niveles de enseñanza.

Lo dicho por la alumna, nos debe hacer reflexionar acerca del discurso matemático escolar, por su intermedio el docente propone un estilo de comunicación en la clase, es un factor determinante para que en la misma se permita la reconstrucción de sentidos y significados de conceptos matemáticos como productos de la cultura

Se trata entonces de favorecer en el futuro profesor el desarrollo de una practica que le permita generar actividades que tienen una dirección, un qué, un para qué además de un cómo.

¿Por qué es relevante para este estudio mirar el profesorado?

El profesorado de matemática debe percibir los cambios que se dan en la escuela media. Su función es formar profesores, los que desempeñaran un rol profesional en las escuelas de la CABA y de la provincia de Bs. As. Una de las dimensiones a contemplar en las prácticas formativas es el sentido y valor de la enseñanza secundaria de hoy.

La carrera de Profesorado de Matemática en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. J. V. González", se caracteriza por tener un diseño curricular que organiza las asignaturas en tres ejes: a) Eje disciplinar en el que se abordan y tratan los contenidos específicos de matemática. b) Eje de la formación docente que agrupa asignaturas que son comunes a los procesos educativos en general. c) el eje de aproximación a la realidad y de la práctica docente, espacio que se orienta a introducir a los alumnos en la realidad del sujeto que aprende, iniciarse en la comprensión de las teorías de aprendizaje desde la disciplina y que culmina en el último año de la carrera con las prácticas docentes.

Durante los cuatro años cursan materias de los tres ejes; en este trabajo nos focalizamos en dos asignaturas del último eje por ser el que prepara a los estudiantes para adoptar un rol activo y decisivo en la clase, favorecer el desarrollo de constructos apropiados para el desempeño profesional.

Visión de los alumnos sobre algunos aspectos de su formación

En trabajo de campo I los alumnos deben realizar entrevistas a alumnos y docentes de la escuela media y presentar un informe que contiene el análisis de las mismas con las consiguientes conclusiones.

A continuación se presenta lo reportado por un estudiante del primer año acerca de lo que representa la matemática para un alumno del secundario:

"La matemática sigue siendo algo que pocos entienden"," las odio y no tengo en claro el por qué, estudiarlas me tomó poco tiempo, … me servía solo para aprobar la prueba, no es falta de comprensión lo que me genera este odio. Admiro a la gente que tiene esa capacidad innata de entenderlas"

Lo que opina al respecto el estudiante de trabajo de campo I:

A mi entender esta persona lograba aprobar, pero, a pesar de eso, no entendía en sí la materia y eso le aburría. Muchas veces he pasado por la frustración de no entender un tema tal y cómo lo exponía determinado profesor.

En trabajo de campo II, La actividad que el docente solicitó consistió en la lectura de reportes de investigación y el planteamiento de una *hipótesis* asociada a una actividad de clase, contenido matemático u experiencia personal en relación a la construcción de aprendizaje matemático. A continuación se presenta la Narrativa de una alumna.

Acerca de la interacción en el aula escribe: "*El funcionamiento del trabajo en clase implica la interacción entre los alumnos, el profesor y el conocimiento trasmitido mediante el lenguaje matemático. Por lo tanto, podríamos decir que las reacciones de los alumnos, por ejemplo de frustración, son determinadas por esa interacción que se da en el trabajo en clase: por la matemática que aprende, por el profesor que le enseña, por los libros y palabras que usa*"

En relación al contrato didáctico dice:"*Este tipo de "negociaciones" se pueden observar en varias instituciones, recuerdo una profesora de Álgebra que meses antes de rendir el final nos comenzaba a "entrenar" para el mismo. Hacía "simulacros" de final, "cinco puntos teóricos, y cinco prácticos, de tal, tal y tal tema, el tema fulano no lo estudien porque es una estupidez" decía, este arreglo no era para nada implícito, más bien todo lo contrario, así y todo la mitad del curso no aprobó."*

A cerca del profesor comenta: **"***En la clase el control de lo que se habla está oficialmente en manos del profesor, él formula un discurso donde está involucrado el conocimiento que quiere trasmitir. Desde el papel que se asume como profesor hay una gran responsabilidad con respecto a la frustración de los alumnos, y que, por lo tanto, hay mucho por hacer." "El profesor debería asumir su rol como facilitador del aprendizaje y no como el "proveedor" del conocimiento. Un orientador, alguien que instruye pero que también guía, que aconseja, que se equivoca y que, por lo tanto, no tiene la verdad absoluta."*

En relación a la clase de matemáticas opina: "*Deberíamos comenzar a promover el trabajo de grupo cooperativo, las discusiones, el cuestionar y realizar conjeturas, la justificación del pensamiento y la integración de contenidos y desestimar la práctica mecánica, la memorización de reglas y fórmulas, las respuestas únicas y los métodos únicos."*

Sobre perspectivas de la enseñanza y el aprendizaje sostiene que: "*Sin duda que desde ese entonces hasta hoy la enseñanza de la matemática ha evolucionado y ha mejorado sirviéndose de nuevas herramientas didácticas, pero pienso que esa evolución, esa mejora debe continuar conforme evoluciona la sociedad y la tecnología."*

"Razonar es fundamental para saber y hacer matemática. Los alumnos deben entender que la matemática tienen sentido, que no es simplemente un conjunto de reglas y procedimientos que se deben memorizar."

"Abramos nuestra mente, a veces limitada por la formalidad que tanto nos apasiona, a nuevas formas de enseñar. Pongámonos del otro lado, del que aprende (porque aunque a veces creemos lo contrario, todavía tenemos mucho por aprender), o del que desea aprender y no puede o no lo logra" … *"Abramos nuestros oídos a lo que los alumnos tienen para decir, eso nos dará la pauta de qué es lo significativo para ellos, dejemos que sean parte de la enseñanza y no meros espectadores atados a un banco, observemos cómo se comunican, es más, pensemos en cómo nos comunicamos nosotros mismos en estos tiempos."*

Como futuros docentes: "*Debemos comenzar a salir de la comodidad de lo establecido, de lo que siempre hemos hechos y a lo que estamos acostumbrados. Estoy convencida de que cada uno, tal vez con pocos elementos y mucho esfuerzo, puede hacer, al menos, el intento por marcar la diferencia."*

A modo de síntesis

- La formación del profesor se debe resignificar en función de las características de la escuela y el aula actual
- Replantear actividades que contemple al alumno interactuando constantemente en distintos escenarios
- Reflexionar acerca del discurso matemático escolar, por su intermedio el docente propone un estilo de comunicación en la clase, que permita la reconstrucción de sentidos y significados de conceptos matemáticos como productos de la cultura

Para continuar reflexionando…

"*Creo que las zonas de confort tienden a inhibir tu desarrollo y la de los que te rodean. Las zonas de riesgo son impredecibles, dan miedo y requiere un mayor esfuerzo transitarlas. Sin embargo casi siempre te hacen crecer. Te hacen aprender, reconocer tus deficiencias y desarrollarte*." (Sánchez Aguilar, 2010)

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379 - 1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castañeda, A. Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa*, 12(44), 3-18

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol 22. México: Clame (en prensa)

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de maestría no publicada. Cicata-IPN, México.

Homilka,L. y Crespo Crespo,C. y Lezama, J. (2009). Primeras prácticas docentes de los estudiantes: necesidad de resignificar la formación del profesorado. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol 22. México: Clame (en prensa).

Lomelí Plascencia, M. (2009). Como intervienen las estructuras del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos escritos verbalmente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 327-335. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Tenti Fanfani, (2008). Mirar la escuela desde fuera En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

Sánchez, M. (2010). *Zona de confort.* Recuperado el 24 de mayo de http://web.me.com/mario.sanchez/web/blog/entradas/2010/5/15_zona_de_confort.html

ACERCA DE LA LÓGICA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
crccrespo@gmail.com

Resumen. Ante el hecho reiterado de que los alumnos no comprenden en el aula de matemática la necesidad de la demostración y que además aparecen formas de argumentación no deductivas y que son consideradas erróneas, en este trabajo se pretende analizar primeramente las funciones de las demostraciones matemáticas y su presencia en la clase de matemática. Se plantea una serie de reflexiones de la manera en la que se construye el conocimiento matemático, intentando identificar la lógica subyacente que guía la construcción del conocimiento matemático y compararla con la del descubrimiento en las ciencias fácticas.

Palabras clave: lógica, construcción, inducción, deducción abducción

Abstract. Based on the fact that students repeatedly fail to understand the need of formal demonstration in the mathematics classroom and that non deductive ways of argumentation appear, considered wrongful by teachers, we try to analyze in this paper firstly the use for mathematics demonstration and its presence in the class. We propose a series of considerations on the way that mathematical knowledge is constructed, trying to identify the logic underneath that knowledge in order to face it with the logic involved in the arousal of factic sciences.

Key words: logic, construction, induction, deduction, abduction

La demostración en el aula de matemática. Sus funciones y presencia

En muchas oportunidades, en el aula de matemática los estudiantes no comprenden la necesidad de la demostración de propiedades en matemática. Para comprobar la validez de una afirmación matemática se contentan recurriendo, por lo general, a una simple verificación o creen la propiedad, por resultarles evidente. Aún en los casos en que llegan a comprender su necesidad, la dificultad surge cuando ellos son quienes realizan estas demostraciones. Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela. Los docentes reconocen que la argumentación deductiva es la que conduce a demostraciones y por lo tanto la que conduce a validar el conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007a)

En algunas investigaciones realizadas acerca de las concepciones de los docentes y los estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática sobre las demostraciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2004, 2005), se ponen de manifiesto que ciertas ideas aparecen desdibujados: no se distinguen claramente las diferencias entre la matemática, el saber matemático y el aprendizaje de la matemática en relación con las argumentaciones. Sin embargo, gran cantidad de docentes tiene claramente asumida la existencia de diferencias fundamentales entre otros saberes conceptuales específicos (geométricos, algebraicos, analíticos, etc.), pero no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. La no diferenciación de estos tipos de saberes, en particular entre el saber matemático en sí y el saber escolar relacionados con las argumentaciones, hacen que no se asuman las características que deben tener las argumentaciones matemáticas en la escuela y que a veces se confundan con la formalización. Esto ocasiona que en algunas clases de matemática se recurra a formalismos que en lugar de explicar y clarificar contribuyen a confundir, ya que el alumno por no poder manejar cómodamente la notación, recurre a la memorización.

Al hallar formas no deductivas presentes en las argumentaciones de los estudiantes, surge la pregunta acerca de si es posible aprovecharlas en la construcción del conocimiento matemático y de qué manera (Crespo Crespo, Farfán, y Lezama, 2008, 2009). Esto ha dado origen a investigaciones en las que se analizan las mismas. En estas juega un papel fundamental el marco teórico elegido, ya que debe permitir comprender esas argumentaciones dentro de los escenarios en los que se manifiestan. Por ello el marco en el que nos situamos es la socioepistemología.

Las demostraciones pueden ser entendidas como prácticas sociales asociadas a la práctica de referencia de la validación del conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007). En trabajos orientados al análisis de las demostraciones en el aula, se afirma la validación no es la única función de la demostración. Algunos autores (de Villiers, 1993), presentan un modelo en el que se evidencian las siguientes funciones:

- *Verificación o convicción*: establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad absoluta para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez.
- *Explicación*: exhibe los por qué de la verdad. En resultados evidentes o apoyados en evidencia cuasiempírica, la demostración explica causas.
- *Sistematización*: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Esta función ayuda a identificar inconsistencias y razonamientos circulares. Simplifica teorías integrando conceptos y proporcionando una visión global de la estructura subyacente.
- *Descubrimiento o creación*: permite llegar a nuevos resultados. Esta función se apoya en la idea de que no todas las propiedades se descubren por intuición sino que algunas pueden ser el producto de la demostración misma.

- *Comunicación*: transmite el conocimiento matemático. En este punto se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos.

Este modelo busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas.

Pensando en estas funciones, se realizó una investigación en la que se indagaron las representaciones de docentes y estudiantes del último año de profesorado de matemática acerca de la demostración y sus funciones (Crespo Crespo y Ponteville, 2005). Según los resultados obtenidos en la investigación, se observó que la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de verificación, y en menor medida de explicación. Estas dos funciones se pueden vislumbrar en las respuestas obtenidas. Sin embargo, las de sistematización, descubrimiento y comunicación prácticamente no aparecen. En particular, centraremos nuestra atención en esta oportunidad en el descubrimiento. En la investigación recién mencionada, no pudimos establecer en aquel entonces la causa del no reconocimiento de esta función, por lo que la investigación continuó en ese sentido.

Descubrimiento o invención en matemática

Una pregunta usual entre los estudiantes de profesorado de matemática se refiere a si los conocimientos matemáticos se descubren o se inventan. Cada una de estas opciones denota una posición epistemológica frente a la matemática como ciencia.

Afirmar que se descubren conocimientos está traduciendo una visión platónica del mundo, en la que la matemática surge de la observación de objetos y fenómenos; la matemática es, bajo esta óptica, la ciencia que lee la naturaleza y los conocimientos matemáticos son la interpretación de la misma. Al pensar que el conocimiento matemático se inventa, se ve a la matemática como una construcción humana; sus conocimientos se logran construir a través de prácticas sociales que se realizan en una sociedad que interactúa en un escenario sociocultural. Esta visión es la que mantiene la socioepistemología y por eso se habla del conocimiento social del conocimiento matemático.

Sin embargo, la manera en la que se presenta la matemática en la escuela en muchas oportunidades se orienta de forma que los estudiantes crean que se trata de un saber ya cerrado y dado, en el que no se puede participar en su construcción, sino que a lo sumo se está descubriendo conceptos de una ciencia acabada.

Muchos libros de epistemología se refieren al descubrimiento del conocimiento científico, por lo general abordando los conocimientos de las ciencias fácticas y sociales. No en todos los casos la palabra descubrimiento tiene el mismo significado. Gregorio Klimovsky realiza un interesante análisis de los tipos de descubrimiento (Klimovsky, 2005), distinguiendo cuatro interpretaciones:

a. Descubrimiento como "topetazo": una persona encuentra de forma imprevista un fenómeno o proceso no conocido ni esperado. Por ejemplo, el descubrimiento de $\sqrt{2}$ por parte de los pitagóricos.

b. Descubrimiento como identificación de un entidad nueva:

c. Descubrimiento como hallazgo de una entidad que había sido prevista por la teoría:

d. Descubrimiento teórico como admisión de que la existencia de las entidades que se postulan tiene un valor explicativo que otras explicaciones no tienen. Por ejemplo, la teoría de conjuntos infinitos de Cantor.

En nuestra visión de la matemática y comprendiéndola como una construcción sociocultural, será más natural hacer una analogía ala interpretación anterior y referirnos a:

a. Construcción como "topetazo"

b. Construcción como identificación de un entidad nueva

c. Construcción como hallazgo de una entidad que había sido prevista por la teoría.

d. Construcción teórica como admisión de que la existencia de las entidades que se postulan tiene un valor explicativo que otras explicaciones no tienen.

Lógica del descubrimiento científico

La manera tradicional de referirse a problemas epistemológicos es encontrada en los textos de epistemología. Por lo general se refieren al descubrimiento científico, centrándose en las ciencias experimentales. Tienen distintas interpretaciones de descubrimiento y en nuestro trabajo nos proponemos pensarlas en relación a la matemática.

La reflexión acerca de la ciencia es una inquietud antigua. Aristóteles es quizá uno de los primeros que se plantearon formalmente preguntas acerca de la naturaleza de la ciencia.

Hasta mediados del siglo XVIII varios pensadores intentaron una caracterización de las leyes empíricas, en las que la inducción desempeña un papel fundamental. Hacia principios de siglo XIX los cuestionamientos cambiaron su ángulo y comenzó la búsqueda de la lógica de la justificación de los resultados científicos. Leibniz había establecido con anterioridad que era la lógica simbólica el lenguaje universal de las ciencias y que en ese lenguaje debían formalizarse los conocimientos científicos para que fueran entendidos por todos a pesar de sus diferencias culturales. Estas ideas reflejaban "un viejo sueño de muchos pensadores a lo largo de la historia [...] de tener un método seguro y sistemático para razonar" (Bautista, 2006, p.17)

En relación a la lógica del descubrimiento de la ciencia, Francis Bacon en el siglo XVII, identificó dos formas básicas de razonamiento en las ciencias. La Inducción es la lógica que rige la formulación y selección de hipótesis en ciencias experimentales, va de lo particular a lo general y generaliza a partir de casos en los que algo es verdad. Por otra parte, la deducción va de lo general a lo particular y es aplicada para validar resultados científicos enunciados.

A estos dos modos básicos de razonamiento, Charles S. Peirce en el siglo XIX, sumó otro que describió como fundamental para las ciencias. La Abducción, que se enfoca en la formulación de hipótesis es este otro modo básico de razonamiento. Gracias a él, es posible engendrar nuevas hipótesis explicativas, es el primer paso en la investigación y según Peirce es la esencia de la lógica del descubrimiento: se logra la inferencia de un caso a partir de una regla general y un resultado: "hipótesis", "conjetura" o "suposición". La Abducción no tiene carácter necesario, sino probable, es un tipo de razonamiento sintético o ampliativo que genera hipótesis al tratar de explicar un fenómeno. El esquema básico de la abducción consiste en dos premisas: una de ellas es una implicación y la otra su consecuente y su conclusión es el antecedente de la implicación mencionada. Se trata de una forma de razonamiento que desde el punto de vista deductivo es una falacia, pero que permite la ampliación del conocimiento mediante la formulación de posibles causas de un hecho. Se encuentra orientada a la búsqueda de explicaciones que satisfagan el interés por la comprensión del mundo y cumple un rol importante tanto en la investigación como en el aprendizaje de las ciencias (Lucero, 2005).

La figura 1 permite ver de manera esquemática los tipos de inferencias presentes en las ciencias.

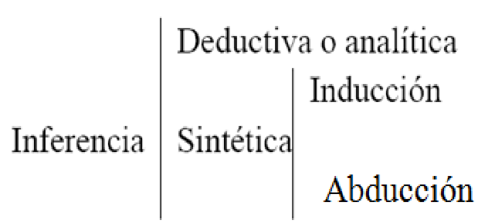


Figura 1. Formas de inferencia del conocimiento científico

Existen tres tipos de abducciones según las características de los sucesos en los que se sustenten. Las abducciones basadas en entidades o hechos no observados en el momento de formular la hipótesis son aquellas que formulan una hipótesis sobre algo que será observable en el futuro para permitir verificarla. Otras abducciones se basan en entidades o hechos que pudieron observarse con anterioridad aunque en el momento actual no sea posible repetir la observación. Finalmente algunas abducciones se basan en hechos que son inobservables en la práctica, porque están más allá de lo perceptible directamente por los sentidos.

Lógica de la construcción del conocimiento matemático

En el caso de la matemática y a partir de las ideas explicadas anteriormente, puede hablarse de una lógica para la construcción del conocimiento y una lógica para la validación del mismo. La primera se realiza a través de las estrategias de inducción y abducción y su función es la ampliación del conocimiento. La segunda, cuya función es la preservación de la verdad, tiene carácter deductivo.

El origen de la matemática, tal como puede apreciarse a través de la historia de la humanidad, es empírico, se basa en la observación y en la necesidad de encontrar soluciones a problemas prácticos que surgieron en cada escenario sociocultural. La construcción de esos conocimientos se basó en la inducción y la abducción. El pensamiento deductivo surgió recién en la cultura griega, aunque después marcó los senderos de la matemática desde ese momento hasta nuestros días. Algunos autores afirman que "el descubrimiento incluye la justificación final, puesto que sería impropio considerar que se ha logrado un descubrimiento antes de que la hipótesis esté debidamente establecida" (Gaeta y Gentile, 2005, p.209)

En relación al aula de matemática, la lógica de la construcción del conocimiento combina las tres formas de razonamiento: deducción, inducción y abducción. Si bien las dos últimas no aceptadas por los docentes y parece que son rechazadas en el discurso matemático escolar, se hallan presentes. Son utilizadas como recursos didácticos y para comprender propiedades. Son numerosos los casos en los que es posible detectar su presencia en el aula tanto en la introducción de un tema como en los momentos de comprensión del mismo. También con el uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemática, se fomenta la utilización de argumentaciones inductivas y abductivas.

Reflexiones finales sobre la construcción del conocimiento matemático

La matemática combina intuición y razón. El pensamiento intuitivo es creativo y subjetivo (Bunge, 1965), el racional es analítico y objetivo. La intuición es el sostén de la construcción del conocimiento matemático. La lógica que la guía es distinta de la lógica formal, no es deductiva, sino que tiene sus propias reglas metodológicas que guían al científico en las etapas iniciales de la investigación.

La presencia de formas no deductivas (inductivas y abductivas) de argumentación en el aula, nos lleva a analizar cómo utilizarlas y a ser concientes de su utilidad y limitaciones. No podemos ignorarlas, sino que por el contrario debemos estar atentos a la manera en la que actúan para poder aprovecharlas a la hora de lograr en nuestros estudiantes construir nuevos conocimientos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bautista, R. (2006). Las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. En P. González Casanova y M. Roitman Rosenmann (Coord.), *La formación de conceptos en ciencias y en humanidades.* México:Siglo XXI.

Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia.* Buenos Aires: EUDEBA.

Crespo Crespo, C. (2007a). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 17. Tomo 1. (560-565) Clame, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. En J. Lezama (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 18. (307-312) Clame, México.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Acerca de la existencia de formas de argumentación construidas fuera de escenarios escolares que llegan al aula de matemática. P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 21. México: Clame (825-835)

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 12 (1), 29-66.

de Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. En *Épsilon*, 26,15-30.

Klimovsky, G. (2005). Tipos de descubrimiento. En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (43-51). Buenos aires: Alianza.

Gaeta, R. y Gentile, N. (2005). ¿Son los descubrimientos matemáticos diferentes de los descubrimientos en las ciencias fácticas? En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (207-229). Buenos Aires: Alianza.

Lucero, S. (2005). Descubrimiento e inferencia a la mejor explicación. En G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (81-97). Buenos Aires: Alianza.

ACERCA DEL LENGUAJE UTILIZADO EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Cecilia Crespo Crespo, Liliana Homilka, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
crccrespo@gmail.com, lhomilka@yahoo.com.ar, patricialeston@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo, realizado como parte de una investigación desde la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, se centra en analizar a partir de un estudio de caso algunas de las características del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar. Se describen aspectos del lenguaje empleado por los estudiantes y docentes en el aula de matemática, mostrando la manera en la que la utilización de un lenguaje formal es aceptada como parte del contrato didáctico, a pesar de que se torna en obstáculo en muchas oportunidades.

Palabras clave: lenguaje matemático, formalización, representación social

Abstract. The paper we present here, part of an ongoing research done within the socioepistemological theory, particularly in the line of social construction of mathematical knowledge, is aimed at the analysis of the language used in the mathematics classroom, taking as a source a case study. Some aspects of the language used by both teachers and students are described, showing the way in which formal language is accepted as part of the didactic contract, even though it appears as an obstacle in more than one situation.

Key words: mathematical language, formalization, social representation

Introducción

Como parte de una investigación que desde la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, nos centramos en este trabajo en analizar las características del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar, intentando explicar los orígenes de algunas de ellas.

El discurso matemático escolar "es aquel que atiende formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluyendo aspectos de organización temática y profanidad expositiva" (Castañeda, 2006, p.255). En la formación del discurso matemático escolar influyen diversos factores. En él se refleja una ideología a través de forma de presentar y tratar objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden, etc.) (Castañeda, 2009, Castañeda, Rosas y Molina, 2010). El lenguaje aceptado y utilizado en el aula, es un ejemplo de este fenómeno y resulta interesante su análisis desde esta visión.

En este trabajo se describen algunos aspectos del lenguaje utilizado por profesores y estudiantes en el aula de matemática en diversos momentos. En él, se reflejan con claridad las representaciones y convicciones que los distintos actores de este escenario sociocultural poseen acerca de cómo debe de ser el lenguaje utilizado en el aula, tanto en las explicaciones de los docentes, y los libros de texto de matemática, como en las producciones de los alumnos. En el estudio de caso que en este trabajo se presenta, puede observarse la manera en la que la utilización de un lenguaje formal, que se orienta inicialmente a la mejor comprensión y a lograr una universalización de la matemática, puede tornarse en un obstáculo para la construcción del conocimiento matemático, pero a pesar de ello sigue presente en el aula.

El lenguaje matemático

La forma de pensar y de expresarnos en matemática y en otras disciplinas es distinta. Es un hecho reconocido por toda la sociedad, que los alumnos tienen mayores dificultades con la matemática que con otras materias. Solemos preguntarnos las causas de estas diferencias, pero en pocas oportunidades se piensa en las características del lenguaje utilizado en el aula de matemática como una de las causas de los obstáculos que los alumnos enfrentan al momento de la construcción del conocimiento matemático.

Indagando acerca de las características del lenguaje matemático, es posible encontrar que algunos autores afirman que "las matemáticas no sólo tienen su propio lenguaje sino que son en sí mismas un lenguaje, puesto que comprenden, entre otras cosas, un conjunto de símbolos semióticos de representación conceptual" (Díaz, 2009, p.13). Se dice que en la escuela, los alumnos deben adquirir el dominio de los distintos códigos y representaciones características del lenguaje matemático (verbal, simbólico, gráfico, etc.). Esta característica de manejar varios tipos de registros que parece una ventaja de la matemática para la construcción de conceptos matemáticos (Duval, 1995), sin embargo, puede jugar en contra y transformarse en un obstáculo difícil de franquear.

El pensamiento de una persona puede conocerse a través del lenguaje predominantemente verbal, cuyo principal atributo es la comunicación. El lenguaje natural tiene características como la vaguedad y la ambigüedad que lo hacen poco apropiado para formular un discurso que pretende ser científico. Por ello surgieron los lenguajes formales, dando pautas claras y precisas para evitar paradojas y contradicciones (Datri, 1999). Sin embargo los conceptos que se aprenden se construyen asociados al lenguaje cotidiano, por lo cual la pérdida de ese tipo de lenguaje en el aula hace más difícil esta actividad. "La comunicación y específicamente la interacción entre docente-alumno y alumno-alumno se considera en la actualidad como la base del proceso de aprendizaje" (Tusón y Unamuno, citado por Reséndiz, 2006, p.441). Las acciones de interpretar, argumentar, pensar y proponer facilitan este proceso. Durante esta interacción, entendemos que ocurre la construcción del conocimiento requiriendo del lenguaje usado socialmente.

Desde hace años, el discurso matemático escolar está regido por la escritura. Además la escritura en el aula de matemática está marcada por el formalismo de enunciados y algoritmos matemáticos. "La oralidad presente en el manejo de los saberes matemáticos está marcada por la distancia a todos esos monstruos por una racionalidad contingente que opera a través de otras estrategias y que, exactamente por eso, la frontera fuertemente esablecida del curriculo escolar –marcado por prácticas de escritura- decide ignorar." (Knijnik, 2006, 153-154). Esta característica del discurso escolar no es nueva, ni exclusiva de este discurso; es producto de un largo proceso. Históricamente, se ha creado en nuestra sociedad una supremacía de la cultura escrita sobre la oral. A partir de la transmisión oral de conocimientos que predominó la Edad Media aún en las prácticas educativas, se gestó una "elitización" de la utilización de la escritura en los grupos sociales más altos. Con la desvalorización de los analfabetos y la valorización de la alfabetización y cultura escrita en la Edad Moderna, la escritura se tornó en predominante en la transmisión de los conocimientos (Knijnik, 2006).

Sin embargo, en la actualidad y por influencia de ideas del posmodernismo, el texto ha ido sufriendo transformaciones y las formas discursivas se han transformado por influencia de la tecnología. La oralidad de la posmodernidad combina el habla y la escritura (Galindo Cáceres, 2001). También Barbero destaca la cultura de la oralidad, señalando que la escuela y otras instituciones, se olvidan de la riqueza oral de los niños que ingresan al sistema educativo (Barbero, 2008). Estas ideas permitieron detectar en el aula momentos en los que actualmente la oralidad comienza a desplazar al lenguaje escrito (Crespo Crespo, 2009).

Pero aún el formalismo permanece muy arraigado en nuestras aulas y se constituye en una característica distintiva de las clases de matemática. A continuación se presenta un estudio de caso que pone en evidencia esta afirmación.

Una experiencia en la definición de límite

Se trata de la clase correspondiente a la presentación del concepto de límite finito. Se realiza en este artículo el análisis de la planificación y la clase a través de la descripción de lo observado en ella, intentando interpretar algunos de los episodios acaecidos en relación a las características del lenguaje matemático.

a) La descripción del escenario

La carrera de Profesorado de Matemática en nuestra institución, está organizada en tres ejes: disciplinar, de la formación docente y de aproximación a la realidad y de la práctica docente. En esta última etapa, los estudiantes, futuros profesores de matemática, se ponen frente a un curso en el que darán las prácticas. Esta situación puede ser denominada traumática para los practicantes (Homilka, 2008), ya que además de las inseguridades y temores propios de las circunstancias, deben intentar satisfacer los requerimientos e indicaciones de su profesor de prácticas que los evalúa, del profesor que está prestando el curso que debe cumplir con su planificación institucional e insertar las prácticas en el desarrollo de su curso, y además intentar presentar el tema de la manera en la que ellos creen que debe hacerse a partir de su reciente experiencia como alumno.

Este caso se centra en una de las primeras prácticas de una practicante llevada a cabo en un curso de Matemática 1, de la carrera de Profesorado de Informática, curso muy numeroso y con alumnos sin bases sólidas de conocimientos matemáticos. La temática asignada para la clase es: definición de límite finito. Previamente se había trabajado con funciones numéricas a través de tablas de valores, gráficas cartesianas y expresiones algebraicas (funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto, mantisa, etc.). El enfoque dado era intuitivo, aprovechando ideas previas de los estudiantes. La idea propuesta inicialmente por la docente a la practicante y que fuera compartida por la docente de práctica fue apoyarse en ejemplos para introducir el concepto de límite. Se le propone hacer una introducción básicamente intuitiva y sin llegar a la definición formal ε, δ de límite, debido a las características del curso.

b) La propuesta de la practicante

La propuesta de clase fue presentada a través de la planificación enviada por la practicante previamente a la clase correspondiente y leída tanto por la profesora del curso como por la profesora de prácticas. En ella propuso introducir el tema a partir de un ejemplo de función: $f(x) = 2x-1$, si $x \neq 3$.

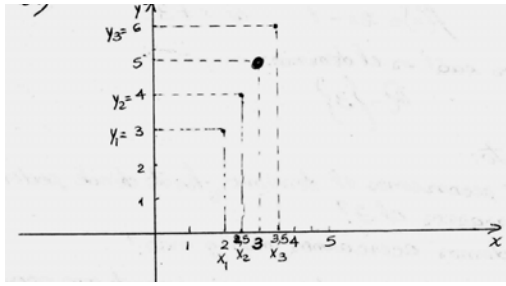
De la misma, y a partir de la determinación de su dominio, la practicante proponía acercarse al 3, preguntando a los estudiantes hasta dónde podía acercarse, e inducirlos a acercarse cada vez más tanto por izquierda como por derecha, para concluir que podía acercarse indefinidamente, aunque sin llegar a alcanzar el 3, pues no pertenece al dominio.

Recordando el concepto de entorno reducido visto a principio de año, les mostraría que se está moviendo en uno de esos entornos, aprovechando la condición del 3 de ser punto de acumulación del dominio de la función. En este punto, se haría notar la importancia de que el punto 3 cumpliera esa condición para poder acercarse a él tanto como se deseara. Su propuesta continuaría con el llenado de una tabla de valores para distintos puntos del dominio, cercanos al 3, pero distintos de él.

x	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999	..3..	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	4	4,8	4,98	4,998	4,9998		5,0002	5,002	5,02	5,2	6

$\longrightarrow 5 \longleftarrow$

Pasaría entonces a analizar con ayuda de un gráfico de la función, qué valores corresponden a las imágenes de la función en esos puntos y cuánto pueden esas imágenes acercarse al valor 5.



A través de ambos registros, sería posible inducir a los alumnos a enunciar que los valores de la función se acercan a 5 cuando los de su dominio se acercan a 3. La practicante enunciaría que cuando "x tiende a 3", el valor al que se acercan las imágenes de la función es 5, o la función "tiende a 5", o bien "tiene por límite 5", introduciendo la expresión simbólica: $x \to 3$, $f(x) \to 5$, proponiendo como notación:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \underbrace{5}_{\text{límite}}$$

A continuación, se les propondría completar la tabla de valores para los valores de x cercanos a 3 que se habían utilizado en la tabla anterior:

$\lvert x-3 \rvert$	
$\lvert f(x)-5 \rvert$	

Para facilitar su llenado, se analizaría el significado de $\lvert x-3 \rvert$ como distancia entre x y 3 y de $\lvert f(x)-5 \rvert$ como distancia entre f(x) y 5 para casos particulares. En esta tabla, se observaría que la segunda fila es el doble de la primera. Posteriormente, la propuesta consistía en proponer preguntar cuáles serían los valores de x que verificaran la condición de que $\lvert f(x)-5 \rvert$ fuera menor que cierto valor fijo arbitrario, por ejemplo 0,00001. Resolviendo la inecuación $\lvert f(x)-5 \rvert < 0{,}00001$, se llegaría a que los valores de x cumplen $\lvert x-3 \rvert < 0{,}00001/2$. Si se generaliza a pensar que 0,00001 puede ser un valor ε cualquiera, se tendría que $\lvert x-3 \rvert < \varepsilon/2$.

$$x \in E'\left(3; \frac{0{,}0001}{2}\right)$$

Entorno Reducido

Centro del Entorno

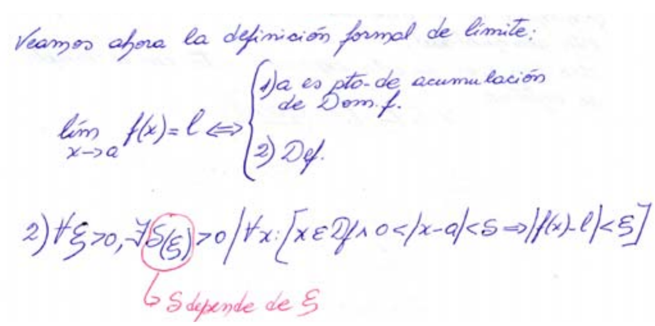
Radio del entorno

o sea que x va a pertenecer a cualquier entorno de centro 3 y radio menor que $\varepsilon/2$ para que cumpla la condición pedida.

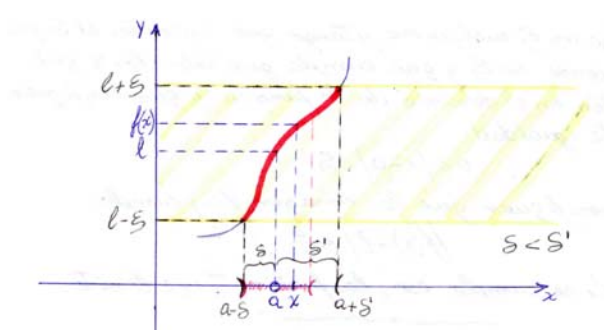
Al llegar a este punto de la clase, la practicante resumiría las ideas trabajadas, institucionalizando el concepto intuitivo de límite. Tanto la profesora del curso como la profesora de prácticas, hicieron hincapié en que dicha institucionalización se orientara a lo conceptual y no a lo formal. Finalmente, la practicante proponía en su planificación la presentación de ejemplos en los que se analizarían las ideas trabajadas anteriormente.

c) Comentarios acerca de la clase

La clase se llevó a cabo de acuerdo con la propuesta de planificación de la practicante. La estudiante de profesorado logró gran participación de los alumnos del curso a través de las preguntas y ejemplos presentados. Si bien el enfoque de la clase fue clásico, se logró un interesante trabajo de pasaje entre distintos registros de representación. El grupo de alumnos respondía correctamente, entusiasmados por encontrar en el ejemplo elegido situaciones que les resultaban significativas. Logró que la cultura y el lenguaje de los estudiantes coincidiera con el de la escuela (Tenti, Fanfani, 2008), de allí la empatía que se puso en evidencia. Sin embargo, al llegar al momento de institucionalización, la practicante escribió en el pizarrón:



Ante la mirada de desorientación de los estudiantes que habían seguido y participado en la clase anteriormente, la practicante a cargo de la clase, se abocó a explicar la definición que acababa de escribir. Su explicación fue correcta y utilizó el siguiente gráfico para ella:



Las dos profesoras que se encontraban presenciando la clase, llamaron a la practicante y le sugirieron que intentara escribir la definición de manera coloquial, teniendo en cuenta que como le habían explicado anteriormente el nivel de formalización al que se encuentran acostumbrados los estudiantes de este curso era elemental. Entonces escribió en el pizarrón: "Para todo ε positivo, existe un δ función de ε también positivo tal que para todo x perteneciente al dominio de f y que cumpla que $0< |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$". Es decir que a pesar de la sugerencia que había recibido expresó formalmente la definición de función, llegando a utilizar cuantificadores, lo que fue copiado por los estudiantes, aunque sin que lograran comprender plenamente tal notación. Aún cuando se le sugirió durante la clase que presentara una interpretación coloquial de las definiciones escritas, no le fue posible alejarse de lo que había escrito y su explicación se limitó a una traducción casi textual de las mismas. Este hecho trasluce la existencia en el contrato didáctico de creencias de que la matemática debe unirse a la formalización simbólica (D´Amore, 2005). Esto se manifiesta no sólo en la formalización de definiciones, sino en la manera de expresar demostraciones (Crespo Crespo, 2007) que en muchas oportunidades no son aceptadas por los estudiantes si no se encuentran escritas de manera formal.

La clase finalizó con el análisis por parte de los estudiantes de otros ejemplos de límites de funciones, en los que los estudiantes aplicaron las ideas abordadas, de manera similar al primer ejemplo utilizado en la explicación.

Algunas reflexiones

En esta clase, se puso de manifiesto el manejo de varios registros de representación en simultáneo, permitió reforzar las ideas que se iban construyendo. Sin embargo, el exceso de formalismo también se manifestó en la utilización de lenguaje simbólico formal en las definiciones, lo que actuó en realidad como posible obstáculo posterior, ya que no fueron comprendidas por los alumnos, si bien las aceptaron como un paso necesario para el cumplimiento del contrato didáctico.

En este trabajo, se describen algunas situaciones en las que se hacen visibles las características del lenguaje utilizado en la clase de matemática, los alcances de éste y la visión que sobre su utilización tienen los estudiantes. Es posible encontrar investigaciones que a partir de entrevistas provenientes de la escuela media y de nivel superior de las carreras de Profesorado de Matemática y Profesorado de Informática (Crespo Crespo, Homilka y Lestón, 2010), muestren que en las representaciones sociales de los estudiantes y docentes se observa un predominio de la preferencia de la formalización por encima del uso del lenguaje natural, conduciendo a dificultades en momentos en los que se aplica a argumentaciones, justificaciones y explicaciones en la interacción discursiva en el aula. En estas investigaciones, y de acuerdo con el estudio de casos presentado, en la representación que tienen los estudiantes del lenguaje que se utiliza en la clase de matemática, surge entre otras ideas la concepción de que, para ellos, este lenguaje debe ser formal y simbólico, no aceptando expresiones coloquiales y buscando la formalización simbólica en todo momento.

La formalización es comprendida por los alumnos como parte de la normativa que impone el contrato didáctico. Esto llevó a que se fijara la atención en esta investigación en el lenguaje que se utiliza tanto en los libros de texto de matemática, como por parte del profesor de matemática como actor con un papel importante en el escenario del aula, iniciador del diálogo y quien toma decisiones didácticas, que por lo tanto influye en la construcción de representaciones sociales en este escenario.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 253-265.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castañeda, A. Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa* 12(44), 3-18

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2009). La matemática no siempre se estudia de libros. Un estudio de caso. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1295-1302. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2010). *Acerca del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar.* Presentado en Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa Relme 24. Guatemala.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.

Datri, E. (1999). *Geometría y realidad física*. Buenos Aires: Eudeba.

Díaz, H. H. (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y educadores*, 12(3). 13-31

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Galindo Cáceres, J. (2001). Oralidad y cultura. La comunicación y la historia como cosmovisiones y prácticas divergentes. Revista Latina de Comunicación Social, 42. Recuperado el 3 de marzo de 2010 de: http://www.ull.es/publicaciones/latina/2001/latina42junio/45galindo.htm

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Knijnik, G. (2006). La oralidad y la escritura en la educación matemática: Reflexiones sobre el tema. *Educación Matemática 18* (2), 149-165.

Reséndiz., E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 435-458.

Tenti Fanfani, E. (2008). Mirar la escuela desde fuera En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

LA DECONSTRUCCIÓN DE LA MODELACIÓN DEL CRECIMIENTO DE MICROALGAS

José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Nayarit. Universidad Autónoma de Guerrero (México)
jtulloa@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. El trabajo se desprende de la investigación "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico", que como se explicita toma como base teórica a la Socioepistemología y se encuentra situada en la línea denominada "Las prácticas sociales en la construcción social del conocimiento". Tomamos como base a la Deconstrucción como estrategia para modelar el crecimiento de microalgas, considerándola como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes. Asumimos que la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; que, no tiene final y su estructura es cíclica.

Palabras clave: deconstrucción, modelación, microalgas, crecimiento

Abstract. The work follows from the research "modeling practices and the construction of the exponential in communities of professional fishing, a study socioepistemological" which takes as explicit as theoretical basis for the Socioepistemology and is located in the line labeled "social practices in the social construction of knowledge." It relies on the deconstruction as a strategy to model the growth of microalgae, considering it as a concept of a critical nature, which defines the whole system depending on the tension established between its parts. We assume that deconstruction is an individual process and / or collective search for new meanings and innovative ways, which has no end and its structure is cyclic.

Key words: deconstruction, modeling, microalgae, growth

Introducción

A las Matemáticas las encontramos siempre presentes en cualquier ciencia y están adquiriendo una creciente importancia en la Biología y la Medicina modernas, hasta el punto de que a profesionales de la informática y a matemáticos se les plantea actualmente un importante reto frente a la enorme complejidad de los datos que estas ciencias están aportando.

La aplicación de matemáticas a la biología tiene una historia larga, pero en décadas recientes se ha registrado un aumento en el interés por el campo. Algunas razones de esto incluyen:

- La explosión de la información debida a la revolución genómica, de la que surge una gran cantidad de datos, los cuales son difíciles de procesar y/o entender sin el uso de herramientas analíticas,
- El desarrollo reciente de herramientas matemáticas como la teoría del caos que ayuda a entender mecanismos complejos, no lineales en biología,
- Un aumento en la potencia de cómputo que permite realizar cálculos y simulaciones que anteriormente no eran posibles, y

- Un creciente interés en la experimentación *in silico*, debido a consideraciones éticas, falta de fiabilidad de riesgo, y otras complicaciones que participan en la investigación humana y animal.

In silico es una expresión que significa "hecho por computadora o vía simulación computacional". La frase está acuñada a partir de las frases *in vivo* e *in vitro* del latín, las cuales son comúnmente usadas en biología, más comúnmente en temas de biología de sistemas, y se refieren a experimentos hechos en organismos vivos o fuera de organismos vivos, respectivamente. Al contrario de lo que comúnmente se cree, *in silico* no significa nada en latín. Sin embargo por su relación con "*in silicium*" se traduce por "en silicio" lo cual hace referencia al material del que están hechos los semiconductores que permiten almacenar información en el computador (In silico, 2010, p.7).

Al estudiar la relación de las matemáticas con otras materias, encontramos que en el caso del binomio biología – matemática la relación ha sido fructífera para ambas desde que alguien, por primera vez, se dio cuenta de la posibilidad de modelar los fenómenos biológicos mediante entes matemáticos (Sánchez, Miramontes y Gutiérrez, 2002). Los primeros registros datan del siglo XIII y se atribuyen a Leonardo de Pisa, *Fibonnaci*, quien en 1219 en el *Liber Abacci* propuso un problema cuya solución se daría en términos de ecuaciones para la dinámica de una población (Sánchez, et al. 2002).

Las matemáticas en el área

La matemática es la ciencia que se encarga de la deducción lógica de las consecuencias que se pueden obtener de ciertas premisas y es, también, la ciencia de la estructura, relaciones y representaciones de colecciones de objetos.

La investigación que se utiliza en las ciencias del mar, sea cual fuere la índole de su especialidad, basada en la observación de fenómenos colectivos o en numerosas observaciones respecto a uno en particular, debe siempre representarse numéricamente para lograr una comprobación experimental. Esto da, en gran medida, mayor rigor y validez a la mirada de conjunto y a la proposición de las conclusiones. Permite, asimismo, hacer predicciones, sobre todo de aquellos fenómenos cuya variación es tan grande que difícilmente se puede expresar con rígidas fórmulas matemáticas, como en el caso de los fenómenos biológicos, psicológicos y sociológicos.

En los últimos tiempos, se ha manifestado una fuerte tendencia en las ciencias hacia la formulación de modelos matemáticos que consisten en la representación numérica de los elementos que forman un sistema en la naturaleza, los que permiten conocer sus interrelaciones y predecir su comportamiento, ya que constituyen la única forma de manejar situaciones muy complicadas y de probar hipótesis científicas básicas. Sin embargo todavía no se cuenta con modelos matemáticos enteramente satisfactorios en relación con los fenómenos que se suceden en la biología, especialmente en el océano.

En la actualidad la aplicación de las matemáticas en las ciencias del mar ha experimentado un progreso considerable, y muchos de los fenómenos que ocurren en el océano se han podido entender mejor contando con su apoyo.

El trabajo que presentamos se encuentra en la línea de investigación que intenta dilucidar acerca de la relación entre las prácticas sociales y la construcción de los conocimientos (Arrieta, 2003). Una de las tesis centrales de esta línea sostiene que los conocimientos emergen de las prácticas de las comunidades, que viven ligados a dichas prácticas y, en este sentido, ligados a sus intencionalidades. Es parte del proyecto "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico". El empleo que se hace aquí del término práctica no refleja una dicotomía entre lo práctico y lo teórico, los ideales y la realidad o hablar y hacer. El concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una práctica social (Arrieta, 2003).

La comunidad de estudio es la de los profesionales de la pesca, en la que se consideran a los biólogos pesqueros, biólogos marinos, oceanólogos y a los ingenieros pesqueros; siendo éstos el punto de partida. En los programas de estudio de las carreras de ingeniería pesquera y las de los biólogos marinos, se observa que la modelación se estudia en diferentes momentos (Ulloa y Arrieta, 2008), sin embargo al igual que en la mayoría de las licenciaturas se encuentra una separación entre los conocimientos que se adquieren en el aula y los requeridos en el campo profesional. Esto conduce a pensar que la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio y por otra parte se ha dado poca importancia a la modelación como una asignatura de relevancia en la práctica profesional. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades. La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

Una experiencia de modelación

Una de las prácticas más usuales de los Ingenieros y Biólogos Pesqueros cuando realizan investigación es la recolección de datos y a partir de estos plantean tesis o las refuerzan empíricamente lo cual se muestra en la figura No. 1.

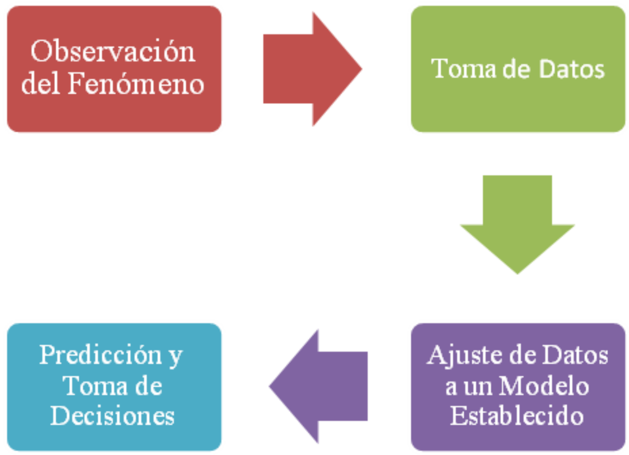


Figura 1. La práctica de modelación en las comunidades de profesionales de la pesca

En la práctica de modelación mostrada en la figura No. 1, se aprecia que los actores ajustan los datos a modelos preestablecidos sin considerar las condiciones propias de los mismos, tales como: especie, edad de la misma, temporada de captura, lugar de captura, etc., ha creado situaciones en las que el profesionista principiante modela con base en los conocimientos adquiridos en el aula pero éstos no representan a la población con que está trabajando, lo que crea situaciones laborales tensas que pueden llevar a la pérdida del empleo,como el caso que ya se ha descrito y que hemos llamado el caso "Belmont", (Ulloa y Arrieta, 2008).

El caso de estudio muestra que la utilización de la metodología tradicional conduce a errores cuya magnitud y consecuencias pueden llevar a pérdidas económicas, laborales, etc., esto refleja que la matematización de los fenómenos naturales que ocurren en la producción de microalgas no es la adecuada y es por ello que proponemos una metodología que permita analizar, visualizar y corregir la posibles fallas que existan en un proceso de modelación matemática.

La deconstrucción como estrategia

La deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos sentido y significado. Con la deconstrucción se trata de acceder a otras lógicas y formas que ofrezcan una "mirada" que va más allá de los márgenes de las "maquinarias" institucionales y profesionales y que permite ver a través de sus grietas (Derrida, 1985).

Podemos considerar a la deconstrucción como un desaprendizaje, es decir como un proceso de inversión de los horizontes de significado que cada sujeto ha acumulado, en ocasiones, de forma acrítica durante su etapa de formación y en el campo profesional. Implica examinar críticamente el marco conceptual que estructura nuestra percepción de la realidad y nuestro modo de interpretar el mundo.

La deconstrucción de la modelación del crecimiento de microalgas

El profesional generalmente no conoce las intencionalidades de la práctica y la apropiación de ellas se hace indispensable para su óptimo desempeño ya que requiere desempeñar su trabajo en tiempo y forma, por lo que se encuentra sujeto a presiones de tipo laboral cuando desconoce la forma de realizar la actividad y por otra parte cuando aprende a hacerla, no reflexiona sobre los conocimientos teóricos matemáticos que se encuentran implícitos en su tarea diaria, llegándose entonces a realizar las actividades de manera rutinaria. Con la finalidad de eliminar este tipo de situaciones, y con base en la observación de campo realizada en los laboratorios de producción, proponemos la deconstrucción de la práctica de modelación de las microalgas en nueve momentos, los que de acuerdo a situaciones específicas puede ser más o menos:

Primer momento: Reconocimiento de la práctica y definición del aspecto a deconstruir.

La práctica del cultivo de microalgas por los profesionales de la pesca y la acuacultura consiste en realizar el desdoble de la cepa o cultivo (división de la muestra para luego diluirla) cuando la coloración entre más oscura este el agua mayor número de células hay en el cultivo y que en el momento óptimo hay una coloración específica.

Para un profesional inmerso en la práctica esto es sencillo, pero para los que no, realizarlo es imposible. Requiere entonces analizar y concluir que se trata de crecimiento de poblaciones y este será el aspecto a deconstruir.

Segundo momento: La identificación de las huellas personales.

¿Cómo puedo representar el crecimiento de la población?, ¿El crecimiento de poblaciones puede modelarse?, ¿Qué tipo de modelos debo utilizar? ¿Qué herramientas necesito para modelar?

Tercer momento: Elaboración del mapa individual y/o colectivo

Los modelos que utilizamos para el crecimiento en dinámica de poblaciones son: Modelo Exponencial, Modelo Logístico, pero como puedo saber los valores o parámetros (***r, k***, …)

$$P(t) = \frac{k\,P_0\,e^{rt}}{k + P_0\,(e^{rt} - 1)}$$ Modelo logístico

Cuarto momento: La búsqueda de interpretaciones-comprensiones-acciones alternativas

¿En dónde puedo consultar los valores para los parámetros? ¿Si gráfico los datos de los conteos que realice, podré obtener los valores de los parámetros? ¿Hay tablas que me los indiquen los valores, para esta actividad? ¿Si utilizo Excel para graficar, podré llegar a un resultado positivo?

Quinto momento: La deconstrucción.

Puesto que no hay datos específicos de los parámetros para el crecimiento de microalgas, deben graficarse con Excel y utilizar los resultados para saber el momento en el que debo hacer el desdoblamiento, teniendo en cuenta la curva de crecimiento para este tipo de poblaciones tiene un punto máximo y luego inicia el decrecimiento.

Sexto momento: Planificación de la práctica transformadora; inicio de la reconstrucción

Construcción de una tabla y un gráfico a partir de los datos colectados en uno de los garrafones.

Tiempo	Organismos
0	91 250
1	143 250
2	412 500
3	688 750
4	1 700 000
5	1650000
6	1250000
7	575000
8	272500
9	67750

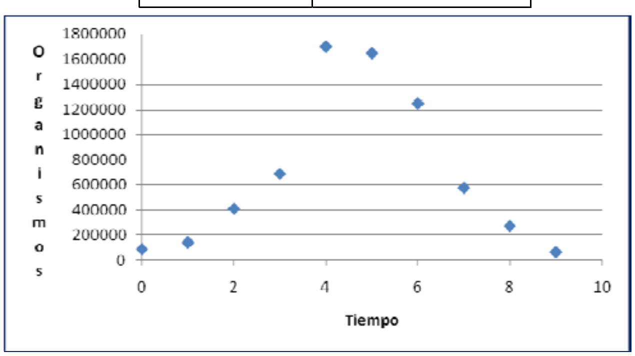


Figura 2. Graficación de los datos

Se pueden observar dos fases, la de crecimiento y la de decrecimiento, para tener el tiempo en el que se debe realizar el desdoblamiento, se debe considerar el valor máximo, para ello se analizará la primera fase:

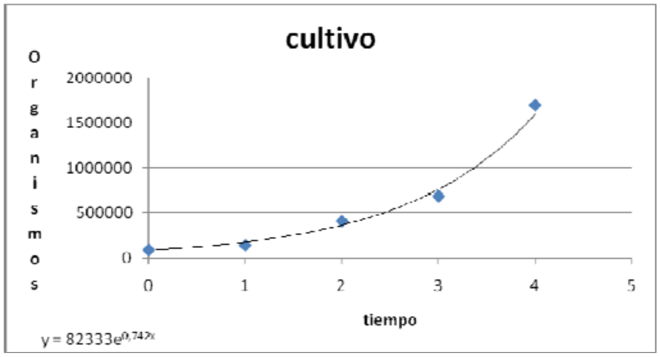


Figura 3. Fase de Crecimiento y ajuste de una curva a los datos

Séptimo momento: Seguimiento de las acciones

Se obtuvo el modelo de crecimiento exponencial

$$y = 82333\ ^{e0.742x}$$

Con un índice de correlación de 0.9864, lo cual otorga confianza para tomarlo como base y hacer las predicciones que se requieren.

Octavo momento: Retorno a la realidad transformada

A partir del modelo, se construye una tabla para comparar los datos reales con el modelo obtenido.

Tiempo	Organismos	Organismos calculados
0	91 250	86 392
1	143 250	181 507
2	412 500	381 341
3	688 750	801 187
4	1 700 000	1 683 272

Como ya se estableció el modelo es confiable por lo que se convierte en la base para los cálculos del tiempo en el que debe realizarse el desdoblamiento para ese cultivo.

Noveno momento: El inicio de una nueva reconstrucción

¿El modelo obtenido tendrá validez si se utiliza otro medio de cultivo?

¿El modelo es válido solo para este medio de cultivo?

Conclusiones

Consideramos necesario acercar la escuela con las práctica de la profesión ya que en el aula no existe la presión laboral, si bien pueden darse presiones de tipo académico, deben planearse secuencias de aprendizaje en la que se analicen en forma individual y conjunta las diferentes tareas que realiza un profesional y utilizar la deconstrucción como base para varios diseños de aprendizaje basados en las prácticas de las comunidades y una vez hechos, ponerlos a disposición de la comunidad escolar general y también a las comunidades que ejercen esas prácticas.

El desarrollo del trabajo nos permite considerar a la deconstrucción como proceso no tiene final ya que permite ir mejorando la práctica, pero a la vez estas mejoras deben ser sometidas a una nueva deconstrucción.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aul*a. Disertación doctoral publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Derrida, J. 1985. *Carta a un amigo japonés*. En Jaques Derrida, ¿Cómo no hablar? Y otros textos. Suplementos Antrhopos, 13, 1989, 86 – 89.

In silico. (2010, 7 de abril). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: septiembre 23, 2010, from: http://es.wikipedia.org/wiki/In_silico

Sánchez, F.; Miramontes, P. y Gutiérrez, J. (2002). *Clásicos de la Biología Matemática.* México: Siglo XXI editores.

Ulloa, J., Arrieta, J. (2008). *Los modelos exponenciales: construcción y reconstrucción*. En P. Lestón (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, (pp. 479-488). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

¿ES POSIBLE INNOVAR EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL? TRABAJAMOS CON LA DERIVADA

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. El cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento variacional de las funciones, es fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y, en consecuencia, para formular modelos. En este artículo se trabajan ideas para innovar en el aula universitaria cuando se desarrollan contenidos del mismo. A modo de ejemplo se presenta una propuesta didáctica para comenzar el estudio de la derivada. En ella se combina lo verbal, lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y se ponen en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas a fin de establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático.

Se comparten ideas para la incorporación y utilización de diferentes recursos en la tarea diaria buscando que el trabajo desarrollado en didáctica del cálculo así como en los proyectos de innovación para su enseñanza refleje sus resultados al interior de las aulas.

Palabras clave: enseñanza, cálculo diferencial, innovación

Abstract. Differential calculus and, in particular, the study of variational behavior of functions, is essential to analyze the changes occurring in the phenomena and therefore to model. This article shows ideas for innovative work in the university classroom when working contents of calculus. As an example we present a didactic proposal to begin the study of the derivative. It combines verbal, graphic, numeric and algebraic and brought up the conceptual aspects of the learning of rules to establish a workflow more active and closer to the mathematical tasks.

Different ideas are shared for the incorporation and use of different resources in the daily task so the work done at teaching calculus as well as innovation projects in education reflects the results inside the classroom.

Key words: teaching, differential calculus, innovation

El aula de matemática

En el ámbito de la Educación Matemática resultan conocidas las investigaciones en relación a las dificultades en el aprendizaje. A principios de los noventa, los investigadores comienzan a considerar que en el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento no se pueden dejar de lado aspectos sociales y culturales. Surgen una serie de trabajos con una orientación común: la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003). La actividad humana juega un papel importante ya que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática que implicará el rediseño del discurso matemático escolar en todos los niveles. La matemática es una producción cultural. Sadovsky (2005, p.22) expresa: "Cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la *sociedad* en la que emergen, y condicionan aquello que la *comunidad de matemáticos* concibe en cada momento *como posible y* *como relevante*". Además manifiesta "La matemática es también un *producto social*, porque es resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad" (p.23).

Todo esto hace que la actividad matemática en el aula no pueda ser abordada de una manera sencilla. Su enseñanza debe contribuir a que el estudiante desarrolle sus potencialidades y logre la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. La enseñanza entonces no puede quedar aislada de la realidad en la que surge. Es importante crear en el estudiante la necesidad de aprender y generar un ambiente donde se posibilite y se motive la exploración del significado personal de los conceptos.

La enseñanza del cálculo diferencial

El cálculo diferencial y, en particular, el estudio del comportamiento variacional de las funciones, es fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos así como para formular modelos. Debido a la complejidad de los procesos que intervienen en el cálculo (abstracción, demostración, generalización, visualización, entre otros), las investigaciones relacionadas se ubican dentro del campo denominado "Pensamiento Matemático Avanzado". En este marco, la línea de investigación del *Pensamiento y Lenguaje Variacional* estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 2000). Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función. Dolores (2007) recomienda:

> (…) ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica (p.198).

En general los investigadores proponen que el primer contacto que los alumnos tengan con las nociones y conceptos del cálculo sea enfrentarlos con aquellas situaciones problemáticas que favorezcan de una manera natural su construcción. Sin embargo aún se nota una gran brecha entre la realidad del aula (innovación) y las investigaciones científicas (Moreno, 2005, c. p. Zaldívar, 2006).

Incorporación de la informática en el ámbito escolar

No cabe duda de que los avances tecnológicos deben ser adoptados a los fines educativos y adaptados a la filosofía de la educación, así como a sus necesidades y derivaciones pedagógicas y didácticas. Duart y Sangrá (2000), expresan que la educación no puede estar ajena al potencial que los nuevos espacios de relación virtual aportan. Ante la rapidez de la evolución tecnológica, ahora más que nunca, la educación debe manifestarse claramente y situar a la tecnología en el lugar que le corresponde: el de medio eficaz para garantizar la comunicación, la interacción, la información y, también, el aprendizaje.

La informática educativa juega un papel importante en el aula, puesto que resulta un instrumento facilitador y motivador del proceso de enseñanza y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporar los avances tecnológicos implica adoptar, adaptar e integrar las nuevas herramientas al trabajo cotidiano, a fin de tornarlo más eficaz y productivo atendiendo al progreso y a las transformaciones sociales.

Numerosas investigaciones muestran además que el surgimiento de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de las distintas representaciones en la enseñanza de la matemática.

¿Es posible innovar en el aula universitaria?

En este contexto, y para dar respuesta a la pregunta planteada en este trabajo se torna necesario compartir algunos considerandos interesantes en relación a la idea de innovación. En este sentido Balbuena (1996) expresa:

> Como punto de arranque, considero la innovación aplicada a nuestro campo, como aquellas experiencias que suponen acciones prácticas y sistemáticas por medio de las cuales se intenta producir y promover ciertos cambios tanto en la forma de aprender y de enseñar matemáticas, como para conseguir actitudes más positivas en torno a nuestra disciplina.
>
> (…) conseguir que los estudiantes se acerquen a las matemáticas de una forma distinta a como suele hacerse, que se superen ciertos tabúes e ideas preconcebidas, que la vean y la consideren como una amiga. (p.35)

También, en ese sentido, Cebrián (2007, p.21) manifiesta:

> (…) nuestro trabajo en el campo de la innovación está animado por la búsqueda de *cambios* que provoquen una mejora en las instituciones y en las prácticas educativas. (…). No podemos comprender que se persiga una innovación en educación que no busque, a la vez, un cambio y mejora en las conductas, en los pensamientos y planteamientos pedagógicos, en los procesos y la organización, en las metodologías, en las técnicas y recursos, en las normativas y legislación, etc.

Bajo estas premisas, los docentes debemos hacer esfuerzos para crear entornos de enseñanza donde la innovación esté mediada por propuestas que, a través de diferentes tipos de materiales educativos y/o cambios metodológicos, faciliten la adquisición y construcción de conocimiento de manera flexible y autónoma. La experiencia de años de trabajo en la universidad nos lleva a afirmar que estamos "*obligados a pensar que podemos y debemos innovar en el aula universitaria*". Ponernos en marcha para lograrlo es parte del rol profesional y un desafío cotidiano. Si, como docentes ocupados en la formación de futuros profesionales nos preocupa el aprendizaje, debemos lograr que los alumnos encuentren distintos caminos y formas de acercarse a la matemática perdiéndole el miedo y ayudándolos a que puedan vencer la barrera que creen que los separa de ella. La innovación debe ser algo propio del quehacer docente, sin embargo debemos prestar atención a una serie de considerandos que se deben tener en cuenta para no convertirla en una improvisación. Es importante revalorizar el trabajo en el aula y saber utilizar la experiencia y la trayectoria de muchos docentes-investigadores que comparten sus innovaciones y logros a través de numerosos artículos y presentaciones en congresos para animarnos a emprender esta tarea que, en muchos casos, no está lo suficientemente valorada.

Al comenzar a pensar en una innovación debemos convertirnos en "investigadores" que pretendemos mejorar nuestra tarea en el aula. Para poder desarrollarla adecuadamente no debemos descuidar la planificación rigurosa y la programación detallada de por qué, para qué, cuándo y cómo la vamos a llevar adelante. Tendremos que asegurarnos de que estarán dadas todas las condiciones institucionales para realizar la propuesta así como que contaremos con los materiales, recursos de infraestructura y tecnológicos que permitirán concretarla completamente. Debemos garantizar la calidad de nuestro trabajo innovador buscando producir cambios en el aula de manera inmediata.

Tan importante como la planificación es la evaluación que permitirá comparar, de alguna manera, los logros en relación a nuestro trabajo habitual o con otras innovaciones ya realizadas por nosotros mismos o por otros colegas. Es necesario tener en cuenta que no siempre los resultados van a ser buenos, mas allá de que la planificación y todas las condiciones sean las adecuadas para su implementación. En ese caso no tendremos que "darnos por vencidos" y esta situación tendrá que servirnos de estímulo para seguir innovando. Teniendo en cuenta todo lo manifestado hasta aquí, la respuesta contundente a la pregunta es SÍ. Pensar en innovaciones en la enseñanza del cálculo significa:

- animarnos a realizar modificaciones en el "contenido tradicional",
- realizar cambios metodológicos tendientes a ver cómo hacemos para que el estudiante se apropie de los conocimientos,

- lograr "alejarnos" de la organización de los contenidos indicados en los programas donde predomina un enfoque abstracto con escasa relación con fenómenos de variación,
- preguntarnos si los conceptos, procesos, objetos deben ser introducidos en forma verbal, numérica, gráfica o de una manera simbólica y cómo influyen una y otra de estas representaciones en las imágenes que los estudiantes se forman de los conceptos,
- poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas,
- realizar acciones tendientes a que los estudiantes construyan sus conocimientos en forma progresiva y su contacto con los mismos sea cada vez más profundo,
- incorporar en nuestra actividad docente los recursos que nos brindan las nuevas tecnologías de la comunicación y la información,
- desarrollar propuestas didácticas que favorezcan la construcción de significados y
- propiciar actividades que favorezcan el desarrollo de los procesos y conceptos propios del cálculo (función, límite, continuidad y derivada) en base a ideas variacionales.

A continuación, y teniendo en cuenta lo expresado en los apartados anteriores se presenta, sólo a modo de ejemplo y de manera incompleta, una propuesta de aula para comenzar el estudio de derivada. En ella se combina lo verbal, lo gráfico, lo numérico y lo algebraico y se ponen en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas de cálculo a fin de establecer una dinámica de trabajo más activa y más próxima al quehacer matemático.

La propuesta: Actividades para favorecer la comprensión de la derivada

- Con esta propuesta buscamos lograr que el alumno:
- Revalorice la idea de que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios.
- Se familiarice con el concepto de razón de cambio media y razón de cambio instantánea.
- Establezca relaciones entre razones de cambio y pendientes.
- Defina derivada de una función en un punto.

Fue diseñada para tratar los siguientes contenidos del Cálculo Diferencial:

- Razón de cambio media y su relación con la pendiente de la recta secante.

- Razón de cambio instantánea y su relación con la pendiente recta tangente.
- Derivada de una función en un punto.

Para el enunciado de las actividades se tuvieron en cuenta las concepciones previas de los alumnos acerca de problemas en los que se distinguen cambios destacando las ideas variacionales. La idea fue que utilicen los conocimientos previos para construir nuevos y que estos sirvan para aclarar ideas en relación a los anteriores. Las actividades permitieron organizar la enseñanza en torno a situaciones conocidas y cotidianas donde existe la necesidad de estudiar cambios entre magnitudes en fenómenos presentados en diversas representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal). A lo largo de las tareas se propusieron interrogantes para explorar cómo la pendiente de una recta se relaciona con una razón de cambio.

Teniendo en cuenta la importancia de la interacción en la construcción de los conceptos, se propuso que los alumnos resuelvan las actividades en grupos de a dos y respondan claramente a los interrogantes e inquietudes planteados al finalizar cada actividad o grupo de actividades. Se logró cambiar el ambiente de la clase propiciando una dinámica de interacción social. La tarea del profesor fue de apoyo a los equipos, atendiendo a las preguntas pero intentando que ellos mismos encuentren las respuestas. En la última parte de la clase se realizó la puesta en común y una discusión grupal, revisando las distintas actividades y aprovechando las respuestas para formalizar los conceptos. Por supuesto que, en concordancia con este tipo de actividades, se planificó también la evaluación. En este caso la innovación está presente en el diseño de los materiales y en la forma de abordar el trabajo en el aula. Se desplaza la clase magistral por el taller de trabajo.

Actividad 1. Los datos de la tabla muestran los valores de la temperatura T de cierto volumen de agua tomadas en los tiempos t señalados.

Tiempo t en minutos	0	5	10	15	20	25
Temperatura T en ºC	15	25,5	55,7	95	85	62

Complete la siguiente tabla:

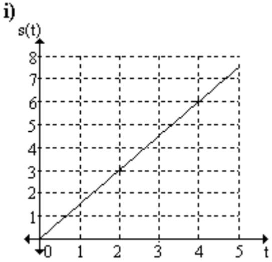
Intervalo de tiempo Δt	Cambio de temperatura (en ºC) $\frac{\Delta T}{\Delta t}$	Cambio de la temperatura con respecto al tiempo $\frac{\Delta T}{\Delta t}$
De t = 0 a t = 5		
De t = 5 a t =10		
De t = 10 a t =15		
De t = 15 a t =20		
De t = 20 a t =25		

Lea atentamente el problema. A partir de los datos de la tabla:

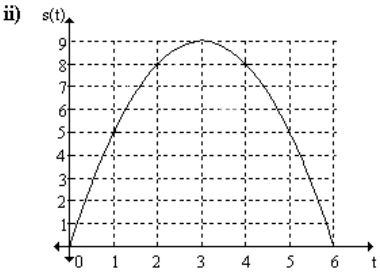
a) Realice la interpretación geométrica en un intervalo. *b)* ¿Qué significado tienen las mediciones hechas en cada columna de la tabla? *c)* ¿Es posible que algunos valores de la tercera columna sean positivos y otros negativos? ¿Qué interpretación le da a esta situación? *d)* Defina a que llamaría usted razón de cambio media.

Actividad 2. Las gráficas muestran la posición de dos partículas (en metros) en cada instante de tiempo t medido en segundos. Obtenga la velocidad media de cada partícula en intervalos de un segundo.

i)



ii)



Para reflexionar: ¿Qué diferencia observa con respecto al problema 1 en cuanto a la obtención de la información? Esboce las gráficas correspondientes a la velocidad media de cada partícula. Analice desde la Física el movimiento de cada partícula y explique el comportamiento de las gráficas de la velocidad media de cada una.

Actividad 5. La cantidad de calor h (en joules) que se necesita para convertir 1g de agua en vapor es función de la temperatura t (en °C) de la atmósfera según la ley $h(t) = \dfrac{-8t + 7520}{3}$.

Complete la tabla. Encuentre las razones de cambio promedio de la cantidad de calor h con respecto a la temperatura t de la atmósfera, para $0 \le t \le 60$, en intervalos de 15° de amplitud.

Encuentre $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ en forma analítica a partir de la ley que define la función.

Intervalos de temperatura (en °C)	Cambio de la cantidad de calor Δh (en joules)	Cambio de la cantidad de calor con respecto a los cambios de la temperatura. $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$
0 ≤ t ≤ 15	$h(15) - h(0)$	
15 ≤ t ≤ 30		
30 ≤ t ≤ 45		
45 ≤ t ≤ 60		

Actividad 6. Un globo esférico se infla con un gas. Encuentre analíticamente la razón de cambio media del volumen con respecto al radio cuando éste cambia de 2m a 2,5m y cuando cambia de 2,5m a 3m. Complete las tablas. ¿Es posible calcular la variación del volumen cuándo el radio es exactamente 2,5m?

Intervalos	Cambio del volumen con respecto al cambio del radio. $\frac{\Delta V}{\Delta r}$
$2{,}4 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}499 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}4999 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49999 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}6$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}51$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}501$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}5001$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}50001$	

Para reflexionar: Después de leer, analizar y resolver las actividades 5 y 6 responda:

a) ¿Qué diferencia fundamental puede observar entre estos problemas? b) ¿Qué sucede si los intervalos son cada vez más pequeños? c) ¿Por qué se hace necesario calcular la razón de cambio en un instante particular? ¿Cómo calcularía la razón de cambio en un momento particular en cada problema? d) ¿Qué objetivo se quiere alcanzar al completar las tablas del problema 6? e) ¿Qué otros conocimientos están en juego en el problema?

Actividad 7. Un cuerpo se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t) = 2t + 2$ metros. Determine la razón media de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud. Analice gráficamente. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Actividad 8. Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t) = -2t^2 + 12t + 9$ metros. Determine la razón de cambio media del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo. Represente gráficamente. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Para reflexionar: Después de resolver los problemas 7 y 8. Encuentre las razones de cambio en forma analítica. ¿Qué conexión puede realizar entre los resultados de la tabla, las expresiones analíticas y las representaciones gráficas? ¿Qué conceptos puede resaltar a partir de esta conexión?

Actividad 9. Un científico encontró que si calienta cierta sustancia, la temperatura en grados centígrados después de t minutos donde $0 \leq t \leq 5$, está dada por $g(t) = 2t^2 + 4t + 10$.

a) Encuentre la razón media de cambio de la temperatura durante el intervalo [1, 2]. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta que une los puntos de abscisa 1 y 2 respectivamente. *b)* Encuentre la razón de cambio en t = 1,5. Muestre gráficamente que dicha razón de cambio coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en t = 1,5.

Para reflexionar: ¿Es posible establecer alguna relación entre razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, recta secante y recta tangente?

Para finalizar discuta e intercambie ideas con sus compañeros, a modo de resumen, con relación a todos los aspectos considerados en la guía resaltando los conceptos más importantes: razón de cambio media, razón de cambio instantánea, pendiente recta secante, pendiente recta tangente y derivada de una función en un punto.

A modo de reflexión final quiero compartir lo siguiente:

> Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar (…). Se necesita -claro- *creer* que es posible lograr que los alumnos se ubiquen en esa posición, pero esa creencia no se puede inventar, es necesario sustentarla en conocimientos que permitan pensar por dónde se puede empezar a actuar. (Sadovsky, 2005, p.13).

Las ideas manifestadas sobre la incorporación y utilización de diferentes recursos en la tarea diaria así como el cambio en la metodología utilizada buscan que el trabajo desarrollado en la didáctica del cálculo así como en los proyectos de innovación en su enseñanza refleje sus resultados al interior de las aulas.

Referencias bibliográficas

Balbuena, L. (1996). Innovación Educativa: un reto profesional. En Alsina, C.; Alvarez, J; Hodgson, B.; Laborde, C. y Pérez, A. (Eds.). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática. Selección de Conferencias*. (pp.31-42). Sevilla: S.A.E:M. Thales.

Cebrián, M. (2007). Innovar con tecnologías aplicadas a la docencia universitaria. En Cebrián, M. (Coord.). *Enseñanza Virtual para la Innovación Universitaria.* 2ª Edición. Madrid: Nancea.

Cantoral R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*. (pp. 69-91). Sevilla: Grupo Editorial Ibero América.

Cantoral, R.; Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F, México: Trillas.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp.169-204). México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Duart, J. y Sangrá, A. (comp.). (2000). *Aprender en la virtualidad.* Barcelona: Gedisa, S.A.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

ESTUDIO SOBRE CONSTRUCCIÓN Y USO DE GRÁFICAS

Eduardo Carrasco
Universidad de Valparaíso (Chile)
ecarrascr17@yahoo.com

Resumen. El estudio que se presenta, profundiza el saber sobre el rol que las gráficas de variación pueden jugar en la construcción de aprendizajes sobre el pensamiento y lenguaje variacional. En particular en este reporte mostraremos los primeros resultados de la investigación que asume a la gráfica como una herramienta y se pregunta sobre la actividad matemática que promueve. Para enfrentar esta investigación se define como objeto de estudio la noción de ambiente de trabajo gráfico variacional como un espacio de interacción humana, el cual se constituye al establecer como central a la actividad la herramienta gráfica. Ambiente que se constituyen por las prácticas; las herramientas, los significados y argumentos que concurren al trabajo. Con el propósito de construir situaciones de enseñanza que promuevan más y mejores aprendizajes variacionales.

Palabras clave: ambiente gráfico, herramientas, lenguaje variacional

Abstract. The paper we present here is intended to deepen the knowledge we have on the paper variation graphics have on the construction of concepts associated with variational thinking and language. At his point we are presenting the first finding we had on our research, where we assume graphics as tools and we question ourselves about the mathematical activity promoted by its use. The center of our research is, then, the notion we called Variational Graphics Work Environment as a space of human interaction, where the center is the activity with the graphic tool. The environment also constituted by practices, tools, meanings and arguments, with the single purpose of producing educational situations that will result in more and better variational knowledge.

Key words: graphic environment, tools, variational language

El estudio que se presenta, busca profundizar saber sobre el rol que las gráficas de variación pueden jugar en la construcción de aprendizajes sobre el pensamiento y lenguaje variacional. A partir de las dificultades que muestran estudiantes con el trabajo de gráficas de variación (Dolores 2002; Arrieta, 2003; Buendía y Carrasco, 2009) se ha ido levantando un análisis que busca reconocer los significados y herramientas de pensamiento y lenguaje variacional que se han ido constituyendo en el devenir históricos de la construcción de la gráfica de variación. A partir de ellos se busca dar elementos que potencien el diseño situaciones de enseñanza que promueven más y mejores aprendizajes variacionales.

Elementos teóricos

Al entender la matemática como una construcción social, la mirada se centra en el sujeto social que actúa y construye saber. Por tanto, más que mirar a la gráfica como objeto matemático, nos focalizamos en la actividad matemática que ella propicia en los estudiantes. Así la intención, no es posicionarse en el objeto matemático, sino en el sujeto que actúa en torno a la gráfica. De igual modo se busca dar una mirada compleja, no por la dificultad intrínseca de lo que se mira, sino porque se busca dar cuenta de la actividad matemática asociando nociones antagonistas e integrando la ambigüedad, comprender la complejidad de lo real de los objetos y su relación con el pensamiento que los concibe (Soto, 1999).

El estudiante es considerado en cuanto individuo, con su biología y su pensar actuando integradamente para acoplarse al mundo que le toca vivir, creando y aprendiendo, pero también como sujeto social, siendo parte integral de un grupo humano, asumiendo objetivos y formas de actuar social. En definitiva siendo constituido por la sociedad en que vive, pero a la vez construyendo esa sociedad. Por tanto, se requiere considerar la dualidad de sujeto individual/social y a partir de ahí focalizar el estudio en su actuar con otros y en la racionalidad de ese actuar.

Entendemos la racionalidad como "las coherencias operacionales de los sistemas argumentativos que construimos en el lenguaje para defender o justificar nuestras acciones" (Maturana, 2001) lo que constituye al lenguaje en una puerta para mirar al sujeto, a partir de su interacción con la tarea y con otros, a través de los procesos de construcción de consensos y coherencias en el transcurso de la actividad. Al decir de Díaz (2005) "Los estudiantes construyen sus aprendizajes en la actividad y dialogo constantes con otro y consigo mismos, movidos por su curiosidad ante un mundo que, de este modo, se les va desplegando". Sujetos, por tanto, que son productos de un proceso de socialización cuya existencia presupone la existencia de una sociedad instituida (Castoriadis, 1986) que impone formas de actuar y de enfrentar problemáticas.

Entonces este trabajo asume la necesidad de un abordaje sistémico al trabajo estudiantil en torno a la graficación y sus significados, a su capacidad para argumentar desde ella, entendiendo un Estudiante que es producto de su contexto sociocultural y que aprende una matemática entendida como una construcción sociocultural. En síntesis se asume un marco socioepistemológico que estructura la mirad con un carácter social que está dado por tratar de entender el fenómeno educativo desde el sujeto que actúa.

Metodología

La primera fase, se oriento a constituir un instrumental de análisis, en definir el objeto de estudio. Para ello en una revisión bibliográfica y de producciones estudiantiles se definió el ambiente de trabajo gráfico como la articulación de cuatro facetas de actividad en torno a las gráficas de variación en el tiempo, estas articuladas en dos planos respecto del sujeto que actúa: a) El plano de las prácticas y Herramientas y el plano de los argumentos y los significados. La segunda fase, aún en desarrollo es la validación del modelo en una mirada histórica al trabajo con gráficas. Para ello, se identifica la actividad matemática en torno a las gráficas que se dieron en momentos históricos particulares. La selección de episodios está dada por su potencialidad argumental del uso de las gráficas con el fin de reconocer en ella, la significación y la racionalidad presente en el actuar, las prácticas propias de su época. Siendo cuatro momentos analizados: a) Oresme y el Merton College. b) Galileo y la numerización del fenómeno c) Newton/Leibniz: Geometría v/s Física diferentes significados para la misma herramienta d) Weierstrass y el cambio de metáfora. La tercera fase, será validar el poder descriptivo del ambiente de trabajo gráfico mediante el análisis de producciones escolares respecto a la representación libre de fenómenos de variación. Ante consignas del tipo, "construye un cartel que comunique a otros el fenómenos que ves" o "representa la caída de una pelota del tercer piso". Un análisis desde las construcciones realizadas, que permiten reconocer su significación y racionalidad.

Primeros resultados

En torno a la primera fase de construcción del objeto de estudio, se inicia la discusión en torno a la actividad matemática del sujeto. Un actuar en torno a gráficas de variación en el tiempo, en el cual se reconocen trazas de "formas de hacer" compartidas con su grupo social de pertenencia, más bien prácticas matemático escolares y cotidianas, en cuanto son formas de actuar genéricas en torno a un objetivo. Desde ahí, se configura el primer plano de actividad en torno a las gráficas:

El plano de prácticas y herramientas

Al reconocer la relación entre la actividad humana y la herramienta, surge la noción de práctica social, la cual "ejerce la función normativa en la relación existente entre actividad humana y praxis" (Covian, 2005). La estructura social, estructura-estructurante como señala Bourdieu (Manuel, 2003), será quien impulsará en los sujetos el desarrollo de ciertas prácticas, su uso y modificación que permite estructurar esa sociedad, modificando y estructurando a la práctica social en una relación compleja.

De modo que el actuar de un sujeto es estructurado no solo por la situación específica y sus ideas, sino por formas de hacer, prácticas, compartidas socialmente que son ejercidas por los sujetos, que en un contexto histórico y social, otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Arrieta 2003). El desarrollo de prácticas específicas de parte de los sujetos con su medio y con otros, va constituyendo una acción intencionada que le permite construir un mundo a partir del cual se acopla estructuralmente a la realidad que le toca vivir. Es en el desarrollo de prácticas que se construye el saber matemático, entendido este como "medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones" (Puig 1993).

Entonces podemos reconocer diversos niveles en la descripción de esta actividad, la práctica social reconocida en un nivel macro social, cuya función normativa es la que se evidencia y no podemos necesariamente reconocerla en el actuar concreto del sujeto. En un nivel intermedio, entre esta práctica social y la actividad de los estudiantes, Montiel (2005) define a la práctica de referencia como la restricción a contextos específicos (de ingeniería, de medicina por ejemplo) de la práctica social y finalmente la actividad del sujeto en la cual podemos reconocer trazas de esa práctica social, trazas que reconoceremos simplemente como las prácticas que ejerce el sujeto. En síntesis en el actuar del sujeto se ve un actuar que es el resultado complejo de la coacción que sobre él que produce: las prácticas que ejerce, su biología, las particularidades del problema específico que enfrenta, así como toda su carga y biografía social, cognitiva y emocional.

Ejercer estas prácticas no es posible sin el uso de herramientas, las cuales permiten ejercer una práctica específica, y a su vez es la práctica que se ejerce la que da el estatus de herramienta al objeto. Se propone a la práctica social como generadora del saber matemático, como motor que condujo la construcción de las herramientas matemáticas para el cálculo, pero en la complejidad de la vida humana no podemos desconocer el rol que tiene la herramienta en la determinación de las prácticas que realizamos. Como señala Vygotsky (citado en Font, 2002, p.142) "si a un niño se le cambian las herramientas de pensamiento disponibles, su mente tendrá una estructura radicalmente diferente, y sostiene que sólo se puede comprender el desarrollo del lenguaje —que es una actividad práctica que permite la comunicación con los otros— teniendo en cuenta la actividad práctica del uso de herramientas". Claramente el aporte de Oresme de construir un dibujo de lo que varia, de figurar la variación mediante herramientas geométricas, permitió una herramienta potente para el trabajo con la variación, el dibujo geométrico. Esta herramienta nueva de representación generó prácticas para entender como varían las cualidades, asociadas a lo geométrico, se pasó de un uso de la proporcionalidad numérica como base para ver lo que cambia, hacia un cálculo de áreas en que hablamos de cantidad de magnitud de movimiento y una proporcionalidad geométrica. Lo anterior implica incorporarnos a un lenguaje de las herramientas en que los objetos matemáticos ya no son entes que han de ser traspasados a un estudiante para que este los acumule, sino que son herramientas que el construye y utiliza para desarrollar la actividad. "Nuestros conceptos estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental" (Freudhental, 1983, citado en OCDE, 2003). Así en una epistemología basada en la actividad humana se debe explicar los conocimientos en términos de herramientas que usa el hombre para hacer matemática. La acción se considera que siempre se encuentra mediada por herramientas.

El segundo plano de significados y argumentos

Al posicionarse en lo cognitivo, a partir de la actividad se construyen los significados respecto de los elementos presentes en dicha actividad, así en la medida que se enactan (en el sentido de Varela, 1990) los significados que están en directa relación con las estructuras que van surgiendo y que permiten actuar. Es, más bien, la significación o resignificación de nociones, herramientas, objetos, que se da según el mundo en el cual se está, en las prácticas que se involucra y las herramientas que utiliza. Al decir de Espinoza, (2009) se constituyen espacios de significación. Así el significado no proviene de algo construido y dado, como si se buscará la similitud con lo real a partir de una descripción de nuestra cognición, sino que es parte propia del actuar en el mundo, es enactar esquemas cognitivos de significado para poder vivir. El significado establece relaciones entre procesos y objetos (Cordero, 1998).

A modo de ejemplo podemos reconocer que el significado de tangente, será totalmente redefinido a la luz de su aplicación al estudio diferencial de curvas, estudio posibilitado por la herramienta gráfica introducida por Oresme. Desde un significado que la reconoce como una recta que toca en un solo punto a la figura, se resignifica, hacia una noción local a la curva en el cálculo diferencial, es más a reconocerlo de modo dinámico. Así el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. (Martínez, 2005). Más aún, la tangente en geometría se sigue entendiendo como aquella recta que interseca en un solo punto a la figura, con lo cual se puede articular los objetos, herramientas y sus procedimientos en una práctica propia de lo geométrico, mientras que en el trabajo de cálculo diferencial, se significará a la tangente como aquella recta que intersecta localmente en un solo punto a la curva, la cual a medida que ese punto se "mueve" sobre la gráfica hará variar la inclinación y por tanto a la recta. Ambos significaciones de la recta tangente conforman esquemas cognitivos que no llegan a contradecirse necesariamente, al menos en quienes han logrado aprendizajes.

De este modo el significado se constituye, a la vez que condiciona el actuar de los sujetos, una racionalidad que se entiende como "las coherencias operacionales de los sistemas argumentativos que construimos en el lenguaje para defender o justificar nuestras acciones". (Maturana, 2001). De este modo las argumentaciones entendidas como aquellas construcciones para convencer, donde se forman de los significados y los procedimientos generados y van formando un esqueleto argumentativo. Este andamiaje se va nutriendo en el transcurso de la propia situación hasta que, en otro nivel de análisis, conforma en esquema explicativo que engloba todo lo anterior (Buendía, 2004).

Así el último factor que entra a configurar las condiciones en que se da el trabajo en torno a las gráficas de variación a considerar, serán las argumentaciones que son propiciadas por la actividad, el uso de herramientas y los significados que son puestos en juego,. Argumentaciones que van configurando el tipo de relaciones que se dan entre quienes participan, en la construcción de argumento y en definitiva en el ambiente de trabajo que se estructura entre quienes actúan. Es el habla como espacio de coordinación de acciones consensuales de alto orden que permite o imposibilita un trabajo específico de un equipo que produce. Claramente podemos ver como el nivel de argumentación e interacción que se produjo entre Newton y Leibniz, o más bien entre las comunidades alemana e inglesa en torno al descubrimiento del cálculo, produjo una nula cooperación entre ambos hombres y una competencia de dos epistemes que aún hoy podemos reconocer en pugna.

De este modo el escenario de trabajo Gráfico se constituye en la interacción de las siguientes componentes que lo definen:

El conjunto de prácticas presentes. Tanto aquellas que se propician en la actividad propia de quienes trabajan, en su individualidad y particularidad, así como aquellas prácticas sociales que están al seno de la condición social de quienes actúan.

Las herramientas que concurren al trabajo. Entendiendo por herramientas a todos aquellos elementos matemáticos que concurren a entender lo que varía y cómo varía desde diferentes marcos conceptuales.

Los significados que se portan en la gráfica. Los elementos que constituyen la gráfica son símbolos que portan significados particulares de quienes las construyen y que deben ser conocidos por quienes las interpretan.

Las argumentaciones que se propician. Los sujetos involucrados en esta actividad especifican, levantan argumentaciones para convencer, explicar y llegar a consensos con otros. Ellas son articuladas desde los significados herramientas y prácticas ejercidas en el ambiente.

Primeras clasificaciones de ambientes de trabajo

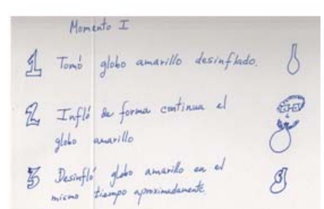
El ambiente de Trabajo Gráfico de Oresme. El trabajo de Oresme es fundacional en la construcción de la gráfica de variación. Oresme en una *práctica* de figuración de las cualidades (Arrieta, 2003) busca construir un dibujo de lo que varía y en particular le interesa describir la variación de las cualidades (velocidad, calor, dolor, por ejemplo), que al seno de su época no eran consideradas magnitudes medibles. Señala Oresme que "la intensidad expresa también la idea de que una cosa es 'mas esto' o 'mas aquello', por ejemplo, 'más blanca' o 'más rápida'. Esta intensidad, o más precisamente intensidad en un punto, es divisible de una sola forma e infinitamente, como un continuo. No se la puede representar mas adecuadamente, por lo tanto, que bajo la forma del continuo que es originalmente divisible y de una sola forma, es decir, por una recta" (Oresme, citado en Ramírez, 2007). Así, a partir de la metáfora construida, se significa a una cualidad como un segmento y de este modo se consigue una figura geométrica para la variación de una cualidad, asociando el segmento perpendicular en un punto especifico como la intensidad en ese punto de la cualidad. Entonces el área es *significada* como la totalidad de la variación. Incorporando por tanto las *herramientas* geométricas para entender que y como varia lo que varía.

Así los *argumentos* son de análisis geométricos, pueden trabajar de modo cualitativo la variación, consiguiendo medidas enteras, y realizando cálculos exactos en un trabajo cualitativo propio de su época, previa a Galileo.

Ambiente de Trabajo Gráfico de Geometría Analítica. El trabajo de Fermat y Descartes, permite la incorporación al trabajo geométrico de las expresiones algebraicas. Newton y Leibniz de este modo incorpora al estudio de la variación herramientas analíticas, constituyendo el paradigma Geométrico del trabajo de Newton. Esto se produce, bajo el desarrollo de *prácticas* sociales de predicción (Cantoral, 2006), se da un contexto de *significación* de la curva como la traza de un punto que se mueve. A partir de ello construye el método de las fluxiones, en donde las cantidades *x, y,* son significadas como segmentos que desde herramientas analíticas para el trabajo con infinitesimales, le permite encontrar las características deseadas de la variación por métodos infinitesimales. De esta forma los *argumentos* que se generan responden a "La posición del punto como referencia temporal", a la forma de la figura y sus elementos, por ejemplo la curvatura de una función, se argumenta desde el radio de la mayor circunferencia tangente posible.

No explicitado en este trabajo principalmente por espacio, resta el ambiente de trabajo del análisis matemático, que responde a la reformulación del cálculo de Weiesstras, que constituye la gráfica como conjunto de puntos.

Desde las producciones estudiantiles



Representaciones Icónicas. A partir de pedir a estudiantes que representen la caída de una pelota, vemos construcciones icónicas del movimiento (fig. 1) Entendidas como representaciones libres de parte de quien trabaja, estas se caracterizan por utilizar recursos pictóricos para

representar variaciones en el tiempo. De igual modo al pedir a profesores (en curso de Relme 21) comunicar lo que cambia en una situación (fig. 2) Los profesores igual recurren al comic, como principal herramienta para visualizar lo que varía.

De este modo reconocemos preliminarmente el comic como un ambiente de trabajo gráfico que remite a prácticas icónicas de representación. La práctica de figurar lo que varia, hace uso de herramientas pictóricas, dibujando los momentos donde cambia algo observable, el globo se infla, o desinfla, la pelota parte o cae al suelo (ver figuras 1 y 2). Las variables que interesa describir quedas inmersas en la reproducción pictórica de la escena, sin embargo aquellas variables que se perciben con la mirada, como el tiempo, pueden ser descritas, o con simbología particular o en descripciones adjuntas. Los significados que se trabajan en la situación surgen de reconocer al movimiento en una sucesión de imágenes, el tiempo queda implícito en la variación de las de las escenas (cambio de posición del sol respecto de la nube en la figura), lo que muestra una significación del tiempo como artefacto de sincronía (Carrasco, 2006). Las argumentaciones, son entonces evocadas desde la secuencia de imágenes y desde la percepción y memoria visual, se argumenta desde un “yo lo vi”, “el globo se inflo” y se exige esas descripciones argumentaciones a la par de la escena.

En síntesis el ambiente de trabajo gráfico, nos permite una mirada sistémica al trabajo de la variación, reconociendo elementos centrales de una socioepistemología con miras a un diseño de situaciones de enseñanza. Así esperamos articular en una situación de enseñanza a partir de una situación articuladora, un fenómeno de cambio en el cual la necesidad de predecir (entendida esta como una práctica social a la base de la constricción del cálculo (Cantoral, 2006)), y de describir lo que varia se articulan diversos ambientes gráficos para la construcción de parte del estudiante de herramientas y significados variacionales.

Referencias bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las practicas de modelación como proceso de matematización en el aula*. México. Tesis Doctoral no publicada, Cinvestav.

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. México: Tesis Doctoral no Publicada, Cinvestav.

Buendía, G., & Carrasco, E. (2009, V.21). *Gráficas de Variacion: Reflexiones sobre la visualización de la curva*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa , 35-41.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezama, J., & Martinez Sierra, G. (2006). *Socioepistemología y*

Representación. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 83-102.

Carrasco, E. (2006). *Grafica de Variación en el tiempo*. Mexico: Tesis de Maestría no Publicada, CICATA.

Castoriadis, C. (1986). *El campo de lo social historico*. Estudios (N4), 7-25.

Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorias del conocimiento cálculo y del análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 56-74.

Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. México: tesis de Maestria no Publicada, CINVESTAV.

Diaz, L. (2005). *Profundizando en los Entendimientos estudiantiles de variación*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 125-563.

Dolores, C., Alarcón, G., & Albarran, D. (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 103-128.

Espinoza, L. (2009). *Una Evolución de la Analiticidad de las Funciones en l Siglo XIX. un estudio socioepistemológico*. México: Tesis de Maestría no Publicada, CINVESTAV.

Font, V. (2002). *Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. EMA , 127-170.

Manuel, F. (2003). *Habitus y sentido práctico: la recuperación del agente en la obra de Bourdieu*. España, Cuadernos de Trabajo Social , 7-28.

Martinez, G. (2005).*Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 195-218.

Maturana, H. (2001). *Emociones y Lenguaje en Educación y Politica*. Santiago. Ed. Dolmen.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológio de la función Trigonométrica.* México: Tesis Doctoral no Publicada, Cicata.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. OECD. Published.

Puig, L. (1993). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. Educational Studies in Mathematics , 1-164.

Ramírez, J. (2007). *Reflexiones sobre las Ideas de Nicolás Oresme*. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia , V. LIX, 23-24.

Soto, M. (1999). *Edgar Morin. Complejidad y Sujeto Humano*. Valladolid. Tesis Doctoral no Publicada. Universidad de Valladolid.

Varela, F. (1990). *Conocer*. España. Gedisa.

LA FORMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA DEL PROFESORADO DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR MEXICANO. PROPUESTA DE PARTIDA PARA ENFRENTAR EL DESAFÍO

Luis M. Cabrera Chim, Ricardo A. Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
lmcabrera@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Actualmente, el Bachillerato Mexicano enfrente la puesta en marcha de la Reforma Integral de la Educación Media Superior. Sin embargo, dentro sus postulados, ella carece de planteamientos didácticos y metodológicos que permitan alcanzar los objetivos que propone. Esto lleva a plantearnos dos interrogantes. La primera hace referencia a los conocimientos y las bases didácticas metodológicas que se requieren para alcanzar tales objetivos. En relación con esto, nos referiremos al trabajo de Cabrera (2009), el cual propone a la teoría socioepistemológica como fuente de dichos elementos. Además de que ella permitiría enriquecer los objetivos de la reforma. La segunda hace referencia a los mecanismos implicados en promover que los profesores hagan suyos tales elementos. La identificación de estos mecanismos constituye el objetivo de este trabajo. No pretendemos una imposición normativa de tales elementos, sino más bien que estos conocimientos enriquezcan el desarrollo profesional de los docentes.

Palabras clave: profesores, desarrollo profesional, bachillerato, socioepistemología, reforma educativa

Abstract. Currently, in the Mexican High School "The Integral Reform of Middle Upper Education" is taking place. However, reform´s postulates don´t set didactic and methodological approaches to attain the objectives that proposes. This leads us to ask two questions. The first refers to the knowledge and the didactical and methodological bases that are required to achieve those objectives. In this connection we shall refer to the research of Cabrera (2009), which proposes to the Socioepistemological Theory as a source of these elements. In addition, that theory would enrich the reform´s objectives. The second refers to the mechanisms involved in promoting that teachers embrace such elements. The identification of these mechanisms is the goal of this research. We don´t intend to impose such elements, but rather that these knowledge will enrich the professional development of teachers.

Key words: teachers, professional development, high school, socioepistemology, educational reform

Introducción

El sistema educativo mexicano se encuentra en un período de reestructuración y reformulación, tanto al nivel de sus objetivos como del trabajo que se requiere para alcanzarlos. Así, este período constituye un momento de gran importancia para lograr una incidencia real de los resultados de la investigación sobre el sistema educativo. Desde nuestra perspectiva, un camino para lograr esto, lo constituye el proponer acciones encaminadas a alcanzar los objetivos establecidos en las reformas, y/o para la reformulación o la reestructuración de las mismas con miras a incidir benéficamente sobre ellas. En este sentido una de las reformas llama nuestra atención, la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). Esto debido al planteamiento de dotar de una identidad a este nivel educativo, pero también debido al período en el que se suscribe: luego de la educación básica y como requisito para la educación superior.

Antecedentes y problema de investigación

La RIEMS integra como parte del eje de su desarrollo al Enfoque por Competencias (o Educación Basada en Competencias). Esta adopción exige de romper con prácticas docentes e institucionales estabilizadas actualmente. Esto, a su vez, convierte a la formación de los profesores en un punto sensible para su implementación. Más aún, cuando este enfoque carece de un adecuado marco didáctico metodológico para conducir los nuevos procesos de aprendizaje que este enfoque requiere (Andrade, 2008). Además, la RIEMS no es clara en este sentido. En ella se pueden encontrar planteamientos, que a nuestro parecer, pueden actuar en contra de la implementación de la misma. Uno de ellos hace referencia a que las instituciones no tendrán que modificar sus mallas curriculares. Ellas únicamente deberán revisar sus contenidos y asegurarse de que el perfil del egresado se cumpla con suficiencia (SEP, 2008). Por otra parte, también se establece que ellos no necesariamente tendrán que realizar nuevas tareas, sino más bien cambiar el enfoque de su trabajo, el cual debe orientarse al desarrollo de determinadas competencias por parte de los estudiantes, sin que ello signifique que requiera cubrir nuevos contenidos (SEP, 2008). Sin embargo, la escuela se ha abandonado a la rutina, al desarrollo de formas de trabajo establecidas, a promover ejercicios bastante rutinarios (Díaz-Barriga, 2006).

Lo anterior nos plantea dos cuestionamientos. El primero se refiere a la necesidad de encontrar bases metodológicas, fundamentadas teóricamente, para favorecer que se alcancen los objetivos y postulados que se proponen en la RIEMS. El segundo se relaciona con la identificación de elementos para favorecer una profesionalización de la actividad del profesor que permita incidir de manera benéfica en la concreción de los objetivos que plantea la reforma. Este último cuestionamiento, lo planteamos en un ámbito mayor al de la RIEMS. No nos restringimos a preguntarnos cómo lograr que los profesores trabajen bajo el enfoque en competencias, sino en cómo incidir sobre sus creencias y concepciones, de modo que se lleven a efecto los cambios educativos que el país requiere.

Con respecto al primer cuestionamiento, describimos a continuación el trabajo desarrollado por Cabrera (2009). En él se realizó un estudio encaminado a establecer las posibles relaciones entre los objetivos propuestos por el Enfoque en Competencias y los resultados obtenidos en los estudios realizados bajo la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar). Estas relaciones se establecieron con respecto a la actuación de los estudiantes y el desarrollo de las habilidades y estrategias requeridas para abordar los problemas o situaciones que se proponen en ambos casos. Cabrera (2009) proporcionó evidencia para establecer como una opción viable para el desarrollo de competencias matemáticas, a los elementos metodológicos y didácticos propuestos en el Pylvar. Pero también, al ver al Pylvar como aquel conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que son puestos en juego al enfrentar situaciones de cambio y variación, se da sustento para afirmar que su desarrollo en el estudiante constituye un elemento formativo, de gran importancia, a integrar al Marco Curricular Común (MCC) de la RIEMS. Así, las estrategias variacionales que se requiere desarrollar para abordar las situaciones de cambio, constituyen aquellas herramientas comparables con las competencias matemáticas señaladas en la reforma.

A partir de este trabajo, pudimos observar la imposibilidad de privilegiar el desarrollo de las competencias establecidas en la reforma, a partir de centrar su construcción en contextos particulares, como se señala en los encuadres teóricos del Enfoque por Competencias. Por ejemplo, la interpretación de información en gráficas, tablas, etc., no exige siempre las mismas acciones, habilidades y conocimientos. Es más, las gráficas y los puntos de referencia que se toman para su interpretación, no siempre son de la misma naturaleza ni del mismo tipo. Por ejemplo, en la figura 1, la imagen de la izquierda corresponde a una gráfica empleada en Toxicología al realizar la amplificación de genes para ochos distintos AND's (Tuyub, 2008; citada en Cabrera, 2009). Por su parte, la imagen de la derecha de la figura 1, corresponde a una gráfica empleada en la Ingeniería Biomédica para determinar el punto de la Temperatura de Curie (T_c), es decir, el punto donde la cerámica bajo estudio pierde sus propiedades ferroeléctricas (García, 2008; citada en Cabrera, 2009). En la primera gráfica importa la aparición o no de los marcadores de los genes, representados por los rectángulos blancos, y la posición en los que ellos se presentan. Mientras que en la segunda gráfica interesa observar dónde se presentan los máximos, mínimos o puntos de inflexión de la gráfica. En cada caso, la interpretación de los resultados y la discusión en torno de ellos, se ve acompañada por los saberes propios de cada disciplina.

En este sentido, establecemos que es necesario rebasar las prácticas de cada contexto y establecer aquello que rige que éstas se desarrollen, y por ende, que exigen el poseer determinadas competencias. Por tanto, se requiere de una categoría de estudio que nos permita ir más allá de los contextos por separado, y determinar aquello común a varios de ellos. De este modo, la idea de práctica social entendida como práctica normativa de la actividad, más que la actividad humana misma, es decir, aquello que hace que hagan lo que hacen (Covián (2005); citada en Cantoral, Farfán, Lezama y Martinez-Sierra, 2006), se presenta como pertinente para los objetivos del bachillerato y de la RIEMS. Regresando al ejemplo anterior, no obstante las diferencias que se poseen, el uso de las gráficas para inferir y predecir comportamientos y resultados es una acción común. Siendo la **predicción** una práctica social (Cantoral et al. 2006).

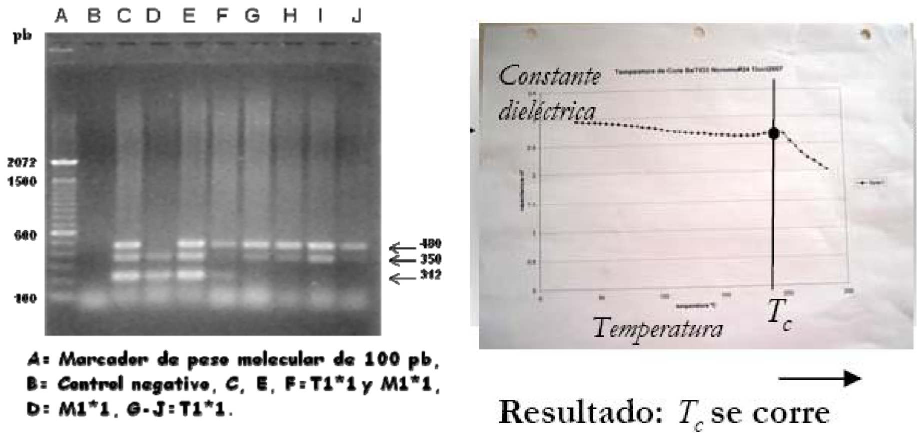


Figura 1: Ejemplos de diferentes tipos de gráficas empleadas en Toxicología (imagen de la izquierda) y en Ingeniería Biomédica (imagen de la derecha)

Este último resultado nos muestra la pertinencia de que el profesor de matemáticas sea capaz de utilizar la idea de práctica social en el desarrollo de situaciones de aprendizaje. Es decir, de promover en su desarrollo profesional la incorporación de las ideas, nociones y resultados provenientes de la Teoría Socioepistemológica. Este planteamiento nos lleva a retomar el segundo cuestionamiento planteado antes. Si bien, hemos identificado algunos elementos metodológicos que pueden contribuir a alcanzar los objetivos formativos que se establecen en la RIEMS, la pregunta que surge es la siguiente ¿cómo lograr que los profesores se apropien de esos elementos y los integren a su práctica docente?

Las investigaciones respecto a los programas de formación de profesores, muestran que estos en la mayoría de los casos sólo inciden en un nivel "discursivo", adoptándose las nuevas terminologías que se estudian o proponen pero no hay un cambio en la "acción" (Castillo, Jiménez, Hugues y Dórame, 2005). Para lograr el paso anterior, es necesario lograr cambios en las creencias de los profesores respecto a la matemática, su enseñanza y su aprendizaje (Blanco y Barrentes, 2003; Azcárate, 1998, citado en Parra, 2004). Creencias que han desarrollado a partir de su experiencia como estudiante y se complementan o modifican a partir de su formación y experiencia profesional, y las cuales constituyen verdaderos obstáculos para lograr un cambio en la forma en que ejercen su profesión (Campanario, 2003).

La necesidad anterior se vuelve de gran pertinencia como lo demuestran los ejemplos de situaciones de aprendizaje propuestas por los documentos oficiales de la Reforma. Por ejemplo, en un diseño de situación elaborada por los profesores para el tema de derivadas (Cuadro 1, ver Cosdac, 2008), se presenta una propuesta de trabajo que plantea la búsqueda de reportados por el INEGI, relacionados con el porcentaje de defunción de hombre y mujeres a causa de la diabetes mellitus (tema integrador). Sin embargo, el tratamiento de esos datos para abordar el estudio del tema de derivada, conserva en esencia el mismo discurso y las mismas acciones "tradicionalmente empleadas": el uso de "la regla de los cuatro pasos" y abordar la derivada a partir del concepto de razón de cambio. Aún cuando el concepto de razón de cambio, y más aún el de razón, no es comprendido por la mayoría de los estudiantes.

Se les solicita (a los estudiantes) revisar los porcentajes de defunciones de gente de 30 a 64 años de edad, por sexo y principales causas (1990-2004, información estadística del INEGI. Ver la carpeta electrónica sobre la bibliografía); llenar la siguiente tabla.

Porcentajes de defunciones por diabetes mellitus, en sujetos de 30 a 64 años, por sexo.		
Año	**D. Hombres**	**D. Mujeres**
1990		
1991		
…		
2004		

1. Analiza la diferencias entre 1993 y 2004.

…..

c. Determina la razón de cambio promedio (derivada) de porcentajes de defunciones por diabetes, con respecto a la diferencia de tiempo; es decir:

$$\frac{\Delta Pdd}{\Delta t} \quad \text{entonces} \quad \frac{\Delta Pdd}{\Delta t} = \frac{D_2 - D_1}{t_2 - t_1}$$

…

3. Determina la razón de cambio promedio aproximada, con respecto al año 2000. Para ello, resta los dos resultados de un año antes y uno después, del inciso anterior, y divídelos entre 2, o sustituye de esta manera:

Cuadro 1. Fragmento de una secuencia de actividades propuesta en el bachillerato tecnológico para la generación de competencias (COSDAC, 2008)

Lo anterior nos lleva a cuestionarnos sobre los mecanismos de formación de profesores que propone la RIEMS, y los contenidos que aborda en ellos. Así, para el desarrollo del trabajo proponemos la realización de una investigación de tipo experimental-explicativa, en la cual, nuestro objetivo es identificar elementos para la conformación de mecanismos encaminados al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, que incidan de manera benéfica sobre las prácticas que desarrollan en el aula.

Para ello formulamos la siguiente hipótesis de partida del trabajo: un medio para incidir de manera benéfica sobre las prácticas de los profesores, es lograr que ellos vean favorecido su propio aprendizaje a través de los mecanismos que se espera incorporen a sus prácticas.

Marco teórico y metodología

Las nuevas exigencias y transformaciones de la sociedad requieren de un profesional de la educación capaz de transformar y adaptar constante su trabajo a tales requerimientos. Así, se requiere que el profesor sea capaz de analizar, comprender y reflexionar sobre su propia actuación profesional, sus conocimientos y sus creencias, siendo esto el punto para generar tales transformaciones. Esta nueva visión propugna por un Desarrollo Profesional del Docente (Climent y Carrillo, 2003). Bajo esta nueva visión, el trabajo colaborativo entre investigadores y profesores se presenta como una opción importante para el desarrollo profesional de éstos últimos (Climent y Carrillo, 2003; Martinho y Ponte, 2009). Con esto se busca superar la idea de la formación del profesor como un dominio técnico de las disciplinas y nuevos modelos relacionales.

Sin embargo, como ya hemos ejemplificado antes, también es necesario que el profesor aprenda a problematizar la adquisición de los saberes matemáticos. Pues consideramos que es a partir de ello, que los profesores pueden generar verdaderos cambios en la forma de crear y proponer situaciones de aprendizaje. Es por ello que tomamos a la Teoría Socioepistemológica como aquella fuente de resultados de investigación que nos permitan favorecer la comprensión de las problemáticas del aprendizaje de los saberes matemáticos.

La Teoría Socioepistemológica establece que el conocimiento matemático tiene un origen asociado con un conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2004). De este modo, son las prácticas las que favorecieron, y favorecen, la construcción de tales conocimientos. Esas prácticas específicas que son desarrolladas al seno de las sociedades y poseen influencia en el desarrollo de los conocimientos han sido denominadas como prácticas sociales. La Socioepistemología tiene como objeto de estudio a los fenómenos relacionados con la construcción, la adquisición y la difusión del saber matemático. Le interesa explicar y modelar el papel que las prácticas sociales tienen en esos procesos. Estos estudios los realiza desde una perspectiva múltiple y sistémica.

> "…articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, 2004; p.1)

Esto nos muestra un cambio de énfasis, el cual caracteriza a esta teoría de otras corrientes que teorizan sobre la construcción del conocimiento matemático: "pasar de los objetos a las prácticas".

Para el desarrollo del trabajo, proponemos la conformación de un espacio de reflexión de profesores e investigadores, en los cuales en un ambiente de colaboración y aprendizaje de ambas partes, se discuta y problematice la construcción de los conocimientos matemáticos. Esta primera parte irá acompañada de enfrentar diseños de situaciones de aprendizaje provenientes de trabajos de investigación. Posteriormente en una segunda fase, se propone que los participantes desarrollen diseños de situaciones de aprendizaje considerando las características de los grupos a los que atienden. Finalmente, proponemos una tercera fase de aplicación y reformulación de las situaciones de aprendizaje diseñadas.

Esta breve descripción nos muestra la pertinencia de la Ingeniería Didáctica para el desarrollo de las fases antes descritas.

Reflexiones

Bajo las perspectivas que sustentan la idea de promover un Desarrollo Profesional de los Docente, los procesos formativos para el mejoramiento de la actuación del profesorado parten de que es indispensable conocer el nivel de reflexión y los procesos de pensamiento de los mismos. Sin embargo, el objetivo final de esos procesos no es cambiar la forma en que actúan los profesores, sino provocar eventualmente dicho cambio a través de una mejor comprensión del fenómeno educativo. Si bien dicha comprensión constituye una pieza clave para dicho cambio, por sí misma ella podría no ser suficiente. Pues en la mayoría de los casos, la matemática no es vista por sí misma como fuente de obstáculos para el aprendizaje de los estudiantes, reflexionando únicamente sobre la forma de abordar el estudio de la misma, y por otra parte, como Blanco y Barrentes (2003) mencionan, son las imágenes y creencias de los profesores respecto de la forma como ellos han aprendido y su experiencia como estudiantes, los elementos que influyen con mayor fuerza, y los que caracterizan, su trabajo profesional.

Por nuestra parte, proponemos un enfoque de partida distinto, y complementario, que enriquezca los procesos de reflexión anteriores. Proponemos que la experimentación y vivencia de nuevas posturas y visiones sobre el aprendizaje y la construcción de los conocimientos, constituya un punto de partida importante de la formación de los profesores. En nuestro caso, favorecer la construcción de los conocimientos matemáticos partiendo de una epistemología de prácticas y no de la tradicional epistemología de objetos. Consideramos que son los mecanismos inmersos en estos procesos de aprendizaje, los que motivan a los profesores a realizar adaptaciones y transformaciones a sus prácticas, por encima de únicamente reflexionar sobre los posibles "errores", "aciertos" o "mejoras" que puede tener durante el ejercicio de su profesión.

Referencias bibliográficas

Andrade, A. (2008). El enfoque en competencias en educación. *Gaceta Ide@s CONCITEG 39*, 53-64. Recuperado el 20 de septiembre de 2008, de http://octi.guanajuato.gob.mx/gaceta/

Blanco, J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6 (2),* 107-132.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Campanario, M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Revista Enseñanza de las Ciencias 21 (2)*, 319 - 328.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, 83-102.

Castillo, A., Jiménez, J., Hugues, E. y Dórame, L. (2005). Un proceso de actualización integral de profesores de matemáticas en el uso didáctico de los sistemas de cómputo simbólico: Resultados preliminares y reflexiones. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de matemática educativa 18*, 711 – 715. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias 21 (3),* 387-404.

Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico (COSDAC) de la SEP (2008). *Programa de Estudios. Matemáticas. Segunda Versión*. Recuperado el día 29 de junio del 2008 del sitio Web de la Dirección General de Bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/

Díaz-Barriga, A. (2006). El enfoque en competencias en educación ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles Educativos 28 (111),* pp. 7-36. Recuperado el día 24 de octubre de 2008, de Redalyc, http://redalyc.uaemex.mx/

Martinho, M. y Ponte, J. (2009) Communications in the classroom: practice and reflection of a mathematics teacher. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, *Número especial.* En prensa. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Parra, H. (2004). El contenido matemático escolar en situaciones de aprendizaje en la formación inicial de profesores. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa, 17*, 280 – 283. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Secretaria de Educación Pública (SEP) (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior: La creación de un sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (Documento de trabajo)*. Recuperado el día 29 de junio del 2008 del sitio Web de la Dirección General de Bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/

LA EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA MAYA

Domingo Yojcom Rocché, Ricardo Cantoral Uriza
CINVESTAV-IPN (México)
dyojcom@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Esta investigación parte de la necesidad de comprender los procesos utilizados en la construcción del conocimiento matemático maya, con el fin de evidenciar la estructura del pensamiento maya basada en prácticas sociales. Es una investigación de carácter reflexivo y de tipo etnográfico-participativo, que utiliza la socioepistemología como marco teórico para su abordaje. Partimos de la hipótesis que el pensamiento matemático maya es un sistema referencial, holístico, cíclico y espiritual, y nuestro interés nos ha llevado a desarrollar esta investigación para aportar a la Matemática Educativa y al fortalecimiento de los procesos educativos contextualizados para las comunidades mayas. Este trabajo de investigación aún no está finalizado, por esa razón incluimos solamente algunos avances y los resultados esperados.

Palabras clave: matemática maya, socioepistemología, construcción social del conocimiento

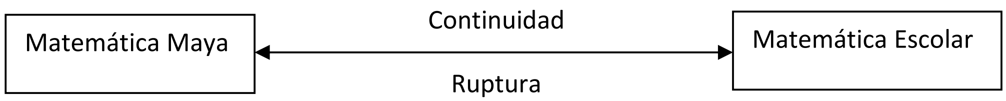
Abstract. - This research stems from the need to understand the processes used in the construction of Mayan mathematical knowledge to reveal the structure of Mayan thought based on social practices. Oriented research is reflexive and ethnographic-participatory socioepistemology using the theoretical framework for their treatment. We hypothesize that the Mayan mathematical thinking is a referential system, holistic, cyclical and spiritual, and our interest has led us to develop this research to contribute to mathematics education and the strengthening of educational processes in context for Mayan communities. This research is not yet finalized, for that reason we include only some progress and expected results

Key words: mayan mathematics, socioepistemology, social construction of knowledge

El problema y los objetivos

El problema que pretendemos abordar en este trabajo se suscita en la necesidad de explicar y comprender el fenómeno que sucede al incorporar los conocimientos matemáticos de la cultura maya al sistema escolar, fundamentalmente en la enseñanza de la matemática maya. Asumiremos como problemática aquella concerniente a la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor (Cantoral y Farfán, 2003).

En esta confrontación observamos rupturas y continuidades. La ruptura es una acción fundamental para el desarrollo del conocimiento, y junto con la continuidad conforman la condición esencial para la transformación, alimentándose de manera progresiva en una relación simbiótica para la construcción del conocimiento.



Ahora bien, ¿qué procesos y mecanismos utilizados en el contexto cotidiano deberíamos fortalecer para la enseñanza de la matemática y la construcción del conocimiento? y ¿qué procesos y mecanismos deberíamos romper para llevar a cabo este cometido? Según estudios proporcionados por la Iniciativa E el modelo de educación proporcionado por el Ministerio de Educación en Guatemala se basa en un enfoque distinto al de la cosmovisión maya (Iniciativa E, 2008), por lo tanto, se sugiere tomar en cuenta los valores de la cultura maya, su estructura de pensamiento, su cosmovisión, su sistema organizativo, su espiritualidad, entre otros. Y por el otro lado, una dinámica basada en rupturas, dado que el sistema escolarizado posee procesos que requieren de explicaciones y confrontaciones, en donde impera la diversidad cultural y las múltiples formas de interpretar y comprender el cosmos, favoreciendo de esa manera los diálogos interculturales.

Según Cordero (2001), la problemática fundamental de la enseñanza de la Matemática estriba en la confrontación de la "obra matemática" con la matemática escolar, puesto que son de naturaleza y función diferente; y se presume que la matemática escolar desempeña ese rol para resignificar el discurso matemático. Este modelo de Cordero nos parece muy interesante, y compartimos esta inquietud; sin embargo, nuestra intención no es analizar ni tratar la confrontación entre la matemática escolar y "la obra matemática" que gobiernan hoy día, sino nuestra intención es determinar la relación simbiótica entre ruptura-continuidad para explicar los procesos utilizados en la construcción del conocimiento matemático de la comunidad maya- tz'utujil

La intención sobre la comprensión de este tema nos llevó a plantear tres objetivos específicos, a seguir: a) Explicar los fundamentos de la construcción social del conocimiento matemático maya. b) Determinar los procesos matemáticos utilizados en la comunidad maya-tz'utujil para el cultivo de maíz y la elaboración de sus tejidos. c) Establecer la relación entre las prácticas sociales y la construcción de conocimientos matemático.

Partimos de la hipótesis que el pensamiento matemático maya es un sistema de referencias, de carácter holístico, cíclico y espiritual que fundamenta una epistemología basada en prácticas.

Metodología y marco teórico

Este trabajo toma elementos de la investigación etnográfica y de la investigación participativa, por lo que hemos convenido llamarle etnográfico- participativo. Porque la etnografía es una metodología y una herramienta útil para estudiar y comprender una cultura, de tal manera que podamos caracterizar la manera de vida de una comunidad, es decir, conocer sus ideas, creencias, valores y presupuestos, sus comportamientos y las cosas que hacen de forma consciente e inconsciente.

Sin duda, la investigación etnográfica conlleva diversas implicaciones, como el dominio del idioma de la población meta y el tiempo prolongado que se requiere para involucrarse con la comunidad, y de esa cuenta ofrecer una interpretación descriptiva. Sin embargo, nuestra metodología no podría ser solamente "etnográfica clásica" o conocida también como "etnografía holística", puesto que no sólo pretendemos "describir" el pensamiento matemático de la cultura Maya-Tz'utujil, sino, conocer y comprender el desarrollo de ese pensamiento que de forma implícita o explícita está evidenciado en los conocimientos y saberes de la comunidad, que puede ofrecernos pautas para hablar de una epistemología de la matemática maya basada en prácticas. Por esta razón, se hace imprescindible apoyarnos en la investigación participativa, que tiene como característica principal establecer un diálogo sistemático entre las personas de la comunidad y el investigador, a fin de profundizar ciertos elementos o aspectos ligados a la comprensión de su cultura.

El mecanismo que utilizamos para elegir a la comunidad Tz'utujil en la realización de esta investigación, estuvo determinada por cuatro razones fundamentales: a) Domino del idioma tz'utujil, que nos da posibilidades de comunicarnos fácilmente con las personas. b) Formamos parte de esta comunidad, que nos permite comprender de mejor manera los contextos en que las prácticas actuales son desarrolladas en esta comunidad. c) El valor histórico-cultural que tiene este grupo junto con los K'iche', Kaqchikel y Mam. d) La conservación de las prácticas de este grupo, pese a la coexistencia de otras culturas en la región.

Hemos convenido utilizar cuatro instrumentos para realizar la colecta de datos. La observación participativa, que implica el involucramiento en las actividades de las personas, apoyándolos o ayudándolos en su quehacer diario. Las Conversaciones-Entrevistas, que son diálogos sostenidos con las personas, esencialmente para que compartan sus puntos de vista, aunque siempre esperan que su interlocutor emita un comentario o bien plantee otro cuestionamiento para enriquecer la plática e ir profundizando un poco más sobre los conocimientos y saberes. Filmación de Escenas, el uso de la tecnología se hace imprescindible para evidenciar el trabajo de campo. Análisis Documental, o sea la búsqueda y análisis de los materiales existentes en torno a nuestra problemática de estudio, esta búsqueda de información se hace a través de los distintos medios como la Internet, libros, revistas, tesis, documentales, etc.; así como con el acercamiento con entidades gubernamentales y no gubernamentales conocedoras del tema.

Propusimos para este trabajo revisar el uso de los conocimientos matemáticos en las prácticas cotidianas para la siembra del maíz y la elaboración de tejidos, y abordaremos esta problemática en cuatro momentos, de forma paralela y complementaria: a) Lo que dicen que hacen, b) Lo que observamos que hacen, c) Lo que narran o escriben que hacen, d) Lo que han dicho otros que hacen.

Esta investigación se desarrolla bajo la teoría Socioepistemológica. Y nuestro propósito es plantear a la luz de los resultados de muchas investigaciones, lo poco que sabemos y conocemos del desarrollo del pensamiento matemático maya. Hemos incorporado en nuestro corpus textual algunos trabajos realizados desde una reflexión filosófica, antropológica, histórica-social hasta una visión educativa, nuestra intención es ofrecer una gama de datos que enriquezcan nuestras reflexiones finales entorno a la epistemología de la Matemática Maya.

Dada la naturaleza de esta investigación, nos propusimos a revisar escritos que han sido elaborados desde diversos enfoques o teorías, pero, especialmente hemos priorizado nuestras reflexiones en torno a los aportes de la Etnomatemática y la Socioepistemología, para el tratamiento de esta problemática. Sin embargo, consideramos que la Socioepistemología como enfoque teórico, ofrece grandes posibilidades al estudio de la construcción social del conocimiento matemático maya y es entendida como la aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados a los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

Algunos avances y resultados esperados

Nuestra investigación se denomina Epistemología de la Matemática Maya, entendiendo la epistemología no como disciplina, sino que como un componente y dimensión de la socioepistemología que en este caso está vinculado con la cultura maya. Por lo tanto conviene aclarar el título de nuestra investigación para evitar ambigüedades.

Si buscamos el significado del término epistemología hallaremos diversas aproximaciones que intentan describir y explicar dicho concepto, obedeciendo a ciertas categorías o propiedades para comprender dicha abstracción. Sin embargo, nos pareció interesante traer a la luz de este trabajo una definición propuesta por Mugrabi, a fin de iniciar esta reflexión epistémica, al respecto dice que la epistemología es

> Disciplina que toma la ciencia o las ciencias por objeto y que se esfuerza por agrupar: 1) la crítica del conocimiento científico (examen de los principios, de la hipótesis y de las conclusiones de diferentes ciencias en vista a determinar su valor

> y su importancia objetiva); 2) la filosofía de las ciencias (empirismo, racionalismo, etc.); 3) la historia de las ciencias, esta disciplina compleja está constituida por diferentes corrientes relativas también a problemas muy diversos (unidad de las ciencias, elaboración de una ciencia del lenguaje científico, unidad de formas de conocimiento en su relación con la ciencia, crisis de las ciencias, etc.) (Mugrabi, 2002, p.128).

Como hemos notado dicha autora, ha proporcionado una caracterización "clásica" de la epistemología como una disciplina que posee por objeto a las ciencias mismas, incluyendo la matemática, con el fin de efectuar una crítica al conocimiento científico, tomando en cuenta la filosofía y la historia de las ciencias, características que no cuestionamos en esta investigación, puesto que no formulamos el pensamiento maya bajo esta concepción. Otra aproximación que encontramos sobre epistemología, lo hallamos en Aviña que establece que hay dos estructuras ideológicas específicas de los pueblos mayas que sin duda cumplen con los requisitos de poder dar cuenta de una epistemología similar a la de Platón, y esto tanto en su concreción interna como en su relación diacrónica e interactiva con la generalidad de la especie humana. Estas estructuras culturales son el nahualismo y el tonalismo (Aviña, 2001).

Esta última aproximación, nos parece muy interesante puesto que pretende hacer una analogía entre la epistemología griega/occidental con la epistemología maya, sin embargo, cuando nosotros hablamos de epistemología no hablamos de esta "disciplina clásica", sino más bien, estudiamos esta concepción de epistemología como una dimensión y componente dentro de la teoría socioepistemológica.

En las diversas investigaciones realizadas en el marco de la Socioepistemología se ha asumido que es una teoría epistémica que está conformada por cuatros componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

Es evidente que la epistemología no se ha considerado como una disciplina dentro de este enfoque. Sino más bien, al considerar como componente, es para hacer ver que, también se puede comprender y estudiar una problemática específica tomando una parte del todo para comprender ese todo; o sea, que enfatizando nuestra atención en un componente de la socioepistemología podemos explicar y entender la socioepistemología en su conjunto, dado que tiene ese carácter sistémico. Ahora, ¿no estaríamos provocando una segmentación o separación en las cualidades de la socioepistemología?, consideramos que no, puesto que al abordar un componente de la socioepistemología obedece necesariamente a una intencionalidad en la investigación, y que de ninguna manera nos olvidamos de los otros tres componentes, y que sin dudas están inmersos en el proceso de análisis y reflexión de toda investigación. Un ejemplo sería la tesis presentada por Espinoza (2009), en donde él enfatiza el abordaje de la epistemología en su investigación.

Ahora, encontramos también en la literatura de la socioepistemología el término dimensión, al respecto Espinoza dice que el contexto en el cual se significa la obra tiene una dimensión situacional que define el tamaño, además posee una dimensión sociocultural que mira con cierta profundidad a la dimensión situacional, y por último una dimensión de la racionalidad relativa al contexto en cuestión (Espinoza, 2009). Entonces, es en esta noción de contexto en la que podemos situar la significación del conocimiento.

Pero ¿qué significa decir dimensión?, podríamos reflexionar desde la física, pero nuestra intención ahora es comprender desde la socioepistemología. Si revisamos el diccionario, encontramos que es el "aspecto o faceta de algo" (Real Academia Española, 2001) tomado en sus diferentes estados de existencia, por las cuales se puede analizar o estudiar un fenómeno. Cuando hablamos de la epistemología como dimensión nos referimos a los puntos de referencia en que podemos analizar un problema, o bien, esas distintas etapas en que puede ser abordado para comprender sincrónica y diacrónicamente.

Entonces, por epistemología entendemos al conjunto de conocimientos y saberes vinculados con las prácticas de los grupos humanos, que demanda una apropiación funcionalidad y significativa de los conocimientos, en situaciones específicas. Así mismo, esta epistemología se establece a través de prácticas que generan procesos de institucionalización, proporcionando la validez de esos conocimientos y los mecanismos necesarios para la enseñanza y el aprendizaje de una determinada ciencia, ideología o cultura.

Si la Matemática Maya es el desarrollo del conocimiento basado en prácticas sociales cuya intención es explicar e interpretar los fenómenos naturales y sociales, vinculado a la bóveda celeste, la Tierra, cerros, valles y montañas, y el mundo del más allá o sea el Xib'alb'a. La Epistemología de la Matemática Maya sería el conjunto de conocimientos y saberes desarrollados a través de las prácticas utilizadas para explicar e interpretar los fenómenos sociales y naturales que afronta diariamente la comunidad maya.

La reflexión que hemos formado para analizar una epistemología del conocimiento maya, quizá no ofrezca mucho fundamento teórico, sin embargo, consideramos esencial entender los procesos de construcción de conocimiento, así como las formas y categorías que utilizan las culturas en la formulación de su epistemología, como dice Aviña (2001), la importancia del ámbito gnoseológico es tan grande, que si conocemos acerca de las formas en que las distintas etnias organizan su mente, clasifican y categorizan su entorno, no sólo aprendemos más acerca del ser humano y sus posibilidades de ser, sino que también podremos establecer un diálogo intercultural digno, capaz de reflejar el respeto al derecho ajeno.

La escasa investigación en epistemología maya, se debe quizá a los siguientes factores: 1) las producciones de los "pensadores" o "cientistas mayas" hayan sido de tipo descriptivo, dejando a un lado la reflexión, que es lo que nos garantiza una comprensión más holística de esta terminología y 2) porque sea el producto de nuestra ignorancia la que nos conduce a emitir estas apreciaciones.

Con esta investigación pretendemos comprender los fundamentos de la construcción social del pensamiento maya, y los procesos matemáticos utilizados en el cultivo de maíz y la elaboración de tejidos. Además, pretendemos aprovechar los aportes teóricos de la Socioepistemología para enriquecer los procesos de construcción curricular en el nivel medio-superior. Aportar a la comprensión de forma clara y contextualizada de los procesos matemáticos que intervienen en la construcción del conocimiento, a fin de evidenciar la diversidad cultural y científica en el mundo actual.

Referencias bibliográficas

Aviña, G. (2001). Hacia una Epistemología Maya. Anales de Antropología 2000, 34, 201 – 236.

Bellon, M. (2002). Métodos de investigación participativa para evaluar tecnologías: Manual para científicos que trabajan con agricultores. México, D.F.: CIMMYT.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 6 (1), 27-40.

Cordero, F. (2001). La Distinción entre construcciones del cálculo. Una Epistemología a Través de la Actividad Humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4 (2), 103-128.

D'Ambrosio, U. (2002). Etnomatemática. Elo Entre As Tradições E A Modernidade. (2da. Ed). Belo Horizonte: Autentica.

Espinoza, L. (2009). Una Evolución de la Analiticidad de las Funciones en el Siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico. (Tesis de maestría no publicada) Centro de Investigación y de Estudios Avanzadas del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa, México.

Iniciativa E (2008). Caminando hacia un pensamiento político desde la Cosmovisión Maya. Guatemala: Proyecto Iniciativa E.

Mugrabi, E. (2002). La Pedagogía del Texto y la Enseñanza-aprendizaje de Lenguas. Colombia: Impresos Ltda. Medellín.

Prado, A. (1999). El Creador Maya. Primera Edición. Guatemala: Galería Guatemala.

Real Academia Española (2001). Diccionario de la Lengua Española. (22da. Ed.), Madrid, España: Real Academia Española.

Yojcom, D. (2006). Análisis del Uso Actual del Sistema de Numeración Vigesimal en Cinco Comunidades Q'eqchi' de Guatemala. (Tesis de maestría no publicada) Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Departamento de Currículo, Sao Paulo, Brasil.

PRÁCTICAS ASOCIADAS A LA SITUACIÓN DEL SALÓN DE CLASES DE MATEMÁTICAS

Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen. Este artículo discute la noción de práctica a partir de la actividad relacional que se establece en el salón de clases al momento que se construye conocimiento matemático. En su explicación, procuramos asociar a los tres componentes del sistema didáctico, sin soslayar a los contextos social, institucional, histórico y cultural. La noción de práctica se analiza desde la teoría socioepistemología y se concibe como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado. Situados en el contexto escolar, la práctica es inherente a las acciones específicas que desarrollan los actores del sistema didáctico, cada uno en el desempeño de su propio rol, por lo que se atribuye a actividades o acciones objetivas que se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. En el análisis de las prácticas distinguimos tres niveles: macro, meso y micro. A través de ellos se configuró un modelo estratégico, a fin de derivar explicaciones de la actividad relacional del aula.

Palabras clave: práctica del salón de clases, actividad relacional, construcción de conocimiento matemático

Abstract. This paper discusses the notion of practice based on the relational activity that is established in the classroom practice at the moment the mathematical knowledge is constructed. It is explanation, we tray to relate the three components of the didactical system, without ignoring the social contexts, institutional, historical and cultural. This notion is analyzed from the Socioepistemology theory and is conceived as an organized group of activities or objective and intentional actions to solve a given problem. Placed in the school context, the practice is inherent to the specific actions that there develop the actors of the didactic system, each one in the performance of his own role, so it is attributed to activities or actions which are evident in objective observable for behaviors humans. In the analysis of practices we distinguish three levels: macro, meso and micro. Through them it was set a strategical model, to derive explanations of the relational activity in the classroom.

Key words: Classroom practice, relational activity, construction of the mathematical knowledge.

Introducción

En el currículo escolar se materializan los propósitos generales de un sistema educativo, de aquello que los estudiantes deben aprender, el enfoque de enseñanza, el tiempo a dedicar por tema o lección, la organización y articulación de los contenidos, las formas de evaluación y los libros de texto a utilizar, entre otros. Es el profesor, como representante institucional quien lo interpreta, lo pone en funcionamiento y encara dificultades, como parte del rol que desempeña en una institución, la escuela. De ahí que las prácticas del salón de clases se conciban como el medio institucionalizado más evidente por el cual las políticas del sistema educativo de una nación se hacen efectivas (Clarke, Emanuelsson, Jablonka y Mok, 2006). El aula, que puede ser presencial o virtual, se concibe como un espacio social complejo, en el que convive una comunidad con fines de enseñanza. Está marcado por una relación funcional que involucra acciones convenidas en el que se ven involucrados un profesor y sus estudiantes por medio de sus interacciones. Por ello, cuando se analiza la literatura sobre la problemática asociada a los procesos de aprendizaje de las matemáticas, se encuentran argumentos por parte de los investigadores de nuestra disciplina, la Matemática Educativa, para explorar la complejidad del aula mediante el análisis de las prácticas que ahí tienen lugar en el momento en que el conocimiento matemático es construido. Una postura es la de Laborde y Perrin-Glorian (2005), quienes sostienen:

> Ahora que los procesos de aprendizaje de nociones específicas de las matemáticas son bien conocidos, las investigaciones en matemática educativa deben mirar la complejidad del salón de clases de matemáticas (p. 1).

Compartimos este punto de vista ya que, si bien una buena parte de los estudios se han centrado fundamentalmente en describir y explicar dificultades o interpretar estrategias a partir de las producciones de los estudiantes o en explorar las bondades o limitaciones de un determinado diseño innovador, también son de interés tanto para profesores de matemáticas como para los investigadores de nuestra disciplina, explicaciones que provengan de aquellos que pongan de relieve la complejidad que tienen lugar en el salón de clases ya sea al introducir conceptos matemáticos, al poner en práctica las recomendaciones de un nuevo currículo, o bien; al poner a prueba determinadas hipótesis.

Si bien esta postura es contemporánea, es posible encontrar estudios de mediados y finales de los noventas, interesados en esta problemática, que han sido abordadas desde diferentes enfoques, puntos de vista y marcos teóricos (e.g. Cobb y Bauersfeld, 1995; Cole, 1996; Abele, 1998; Cobb y Yackel, 1998; Voigt, 1998 y Waschescio, 1998). Lo que ha evolucionado, en nuestra opinión, son las formas de cómo evidenciarlas y de cómo entenderlas, a fin entender mejor lo que sucede durante un proceso de enseñanza y de este modo comprender los resultados derivados de ello. Asimismo, para disponer de elementos que permitan intervenir de manera positiva, en el sistema didáctico.

La noción de práctica

La noción de práctica se articula a la actividad humana, aunque como se ha señalado por Villoro (2008), no toda actividad humana es una práctica; se comprende más bien a la dirigida por fines (por quereres) conscientes. Se refiere a toda actividad intencional y no a actos instintivos o inconscientes, postura que comparte la Socioepistemología, teoría desde el cual derivamos explicaciones acerca de esta noción.

La práctica es intrínseca a la construcción de conocimiento, en contextos institucionales, históricos, culturales y sociales diversos. Por tanto está ligado a la cultura y a la semiótica. Se entiende como acción objetiva e intencional, y está mediada por el uso de signos y herramientas.

Las investigaciones en nuestra disciplina dejan ver que el significado de esta noción se asocia además, con:

- La preparación y desarrollo profesional del profesor, y;
- La actividad que se desarrolla en el salón de clases o fuera de éstos, mediada por un saber (acciones, más que pensamiento o ideas).

Desde el punto de vista de la Socioepistemología, la práctica se concibe como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado. Estas prácticas son normadas a su vez, por prácticas sociales. En el contexto del sistema didáctico, práctica es inherente tanto a las acciones específicas llevadas a cabo por sus actores in actu, como a las que tienen lugar en la socialización del saber. Esto trae consigo una relación funcional entre grupos humanos y el conocimiento mismo. En consecuencia, se atribuye a actividades o acciones objetivas, y se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. Excluye por tanto, los actos mentales, internos y los estados disposicionales del sujeto. Estos comportamientos, dicho sea de paso, representan roles de los individuos, y éstos a su vez, a las instituciones.

Un esquema operativo de la práctica (Tuyub, 2008) se presenta mediante la siguiente figura:

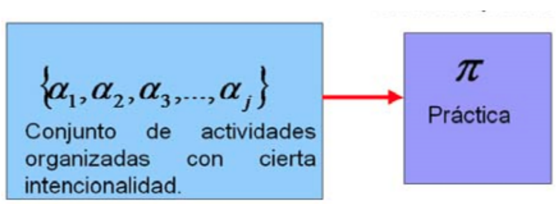


Figura 1. Esquema operativo de la práctica, donde un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad la caracterizan (Figura 2.3.1. en Tuyub, 2008, p.23).

En el marco de una situación de aprendizaje, estas actividades se enlazan a las del profesor y los estudiantes, cuyo fin es que se produzca aprendizaje. Y aunque entendemos que la actividad del salón de clases está regulada por las acciones del profesor, también es claro que la Socioepistemología se interesa por derivar explicaciones a partir de la actividad que desarrollan los grupos humanos, más que en torno a un individuo. En consecuencia, el estudiante y sus acciones son insoslayables. Por ello es que nos referimos a la vez, a las prácticas tanto del profesor como de los estudiantes, cada uno en el desempeño de su propio rol. Las prácticas del estudiante por ejemplo, se asocian tanto a la actividad del aula como las que realiza al integrarse a su cultura, misma que le provee de significados que confronta. Las del profesor, a la gestión que hace en la construcción de conocimiento matemático con los estudiantes, a su desarrollo profesional, e igualmente de su interacción con el contexto social y cultural.

Modelo estratégico para explorar las prácticas articuladas a la situación del salón de clases

El estudio de la construcción social del conocimiento matemático desde la perspectiva de los participantes, se apoya del análisis de los procesos a los que está sujeto y de cómo éstos se legitiman. Estos procesos se ubican a nivel de concepción de situaciones de enseñanza, de organización de la actividad en el aula, asimismo, de la gestión y evaluación del aprendizaje. En esta gestión predomina la actividad colectiva con fines de aprendizaje, como dijo renglones arriba, y se caracteriza por las acciones llevadas a cabo por el profesor y los estudiantes, articuladas a un saber. Se visualizan a través de una relación funcional, mediada por diversas formas de comunicación e interacción donde el lenguaje desempeña un papel central.

El estudio de las prácticas asociadas a la situación del salón de clases lo hemos sustentado en un modelo estratégico (Cabañas, 2011), en el que distinguimos tres niveles: macro, meso y micro, sin soslayar a los contextos social, institucional, histórico y cultural. Cada uno sujeto a la actividad del profesor y de los estudiantes en torno al saber matemático en diferentes períodos de su actuación. Para referimos a dichas prácticas, procuramos asociar a su explicación a los tres componentes del sistema didáctico, sin soslayar a los contextos social, institucional, histórico y cultural. Se instituye entre tales prácticas una relación jerárquica, en las cuales existen actividades organizadas e intencionales centradas en el aprendizaje. Éstas involucran acciones convenidas desde el currículo y se ponen en funcionamiento en el salón de clases.

En términos generales, la articulación de las prácticas objeto de estudio, a estos niveles se presenta como sigue:

I. Nivel macro.	Se localizan las prácticas a nivel proyecto de una lección.
II. Nivel meso.	Se exploran las prácticas a nivel de la configuración de una situación de aprendizaje, de las formas de organización de la actividad matemática en el aula, así como de la comunicación e interacción en el aula.

III.Nivel micro.	Se ubican a nivel de la actividad relacional que establecen un profesor y sus estudiantes en el salón de clases, al momento que se construye conocimiento matemático.

Los elementos considerados para cada nivel son:

I. Nivel macro:

a) Contexto: Delimitación del ámbito de estudio (unidad de análisis), exploración de libros de texto de matemáticas, el escenario escolar y dimensión temporal para explicar el tema que se investiga.

b) Situación de enseñanza: Ubicación del tema en los currícula institucionales, tiempo escolar (planes anuales o semestrales).

c) Profesor: Su interés por incorporarse al proyecto, las características profesionales, su experiencia en la enseñanza y la investigación.

d) Estudiantes: Experiencia escolar de los estudiantes.

II. Nivel meso:

a) Contexto: Dimensión temporal de las sesiones por día y por semana, organización espacial de la actividad en el salón de clases, modalidades de comunicación, tiempos de las secuencias del diseño (etapas).

e) Situación de enseñanza: Consideraciones preliminares del objeto de saber, enfoque, estructura del diseño, contenido matemático, variables de control.

f) Profesor: Planificación de las formas de intervención del profesor en las diversas etapas de la experimentación.

g) Estudiantes: Determinación de las modalidades de las interacciones de los estudiantes con el saber así como de las formas de interacción con sus pares académicos y profesor.

III. Nivel micro:

a) Contexto: Trabajo en equipo, individual y en grupo, intervenciones del profesor y análisis de los procesos de aprendizaje.

b) Situación de enseñanza: Observación de los diferentes momentos de la situación de aprendizaje en el aula, estabilidad de las actividades que constituyen la situación de aprendizaje.

c) El profesor: Cómo implementa las secuencias, la trayectoria que sigue su discurso, de las preguntas o ayudas que ofrece en las diferentes etapas de su actividad, de la orientación de su discurso (hacia los procedimientos o significados o los tratamientos que ponen en juego los estudiantes), medios didácticos de que se apoya, decisiones que toma durante las lecciones, forma en que interpreta las respuestas de los estudiantes, cómo negocia significados, conflictos que encara y cómo los enfrenta, expectativas del profesor, etc.

d) El estudiante: Argumentos y tratamientos que ponen en juego, cómo negocia significados, conflictos que encara, orientación de sus argumentos (hacia significados o procedimientos), ayudas que espera de su profesor y cómo se apropia de ellas, de sus creencias y de su responsabilidad sobre su propio aprendizaje.

Estos elementos contribuyen a vislumbrar las prácticas de profesores y estudiantes en orden ascendente y descendente en diferentes etapas y de un modo más específico, explorar la situación del salón de clases en un momento específico, a partir del estudio de las prácticas a nivel micro. (Figura V.2).

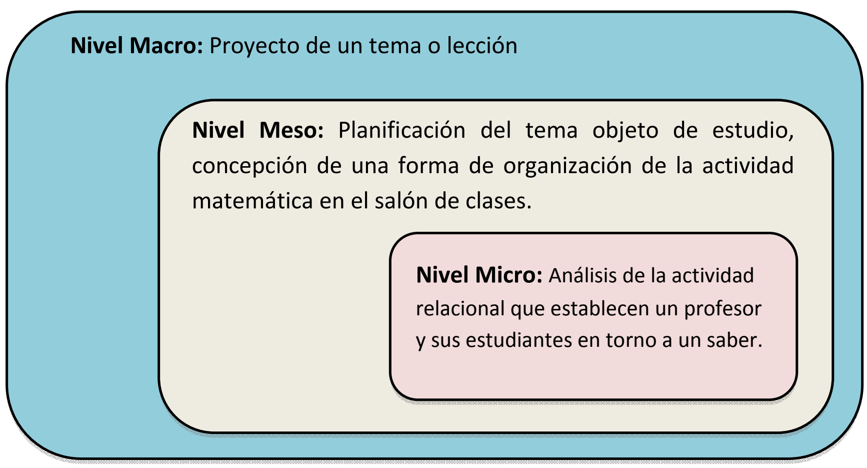


Figura 2. Niveles y momentos de análisis de las prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas

Los dos primeros niveles de análisis son descriptivos, el último, descriptivo y explicativo. El primero, viene dado por aspectos sobre la formación de los profesores, la ubicación del tema en el Plan y Programa de estudios, el tiempo escolar, así como por la descripción de características generales de los estudiantes. El segundo, por las consideraciones previas que se suman a la planificación del tema y que se materializa en el diseño de una situación de enseñanza, las variables de control, del propósito y la planificación del desarrollo de la situación de enseñanza, de las etapas que la constituyeron, asimismo, de la forma para ponerla en funcionamiento en el salón de clases. El último nivel, viene dado por la identificación de los fenómenos que caracterizan la actividad del salón de clases de matemáticas en el proceso de construcción de un saber matemático. Se distingue en ello: a) las intervenciones instructivas desde las más generales relativas a la gestión de la actividad en el aula, a otras más específicas como las "ayudas" que el profesor ofrece a los estudiantes, estrategias para organizar sus explicaciones; b) de la forma en que se involucran los actores del medio con el saber; c) de las acciones de los estudiantes en su interacción con el medio de enseñanza y de los argumentos (escritos, verbales y gestuales) que ponen en juego en las diversas etapas de su actividad. Este nivel requiere entre otras cosas, de la capacidad para reconocer el discurso de los alumnos y del profesor, de las creencias, de sus actitudes hacia las matemáticas y de cómo construyen conocimiento matemático, de los aspectos que median ese proceso.

Consideraciones finales

Los aspectos conjugados en los niveles macro, meso y micro en que se sustenta el modelo estratégico, permite explorar las prácticas de profesores y estudiantes en orden ascendente y descendente en diferentes etapas y de un modo más específico, la actividad relacional que establecen a nivel micro (Figura 2) al momento en que se construye conocimiento matemático. Aunque es claro que al ubicar el análisis de las prácticas en determinado nivel, las acciones, ya sea del profesor o del estudiante, se instalan en uno previo o posterior. Si consideramos las correspondientes a un profesor por ejemplo, al implementar una secuencia (nivel micro), sus acciones se sitúan a nivel meso si está instalado en la reorganización de las formas de interacción en el aula o bien pasar de un nivel macro a un meso, si los tiempos didácticos le hacen tomar decisiones sobre el tiempo para el desarrollo de las sesiones.

Es claro que al asumir este modelo para el análisis de las prácticas asociadas a la actividad del aula o de los fenómenos que emergen en el proceso de construcción de conocimiento matemático, se deberán realizar los ajustes correspondientes al objeto de estudio, a los actores del medio y los contextos institucional, histórico, cultural y social.

Referencias bibliográficas

Abele, A. (1998), Reasoning Processes and the Quality of Reasoning. En F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (191-220). USA: Cambridge University Press.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (tesis inédita de doctorado Cinvestav--IPN, México, D.F.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. y Mok, I. (Eds.). (2006). Making Connections: Comparing Mathematics Classrooms Around The World. Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Cobb, P., Yackel, E. (1998). A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. En F. Seeger, J. Voigt, U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom (*158-190). USA: Cambridge University Press.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. In: P. Cobb, y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cole, M. (1996). Cultural psychology. Cambridge, MA: Belkrap Press of Harvard University Press.

Laborde, C. y Perrin-Glorian, M.J. (2005). Introduction Teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 59 (1), 1-12.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicological: un modelo de la construcción social del conocimiento* (tesis inédita de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Villoro, L. (2008). *Creer, saber, conocer*. Siglo veintiuno editores: México.

Voigt, J. The Culture of the Mathematics Classroom: Negotiation the Mathematical Meaning of Empirical Phenomena. En F. Seeger, J. Voigt, U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom (*191-220). Cambridge University Press: USA.

LA CONSTITUCIÓN DE LAS PRÁCTICAS DE MODELACIÓN LINEAL

Nancy Marquina Molina, Jaime L. Arrieta Vera
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
nanmarquina@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. La problemática que atendemos en esta investigación es la que deviene de la tensión entre las prácticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas. La modelación, particularmente concebida, ha sido sugerida como una práctica que posibilita el establecimiento de puentes entre la escuela y su entorno. A través del proyecto "Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencia, en el nivel medio superior del Estado de Guerrero", se están incorporando al sistema escolar, prácticas de modelación. En dicho proyecto han venido participando ciento cincuenta profesores en ocho sedes alrededor del Estado de Guerrero. Los profesores participan en las puestas en escena de diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación, y posteriormente las trabajan con sus alumnos. Sin embargo, el proceso de constitución de dichas prácticas no es inmediato. Es así que estudiamos este proceso y en éste artículo presentamos algunos fenómenos relacionados con la constitución de las prácticas de modelación lineal.

Palabras clave: constitución de prácticas, modelación lineal

Abstract. The problem addressed in this research comes from the tension between school practices and use practices of mathematics. Modeling, particularly conceived, has been suggested as a practice that allows the building of bridges between the school and its environment. Through the project "Implementation of Virtual Laboratories for Science in the high school level in Guerrero State, are entering the school system modeling practices. This project has been one hundred and fifty teachers participating in eight locations around the state of Guerrero. Teachers involved in the staging of learning designs based on modeling practices, subsequently working with their students. However, the process of incorporation of such practices is not immediate. Thus, studying this process and in this article are some phenomena related to the formation of linear modeling practices.

Key words: constitution of practices, linear modeling

La problemática: la separación de la escuela de su entorno

En la actualidad existe una demanda creciente de la sociedad hacia la utilidad y practicidad de aquello que se enseña en la escuela para que el conocimiento construido ahí, no se encuentre alejado de su entorno, y no solo el conocimiento académico, sino que las prácticas que se ejercen, sirvan efectivamente para resolver o plantear alternativas de solución a problemas que se presentan fuera de la escuela.

La distancia que guardan las prácticas de diferentes comunidades y las prácticas escolares da lugar a fenómenos didácticos, como por ejemplo la búsqueda permanente de los alumnos de la intencionalidad de lo que se aborda en el aula de matemáticas. No es raro escuchar ¿y eso para qué me va a servir?, ¿por qué estudiar matemáticas? y otras cuestiones más en esa dirección. Las prácticas escolares, tienen intencionalidades didácticas, es así que los actores utilizan procedimientos, técnicas, algoritmos, herramientas que ya están establecidas en la escuela, sin embargo, cuando es necesario el uso de cierta matemática en comunidades laborales específicas; los procedimientos, las técnicas, los algoritmos y las herramientas que utilizan, no necesariamente son las mismas que se aprenden y se enseñan en la escuela, en este caso, son aceptadas por su utilidad en el desempeño de su trabajo. De esta manera reconocemos que sus intencionalidades son distintas; mientras las prácticas escolares tienen intencionalidades didácticas, las intencionalidades de las prácticas del uso de las matemáticas es usarlas para desempeñar efectivamente alguna actividad.

La problemática general que atiende nuestra investigación es la que deriva de la separación de la escuela y su entorno. Para esa problemática, consideramos que una práctica de modelación particularmente concebida puede plantearse como un puente para vincular esas esferas separadas por las prácticas que hoy les caracterizan.

La modelación como práctica social. Tendiendo puentes entre la escuela y su entorno

Así mismo, la modelación ha sido fuertemente defendida en las últimas décadas en el ámbito educativo como uno de los procesos sustantivos a la formación matemática escolar. Por ejemplo según Villa y Ruíz (2009), en los lineamientos curriculares de Colombia la modelación se mencionan como uno de los cuatro procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje matemático, junto con el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Es importante mencionar que aún cuando la modelación ya está incluida en el currículo de algunos países, particularmente en México, la incorporación de dichos procesos al aula de clase es aún, poco común.

Además, dentro de la matemática educativa existen diversas concepciones de ver a la modelación, por ejemplo, la modelación como un proceso de representación (Mochón, 1997), o la modelación es vista como una forma de actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos (Suárez y Cordero, 2005); en Biembengut y Hein (2004) la modelación es vista como método de enseñanza de las matemáticas, en otros casos la modelación es vista como un proceso mediante el cual se desarrollan capacidades (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008), o bien, la modelación es vista como una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos (Villa y Ruiz, 2009).

Desde nuestra postura, la modelación, es una actividad recurrente que da lugar a la emergencia de entidades sociales. De esta manera consideramos que la modelación es una práctica social que da identidad a comunidades de diversa índole. Modelar es articular dos entidades donde una de ellas actúa sobre la otra (Méndez, 2006), los modelos que surgen durante este proceso, son utilizados para determinar el comportamiento del fenómeno estudiado. De esta forma un modelo gráfico no es la representación de un fenómeno, sino una herramienta para, por ejemplo, predecir comportamientos.

En investigaciones como Arrieta (2003), que estudia la modelación lineal; Cortés (2003), que estudia la modelación cuadrática; Méndez (2006), la modelación multilineal; Galicia (2004), la modelación exponencial; Castro (2007), lo inversamente proporcional y en Alcaraz (2006), la modelación senosoidal; se propone a la modelación como una práctica que establece puentes entre la escuela y su entorno, para ello elaboraron diseños de aprendizaje basados en la modelación, mediante los cuales reportan, que el alumno construye herramientas matemáticas que le permiten a través de ellas la construcción de su propio conocimiento. Estos diseños fueron elaborados y validados experimentalmente en cada una de sus investigaciones y la metodología que soporta tales diseños de aprendizaje es la Ingeniería Didáctica.

La incorporacion de las prácticas de modelación al sistema escolar

En Mayo de 2009 se firma un Convenio de colaboración académica con el Colegio De Educación Profesional Técnica Del Estado De Guerrero, (CONALEP); el Colegio De Estudios Científicos Y Tecnológicos Del Estado De Guerrero (CECYTEG); el Colegio De Bachilleres Del Estado De Guerrero (COBACH) y la Unidad Académica De Matemáticas De La Universidad Autónoma De Guerrero; para poner en marcha en Agosto de 2009 el proyecto denominado *Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencias en el nivel medio superior del Estado de Guerrero.* Investigaciones tales como Arrieta (2003), Cortés (2003), Méndez (2006), Galicia (2004), entre otras, son parte del soporte de dicho proyecto. A través del cual se están incorporando al sistema escolar prácticas de modelación, en donde ciento cincuenta profesores del nivel medio superior subdivididos en ocho sedes han venido participando y la duración del proyecto es de dos años.

La dinámica del trabajo es la siguiente: el sábado, los profesores participan como estudiantes en la puesta en escena de los diseños de aprendizaje, lo critican como profesores y planean la puesta en escena en sus grupos. De lunes a jueves los profesores ponen en escena los diseños de aprendizaje en su grupo, en cada una de estas sesiones los profesores recaban evidencia que después analizan y entregan; por último, los viernes se evalúa este trabajo.

Las características de los grupos de profesores, son muy variadas; son grupos totalmente heterogéneos, la mayoría de ellos no son matemáticos de formación; hay ingenieros, químicos, biólogos, entre otros; aun así, ellos deben poner en escena los diseños establecidos.

Los grupos con los que trabajan los profesores van desde veinte, hasta sesenta alumnos los cuales son divididos en equipos de cuatro o cinco personas para el desarrollo de cada actividad; el tiempo establecido para la realización de las mismas, es justamente el de una clase habitual de matemáticas (cincuenta minutos). Al final se solicita a un representante de cada equipo que pase a exponer sus resultados y que justifiquen cada una de sus respuestas, que argumenten, se llevan a cabo debates y al final se logran consensos grupales a través de la institucionalización.

Los planteles donde laboran los profesores, son muy variados, algunos están equipados con todo lo necesario para trabajar sus prácticas, algunos otros, trabajan en condiciones muy precarias, y deplorables.

Es así que aspectos como el tiempo, número de alumnos, infraestructura, herramientas tecnológicas con los que cuentan los sistemas escolares, reflejan que las condiciones escolares en las cuales trabajan los profesores, son muy distintas a las condiciones experimentales. Cabe mencionar que estos aspectos, también han sido determinantes para que en muchos casos, se hayan tenido que hacer modificaciones a los diseños con los que se trabajan.

Bajo estas condiciones, las prácticas de modelación han venido incorporándose en los sistemas educativos, sin embargo, el proceso de constitución de éstas no es inmediato. Y requiere de investigación al respecto.

La constitución de las prácticas de modelación

Aclaremos a lo que nos referimos cuando hablamos de la constitución de prácticas.

Desde nuestra postura, la *constitución* está referida a la forma de cómo se establecen y cobran cotidianeidad las prácticas por organizaciones sociales llamadas comunidades. Podemos decir que una práctica constituida es aquella que sigue un procedimiento establecido, explícito o no; las prácticas constituidas son las que se llevan a cabo ya por costumbre o porque así debe de ser. Creemos que el proceso de constitución tiene diversos aspectos, pero que en general está regido por la economía de la práctica, es decir, por su funcionalidad, que la práctica sea adecuada para lograr su propósito.

Es así, que nos hemos cuestionado acerca de cómo se constituyen las prácticas de modelación en el sistema escolar y éste problema lo estamos estudiando desde el proyecto "*Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencia en el nivel medio superior del Estado de Guerrero*". Nuestro interés, se centra en observar y reportar fenómenos asociados al proceso de constitución de las prácticas de modelación, con especial atención a la modelación lineal.

Perspectiva teórica y métodolgía de la investigación

La perspectiva teórica que adoptamos es la Socioepistemología (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). La Socioepistemología, asume como tesis fundamental que la construcción social del conocimiento está dado de manera sistémica bajo cuatro componentes fundamentales: "su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral, R. Farfán, R. 2003).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad. Los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades (Arrieta, 2003).

Es así, que ésta perspectiva es adecuada, pues nos proporciona el marco teórico que nos permite analizar las evidencias que soportan la existencia de fenómenos asociados a la constitución de las prácticas de modelación. En este reporte mencionamos algunos.

- *El profesor duda de sus alumnos.*
- *Los profesores se asombran que sus alumnos sí pueden.*
- *Algunos alumnos piden orientaciones previas.*
- *La red de la elasticidad de resortes contra la red de lo lineal.*
- *Eligiendo fenómenos para modelar lo lineal*.

Decidimos hacer un estudio de casos como parte de la metodología, pues consideramos una manera óptima para recabar la información necesaria en nuestra investigación. El carácter que adquiere nuestra investigación es de corte exploratorio pues no están tipificadas las fases en que se constituyen las prácticas sociales de modelación en el sistema escolar. Cabe mencionar que al realizar un estudio de casos no podremos generalizar los resultados a toda la población, sin embargo, podremos tener un panorama amplio sobre cómo se establecen estas nuevas prácticas en los profesores y del proceso de su constitución.

Nuestro universo está conformado por los ciento cincuenta profesores inscritos al proyecto de "Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencias en el nivel medio superior del Estado de Guerrero", y La muestra que utilizamos es el grupo de Acapulco II, el cual tiene sede en la Unidad Académica de Matemáticas, en la Ciudad de Acapulco. Elegimos este grupo por la facilidad de acceso al mismo.

Las técnicas para la recopilación de datos serán:

- Observaciones
- Entrevistas

Algunos fenómenos en el proceso de constitución de las prácticas de modelación lineal

A continuación mostramos algunos fenómenos que se presentaron durante los primeros seis meses del proyecto; es necesario mencionar que en la fase en que se encuentra nuestra investigación reportamos algunos fenómenos que encontramos de manera recurrente en los diferentes grupos, ésta información la obtuvimos a través de los reportes elaborados por los diferentes instructores, así como de los comentarios surgidos en las reuniones de los mismos. Es así que en este primer momento no sólo nos auxiliamos del grupo que hemos elegido.

El profesor duda de sus alumnos

El primer diseño que se llevó a cabo, fue el de la elasticidad de un resorte, éste fue dividido en dos partes de acuerdo a los tiempos escolares. Sin embargo, los profesores tuvieron que resolverlo en una sola sesión (las seis horas del sábado), puesto que ellos disponen de más tiempo para su realización y planeación.

Después de haber trabajado con este primer diseño, al momento de criticar y planear su puesta en escena con sus alumnos surgieron algunos comentarios, que según los reportes de los instructores de cada sede, los más recurrentes fueron:

- "Si nosotros nos tardamos resolviéndolo, los alumnos no van a poder"
- "Tenemos que trabajar con muchachos de cursos avanzados (5° semestre)
- "Debemos darles una clase previa, para que sepan lo que tienen que hacer"

Estos comentarios indican la desacreditación de los alumnos por parte de sus profesores. En dirección al tercer comentario, podemos observar que para la gran mayoría de los profesores, primero hay que dar la clase y después las actividades son aplicaciones.

Una de las indicaciones dadas en este primer módulo, fue pedir a los profesores que dejaran hablar a sus alumnos, que en este caso éstos eran los protagonistas de la actividad.

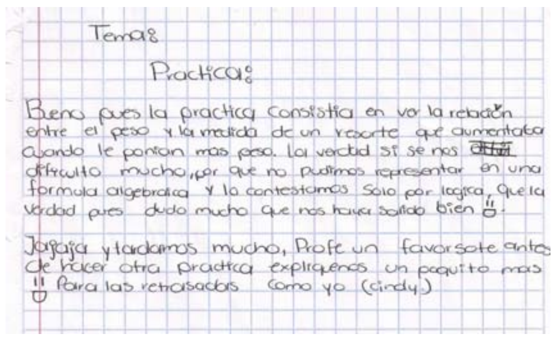
Dadas las indicaciones, los profesores ponen en escena el diseño con sus alumnos.

Los profesores se asombran que sus alumnos si pueden

Como dijimos anteriormente, los profesores dudaban de sus alumnos, mencionaré el caso de la maestra Margarita, ella pertenece al grupo que elegimos para nuestro estudio. Y al mismo tiempo, es un caso representativo en el sentido de que ella era una de las que no confiaba en la capacidad de sus alumnos. Ella es profesora en el COBACH de Tepetixtla, y tenía temor de que no le saliera bien la primera puesta en escena con sus alumnos de COBACH es así que decidió hacer una puesta con sus alumnos de nivel secundaria, a ellos les dijo que era un examen de diagnóstico, y la sorpresa para la maestra fue que sus alumnos de secundaria respondieron muy bien, esta experiencia se las platicó a sus compañeros profesores con la intención de animar a aquellos que aún tenían dudas al respecto.

Algunos alumnos piden orientaciones previas

Al principio, muchos de los profesores no estaban acostumbrados a dejar que los alumnos descubrieran de que se trataba cada actividad, querían decirles más acerca de la misma, pero también los alumnos, estaban acostumbrados a que el maestro hablara más y explicara a detalle de qué se trata cada actividad antes de realizarla, estaban acostumbrados a mecanizar, a reproducir, o a seguir al profesor. En la Figura 1, mostramos una nota que uno de los profesores que pertenece al grupo que elegimos, pidió a uno de los equipos después de haber puesto en práctica la primera parte del diseño la elasticidad del resorte. En ella el equipo hace un breve resumen de lo que trató la práctica y cómo se sintieron durante la puesta.


Tema:

Practica:

Bueno pues la practica consistia en ver la relación entre el peso y la medida de un resorte que aumentaba cuando le ponian mas peso. La verdad si se nos ~~[illegible]~~ dificulto mucho, por que no pudimos representar en una formula algebraica y la contestamos solo por logica, que la verdad pues dudo mucho que nos haya salido bien.

Jajaja y tardamos mucho, Profe un favorsote antes de hacer otra practica expliquenos un poquito mas para las retrasadas como yo (cindy)

Figura 1

De esta manera podemos ver cómo, tanto los profesores como los alumnos se enfrentan a prácticas emergentes a las cuales no están familiarizados.

Observamos que de alguna manera tanto los profesores como los alumnos, se ven "obligados", a modificar algunas prácticas escolares, como por ejemplo; el profesor no es el protagonista en la clase, los alumnos tienen que trabajar en equipos y argumentar sus resultados, sin que el profesor tenga que dar una clase previa a la actividad.

La red de la elasticidad de resortes contra la red de lo lineal

La intención del primer diseño es que los estudiantes construyan la red de prácticas y herramientas llamada "*lo lineal*". Después de haber realizado la práctica, observamos que tanto los profesores como los alumnos construyen una red de prácticas y herramientas, que pudiera pensarse que es la red de *lo lineal* (ver figura 2), sin embargo al participar en otra diseño que involucra situaciones de modelación lineal no es utilizada la red, es decir, los estudiantes y profesores construyen una red de modelos y herramientas que solo funciona para modelar la elasticidad de un resorte. Ésta información se obtuvo de la observación participante en el grupo elegido y del reporte de los instructores de las demás sedes.

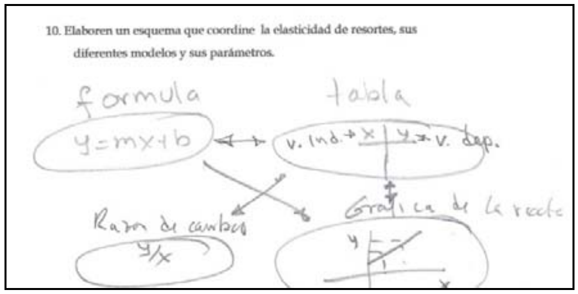


Figura 2

Cuando el fenómeno fue cambiado, la red que habían construido antes no la relacionaban con el nuevo fenómeno. Observamos, cómo para determinar la deuda de un auto que se adquiere a mensualidades sin intereses utilizan un procedimiento distinto de predicción. Construyen su tabla, en algunos casos, les cuesta construir el modelo algebraico, pero aún cuando logran la construcción de éste, al cuestionar sobre la razón de cambio, a pesar de que se solicita después de haber construido el modelo gráfico, y el modelo numérico y algebraico, no la determinan, a partir de ninguno de los modelos que ya habían construido.

Algo relevante de este diseño es cuando se les cuestiona al final, ¿En qué se parece el monto de la deuda con la elasticidad de los resortes? Sólo reportan como conclusión, que se parecen "porque son lineales", y que se diferencian en que una gráfica "crece" (refiriéndose al fenómeno de la elasticidad del resorte) y en el otro (al monto de la deuda del auto), la gráfica "decrece", pero no logran concluir la relación que tienen en cada uno de esos fenómenos la razón de cambio positiva y negativa, y en algunos otros casos, algunos alumnos dicen que no se parecen en nada, "que no tienen nada que ver".

Aquí observamos que para modelar éste otro fenómeno, no echan mano de la red que ya habían construido, pues al parecer la red solo es para la elasticidad del resorte, sin embargo, es importante mencionar que tampoco modelan cómo si lo hicieran por primera vez.

Eligiendo fenómenos para modelar lo lineal

Al finalizar el módulo seis, y después que los profesores trabajaron con once diseños basados en la modelación lineal, justo antes de comenzar la modelación cuadrática, hicimos una entrevista al director del proyecto "*Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencias en el Nivel Medio Superior del Estado de Guerrero"*, el cual ha fungido como instructor en las distintas sedes. La intención de esta entrevista es poder tener un panorama general del proceso en que se han venido incorporando las prácticas de modelación en los sistemas escolares y de sus efectos.

Al cuestionarle sobre el tiempo asignado para trabajar con la modelación lineal, y el hecho de haber ocupado más de el tiempo establecido para la modelación de fenómenos lineales, argumentó "*Le concedemos a la modelación lineal singular importancia porque sobre ésta construimos la caracterización de otro tipo de modelación. El proceso de constitución de la modelación lineal en el sistema escolar es un proceso largo y complejo*".

En dicha entrevista, comentó una situación muy peculiar, menciona que después de haber trabajado el tiempo antes mencionado con diseños basados en modelación lineal y al hacer un ejercicio a los profesores, en donde les solicita fenómenos que puedan ser modelados linealmente, éstos presentan situaciones que no pueden ser modelables de esta manera.

Conclusiones

Al analizar estos fenómenos, pudimos observar cómo en un primer momento, tanto profesores como alumnos se enfrentan a situaciones emergentes, a las cuales no están acostumbrados y existe una resistencia al cambio.

Además, observamos que al llevar a cabo prácticas de modelación al aula tal como se propone en el proyecto "Implementación de los Laboratorios Virtuales de Ciencia..", existen prácticas de base necesarias para que éstas se puedan llevar a cabo con eficacia, algunas que hemos reconocido son: La actitud con sus alumnos debe ser de confianza, permitiéndoles expresar con libertad sus opiniones y otra es en cuanto a La dinámica de sus clases, en donde el trabajo en equipo es necesario, y en donde el profesor no es el protagonista pero sí un guía que orienta en el momento que se requiere.

Consideramos necesario mostrar el fenómeno que denominamos *"La red de la elasticidad del resorte contra la red de lo lineal"* pues éste se presentó de manera recurrente en todos los grupos, y nos muestra lo qué sucede en el primer cambio de contexto, es decir: el cambio de lo lineal creciente & lo lineal decreciente, utilizando diferentes fenómenos o situaciones.

Podemos decir, después de seis meses en los cuales se desarrollaron once diseños basados en modelación lineal, que las prácticas de modelación aún NO están constituidas. Consideramos que falta generalizar la red que se construyó inicialmente para el primer diseño, y que la generalización de la misma quizá la puedan hacer cuando se enfrenten a nuevas situaciones en donde puedan identificar para después comparar las características de los fenómenos que pueden ser modelados linealmente con otros que se modelen de otra manera.

Los fenómenos que hemos reportado en este artículo, son sólo una muestra de lo que hemos podido analizar al momento, próximamente estaremos reportando algunos otros que han surgido y los próximos, que seguramente se presentarán en este proceso.

Consideramos que las prácticas de modelación crean puentes entre la escuela y su entorno, y que la constitución de dichas prácticas en los sistemas escolares, dará pauta a la vinculación entre ellas. Es por ello que nuestro interés seguirá enfocado en estudiar el proceso de constitución de las prácticas de modelación en el nivel medio superior mediante los fenómenos que se presenten durante este proceso.

Esperamos que en determinado momento, las experiencias de modelar que vivan los profesores durante el proyecto, les pueda proveer de herramientas para modelar situaciones análogas es decir, al constituir las prácticas de modelación, no se espera que solo reproduzcan los diseños que han trabajado en el proyecto, sino que sean capaces de poder realizar sus propios diseños con situaciones análogas, adaptándolos a sus propias necesidades. ¡Que hagan suyas las prácticas de modelación, que sean parte de ser profesor!

Referencias bibliográficas

Alcaraz, R. (2006). *Lo periódico una construcción a partir de la Numerización del movimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(1), 49-92.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos de Enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (002), 105-125.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. Primera edición. México: Paidós Educador.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: Una visión de su Evolución*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación: Algunos ejemplos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Número especial,* 83-102. Distrito Federal, México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Castro, G. (2007). *La analogía en la construcción del conocimiento, construyendo lo inversamente proporcional*. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Cortés, G. (2003). *Relaciones cuadráticas entre las variables desde la Perspectiva matemática a partir de observaciones*. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Galicia, A. (2004). *La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la UAG, México.

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal: Modelando un sistema de resortes*. Tesis de Licenciatura no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. En R. M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano, E. Oaxaca (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11,* 42-45. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa, J. A. y Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (27), 1-21.

UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICODE LO LOGARÍTMICO: DE MULTIPLICAR SUMANDO A UNA PRIMITIVA

Marcela Ferrari Escolá
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
ferrari@mathacapulco.com

Resumen. En este reporte daremos un somero recorrido por los cuatro escenarios constituyentes de nuestra investigación alrededor de la construcción de los logaritmos entretejidos por la hipótesis epistemológica establecida luego de un estudio socioepistemológico dando evidencias de la riqueza argumentativa hallada en la interacción de quince estudiantes de sexto semestre de un bachillerato mexicano. En nuestra investigación consideramos que lo logarítmico emerge al facilitar cálculos y modelar, prácticas sociales subsidiarias de predecir, siendo caracterizada desde la covariación de dos progresiones una geométrica y la otra aritmética, a lo que hemos llamado covariación logarítmica.

Palabras clave: socioepistemología, prácticas sociales, covariación logarítmica

Abstract. In this report we will give a shallow tour on the four settings about the construction of the logarithms interwoven by the epistemology hypothesis established after a socioepistemology study giving evidences of the argumentative wealth found in the interaction of fifteen students of sixth semester of a Mexican baccalaureate. In our investigation we think that the logarithmic thing emerges on having facilitated calculations and having shaped, social subsidiary practices of predicting, being characterized from the covariación of two progressions the geometric one and another arithmetic, to what we have called covariación logarithmic.

Key words: socioepistemology, social practices, logarithmic covariation

El objetivo central de nuestra investigación ha sido dar evidencias que lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición, definición primigenia de "logaritmo" alejado del ambiente escolar y que emerge al ejercer la práctica de facilitar cálculos entremezclándose con la práctica de modelación, ambas prácticas sociales acuñadas al seno de la socioepistemología. Discutimos entonces, la posibilidad de establecer que la apropiación de la noción de "función" requiere una mirada global y extendible a toda función que varios investigadores sostienen manteniendo su mirada a los objetos alejándose de nuestra esencia, la epistemología de las prácticas. Esta hipótesis epistemológica toma forma al interrogamos sobre qué argumentos permitieron a los logaritmos persistir en el desarrollo de la matemática erudita empapada de prácticas sociales y de referencia, así como qué factores han inhibido su apropiación escolar generando otro tipo de prácticas, buscando así evidencias de su fortaleza, luego de nuestro estudio sociepistemológico .

Escenarios de investigación

La investigación que reportamos se desarrolló en cuatro escenarios diferentes pero inevitablemente entrelazados, al tratarse de estudios sistémicos, donde lo situado y temporal juega un papel importante:

El primero, aquel donde indagamos sobre la dicotomía que se entabla en torno a la noción "función" entre los investigadores que abogan por una única respuesta, y los que preferimos estudiar características particulares de cada función, en nuestro caso la función logarítmica.

La importancia conferida a "función" desde el paradigma euleriano y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole (Dubinsky yHarel, 1992; Carlson, Oehrtman y Thompson, 2008; Falcade, Laborde y Mariotti, 2007; entre muchos otros). Acercamientos que reflexionan globalmente sobre función, en búsqueda de lograr que los estudiantes desarrollen un pensamiento funcional aplicable a distintos modelos; respondiendo al paradigma vigente, el estudio de la construcción de un objeto matemático donde se considera que la apropiación de un universal conlleva al entendimiento de lo particular. Por otro lado, al analizar reportes de investigación sobre logaritmos observamos que pueden ser encasillados en dos vertientes desvinculadas: aquella con gran acento en *lo cognitivo* buscando desarrollar un razonamiento logarítmico desde el objeto matemático ya aceptado en el ámbito escolar (Berezovski y Zazkis, 2006; Abrate y Pochulu, 2007, etc.); y aquella con gran acento en *lo histórico* reduciéndose a comprender las ideas matemáticas en las que se desarrollaron los logaritmos sin ninguna intención de impactar en la educación (Burn, 2001; Gonzáles y Vargas, 2007, etc.).

Desde nuestra investigación entonces, cuestionamos estas dicotomías y nos adherimos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla; alejándonos así de la búsqueda de un único mecanismo para desarrollar un pensamiento funcional, donde estudios socioepistemológicos son una fuente rica de argumentos para rediseñar el discurso matemático escolar imperante. Retomamos entonces, la hipótesis epistemológica establecida: *lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición*, cercana a la definición primigenia de *logaritmo* alejado del ambiente escolar, y que nos incentivara a analizar ciertas investigaciones sobre covariación. Hallamos así, en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) una interesante síntesis de investigaciones al respecto aunque seguimos las ideas de Confrey y Smith (1995) al considerar que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos.

El segundo, aquel donde analizamos el discurso matemático escolar en las voces de profesores y alumnos así como en textos escolares que presentan a los logaritmos en sus tres argumentos principales: como exponente, como función inversa y como la primitiva, de manera disjunta.

Desde nuestra perspectiva, el discurso matemático escolar involucra textos escolares así como a profesores y alumnos, generadores de ciertas prácticas escolares, que nos permiten caracterizar herramientas logarítmicas utilizadas en aulas mexicanas de nivel medio superior y superior. Para ello, realizamos el análisis de textos[1] organizando la discusión desde: (a) *lenguaje algebraico* donde los acercamientos estudiados fundan su argumentación en "función" y, en general, es la definición la que inicia la presentación de los logaritmos; (b) *lenguaje gráfico*, donde observamos que lo ostensivo prevalece y donde una gráfica de la curva logarítmica emana de tres argumentos: de una *tabla numérica* que requiere la expresión analítica; de la *simetría* respecto a $y=x$; y del *área* bajo la curva; siendo, en la mayoría, argumentos finales; y (c) *uso* de los logaritmos que en libros de Álgebra y Cálculo juega un papel secundario cayendo, en general, en ejercicios análogos a los ya resueltos en sus páginas.

Por otro lado, generamos tres grupos de discusión con profesores[2], donde observamos que coinciden con su poco acercamiento a los logaritmos y de los cuales no guardan buenos recuerdos; permitiéndonos apreciar la frecuente ausencia de espacios para discutirlos con los estudiantes debido, bajo su perspectiva, a la densidad de conceptos que deben impartir en cursos de álgebra. Se observa además que, en general, repiten los argumentos que sus maestros utilizaron recordando la falta de conexión con la realidad, o la cantidad de ejercicios que tenían que resolver, sin distanciar demasiado esas tareas a sus propios alumnos.

En los estudiantes[3] en cambio, se observa el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una herramienta muy utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, evidenciando que no se ha desarrollado un argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio. Esto se reafirma al mirar las operaciones matemáticas que invocan ante algunas expresiones algebraicas, o al graficar pues prevalece la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la simetría geométrica para funciones inversas, siendo extendida en la mayoría de los alumnos al recíproco. Pareciera así, que la inercia escolar respecto a los argumentos presentes impacta en la introducción de los logaritmos en el lenguaje matemático que deben desarrollar los jóvenes. Se denota un arraigo a reproducir literalmente sentencias escolares o ausencia de una visión crítica que evidencian un pensamiento funcional alejado de la posibilidad de reconocer funciones desde sus particularidades, mismas que anuncian su naturaleza (Ferrari y Farfán, 2008).

El Tercer escenario, aquel donde realizamos un trabajo epistemológico estableciendo que *facilitar cálculos* y *modelar*, son las prácticas sociales que propiciaron la conformación de los logaritmos, evidenciándose en las herramientas matemáticas que surgieron, modificando las prácticas y por ende a sí mismas; base de nuestro diseño de aprendizaje.

Luego de reflexionar sobre el desarrollo de herramientas que surgieron de la primera definición de los logaritmos en un mundo muy especial y desarrollado, donde las necesidades de generar mejores artefactos para facilitar cálculos se perciben aterrizadas en la navegación, o en la economía; observamos que en otras épocas y lugares, esta necesidad se percibe en la búsqueda de respuestas para fenómenos naturales como inundaciones o conquistas tal como en los babilónicos mediante las tablas para registro y cálculos así como en los egipcios donde multiplican duplicando y vinculando valores en dos columnas para evitar una suma reiterada; o en los incas, que generan el quipu y la yupana entre música y cantos, así como en la china, donde la proporcionalidad directa e inversa y el uso de progresiones así como calcular mediante el ábaco fueron argumentos centrales; cobrando sentido lo importante de lo situacional en la construcción del conocimiento.

Así, pese a la rapidez de la mirada que hemos realizado en un mundo imposible de abarcar, logramos entrever cómo *lo logarítmico* se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, de mecanizar procesos laboriosos como el de multiplicar, de ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, de reconocer ciertos crecimientos aunque no se haya percibido la covariación logarítmica que desde nuestra perspectiva está presente.

Por otro lado, rastreamos elementos desarrollados por la necesidad de describir ciertos fenómenos de la naturaleza como el movimiento; así como por aquellos argumentos intramatemáticos como el área bajo una hipérbola equilátera o una curva cuya subtangente sea constante, argumentos que se han entremezclado desde la antigüedad, confluyendo a lo que hoy llamamos *curva*, y más particularmente función, muy ligado a modelar. Para ambos no es extraño basar sus explicaciones en la covariación de progresiones, ya sean aritméticas o geométricas; eje de nuestra discusión hacia lo logarítmico.

Nos referimos entonces a dos prácticas: *facilitar cálculos* y por ende de la generación de herramientas de distinta índole; y *modelar*, donde estudiamos diversas aproximaciones, mismas que han desaparecido del discurso matemático escolar ante el rigor de la matemática y la necesidad de sintetizar ideas o economizar construcciones; elementos que nos interesa reflejar en nuestros diseños en búsqueda de que emerja *lo logarítmico*. Se requiere entonces, que los logaritmos sean usados, formulados y teorizados para construirse y existir.

Del estudio sociepistemológico realizado como análisis preliminar de la Ingeniería didáctica desarrollada, se dedujo, como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Adquiere mayor sentido, entonces, estudiar la argumentación que desarrollan los estudiantes al involucrarlos en un ambiente especial, diseñado desde los argumentos que dirigieron la evolución de los logaritmos, y así, dar evidencia sobre lo que ocurre en un salón de clase al incorporar en la discusión escolar esta hipótesis.

El *cuarto escenario*, aquel escolar, donde quince estudiantes de sexto semestre de bachillerato aceptan el desafío de acercarse a *lo logarítmico*; invitándolos a transitar por los tres momentos de los logaritmos: éstos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico,* regido por la covariación logarítmica (Ferrari, 2001).

Abordar la problemática que mencionáramos al inicio de este escrito desde una visión particular, distanciándose un poco del espíritu de la mayoría de los trabajos alrededor de función que se encuentran en nuestra comunidad, requería un marco teórico robusto, aquel que nos cobijara y diera elementos pertinentes para atenderla. Desarrollamos entonces esta investigación bajo la socioepistemología, es decir, aquello que se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión cultural. Aquello que se preocupa por la epistemología, pero no desde el desarrollo del conocimiento, sino desde la evidencia de las prácticas sociales inherentes al mismo. Adopta así, una visión sistémica donde se entremezclan las prácticas escolares propias de la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

Utilizamos entonces, la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología base ya que permite y propone encarar un fenómeno didáctico desde una perspectiva de carácter netamente sistémico. Adoptamos su estructura, es decir, sus fases, pero bajo la concepción de organizar nuestra propia investigación bajo la óptica socioepistemológica. Esto nos lleva a articular las fases desde el estudio de las prácticas sociales y de referencia que sustentan el diseño de las actividades de aprendizaje, así como incorporar algunos métodos particulares en cada fase, tales como análisis de textos (originales y escolares); grupo de discusión, y otros métodos utilizados por la psicología social, particularmente, la representación social.

En nuestra búsqueda de evidenciar que la construcción de lo logarítmico descansaba en nuestra hipótesis epistemológica, invitamos a quince estudiantes de sexto semestre de bachillerato a participar en un curso diseñado desde los tres momentos de los logaritmos. Trabajamos 15 sesiones videograbadas (dos por semana, de hora y media), donde los estudiantes formaron grupos de tres y se les solicitó entregar su reporte de clase, así como organizar sus conclusiones en cada cierre de momento para lograr consenso general. Los desafiamos entonces a trabajar con las actividades creadas respetando las ideas originales de los logaritmos, donde nos interesaba observar las herramientas y argumentos que emergieran así como su evolución y redes de significados y modelos que se fueran consolidando (Ferrari y Farfán, 2010).

Principales conclusiones de la investigación

Discutimos entonces en este trabajo que, "saber función es necesario y suficiente para conocer cualquier función específica" argumento que sostienen aquellos cuya unidad de análisis se centra en generalidades, en tanto que nosotros partimos de particularidades. En aquellos que no consideran importante revisar los orígenes de las nociones y las prácticas sociales adosadas a ellas pues el discurso imperante ya ha sido consensuado y generado significados sociales aceptados por una comunidad erudita, en tanto que nosotros partimos de analizar la esencia de su origen y cómo ha llegado a lo escolar. Nos reconocemos así, en la comunidad de los socioepistemólogos, donde la necesidad de percibir y estudiar las prácticas sociales indisociables de las herramientas generadas en su seno, del uso de éstas últimas que propician la evolución de las primeras, de reconocer que la construcción del conocimiento matemático es situado, temporal y culturalmente determinado; son elementos básicos para estudiar un fenómeno producido en un aula de matemáticas. Espacio donde establecemos que los usos y significados sociales desarrollados no son imperturbables, sino renovables, pues lo que permanece es la esencia de discursos establecidos muchas veces fuera de ámbitos escolares y donde es necesario provocar la emergencia de una red de significados propia, construida desde los consensos logrados con sus pares para disminuir luego la distancia con los significados institucionalizados socialmente, donde el papel del profesor resurge.

Creemos haber sensibilizado a los estudiantes hacia la covariación logarítmica donde el trabajo en grupo, la libertad de expresarse en búsqueda de un discurso común, dio frutos.

Regresarnos a los argumentos originales que propiciaron la constitución de los logaritmos nos permite organizar un discurso institucionalizado a transmitir escolarmente desde otros supuestos que lo resquebrajan y lo rearman desde la covariación logarítmica como eje integrador. Lejos de repetir la historia, sino rescatar esencias, lejos de establecer "el camino" sino sólo proponer uno, lejos de dar soluciones a los estudiantes sino de problematizarlos, lejos de enseñar los logaritmos sino aprender con ellos, es que evidenciamos sus fortalezas y fragilidades.

La elección de las fichas logarítmicas como variable didáctica, en la primera etapa del curso, que implicaba trabajar en dos mundos distintos el de multiplicar y el de sumar interrelacionados, permitió que anclara en ellos el argumento que "*si reconocemos una progresión geométrica y una aritmética entonces estamos hablando de una curva logarítmica*"; esencia de lo logarítmico, no lo discreto que evidencia la sentencia mencionada, sino su naturaleza, el isomorfismo de mundos donde ambas operaciones funcionan, pero que al reconocerlas covariacionalmente nos lleva a definir los logaritmos.

Regresar a la geometría para generar una visión de continuidad en una función que se discutiera inicialmente como algo discreto, de arreglos numéricos especiales y naturales, abrió la posibilidad de generar otros argumentos y fortalecer el acercamiento a lo logarítmico, alejándolos del discurso gráfico tradicional de la escuela. Los introducíamos así, en otro escenario, provocando el uso de una red de modelos: el geométrico como disparador de la discusión, el numérico regresándolos a un ambiente similar de las fichas, y el algebraico que se evidenciara el más frágil y alejado del acervo matemático de estos estudiantes. Los inducíamos también, a que emergiera en sus discusiones y consensos el uso del argumento central de los logaritmos justamente para reconocerlos, para construir nuevos argumentos que los describan, acercándolos a una mirada más integral de esta función. Decidimos además, confrontar funciones polinomiales con trascendentes, escogiendo para esto una función cuadrática y la logarítmica en el segundo momento y una función constante, una función lineal y una función racional en el tercer momento para que del estudio del área bajo las mismas percibieran la naturaleza de cada una y reconocieran sus primitivas.

Arribábamos así con los estudiantes, al fin de un recorrido por los tres momentos epistemológicamente establecidos donde los logaritmos como *transformación*, como *modelizadores* y como *objeto teórico* estuvieron presentes regidos por las prácticas sociales de facilitar cálculos y modelar (Ferrari, 2008).

Notas

1. Los textos analizados fueron los que constituyen el acervo de la biblioteca de las escuelas de apoyo a la investigación Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) y Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG).
2. Los profesores entrevistados mediante la metodología "grupo de discusión" fueron quince estudiantes de maestría en Matemática Educativa en la UAEH; ocho estudiantes de la maestría en la Universidad Autónoma de Chiapas y 47 participantes de un taller impartido en la Universidad Autónoma de Nayarit.
3. Los estudiantes fueron participantes de un curso de ecuaciones diferenciales de la UAEH, de segundo semestre formándose como ingenieros industriales; otros de cuarto semestre del área de Matemática Educativa del curso Matemática escolar I, de la Unidad Académica de Matemáticas de UAG, con los cuales se les entrevistó a partir de reactivos preparados como breves exámenes para luego conversar con los que evidenciaron ideas interesantes.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación matemática 10*, 77-94. Obtenida en octubre de 2007 en http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=27#indice.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Berezovski, T. y Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2. (pp. 145-152). Obtenida en octubre de 2007 en http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01

/0000019b/80/29/8c/0d.pdf

Burn, R. (2001). Alphonse A. de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica 28*, 1-17.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Carlson, M. P., Oehrtman, M. y Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson y C.

Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 150-166). USA: MAA Bookstore.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Falcade, R., Laborde, C. y Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66*, 317.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis no publicada de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN), México.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: De multiplicar sumando a una primitiva.* Tesis no publicada de doctorado. Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. y Farfán, RM. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 309-354.

Ferrari, M. y Farfán, RM. (2010). Una Socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(Número Especial), 53-68.

Gonzáles, M. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas, Enseñanza Universitaria XV*(2), 129-144.

PRÁCTICAS CIENTÍFICAS Y SU INSTITUCIONALIZACIÓN

Isabel Tuyub, Gustavo Martínez
Fmat-UADY. Cicata-IPN (México)
isabel.tuyub@audy.mx, gmatinezsierra@gmail.com

Resumen. Se reportarán los avances de un proyecto de investigación interesado en cómo se genera conocimiento en una comunidad de práctica en dominios científicos extramatemáticos situada sobre la funcionalidad de la matemática. El reporte consistirá en discutir las relaciones de dos elementos teóricos: Las prácticas científicas y los procesos de institucionalización, ya que la construcción de conocimiento no depende exclusivamente del individuo o grupo sino se da a través de las instituciones en las que se desarrolla. Con base en esta discusión se comprendieron las nociones básicas que serán los pilares de la investigación.

Palabras clave: comunidad científica, prácticas, institucionalización

Abstract. The progress of a project research concerned in how knowledge in a community of practice in extramathematical scientific domains located on the functionality of mathematics is generated would be reported. The report is to discuss the relations of two theoretical elements: scientific practices and processes of institutionalization, due to the construction of knowledge does not depend solely on individual or group but is given by the institutions in which it operates. Based on this discussion, basics notions that would be the pillars of research were included.

Key words: scientific community, practices, institutionalization

Introducción

En México "la enseñanza universitaria se ha orientado a la formación de profesionistas usuarios del conocimiento, más que de investigadores productores del mismo" (Fortiz y Lomnitz, 1991, p. 11). Fortiz y Lomnitz hacen un llamado a que en México ya se ha considerado la importancia de la tecnología, pero aún no se percibe claro el papel de la ciencia, ni del científico en la sociedad, ni mucho menos la naturaleza de la comunidad científica en el país.

El *conocimiento científico* presenta una naturaleza distinta al *conocimiento escolar*; aunque el objetivo de las universidades es preparar al estudiante para ser un profesional competente; se piensa que para formar una sociedad científica no basta con transmitir un conocimiento de manera "accesible", "clara" e "interesante"; hay que crear ambientes en la que la gente se acerque a la ciencia, pero no como una *divulgación científica*, pues no es suficiente para formar dicha sociedad. Como no existen marcos de referencia para saber cuándo decir que un conocimiento es "accesible", "claro" o "interesante" y considerando lo que afirman Fortiz y Lomnitz (1991) sobre que el conocimiento no es suficiente, es necesario lo institucional en el estudio de prácticas científicas, nos centrarnos en su construcción.

Problematizar la construcción de conocimiento matemático permite entender su naturaleza y cómo poder adquirirla, como sugiere Molfino (2010) al preguntarse ¿Por qué es posible que un determinado concepto se construya? ¿Cómo se construye? Encuentra la necesidad de considerar dominios científicos extramatemáticos, en los que reconoce que la construcción social del conocimiento no depende exclusivamente de un individuo o grupo, si no que "se da a través de las instituciones en las que se desarrolla" (Molfino, p.50); es en estos dominios donde Cordero (2006) menciona que las prácticas de referencia se desenvuelven, resignificando el conocimiento matemático, ahí la matemática adquiere sentido y significado propio para determinada comunidad.

Problemática y objetivo

En Matemática Educativa el objeto de estudio es la confrontación del saber matemático y el saber escolar; una forma de entender esta confrontación es estudiar la generación del saber matemático y posteriormente mirar si una transposición hacia la matemática escolar. Nos enfocaremos en el primer aspecto.

Este escrito pretende aclarar y encontrar una relación lógica entre las nociones teóricas de prácticas científicas e institucionalización, con la intención de mostrar una pertinencia del proyecto de investigación doctoral interesado en determinar cómo se genera el conocimiento científico en una comunidad de práctica científica, relacionada con el uso de las gráficas (la matemática funcional).

Al preguntarnos ¿cómo se genera conocimiento científico asociado al uso de las gráficas en una comunidad de formación científica? Se vislumbran dos elementos importantes que son la institucionalización (proceso en el que se generan las instituciones) y las prácticas científicas (prácticas en las que está involucrado la generación de conocimiento científico). Además, la generación de un conocimiento requiere significados para el aprendiz y la institucionalización es el proceso en que un conocimiento se hace parte de cierta comunidad.

Estudiar procesos de construcción a través de procesos de institucionalización, ante una situación problema en prácticas científicas, puede permitir mostrar una faceta diferente de las nociones matemáticas. Por ejemplo, cómo caracterizar *mecanismos de construcción,* identificarlos, cómo influyen nociones matemáticas en dicha práctica.

Antecedentes que consideran prácticas científicas e institucionalización

Tuyub (2008) estudio la construcción de conocimiento matemático en una comunidad de Toxicólogos (científicos especializados en los efectos que causan las sustancias químicas a los organismos vivos); para ello tomó en cuenta que una comunidad está situada en un contexto histórico y sociocultural, en el que las personas aprenden socialmente y se manifiesta en la existencia de un cambio de práctica; no sólo en la interactúa sujeto-objeto, sino también sujeto-sujeto y en la epistemología de sus prácticas. Tuyub ubicó escenas de prácticas de un científico que enfrentaba un problema nuevo, para su resolución no sólo usaba conocimiento de corte biológico sino también matemático y sentido común, como por ejemplo aspectos asociados al uso de la función matemática de varias variables, que al final se traducía en un análisis de gráficas en tres dimensiones o su experiencia para determinar si el experimento tendría existo o no, para poder tomar decisiones que conllevaban a subsanar una necesidad de su comunidad: estandarizar una técnica para obtener nuevas caracterizaciones de genes humanos.

El científico realizaba procesos reiterados, modificaba ciertas acciones regidas por el resultado experimental de sus procesos, expresado en una gráfica, producto de su experimentación y argumentaba en la comparación de ésta con una institucionalizada. En la Figura 1, se muestran tres gráficas de amplificación de genes: La que aparece a la derecha es uno de los resultados obtenidos las primeras veces en que implementó su técnica, como no llenaba las expectativas, según la comunidad, modificó algunas condiciones de sus muestras y obtuvo otras; la que se ubica del lado izquierdo es el resultado obtenido después de que decidió que la técnica ya estaba estandarizada, comparada con las ya institucionalizada por la comunidad (la tercera gráfica, debajo de las dos primeras).

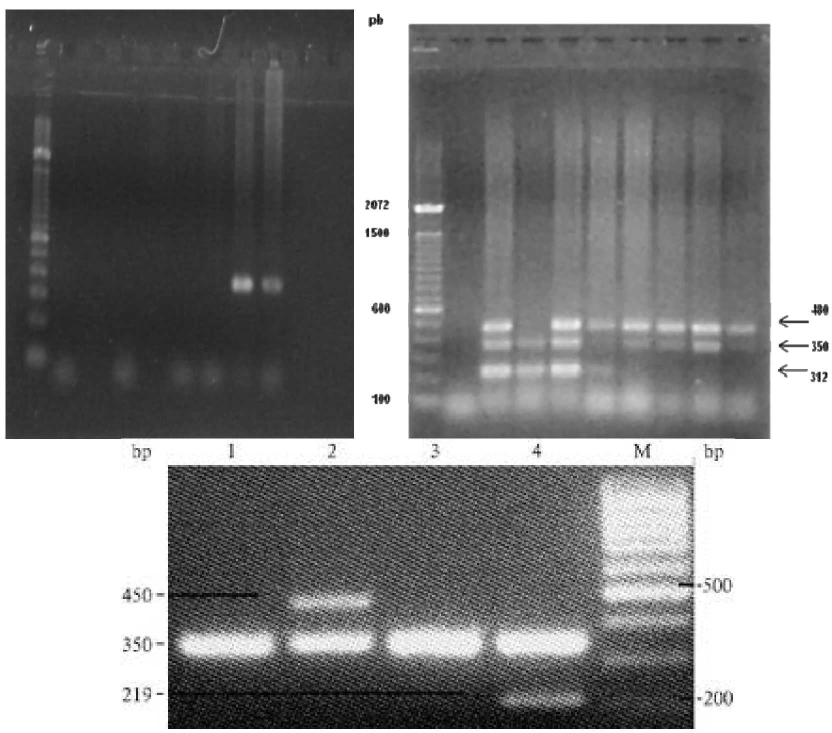


Figura 1. Graficas de amplificación de genes. Las dos primeras producto de la experimentación en una práctica científica: Una de las primeras en obtenerse (izquierda) y la última gráfica obtenida al estandarizar (derecha). Se aprecia la gráfica proporcionada en libros científicos que hacen alusión a la identificación de genes (abajo).

Las prácticas se consideraron como procesos no explícitos, inferidos mediante acciones reiteradas; Tuyub (2008) menciona que no son un conjunto de acciones organizadas sino más bien un proceso de institucionalización, en donde existen restricciones y licencias, que le permitan al científico decidir qué acciones cambiar y cuáles no para modificar su práctica. En la Figura 2 se muestra un esquema obtenido mediante la observación de prácticas de una comunidad, en el que Tuyub ubica tres prácticas principales y cómo se relacionan, con la intención de obtener mecanismos o indicadores sobre cómo se construye conocimiento en esa comunidad.

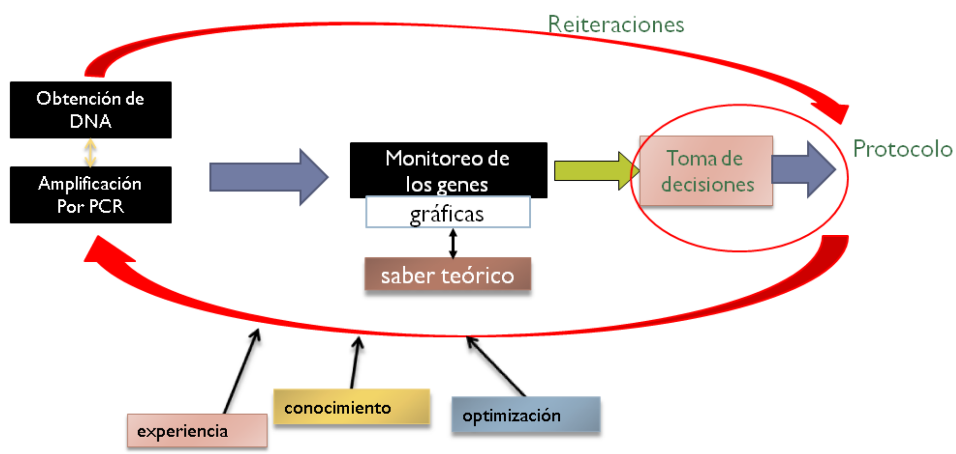


Figura 2. Esquema obtenido experimentalmente para inferir prácticas de una comunidad de Toxicólogos para generar una secuencia de pasos que permitan obtener siempre los mismos resultados (protocolo).

Entre sus conclusiones se tiene que el conocimiento se construye socialmente, a pesar de estudiar prácticas de un sólo científico, no estuvo desligado de la interacción entre sus colegas; el uso del conocimiento matemático fue una pieza clave para tomar decisiones y generar conocimiento científico. Tuyub (2008) menciona que la construcción de conocimiento matemático respecto a su *relación funcional* son reflejadas en lo que logra el continuo, por medio de los *procesos de institucionalización* de las mismas, en un contexto. Dichos procesos son *mecanismos* que hacen que el conocimiento sea así y no de otra manera (Cordero, 2006), los cuales fueron estudiados con el "modelo de permanencia y cambio" de Covián (2005), el cual sugiere estudiar el cambio a través de lo que permanece.

El trabajo de García-Torres (2008), es otro estudio realizado en una comunidad de científicos (Ingenieros Biomédicos), al momento en que ellos obtenían las condiciones óptimas de un material que se usa para instrumentos quirúrgicos. Ella da evidencia de un mecanismo de construcción de conocimiento matemático a través de procesos de institucionalización de sus prácticas, dicho mecanismo lo denominó *equilibración de relaciones asimétricas* y lo caracterizó como el proceso en el que se busca el equilibrio en una relación de naturaleza jerárquica manifestada a través de los roles del doctor a cargo de un proyecto y el tesista del proyecto, representados por el saber experimental y el saber teórico respectivamente, teniendo como base el *principio de consistencia* y un problema común.

Uno de sus resultados importantes es que dejó ver que los saberes se institucionalizan por la existencia de mecanismos que lo posibilitan, donde la práctica social aporta su función normativa; mecanismos propios de la institucionalización.

En la Figura 3, se aprecia el uso de elementos institucionales que se confrontan con lo obtenido experimentalmente con el uso de prácticas científicas.

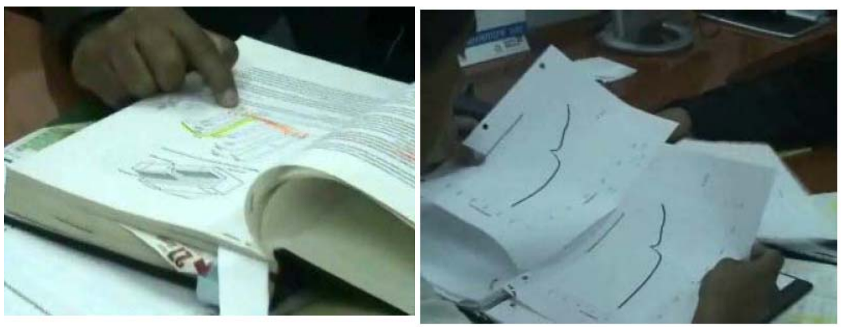


Figura 3. Libros y gráficas testigos (estandarizadas) con las que contrastan los resultados de sus experimentos para tomar decisiones de la cantidad correcta de calentamiento del material quirúrgico.

La necesidad de un marco conceptual

La tendencia de la Matemática Educativa lleva a considerar *marcos conceptuales* para entender problemáticas actuales que le competen, marcan una tendencia de considerar no sólo elementos propios de dicha ciencia, sino también de otras como la Psicología, la Sociología, la Epistemología, el Constructivismo, la Psicología Social, ejemplifica Sriraman (2010). Por otro lado, la tendencia actual en la investigación en Matemática Educativa, según Lester (2010), está enfocada a considerar con mayor énfasis los aspectos socioculturales. Por ello, la reflexión entre las prácticas científicas y la institucionalización en la Matemática Educativa tiene cabida.

Consideraremos como marco principal la Socioepistemología ya que partimos de la necesidad de una epistemología de prácticas reflejadas en lo que logra el continuo. Esta teoría toma en cuenta el saber en uso que puede ser en un contexto de acción científica, que se caracteriza como una epistemología que modela las prácticas sociales (lo que permite hacer lo que se hace), que le dan origen, son fuentes y explican la construcción del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003), en la que se aprecian las instituciones. Trabajos que también sustentan lo anterior son por ejemplo (Covián 2005; Cordero, Cen y Suárez, 2010). Este enfoque emitió estudiar procesos de dicha construcción a través de inferir prácticas.

Dentro de esta teoría no es posible vislumbrar con claridad qué relación tiene la práctica con las instituciones (o la institucionalización), por lo que nos apoyamos de un marco que ha tenido cuidado y es experto en lo que se entiendo por institución: la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La TAD considera a la práctica como una institución, contextualizada y relativa de la sociedad en la que se estudia, esto se puede apreciar por ejemplo en el trabajo de Romo (2009), quien analizó el uso de los conocimientos matemáticos en distintas instituciones dentro de la práctica de formación de ingenieros; dio cuenta de los efectos transpositivos determinados por las instituciones donde la matemática se usa. Uno de sus resultados fue que la práctica norma el uso que se hace del conocimiento; exige transformaciones, adaptaciones y genera nuevo conocimiento. Si dicho conocimiento es matemático, no significa que la institución matemática lo reconozca como tal inmediatamente, éste tendrá que pasar por un reconocimiento institucional.

Para aclarar más estas nociones, consideramos teorías de corte social como es la Sociología y Sociología del conocimiento, por la naturaleza de las prácticas y el uso del conocimiento; es decir, que no importa el concepto en sí, sino cómo se utiliza para generar conocimiento.

La sociología considera que la *práctica científica* no se reduce a una persona pensando en un objeto, sino mas bien "es la imagen devuelta a un sujeto cognoscente por otros sujetos cognoscentes equipados con instrumentos de análisis que pueden ser ofrecidos eventualmente por ese sujeto cognoscente" (Bourdieu, 2001, p.17). El conocimiento científico transforma la existencia de los hombres "la irrupción de una ciencia o una nueva técnica en la sociedad siempre tiene el efecto de perturbar la relación con lo real, la jerarquía de valores, el peso relativo de los comportamientos (la teoría microbiana institucionalizó la higiene)" (Moscovicci, 1979, p.14).

En la sociología del conocimiento, Berger y Luckman (2006) describen a las *instituciones* por el hecho mismo de existir, son las que controlan el comportamiento humano estableciendo pautas definidas de antemano, tienen un carácter normativo que se puede apreciar en las prácticas (en las que está involucrada la institucionalización) y los conocimientos son considerados como herramientas para la acción, ya sean conocimientos científicos o de sentido común (Gallino, 2005). Es el conjunto de contenidos que forman parte del patrimonio de la humanidad, verdaderos para todos, no es la información (objeto), sino una capacidad donde su transmisión involucra una relación entre el sujeto y el objeto que involucra al s*ujeto***,** *objeto***,** *operación* y *representación interna* (el proceso cognoscitivo). El conocimiento puede ser transmitido pero también relacionado a experiencias personales o modelos mentales con diversos grados de formalidad y necesariamente debe existir en un contexto para su creación y difusión.

Por tanto tiene sentido de hablar del saber, desde la Socioepistemología, como un conocimiento funcional "incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario" (Cordero y Flores, 2007, p. 9), el cual es un conocimiento contextualizado propio de una comunidad, que no es necesariamente explícito como tal, se infiere a través de las prácticas y se considera una de los productos de la institucionalización, se resignifica (Tuyub, 2008). Por ello interesa, más que el conocimiento, su construcción para determinar qué elementos intervienen en cierta práctica (su epistemología), en la que está involucrada la generación de saberes.

Consideraciones finales

Las revisiones y ejemplos de investigaciones descritas anteriormente proporcionan una reflexión teórica sobre la institucionalización de las prácticas científicas.

En la figura 4 se muestra un esquema sobre qué se entenderá por institucionalización de las prácticas científicas, que nace a la luz de lo descrito anteriormente: Cuando se identifican práctica relacionadas con la intención de enfrentar un problema nuevo, es importante mirar su evolución de cada una y su relación con respecto a la incidencia de la práctica en la comunidad (proceso de institucionalización en las prácticas); en cada punto de su evolución se puede mirar el uso del conocimiento matemático; pero cuando estas prácticas llegan a no tener tantos cambios en su evolución o al momento de repetirla una y otra vez, es cuando se considera una práctica institucionalizada.

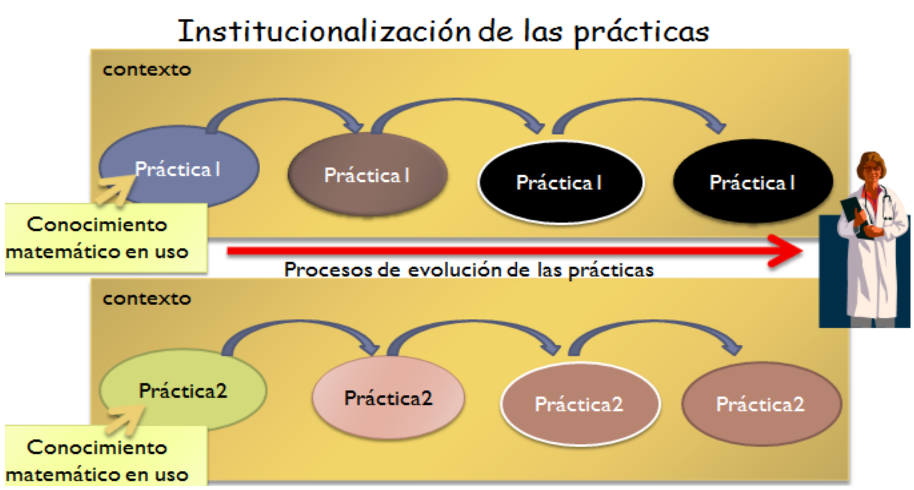


Figura 4. Esquema metodológico de la institucionalización de las prácticas.

Identificar mecanismos en las prácticas permite inferir procesos que no son visibles, que no se expresan en lengua oral, sino que se infieren por medio de prácticas; permite caracterizar y dar indicios de por qué se hace lo que hace. De esa manera preguntarse qué norma a la comunidad científica, consideramos es un indicador es las prácticas situadas.

Se cree también que el contexto y la cotidianeidad (uso de conocimiento de sentido común) son piezas claves para ubicar la relación entre las prácticas de una comunidad para poder hablar de éstas situadas en una práctica de referencia.

Las prácticas que tendrán cabida en la investigación serán las institucionalizadas o que están en procesos de institucionalización, pues en ellas se localizan generación de conocimiento; la manera de identificarlas será relativa de acuerdo al tipo de comunidad a estudiar, pero serán las relevantes a la toma de decisiones para resolver un problema de la comunidad.

Caracterizar procesos de institucionalización de las prácticas asociados a un saber matemático, permite considerar por qué se hace lo que se hace en una comunidad, de igual manera, permite caracterizar el contexto en el que está inmerso.

Estudiar prácticas proporciona una nueva visión sobre las nociones matemáticas, las que son necesarias para el ámbito profesional y para la vida, dotadas no sólo de conocimiento sino también de aspectos sociales como sentido común, experiencias, representaciones sociales, creencias, concepciones, socialización, entre otros. En ellas podemos inferir procesos de institucionalización en la construcción de conocimiento, por lo que juntos pueden proporcionar indicadores que permitan explicar por qué una comunidad construye su conocimiento de esa manera y no de otra forma, cómo logran preservar su conocimiento con el paso del tiempo (el continuo).

Referencias bibliográficas

Berger, P. y Luckmann, T. (2006). La sociedad como realidad objetiva. En P. Berguer y T. Luckmann (Eds). *La construcción social de la realidad* (pp.66-163). Madrid: Amorrortu.

Bourdieu, P. (2001). *El oficio de científico. Ciencia de la Ciencia y reflexividad. Curso del College de France 2000-2001*. Barcelona: Anagrama.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fortiz, J. y Lomnitz, L. (1991). *La formación del científico en México, adquiriendo una nueva identidad*. México: Siglo XXI editores.

Gallino, L. (2005). Diccionario de sociología. México: Siglo XXI editores. Recuperado el 23 de marzo de 2010 de http://books.google.com.mx/books?id=XPl12M70LUMC&lpg=PP1&dq=diccionario%20de%20sociolog%C3%ADa%20de%20Gallino&pg=PP1#v=onepage&q&f=false

Fortes, J. y Lomnitz, L. (1991). *La formación del científico en México, adquiriendo una nueva identidad*. México: Siglo XXI editores.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman, L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, (pp. 67-85). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Moscovicci, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires: Huemul S.A

Romo-Vazquez A (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs*. Tesis de doctorado no publicada. Francia, París.

Sriraman, B. y English L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. En B. Sriraman, L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, (pp. 67-85). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

ESTUDIO SOCIEPISTEMOLÓGICO DEL DESARROLLO DE LA RECTA TANGENTE

Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda Alonso, Gisela Montiel Espinosa
CICATA-IPN (México)
luisarturo_sernamartínez@yahoo.com.mx, apcastane@gmail.com, gisela.montiel@gmail.com

Resumen. Diferentes investigaciones han mostrado la existencia de un fenómeno didáctico cuando en las clases de Cálculo Diferencial la representación geométrica de la derivada es estudiada. Nuestra investigación en curso tiene como propósito rescatar elementos a partir del análisis de los usos del conocimiento en obras antiguas. La Socioepistemología reconoce que el origen del conocimiento depende del escenario sociocultural en donde nace.

Nuestra intención es reconocer el significado que hubo en la recta tangente así como los usos que permitieron su construcción y poder usar ese conocimiento en el diseño de secuencias didácticas y la puesta en escena de las mismas para que los estudiantes puedan construir la recta tangente variacional y arribar a partir de este conocimiento a la noción de derivada.

Palabras clave: usos del conocimiento, rectas tangente variacional, significado, reconstrucción del significado

Abstract. Different investigations have shown that there is an educational phenomenon, when in the classes of differential calculus; the geometric representation of the derivative is studied. Our ongoing research has the purpose of rescuing items use analysis knowledge in antique books. The Socioepistemology recognizes that origin of knowledge depends on the cultural scene where born. Our intention is recognize the meaning that there were in the tangent, as well as applications that allowed its construction and can use this knowledge in the design of teaching sequences and staging to the students can construct the variational tangent and arriving from this knowledge to the notion of derivative.

Key words: uses of knowledge, variational tangent, meaning, reconstruction of meaning

Presentación

Una de las más grandes fallas en la educación se encuentra en la materia de Cálculo (Marcolini y Perales, 2005), un tema que es visto en Cálculo Diferencial (CD) es la interpretación geométrica de la derivada y la forma en cómo tradicionalmente es visto con los estudiantes es fuente de dificultades tanto en el nivel medio superior como en la Universidad (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Serna, 2007). En el presente reporte de investigación mostramos los avances de nuestra investigación en curso, inicialmente damos una muestra a partir del análisis de investigaciones hechas en Cálculo que existe una problemática en su enseñanza aprendizaje, la cual se manifieste en los libros de texto, programas de estudio, profesores y los modelos de enseñanza aprendizaje; después vamos a definir nuestro problema de investigación, posteriormente en este reporte mostramos algunos hallazgos hechos por investigaciones sobre el CD en el siglo XVII donde es tomada en cuenta la componente epistemológica pero considerando que el nacimiento del conocimiento es situado y su significado depende del escenario sociocultural en donde nace, a continuación indicaremos cuál es el marco teórico con el cual trabajaremos y que aún nos encontramos estructurando para finalmente dar un bosquejo de la metodología que pretendemos implementar en nuestra investigación.

Los libros de texto y programas de estudio

Consideramos que los libros de texto ejercen gran influencia en la concepción que se tiene de las matemáticas en general, así como el Cálculo Diferencial (CD) en particular, es decir las ideas, formas de enseñanza aprendizaje, formas de trabajo de los y las profesoras de Cálculo Diferencial y las percepciones de los mismos estudiantes se van formando a partir de los contenidos y manejo que se da a las ideas matemáticas en los libros de texto. De acuerdo a Dolores (2007) la mayoría de los textos de CD tienen una secuenciación de los temas similar a la del Análisis Matemático, además la forma en cómo son tratados es considerando a las matemáticas bajo un enfoque formalista en donde el rigor y la lógica son primordiales, los temas tratados en la mayoría de los textos bajo este enfoque son abordados desde la matemática misma ya que no se relacionan con otras asignaturas como son Física, Economía u otras ciencias, tampoco se le relaciona con problemas de variación y cambio. Regularmente los programas de estudio son tratados en los mismos términos que se hace en los libros de texto, con la misma estructura y enfoques (Dolores, 2007); en nuestra investigación hemos hecho un análisis del programa de Cálculo Diferencial del Edo. de México el cual se encuentra trabajando bajo el enfoque de las competencias y que ha sido modificado por la reforma que se está llevando a cabo a nivel nacional, en la revisión que efectuamos pudimos observar que en la presentación que se hace del programa se hace mucho énfasis en dejar a un lado la memorización y utilizar el pensamiento crítico, se menciona también acerca de la importancia que se tiene de poner especial atención en los procesos de aprendizaje más que en la enseñanza, se dice en el plan que su enfoque es operacional e intuitivo y que no pretende justificar rigurosamente la fundamentación lógico axiomática ya que los conceptos fundamentales se introducen en la medida de lo posible en un contexto que sea familiar al estudiante, también se menciona que en el curso se analiza el cambio que sufren las cantidades que varían en todas aquellas funciones que sirven de modelos teóricos experimentales que resultan de la investigación.

Sin embargo cuando se revisan la forma en cómo está estructurado el programa observamos que se parece mucho a los programas tradicionales, hay un intento por cambiar, como observamos por ejemplo en la primera unidad ya que plantea la resolución de un problema de optimización, para posteriormente tener una secuencia de temas muy similar a la de cualquier programa tradicional de CD, al inicio de cada unidad se da un ejemplo de aplicación con el cual se pretende abordar la misma, esto último se puede inferir por el número de horas sugerido se aplique a la resolución del problema, sin embargo desde nuestro punto de vista creemos hay una discordancia entre el discurso que se maneja en la presentación con la secuencia de los temas así como su contenido, con respecto al tema que nos ocupa que es el de la recta tangente, el cual se aborda prácticamente en los mismos términos que cualquier programa de estudio y es mediante la idea de que la recta tangente a la curva es el resultado de una familia de rectas secantes cuyo límite deviene en una recta tangente en un punto y que además ha sido reportado es causa de dificultades para la construcción del concepto (Cantoral, 2000; Dolores, 2007). Vemos entonces de que a pesar de lo que se menciona en la presentación y los ejemplos de problemas de aplicación esto no está de acuerdo a los contenidos que se presentan en el programa lo cual da pie a la ambigüedad entre los profesores y profesoras que consulten los mismos.

Los profesores

La concepción que de las matemáticas tienen los profesores y profesoras de CD es determinante en los procesos de enseñanza aprendizaje que se da en las aulas de clase; Es muy frecuente que los profesores de matemáticas conciban a las mismas como un sistema lógico y coherente de axiomas, postulados, teoremas, definiciones y conceptos, en donde no hay falla alguna (Parra, 2005), además que se considera a los objetos matemáticos como algo ya dado y acabado que no sufre modificaciones, no obstante los elementos conceptuales de CD en varias ocasiones son de gran dificultad, lo que ocasiona dificultades para la construcción de los conceptos entre los estudiantes e inclusive en ocasiones entre los mismos profesores (Castañeda, 2004; Dolores, 2007) lo que puede ocasionar que la clase entre en crisis, para salvar tal situación se recurre frecuentemente a el empleo de algoritmos de naturaleza algebraica (Cantoral, 2000).

El uso de algoritmos permite que los estudiantes aprendan a derivar, encontrar límites, máximos y mínimos entre otras cosas, pero este hecho no implica que estén construyendo los conceptos por otro lado cuando se pretende en las clases que los estudiante apliquen los conceptos vistos en problemas, regularmente los profesores y profesoras recurren a los problemas que los mismos libros de texto proponen, pero muchos de estos problemas frecuentemente no tiene prácticamente que ver nada con la realidad, el resultado de esta forma de enseñanza propicia por un lado que los mismos estudiantes consideren que los argumentos de tipo visual no sean considerados de importancia (Castañeda, 2009); y por otro lado al no construir los elementos conceptuales, no saben reconocer el uso de los mismos en situaciones en donde se les requiere para resolver problemas (Dolores, 2007). Cuando en las clases se aborda el enfoque geométrico de la derivada surge el tema de recta tangente, es un tema que regularmente se ve en la clase ya que se encuentra en los planes de estudio, y se toca como por requisito curricular, sin embargo después de esto no se vuelve prácticamente a utilizar (Serna, 2007). En nuestro caso consideramos que la construcción de la noción de recta tangente es un objeto matemático a construir antes inclusive de la derivada ya que este hecho permitirá construir otros conceptos como son el derivada, máximos y mínimos, así como el punto de inflexión.

Los modelos de enseñanza-aprendizaje

El modelo de enseñanza-aprendizaje utilizado en las clases de CD tradicionales es aquel en que el o la profesora da una definición para posteriormente resolver un ejemplo para que posteriormente los alumnos y alumnas hagan algo similar, es decir se pretende transmitir habilidades por repetición de ejercicios, (Parra, 2005). Las matemáticas son presentadas como una colección de hechos y procedimientos los cuales son transmitidos del Profesor a los alumnos. Otra idea fuertemente arraigada es aquella referente a la actuación del profesor o profesora en la clase en donde se considera que él o ella tiene una acción predominante en la clase ya que es quien expone, aclara dudas, ilustra, enfatiza algunos puntos, da ejemplos, da instrucciones acerca de los métodos o procedimientos, para llegar a resultados correctos, determina cuales serán las tareas (Andrade, Perry, Guacaneme y Fernández, 2003); bajo este actuar quien tiene la última palabra en la clase es el profesor o profesora y no la razón, la cual podría también podría ser construida a partir de la argumentación por los alumnos, pero esto último no es con frecuencia empleado como mecanismo en para la construcción de conocimientos ya que además como el conocimiento es concebido como algo inmutable y ya dado de antemano los y las estudiantes sólo tendrían que asumir una actitud pasiva ante la acción del profesor o profesora.

Problema de investigación

Las problemáticas mencionadas en las clases de CD se ven reflejadas en el tema que es de nuestro interés particular en que es el de la recta tangente, este es presentado a los y las estudiantes en la asignatura de CD cuando se trata la interpretación geométrica de la derivada; anterior a esta asignatura se han cursado otras como son Geometría y Trigonometría, así como Geometría Analítica, en estas asignaturas el tema de recta tangente es visto en clases, por ejemplo en el caso de la Geometría Euclidiana se considera que la recta tangente a la curva toca a esta misma en un sólo punto y no en otro, en Geometría Analítica se le considera como un lugar geométrico con un carácter estático, por lo tanto tiene una posición fija. Cuando el tema de recta tangente es presentado en las clases de CD se hace frecuentemente asumiendo que una familia de rectas secantes a una curva que giran alrededor de un punto devienen en una recta tangente, esta forma de presentar el tema ha sido demostrado es causa de grandes dificultades entre los estudiantes (Cantoral, 2000; Dolores, 2007); el considerar de esta forma a la recta tangente ocasiona algunas ideas erróneas como son el hecho de que la curva toca a la misma en sólo un punto sin volver a tocarla (o cortarla) en otro punto, esto a pesar de que hay libros que aclaran lo contrario (Canul, 2009), además bajo este enfoque se pone especial énfasis en el punto de contacto que es donde la recta toca a la curva, ocultándose el carácter variacional que tiene la recta tangente a la curva (Dolores, 2007; Serna, 2007).

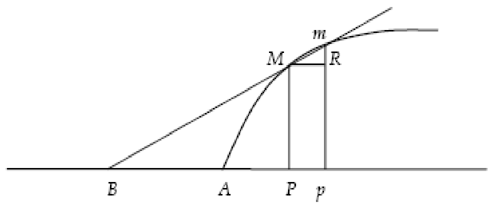
Existe entre los estudiantes una dificultad en crear una conexión o vinculo entre la idea que tienen de recta tangente vista en sus cursos anteriores al de CD con su carácter estático y global (considerando por global que la recta tangente toca a la curva en un solo punto dejando a toda la curva al otro lado de la recta) con la idea de una recta tangente dinámica o variable y local (es decir tangente en la zona de contacto) tal y como es requerida en CD (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Martínez, 2005). De acuerdo a Serna (2007) cuando los estudiantes ven el tema de máximos y mínimos en donde se requiere tener clara la idea de recta tangente variable ya que la pendiente de esta tiene un signo que cambia después de los puntos críticos, sin embargo se ha observado que esta no es una idea que quede estabilizada entre los y las estudiantes y por lo tanto se tiene que recurrir a aprenderse los pasos de manera mecánica para encontrar los máximos y mínimos de una curva. Por lo tanto el objetivo de nuestra investigación es el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas las cuales serán construidas a partir del análisis de obras eruditas en donde se tomará en cuenta la componente epistemológica haciendo la consideración que el conocimiento es situado ya que su significado tiene que ver con el escenario social en donde nacen las ideas, consideramos que el análisis de los usos nos permitirá recuperar el significado de los objetos (D´Amore, 2005). El reconocimiento de estos significados servirá para diseñar las secuencias didácticas las cuales tendrán el fin de que los alumnos y alumnas puedan construir la recta tangente desde un punto de vista variacional y a partir de esto se pueda arribar al concepto de derivada.

Estado del Arte

En la tesis de Castañeda (2004) se hace una análisis de dos obras de difusión del Cálculo estas son escrita por el Marqués de L´Hospital y María Agnesi en el análisis hecho a la obra de L´Hospital se da una amplia explicación sobre las diferencias, esta es una idea fundamental ya que a partir de ella se van a ir construyendo todos lo demás conceptos matemáticos que van surgiendo en la obra, la comparación entre dos magnitudes se puede llevar a cabo a partir de la diferencia entre dos ordenadas de una misma curva que se encuentran infinitamente cercanas entre sí, cuando esta comparación se va llevando a cabo de manera consecutiva entonces se puede caracterizar a la curva, por ejemplo si las diferencias se mantienen constantes entonces se trata de una línea recta, si por el contrario para los mismos cambios infinitesimales de la variable independiente no hay los mismos cambios de la variable dependiente entonces se trata de una curva; al hacer la comparación entre dos puntos de una curva por medio de la diferencia también se le puede atribuir un signo a la diferencia y por lo tanto determinar en qué regiones la curva es creciente y en que regiones decreciente, inclusive haciendo un análisis más exhaustivo que tan "rápido" va creciendo o decreciendo una variable con respecto de la otra. La diferencia fundamental: $\rho(a+da)-\rho(a)$ "mide el desequilibrio en la naturaleza, su reconocimiento permite anunciar la presencia de flujos, así como también da cuenta de los procesos de acumulación de lo que fluye…" (Cantoral, 2001, p.348).

Observamos entonces la importancia de la diferencia ya que es la noción con la que se pueden medir cambios, ya sean estos manifestados en una curva o en los fenómenos de la naturaleza, estos cambios y su variación y la variación de la variación y así sucesivamente permiten determinar completamente la evolución de un sistema. Un aspecto muy importante en el análisis llevado a cabo en Castañeda (2004) es la descripción de los comportamientos de las curvas a partir de elementos gráfico-visuales, para esto explica en base a lo que se manejaba en el siglo XVII y XVIII, que cada punto de una curva tiene asociado una abscisa y ordenada, de tal forma que al tomar un punto de la misma y dejarlo fluir durante un instante se tendrá otro punto y al comparar las magnitudes de las ordenadas de estos dos puntos (los cuales están infinitamente cercanos) por medio de una diferencia se obtendrán los infinitesimales, los cuales son magnitudes infinitamente pequeñas y estrictamente hablando no se deberían de poder ver, sin embargo el uso de las gráficas permite ilustrarlos ya que estas magnitudes son representadas por medio de pequeños segmentos, gracias a estas representaciones se presentan explicaciones de los comportamientos infinitesimales.

En Serna (2007) se llevó a cabo un análisis de los diferentes métodos de resolución del problema de las tangentes, a partir del trabajo encontramos que se puede tratar el problema a partir de las ideas que se manejaban en el siglo VII, por ejemplo en L´Hospital se define a la curva como un conjunto de segmentos infinitamente pequeños unidos entre sí, bajo esta perspectiva podríamos definir a un punto como un segmento infinitesimal, la tangente se obtendría entonces prolongando en ambos lados uno de estos pequeños segmentos infinitesimales, de esta manera se puede intuir más claramente que en cada punto de la curva la recta tangente va a ir cambiando. Retomando los usos que se le dieron a los segmentos infinitesimales, en la investigación hecha por Castañeda (2004) en donde se reporta sobre Agnesi, ella llega por medio de argumentos geométricos a través de la semejanza de triángulos entre dos triángulos uno de dimensiones finitas y otro de dimensiones infinitamente pequeñas a la idea de recta tangente, para llegar a esta noción se hace necesario las magnitudes infinitamente pequeñas las cuales por sí mismas representan variaciones de un punto de la curva tanto en las abscisas como en las ordenadas, al comparar estas dos magnitudes por medio de una razón es como aparece la recta tangente en la figura 1, se muestra lo anteriormente dicho:



(Agnesi, 1748, pág. 433)

Figura 1 (Recta tangente)

En la gráfica se ilustran los infinitesimales, este tipo de argumentos permiten la construcción de la recta tangente a la curva, usando argumentos geométrico-visuales, con ellos se puede observar de manera más intuitiva una construcción de la recta tangente, en comparación con la forma tradicional de presentarla en los libros de Cálculo. Consideramos que el utilizar las magnitudes infinitesimales en conjunción con conceptos como semejanza de triángulos y el de razón de cambio son ideas que se presentan bajo esta forma de presentar a la noción de recta tangente y que pueden ser utilizadas en la didáctica actual. Planteamos como objetivo de investigación el construir la noción de recta tangente variable a partir de una epistemología en la cual se toman en cuenta argumentos como son: Diferencia, infinitesimales, magnitudes infinitesimales, variación, semejanza de triángulos, la consideración que un punto es un segmento infinitesimal, análisis de los cambios a partir de la idea de "dejar fluir" todo esto a partir de un contexto geométrico visual; así como algunos otros elementos de tipo contextual que puedan ser considerados para la construcción de la noción de recta tangente variable.

El propósito que persigue nuestra investigación a partir de los elementos encontrados los cuales surgen del análisis de obras antiguas y que consisten en determinar cuáles fueron los usos que se les dieron a las nociones que permitieron construir la noción de recta tangente desde un punto de vista variacional.

Marco teórico

El marco teórico que vamos a utilizar es el de la teoría de la Socioepistemología, esta dota a la investigación en matemática educativa de cuatro componentes que son: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la componente social, (Cantoral, 2000). La teoría considera que el origen del conocimiento matemático depende del escenario sociocultural en donde nace, por lo tanto este va a surgir dependiendo de la época, lugar, circunstancias y necesidades de la sociedad en donde se gesta, por lo tanto el conocimiento matemático no es único absoluto e inmutable ya que el surgimiento de este es relativo y depende del contexto en donde surge.

La Teoría Socioepistemológica, plantea que para la construcción de los objetos matemáticos no se requiere centrar la atención en los objetos matemáticos, sino en las prácticas sociales que los generaron. Los usos que se les da a los objetos matemáticos tienen que ver con el significado que se le da a los mismos y esto depende de cada cultura y sociedad, de tal forma que podemos hablar de un conocimiento situado. Por lo tanto el conocimiento no es preexistente ya que depende de cada escenario en donde aparece y es ahí donde adquiere significado. Bajo la perspectiva socioepistemológica consideramos la importancia que tiene el recuperar el significado, puesto que este nos permitirá reconocer el vínculo existente entre la cognición de los estudiantes y la construcción del conocimiento matemático.

Metodología

Nuestra metodología a utilizar tiene que ver con primero reconocer que existe un fenómeno didáctico que se encuentra presente en la enseñanza aprendizaje del CD, este fenómeno se refiere a la dificultad existente entre los estudiantes de poder estabilizar la idea de la interpretación geométrica de la derivada que tradicionalmente se presenta en las clases de CD, como en los libros y los mismos programas como el límite de la sucesión de una familia de rectas secantes que giran alrededor de un punto y devienen en la recta tangente a la curva, sin embargo de acuerdo a reportes de investigación esta forma de enseñanza ha sido una fuente de dificultades entre los y las estudiantes (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Serna, 2007). Una vez que ha caracterizado el problema se hará una revisión de corte socioepistemológico de obras antiguas en donde se indagará sobre los usos del conocimiento y el análisis de los mismos para reconocer el significado propio de la época y por medio del cual se pudo resolver el problema de las tangentes mediantes elementos de tipo variacional, utilizando ideas como son: los infinitesimales, la semejanza de triángulos y la razón de cambio, la revisión se hará primero con Copérnico que es donde surgen algunas primeras ideas de tipo variacional (Serna, 2007).

Posteriormente reconocemos una evolución de los usos del conocimiento se revisarán otros matemáticos como Newton, L´Hospital y Euler en donde la intención es reconocer una evolución en los usos del conocimiento. El poder observar y analizar los usos del conocimiento y su evolución permitirá el diseño de secuencias didácticas en donde se pondrán en marcha esos usos de conocimiento matemático con la intención de que se generen nuevos significados entre los y las estudiantes, significados que regularmente han quedado ocultos bajo el enfoque tradicionalista formal del Cálculo Diferencial (Dolores, 2007). Se tiene como intención también resignificar el conocimiento y dar cuenta de la viabilidad de la secuencias didácticas que se pretenden diseñar y como a partir de esta se puede construir un conocimiento matemático funcional que para nuestro caso es la construcción de la recta tangente desde un punto de vista variacional y que tiene como intención construir a partir de esta noción la función derivada.

Referencias bibliográficas

Andrade, L., Perry, P., Guacaneme, E. y Fernández, F. (2003). *La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación?. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 6 (2), 80-106.

Cantoral, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En Hitt, F., Figueras, O., Radford, L. y Bonilla, E., *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (Vol. Único, pp. 381-386) Guatemala

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad* México: Iberoamérica.

Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción Leibniziana. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática.* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis Doctoral, CICATA-IPN, México.

Castañeda, A. (2009) Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

D´Amore, B., (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática:* México: Reverté.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada.* México: Díaz de Santos.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 25-68.

Martínez, R. (2005). *La Pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo.* Tesis de Maestría, Cimate-Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente.* Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

LA NOCIÓN DE PREDICCIÓN EN MATEMÁTICAS. UN ANÁLISIS CUALITATIVO TRANSVERSAL

Alejandro López, Landy Sosa
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com, smoguel@uady.mx

Resumen. En este artículo se discuten los procesos de construcción de conocimiento escolar relacionados con la noción de predicción matemática. Se evidencian condiciones socioculturales y acciones que favorecieron en jóvenes de distintos niveles educativos la movilización de recursos de construcción de conocimiento asociado al Cálculo, observadas en la experimentación de actividades predictivas de naturaleza variacional en escenarios numéricos y gráficos

Palabras clave: predicción, recursos, construcción, conocimiento

Abstract. This article discusses the processes of construction of school knowledge related to the notion of mathematical prediction. Its evident sociocultural conditions and actions that favored young people from different educational levels of resource mobilization for the construction of knowledge associated with the Calculus, observed in testing predictive nature activities variacional numerical and graphical settings.

Key words: prediction, resources, construction, knowledge

Introducción

En este artículo se problematiza el carácter de la actividad matemática escolar con relación a la del quehacer científico, a propósito de la noción de predicción matemática asociada a la construcción de conocimiento en Cálculo. Una mirada epistemológica a la actividad de la comunidad científica de los siglos diecisiete y dieciocho que generó conocimiento en Cálculo y Análisis, sentó las bases para el diseño de actividades predictivas que se experimentaron con estudiantes de diferentes niveles educativos. Se reportan los recursos y herramientas que emplearon tales estudiantes para predecir, evidenciándose aspectos socioculturales en su actividad que hacen plausible vislumbrar condiciones para construir conocimiento matemático relativo a la noción de predicción en contexto escolar.

Según (Cordero, 2005, citado por Sosa y Aparicio, 2009) es posible distinguir al menos dos tipos de actividades matemáticas: la actividad matemática científica y la actividad matemática escolar. La primera, se compone de un conjunto de acciones que el científico pone en juego para entender, explicar y dar respuesta a determinadas situaciones o necesidades sociales, por ejemplo, estimar, medir, razonar, argumentar, generar modelos y estructuras, entre otras. Por su parte, la segunda se orienta más al entendimiento del lenguaje y las estructuras de la matemática misma.

Carácter de la actividad predictiva escolar y científica

La investigación toma como punto de partida el supuesto que la epistemología de la actividad de predicción matemática en la escuela es discordante con la del quehacer de las comunidades científicas, poniendo de manifiesto una marcada separación entre los procesos de construcción de conocimiento entre lo científico y lo escolar, sobretodo en la matemática (López, 2010). Por ejemplo, en el texto de Cálculo 1, usado en las escuelas preparatorias de nuestra universidad, se presentan situaciones como la siguiente:

> Una inyección de x gramos de cierta droga resulta una disminución de la presión sanguínea de $D(x) = 0.5x^3 - 4x$ milímetros de mercurio. Hallar la sensitividad a 4 gramos de esa droga. La sensitividad se define como la tasa de cambio de la presión sanguínea, medida en mm de mercurio, con respecto a la dosis (Quijano y Navarrete, 2000, p.119).

Una solución de esta situación sería como sigue: *La sensitividad de la droga está dada por la derivada de la función* $D(x)$*, es decir,* $D'(x) = 1.5x^2 - 4$ *. Así, basta sustituir el valor* $x = 4$ *en la fórmula obtenida para hallar (calcular) la sensitividad a la dosis indicada.*

La predicción matemática es la actividad que subyace este tipo de situaciones, más no en un sentido estricto de su significado, sino que dicha actividad se restringe al empleo de técnicas y recursos escolares tales como: la reproducción y mnemotecnia (el cálculo de tasas de cambio se asocia con derivar); lo algorítmico (aplicar la técnica algebraica para derivar una función polinomial); la sustitución (reemplazar una variable por un valor numérico). No se precisa entonces desarrollar recursos, estrategias ni habilidades para relacionar variables, cuantificar cambios, analizar el comportamiento de un sistema de cambios, etc., acciones propias de la actividad predictiva en las ciencias. Véase en éste un ejemplo del carácter distinto de la predicción en el ámbito escolar y el científico, que se acentúa más al mirar la actividad predictiva de científicos como Newton.

Newton buscaba explicar la forma en que cambia la posición de un objeto respecto a un sistema de referencia, cuando éste experimenta una fuerza externa. Su trabajo lo desarrolla en condiciones ligadas a la necesidad de predecir el movimiento de objetos con atención en el cambio, intentando entender el comportamiento de cómo varía lo que varía a partir de analizar un elemento infinitesimal del sistema de cambios. Destaca su segunda ley de movimiento, con la que explica la aceleración y relación cuantitativa entre inercia y fuerza, expresándola en la forma $F\Delta t = m\Delta v$, un modelo de relación entre magnitudes variables.

Según Cantoral (2001) citado por Alatorre, López y Carrillo, (2006) la predicción de fenómenos de flujo continuo de la naturaleza, concitó la generación de conocimiento matemático y científico en Cálculo y Análisis. Así, una visión epistemológica del quehacer de la comunidad científica interesada en el estudio de dichos fenómenos, dilucidó características de la actividad predictiva en el campo científico, tales como: la identificación de variables, el establecimiento de relaciones entre magnitudes fijas y variables (por ejemplo, fuerza y masa, tiempo y velocidad), la formulación de conjeturas sobre cómo varía lo que varía, el análisis global del comportamiento global de un sistema de cambios, la generación de modelos y su validación.

En nuestra investigación nos interesamos entonces en explorar el estatus de la noción de predicción en el ámbito escolar, traduciendo para ello las condiciones de la actividad científica de carácter predictivo en la generación de un escenario que pudiese favorecer la construcción de conocimientos y recursos matemáticos en estudiantes de diferentes niveles educativos, mediante la resolución de situaciones variacionales asociadas al concepto de límite (o convergencia). En ese sentido, planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Qué tipo de conocimientos y recursos matemáticos son empleados por estudiantes ante situaciones específicas de predicción matemática?

Socioepistemología de la predicción

En diversas investigaciones enmarcadas en la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2004; Alatorre, López y Carrillo, 2006) se señala que la *predicción* es la idea germinal en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza, favorecedora de la construcción de conocimiento matemático ante la necesidad de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder.

Este marco teórico nos permitió reconocer condiciones de construcción de conocimiento matemático en torno a la noción matemática de predicción, considerando los procesos de sistematización de "las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, 2004, p.1).

Así, el fijar la mirada en la epistemología de la práctica de predicción identificamos que una condición (social) que desentrañó mecanismos para predecir sobrevino de la necesidad del ser humano de anticipar lo que habrá de suceder en su entorno, por ejemplo, conocer el comportamiento de lo que fluye dio lugar al desarrollo de formas de pensamiento propias de una época determinada. Se observó además que, desde la antigüedad y hasta la fecha, una circunstancia en la construcción de conocimiento matemático ha sido el uso de tablas numéricas y gráficas como herramientas predictivas en la práctica de diversas comunidades científicas y no científicas. Por ejemplo, los astrónomos babilonios registraban en tablillas de arcilla datos sobre las posiciones de los astros y planetas para identificar ciertos patrones de regularidad y predecir su movimiento (López, Sosa y Aparicio, 2010). Respecto al uso de gráficas, consúltese el trabajo de Tuyub (2008) por citar alguno en el que se proporciona evidencia de su papel en la generación de conocimiento, en una comunidad de toxicólogos.

Método de investigación

La conjunción en forma sistémica de aspectos epistemológicos y cognitivos de la actividad predictiva científica, bajo la ingeniería didáctica como metodología de investigación, nos dieron la pauta para el diseño experimental de una secuencia de cuatro actividades predictivas sobre el movimiento de partículas, a partir de información numérica y gráfica sobre su relación posición-tiempo. Véanse dos de las actividades de la secuencia.

Actividad 1

En el análisis a priori de esta actividad se consideraron como variables: lo variacional en el movimiento de tres partículas que se alejaban de un objeto fijo, la predicción de un estado ulterior de la posición de éstas a partir de información de estados iniciales del movimiento y el la representación de dicha información en un registro numérico (Imagen 1). Se esperaba que los estudiantes analizaran de manera cuantitativa y cualitativa la variación del movimiento para identificar el comportamiento global de la divergencia de cada partícula. En otras palabras, el análisis de la serie de transformaciones o cambios en estados iniciales del movimiento les permitiría predecir un estado ulterior del mismo.

Partícula 1		Partícula 2		Partícula 3	
Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0.000	0	0.000	0	0.000
1.5	3.000	1.5	1.660	1.5	2.077
3	6.000	3	3.948	3	4.637
4.5	9.000	4.5	6.554	4.5	7.429
6	12.000	6	9.391	6	10.386
7.5	15.000	7.5	12.412	7.5	13.472
9	18.000	9	15.588	9	16.667
10.5	21.000	10.5	18.901	10.5	19.955
12	24.000	12	22.335	12	23.325
13.5	27.000	13.5	25.877	13.5	26.770
15	30.000	15	29.520	15	30.282

Imagen 1. Tablas de la posición de tres partículas que divergen de un objeto fijo.

Actividad 2

En la actividad dos, se retoma la situación anterior de movimiento en un registro gráfico (Imagen 2). Se trata de una actividad predictiva en cuya resolución se esperaba que los estudiantes establecieran comparaciones o diferencias entre distintos estados del movimiento de las partículas para obtener características de las transformaciones que los articulan para predecir un estado ulterior. Esto precisaría que los estudiantes desarrollaran recursos o codificaciones para convertir información de un registro a otro.

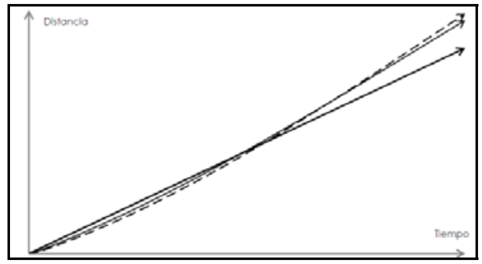


Imagen 2. Gráfica de la posición de tres partículas que se alejan de un objeto fijo.

Las actividades se experimentaron con una población de nueve estudiantes de nivel educativo básico, medio y superior (tres por cada nivel). El instrumento se implementó por nivel educativo, con un tiempo de veinte minutos para la resolución de cada actividad. Las soluciones de cada estudiante se registraron en video y por escrito.

Recursos empleados por estudiantes para predecir

Los datos recabados en la experimentación evidencian que, en un contexto específico, jóvenes escolares de diferentes edades pueden desarrollar estrategias y recursos matemáticos y no matemáticos para predecir. Del análisis a posteriori de la actividad uno se concluyó que, a partir del análisis cuantitativo de las variaciones y su interpretación cualitativa, los jóvenes pudieron determinar la ley del comportamiento global de cambios en el movimiento de las partículas para anticipar un estado ulterior de la posición de las mismas, lo cual puede observarse en los siguientes episodios de la experimentación.

Episodio 1. Socialización de la solución de un joven de educación superior.

> … la partícula dos es la que estará más alejada en el tiempo pedido (un estado ulterior del movimiento, en el tiempo $t = 25$ segundos), ya que *conforme transcurre* cada lapso de *tiempo*, es la que *más avanza*…

Este argumento lo basó en la cuantificación de las diferencias que efectuó sobre los valores de la columna "Distancia" de la tabla de la partícula 2 (imagen 1), donde además se percibe el cálculo de las segundas diferencias.

Primeras diferencias de la "Distancia"	Segundas diferencias de la "Distancia"
2.792	
2.957	0.165
3.086	0.129
3.195	0.109

Tabla 1. Cálculo de diferencias finitas correspondiente a la variación de la posición de la partícula 2.

Episodio 2. Socialización de la solución de una joven de educación media (ver imagen 3).

> Descarté la partícula uno porque vi que *avanzaba igual* (con variación constante). Noté que la partícula tres empezó *avanzando mucho*, pero como que… (Hace una seña con la mano indicando algo pequeño) conforme avanza el tiempo *avanza poco*. En cambio la partícula dos *avanza más* conforme pasa el tiempo (hace una seña con su mano indicando que algo pequeño crece cada vez más rápido), y si sigue así a los veinticinco segundos, la partícula dos va a quedar primero que la tres.

Imagen 3. Argumentación de una estudiante de nivel medio sobre el desplazamiento de las partículas.

Del análisis a posteriori de la actividad dos se observó que los estudiantes se basaron para predecir, por un lado, en establecer códigos entre los registros numérico y gráfico de forma bidireccional y, por otro, en el entendimiento del comportamiento global de la posición de las partículas, a partir de la comparación o diferencias entre estados.

Episodio 3. Socialización de la solución de una joven de educación básica (secundaria).

> La línea gruesa es la uno (señala la primera tabla dada y la gráfica de línea gruesa), porque es recta y la uno… siempre va aumentando su *velocidad* conforme *múltiplos de tres*: tres, seis, nueve, doce, quince, son números que son *constantes* (refiriéndose a la variación); la línea punteada es la dos (señala y recorre la segunda tabla hacia abajo, al tiempo que lo hace con la gráfica de izquierda a derecha), porque primero *va más lento* que las demás, pero *después* de un tiempo parece que *las supera*,…la delgada es la tres, porque *hay un punto* donde logra

superar a todas, *como acá* (señala un valor en la segunda tabla: partícula 2), pero después la supera la dos…

Sean A, B y C las gráficas que representan el movimiento de cada partícula. El razonamiento de tal estudiante se traduce como sigue.

El estudiante realizó gráficamente una serie de comparaciones (T) en estados diferentes de tiempo, es decir, T es la transformación que permite pasar de una gráfica a otra en un mismo estado de tiempo. En la imagen 3, T_1 es la comparación entre el estado uno de C y el de B, y T_1' es la comparación del estado uno de B, y A. De igual modo, T_2 es la comparación del estado dos entre A y B, y T_2' es la comparación del estado dos de B y C.

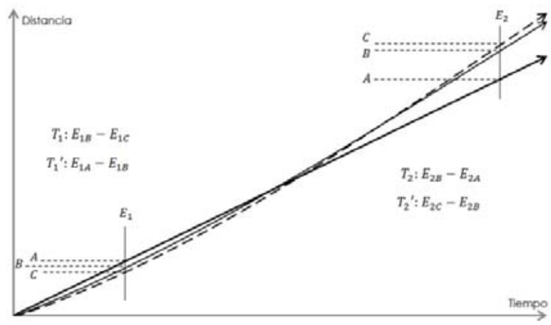


Imagen 4. Comparaciones (T) de las posiciones de las partículas en diferentes estados de tiempo

Como se mostró en los episodios anteriores, algunas de las acciones que caracterizaron la actividad predictiva de los estudiantes de diferentes niveles educativos fueron:

- Identificar lo que está variando (*conforme transcurre el tiempo avanza más: relación entre las variables distancia y tiempo*);
- Analizar la variación (*avanza constantemente, avanza igual, avanza más*);
- Reconocer la ley que describe el comportamiento del sistema (*primero avanza mucho… después avanza poco, si sigue así… llegará primero que la otra*);
- Estudio de elementos puntuales para el reconocimiento de lo global (…*hay un punto donde logra superar a todas*…);
- Desarrollo de estrategias para predecir un estado ulterior de una situación a través de comparar sus estados (…*primero va más lento que las demás*…*después las supera*…)

Así, en el análisis a posteriori se identificaron dos formas específicas de predicción:

- $E_i \xrightarrow{T} E_f$. En esta forma de predicción se conoce información sobre o del estado inicial de una situación y a partir de una serie de transformaciones se obtiene información de un estado ulterior de la misma.

- $E_f \leftrightarrow E_i \rightarrow \frac{T}{M}$. Esta forma implica que a través de comparaciones o diferencias entre los datos de distintos estados de la situación, se obtengan características o datos de su comportamiento global.

Por otra parte, el discurso verbal y la gesticulación se hicieron presentes como medios para que los estudiantes validen sus predicciones, para sí mismos y sus demás compañeros. En sus argumentos se hallaban frases o palabras que hacían referencia a la velocidad o rapidez en que variaba el desplazamiento de las partículas, pese a que en tablas y gráficas se presentaba información explícita solamente de la relación posición-tiempo de las mismas, lo cual da muestra de la aparicioón nociones como derivada, variación, función y límite.

Conclusiones

El cambio de escenario en la actividad humana y matemática de estudiantes de diferentes niveles educativos a partir de actividades predictivas posibilitó en ellos el desarrollo de recursos y herramientas de construcción de conocimiento matemático, en particular el asociado al Cálculo. Una condición social que incidió en la actividad de los jóvenes escolares radicó en la necesidad que ellos enfrentaron de conocer el comportamiento de un sistema de cambios para predecir estados ulteriores de un fenómeno de flujo: el movimiento de partículas. Se detectó además, que la argumentación gestual y discursiva se convirtió en un medio de comunicación, convencimiento y validación de las predicciones entre pares de estudiantes, que emergió de la necesidad de explicar cómo cambia lo que cambia, lo que favoreció que discutieran ideas asociadas a los conceptos función, límite y derivada.

Se divisa en este contexto la viabilidad de modificar la actividad matemática escolar en Cálculo o Precálculo, de modo que se favorezca el desarrollo de habilidades de pensamiento y construcción de conocimiento matemático, al tiempo que promover una visión de científica del quehacer escolar. Para ello se precisa diseñar actividades que impliquen tareas o acciones por parte del estudiante para identificar y relacionar variables, cuantificar cambios, plantear supuestos, formular conjeturas, generar códigos para transitar entre diferentes registros de representación, validar sus soluciones a través de la argumentación, entre otras; por encima de la reproducción y mecanización de procesos poco significativos para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alatorre, H., López, I. y Carrillo, C. (2006). El carácter evolutivo de las prácticas sociales: el caso de la predicción. En G. Buendía (Presidenta), *Memoria de la X Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 12-21, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López, J. (2010). Análisis de recursos y herramientas matemáticas empleadas por estudiantes en actividades predictivas. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.

López, J., Sosa, L., Aparicio, E. (2010). Predicción y construcción de conocimiento matemático. Un análisis clínico transversal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa*, 1(1), 2-11. Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Quijano, Q. y Navarrete C. (2000). *Calculo 1*. Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Ramos, S. (2008). El contexto, la predicción y el uso de herramientas; elementos socioepistemológicos de la matematización de la economía. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 795-805. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,551*-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN, México, D.F., México.

LA ARGUMENTACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo, Patricia Lestón, Liliana Homilka
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA (México)
crccrespo@gmail.com, patricialeston@gmail.com, lhomilka@gmail.com

Resumen. La lógica y la matemática se encuentran relacionadas. A lo largo de la historia, en distintas culturas, diversos pensadores han defendido posturas diferentes acerca de dicha relación. La matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Sin embargo, en el aula, esto no ocurre. No sólo dentro de las demostraciones formales sino en las argumentaciones informales con las cuales los estudiantes justifican los resultados a los que llegan. Se ve a diario que los alumnos presentan serias dificultades al intentar realizar argumentaciones para justificar las resoluciones que realizan. En este trabajo, se considera a la matemática como una actividad cultural. Por lo cual, es indispensable que se ubique cada forma de argumentar en el escenario sociocultural en que se genera y se desarrolla.

Palabras clave: demostración, formalización

Abstract. Logic and mathematics are undeniably linked. All through history, in different cultures, many thinkers have stood up for diverse ideas about this link. Math is considered nowadays as the deductive science above all the rest, since results can be obtained from a set of previous results bay means of inference laws only. However, this does not happen inside the classroom. Not only when studying formal demonstrations, but whenever students are trying to justify their working. Every day we see students with serious difficulties at the time of having to argument in order to justify their solving proposals. In this paper, we consider Math as a cultural activity. Therefore, it is essential for us to set each type of argument within a sociocultural scenery where it was generated and developed.

Key words: demonstration, formalization

Introducción

La matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Sin embargo, en el aula, esto no ocurre. No sólo dentro de las demostraciones formales sino en las argumentaciones informales en los cuales justifican los resultados a los que llegan. Se ve a diario que los estudiantes presentan serias dificultades al intentar realizar argumentaciones para justificar las resoluciones que realizan.

En este trabajo, se considera a la matemática como una actividad cultural. Por lo cual, es indispensable que se ubique cada forma de argumentar en el escenario sociocultural en que se genera y se desarrolla. Esto permite no solo abordar y tratar el concepto desde diferentes aspectos y enfoques, sino que favorece la reflexión sobre su implementación en el aula.

En la formación del discurso matemático escolar influyen diversos factores (Castañeda, 2009, Castañeda, Rosas y Molina, 2010). En él se refleja una ideología a través de forma de presentar y tratar objetos matemáticos en el aula (qué debe estudiarse, cómo, en qué orden, etc.). El tratamiento de las formas de argumentar y la decisión de aceptarlas o no son ejemplos de este fenómeno. Nos centraremos en analizar diferentes resoluciones y argumentaciones que pueden surgir en el aula de los distintos niveles educativos (Crespo Crespo, 2007, 2010).

De qué se habla al referirse a las argumentaciones en el aula de matemática

Asociadas a la práctica social de la demostración en matemática, se encuentran las argumentaciones. Su presencia en el discurso matemático, sin embargo, trasciende a las demostraciones, dado que la argumentación es una forma discursiva que permite convencer a otro de la veracidad de una afirmación. Es importante comprender que no cualquier discurso es argumentación. Su existencia indica proceso lógico conectado sobre un objeto determinado sobre el cual se afirma algo. El texto generado permite comunicar ideas y puede incluir argumentos verbales, numéricos, datos, gráficos, entre otras representaciones y no excluye referencias no discursivas como expresiones visuales o gestuales.

La naturaleza de esta forma de comunicarse hace que no sea sencillo distinguir lo que es argumentación de aquello que no lo es. Las argumentaciones se ponen de manifiesto en el aula en la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes y la defensa de éstas en la que pueden generarse discusiones que intenten llevar al convencimiento de los pares y docentes. También pueden surgir en procesos de colaboración entre compañeros y en la defensa de estrategias frente a situaciones problemáticas planteadas.

Algunas argumentaciones en aulas de nivel medio y superior

Un error común en la inducción completa

En la mayoría de los cursos elementales de álgebra de nivel superior, aparecen las demostraciones por inducción completa para demostrar propiedades de los números naturales. Se trata de una estrategia de argumentación deductiva presente en el discurso matemático escolar y su nombre se debe a que tiene cierta similitud con los procesos inductivos característicos de las ciencias experimentales. La aplicación usual de este método consiste en verificar para la propiedad que se desea demostrar primeramente el caso base, o sea que la propiedad es cumplida por el primer elemento de un conjunto, usualmente el cero, y luego partiendo de la suposición de que un número n la verifica (hipótesis inductiva), se prueba que también la cumple su siguiente o sucesor (tesis inductiva). A esta etapa del proceso, se la denomina paso inductivo. De esta manera y a partir de los dos pasos anteriores, se afirma que todos los elementos del conjunto considerado a partir del primero, verifican la propiedad.

Se presenta a continuación un ejemplo en el que por no comprender el significado de la inducción completa, un estudiante de ingeniería no responde adecuadamente a las preguntas realizadas y no puede tampoco identificar cuál ha sido su error, a pesar de comprender que algo en su desarrollo ha sido inadecuado. La demostración del caso base en una demostración por inducción completa, suele ser sencilla y en muchas oportunidades, trivial. Los estudiantes, se concentran normalmente en la realización del paso inductivo, ya que es el que les puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el caso base y su significado e importancia.

En una evaluación de estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería informática de la materia Matemática Discreta, en la que se aborda el tema de inducción completa, se presentó el siguiente enunciado:

Considere la proposición p(n):

"$n^2 + 5n + 1$ es par"

a) Demuestre que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N y extraiga conclusiones

b) ¿Para qué valores de n es p(n) efectivamente verdadera? ¿Qué puede concluir?

La idea del problema era determinar si los estudiantes comprendían que la verificación del paso no garantiza la veracidad de una proposición e incluso mostrar que aún si el paso inductivo puede demostrarse, la propiedad puede no ser válida para ningún caso.

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución:

a)

Hi) Supongo que vale $n^2+5n+1 = 2k \to$ par.

Ti) Probemos que $(n+1)^2+5(n+1)+1 = 2h$

Dem) $(n+1)^2+5(n+1)+1 =$

$\underline{n^2}+2n+1+\underline{5n}+5+\underline{1} =$

$(\underbrace{n^2+5n+1})+2n+1+5 =$

$2k + 2n+6 =$

$2k + 2n+2.3 =$

$2(\underbrace{k+n+3}_{h}) = 2h.$

∴ Por el Principio de Inducción Completa:

"n^2+5n+1 es par"

b) $P(1) \Rightarrow 1 + 5 \cdot 1 + 1 = 7 \rightarrow$ no

$P(2) \Rightarrow 4 + 5 \cdot 2 + 1 = 15 \rightarrow$ no

$P(3) \Rightarrow 9 + 5 \cdot 3 + 1 = 25 \rightarrow$ no

$\vdots$

$P(10) \Rightarrow 100 + 5 \cdot 10 + 1 = 151 \rightarrow$ no.

$\vdots$

$P(100) \Rightarrow 10000 + 5 \cdot 100 + 1 = 10101 \rightarrow$ no.

Encontré números que no cumplen la propiedad pero el paso inductivo lo demostré (no encuentro cuál es el error de la demostración de la parte a).

El esquema de argumentación por inducción completa está validado matemáticamente. Este hecho hace que ante un error cometido se dificulte en los estudiantes la posibilidad de dar explicaciones que los ayuden a convencer a otros de que la argumentación es correcta. En esta respuesta, puede verse que el estudiante no tiene dificultades en la demostración del paso inductivo y a partir de él, afirma que la propiedad es verdadera. Sin embargo, al comenzar sus intentos de verificación de la propiedad para distintos casos, ve que no se cumple, saltea números y busca para otros números. Afirma en ese momento que encontró números para los que no se verifica la propiedad. El estudiante, sin embargo, no es capaz de identificar que el problema es que no ha verificado el caso base y que por lo tanto la demostración del paso inductivo no garantiza el cumplimiento de la propiedad para todos los números naturales, e incluso en este caso no se verifica para ningún número natural la propiedad. No se está aplicando correctamente la estrategia de demostración por inducción completa, el caso base es fundamental para garantizar el cumplimiento de la propiedad en un conjunto bien ordenado.

La no consideración exhaustiva de casos

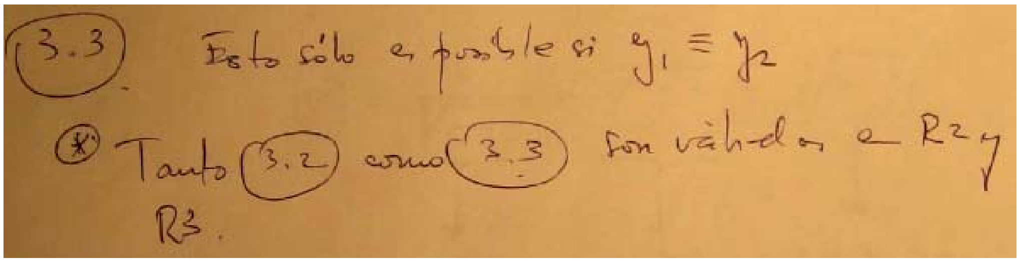
Se presenta un problema que se ha trabajado con estudiantes del ultimo año del profesorado de matemáticas; en las respuestas que dieron sobre el mismo, se evidencian dificultades de diferente naturaleza que presentan al momento de elaborar un discurso que muestre los procedimientos realizados y las respectivas explicaciones acerca de los mismos.

El problema es:

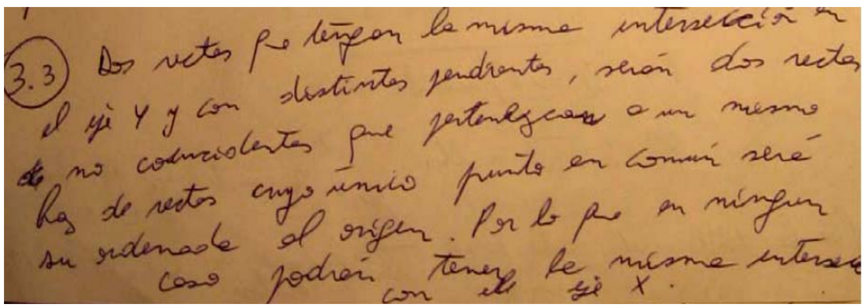
Resuelve el siguiente problema y justifica los procedimientos y conceptos utilizados

> *Si dos rectas tienen la misma intersección en el eje y, pero diferentes pendientes, ¿En qué casos se puede tener la misma intersección en el eje x? Explica.*

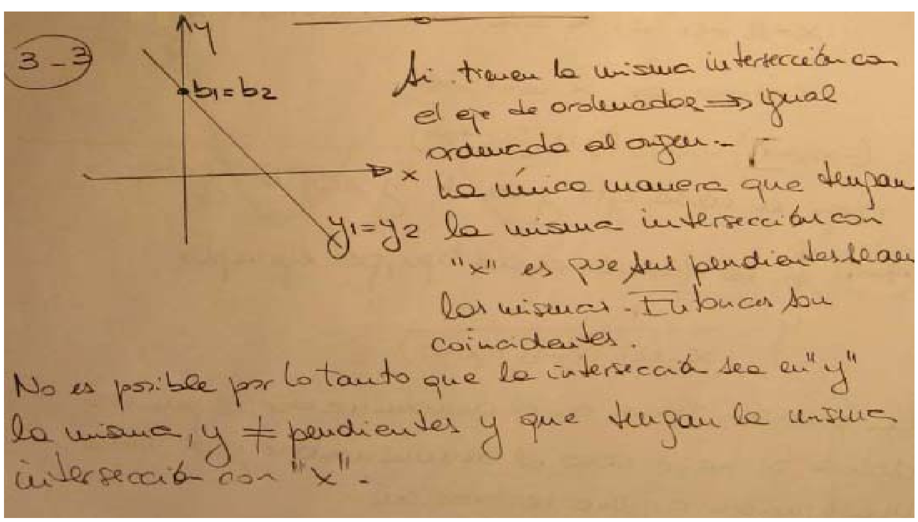
A continuación se presentan las respuestas dadas por cuatro estudiantes:



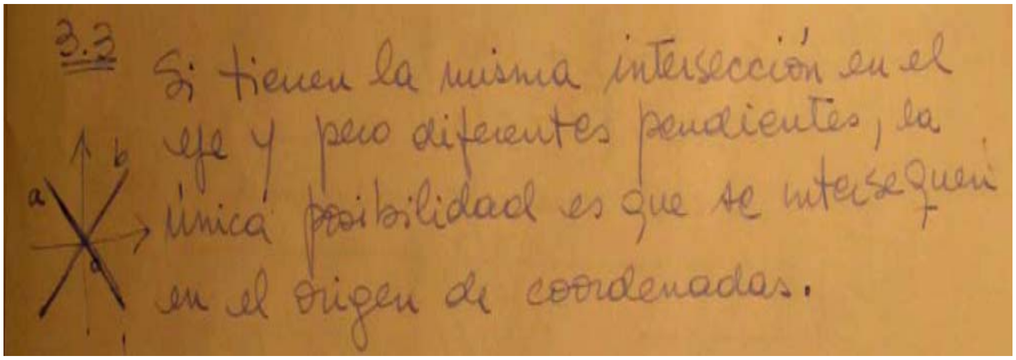
En este caso, el estudiante A no considera los datos del problema, ya que al ser coincidentes, no se cumple con la condición que las pendientes sean distintas.



El estudiante B, centra su respuesta en el haz de rectas que pasan por la ordenada al origen; sin considerar el caso en que la ordenada al origen sea a su vez la raíz de las rectas.



El estudiante C para resolver el problema se apoya en una figura de análisis que lo lleva a proponer una argumentación en contra de las condiciones del problema.



El estudiante D basa su explicación a partir del ejemplo gráfico y contemplando solo las rectas prototípicas de pendientes 1 y -1; sin considerar las otras rectas que pertenecen al mismo haz de recta, en el que los coeficientes pueden ser cualquier número real.

Conclusiones

Los ejemplos presentados muestran las dificultades que tienen los estudiantes al intentar elaborar un discurso para explicar y justificar las resoluciones que realizan en las clases de matemática.

Se requiere trabajar sistemáticamente, con la finalidad de que los alumnos sientan la necesidad de construir un discurso en el que se manifieste un proceso lógico encadenado sobre un objeto matemático específico sobre el cual se afirma algo.

Los docentes debemos reflexionar acerca de cómo y por qué construyen una opinión fundada a partir de datos presentes en una situación dada. Los errores no son sino manifestaciones de las maneras en que están comprendiendo los procesos y resultados a los que llegan y la evidencia que proponen no puede perderse en el salón de clase si pretende resignificarse el discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379 - 1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castañeda, A. Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa*, 12(44), 3-18

Crespo Crespo, C. (2005).El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. *La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2010). Los diálogos entre estudiantes en el aula de matemática. Su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23. (en prensa). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. En *Épsilon*, 26, 15-30.

CONCEPCIONES DEL ESPACIO GEOMÉTRICO Y SU RELACIÓN CON EL INFINITO

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
patricialeston@gmail.com

Resumen. El concepto matemático de infinito es habitualmente relacionado con el trabajo de Cantor, quien lo formaliza y lo hace aceptable para la comunidad científica. Sin embargo, la inclusión de este concepto en discusiones de la ciencia moderna es anterior, aún cuando en la matemática se rechazaba su uso. El estudio del espacio hizo entrar a físicos y matemáticos en controversias acerca de la extensión del mismo, varios siglos antes del trabajo de Cantor. Desde Nicolás de Cusa hasta Leibniz y Newton pueden hallarse idas y vueltas en la construcción de una noción a la cual aún le quedarían algunos siglos para ser aceptada y en los cuales se observan algunas respuestas que surgen en los estudiantes en el aula de matemática.

Palabras clave: infinito, historia de la matemática, infinito espacial

Abstract. Within Mathematics, infinite is a concept generally related to Cantor's work, who was responsible of formalizing and making it acceptable for the rest of the scientific community. Nevertheless, this concept was part of the discussions, way before he was part of the picture, even though mathematicians neglected its use. The study of the space made physicists and mathematicians collide around the extension of space, centuries before Cantor's work. Since Nicolás de Cusa to Leibniz and Newton, it is possible to find the roundabouts in the construction of infinity, concept that still needed years to go by until it became accepted. Along the history of the concept it is often seen some answers similar to the ones students have at school.

Key words: infinite, history of mathematics, infinity of the space

Introducción

La matemática escolar es un conjunto de nociones y procesos que la comunidad de la cual forma parte esa escuela considera de valor para la cultura del grupo, para su crecimiento como sociedad y la validación de lo que es un ser "educado". Esa matemática escolar es, en la mayoría de los casos, el producto de lo que a lo largo de historia y políticas educativas se ha ido constituyendo como cuerpo de saber autónomo (Cantoral, 1995). Sin embargo, esas "idas y vueltas" en la constitución de la matemática escolar hacen que en algunos casos se pierda percepción de lo que se está haciendo o las razones o motivos que hacen que la escuela haga lo que hace. Además de esto, ocurre también que la escuela en su constitución como institución se ha ido alejando del grupo o comunidad de la cual es resultado, perdiendo de vista lo que en la comunidad se construye.

Dentro de la matemática escolar, el cálculo se ha constituido como uno de los ejes centrales de la formación del ciudadano. Nociones como límite, derivada, variación, función y muchas otras se entienden en la actualidad como imprescindibles dentro del discurso matemático escolar. Esas nociones y otras se apoyan sobre otros elementos, la mayoría de los cuales se discuten y presentan a lo largo de los años previos de educación escolarizada. Sin embargo, el infinito, noción sobre la cual se apoyan la mayoría de estos conceptos, no forma parte de la matemática escolar, aún cuando aparece en distintos momentos del discurso matemático escolar. Este concepto es, aunque utilizado, olvidado como elemento a ser construido escolarmente.

En esta investigación tomamos como hipótesis que la existencia del infinito como elemento sociocultural, su presencia como *evidencia familiar* (Cantoral, 1995) que sirve de punto de partida para construir otras nociones; ha permitido que la escuela asuma que esa construcción no escolar que se ha hecho es suficiente y compatible con lo que la escuela necesita, lo que no siempre es cierto.

Tomamos como evidencia para esta hipótesis, las características del infinito intuitivo que se presentaron en Lestón (2008) que, en general, distan mucho de lo que es el infinito matemático. Sin embargo, esa distancia no es contemplada por la escuela, lo que creemos provoca que aparezcan conflictos en las aulas cuando los docentes hablan o utilizan al infinito: hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan.

Para el caso del infinito, la escuela toma una postura filosóficamente distinta a la que le es habitual, rechazando todo lo que viene de la cultura popular: no sólo acepta la definición o caracterización que para el infinito la comunidad ha construido, sino que, sin averiguar de qué se trata, la asume como matemáticamente válida. La matemática educativa como disciplina ha comenzado a reconocer lo que ocurre con este tipo de nociones y formas de accionar, y está intentando dar respuesta a estas cuestiones.

> Puede decirse que la problemática de estudio de la matemática educativa se centra […] en el análisis de los fenómenos que ocurren cuando el saber matemático, que se construye fuera de la institución escolar, en escenarios académicos o no, es introducido y se desarrolla en el sistema educativo. (Castañeda, Buendía, Crespo Crespo, Lezama, Molina, Montiel, Martínez, Rosas y Sánchez, 2008, p.5)

Se reconoce entonces que el saber matemático es producto de diversos escenarios: académicos y no académicos. El infinito al que llamamos intuitivo es una construcción cultural, producto de un escenario sociocultural no académico, que, aunque relacionado con una noción matemática de incontable, inconmensurable o, simplemente, sin fin; es distinto al infinito matemático, producto de un escenario académico.

La socioepistemología como marco para esta investigación

Esa mirada que estamos planteando, en la cual podemos ir y volver de lo académico a lo no académico, hace que necesitemos de un marco teórico que sostenga la idea de que lo que no es académico en sí mismo también es valioso, que las construcciones que se dan por fuera de la escuela también deben considerarse al momento de comprender lo que sucede en las aulas, que respete a lo social de la construcción de conocimiento como algo que debe ser atendido.

Bajo esta postura es que se inscribe a esta investigación en un referente teórico que contempla a "lo social" como influencia fundamental para la construcción de conocimiento: la socioepistemología.

> Cuando se trata de indagar las condiciones de creación y desarrollo de las ideas matemáticas, así como las circunstancias sociales o culturales que posibilitan su construcción o los factores extra-matemáticos que moldea y permea el conocimiento, una epistemología en el sentido tradicional no alcanza a ofrecer explicaciones sobre este tipo de preguntas de naturaleza sociocultural. Se requiere entonces de un acercamiento epistemológico sensible a reconocer, entre otras; la naturaleza del conocimiento, los procedimientos de comunicación hacia los colectivos, así como los mecanismos por los que una cultura ejerce influencia en la formulación de ese conocimiento (Castañeda, 2008, p. 503)

Castañeda (2008) presenta así a la socioepistemología, que reconoce no sólo la naturaleza del conocimiento matemático sino su pertinencia y su pertenencia al seno de una comunidad. Sin una comunidad, sin una cultura, sin "lo social", la matemática pierde sentido.

El origen del infinito como concepto matemático

Lo que en este momento de la investigación estamos tratando de comprender es cómo el infinito, que se origina como una noción filosófica o religiosa, se constituye en una noción matemática. Lo que queremos comprender es cuál fue el proceso que hizo de puente entre ese infinito "muy grande" que se desprende de lo que adquirimos a través de los sentidos (que nosotros hemos llamado intuitivo) y el infinito de la matemática, de la cardinalidad, de Cantor, construido de acuerdo a las leyes de la matemática. Porque si logramos detectar ese proceso, podemos entonces comprender la evolución del concepto y podemos intentar algo en nuestras aulas que nos permita acercar a nuestros alumnos al infinito matemático, tomando como base ese infinito intuitivo que ya traen. Para esto, nos planteamos un recorrido histórico del concepto desde la antigüedad hasta Cantor, y la escuela actual. En este documento, sólo presentamos una parte de este estudio.

Puede distinguirse ya desde la antigüedad en Occidente, una dicotomía en el tratamiento que se hace de este concepto: la aceptación del infinito como propiedad asignada al espacio, con lo cual podría aceptarse su existencia o el rechazo del mismo como elemento, cuya sola existencia se sustenta en la divinidad, y no es posible asumirle a ninguna otra cosa.

> La dificultad que plantea el infinito radica, así pues, en su inagotabilidad: lo que es infinito (Aristóteles hace referencia al ejemplo del conjunto de números) no puede estar nunca presente en su totalidad en nuestro pensamiento. (Zellini, 1991, p. 13)

En esta época también puede reconocerse otra distinción en relación al infinito: el infinito potencial, como posibilidad por adición o división hasta el infinito, y el infinito actual, como realidad completa. Aristóteles creía, como se ha presentado anteriormente, que no existe el infinito separado de aquello que podemos vincular con él, al igual que el número existe sólo en función de aquello que lo representa. Para él no hay posibilidad de que exista el cuerpo infinitamente grande (De Mora, 2009). Sin embargo, no fue Aristóteles el único que analizó estas cuestiones, y muchos de los griegos que estudiaron el infinito no acordaban con él. Sin embargo, las ideas aristotélicas fueron las que más fuertemente llegaron a Occidente y es por eso que no es sino hasta el fin de la Edad Media que estas cuestiones se volverían a discutir fuertemente.

Es Nicolás de Cusa uno de los primeros a los cuales se le adjudica la declaración de un universo infinito. Sin embargo, no es esto del todo cierto, en alguna medida, tanto él como Descartes, guardan para Dios ese calificativo. Pero a pesar de esto último, hay ideas en de Cusa que permiten vislumbrar la necesidad de romper con los límites del Universo y aceptar que su extensión es infinita, al menos para el entendimiento humano. "Su universo no es infinito (infinitum), sino "interminado" (interminatum), lo cual significa no sólo que carece de fronteras y no está limitado por una capa externa, sino también que no está "terminado" por lo que atañe a sus constituyentes; es decir, que carece expresamente de precisión y de determinación estricta". (Koyré, 2008, p. 12)

Ahora bien, si Nicolás de Cusa no nos dice que el Universo es infinito, por qué iniciamos el relato con él. El gran aporte de este matemático fue su ruptura del Universo cerrado, el permiso para poder entender que no hay nada que actúe de límite o frontera; y con eso dio el primer paso para abrir la posibilidad de su real infinitud. Aún así, se cuida de declararlo de manera abierta; "aunque el mundo no es infinito, con todo no se puede concebir como finito, ya que carece de límites entre los que se halle confinado" (Koyré, 2008, p. 16)

Fue necesario esperar a que Giordano Bruno se pronunciara abiertamente la creencia de un espacio infinito. Él no se queda con la dificultad de asignarle límites, sino que afirma sin lugar a duda su infinitud.

> Hay un único espacio general, una única y vasta inmensidad que podemos libremente denominar Vacío: en él hay innumerables globos como este en el que vivimos y crecemos; declaramos que este espacio es infinito, puesto que ni la razón, ni la conveniencia, ni la percepción de los sentidos o la naturaleza le asignan un límite. (Koyré, 2008, p. 43)

Ni la razón, ni la conveniencia ni la percepción. Ese espacio del que nos habla Bruno, que es infinito porque no hay motivo para que no lo sea, es el que dará inicio a un proceso que convierte al infinito en entidad científica, dejando de lado su naturaleza religiosa y casi mágica. Es la "extensión" del espacio en el cual vivimos, y como tal, debe ser considerada parte de aquello que se estudia desde la astronomía, de lo que la matemática intenta modelizar, de lo que la física observa para explicar las leyes de la naturaleza. Ese quiebre de pronunciamiento sin dubitación cambia la historia de la matemática, incorporando a los elementos matematizables al infinito como la verdadera extensión del Universo.

Sin embargo, no es hasta que Newton retoma las nociones de Bruno, que finalmente se acepta que el espacio, que nuestro universo, es en sí infinito. La manera en que logra esta empresa es a través de las propias nociones que nos llegan como distinguidas de su obra: la separación de lo relativo y lo absoluto, el principio de inercia como motor del mundo.

> De ahí que los movimientos enteros y absolutos no se puedan determinar de otro modo que mediante lugares inmóviles. Por esa razón refería yo antes aquellos movimientos absolutos a lugares inmóviles y los relativos, a lugares móviles. Ahora bien, no hay otros lugares inmóviles que aquellos que, de infinito a infinito, retienen todos la misma posición dada unos respecto a otros y, bajo este supuesto, deben permanecer siempre inmóviles, constituyendo así el espacio inmóvil. (Newton citado en Koyré, 2009, p. 155)

Esos lugares inmóviles de los que Newton habla son lo que Giordano Bruno definía como espacio infinito: es esa extensión completa y absoluta que permite que los lugares móviles (aquellos que ocupan los cuerpos en distintos instantes) sean observables, medidos y distinguidos. Lo que Newton logra con su obra es lograr finalmente la "explosión de la esfera" y la definitiva geometrización del espacio.

Y es subidos a los hombros de Newton que otros matemáticos luego intentarán otras explicaciones para la afirmación newtoniana de un espacio y tiempo verdaderamente infinitos, que cuentan además con infinitos mundos girando alrededor de infinitas estrellas soles, como postulaba Bruno. Raphson, por ejemplo, intenta una justificación axiomática de un espacio infinito, que tal vez, haya permitido hacer sentir esta noción "más científica", aunque seguramente no hubiera convencido a nadie si no estaban ya convencidos por las ideas de Newton.

Bolzano, como se dijo al inicio de este apartado, no propone una definición para este infinito matemático, producto de muchas construcciones que se dieron a lo largo de la historia de la matemática misma. Sin embargo, al menos aporta condiciones que ajustan la posible definición de este concepto. Plantea qué cuestiones es necesario atender, qué argumentos pueden esgrimirse en contra de aquello que se propone como posible salida para el embrollo en que los matemáticos estaban metidos. Era necesaria una definición, una teoría que explicara cómo tratar al infinito, desde dónde mirarlo, cómo estudiar lo que se hacía y decía sobre él. Es en esas condiciones que el trabajo de Cantor aparece, y aún cuando fue negado en su inicio, logró resolver elegantemente la situación planteada. Queda aún por ver, sin embargo, qué relación existe entre este infinito que Cantor caracteriza tan bien, y aquel que fue respuesta a una pregunta que llegó hasta Newton en relación a la extensión del Universo.

Es dentro de su plan de construir una teoría rigurosa de todo lo orgánico, lo que cuenta con armonía y consonancia, que Cantor se encuentra en la necesidad de la creación de nuevas herramientas matemáticas, lo que hoy conocemos como la teoría de conjuntos.

> Cantor empezó estudiando los dos conjuntos de puntos más interesantes: el conjunto de los números racionales y los números reales. Buscaba diferencias entre los dos que fueran relevantes en relación con el hecho de que los números reales son continuos mientras que los racionales no lo son (Lavine, 2005, p. 56).

Su interés provenía del análisis y no conocía ningún conjunto más grande que el conjunto de los números reales.

> Precisamente entre 1882 y 1885, años clave por la riqueza y profundidad de las nuevas ideas que publicó, Cantor elaboró algunas hipótesis sobre la constitución de la materia y del éter, explotando su nuevo análisis conjuntista del continuo, e introduciendo ideas novedosas en teoría de conjuntos de puntos. Su pretensión era desarrollar una gran teoría unificada de fuerzas físicas y químicas, con vistas a aplicarla al reino biológico y así avanzar en el proyecto organicista. (Ferreirós, 2003, p. 177)

El siglo XIX fue un período muy productivo en la historia de la matemática, en el que se vieron avances fundamentales en campos como el de las geometrías no euclideanas y la aritmetización del análisis. Ésta última llevada a cabo por Weierstrass, Dedekind y otros, con el objetivo de quitar a la intuición dinámica y geométrica (que se creía era la causa de las paradojas), reduciendo el campo del cálculo desarrollado en el siglo XVII por Newton y Leibniz, al campo de los números. (Núñez, 2003)

En este proceso, fue esencial contar y ordenar elementos como números y puntos. El desarrollo de una teoría para los números transfinitos tanto en su aspecto cardinal como ordinal debió enfrentarse a visiones fuertemente arraigadas no sólo por resultados que en muchas oportunidades contradecían a la intuición, sino a aquellas que impedían el uso del infinito actual y su consideración como un objeto matemático sobre el que era posible elaborar una teoría científica. Actualmente Cantor es reconocido como el creador de un sistema matemático en que el que los números de magnitud infinita definen una jerarquía de infinitos con una aritmética muy precisa, dando un significado matemático a la idea de que hay infinitos más grandes que otros (Núñez, 2003), pero en su época se trató de una tarea sumamente atacada y cuestionada por la comunidad matemática que actuaba en su mismo escenario sociocultural.

> La idea de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de una magnitud que se incrementa ilimitadamente y en la forma estrechamente relacionada con las series infinitas convergentes […] sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma definida del infinito absoluto me fue impuesta lógicamente, casi contra mi voluntad puesto que es contraria a las tradiciones que yo había llegado a venerar en el curso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas. (Cantor, citado por Lavine, 2005, p. 52)

Conclusiones

Creemos a partir del análisis que se acaba de presentar que hay dos infinitos que hay que distinguir y que responden, dentro y fuera de la matemática, a cuestiones diferentes: el infinito como distancia y el infinito como cantidad. Al primero llega Newton mirando el espacio, ese infinito es dinámico, tiene que ver con el movimiento, con el tiempo, con lo que se aleja… El otro, ese es el de Cantor y Bolzano y responde a ¿cuántos? en lugar de ¿hasta dónde? Este infinito, el de la cardinalidad, es estático, ese justifica la existencia de conjuntos que son en sí infinitos, y ese es el que veremos más adelante, se construye en la educación superior. Lo que nos preguntamos es: ¿es éste último el que nos permite entender las cuestiones relativas a los problemas que en las aulas se detectan en la enseñanza del cálculo? La idea de límite, de variación, descansa sobre un infinito, pero no es sobre el de Cantor y Bolzano, sino sobre el de Newton, que se mueve y nos muestra los cambios de lo que varía. El problema es que las funciones que llevamos a las aulas son funciones que responden a las definiciones conjuntistas de Cantor.

Tenemos entonces un infinito que está quieto, que es el cardinal de un conjunto y que se construye en la educación superior. Ese es el que está formalizado y el que nos aseguran en nuestra formación como profesores que es el infinito matemático. Pero encontramos que ese infinito, que los futuros profesores han logrado construir, no es el que usan al momento de pensar en límites o en funciones. ¿Por qué? Porque en el aula no se precisa de ese último concepto sino aquel de Newton, el de quienes entendían a las curvas como representación de lo que cambia. Pero ese infinito no lo tenemos formalizado ni es elemento de construcción en la formación docente, menos aún en la escuela media. ¿Alcanzaría con hacerlo aparecer en las clases de cálculo? Creemos que no, mientras se mantenga la aproximación que hacemos de las funciones en nuestros cursos. El cambio que necesitamos es mucho más profundo, el infinito no va a surgir sólo porque así lo pretendamos. Como todo, tiene que ser respuesta a una pregunta, idealmente, una pregunta que se hagan quienes pretendamos que lo construyan.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1995) Matemática Educativa. *Pedagogía 10 (5),* 4-13

Castañeda, A. (2008). Desarrollo de la noción de graficación en la antigüedad. En C. Crespo Crespo, (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 21, pp. 503-508. México.

Castañeda, A., Buendía G., Crespo, C. Lezama, J., Molina, J., Montiel, G., Martínez, G., Rosas, A. y Sánchez, M. (2008). *Las líneas de investigación en el Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN.* Documento interno, Prome-Cicata-IPN. México.

De Mora Charles, M. (2009). Finito o infinito: una cuestión de gusto. *Ontology studies 9,* 43-54

Ferreirós, J. (2003): Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura. En J. Montesinos, J. Ordóñez y S. Toledo (Eds.), *Ciencia y Romanticismo.* Tenerife: Fundación Orotava de Historia de la Ciencia

Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Nuñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. En B. Baaquie y P. Pang (Eds.) *Metaphor and Contemporary Science*, (pp. 49-72). Singapur: National University of Singapore.

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela

¿HACIA DÓNDE VAMOS? REFLEXIONES SOBRE EL QUEHACER DEL MATEMÁTICO EDUCATIVO

Daniela Reyes-Gasperini, Rubén Alejandro Gutiérrez Adrián, Adriana Moreno Valdez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
dreyes@cinvestav.mx, rgutierrez@cinvestav.mx, amorenov@cinvestav.mx

Resumen. Dado que la Matemática Educativa es una disciplina relativamente naciente, suelen surgir, sobre todo en quienes recién incursionamos en dicho campo, las preguntas de "¿Cuál es el *quehacer* del matemático educativo? ¿Hacia dónde vamos?" Ante esta situación, el presente trabajo pretende reflexionar sobre el camino transcurrido, el que actualmente estamos transitando y el posible camino futuro, con base, principalmente, en las reflexiones que se obtuvieron de una mesa de discusión realizada con reconocidos investigadores del campo educativo en el "Seminario de los Jueves" del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Asimismo, se retomarán algunas de las experiencias empíricas en las cuales incidió la disciplina, algunas en las que está trabajando y se conjeturarán las perspectivas futuras en las que se propone trabajar

Palabras clave: matemática educativa, quehacer, labor

Abstract. Since the Mathematics Education is a relatively new discipline, it generally appears, especially in those who are new, the questions of "What is the job of mathematical education worker? Where do we go? "In this situation, this paper aims to reflect on the path we have covered in the past, the one we are currently traveling and the possible way forward, based primarily on the reflections that were collected from a roundtable discussion held with recognized researchers in the field of education in the "Seminar on Thursday," Center for Research and Advanced Studies of IPN. Additionally, we will resume some of the experiences which influenced the empirical discipline, some in which we are working and we will conjecture future prospects in the proposed work.

Key words: mathematics education, jobs, work

Introducción

Es bien conocido por la comunidad educativa que existe una preocupación social acerca de la enseñanza de las matemáticas, preocupación que no sólo representa una problemática actual sino que su desarrollo y sus orígenes se encuentran a la par de la construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, puede distinguirse una ruptura que, de manera progresiva, ha logrado una evolución en la forma de ver los problemas ligados a la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia, dando surgimiento a lo que hoy conocemos como la disciplina de Matemática Educativa, Mathematics Education o Didactique des mathématiques.

Con el objetivo de atender las problemáticas surgidas en el campo de la Matemática Educativa, se han ido desarrollado, como es de esperarse, una gran variedad de investigaciones con diferentes perspectivas teóricas que se han propuesto entender, atender y explicar los fenómenos didácticos que suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza, lo cual obliga a una serie de modificaciones que afectan de manera directa a su estructura y a su funcionalidad, afectando también las relaciones que se establecen entre profesor y estudiante (Cantoral y Farfán, 2003).

Entender cuál fue el camino transcurrido por parte de los investigadores de Matemática Educativa desde sus comienzos, hasta las intervenciones actuales que está teniendo la oportunidad de afrontar, nos permite, someramente, hacer una proyección de "hacia dónde vamos". Para ello, se propuso realizar una mesa de discusión titulada "Hacia dónde vamos. Reflexiones sobre el quehacer del matemático educativo", con el fin de conocer las experiencias, trabajos y reflexiones de cuatro reconocidos matemáticos educativos mexicanos.

Si bien, los ponentes que asistieron a la mesa de discusión responden a distintos marcos teóricos, las reflexiones del presente trabajo se llevarán a cabo desde la Teoría Socioepistemológica. Esto es producto de concebir a la problematización del saber como el medio adecuado para lograr el objetivo de la educación de la matemática, es decir, localizar y analizar el uso del saber matemático (Montiel, 2005).

Haciendo historia con matemática educativa y la socioepistemología

Ante la Reforma Educativa de la década de los ´70s en México, impulsada por la Secretaría de Educación Pública (SEP), se le solicitó a un grupo de investigadores del Departamento de Matemática del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Unidad Zacatenco, que elaboraran los siguientes materiales: "(a) el currículum nacional de primaria requerido para la enseñanza de las matemáticas, (b) los planes y programas para el ciclo educativo de primaria y para cada uno de sus grados, (c) la redacción de los textos para ese ciclo escolar." (Hitt Espinosa, 2001, p.17). Éstos se consideraron de gran innovación dentro del sistema educativo, ya que sus fundamentos radicaron en cuestionamientos sobre cuáles eran los problemas de aprendizaje de los conceptos específicos de la matemática y la necesidad del estudio de los mismos.

Es en 1975, en México, cuando se funda la Sección de Matemática Educativa (SME) en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional al interior del Departamento de Investigaciones Educativas (DIE). La SME se consideraba como autónoma del DIE, y recién a principios de 1995 la SME se convierte en Departamento de Matemática Educativa (DME). Cabe mencionar que el nombre de "Matemática Educativa" se fundamenta en el enfrentar la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la matemática misma (Matemática Educativa…, 2009). Desde sus comienzos, este grupo de investigadores buscaba una aproximación a la solución del problema nacional sobre la enseñanza de las matemáticas, lo cual refleja que el interés radicaba en la mejora del Sistema Educativo Nacional a nivel matemático, bajo la lógica de que la intervención en el Sistema a través, en este caso, de libros de texto con base en investigación al respecto, era fundamental.

La Matemática Educativa "se ocupa de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 29), es decir, estudia todos aquellos fenómenos que tengan como fin el aprendizaje ligado a saberes matemáticos, ya sea en el en el aula, como así también en el cotidiano, en un programa de títeres o en un taller de modelación, entre muchos otros ejemplos; busca entender, atender y, luego, predecir las problemáticas que surgen en los procesos educativos contextualizándose en el continente latinoamericano. Esto no significa que no considere, reconozca, discuta y/o se retroalimente con las teorías ya reconocidas por la comunidad como la Mathematics Educations -anglosajona- o la Didactique des Mathématiques -europea-, entre otras, sino que rompe con la tradición de importar conocimiento (Silva, 2010a) y comienza a generar uno propio y contextualizado. Es importante aclarar que, desde un tiempo a esta parte, nos reconocemos todos miembros de una misma comunidad de conocimiento, entendiendo a ésta, como aquella que tiene la intención de construir conocimiento en torno a problemáticas específicas.

La evolución de la Matemática Educativa que es desarrollada y comentada por Cantoral y Farfán (2003), enuncia que en sus comienzos, la problemática de la disciplina se centró en el diseño de libros de texto y material didáctico para profesores y estudiantes que sea más accesible que los tradicionales, a cargo de los profesionales de matemática, sin estudiar profundamente la cultura escolar. En ese momento, se soslayaron los aspectos cognitivos, afectivos y socioculturales que involucraban a los agentes del sistema didáctico. Luego, se incluyó explícitamente el aprendizaje del estudiante como factor central de los diseños realizados, como así también, el papel desempeñado por el docente. Aunado a esto, Freudental comienza a preguntarse *¿Cómo aprenden las personas? ¿Cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje?* Lo que conduce a la incorporación de investigaciones de observación y descripciones sistemáticas de los procesos de aprendizaje. Posteriormente, se cuestiona que "la forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 33), asegurando que el estar en una institución (considerando a la institución como la familia, la clase, la escuela o el sistema educativo, entre otros) provoca matizar los procesos de pensamiento. A continuación, estudiaron los fenómenos didácticos de manera sistémica, considerando los tres polos: el del saber, el de quien aprende y el de quien enseña en un medio determinado; pero reconocieron que aun pensando en situaciones que signifiquen aquello que le dio origen al conocimiento matemático, éste puede no ser propicio para ser introducido en el aula. Es por esto que, más tarde, se planteó el estudio sistémico de la formación del conocimiento desde una perspectiva social, es decir, se puso énfasis en la construcción social del conocimiento. Para ello, fue necesario cambiar la centración: dejar de observar al concepto matemático en sí y comenzar a observar las prácticas que producían o favorecían la necesidad de ellos.

Así es cómo, desde la necesidad de contemplar las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento, a saber: "su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 36), surge la Teoría Socioepistemológica, la cual fue presentada por primera vez en 1997 en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav-IPN en México.

La identidad y el quehacer del Matemático Educativo

Ante el cuestionamiento de cuál es la identidad y el quehacer del Matemático Educativo, se comenzó por caracterizar cuáles son los roles que podrían ocupar en la comunidad, a saber: profesor – investigador; profesor; investigador; gestor de políticas educativas; y se cuestiona si deben trabajar dentro y/o fuera de la institución educativa, o bien, si deben poseer un espacio particular, por ejemplo.

Se considera que cada matemático educativo, tendrá una formación particular dependiendo de su historia personal y la época en la cual se formó (temporalidad); el proceso por el cual transcurre todo investigador cuando se compara con otras disciplinas y va construyendo lo que a él lo caracteriza (relacional) y por último, el lugar en el cual se ha formado, brindándole diferentes relaciones y experiencias que lo caracterizan (formación) (Cárdenas, 2004; Navarrete, 2008). Esto, que parece ocurrir individualmente en cada matemático educativo, es producto de la construcción social y la consolidación, de la identidad y la disciplina. Silva (2010a) hace evidente este hecho al enunciar que Latinoamérica cuenta con una escuela de pensamiento que construye su propio conocimiento teórico, genera órganos (ejemplo: CLAME) y proyectos académicos para su difusión (ejemplo: Relime) y la formación de investigadores de acuerdo a las respectivas líneas de investigación de la disciplina. Asimismo, el autor refiriéndose a la identidad en tanto reconocimiento de una realidad particular latinoamericana, la cual se debe entender y atender, enuncia:

> La importancia de la identidad en la disciplina radica en que permite tomar decisiones, con base en nuestra realidad cultural y social, respecto al estudio de fenómenos vinculados con la necesidad de aprender y poner en juego un saber matemático, para así democratizar su aprendizaje entre la sociedad, nuestra. (Silva, 2010b, p.975).

Ahora bien, una vez que hemos reconocido que la disciplina pretende incidir en las prácticas escolares desde una perspectiva sistémica, más apegada a las realidades objetivas en las que viven e interactúan los actores principales del sistema didáctico: el alumno, el profesor y el saber matemático escolar puesto en juego, no sólo dentro del contexto particular de la clase; es que se reflexionará sobre los *quehaceres* del matemático educativo, entendiendo por *quehacer,* a la vida profesional en la cual se ha incursionado con el fin de atender a dicha problemática.

Mesa de discusión: el quehacer del matemático educativo

Desarrollo de la mesa

En la mesa de discusión titulada “Hacia dónde vamos. Reflexiones sobre el quehacer del matemático educativo” realizada en el Seminario de los Jueves, asistieron como ponentes cuatro investigadores con distintos quehaceres y pertenecientes a diversas instituciones. Este seminario es autogestionado por estudiantes del Nivel Superior del DME y coordinado por un investigador. La conformación de la mesa consistió en cuatro ponentes dos hombres y dos mujeres, todos de ellos doctores en matemática educativa. Al momento en el que se llevó a cabo la mesa de discusión todos ellos laboraban en México. Respecto de los quehaceres profesionales de cada uno de ellos encontramos los siguientes: profesor, profesor-gestor de políticas educativas, profesor investigador, investigador-gestor de políticas educativas. Por otra parte, entre las instituciones a las que ellos pertenecen podemos nombrar al Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Autónoma de Guerrero, y en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Las preguntas propuestas entorno a las cuales se podrían encaminar las reflexiones fueron las siguientes:

- Dentro de su quehacer profesional, ¿cuáles son las problemáticas que atiende? ¿A quién y cómo considera que impacta la atención de dichas problemáticas?
- ¿Considera que el quehacer del matemático educativo, reflejo de la construcción de su identidad, responde a las necesidades sociales actuales en el ámbito educativo? De no ser así, ¿Cree que existen otros ámbitos en dónde el matemático educativo debe influir? ¿Cuáles?
- ¿Qué considera que hace falta para que la disciplina se institucionalice como la disciplina óptima para atender las problemáticas de educación matemática en nuestro país y posteriormente en el exterior?

Resultados obtenidos

Es preciso aclarar que las preguntas no fueron estrictamente contestadas en la mesa ya que el objetivo perseguido fue que emergiera el diálogo entre los ponentes, lo que favoreciera (y favoreció) a la reflexión colectiva, más que a la respuesta estricta.

Se consideraron como ejes conductores, por un lado, las problemáticas y, por el otro, las influencias y la institucionalización de la Matemática Educativa.

Respecto a las problemáticas, los ponentes hicieron énfasis en las siguientes:

- Creación de comunidades cooperativas y formas de organización
- Atención a una sobrepoblación de estudiantes
- Planeación de un currículum para la formación de Matemáticos Educativos
- Vinculación entre la investigación y la docencia

Respecto a la influencia e institucionalización de la Matemática Educativa, se retomaron los siguientes aspectos:

- Libros de textos
- Apertura de Licenciatura, Maestría y Doctorado de Matemática Educativa
- Anticipación a las tendencias sociales
- Generación de conocimiento
- Transformación de la práctica
- Profesionalización de la disciplina
- Formación continua y actualización de Profesores de Matemática

Análisis y reflexión con base en los resultados

Se considera notorio que dependiendo del quehacer e institución de cada uno de los investigadores es desde donde mirará algunas de las problemáticas, por ejemplo: aquel que tiene como quehacer únicamente investigar, quizás no considere continuamente la variable de la cantidad de alumnado; como así también ocurre a la inversa, la ocupación de planear un currículum para la formación de Matemáticos Educativos no radica en aquellos profesionales que se dedican exclusivamente a la docencia. Sin embargo, se estima que tanto la vinculación entre la investigación y la docencia, como la creación de comunidades cooperativas y formas de organización son problemáticas que ocupan a todos aquellos que son parte de la comunidad de matemáticos educativos.

A las problemáticas planteadas por los investigadores, se propone postular como problemática central: el estudio de la construcción social del conocimiento. Ésta, nos conduce a cuestionarnos el rediseño del discurso matemático escolar; el diseño y consolidación de programas de formación de matemáticos educativos; la problematización del saber por parte del estudiante y del docente; la formación continua de los docentes; entre otras. Es decir, todo aquello referente a los fenómenos didácticos ligados al saber matemático (Cantoral y Farfán, 2003), considerando inmersos en un contexto social particular y como producto de las prácticas de dicha sociedad.

Ahora bien, con base en estas problemáticas, desde sus inicios la Matemática Educativa realizó distintos proyectos que influyó tanto en la consolidación de la disciplina, como así también, en el Sistema Educativo mexicano. La primera incidencia que tuvo la disciplina en el Sistema fueron los libros de textos; sin embargo, como se enuncia al comienzo de este trabajo, las distintas investigaciones desde distintas teorías (en particular desde la Teoría Socioepistemológica) en distintos escenarios (áreas escolares, áreas científicas, áreas de trabajo, cotidiano, entre otros) favorecieron a que la evidencia empírica y teórica respaldara la nueva visión propuesta y sean el fundamento consistente que permitiera darle acceso a colaborar con proyectos de acción en el Sistema Educativo. De esta misma manera, Crespo (2009) pone el énfasis en que se debe mirar fuera de los escenarios académicos, con el fin de orientar la comprensión del estudiante como actor de escenarios distintos.

Asimismo, la apertura de Licenciaturas, Maestrías y Doctorados en Matemática Educativa dentro y fuera del país generan la internacionalización de la disciplina, lo cual no sólo la posiciona, sino que reafirma, a través de la aceptación y validación de la comunidad educativa, que Matemática Educativa es una disciplina que puede considerarse como la responsable de entender, analizar y atender las problemáticas existentes en la educación matemática.

Por último, si bien las investigaciones afirman que la puesta en práctica, como una herramienta cotidiana, de las propuestas de investigación, no es algo trivial para los docentes (Lezama, 2005; Lezama y Mariscal, 2008), en la mesa de discusión se reafirma que es necesario acortar la brecha existente entre la producción científica y el consumo de la misma, lo cual deja plasmada ésta, como una problemática a atender.

Comentarios finales

Para concluir, daremos respuesta a las preguntas que fueron planteadas en la mesa de discusión, con el fin de consensar las distintas reflexiones realizadas por los ponentes en conjunto con la lectura de los caminos transitados por la misma disciplina, como así también, responder a aquellas dudas que surgieron al comenzar a indagar sobre el quehacer del matemático educativo.

En primer lugar, podemos asegurar que el *quehacer* del matemático educativo va a la par de la consolidación de la disciplina, por lo tanto, no es estático. Este hecho, permite encontrar distintas problemáticas educativas dependiendo la labor que desempeñan los especialistas (profesor-investigador; profesor; investigador, gestor y administrador de políticas educativas entre otros).

En segundo lugar, con base en las evidencias empíricas y teóricas que las investigaciones aportan a la disciplina y en especial al cuerpo teórico de la disciplina, es que se comienza a incidir en el Sistema Educativo de manera directa, por ejemplo, llevando a cabo especializaciones de formación continua para profesores de secundaria y diplomados para docentes de bachillerato en los próximos meses, entre otras. El quehacer de cada investigador y las acciones conjuntas, sin duda, compete a las necesidades sociales mexicanas, lo que asegura que la disciplina atiende de manera directa, las problemáticas de la sociedad.

Con esto, podemos atrevernos a conjeturar que el rumbo del quehacer que en este momento está tomando la Matemática Educativa pretende atender no solo a la consolidación de la misma, sino también acercarse cada vez más y con una mayor visibilidad al sistema educativo, en particular el mexicano, con vísperas a favorecer, desde adentro, las diversas miradas que nacen y se fundamentan a partir de la investigación sobre lo que respecta al aprendizaje del saber matemático.

Para finalizar, consideramos que una manera indispensable de consolidar la disciplina es defendiendo el conocimiento y los proyectos que desde la comunidad latinoamericana se construyen, como así lo enuncia en las últimas editoriales de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *Relime*, el Director Editorial, Dr. Cantoral Uriza (Cantoral, 2008, 2009a, 2009b, 2009c, 2010).

Referencias bibliográficas

Cantoral, R y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cantoral, R. (2008). En defensa de "lo nuestro". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (3), 307-308.

Cantoral, R. (2009a). Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 5-6.

Cantoral, R. (2009b). Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (2), 145-150.

Cantoral, R. (2009c). Revistas latinoamericanas en ISI Wok, reflexiones con la comunidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 301-304.

Cantoral, R. (2010). Finalmente… Trois. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (1), 5-6.

Cárdenas, V. (2004). Construcción de la identidad docente. *Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa.* Obtenido en Marzo 30, 2010, de http://www.unidad094.upn.mx/revista/49/identidad.htm.

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 22, 1145-1154.

Hitt Espinosa, F. (2001). Departamento de Matemática Educativa: 25 años de Investigación. *Avance y Perspectiva 20,* 17-29.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 339-362.

Lezama, J. y Mariscal E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva Socioepistemológica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 889-900. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Matemática Educativa – Carlos Imaz Jahnke, Bibliografía. (2009). Recuperado el 20 de agosto de 2010, de http://matematicaeducativa.com/foro/viewtopic.php?f=2&t=6

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Navarrete, Z. (2008). Construcción de una identidad profesional: los pedagogos de la universidad nacional autónoma de México y de la universidad veracruzana. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 13* (36), 143-171.

Silva, H. (2010a). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Silva, H. y Cordero, F. (2010b). La identidad y la adherencia en la formación del Matemático Educativo en Latinoamérica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 969-976. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

EN BÚSQUEDA DE LA EXCLUSIÓN EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Daniela Soto Soto; Daniela Reyes Gasperini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
dsoto@cinvestav.mx, dreyes@cinvestav.mx

Resumen. En este artículo reportamos la experiencia del taller "En búsqueda de la exclusión en el discurso matemático escolar" presentado en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa en su versión 24. En éste se reflexionó sobre el planteamiento reportado en la investigación teórica realizada por Soto (2010) desde una visión socioepistemológica, la cual plantea que: el discurso matemático escolar (dME) produce un tipo de exclusión hacia los actores del sistema didáctico a través de la imposición de significados, argumentaciones y procedimiento matemáticos. En este documento damos cuenta de esa exclusión, mostrando cómo los participantes del taller, a partir de ponerlos frente a una actividad específica, realizar un análisis del dME y reconocer otras argumentaciones que podrían dar pie para la resignificación del conocimiento en cuestión, perciben la exclusión de la cual han sido víctimas, producida por el dME. Esto hace evidente la concordancia entre dicha investigación teórica y los resultados obtenidos en el presente taller.

Palabras clave: exclusión, violencia simbólica, discurso matemático escolar

Abstract. In this article we report the experience of the workshop "In Search of exclusion in school mathematical discourse" presented at the Latin American Meeting of Mathematics Education in its 24 venue. In this workshop approach we reflected on the theoretical investigation reported by Soto (2010) from a socioepistemological vision, which states that: school mathematical discourse (dME) produces a type of exclusion within the educational system to its actors through the imposition of meanings, arguments and mathematical procedures. In this paper we explain that exclusion, showing how the workshop participants, when faced with a specific activity, such as analyzing the DME and recognizing other arguments that might give rise to the redefinition of knowledge in question, perceived the exclusion to which they have been subjected to, produced by the dME. This provides evidence that the correlation between theoretical research and the results obtained in this workshop.

Key words: exclusion, symbolic violence, school mathematical discourse

Introducción

Concibiendo que la Matemática Educativa es una disciplina que se preocupa y ocupa de los fenómenos que ocurren en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se ha estudiado el fenómeno de la "exclusión" desde diferentes perspectivas. Se pueden distinguir, principalmente, dos tipos de estudios: por un lado, aquellos enfocados en cómo las prácticas pedagógicas y el currículo de matemáticas no representan a algunos grupos sociales, por lo cual se produce una exclusión hacia esos sectores. Por el otro, los que se centran en que la sociedad excluye con la Matemática, porque sin saber Matemáticas, no podemos formar parte del breve porcentaje de personas privilegiadas (Knijnik, 2003; Gómez, 2007; Rivas, 2005). Sin embargo, es preciso aclarar que el taller consideró a la exclusión como un proceso que emerge de la propia matemática escolar (Soto, 2010). Entendiendo que el propio conocimiento trastocado con fines didácticos, es el que impone significados y valida sólo un tipo de argumentación, con lo cual genera un tipo muy sutil de exclusión.

El taller, del cual presentaremos los resultados en este artículo, tuvo como primer objetivo demostrar empíricamente que existe una exclusión hacia los actores del sistema didáctico de la construcción del conocimiento matemático. Para ello nos propusimos evidenciar y que los participantes del taller experimentaran, la carencia de marcos de referencia para resignificar un conocimiento matemático específico -el teorema de l' Hospital- que de acuerdo a su formación conocen e incluso en muchos casos enseñan.

Nuestro segundo objetivo fue conformar, junto a los participantes del taller, una unidad de análisis del fenómeno de *exclusión,* a partir de la consideración de que la exclusión que produce el *dME* tiene como principal móvil la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos matemáticos. Por tanto, la principal hipótesis del taller fue: existe un *sistema de razón* que fundamenta la *matemática escolar* y que produce un tipo de exclusión denominada *violencia simbólica* (Soto, 2010).

Considerando que un *sistema de razón* se caracteriza principalmente por crear mapas en los cuales se delinean las formas de actuar, razonar, dar significados y/o argumentar de los individuos, entre otras, lo que conlleva a que un modo alternativo quedará fuera de los límites, entendiéndose "extraño" o "anormal; nuestro tercer objetivo fue dibujar el *mapa* del *dME* de una noción específica de la matemática de nivel superior: el teorema de l' Hospital. Del análisis de los textos escolares (Stewart, 1999; L´Hospital, 1696, entre otros) y de las creencias y concepciones de los propios participantes emergieron las componentes de este *mapa*, entre ellas las identificadas por Soto (2010): la atomización de los objetos y procesos matemáticos, el carácter utilitario y no funcional del conocimiento, la concepción de que la Matemática es un saber acabado y continuo, la hegemonía del *dME* y la falta de marcos de referencia para su resignificación.

Por último, el análisis del *dME* del teorema de l'Hospital que nos llevó a la conformación del *mapa* del *sistema de razón*, nos evidenció la *violencia simbólica* que se ejerce a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos sobre el humano y que no permite que se incluya en la construcción del conocimiento matemático (Cantoral y Soto, 2009).

Creemos relevante destacar que los participantes -docentes, investigadores e investigadores en formación- observaron cuán nocivo ha de ser el *dME* actual, lo cual nos permite: por un lado, dar cuenta la concordancia entre la investigación, que plantea que el *dME* es excluyente, y la evidencia empírica, que demuestra la certeza de la hipótesis; por el otro, nos brinda un nuevo argumento que hace explícita nuestra convicción de la necesidad de un rediseño del *dME*.

La exclusión que produce el dME

Como hemos señalado, nuestro taller considera a la perspectiva de *exclusión* adoptada por Soto (2010), la cual señala que la exclusión es producida por la propia matemática escolar, es decir, consideramos que existe un *sistema de razón* que fundamenta a la organización de la Matemática Escolar y que genera principios donde el quehacer de los individuos o de los grupos queda al margen de la construcción del conocimiento.

Ahora bien, ¿qué tipo de *exclusión* pretendemos evidenciar? Como hemos señalado, la comunidad preocupada de este fenómeno ha estudiado diferentes formas por las cuales se manifiesta la *exclusión*, sin embargo, en el presente trabajo, pretendemos mostrar cómo el *dME* genera *violencia simbólica*. Es decir, planteamos que es el propio conocimiento trastocado con fines didácticos, el cual impone significados y valida sólo un tipo de argumentaciones, con lo cual genera un tipo muy sutil de *exclusión*, donde los actores del sistema didáctico (estudiantes, profesores, padres, directivos, políticos, etc.) son "cómplices involuntarios" de este proceso, debido a la legitimidad de la cual goza el sistema que lo produce.

De esta forma nuestro taller combinó dos tipos de análisis de la *exclusión escolar*. Por una parte, intentamos explicitar las características del *sistema de razón* -*dME*- que fundamenta a la organización de la matemática escolar, el cual delimita lo que queda dentro de lo "normal" en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; y, por otra, nos proponemos evidenciar cómo ese *sistema de razón* a partir de sus características y de la legitimidad social de la cual goza, impone significados, procedimientos y argumentaciones que los actores del sistema didáctico reconocen e interiorizan, reconociendo en ellas hegemonía y superioridad.

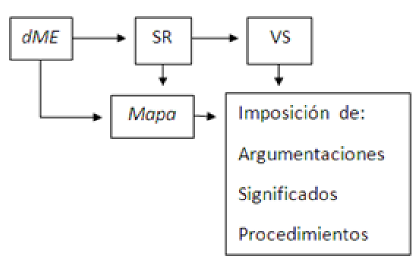


Figura 1. Modelo de exclusión

El modelo de exclusión que utilizamos como base teórica de nuestro taller y que se encuentra descrito con mayor profundidad en Soto (2010), queda reflejado en la *figura 1*. El *dME* es un *sistema de razón* que produce *violencia simbólica*, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos.

El taller

Con el fin de generar en los participantes, profesores e investigadores de nivel superior, una confrontación directa con la violencia simbólica que produce el dME, en un primer momento, se les hizo entrega de la siguiente actividad para que resolvieran:

¿Recuerdas este enunciado?

Suponga que f(x) y g(x) son dos funciones derivables y que g'(a) ≠0. Suponga también que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Entonces: $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dibuje dos gráficas f y g de manera que represente el enunciado anterior.

Figura 2: Actividad presentada a los participantes

La actividad se propuso con el fin de que los participantes reconozcan un contexto de significación usual y que la pregunta planteada los movilice a un escenario de construcción diferente, no sólo por el tipo de representación que se privilegia en el dME, sino por las argumentaciones que de la situación misma emergen. En ella, se retoma el Teorema de l´Hospital de la investigación realizada por Soto (2010), en donde, como se dijo anteriormente, se evidencia teóricamente que los significados, argumentaciones y procedimientos que fundamentaron la construcción del teorema, distan de ser los que en la práctica actual los individuos usan para reflexionar sobre él, resumiéndolos simplemente a lo que el dME impone.

Al momento de dar respuesta, la mayoría de los asistentes se vieron imposibilitados a dibujar las gráficas de manera tal que representaran dicho enunciado. A continuación mostraremos una de las producciones realizadas (Figura 3):

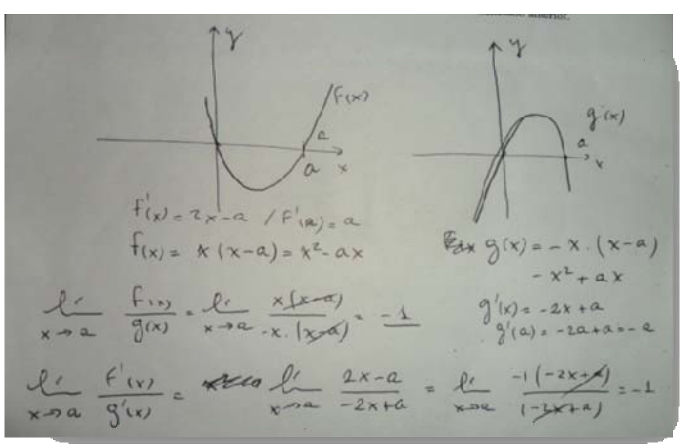


Figura 3. Producción de una participante del taller

En ella, se puede observar que la hipótesis planteada en el teorema, es comprendida y graficada por la asistente -quien reflexionó en conjunto con otros colegas- sin embargo, no ha podido afrontar la situación de graficar la tesis del teorema, recurriendo, en cambio, a procedimientos algebraicos, que igualmente no la ayudan a resolver la situación.

Posterior a este momento, luego de reflexionar acerca de la situación y las posibilidades de respuestas de los quince participantes, las cuales fueron: parecidas a la anterior, nulas, o bien, en dos casos lograron realizar la gráfica; se presentaron los fundamentos teóricos que sustenta la posición con respecto al tipo de exclusión que se analizó en el dME.

A continuación, se analizan dos textos de estudio del nivel superior que presentan al teorema de l'Hospital, en la siguiente figura se muestra la presentación de uno de ellos:

Regla de l'Hospital: Supóngase que *f* y *g* son derivables y que g'(x)$\neq$ 0 cerca de *a*(excepto quizás en *a*). Supóngase que

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

O que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si el límite del segundo miembro existe (o es ∞ o es -∞)

Figura 4. Presentación del teorema de l'Hospital en Stewart (1999)

Ante la lectura de estos textos se reflexionó sobre las características del *dME* que lo hacen ser excluyente. Ésta se llevó a cabo ya sea mediante las argumentaciones utilizadas por los propios asistentes, como así también por los significados, argumentaciones y procedimientos que brindan los textos. Por ejemplo, los asistentes comentaron: "…no se dice ni para qué, ni por qué nos interesa esa herramienta", "…en las explicaciones se abandona el contexto geométrico", o bien, "La concepción de la matemática es la misma (…) la concepción de la tarea docente es la misma, el docente es el que representa un conocimiento que ya está (…)". En estas intervenciones, se reconocen elementos para la conformación de un mapa que se llevó a cabo de manera grupal, los cuales quedan explícitos en el sustento teórico del taller, estas son: el carácter utilitario, la falta de marcos de referencia y la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado, respectivamente.

Después de llevar a cabo la discusión con los participantes del taller acerca de los elementos que constituyen al *dME* del teorema en cuestión, se analizó la obra del Marquez de l'Hospital

(*1696*), "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*". Donde el teorema se presenta como un problema, de la siguiente forma:

Sea AMD una línea curva (AP=x, PM=y , AB=a) tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en el cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando x=a , es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B [fig.130]. Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD.

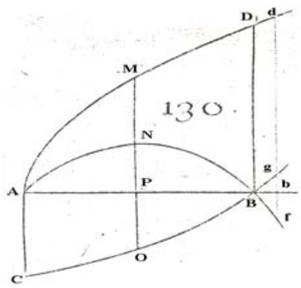


Figura 5. Traducción del problema (l'Hospital, 1998, p. 259)

La resolución del problema que plantea l'Hospital está fuertemente influenciada por el cálculo leibniano, los infinitesimales y de la noción de diferencial, y del análisis cartesiano, es decir, del estudio de las curvas mediante métodos algebraicos (Figura 6).

Siendo ANB y COB dos líneas curvas conocidas que tienen a la línea AB como eje común, tal que la aplicada PN, y tales que la ordenada PN exprese el numerador y la ordenada PO el denominador de la fracción general que conviene a todas las PM, de modo que PM=(AB*PN)/PO. Es claro que estas dos curvas se intersectarán en el punto B, dado que, por la suposición, PN y PO se vuelven cada una cero cuando el punto P cae en B. Planteado eso, si se concibe una ordenada bd infinitamente próxima a BD, y que intersecta a las líneas curvas ANB y COB en los puntos f y g, se tendrá bd=(AB*bf)/bg . la cual no difiere de BD. Entonces el problema consiste en encontrar la razón entre bg y bf. Ahora bien, es claro que al volverse AB la abscisa AP, las ordenadas PN y PO se vuelven nulas, y que al volverse Ab la abscisa AP, se vuelven bf y bg. De donde sigue que estas ordenadas, las mismas bf y bg hacen la diferencia de las ordenadas en B y b con relación a las curvas ANB y COB, y por lo tanto, si se toma la diferencia de numeradores y se divide entre la diferencia del denominador, después de haber hecho x=a=Ab= AB, se tendrá el valor buscado de la ordenada bd o BD. Lo cual se quería encontrar.

Figura 6. Solución del problema en la obra de l'Hospital (l'Hospital, 1998, pp. 259-260)

El análisis que se lleva a cabo con respecto a la obra de l' Hospital es en relación a que existen otro tipo de argumentaciones para resignificar el teorema, es decir, que existen elementos en otros marcos de referencia (en este caso la obra) para que un estudiante o un profesor haga emerger el teorema, los cuales no son considerados por *dME*.

En la segunda etapa del taller se reflexiono acerca de las caracteristicas del dME que lo hacen ser excluyente, para ellos se presento

Habiendo concluido el trabajo práctico y llevadas a cabo las discusiones con los participantes, surgieron dos reflexiones importantes: la primera, en torno al rol del docente como autoridad pedagógica, quien en el aula, según uno de los asistentes: "el profesor es excluido… la exclusión que ejerce el excluido… la vive con mucha fuerza, entonces se mete al aula y hace una reproducción de esa exclusión". Estas reflexiones, hicieron emerger cómo es que el docente durante su formación y su práctica, es víctima de esta exclusión de la construcción del conocimiento matemático (Reyes-Gasperini y Crespo Crespo, 2011). La segunda, a través de la experiencia en el taller, se da visibilidad a la concordancia entre la investigación teórica y los resultados obtenidos en una aplicación empírica, lo que fortalece la necesidad del rediseño del *dME*.

Reflexiones finales

El taller nos ha permitido reflexionar sobre tres aspectos en particular: en primer lugar, se ha reconocido por parte de los participantes que el *dME* los ha excluido, ya que no encontraron otros marcos de referencia para resignificar un conocimiento que ya "dominan". Los participantes reconocieron la linealidad y la presentación del teorema como un conocimiento acabado, característica del discurso que no permite que el conocimiento sea trastocado, por tanto, no permite la participación del sujeto en su construcción. En segundo lugar, nos permitió reflexionar sobre el rol del profesor como agente del sistema que también es víctima de la exclusión producida por el *dME*, transformándose, inconscientemente en un reproductor de ella, ya que al reconocer una legitimidad en el *dME,* el fenómeno se hace invisible. Esto da lugar a la apertura de la discusión e investigación respecto a la exclusión producida durante la formación docente. En tercer y último lugar, las discusiones generadas por el trabajo desarrollado, han permitido fortalecer la evidente necesidad de un diseño bajo perspectivas que consideren al humano como constructor de conocimiento matemático.

En síntesis, los resultados obtenidos del taller permitieron ver empíricamente el fenómeno de la exclusión que ha sido teorizado en Soto (2010), generando el reconocimiento por parte de la comunidad de la existencia de un fenómeno típicamente social y reproducido en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; la necesidad de continuar investigando sobre este fenómeno tomando como población particular a los docentes; y, por último, brinda un nuevo argumento que avala el rediseño del *dME*.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, J. y Passeron, J-C. (2005). *La reproducción; elementos para una teoría del sistema de enseñanza.* (Trad. J. Melendres y M. Subirat). México: edición Fontamara (original en Francés, 1970).

Soto S., D. y Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la Matemática? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 839-848. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gimenez, J.;Diez- Palomar, J. y Civil, M.(2007*). Exclusión y Matemáticas.*En J. Giménez; J. Díez-Palomar y M. Civil (coord.). *Educación matemática,* 9-44. España: Graó

Knijnik, G. (2007).Diversidad cultural, matemáticas y exclusión: oralidad y escritura en la educación matemática campesina del sur del Brasil.En J. Giménez; J. Díez-Palomar y M. Civil (coord.). *Educación matemática*, 63-82. España: Graó

Littlewood, P., Herkommer, S. y Koch, M (2005b). El discurso de la Exclusión social: un análisis crítico sobre conceptos y modelos de interpretación. En J. Luengo (Comp.). *Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación,* 19-42. España: Pomaires.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence de lignes courbe.* Paris, Francia: ACL-Editions. [Reimpresión, 1988]

L'Hospital, A. (1998). A*nálisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. (Trad. R. Cambray). México: Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. (Original en Francés, 1696)

Popkewitz, T. y Lindblad, S. (2005). Gobernación educativa e inclusión y exclusión social: dificultades conceptuales y problemáticas en la política y en la investigación. En Julian J. Luengo (Comp.). *Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación*, 116-165. España: Pomaires.

Reyes-Gasperini, D. y Crespo Crespo, C. (2011). Un estudio acerca del fenómeno de exclusión a nivel superior en la carrera del profesorado de Matemática. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24.* (En prensa)

Rivas, P. (2005). La Matemática como factor de deserción escolar y de exclusión social [Versión electrónica]. *La Revista Venezolana de Educación (Educere)9* (29), 175-170.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: Thomson.

LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LATINOAMÉRICA, ¿FUNCIONA?

Lianggi Espinoza Ramirez, William Campillay Llanos
Cinvestav IPN (México)
Universidad de Chile (Chile)
leanggi@gmail.com, wcampillay@dim.uchile.cl

Resumen. La presente investigación desarrolla un análisis sociocultural a la teoría de situaciones didácticas con el fin de evaluar la pertinencia de su uso en los contextos educativos Latinoamericanos. Con base en un análisis de puesta en práctica de la teoría en Chile, observaciones en escuelas francesas y un estudio teórico, planteamos las vinculaciones existentes en una teorización y su respectivo contexto cultural. Concluimos reflexionando sobre la necesidad de ser sensibles ante las diversas variables socioculturales existentes en los contextos educativos Latinoamericanos.

Palabras clave: teoría de situaciones didácticas, aulas latinoamericanas, diversidad

Abstract. This research presents a sociocultural analysis of the theory of didactic situations in order to assess the pertinence of its use in educational contexts in Latin America. Based on an analysis of the implementation of the theory in Chile, observations in French schools and a theoretical study, we propose the links that exist between theorizing and their respective cultural contexts. We conclude reflecting on the need to be sensitive to various socio-cultural variables that exist in the Latin American educational contexts.

Key words: theory of didactic situations, Latin-American classrooms, diversity

Introducción

Una perspectiva teórica, además de brindar elementos para abordar un problema y situar su impacto, provee una manera de ver y entender las problemáticas de investigación (Espinoza, 2009). La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) ha sido una de las pioneras en nuestro campo, la matemática educativa. Ha desarrollado grandes aportaciones y ha incidido en diversos sistemas educativos a nivel mundial. Espinoza (2006) da evidencias de algunas dificultades existentes al momento de utilizarla para incidir en algunos contextos educativos latinoamericanos. ¿Qué tanto incide el entorno educativo francés en la teorización de la TSD? ¿Qué tan pertinente es el uso de la TSD en contextos educativos diferentes, como el latinoamericano?

A continuación abordamos estas interrogantes considerando un análisis del uso de la TSD en Chile (Espinoza, 2006), un estudio etnográfico desarrollado en escuelas francesas (Campillay, 2007; Espinoza 2007), un análisis sobre los escritos originales e interpretaciones de la teoría (Espinoza, Viramontes y Arellano, 2008) y diversas vivencias multiculturales de los autores en países latinoamericanos. Godino y otros (2006) plantean que una teoría en matemática educativa se constituye de elementos teóricos y metodológicos. Los primeros permiten definir los problemas de investigación y los segundos brindan el "como" abordar tales problemas. Planteamos que los elementos teóricos de la TSD son aportaciones para Latinoamérica, y que los elementos metodológicos responden particularmente al sistema educativo francés. Nuestra intención es argumentar la necesidad de la construcción de investigación en que atienda a la diversidad de contextos educativos latinoamericanos.

La teoría de situaciones didácticas

Quizás por ser pionera en plantear la necesidad de una ciencia didáctica de evidencia empírica específica para la disciplina, o por centrar su atención en los fenómenos producidos al interior del aula (Kuzniak, 2005), la TSD ha tenido un impacto considerable en diversos lugares del mundo. Esta teoría nace en la década de los setentas, gracias a los estudios desarrollados por un grupo de investigadores franceses liderados por Guy Brousseau. Estos estudios fueron desarrollados en la escuela "École Michelet", ubicada en las afueras de Burdeos, Francia.

Influenciados por los paradigmas constructivistas de la época, estos investigadores modelaron los sistemas de enseñanza como juegos matemáticos, designándolos con el término de situaciones. Desarrollaron investigaciones al estudiar sistemáticamente la puesta en escena de dichas situaciones. Sus resultados los llevaron a cuestionar los planteamientos piagetianos, reconociendo como un error el haber creído en la posibilidad de una didáctica constructivista (Brousseau, 1997) y denunciando que sobrevalorar el aprendizaje 'natural' o 'espontáneo' podía llevar a la didáctica hacia un nuevo tipo de empirismo (Chevallard, Bosh y Gascón, 1997).

La TSD busca entender los procesos de comunicación y reconstrucción de saberes en el sistema didáctico. Durante cuatro décadas se ha desarrollado investigación y utilizado la TSD para intervenir en diversos sistemas educativos. Particularmente, en Latinoamérica, esta teoría ha sido considerada como un referente para el desarrollo de libros de texto, programas de estudio y en la formación inicial y continua de docentes.

Realidades socioculturales educativas en Francia y Chile

El año 2007, junto a veinticuatro profesores chilenos recién egresados, desarrollamos una estancia académica en la ciudad de Toulouse-Francia. Observamos semanalmente durante tres meses a 12 escuelas de nivel primario y medio. Algunas de las observaciones registradas en Campillay (2007) y Espinoza (2007) son las siguientes:

Figura 1

Las escuelas (écoles, con alumnos de 6 a 12 años) tienen como máximo a 25 alumnos por clase (Figura 1). Los profesores trabajan por ley 18 horas frente a alumnos.

Figura 2

Cuando los profesores planteaban alguna pregunta, los estudiantes levantaban la mano esperando su turno para responder "estando callados" (Figura 2). Observamos diversos mecanismos de control del orden en aula a través de una posición autoritaria del profesor, la cual es respetada por los estudiantes (Campillay, 2007).

En una ocasión hubo una manifestación de profesores en la plaza principal de la ciudad. Encontramos carteles de protesta que decían: *"18 horas de curso=44 horas de trabajo, LA COPA ESTÁ LLENA"* (Figura 3); *"profesores en dos o tres establecimientos, ¿y el trabajo en equipo?"*(Figura 4). Protestaban contra una ley que pretendía subir las horas de trabajo frente a alumnos de 18 a 21 por semana.

Figura 3

Figura 4

Un día un alumno cometió un error tipográfico en un examen. Su profesora, al darse cuenta de esto, camino hacia el estudiante, golpeó con mucha fuerza la mesa del estudiante con el examen y le dijo mostrando mucho enojo *"Tu es fou, tu es fou"* (estás loco, palabras fuertes en el idioma francés). Después de 5 minutos el alumno continuó siendo muy participativo de la clase.

Otro día un profesor expresó lo siguiente: *"tenemos poco tiempo para trabajar, y eso que hacemos todo el esfuerzo… hay que mejorar las condiciones laborales, nos pagan poco y tenemos cursos muy desordenados*" (Campillay, 2007). En otra ocasión, comentamos en un salón lleno de profesores que en chile se trabaja en promedio 44 horas frente a alumnos por semana. Contamos algunos casos anecdóticos, como el de un profesor que trabaja 70 horas frente a alumnos por semana. Los profesores franceses comenzaron a "gritar" por su impresión ante esta situación. Nos decían, *"así es imposible"* (Espinoza, 2007).

Este profesor se llama Hugo. Forzado por demandas económicas, trabaja en tres establecimientos diferentes largas jornadas laborales en la mañana, tarde y noche. Cuando llega a su casa, continúa trabajando corrigiendo exámenes (Figura 5).

Figura 5

Figura 6

En las escuelas públicas de Chile hay entre 35 y 50 alumnos por clase (Figura 6). Los profesores trabajan entre 45 y 70 horas semanales frente a alumnos. Algunos comparten su trabajo con otras labores, como la de Taxista. Muchas aulas tienen condiciones de indisciplina. Los profesores mantienen con sus alumnos relaciones autoritarias para mantener el orden en sus aulas y así no tener conflictos con las autoridades de sus escuelas. Esta realidad, si bien no igual, ilustra de diversas maneras la diversidad de sistemas educativos existentes en gran parte de Latinoamérica.

Comparando, podemos observar diferencias significativas entre ambos contextos educativos. A raíz de esto buscamos explicar si existía alguna dependencia cultural entre la TSD y el contexto educativo francés. Estudiando escritos originales y posteriores de los autores de la TSD (Brousseau, 1986; Brousseau, 1997), además de interpretaciones desarrolladas por otros investigadores (Cantoral y Farfán, 2004; Chevallard y otros, 1997; Kuzniak, 2005), estudiamos las aportaciones de esta teoría para las investigaciones en contextos Latinoamericanos y los elementos que, interpretamos, son relativos al contexto educativo en el que se engendró la teoría. Lo hicimos encontrando en la TSD sus elementos teóricos, que permiten definir los problemas de investigación, y metodológicos, los cuales brindan un "como" abordar tales problemas (Godino y otros, 2006). Postulamos que estos "como" dependen de los contextos educativos específicos.

Aportaciones de la TSD para contextos educativos latinoamericanos

Al observar las relaciones sociales que se establecen entre el profesor, los alumnos y el saber en juego, la TSD problematiza las *intencionalidades* existentes en el sistema didáctico. Esta teoría propone el control de estas intenciones en el aula. Plantea que para que el alumno construya conocimiento matemático se necesita que tenga ciertas condiciones de autonomía y un margen de maniobra e iniciativa amplio, lo más amplio posible (Kuzniak, 2005). Para lograr esto se considera que, en una situación con intencionalidad de enseñanza (didáctica), debe existir otra que esté contenida en ella en la que esta intención es alejada (adidáctica). Siguiendo a Espinoza y otros (2008), planteamos las siguientes ideas como los elementos teóricos de la TSD, los cuales son aportaciones que pueden ser consideradas para la investigación en entornos latinoamericanos:

- ***Una sociología de la intencionalidad en el aula:*** Considerar las intencionalidades existentes en el aula es una aportación teórica de la TSD.

- ***La devolución:*** Al problematizar las intencionalidades en el aula, la TSD plantea que el profesor debe reformular su práctica docente. Particularmente, debe tener el rol de devolver la responsabilidad de la resolución de la tarea matemática al estudiante.

- ***El contrato didáctico:*** Las relaciones entre profesor y alumno producen un contrato didáctico. Cuando no se logra el objetivo de una clase, se producen fenómenos que aparentan el logro de aprendizajes que en realidad no son alcanzados. Estos fenómenos están ligados a ciertas expectativas que el profesor tiene del alumno y vice-versa. Entender la emergencia de estos fenómenos en el aula es otra aportación teórica muy relevante de la TSD.

Elementos de la TSD que dependen del contexto educativo francés.

La TSD busca una articulación entre la teoría y la práctica. Los resultados de investigación deben brindar información que permita entender los fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, además de ofrecer innovaciones útiles para las prácticas docentes (Kuzniak, 2005). Nos preguntamos ¿a qué docentes? La TSD se teorizó desde el contexto educativo de las écoles francesas. Por tanto, los "cómo" abordar los problemas de investigación responden en primer lugar a este contexto. Basándonos en (Espinoza y otros, 2008), planteamos las siguientes ideas de la TSD como dependientes al entorno educativo y sociocultural francés:

- ***Las situaciones adidacticas de acción, formulación y validación:*** Estas situaciones buscan hacer emerger una dialéctica entre el sujeto y la situación, la formulación de hipótesis y la interacción entre el grupo para validar los descubrimientos. Estas son situaciones consideradas deseables para la construcción social del saber matemático (Brousseau, 1986; Chevallard y otros, 1997). Algunos investigadores plantean que el orden secuenciado entre estas tres situaciones más una institucionalización posterior parecen construir un orden razonable para la construcción de saberes en matemáticas (Brousseau, 1997; Kuzniak, 2005).

- ***Los efectos del contrato didáctico:*** La TSD plantea algunos fenómenos producidos por el contrato didáctico, entre ellos el efecto Topase, Jourdain, el deslizamiento meta-cognitivo y el abuso de la analogía (Brousseau, 1986). Estos aluden a la desaparición de la voluntad de enseñar y se manifiestan por la absorción de una situación adidáctica por una didáctica. Esto sucede cuando el profesor asume la responsabilidad de la resolución de un problema y/o simula que el estudiante construye conocimiento.

Tanto las tres situaciones adidácticas como los cuatro efectos del contrato didáctico fueron teorizados desde las observaciones e intervenciones desarrolladas en la École Michelet en

Francia. Las situaciones de acción, formulación y validación podrían responder a la realidad ya descrita de las écoles francesas. Pero ¿darían respuesta y aportaciones a la realidad latinoamericana? ¿Podríamos esperar que un profesor que no tiene tiempo laboral para preparar clases desarrolle este tipo de situaciones? ¿Podemos pensar desarrollar situaciones de acción, formulación y validación en aulas con 40 estudiantes donde el espacio de trabajo es reducido y existen condiciones de desobediencia por parte de los estudiantes? Estos elementos, vistos como innovación pedagógica, viven como una utopía entre los profesores de Chile (Espinoza, 2006).

Ampliaciones teóricas necesarias

En Espinoza (2006) se expresan reflexiones de intervenciones en aulas chilenas desarrolladas durante 4 meses. Se identificó en los estudiantes un constante rechazo a situaciones de desafío y una resistencia a los cambios en la estructura de la clase de matemáticas. Estos encontraron aburridas varias intervenciones desarrolladas a la luz de la TSD. De aquí advertimos que la *variable intencionalidad del alumno* es importante en este contexto educativo específico. La TSD no considera esta variable en su teorización. Arrieta (2003) afirma que el discurso matemático escolar se encuentra desvinculado de las intencionalidades de los alumnos. Este autor considera además que debe ser problematizada la intencionalidad de las herramientas matemáticas y tecnológicas en el sistema didáctico. Para estudiar nuestra realidad tenemos que considerar estas variables.

La TSD no problematiza el estatus epistemológico del saber como lo hacen otras aproximaciones (Chevallard y otros, 1997; Cordero, 2001). Considera al saber a enseñar como “preexistente y, en cierta forma, independiente de las instituciones interesadas en su reconstrucción y comunicación” (Godino y otros, 2006, p. 126). Esta mirada de la matemática como un conocimiento acabado conlleva a considerarla con un carácter hegemónico, utilitario y desligado de los aspectos sociales, culturales y contextuales que permiten la construcción de conocimientos (Soto, 2010). Por tanto, consideramos necesario reflexionar este aspecto que trastoca toda la teorización y aplicación de la TSD.

La TSD diferencia entre un conocimiento y un saber matemático. El profesor debe, después de una situación de construcción de conocimiento, despersonalizar y descontextualizar los conocimientos construidos por los estudiantes para que estos tomen el estatus de saber. Este saber es el conocimiento escolar reconocido institucionalmente. Estudios muestran cómo los conocimientos construidos en una situación didáctica se pierden al momento de institucionalizarlos (Rotaeche, 2008). Esta evidencia muestra la necesidad de repensar la institucionalización.

Conclusiones

Es importante destacar el reconocimiento a las aportaciones a la matemática educativa de los investigadores que han desarrollado la TSD. La crítica presente no es a la teoría, sino a su utilización sin considerar la diversidad de contextos educativos específicos. En los últimos años se ha destacado, desde diversas disciplinas de las ciencias sociales, el carácter contextual existente en los procesos de construcción social de conocimientos (Cantoral, 2010). Las personas piensan y aprenden de manera contextualizada. De aquí la importancia de entender las especificidades de los contextos específicos en los que se desarrollan intervenciones educativas.

Particularmente en Latinoamérica existe una enorme diversidad de contextos socioeconómicos y culturales. Las carencias económicas y situación social de pobreza y opresión son el pan de cada día para muchos. Las variables económicas, culturales y sociales inciden en el cómo alguien aprende. Se necesita desarrollar modelos de intervención educativa que sean coherentes con cada contexto educativo específico, que respete la diversidad y que puedan vivir la reproducibilidad.

Por tanto, es necesario que como comunidad latinoamericana podamos continuar reflexionando y dialogando sobre nuestras realidades educativas. Se necesita entender que toda teoría en nuestro campo responde a cierto contexto educativo específico, y particularmente nosotros necesitamos responder a nuestra realidad. En esta dirección nos parece pertinente la postura de la construcción para el otro desde el otro (Freire, 1977). Esto nos llevará hacia la construcción de didácticas locales, hacia miradas específicas desde cada contexto, para entender los problemas educativos y ofrecer soluciones que sean coherentes con cada realidad. Necesitamos avanzar en construir la investigación para Latinoamérica desde Latinoamérica.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. Mexico: Cinvestav -IPN.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2): 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo].

Brousseau, G. (1997). *Théorie des situation didactiques et ses applications.* Recuperado el 15 de febrero de 2010 de *http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf*

Campillay, W. (2007) *Relatoría pasantía Toulouse-Francia.* Documento interno. Ministerio de educación: Chile.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Editorial Thomson: México.

Chevallard, Y, Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial trillas: Barcelona, España.

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1043-1052 DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Espinoza, L. (2006). *Informe de práctica docente final basado en mapas de desempeño docente.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: Valparaíso, Chile.

Espinoza, L. (2007). *La diversidad de aspectos influyentes en el aprendizaje de las matemáticas; Pasantía Toulouse-Francia*. Documento interno. Ministerio de educación: Chile.

Espinoza, L. (2009) *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Espinoza, L., Viramontes, D. y Arellano, F. (2008). *Cuestiones a considerar para un uso de la teoría de situaciones didácticas en entornos socioculturales diferentes al francés.* Documento Interno. Cinvestav-IPN: México.

Freire, P. (1977). *Fundamentos revolucionarios de la pedagogía popular*. Buenos Aires: 904 editor.

Godino, J., Font, V., Contreras, A., Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 117-150.

Kuzniak, A. (2005). Teoría de situaciones didácticas, *Topiques éditions Metz, Repères. Num. 61. p. 19-35.*

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. México: Cicata-IPN.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS CONTEXTOS DE SIGNIFICACIÓN DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Lianggi Espinoza Ramirez, Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN (México)
leanggi@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Actualmente se ha planteado desde diversos campos de conocimiento la necesidad de atender a los contextos específicos en la investigación. De aquí la necesidad de explicar el rol que cumplen los contextos en la construcción social del conocimiento. Se presenta, desde la teoría socioepistemológica, una caracterización del constructo "contexto de significación", la cual busca articular la explicación de la construcción social con elementos de la dimensión sociocultural y de las diversas maneras de ver al conocimiento matemático. Se presentan ejemplos de la utilización de este constructo en la investigación.

Palabras clave: contextos de significación, otredad, sociocultural, racionalidad

Abstract. Currently it has been suggested from various fields of knowledge the need to address the specific contexts in the research. Hence the need to explain the role played by the contexts in the social construction of knowledge. We introduce, from the socioepistemological theory, one characterization of "significance context", which seeks to articulate an explanation of the social construction with elements of the sociocultural dimension and different ways of understanding the mathematical knowledge. Examples are given of the use of the "significance contexts" in the research.

Key words: significance contexts, otherness, sociocultural, rationality

Introducción

En las últimas décadas, las investigaciones en Matemática Educativa han puesto un acento especial en la contextualidad. Los estudios desarrollados en escenarios no escolares han postulado la cognición situada (Lave, 1991, citado en Covian, 2005). Los planteamientos de diversas aproximaciones sociales a la educación han destacado lo contextual del aprendizaje humano (Radford, 2004, en Cantoral y otros, 2006; Wenger, 2000). Entre ellas, la socioepistemología ha propuesto un relativismo epistemológico del conocimiento al considerar la dimensión social en los estudios sobre la construcción de los conocimientos. La importancia de los contextos específicos se plasma en las investigaciones de Cantoral (1990), Farfán (1993), Montiel (2005), Crespo (2007), Espinoza (2009) entre otras. También la filosofía de las ciencias, influenciada por los resultados de las investigaciones en antropología y psicología social, ha propuesto un viraje desde la racionalidad tradicional a la racionalidad contextualizada (Huang, 2008). La relevancia que tiene la contextualidad en la investigación actual hace necesaria la existencia de marcos explicativos que permitan estudiar el rol de los contextos en la construcción social del conocimiento.

Socioepistemología y otredad

La socioepistemología aspira a que la mayoría de las personas puedan entender y disfrutar de la matemática, y no sólo una elite intelectual (Cantoral, 2010). De esta manera busca la inclusión de los excluidos de aprenderla (Soto, 2010). De aquí la importancia de estudiar las diversas maneras de entender al mundo de *otros,* sus contextos socioculturales, y el cómo estos construyen y significan el conocimiento matemático (Espinoza, 2009). Al interesarnos en como el *otro* significa su construcción de conocimiento abandonamos la mirada tradicional que entiende a este como un sistema de verdades seguras no modificable por la experiencia humana (D´amore, 2005), para posicionarnos en una postura de corte pragmático considerando al conocimiento como un emergente de sistemas sociales. Entendemos por significación al proceso de adquisición progresiva de significado en contextos específicos.

Para enfrentar los problemas de la construcción social del conocimiento, su difusión institucional, los mecanismos de aprendizaje y la socialización del saber científico, necesitamos considerar que la construcción de significados depende de los contextos específicos en los que estos son producidos y difundidos (Cantoral, 2010). Este carácter contextual ha sido estudiado por la socioepistemología por más de veinte años. Los constructos *contexto de significación* y *práctica de referencia* han sido utilizados para explicar el carácter contextual del conocimiento. El primero fue introducido por Cantoral (1990) para explicar diversos momentos en los que el conocimiento se significa de diferentes maneras, y el segundo introducido por Farfán (1993) y desarrollado más ampliamente por Montiel (2005) al proponer una epistemología de prácticas para estudiar la construcción social del conocimiento matemático.

En Cantoral (1990; 2001) se estudia la construcción social del cálculo en diferentes matematizaciones del pasado y en profesores en ejercicio hoy. Se presenta a la predicción (prædiciere), entendida como una relación simbiótica entre la analiticidad y la predicción de la física, como una *práctica social*. Se acentúa que la construcción de conceptos y procedimientos matemáticos se construyeron en diversos ámbitos en los que adquieren significación (Cantoral, 2001, p.xvi). Se introduce la noción de *contextos de significación* para explicar esto, planteando tres niveles o estadios de evolución de los contextos en los que la predicción se expresa y significa: la prædiciere como esquema, como modelo y como teoría.

En Espinoza (2009) estudiamos cómo ciertas personas o instituciones construyen y significan conocimientos en diferentes contextos específicos. Nuestra intención fue entender al *otro* desde su mundo, mediante el estudio de una dimensión *sociocultural* y considerando las diversas *maneras de ver* al conocimiento matemático (lo cual denominamos *racionalidad*). Nos preguntamos ¿cómo incide la realidad y visión de mundo del *otro* en cómo este construye conocimiento? Estudiamos distintos autores que hicieron aportaciones significativas en la construcción de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Consideramos a las obras antiguas como producciones con historia, como objetos de difusión y como parte de una interpretación intelectual global. Estudiamos la historia del autor de la obra, los acontecimientos sociopolíticos de la época, los debates ideológicos causados por estos, los problemas de la ciencia de la época y fenómenos de difusión del saber científico. Fruto de esta investigación es una explicación más profunda del constructo *contexto de significación*.

Una caracterización de los contextos de significación

Aludiendo a lo que coloquialmente se entiende por contexto, podríamos considerarlo como el conjunto de situaciones en la que el conocimiento fue construido, es decir, un ámbito situacional (Figura 1).

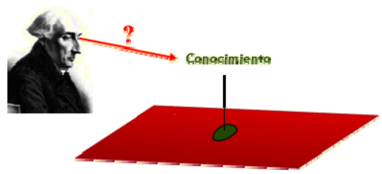


Figura 1

Pero con base en la evidencia encontrada en Espinoza (2009) proponemos que, para entender el contexto en el que *otro* sitúa la significación de cierto conocimiento, se tiene que considerar a este como compuesto por tres dimensiones, a saber: una dimensión situacional que define su tamaño, una dimensión sociocultural que define su profundidad, y una dimensión de la racionalidad que determina una *manera de ver* situada al contexto en cuestión (Figura 2).

Estudiando en este contento tanto las intencionalidades que subyacen a la construcción del conocimiento como también sus ideas germinales, podremos situar la significación que ciertas personas o instituciones atribuyen al conocimiento. De esta manera *un contexto de significación es un ámbito en el cual cierta persona o institución sitúa la significación de cierto conocimiento.*

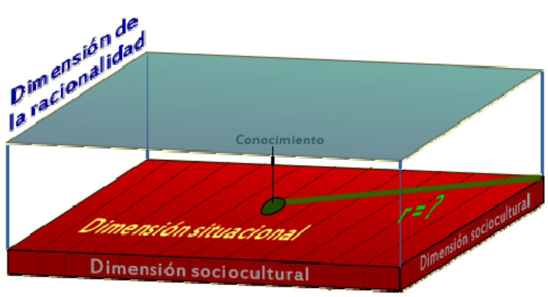


Figura 2: Contexto de significación para cierto conocimiento

La dimensión situacional del contexto de significación:

La dimensión situacional ser refiere al conjunto de factores o circunstancias consideradas para el estudio y define una amplitud (r en Figura 2).

La dimensión sociocultural del contexto de significación:

Esta dimensión se refiere a la manera en la que se mira la dimensión situacional y define una profundidad. Crespo (2007) plantea que lo sociocultural vincula características sociales e individuales, que surgen de algún grupo culturalmente situado. Explica que los escenarios socioculturales son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales, los cuales están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos. Estos elementos caracterizan una manera de mirar los factores o circunstancias considerados para el estudio. La mirada sociocultural del escenario es una condición necesaria para situar una investigación en Socioepistemología.

La dimensión de la racionalidad del contexto de significación:

La dimensión de la racionalidad se refiere a una *"manera de ver"* al conocimiento y es situada al contexto. En los últimos años se ha criticado al concepto tradicional de la racionalidad, entendida como la capacidad de realizar procesos inferenciales con base a principios normativos abstractos, como la lógica (Stein, 1996, citado en Cantoral, 2010). Se ha planteado una visión alternativa, en la cual se busca entender los principios normativos del razonamiento en los contextos específicos en que se realiza una inferencia (Huang, 2008). Se plantea que las personas piensan y aprenden de manera contextualizada, por lo que las racionalidades relativas remplazarán la ambición de una racionalidad absoluta del pensamiento (Toulmin, 2003, citado en Chamizo, 2007).

Al ser relativas al contexto, las razones que validan una racionalidad pueden ser no solo el pensamiento lógico y formal, sino también la intuición, la funcionalidad, la emoción, una experiencia personal profunda, el consenso de una multitud, creencias arraigadas, concepciones mágicas o metafísicas, la fe, el sentido común o incluso una corazonada (Toulmin, 1972; Villoro, 1989). Esta racionalidad contextualizada aspira explicar de mejor manera los procesos de significación de conocimientos. Si considerar al *otro* en una explicación de la construcción social de conocimientos, entonces es necesario entender su *manera de ver* al conocimiento.

> *Entendemos a la racionalidad como una "manera de ver" al conocimiento matemático, en donde se busca entender los principios normativos del pensamiento en contextos específicos, considerando como razones validas no solo el pensamiento lógico y formal,*

sino también la intuición, la funcionalidad, el consenso de una multitud, la fe, el sentido común, etc.

Esta "manera de ver" sitúa al pensamiento de las personas en el contexto específico, haciéndoles preocuparse de cierto tipo de problemas y no de otros, y pensando la matemática de cierta manera y no de otra. También la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático es relativa a cierta racionalidad (Espinoza, 2009).

Contextos de significación y resultados de investigación

En Cantoral (1990; 2001) los *contextos de significación* permitieron explicar cómo el conocimiento matemático se significa de diversas maneras en diferentes contextos específicos. Al estudiar la normatividad existente en la construcción del conocimiento en estos diferentes contextos, nace el constructo de *Práctica Social*. En Espinoza (2009), al ampliar la dimensión sociocultural al considerar aspectos de contingencia política, las *maneras de ver* al conocimiento y los debates ideológicos de la época, los *contextos de significación* nos permitieron profundizar la explicación sobre la construcción social del conocimiento matemático.

Para estudiar una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX, construimos tres diferentes contextos de significación que nos permitieron explicar diferentes significaciones de este conocimiento matemático. En cada uno explicamos las dimensiones situacional, sociocultural y de la racionalidad. En la dimensión situacional incluimos elementos como la familia del autor, su trayectoria académica, lugares en los que trabajó como científico y acontecimientos sociopolíticos de la época. En la dimensión sociocultural consideramos los debates de corte ideológico producidos por una situación sociopolítica y las luchas de poderes que incidieron en que ciertas construcciones matemáticas triunfaran sobre otras. En la dimensión de la racionalidad consideramos diferentes maneras de ver al conocimiento matemático, de considerarlo como relativo al conocimiento de las ciencias de su tiempo a considerarlo como una ciencia autónoma. En la primera el conocimiento se validaba con base a la experiencia de la naturaleza, en la segunda las nociones matemáticas encuentran significación en problemas internos a su estructura (Espinoza, 2009).

Los *contextos de* significación nos permitieron entender, por ejemplo, que Lagrange publicó su obra titulada Teoría de las Funciones Analíticas porque fue forzado por la revolución francesa a dar clases en París. Que la ideología conservadora de Cauchy, (relacionada con su fe católica y por la cual apoyo a la monarquía en su lucha contra los revolucionarios de la época) incidió significativamente en que este desarrollara una construcción matemática que rechazó la relación entre el conocimiento matemático y las ciencias de su época. Que el cálculo que conocemos hoy nació por una necesidad de difusión escolar ya que en esa época se surgió la necesidad de masificar la enseñanza de la ciencia de alto nivel. También nos permitió encontrar las diferencias entre las significaciones actuales y las diversas significaciones históricas de conceptos matemáticos como la convergencia uniforme. Etc. Sobre estos temas hemos publicado profundizaciones en (Espinoza y Cantoral, 2010a; Espinoza y Cantoral, 2010b).

Conclusión

La relevancia que tiene la contextualidad en la investigación actual hace necesaria la existencia de marcos explicativos que permitan estudiar el rol de los contextos en la construcción social del conocimiento. Al estudiar esto encontramos que la *dimensión sociocultural* y la *manera de ver* al conocimiento inciden significativamente en la construcción social y difusión institucional del conocimiento matemático. Los *contextos de significación* permiten entender las diversas significaciones que tiene el conocimiento en diferentes contextos específicos. No podemos entender a las personas construyendo conocimiento desprendidas de su escenario sociocultural. En este sentido, la *otredad* como una perspectiva que busca entender al *otro* desde su mundo es fundamental. Advertimos que la caracterización de los *contextos de significación* presentada en esta investigación nace de una investigación desarrollada en un escenario histórico. En otros escenarios de investigación esta caracterización puede necesitar ser problematizada.

La socioepistemología busca rediseñar el discurso matemático escolar actual, de manera que el conocimiento matemático sea accesible para la mayor cantidad posible de personas. Para lograr esto, se necesita entender como las personas construyen conocimiento matemático. De aquí que el interés de entender el cómo *otros* significan y validan su construcción de conocimientos refleja la intención de democratizar el aprendizaje de la matemática. Con esto buscamos contribuir a una educación que busca la transformación social y la justicia.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prœdiciere y lo Analítico"*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa 23, 1043-1052 DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J. & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número Especial 1, 27 - 46.

Chamizo, J. (2007). Historia y epistemología de las ciencias: las aportaciones de Toulmin a la enseñanza de las ciencias *Enseñanza de las Ciencias, ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona, 25*(1), 133-145.

Covian, O. (2005) *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Crespo, C. (2007). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, Mexico.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2010a) Una propuesta metodológica para estudios socio-históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23,*889-897. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2010b) Una propuesta metodológica para estudios socio-históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23,*1033-1042. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería*. Estudio de caso. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav, IPN.

Huang, X. (2008). *De la racionalidad tradicional a la racionalidad contextualizada.* México DF: Publicaciones Cruz O., S.A.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral. México: Cicata-IPN.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Toulmin S. (1977). *La comprensión humana.* Editorial Alianza. Madrid, España.

Villoro, L. (1989). *Creer, saber, conocer.* Siglo XXI, México.

Wenger, E. (2000). Communities of Practice and Social Learning Systems. *Organization articles* 7(2), 225-246.

UN ESTUDIO ACERCA DEL FENÓMENO DE EXCLUSIÓN A NIVEL SUPERIOR EN LA CARRERA DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Daniela Reyes Gasperini, Cecilia Crespo Crespo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
dreyes@cinvestav.mx, crccrespo@gmail.com

Resumen. En este trabajo se intentan identificar, sobre la base de un análisis socioepistemológico, algunos de los posibles factores de deserción y las causas generadoras de estos mismos, en la carrera del Profesorado de Matemática. Su objetivo es buscar las modificaciones pertinentes en dicha formación con el fin de disminuir considerablemente la deserción. Para este análisis, se considerarán las opiniones de los estudiantes y se buscarán analogías en ellas, como así también, se postularán otras que se consideran pertinentes.

Palabras clave: futuros docentes, deserción, fracaso

Abstract. In this paper we attempt to identify, based on a socioepistemological analysis, some of the possible factors of attrition and their causes, in the career of teachers of mathematics. Its objective is to seek appropriate amendments to such training to significantly reduce dropout rates. For this analysis, we consider the students views of and try to find analogies in them, as well, entering the race, others that are considered relevant.

Key words: future teachers, desertion, failure

Introducción

En el año 2008 un informe sobre la deserción, realizado por los propios estudiantes del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina, revela que más del 30% del total del estudiantado de los primeros años había abandonado sus estudios. Específicamente, más del 39% de los ingresantes al Profesorado de Matemática desertaron. Esto puede adjudicársele a muchos factores: social, cultural, edilicio, económico y/o educativo, entre otros. Este hecho motivó que en este trabajo se intente hacer un primer acercamiento a las posibles causas generadoras del fracaso y la deserción a nivel educativo superior, es decir, aquellas que se manifiestan en el proceso de aprendizaje de los futuros docentes de Matemática.

Tomando como punto de partida la contribución socioepistemológica de la Matemática Educativa, a saber: considerar el *"doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática al seno de lo didáctico, por una parte, y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción -social e individual- del conocimiento"* (Cantoral y Farfán, 2003, pp.30), se analizarán encuestas a estudiantes donde manifiestan cuáles son sus mayores conflictos por los cuales abandonan las materias específicas de la carrera.

Algunos estudios actuales acerca del fracaso escolar en matemática

Se han realizado estudios donde se evidencia no sólo la existencia del fracaso escolar en el área de Matemática, sino también su progresivo aumento. Un trabajo de Carneiro-Abrahão (2008) revela que la práctica pedagógica ayuda al estudiante a pensar matemáticamente, provocando que los docentes reflexionen sobre su práctica y su realización de "mediación didáctica" que promueve situaciones de enseñanza y aprendizaje más placenteras y que eleven la autoestima del estudiante. Asimismo, se hace evidencia del cuestionamiento de los profesores hacia el currículo lineal que no ha de favorecer la interdisciplinariedad en momentos históricos en los cuales la matemática ha cooperado en la constitución del conocimiento. Sin embargo, reafirma que la gran problemática radica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicha área, incitando a su reflexión.

En el año 2007 se ha publicado un estudio realizado en la Universidad de La Laguna (Tenerife, España) el cual indica que el abandono en el primer año de estudios es de un 28% sobre el total de los ingresantes, destacando que, en España, "hay que tener en cuenta que el gasto de un alumno por curso académico es bastante alto, y de ese coste global el estudiante sólo cubre aproximadamente un 10% en concepto de matrícula" (González, Álvarez, Cabrera, y Bethencourt, 2007, pp.72). Ahora bien, teniendo esta consideración y contextualizándola en Argentina, nos replanteamos: ¿es cierto que asegurando, bajo la ley, una educación gratuita se evitará el abandono de los estudiantes?, ¿es el costo de la educación el mayor factor de deserción? En este trabajo intentaremos acercarnos a un nuevo posible fenómeno que genera la deserción de los aspirantes a ser docentes de nivel secundario y/o terciario.

La visión de la exclusión desde la socioepistemología

La Matemática Educativa, según Cantoral y Farfán, es "una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo veinte y que en términos generales, podríamos decir se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático" (Cantoral y Farfán, 2003, pp.28), partiendo de la necesidad de implementar modificaciones educativas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares.

Las características de las investigaciones en Matemática Educativa, son el miran dentro del aula, haciéndose entre otras preguntas acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, cómo se transforma el saber sabio en saber enseñado, cómo se transforma el discurso matemático en el discurso matemático escolar, qué interacciones se realizan durante la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y cómo aprovechar dentro del aula construcciones externas (Crespo Crespo, 2009).

Los matemáticos educativos "asumieron como problemática aquella concerniente a la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afecta también las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor" (Cantoral y Farfán, 2003, pp.29).

Soto (2009) ha afirmado en sus trabajos que la perspectiva del "fracaso en Matemáticas" tiende a personificar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje. Asimismo, demuestra cómo desde un enfoque socioepistemológico se puede hacer foco sobre la *matemática escolar* evidenciando las características del discurso Matemático Escolar (dME) que fundamenta el modelo educativo actual; pudiendo de esta manera, determinar un fenómeno social que se reproduce en el modelo que se ha adoptado para explicar la construcción del conocimiento matemático: la exclusión. "No como habitualmente se ha investigado, asociado a las categorías de excluidos: raza, género o pobreza, sino como aquella exclusión que se produce por el sistema de razón que fundamenta el modelo de construcción del conocimiento matemático" (Soto, 2009a, pp.7). Su estudio muestra cómo el discurso matemático escolar genera violencia simbólica, en otras palabras, plantea que es el propio conocimiento -trastocado con fines didácticos- el cual impone argumentaciones, significados y procedimientos.

Cuando los profesores se enfrentan a un aula donde el desinterés, la falta de motivación, la falta de estudio y los cuestionamientos de los estudiantes en relación a la escuela son moneda corriente, y para algunas escuelas el saber matemático es inamovible y el problema es movilizar al estudiante y generar estrategias para alcanzar un conocimiento, por el contrario, la Matemática Educativa cree que la matemática escolar es algo que se construye, donde no hay contenidos fijos, ni formulaciones únicas (Cantoral en entrevista de Ponteville, 2000). Desde esta perspectiva es desde la cual, las investigaciones en Matemática Educativa sobre el marco teórico socioepistemológico, pueden influir en lo que es el aprendizaje de la Matemática hoy día, replanteándose cómo debería construirse el conocimiento si el fin es el aprendizaje, entendiendo las dificultades de sus procesos y sus fenómenos, donde su base fundamental es analizar la confrontación existente entre la Obra Matemática y el Discurso Matemático Escolar y rediseñar este último, lo cual provocará un aprendizaje que resignifique al estudiante -ya sea de secundario o a un futuro docente- haciendo que su conocimiento sea funcional y que esté ligado con la humanidad.

Las investigaciones realizadas por Soto (2009a) le dan al discurso matemático escolar (*dME)* un nuevo estatus: por un lado, el de sistema de razón que norma las formas de construir el conocimiento matemático, y por otro, hace evidente un fenómeno de exclusión producido por el *dME* y que vive en nuestros salones de clases invisiblemente: la violencia simbólica.

En este trabajo, se toma como referencia a la educación de los estudiantes de Profesorado de Matemática, teniendo en cuenta el análisis realizado por Soto respecto a la exclusión que provoca el dME. Por lo tanto, se deberán considerar también como factores de deserción aquellos referidos a la vocación o falta de ella, al descubrimiento de la esencia de la carrera misma, a las influencias económicas inmersas en el campo laboral, entre otras, ya que se estará investigando sobre una población adulta, de nivel terciario, donde los posibles factores de deserción son -o podrían ser- diferentes a los observados a nivel secundario.

La exclusión entre los estudiantes de profesorado de matemática

Para llevar a cabo este trabajo se han hecho 60 (sesenta) encuestas a estudiantes de diversos años del Profesorado de Matemática del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, ubicado en Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. Las encuestas eran anónimas y se les solicitaba, en primer lugar, que completaran una grilla de materias aprobadas, recursadas o abandonadas con la finalidad de poder ubicar el grado de adelanto del estudiante en la carrera. En segundo lugar, se les solicitaba que colocaran cuáles eran las materias que habían abandonado y sus motivos. Por último, se les preguntaba “¿Cuáles fueron los motivos por los cuales eligió esta carrera?” y “¿Cuál o cuáles son, a su criterio, los factores que provocan que haya deserción en la carrera?”. La edad promedio de los encuestados es de 23 años y la mayoría transitaba la última tercera parte de la carrera.

El 93%, aproximadamente, de las materias abandonadas corresponden al “Eje disciplinar”, entre ellas se encontraban: Análisis Matemático, Álgebra, Geometría, Probabilidad y Estadística, Fundamentos de la Matemática, entre otras; siendo los motivos principales de la deserción: la disponibilidad horaria que se superponía con sus horarios laborales, la falta de entendimiento a la materia y la falta de entendimiento a la explicación del docente.

He aquí algunos puntos interesantes a destacar. En primer lugar, casi la totalidad de las materias abandonadas corresponden al Eje disciplinar, es decir, a materias que refieren puramente al conocimiento matemático. Esto nos lleva a replantearnos qué es lo que genera que los aspirantes a docentes de Matemática fracasen tan fuertemente en los contenidos específicos de la materia que, posteriormente, corresponderán a los contenidos de sus clases. Podríamos preguntarnos si está vinculado este fracaso de los futuros docentes con el fracaso de los estudiantes de secundario; o viceversa, que sea -como aseguran muchos de los estudiantes en sus respuestas- la mala base secundaria la que provoque el posterior fracaso en el nivel terciario; o a su vez, que ambas afirmaciones seas verdaderas. Citando la frase de

Freire: "enseñar no es transferir conocimientos, sino crear las posibilidades para su producción o su construcción" (Freire, 2006, p.47), podemos replantearnos si estos futuros docentes están preparados para enseñar en las condiciones que él enuncia. Si los propios futuros docentes tienen conflictos en poder construir el conocimiento y es ahí donde existen las mayores falencias, deberíamos comenzar por cuestionarnos cuáles son las insolvencias en esta formación y asegurarnos, que la aprobación de esas materias, no se deben a una fuerte perseverancia, sino a una buena construcción del conocimiento.

En segundo lugar, al tratarse de personas adultas que estudian en el profesorado, los conflictos también radican en sus situaciones personales, como por ejemplo los horarios del trabajo y el tiempo disponible para dedicarle al estudio. Esta carrera está diseñada para concretarse en 4 (cuatro) años con una carga horaria total de 4352 horas, sin embargo, las estadísticas indican que la mayoría de los estudiantes la termina en la actualidad en no menos de cinco años. En las encuestas, los estudiantes aseguran que una de las mayores trabas es la correlatividad de las materias, como así también, la poca disponibilidad horaria de las distintas cátedras, que generan el retraso de sus estudios.

En tercer lugar, durante el análisis individual de las encuestas, se denota que los estudiantes hacen la diferencia entre "*no le entendía al docente*" y "*tenía dificultades con la materia*". Con esto, queremos señalar que existen dos conflictos que se están dando a conocer y que los mismos estudiantes han notado: por un lado, puede existir una dificultad didáctica por parte del docente al momento de explicar los contenidos académicos; por el otro -en el que la socioepistemología está haciendo hincapié- existe una dificultad en el mismo contenido matemático, sobre lo cual Farfán y Cantoral (1990) afirman: "las dificultades en la transferencia de significados matemáticos, tenían sus raíces en el discurso matemático utilizado, que a saber, está fuertemente influido por los paradigmas típicos del discurso matemático puro". (citado por Soto, 2009a).

Por último, ante la pregunta "¿Cuáles fueron los motivos por los cuales eligió esta carrera?" muchos estudiantes contestaron "*Porque me gusta la Matemática y también la docencia*", "*Me gusta la Matemática y además transmitirla*", "*Porque siempre tuve facilidad para la Matemática y le explicaba a mis compañeros en la secundaria*", entre otras.

Ahora bien, ¿qué es lo que los estudiantes consideran "gustar la Matemática"? ¿Qué es lo que ellos enseñaban en la secundaria: mecanismos, algoritmos, reglas nemotécnicas o a construir el conocimiento matemático? Como hemos señalado anteriormente, se investigó sobre la falta de construcción del conocimiento a nivel secundario, por tanto, cuando un estudiante ingresa al Profesorado, ¿lo hace convencido de que tendrá a su cargo a estudiantes con los cuales deberá construir el saber matemático? O bien, ¿lo hace imaginando que deberá *transmitir* lo aprendido durante su secundaria, aquellos conocimientos que a él/ella le han resultado fácilmente comprensibles?

Una pregunta común de un estudiante de profesorado es *"¿Por qué es necesario saber "tanto" de Matemática, si en el aula se enseña lo que uno ve en los dos primeros años de la carrera?*" De esto uno recién podría obtener respuesta cuando se enfrenta a los interrogantes de los estudiantes en el aula, quienes a medida que transcurre el tiempo y adquieren nuevos conocimientos se vuelven cada vez más cuestionables. Los docentes deben tener un pensamiento matemático avanzado para poder contestar cada una de las consultas de los estudiantes, como así también, de no saber su respuesta, tener la honestidad, la capacidad y la responsabilidad de poder decirles que averiguarán lo necesario para darles una respuesta correcta, teniendo en cuenta la naturaleza de la matemática escolar de cada uno de sus niveles. Esto es, posiblemente, lo que hace que muchos estudiantes descubran que la carrera de Profesorado de Matemática no era lo que esperaban.

Lezama y Mingüer (2005) reflexionan respecto a esto: "Considerando que hasta ahora ha predominado una concepción de *cultura matemática*, que involucra únicamente al conocimiento matemático, haciendo referencia al grado de erudición en esta materia que un individuo pueda poseer; nosotros, en el marco teórico que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa ofrece, identificamos que en el término *cultura matemática,* además del conocimiento matemático puro, existen múltiples significaciones de origen sociocultural que definen la forma en la que el individuo concibe a las matemáticas y se relaciona con ellas." (Lezama y Mingüer, 2005, p.545). Por tanto, consideramos como una posible causa de la deserción a nivel educativo superior la falta de orientación vocacional -o de vocación propiamente dicha-, es decir, el desconocimiento de la esencia de la docencia en Matemática, el hecho de descubrir que la carrera no era la esperada, que contenía un fundamental valor agregado a la mera transmisión de conceptos: la *construcción* del conocimiento matemático.

Comentarios finales

En este trabajo se intentó un primer acercamiento a las posibles causas generadoras del fracaso y la deserción a nivel educativo superior, obteniendo como resultado, en primer lugar, como era de esperarse, lo observado en las investigaciones de Soto (2009 y 2009a) donde se pone de manifiesto que el dME es uno de los grandes factores de fracaso, que en vísperas de sus explicaciones es la exclusión de la construcción del pensamiento matemático lo que se oculta detrás del fracaso. A su vez, en segundo lugar, fueron detectados factores correspondientes más específicamente a los estudiantes de nivel superior -cuyas condiciones características son diferentes a los estudiantes secundarios- inmersos en la sociedad adulta, donde las cuestiones laborales, horarias y personales afectan de manera predominante a la hora de llevar adelante en tiempo y forma sus estudios. En tercer y último lugar, hasta el momento, se ha detectado que existen diferentes creencias sobre lo que significa ser docente, específicamente, en Matemática, donde la subestimación o sobreestimación de la carrera podría afectar a la continuidad académica.

Es indispensable destacar que este trabajo es el comienzo de un estudio que se continuará, en cuya continuación se buscará profundizar en dichos factores de fracaso, deserción y exclusión detectados, mediante trabajos de campo, entrevistas personalizadas, encuestas masivas y, asimismo, se pretende examinar la existencia de similitudes y diferencias referidas a estos factores, entre los Institutos de Formación Docente en Argentina -específicamente el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"- y en México; con el fin de poder explorar, conjeturar y formular posibles soluciones para que dicha deserción disminuya considerablemente a través del tiempo.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(1), 27-40.

Carneiro-Abrahão, A. (2008). The Interaction in the Learning of the Mathematics: *Teachers' Stories*, 7(3), 711-723. Univisity Psychology, Bogotá, Colombia.

Crespo Crespo, C. (2009). *El aula actual: un desafío para el profesor de Matemática.* Conferencia presentada con motivo de los 50 años del Instituto Superior del Profesorado Técnico. Noviembre, Buenos Aires.

Farfán, R.-M., Cantoral, R. (1990). *Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior*. Primer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación*. Núm. 13, Año 4, Parte 2, 19 – 26. PNFAPM – SEP, México.

Freire, P. (2006). *Pedagogía de la autonomía: Saberes necesarios para la práctica educativa.* Buenos Aires: Siglo Veintiuno.

González, M.; Álvarez, P.; Cabrera, L. y Bethencourt, J. (2007). *El abandono de los estudios universitarios: factores determinantes y medidas preventivas.* Revista española de Pedagogía, Núm. 236, pp.71-86, Tenerife, España.

Lezama, J. y Mingüer, L. (2005). Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores del Nivel Superior de Educación: Estudio de Caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 543-549*.

Ponteville, C. (Comunicador) (2000). La matemática educativa en Latinoamérica. Entrevista al investigador Ricardo Cantoral Uriza. Ciudad de Panamá, Panamá: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Soto, D. (2009a). El discurso matemático escolar y el fenómeno de exclusión en el campo de las matemáticas. *Presentado en la Escuela de Invierno en Matemática Educativa.*

Soto, D. (2009b). ¿Fracaso o exclusión en el campo de las matemáticas? *Presentado en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (en revisión).*

CAPITULO 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Introducción al Capítulo de El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Alejandro Miguel Rosas Mendoza

CICATA-IPN. (México)
alerosas@ipn.mx

La formación de profesores es un tema de preocupación constante en la comunidad latinoamericana desde hace muchos años, un breve análisis de las contribuciones realizadas en esta área en los pasados números del ALME nos permiten constatar esta afirmación.

En el ALME 11 (1998) se publicaron 5 artículos cuyos autores eran de Costa Rica, México y Argentina. Estos artículos cubrieron temas relacionados con la geometría, el conocimiento de la matemática que deben tener los profesores, la resolución de problemas como técnica didáctica, la influencia de las concepciones de profesores y la concienciación del profesor e intercambio de experiencias en talleres y cursos de formación.

El ALME 12 (1999) incluyó solo 4 artículos con autores de Argentina y México. La actualización de conocimientos en geometría, la exploración de los conocimientos de geometría que tienen los profesores, la resolución de problemas y sesiones de discusión fueron los temas abordados en esta ocasión.

Hubo siete artículos en el ALME 13 (2000) y sus autores fueron argentinos, mexicanos, españoles y cubanos. La capacitación continua, el desarrollo de habilidades específicas a las asignaturas, la influencia de las prácticas docentes en el aprendizaje, la educación a distancia. También se vertieron comentarios sobre programas de maestría en educación, diversas tendencias psicopedagógicas fueron atendidas en este número.

Recuentos histórico culturales, la aplicación de destrezas de aprendizaje, la investigación-acción, el aprendizaje de la aritmética, la creación de estándares para la educación, la aplicación de la teoría de situaciones didácticas, la capacitación continua y el perfil curricular del profesor fueron los temas abordados en el 2001 dentro del ALME 14. En total siete artículos de autores de México, Argentina, Colombia y Costa Rica.

En el ALME 15 (2002) por primera vez se rebasó la decena de artículos teniendo en total 17. Argentina, Guatemala, Perú, Venezuela, México y Brasil abordaron temas de preocupación propia y compartida entre los que se tuvo la evaluación de proyectos de formación, la resolución de problemas, el interés en la formación de profesores investigadores mediante diferentes aproximaciones. También se discutió la generación de autonomía, la reflexión y la transferencia de conocimientos; la actualización de profesores en temas escolares, el desarrollo de la creatividad por ser un elemento necesario al profesor, incluyendo la lectura y conocimiento del libro de texto utilizado, el uso de la metodología activa para enseñar matemáticas, de la transposición didáctica para diseñar actividades, del análisis de influencias en formación de profesores, incluyendo el análisis de errores de alumnos y uso de software especializado. La formación didáctica específica como eje principal de formación de profesores y discusiones acerca de los diferentes tipos de matemáticas a enseñar.

En el ALME 16 del 2003 Cuba, España, México y Argentina contribuyeron con cuatro artículos que abordaron el desarrollo de esquemas de clasificación en cursos de geometría, el uso de portafolios y la evaluación como elemento a considerarse en la formación docente; sin omitir el conocimiento y uso de tecnologías en el aula, y el estudio de concepciones de profesores sobre el concepto de función.

Para el 2004 el ALME 17 registró la incorporación de más países Francia, Republica Dominicana, México, España, Venezuela, Chile, Brasil y Colombia para un total de 13 artículos sobre temas como los conocimientos ocultos y el currículum oculto, propuestas curriculares, la reproducibilidad de situaciones didácticas, concepciones de profesores sobre modelación y calculadoras gráficas. También se abordaron las competencias profesionales y las matemáticas de ingenieros en alimentos; el discurso escolar y la construcción de significados, la resolución de problemas. Se tuvieron comentarios sobre la visión teórica vs visón de divulgación, el uso del juego en el aprendizaje, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos para pasar de la aritmética al algebra. Finalmente se abordaron los diseños de cursos en línea, reflexiones críticas sobre proyectos pedagógicos y de formación, y la capacidad de investigar y la innovación constante.

En el 2005 ocho países contribuyeron con 27 artículos para ser el número con más grande de escritos en esta área. Venezuela, México, Uruguay, Costa Rica, Cuba, Francia, Chile y Argentina mostraron las investigaciones y reflexiones sobre la formación de pensamiento complejo y educación matemática crítica, la historia del cálculo, el uso de sistemas para el llamado e-learning. Se abordó la metodología participativa en cursos de geometría para formación de profesores, talleres para conjeturar y demostrar con la metodología de van Hiele, la resolución de problemas fue aplicada para generar conceptos. Sobre el desarrollo de metodologías para integrar ciencias y matemáticas, la comparación de sistemas escolares, las nociones del profesor sobre la demostración y la influencia en sus prácticas también se discutió. La geometría, los comentarios sobre talleres de geometría y talleres acerca del uso de geometría dinámica fueron incluidos; se mencionaron otras aproximaciones teóricas como los conflictos epistémicos en noción de función, caracterización de significados de fracciones, teoría de situaciones y transposición didáctica, y diferentes visiones interdisciplinarias para analizar la educación matemática. Se habló también del uso inadecuado de conceptos matemáticos, de concepciones de profesores en la enseñanza de conceptos, de talleres para transferencias de resultados, cursos de actualización con reconstrucción de saberes, actividades de modelación en talleres de profesores y el desarrollo de habilidades del pensamiento.

El ALME 19 (2006) incluyó en total 20 artículos de Colombia, Argentina, Chile, Francia, México, España, Perú, Brasil y Venezuela. Se habló sobre los tipos de razonamiento pedagógico, la Teoría de Situaciones Didácticas. Se mencionaron experiencias sobre talleres de producción de materiales didácticos, las concepciones de profesores sobre cuerpos geométricos y la geometría en general; el discurso escolar del profesor en nociones variación, la resolución de problemas articulando matemáticas y otras disciplinas. Las representaciones de los profesores sobre epistemología, enseñanza y aprendizaje del saber matemático, las actitudes del profesor sobre la estadística, el uso de software y las redes de profesores y su influencia en el discurso y práctica del profesor. Las competencias en la formación, el análisis de conocimientos acerca del cálculo y de proporcionalidad en profesores muestran preocupaciones actuales y comunes a toda Latinoamérica.

Para el 2007 en el ALME 20 los 15 artículos incluidos trataron sobre historia de las matemáticas, las concepciones de profesores y sus influencias sobre la práctica y las competencias desarrolladas, las concepciones de profesores sobre cálculo, la motivación y las estrategias de aprendizaje. Se incluyeron escritos sobre sistemas de representación de los números enteros, la evaluación de talleres de docentes, el análisis de textos matemáticos utilizando configuración epistémica; finalmente los efectos de la explicación del profesor al introducir temas nuevos y el uso de redes y tecnología para la formación fueron temas relevantes en este número construido gracias a la participación de investigadores de México, Cuba, Venezuela, España, Argentina, Chile y la República Dominicana.

La presentación de programas de posgrado en línea, de experiencias en talleres de resolución de problemas, la incorporación de componentes didácticas a la formación de profesores y la profesionalización docente mediante estrategias de capacitación continua fueron temas tratados en artículos del ALME 21. La apropiación de representaciones que favorecen las habilidades también se incluyeron al igual que el discurso escolar incluyendo su análisis y organización; la representación gráfica de funciones y las acciones para la formación en ciudadanía aunadas al enfoque de resolución de problemas, la evaluación basada en la observación y la caracterización de prácticas docentes en el aula mostraron líneas de investigación consideradas en la formación de profesores. Finalmente en este número del 2008 se abordó el uso de foros de discusión asíncronos, la caracterización de la transposición didáctica del álgebra, así como las concepciones de profesores sobre temas de geometría y ontosemiótica. En la conformación de esta sección del ALME participaron investigadores de Mexico, Argentina, Cuba, Venezuela, España y Brasil.

El ALME 22 (2009) se formó con 21 artículos de mexicanos, venezolanos, brasileños, colombianos, costarricenses y argentinos. Se incluyeron artículos sobre el aprendizaje de matemáticas por profesores de sistemas escolares por televisión, las prácticas de docentes en ingeniería así como la modelación y talleres de discusión. Hubo un estudio etnográfico de la razón de cambio y otro sobre el uso de la historia de matemáticas en la enseñanza; también sobre actitudes de profesores acerca de cursos de capacitación, los procesos de evaluación de profesores en su práctica y en temas específicos así como los roles que desempeña; sin olvidar la importancia de la relación del conocimiento matemático con la labor docente, las percepciones de profesores sobre la estadística y los cambios observados en las creencias sobre cursos en línea. Finalmente el uso de calculadoras en el aula, la formación de profesores mediante el diseño de actividades didácticas y discurso escolar del profesor también fueron abordados.

En el número anterior, en el 2010 sólo hubo nueve artículos que representan una disminución con respecto a los números anteriores. Sin embargo esa disminución no se dio en su calidad e importancia. Provenientes de México, España, Argentina y Colombia los escritos incluyeron reflexiones sobre problemáticas de la enseñanza y de sentido de realidad, concepciones de profesores sobre objetos matemáticos, caracterización de creencias y valoraciones de los profesores, propuestas de revisiones de programas de estudio de institutos de formación docente. Las estrategias y experiencias de docentes en la enseñanza de la probabilidad, los estudios de la relación entre significados institucionales de optimización en cursos de cálculo y la formación continua considerando la demostración como elemento importante fueron incluidos.

Por lo anterior podemos afirmar que la riqueza, pertinencia e importancia del pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional estarán presentes en este número 24 del ALME. Con lo cual estamos seguros de que su contenido será de la mayor utilidad para futuras investigaciones y serán referencias obligadas en este campo de la matemática educativa.

CREENCIAS SOBRE LA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Edgar Gerardo Domínguez Palomo, Martha Imelda Jarero Kumul
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. México
e.edgardominguez@gmail.com, jarerok@uady.mx

Resumen. La Matemática en contexto escolar suele ser percibida como una asignatura difícil, aburrida, poco práctica, abstracta, etc. Esto impacta en el estudiante, generando creencias sobre la Matemática que pueden bloquear su aprendizaje. Se considera que parte de estas creencias son transmitidas por el docente. Por ello, referenciándonos en el dominio afectivo, se pretende caracterizar las creencias de algunos profesores de nivel medio superior respecto a la Matemática, su enseñanza y aprendizaje, a partir de la tendencia didáctica que manifiestan en el aula con la finalidad de reconocer una dependencia con la práctica del profesor.
Palabras clave: creencias, dominio afectivo, práctica docente.

Abstract. Mathematics in the school context is often perceived as a difficult subject, boring, impractical, abstract, etc. This perception impacts on students, creating beliefs about mathematics that might affect their learning process. It is considered that some of those beliefs are transmitted by the teacher. Therefore, referenced in the affective domain, it is intended to characterize the beliefs of some senior high teachers about mathematics, teaching and learning, moving along from the didactic tendency manifested in the classroom, in order to recognize a relationship of dependence towards the teachers' practice.
Key words: beliefs, affective domain, teaching practice.

Introducción

La Matemática suele ser percibida y valorada como difícil, aburrida, poco práctica, abstracta, etc. Estas creencias intervienen en la generación de actitudes positivas o negativas hacia las matemáticas por parte de los estudiantes, a su vez impactan en la manifestación de gusto y satisfacción, aversión y rechazo, etc.; impulsando o bloqueando el aprendizaje y finalmente, derivando en el éxito o fracaso académico.

Las creencias se encuentran altamente relacionadas con los afectos, tienen un profundo grado de inconsciencia y subjetividad e impactan directamente en las emociones; inclusive se integran en un conjunto que Gómez (2000) nombra dominio afectivo, necesario para la comprensión del afecto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El dominio afectivo, o dimensión afectiva, es definido como un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición e incluye creencias, actitudes, valores, apreciaciones, gustos, preferencias, emociones, sentimientos, etc. Por otra parte, Caballero, Blanco y Guerrero (2007) indican que las creencias, actitudes y emociones del profesorado respecto a la Matemática, su enseñanza y aprendizaje, tienen una gran influencia en los alumnos.

Bajo este marco referencial, se presenta un nuevo proyecto de investigación que permitió conocer las creencias que tienen algunos profesores de matemáticas en el nivel medio superior sobre esta disciplina, su enseñanza y aprendizaje, con la finalidad de reconocer una dependencia con la práctica del docente. Así, nuestro objetivo de investigación es caracterizar las creencias de algunos profesores de bachillerato de cierta institución educativa, respecto a la Matemática, su enseñanza y aprendizaje, a partir de la tendencia didáctica que manifiestan en el aula: tradicionalista, tecnológica, espontaneísta e investigativa (Contreras, 1998). La práctica del docente caracterizada por la tendencia tradicionalista, se debe a que éste cree que la Matemática se encuentra en su fase ya finalizada, estática y rígida, por lo que su enseñanza debe favorecer la ejercitación repetitiva y su aprendizaje estará basado en adquirir aquella información transmitida por el docente. Por otra parte, en la tendencia tecnológica se cree que la importancia de la Matemática reside en los algoritmos, es por ello que el docente con esta creencia enfatiza en su práctica la exposición de procedimientos, generando que los discentes reproduzcan el razonamiento del profesor. A su vez, en la tendencia espontaneísta, el profesor funge como humanista y especialista en la coordinación de grupos, creyendo que la importancia de la Matemática se basa en los procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar. De esta forma, la enseñanza se basa en la ejecución de técnicas grupales en las cuales el dicente debe participar, aprendiendo cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno. Por último, en la tendencia investigativa, el profesor creerá necesario enlazar la Matemática formal y la Matemática cotidiana, favoreciendo en el estudiante instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo y la visión de la Matemática como construcción social del conocimiento.

El impacto en las creencias se observó en la práctica docente puesto que Solar y Díaz (2007) indican que el sistema de creencias puede ser inferido a través del comportamiento, aceptando que las creencias del docente guían y orientan su conducta, lo que causa que los docentes no estén frecuentemente conscientes del tipo de enseñanza que realizan.

Método de investigación

Para realizar la investigación se empleó la etnografía educativa, describiendo y analizando la práctica docente a través del registro de situaciones de aula, con la finalidad de clasificarla de acuerdo a las tendencias didácticas sugeridas por Contreras (1998).

Es así como el tipo de estudio que se implementó fue cualitativo y descriptivo, ya que interesó analizar el tipo de práctica del profesor y de situaciones presentes al momento en el que se realizó la exploración; esto a través del empleo del estudio de casos.

Durante esta fase se observó la práctica de dos profesores de nivel medio superior, con la finalidad de clasificar las conductas y comportamientos que demostraban en el aula y así, deducir las creencias que tenían en torno a la Matemática, su enseñanza y aprendizaje.

Se hará alusión a los profesores observados denotándolos como Profesor "A" y Profesor "B". El primero tiene 33 años de edad y 9 años de experiencia docente; cuenta con una formación de Licenciado en Educación Media con especialidad en Matemáticas y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Ha participado en cursos de actualización en docencia, por ejemplo sobre el uso del software *Cabri Geometre* en la enseñanza. El segundo, Profesor "B", tiene 53 años de edad y 20 años de experiencia docente; es Licenciado en Matemáticas y ha participado en cursos sobre educación bajo el modelo de competencias, entre otros.

Se procedió de la siguiente manera: se observaron seis sesiones de clase de cada profesor, registrando conductas y comportamientos de nuestro interés, posteriormente, con el apoyo de este registro, se procedió a clasificar cada indicador propuesto por Contreras (1998), de acuerdo a las tendencias didácticas. Los indicadores refieren a alguna creencia sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje.

Resultados

Se presentan los resultados de los dos profesores observados, así como un listado de sus creencias sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje.

Profesor "A"

Los indicadores que dan evidencia de las creencias del profesor "A" sobre la Matemática recaen en una tendencia tradicional y tecnológica. En términos de las creencias, el profesor cree que la importancia de la matemática escolar reside en la adquisición de conceptos y reglas, por lo que debe ser guiada de acuerdo con los cánones de la matemática formal y su finalidad debe basarse en aspectos procedimentales-algorítmicos. Algunas conductas y comportamientos que respaldan estas creencias, son:

Pide la participación de algunos estudiantes para resolver problemas en la pizarra, solicitando indicar los procedimientos

Promueve exclusivamente problemas en contextos intramatemáticos

Los indicadores que señalan creencias sobre la enseñanza de la Matemática, registran evidencias de conductas tecnológicas y en algunos casos, presencia de tendencias tradicionalistas y espontaneístas. Esto se cerciora, pues en la mayoría de las sesiones, el profesor resuelve problemas en la pizarra, sin ayuda del grupo; para posteriormente, solicitar a los discentes realizar ejercicios análogos al mostrado, cambiando ligeramente el contexto presentado. Además, las clases se organizan de acuerdo a objetivos que versan principalmente en la ejecución de algoritmos. Algunas evidencias son:

Expone en la pizarra la resolución del problema sin consultar a los estudiantes

Ejecuta el procedimiento sin solicitar intervención de los estudiantes

Con estas conductas y comportamientos, se deduce que el profesor cree que la metodología debe valerse de la ejercitación reproductiva (realización de ejercicios similares entre ellos), su práctica es creída como la exposición de una construcción simulada de algún concepto o método, por ello que los objetivos de clase son definidos en términos de la funcionalidad de los conceptos. En cuanto a la programación de la clase, ésta se basa, ya sea en el libro de texto o el programa de estudios de la asignatura, dejando a un lado los intereses, necesidades o niveles de los estudiantes. Finalmente, el profesor cree que su papel como docente es de técnico del contenido y del diseño didáctico, ya que se evidenció la organización de los contenidos de aprendizaje mediante la exposición, utilizando estrategias que procuraban ser atractivas.

De acuerdo con los indicadores de las creencias sobre el aprendizaje de las Matemática, se observa un tránsito continuo entre las tendencias tradicional y tecnológica. Cabe aclarar que las conductas y comportamientos referidos a algunos indicadores se consideran propios de ambas tendencias. Entre las actividades del profesor, se encuentran las siguientes: no incluye al estudiante en el diseño didáctico, es decir, no lo consulta ni acuerda con él la planeación de clase; le da un papel mayoritariamente pasivo aunque ocasionalmente lo invita a participar; promueve actividades para el estudiante, en las cuales éste tiene que reproducir el algoritmo mostrado por el docente; favorece únicamente el trabajo individual, y hace algunas expresiones que reflejan una carente confianza en las capacidades del estudiante. Esto se comprueba mediante las evidencias siguientes:

Pide la participación de algunos estudiantes para resolver problemas en la pizarra, solicitando indicar los procedimientos

Expresa: "a ver si alguien lo pudo resolver o entender"

Las creencias del profesor en estos aspectos señalan que el estudiante no tiene porque participar en el diseño didáctico; el éxito del proceso de aprendizaje depende de la reproducción de procedimientos y algoritmos mostrados por el profesor, aunque en ocasiones, el discente sólo debe escuchar y copiar, y en otras, participar; por ello, en todo momento debe atender a la exposición del profesor y creer en el contenido que éste le transfiere. Asimismo se tiene evidencia de que el profesor cree que el aprendizaje se realiza a través de procesos inductivos, siempre que se apeguen a un proceso deductivo (considerar casos particulares de una generalidad); esto mediante la asimilación del contenido presentado o por el hecho de haber sido instruido por el docente. Además, se cree que el tipo de agrupamiento ideal para el aprendizaje es el individual, motivado por la estructura lógica de la disciplina (guiado por el libro de texto o el plan de estudios).

Listado de creencias del profesor "A" respecto a la matemática, su enseñanza y aprendizaje

Creencias sobre la matemática

La importancia de la Matemática reside en los conceptos y reglas, así como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad.

El contenido matemático a movilizar en el aula no debe diferenciarse en estructura, aunque sí en nivel de abstracción, del conocimiento matemático formal.

La asignatura ha de tener una finalidad informativa y un carácter práctico que permita su aplicación en otros ámbitos de la Matemática, otras disciplinas o en la técnica; adquiriendo relevancia tanto los productos como los métodos que conducen a ellos.

Creencias sobre la enseñanza de la matemática

La enseñanza debe basarse en ejercicios que pretenden reproducir los procesos lógicos y el estudio de los errores por parte de los alumnos.

El profesor no debe exponer los contenidos en su fase final, sino simular un proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas.

Al carácter terminal de los objetivos de clase, se debe añadir su funcionalidad.

La programación debe ser es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina.

El docente debe ser un técnico del contenido y del diseño didáctico, permitiendo organizar los contenidos de aprendizaje, los cuales se transmiten utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas.

Creencias sobre el aprendizaje de la matemática

El alumno no debe participar en el diseño de las actividades, programación, etc.

La responsabilidad de los resultados del aprendizaje depende del grado de sumisión del alumno.

El estudiante debe enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduciendo el proceso lógico mostrado por el profesor, imitando así su estilo cognitivo.

La actividad del alumno no tiene porque incluir un tiempo para la reflexión sobre su propia acción.

El alumno no tiene por qué cuestionarle al profesor sobre el fondo del contenido.

El aprendizaje se cree memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina.

Aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.

El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el profesor se los presente o entendiendo el conocimiento que proviene del exterior.

La única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el individual.

La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.

Profesor "B"

Los indicadores referentes a las creencias del profesor en cuanto a la Matemática se encuentran dispersos entre las cuatro tendencias. En torno al sentido de la asignatura, las conductas y comportamientos del docente se clasificaron en la tendencia investigativa, lo que conduce a creencias referidas a que la importancia de la Matemática se encuentra en la adquisición de conceptos, desarrollo de procedimientos, así como el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo matemático. Algunas evidencias que respaldan estos juicios se presentan a continuación:

Indica leer la definición que se encuentra en el libro de texto

Solicita a los estudiantes resolver, de forma individual, un problema referente a la semejanza de triángulos

Detiene su exposición e invita a dos estudiantes a continuarla. Al identificar que éstos no dominan el contenido, el profesor habla sobre la actitud positiva ante el trabajo escolar

Respecto a la orientación de la asignatura, se disputa entre la tendencia tradicional e investigativa. Con esto, el profesor cree que en algunos casos, la matemática escolar no debe diferir de la Matemática formal y en otros, la matemática escolar puede partir de la etnomatemática de los estudiantes. Esto debido a que algunas veces el docente mostraba los contenidos matemáticos de una manera formal, y en ocasiones inducía estos a través de contextos conocidos por los alumnos. Se hace evidente a través de lo siguiente:

Habla brevemente del teorema de Pitágoras, representa geométricamente éste (sin explicar la representación) y proporciona algunas ternas pitagóricas

Pregunta a los estudiantes qué significa semejante y propone ejemplos cotidianos (semejanza de la moneda de cinco pesos con aquella de 10 pesos, y entre objetos del aula de clase)

En lo que compete a la finalidad de la asignatura, se tienen evidencias de tendencias tecnológicas e investigativas. Esto conduce a creencias de la Matemática centrada en aspectos procedimentales que deben dotar al estudiante de aprendizaje autónomo.

Los indicadores de creencias sobre la enseñanza de la Matemática, recaen en tendencias tecnológicas. La práctica docente se moviliza de acuerdo con creencias en las que metodología de la clase debe centrarse en la realización de ejercicios, con la finalidad de reproducir procedimientos. Por ello el profesor debe exponer los contenidos y organizar un proceso de adquisición de conocimiento para el estudiante. Es así como la importancia de la enseñanza se determina por la funcionalidad de los conocimientos, organizados por una programación cerrada y dependiente de la estructura de la Matemática. Asimismo, con su práctica, el profesor demuestra poseer creencias en las cuales su función debe ser de técnico del contenido y del diseño didáctico. Algunas evidencias de ello son:

Presenta un problema que involucra el teorema de Tales y lo resuelve en la pizarra.

Una alumna presenta un rotafolios que contiene los criterios de semejanza. El docente expone el contenido

En cuanto a los indicadores sobre el aprendizaje de la Matemática, aunque se observa una marcada tendencia tecnológica, se identifican conductas asociadas a las cuatro tendencias. El docente no involucra al estudiante en el diseño didáctico y le atribuye un rol pasivo; sin embargo, promueve actividades en las que se favorece la significación de los contenidos, pero la importancia reside en la reproducción de un algoritmo. Además invita a desarrollar actividades, en su mayoría, de forma individual. A continuación se presentan algunas evidencias:

Expone la resolución de algunos problemas utilizando la pizarra y considerando la participación de los estudiantes

Invita a diferentes estudiantes a resolver en la pizarra, alguno de los ejercicios

Permite el trabajo individual o en pequeños grupos

En relación al diseño didáctico, se cree que el alumno no debe participar en aquel, pues el indicador correspondiente se clasifica en una tendencia tradicional-tecnológica. La enseñanza se considera responsabilidad del estudiante, mediante su nivel de sumisión, aunque es necesario dotar de significado al contenido presentado en clase. Para aprender, se cree que el estudiante debe reproducir el proceso exhibido por el docente y en ocasiones, resolver problemas. Se considera importante tomar apuntes de la información expuesta por el profesor, sin la necesidad de reflexionar sobre ésta, ya que el docente es experto en el contenido. Por otra parte, el profesor demuestra creer que el aprendizaje es un proceso memorístico, sin embargo, debe poseer significado para el discente. Además este proceso tiene que devenir de casos particulares apoyados en un proceso deductivo, como señala el indicador correspondiente, clasificado en la tendencia tecnológica. De esta misma forma se clasifica el indicador referente a la forma de aprender, creída como una asimilación de información del exterior. Además se cree que el aprendizaje se favorece mediante trabajo individual, aunque el tipo de agrupamiento puede depender de la actividad llevada a cabo. En lo que respecta al dinamizador del aprendizaje, se cree que éste debe ser la estructura de la Matemática.

Listado de creencias del profesor "B" respecto a la matemática, su enseñanza y aprendizaje

Creencias sobre la matemática

Deben interesar la adquisición de conceptos, el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar.

En algunos casos, la matemática escolar debe dar una explicación, con los cánones de la Matemática formal, a las situaciones provenientes de la problemática real; en otros, la matemática escolar tiene que partir de la etnomatemática de los alumnos y recoger las necesidades socio-políticas, culturales, etc.

La asignatura ha de tener una finalidad informativa y un carácter práctico que permita su aplicación en otros ámbitos de la Matemática, otras disciplinas o en la técnica. Así, adquieren relevancia tanto los productos, como los métodos que conducen a ellos. Además, la finalidad última de la asignatura es dotar al alumno de instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.

Creencias sobre la enseñanza de la matemática

La enseñanza debe estar enmarcada por ejercicios que pretenden reproducir los procesos lógicos y coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos.

El profesor no debe exponer los contenidos en su fase final, sino simular su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas. Además, tiene que organizar el proceso que llevará al alumno a la adquisición de conocimientos determinados.

Al carácter terminal de los objetivos, es necesario añadir su funcionalidad.

Para el profesor, la programación es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina.

El profesor debe fungir como técnico del contenido y del diseño didáctico, permitiendo organizar los contenidos de aprendizaje, los cuales se deben transmitir mediante estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas.

Creencias sobre el aprendizaje de la matemática

El alumno no debe participar en el diseño de las actividades, programación, etc.

En los casos en que exista una "buena enseñanza", la responsabilidad de los resultados del aprendizaje (que dependen del grado de sumisión) es exclusiva del alumno. Asimismo, para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje.

El alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, debe reproducir el proceso lógico mostrado por el profesor. La actividad del alumno será organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinadas interrogantes.

Debido a la valoración de la toma de apuntes, la atención debe adquirir excesiva relevancia, sin incluir tiempo para la reflexión sobre la propia acción.

La confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido.

En algunas situaciones, el aprendizaje se cree memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina. En otras, se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno.

Aunque el aprendizaje puede comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.

Para aprender, al alumno le basta entender el conocimiento que proviene del exterior.

La forma de agrupamiento que permite un mejor aprendizaje es el individual, sin embargo, es aconsejable modificar el tipo de agrupamiento, dependiendo de la actividad a desarrollar.

La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.

Conclusiones

La práctica de ambos docentes se asoció a indicadores tecnológicos, en su mayoría. Esto refiere a creencias sobre la Matemática en las cuales se identifica como un conjunto de algoritmos que deben ser expuestos por el docente y que el estudiante debe reproducir. Esta creencia limita la enseñanza de la Matemática, pues dista de una tendencia investigativa, en la cual se mira a la Matemática como una actividad humana, como un proceso de construcción de conocimiento.

Se invita a mirar a la Matemática como un proceso en que el estudiante debe reconstruir las nociones matemáticas, apoyado en la epistemología de esta ciencia y que el profesor debe institucionalizar. Esto llevaría a que el estudiante sea parte central del proceso de aprendizaje, propiciando una mejora en su dominio afectivo, ya que de esta forma se permitiría una visión favorable hacia la Matemática, reconociéndola como una ciencia humana y producto de la necesidad social. Por ello, se considera necesaria una formación en los docentes de matemáticas que permita el tránsito de creencias, con la finalidad de mejorar las prácticas de aula.

Referencias bibliográficas

Caballero, A.; Blanco, L. y Guerrero, E. (2007). *Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*. Trabajo presentado en el XI Simposio de Investigación y Educación Matemática, Septiembre, España.

Contreras, L. (1998). Capítulo 2: *Marco teórico sobre concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Huelva. España.

Gómez, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Narcea.

Solar, M. y Díaz, C. (2007). El sistema de cogniciones y creencias del docente universitario y su influencia en su actuación pedagógica. *Horizontes educacionales 12(1)*, 35-42.

HACIA UNA RESIGNIFICACIÓN DE LAS DESIGUALDADES E INECUACIONES A PARTIR DE LAS PRÁCTICAS DEL PROFESOR

Mariangela Borello, Javier Lezama Andalón
CICATA del IPN México
mborello@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Resumen. En este trabajo estuvimos investigando, desde el enfoque socioepistemológico, cómo viven la desigualdad y la inecuación en el actual discurso matemático escolar para poder detectar cuáles elementos pueden jugar un papel importante para su resignificación. Intentamos sacar a la luz aquellas prácticas que norman el uso de la desigualdad y, por consecuencia, de la inecuación, a saber: la práctica de comparar y la práctica de acotar. Con base en estas prácticas, estuvimos luego examinando el papel que juegan desigualdad e inecuación en las matemáticas puras y aplicadas. En fin, pudimos percatarnos de la necesidad de llevar a cabo un rediseño del discurso matemático escolar que, a través de actividades basadas en las prácticas de comparar y de acotar, regrese la desigualdad a la escuela devolviéndole su significado y vuelva a darle su justo lugar a la inecuación.

Palabras clave: desigualdad, inecuación, socioepistemología, práctica, profesor.

Abstract. In this study we were investigating, with a socioepistemologic focus, how inequality lives in the current mathematical school discourse, in order to detect which elements can play an important role for its re-meaning. We tried to bring to light those practices that govern the use of inequality, namely: practice to compare and practice to delimit. Based on these practices, we were examining the role of inequality in pure and applied mathematics. Finally, we realized the need to carry out a redesign of school mathematical discourse that, through practical activities based on comparing and delimiting, inequality can return to school institution, restoring its meaning and its right place.

Key words: inequality, socioepistemology, practice, teacher

Introducción

La desigualdad en el marco de la socioepistemología

El enfoque teórico de nuestra investigación se sitúa en aquella parte de la matemática educativa que se conoce como *socioepistemología*.

En lo particular, nos acercaremos a dicho enfoque a través de varios trabajos entre los cuales están los publicados por Cantoral y Farfán (2002 citado en Arrieta, 2003; 2003), a fin de colocar el acercamiento socioepistemológico en el ámbito del discurso de la matemática educativa.

En particular, cabe observar que nuestro marco considera necesario

> el dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. (Cantoral y Farfán, 2003, p.36).

A esta aproximación múltiple se le ha dado el nombre de *acercamiento socioepistemológico*.

Podemos entonces afirmar que el acercamiento socioepistemológico centra su atención en todo lo que permite la construcción del conocimiento matemático, lo que se puede llevar a cabo considerando aquellas cuatro componentes fundamentales que en la construcción del conocimiento se articulan.

En el contexto de la visión socioepistemológica un factor que tiene una relevancia particular, es el concepto de práctica, palabra detrás de la que "se esconde" el tema del significado que rige lo que los individuos –dentro de los grupos sociales a los que le pertenecen– hacen.

Estaremos por lo tanto considerando dos tipos de prácticas: la práctica social y la práctica de referencia.

Definimos la práctica social como el conjunto de aquellas influencias socioculturales que rodean y orillan los fenómenos de construcción de conocimiento matemático y que constituyen el motor principal del acto constructivo más que de reorganización de la obra matemática, meta y objetivo de la matemática educativa. Se trata de aquellas acciones llevadas a cabo por grupos sociales que se ubican en un cierto contexto histórico determinado por la predominancia de unas ideologías. Dichos grupos pueden estar formados por científicos, matemáticos, investigadores en matemática educativa, profesores, alumnos e instituciones y/o sujetos que utilizan la matemática como herramienta para el desarrollo de otras actividades (Covián, 2005).

Por otro lado, las prácticas de referencia se definen como las actividades que habitualmente se hacen en una situación específica que, en nuestro caso, serán actividades de carácter matemático como, por ejemplo, la producción de teoremas, lemas, definiciones y/o la construcción de ciertas estrategias de resolución (Montiel, 2005).

Un pequeño estado del arte

Desde una atenta revisión bibliográfica hemos identificado dos aspectos particularmente importantes:

1. En el ámbito de la Matemática Educativa, no hemos podido encontrar investigaciones acerca de las desigualdades y las que se ocupan de las inecuaciones son pocas.
2. Entre esas pocas, hemos podido observar que todas tienen un corte de tipo cognitivo y/o didáctico, es decir, buscan entender qué es lo que obstaculiza el correcto aprendizaje de las inecuaciones y qué es lo que lo podría facilitar para intentar llevarlo al aula a fin de mejorar los procesos de enseñanza y el aprendizaje de los alumnos.

La única excepción a todo esto está: en algunos planteamientos de Boero (1997, 1998) quien se pregunta acerca del origen y del fin de las técnicas que caracterizan el discurso de la escuela italiana acerca de las inecuaciones. En particular reconoce que un estudio de corte histórico acerca del origen de las inecuaciones en las matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas, aportaría mucho a la investigación. Para ello Boero afirma la necesidad de salir de la matemática escolar para acercarse a la matemática de los matemáticos; en unas observaciones de corte epistemológico que llevan a cabo Boero y Bazzini (2004) en donde se observa la lejanía de la inecuación, así como actualmente se trabaja en el contexto escolar, respecto a su uso para los matemáticos profesionales. Sin embargo, dichas consideraciones sólo se utilizan como punto de partida para un estudio eminentemente cognitivo y didáctico.

Sin embargo, a pesar de la claridad con que se plantean las preguntas, la investigación regresa a un estudio de naturaleza eminentemente cognitiva y, en un segundo momento, didáctica.

Desde el punto de vista de nuestro marco teórico –la socioepistemología– pudimos aprovechar los análisis hechos por todos los investigadores que pudimos revisar, para poner en evidencia algunos aspectos alrededor de los cuales estuvimos desarrollando nuestra propia investigación. A saber:

<u>Una técnica de resolución sin objeto de referencia</u>

Todas las investigaciones que hemos podido examinar, hacen referencia exclusivamente a la inecuación, dejando totalmente a un lado el objeto matemático desigualdad.

De esta manera, las prácticas matemáticas que para su modelación necesitan una desigualdad, quedan totalmente en la sombra y el único objeto que aparece, es la inecuación: una técnica que permite expresar una desigualdad de una forma equivalente, pero más oportuna.

El discurso matemático escolar ha ido forjándose de tal manera que en él sólo se ha quedado la pura técnica de resolución (la inecuación) que sirve para resolver determinados problemas; pero nunca se hace énfasis en la naturaleza última de dichos problemas, lo que permitiría recuperar aquellas prácticas que en el fondo los constituyen y, al mismo tiempo, obligaría a poner de manifiesto el papel protagónico de la desigualdad.

La escuela con su discurso afirma que la inecuación –en cuanto técnica– es importante porque sirve para resolver problemas de dominio de funciones, pero: nunca pone de manifiesto que, al establecer el dominio de una función, se está manejando un problema de acotamiento en que se hace necesario manejar desigualdades; y no propicia que el estudiante reconozca la inecuación como un objeto matemático que modeliza situaciones en las que es necesario establecer cotas o comparaciones y, por lo tanto, establecer relaciones de desigualdad.

Un objeto aislado en busca de compañía

La escuela, con su discurso, parece haber dejado a un lado aquellas prácticas que le otorgan un significado al objeto desigualdad y, por lo tanto, a la inecuación. Por esta razón la desigualdad ha dejado de tomarse en cuenta de forma explícita y el centro de atención se ha movido hacia la inecuación.

Sin embargo, la ausencia de la desigualdad no ha pasado desapercibida ya que la inecuación se ha reducido a una técnica "huérfana" y, por lo tanto ha ido buscando algún otro objeto con que pudiera "acompañarse". De esta manera se ha ido estableciendo este vínculo "extraño" entre la inecuación y la ecuación: ambas son técnicas pero la fuerza que el discurso escolar ha conferido a la ecuación, le ha permitido alcanzar una grande relevancia, lo que ha propiciado que la inecuación viviera a su sombra.

Buscando resignificar la desigualdad

Con base en nuestra investigación, hemos mostrado que en matemática se pueden detectar prácticas y construcciones conceptuales relacionadas con el comparar y el acotar, que constituyen objetos y herramientas matemáticas, cuales son las desigualdades y las inecuaciones, que permiten la constitución de otros objetos matemáticos. (Borello, 2010)

Sin embargo, con base en las pocas investigaciones de corte histórico que pudimos revisar (Bagni, 2005, 2008), podemos afirmar que, a lo largo de muchos siglos, no se percibió la necesidad de implementar técnicas para manipular expresiones que surgen del planteamiento de una desigualdad.

Así que podemos darnos cuenta que la desigualdad, junto con sus prácticas, siempre ha estado presente al seno de las matemáticas. Por lo contrario, de la inecuación así como hoy la conocemos, encontramos algunas huellas claras sólo a partir del siglo pasado.

Sin embargo, nuestras indagaciones muestran que la escuela ha enfatizado el papel de la inecuación, dejando a un lado la desigualdad y sus prácticas.

Nos hemos preguntado el por qué de dicha situación y para contestar esta pregunta, hemos ido considerando vario aspectos, a saber:

- la matemática: a través de un atento análisis de varios textos no escolares y de algunas entrevistas con profesionales de la matemática que desarrollan su labor en el ámbito de la investigación;
- el *curriculum* y los libros de texto: a través de un análisis de los currícula y de los textos en uso en las principales instituciones educativas de México.

- los profesores: a través de la aplicación de una secuencia de preguntas que los entrevistados tenían que resolver, comentar y comentar entre ellos.

A través de un excurso en la matemática, hemos podido conocer algo acerca de la epistemología de la desigualdad. Vimos cómo la desigualdad se considera un objeto importante ya que permite llevar a cabo ciertas prácticas –como lo son las actividades de comparar y de acotar– las que son instrumentos imprescindibles para hacer matemáticas: establecer propiedades y definiciones, demostrar teoremas, etc. En este contexto, la inecuación juega el papel de instrumento ya que se trata de una técnica que permite manipular desigualdades.

Desde el examen de los *curricula* y de algunos libros de texto pudimos ver algunos rasgos del discurso de la escuela que ha dejado a un lado aquellas prácticas de referencia, como lo son las prácticas de comparar y de acotar, que puedan otorgarle significado a los objetos matemáticos que se manipulan. Desde aquí, pudimos darnos cuenta de cómo la desigualdad haya quedado rezagada y de cómo, en su lugar, la inecuación –es decir, una técnica– haya tomado un papel protagónico.

Finalmente pudimos ver cómo lo que la escuela comunica a través del *curriculum* y de los libros de texto, ha ido influyendo en las actividades de los profesores, hasta determinar una nueva epistemología en la que se observa el predominio de las técnicas y la ausencia de elementos clave cuales son las prácticas de ordenamiento (comparar) y de acotamiento.

Con raíz en nuestros estudios, nos parece por lo tanto de poder afirmar que son dos los elementos que han propiciado el desplazamiento de la inecuación sobre la desigualdad.

A saber:

- En el siglo pasado se le dio un gran impulso a la matemática aplicada pues en aquellos años nacían la investigación de operaciones y la programación lineal. En estos contextos la desigualdad juega un papel muy importante a pesar de que, como nos recuerda Bagni (2008), en su quehacer, por lo general, los matemáticos expresaban los problemas por medio de ecuaciones por resolver y luego, por medio de desigualdades, fijaban las condiciones para las soluciones de dichas ecuaciones. Además, en la historia y en la práctica didáctica, muy frecuentemente se reconducía la resolución de una inecuación a la resolución de la ecuación asociada pues, en el contexto social y cultural, la "solución concreta" siempre había sido considerada como mucho más importante de un abstracto "campo de posibilidades" (Bagni, 2008).

  Esta postura propició que muchos problemas de desigualdad que pertenecen al ámbito de las matemáticas aplicadas, se resuelvan como problemas de igualdad utilizando ecuaciones, para, en un segundo momento interpretar su solución en el contexto de la desigualdad creando situaciones que podemos definir como "falsos problemas".

- Desde aproximadamente la mitad del siglo XIX, el Cálculo y el Análisis Matemático empezaron a tomar la forma que hoy en día conocemos. Cauchy en los años '20 del siglo XIX publicó sus famosos tratados –*Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Le Calcul infinitésimal* (1823), *Leçons sur les applications de calcul infinitésimal. La géométrie* (1826–1828)– en los que fue sistematizando todos los grandes descubrimientos de sus predecesores alrededor de los conceptos de límites y de continuidad, utilizando un formalismo muy riguroso.

  La desigualdad es un concepto imprescindible para trabajar la versión rigurosa de límite ya que se sitúa al nivel de la misma definición de dicho objeto matemático. Además, en este contexto se precisa poder operar con desigualdades y se hace por lo tanto necesario poseer técnicas que permitan resolver inecuaciones.

  Siempre en el mismo contexto del cálculo, así como se fue estructurando en las prácticas didácticas, la inecuación resultó ser una herramienta imprescindible para la determinación del dominio de una función y del signo de una función (en particular acostumbramos determinar el signo de la función derivada para conocer la monotonía de la función primitiva).

En este contexto la escuela se ha ido preocupando de proveer a sus estudiantes las herramientas técnicas que algún día les habrían permitido acceder al estudio del Cálculo.

Esta elección se fue consolidando a lo largo de las décadas y, a pesar de las diferencias propias de las tradiciones americana y europea, podemos afirmar que el resultado ha sido el mismo: la inecuación ha quedado aislada, alejada de la desigualdad y reducida a unas cuantas técnicas operacionales a las que la escuela les da mucho o poco espacio en el *curriculum*.

Sin embargo, esta situación ha propiciado que la inecuación se asocie impropiamente a la ecuación. Un poco a causa de los "falsos problemas" que se proponen sin una reflexión adecuada, y un poco por el fenómeno del "fantasma de la ecuación" del que nos hablan Bazzini y Tsamir (2002). Es por ello que, muy frecuentemente, la inecuación se maneja como una técnica operacional que se manipula como aquel objeto formalmente parecido que es la ecuación. A este propósito resulta interesante observar cómo todo esto demuestre la falta de una reflexión seria acerca del papel que juegan los objetos matemáticos igualdad y desigualdad, lo que se deriva de la ausencia de prácticas que puedan otorgarles un sentido a dichos objetos.

Como hemos visto, la desigualdad ha perdido contenido desde el punto de vista epistemológico, porque aquellas prácticas que le dan sentido –acotación y comparación– han ido desapareciendo para deslizarse a lo que solamente es una técnica. De tal manera el contenido epistemológico propio del objeto desigualdad desaparece para dar lugar a otra epistemología que es la operacional, propia del objeto matemático inecuación. En esta nueva epistemología se evidencia una tendencia a prescindir de cualquier asunto de orden, que es lo que permite establecer una desigualdad sobre un conjunto.

Una consecuencia de esta situación que ha ido afectando considerablemente la posibilidad que los estudiantes aprendan a resolver correctamente las inecuaciones (estamos hablando del plano de lo cognitivo), consiste en el consolidarse de una tradición que ve la inecuación como una "hermana" de la ecuación: un objeto parecido a la ecuación que se resuelve "casi" de la misma manera.

De tal manera, todos los elementos que hemos estado paulatinamente investigando nos indican los elementos clave para poder pensar en una resignificación de los objetos matemáticos desigualdad e inecuación.

Antes que nada será necesario devolverle a la inecuación su relación con la desigualdad y a la desigualdad las prácticas que le confieren el estatus de objeto necesario al seno de las matemáticas.

Por supuesto, lo que estamos proponiendo no es algo banal ya que pide llevar al aula dichas prácticas. Se tratará por lo tanto de ir construyendo actividades que permitan al estudiante manejar situaciones de desigualdad las que, a su vez, necesitarán de herramientas aptas al manejo de dichas desigualdades, es decir, las inecuaciones.

Este trabajo –que constituirá la próxima etapa de nuestra investigación– pide una seria reflexión acerca del *curriculum* tanto de álgebra como de cálculo. Esto porque será necesario ver a cuáles actividades en el ámbito del cálculo subyace una situación de desigualdad que necesita del uso de la inecuación y buscar aquellas prácticas que le otorgan un significado. Sucesivamente se podrá finalmente regresar al álgebra donde se deberá de llevar a cabo el proceso de resignificación de la inecuación y de la desigualdad.

Todo esto nos obligará a romper con aquel elemento propio del discurso matemático escolar que acostumbra reducir todo al aspecto técnico dejando a un lado las prácticas que dichas técnicas han producido.

Este trabajo deberá de desarrollarse considerando la dialéctica que inevitablemente se produce entre inecuación y ecuación, para llevarla al plano de la igualdad y de la desigualdad.

De esta manera los alumnos manejarán al mismo tiempo situaciones de igualdad y de desigualdad e irán construyendo modelos diferentes para que puedan ser ellos mismos a darse cuenta de necesitar diferentes técnicas para resolverlos.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV, México, D.F., México.

Bagni, G.T. (2005). Equazioni e disequazioni. Riferimenti storici e proprietà internazionali. En *La matematica* e *la sua didattica*, 3, 285-296.

Bagni, G.T. (2008). Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica. En Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra*, VI, (SFIDA 21, 22, 23, 24, 25) (pp. 53–64). Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Torino, Italia.

Bazzini, L. y Tsamir, P. (2002). Teaching implications deriving from a comparative study on the instruction of algebraic inequalities. En *Proceedings of CIEAEM 54*. Vilanova y la Gertrue, España.

Boero, P. (1997). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. En J. Philippe y M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X* (pp. 3-7). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Boero, P. (1998). Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XI* (pp. 47-51). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Boero, P. y Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. En *Proceedings of PME28*. (Vol. I). (pp. 139-143). Bergen, Noriega.

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada, Cicata, IPN, México, D.F., México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6 (1), 27-40.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV, México, D.F., México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN, México, D.F., México.

LAS PRÁCTICAS PREPROFESIONALES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Edith Miriam Soto Pérez, Rosa María Farfán Márquez
UASLP y Programa de Doctorado de la UAG. Cinvestav, IPN. México
miriam@fciencias.uaslp.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. En este trabajo se describe el contenido necesario para la preparación didáctica de profesores para la enseñanza de la probabilidad y se sugieren algunas posibilidades que las paradojas clásicas de probabilidad ofrecen para organizar actividades didácticas que puedan ayudar a la realización de estas actividades. Presentamos los resultados de unos cursos dirigidos a profesores en México, Portugal y España.

Palabras clave. Formación de profesores, socioepistemología, reproducibilidad, función logarítima

Abstract. This paper reports the first stage of an intent to take the theoretical advances regarding the phenomenon of reproducibility achieved, up to this time, from a *socioepistemological* focus to the context of the pre-professional practice of students who are being prepared as mathematics professors (EPM); with the intention of recognizing the factors that make didactic purposes possible, among them, the performance of these students as elements of social interaction in the role of guides for learning activities. The prior based on guided reflection, which has a double function: to serve for the practitioners to have the opportunity to establish necessary relationships between theory and practice, and to allow the gathering of its practice history for the corresponding epistemological, cognitive, didactic and sociocultural analysis.

Key words: professor forming, socioepistemology, reproducibility, logarithm function

Introducción

El interés por este tema se genera a partir de la siguiente cuestión: Cuando se elabora el currículum correspondiente a una carrera de formación docente, todos estamos convencidos de la importancia de que existan prácticas docentes (o prácticas preprofesionales), pero de manera concreta; ¿Qué deberían aportar estas prácticas a la formación de los profesores de matemáticas?, ¿Cuáles son los elementos *formativos* sustantivos que se desean generar?, ¿Cómo los enfrenta y supera el estudiante en sus prácticas preprofesionales?, ¿Cómo puede el formador de estos futuros profesores impulsar, generar o desarrollar tales elementos?, ¿Cómo están siendo descritos curricularmente?, ¿Cómo están siendo llevados a la práctica?.

Partimos de la investigación sobre el fenómeno de reproducibilidad descrito en Lezama (2003), quien centra su trabajo en la reproducibilidad de situaciones didácticas trabajadas con la metodología de la ingeniería didáctica. Este estudio realizado desde un enfoque socioepistemológico, hace valiosas aportaciones que dan cuenta de los elementos sustantivos de las prácticas de los profesores en ejercicio. Por ejemplo, se observa que:

- El profesor juega un papel determinante, es el polo del sistema didáctico que requiere dinamismo, pues exige de él que vaya más allá del domino disciplinar, pues pone en acción sus concepciones acerca de la actividad como de los alumnos.

- Las interacciones entre profesores y alumnos permiten observar en toda su realidad, el sistema didáctico y los roles que asumen sus participantes (en particular algunas de estas interacciones son ambiguas, o corresponden a intervenciones del profesor al grado de que sus estudiantes se hacen dependientes de él (Lezama, 2003).

A partir de dichos resultados, nos planteamos los siguientes objetivos

- Reconocer los Elementos Sustantivos (ES) que debe impulsar el formador de profesores de matemáticas en las prácticas preprofesionales.
- Caracterizar y categorizar dichos ES.
- Establecer las relaciones que se dan entre estos ES.
- Precisar cómo se generan y transforman los ES desde su naturaleza epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural.

Nuestros datos empíricos iniciales corresponden a una primera aproximación al objetivo establecido; se espera más adelante darle continuidad a esta investigación de tal manera que sea el *fenómeno de reproducibilidad* el que vaya dándole solidez a nuestros hallazgos.

Es oportuno mencionar que se consideró importante implementar la reflexión guiada sobre la práctica, con doble función que consiste en: promover que los estudiantes que se están formando como profesores de matemáticas (EPM) establezcan las relaciones necesarias entre la teoría y la práctica, y que esto permita ir recogiendo su historia de práctica para el análisis correspondiente.

Las prácticas preprofesionales que fueron objeto de observación y material base para este trabajo, las realizaron dos estudiantes de la carrera de Profesor de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UASLP, con estudiantes menos avanzados de esta misma Facultad. Una primera práctica se llevó a cabo en apoyo a los alumnos de uno de los grupos de primer año (de Taller de Física y Matemáticas) y la segunda práctica con el grupo de "Didáctica de las Matemáticas".

Marco teórico

Nuestra investigación parte del enfoque socioepistemológico al fenómeno de reproducibilidad, centrándonos en las prácticas preprofesionales de los estudiantes.

Antes de precisar en qué consiste el fenómeno de reproducibilidad y cómo desde el enfoque sociepistemológico se pretende responder a los objetivos planteados, se hace necesario establecer como punto de partida una concepción sobre lo que entenderemos por prácticas preprofesionales.

Las prácticas preprofesionales en educación y desde el modelo de formación pedagógica crítica se entienden como la relación entre el pensamiento y la acción, de acuerdo a lo que Carr y Kemmís (citados por Castillo, 2003, p. 114) expresan de la siguiente manera:

> … el pensamiento y la acción (o la teoría y la práctica) guardan entre sí una estrecha relación dialéctica, deben entenderse como *mutuamente constitutivos*, en un proceso de interacción por medio del cual el pensamiento y la acción se reconstruyen permanentemente, en el seno del proceso histórico vivo que se manifieste en toda situación social real.

Un tipo de prácticas de esta naturaleza son las *prácticas docentes o preprofesionales*, entendidas aquí según la concepción antes mencionada, es decir, como la relación entre la teoría que da fundamento al ejercicio docente y su práctica.

Para el logro de lo anterior es que se plantea como actividad indispensable en el ejercicio de las prácticas preprofesionales la reflexión guida, que le permita al aprendiz de profesor lograr una mejor comprensión de su propia práctica, o una mejor capacidad de análisis de la misma. Lo anterior en espera de que sea capaz de adecuar su actuación con fundamento en su propio análisis; de tal manera que muestre flexibilidad, autonomía y capacidad de adaptación al contexto (Climent y Carrillo 2007).

Por su parte, el fenómeno de reproducibilidad estudiado desde la perspectiva socioepistemológica espera explicar cómo se generan y a qué responden las prácticas sociales en el contexto de la construcción del conocimiento. Específicamente se comparte aquí, la visión que sobre el estudio de reproducibilidad de una situación didáctica, se describe en Lezama (2005, p. 349), como la construcción de un modelo que se propone reconocer los aspectos que caracterizan a los actores, elementos dinámicos del proceso que resultan determinantes *y no exclusivos de la situación*, así como esclarecer el papel jugado por las acciones individuales y colectivas constitutivas de las historias de clase, con el propósito de que dicho modelo se constituya en un factor de predicción. Para lo cual es necesario rescatar los invariantes en el estudio de varias historias de clase, o, como en nuestro caso, rescatar los invariantes en el estudio de varias historias de prácticas preprofesionales.

Es importante mencionar además que, el enfoque socioepistemológico en Cantoral y Farfán (2003), se plantea como una aproximación sistémica que incorpora para la investigación de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Mientras que: "Estudiar el fenómeno de la reproducibilidad de una situación didáctica o situación de aprendizaje implica establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase, al repetirse en distintos escenarios" (Lezama, 2005, p. 342).

Para lo anterior, la reflexión guiada sobre la práctica preprofesional por parte del estudiante para profesor, juega dentro del fenómeno de reproducibilidad un papel relevante, pues nos permite ir recogiendo su historia de práctica con datos significativos para su análisis.

Dentro de los estudios correspondientes a profesores en ejercicio, se observan diversas prácticas que los profesores implementan con el fin de promover el aprendizaje en sus alumnos; por ejemplo:

- Al interior del sistema didáctico "el profesor es quien propone problemas, plantea y diseña actividades, sigue el curso de las interacciones del alumno con el saber a aprender". La "intencionalidad didáctica del profesor y aceptación del problema por parte del estudiante provocará en ambos el desarrollo de un conjunto de prácticas e interacciones que caracterizan el contrato didáctico" (Lezama, 2003, p. 124).
- El profesor tiene una posición privilegiada dentro del sistema porque domina el contenido matemático de la situación, conoce las características de sus estudiantes e interviene en el establecimiento de los propósitos de la ingeniería, adaptándola a partir de las características de sus alumnos (Lezama, 2005).

Además, en Lezama (2003) encontramos que en el fenómeno de reproducibilidad:

- El profesor juega un papel determinante, es el polo del sistema didáctico que requiere dinamismo, pues exige de él que vaya más allá del domino disciplinar, pues pone en acción sus concepciones acerca de la actividad como de los alumnos.
- Las interacciones entre profesores y alumnos permiten observar en toda su realidad, el sistema didáctico y los roles que asumen sus participantes. En estas pueden presentarse interacciones ambiguas, cuando no les quedó claro a ninguno de los participantes la dirección a la que había que dirigirse. O cuando el profesor observa que algún equipo de estudiantes no avanza, y entonces interviene al grado de que dichos estudiantes se hacen dependientes de él (Lezama, 2005).
- Otro aspecto se refiere a la forma en que se ven afectadas las actividades de los estudiantes por carencia de antecedentes matemáticos (umbral de conocimientos).

En este trabajo, los avances teóricos logrados hasta el momento sobre el fenómeno de reproducibilidad desde un enfoque socioepistemológico, son llevados, al contexto de las prácticas preprofesionales de EPM, con la intención de reconocer los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos, entre ellos, las actuaciones de estos estudiantes como elementos de interacción social en calidad de promotores de actividades de aprendizaje.

Es importante mencionar que con el propósito de ser coherentes con el enfoque socioepistemológico al fenómeno de reproducibilidad descrito, se propone a los EPM, poner en escena una situación didáctica en el sentido de Brousseau (1986), específicamente sobre logaritmos, tomada de Ferrari (2008).

Metodología

Nuestros datos empíricos serán producto de la observación de las prácticas pre- profesionales. Se está aún realizando el análisis y categorización de los elementos presentes en el proceso de adaptación del EPM a su nuevo rol, sin embargo se reportan aquí algunos avances. Se espera reconocer los obstáculos que enfrenta y cómo los supera, mediante la reflexión guiada, que tiene una doble función: que sirva para que el practicante tengan la oportunidad de establecer las relaciones necesarias entre la teoría y la práctica; y que permita ir recogiendo su historia de práctica para el análisis epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural. Se pretende dar continuidad a este tipo de investigaciones para rescatar los invariantes en el estudio de varias historias de prácticas preprofesionales.

Las prácticas preprofesionales que están siendo objeto de observación en estos momentos y material base para este trabajo, las realizaron dos de las mejores estudiantes de los últimos semestres de la carrera de Profesor de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UASLP con estudiantes menos avanzados de esta misma Facultad. Una primera práctica se llevó a cabo en apoyo a los alumnos de uno de los grupos de primer año que estaba repitiendo el curso "Taller de Física y Matemáticas" por haberlo reprobado; y la segunda práctica con el grupo de "Didáctica de las Matemáticas". Las sesiones fueron video grabadas para su revisión y reflexión.

Dichas estudiantes repasaron en principio, la Teoría de Situaciones Didácticas y la correspondiente Ingeniería Didáctica, basada en los resultados de investigación correspondiente al tema de logaritmos presentada en Ferrari (2001) y Ferrari (2008); a la par hicieron un reconocimiento del contexto sociocultural del grupo con el que realizaron la práctica.

Algunos avances

Sobre la reflexión anticipada de las EPM ante la resolución y preparación de la situación didáctica y su efecto en el trabajo de interacción con sus estudiantes.

Para poder valorar las actuaciones de estas EPM como elementos de interacción social en calidad de promotoras de actividades de aprendizaje, es necesario conocer la forma en cómo estas EPM se apropian e interpretan la situación didáctica, pues:

> El propósito didáctico de la ingeniería se mantiene aunque el profesor cambie, el propósito didáctico no constituye un elemento subjetivo, sin embargo la manera como el profesor se apropie y lo interprete, sí afectará el desempeño de los estudiantes ya que se producirán formas de interacción que estarán determinadas por el contrato didáctico (Lezama, 2003, p. 124).

La primera actividad puede consultarse en el anexo.

El objetivo que se plantea para esta actividad es: "Introducir a los estudiantes a la covariación logarítmica", y "Que reconozcan la multiplicación y la suma como herramientas para generar variaciones especiales" (Ferrari, 2008, p. II/I-26).

Las EPM resolvieron con éxito la actividad (lograron el objetivo plateado), aunque expresaron que se sentían inseguras pues ya no recordaban el tema de logaritmos. Manifestaron que al principio la actividad les causó angustia porque no veían la relación de la actividad con el concepto de logaritmo, el cual consultaron. Retomamos la reflexión sobre cómo Napier estableció precisamente la relación entre una sucesión aritmética y una geométrica para dar origen a este concepto, reconociendo las necesidades y contexto de la época, esto es, recuperando el análisis epistemológico atendido en Ferrari (2001). Esta reflexión jugó un papel muy importante en la práctica de las EPM al momento de institucionalizar los resultados de la actividad, pues hacen uso de este conocimiento para compartir con sus alumnos la importancia que este resultado tuvo en la época de Napier, en la que no se contaba con calculadoras. Este suceso parece aportar evidencia de cómo estas estudiantes relacionan parte del sustento teórico de su práctica, con la práctica en sí.

Después de resolver la situación, se les propuso a manera de reflexión anticipada, reconocer:

- el contenido matemático implicado en dicha actividad
- los conocimientos y habilidades matemáticas que se consideraban necesarias para la resolución de la actividad.
- qué se aprende
- cuáles pudieran ser los obstáculos epistemológicos que se predicen para la resolución por parte de los alumnos.
- y cuál sería su intervención ante la aparición de dichos obstáculos epistemológicos.

Se confrontó lo anterior con la propuesta que se hace en Ferrari (2008, p II/I-26), como los argumentos esperados y argumentos deseados.

Entre los aspectos más relevantes de esta reflexión las EPM reconocen como posibles obstáculos epistemológicos el rechazo de la ficha con cero y la construcción de las fichas con decimales o fracciones. El intento por resolver su intervención ante dicho obstáculo les permitió resignificar $\mathbf{a^0}$ y $\mathbf{a^p}$ cuando **p** es una fracción, que no pudo ser resuelta con la concepción de que "$\mathbf{a^p}$ representa al número que resulta de multiplicar a **a** por **a** misma un número **p** de veces", sin embargo les pareció más razonable el significado de estos conceptos a través de la actividad de multiplicar sumando. De igual manera resignifican las propiedades que los exponentes heredan a los logaritmos.

Vuelve esto a ser significativo en la interacción con sus alumnos, pues esta resignificación les permitió elaborar una intervención de desbloqueo para con sus alumnos, que demandaba de un dominio más profundo que aquel que lograron con la sola resolución de la actividad.

Por otro lado, se observan diferencias significativas en el trabajo de las dos estudiantes para profesor (practicantes), fuertemente influenciadas por la interacción con los alumnos con los que les tocó trabajar. En la primera práctica (con los estudiantes de "Taller de Física y Matemáticas"); Rosario, una de las practicantes, jugaba un papel muy dinámico, pasaba de una intervención de motivadora a provocadora de conflicto cognitivo, siempre pidiendo a sus estudiantes que explicaran sus respuestas y que las justificaran (*dimensión didáctica*), con domino y seguridad sobre lo que estaba planteando (*dimensión cognitiva*), de igual manera desarrollaba su papel de des-bloqueadora sin que su intervención hiciera dependientes a sus estudiantes de ella, esto se logró según su reflexión gracias a la aceptación de la actividad por parte de sus estudiantes y a los conocimientos previos de sus estudiantes (*dimensión sociocultural*). Pero su experiencia con el grupo Didáctica de las Matemáticas fue desalentadora para ella, pues sus estudiantes no aceptaron la actividad, no querían romper con el enfoque tradicional; sus estudiantes expresaron no ver la necesidad de interactuar con sus compañeras de equipo. Por el contrario para Jazmín, la otra practicante, su primera práctica fue difícil, mientras que en la segunda juega un papel muy dinámico. Ambas apoyan su reflexión en las creencias y concepciones que tienen sobre sus alumnos y sobre la actividad (*dimensión epistemológica*). Expresan haber logrado un aprendizaje del tema de logaritmos y de la Teoría de Situaciones más significativo.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. *Recherches en didactique des mathématiques*. (7)2, 33-115.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa. Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. (6)1, 27-40.

Castillo, L. (2003). Reflexiones sobre la práctica pre-profesional y la formación docente. *UMBRAL. Revista de Educación, Cultura y Sociedad*. (5), 111-115.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El análisis de clases de matemáticas en la formación inicial del maestro. Un estudio exploratorio. *Investigación en Educación Matemática XI*. 307-314.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ferrari, M. (2008). Un acercamiento sociepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar-sumando a una primitiva. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Lezama, J. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. (8)3, 339-362.

PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

José Miguel Contreras[1], Juan Jesús Ortiz[1], Carmen Díaz[2] y Pedro Arteaga[1]
[1]Universidad de Granada. (España), [2]Universidad de Huelva. España
jortiz@ugr.es

Resumen. Este trabajo presenta los datos empíricos iniciales, de un intento por llevar los avances teóricos logrados hasta el momento, sobre el fenómeno de reproducibilidad desde un enfoque socioepistemológico, al contexto de las prácticas preprofesionales de estudiantes que se están formando como profesores de matemáticas (EPM); con la intención de reconocer los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos, entre ellos, las actuaciones de estos estudiantes como elementos de interacción social en calidad promotores de actividades de aprendizaje. Lo anterior apoyado en la reflexión guiada, que tiene doble función: sirve para que los practicantes tengan la oportunidad de establecer las relaciones necesarias entre la teoría y la práctica, y permite ir recogiendo su historia de práctica para el análisis epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural, correspondiente.

Palabras clave: formación de profesores, enseñanza de probabilidad, paradojas de probabilidad.

Abstract. In this paper, the content needed in the didactic training of teachers to teach probability is described and some possibilities that classical paradoxes of probability offer to organize didactic activities that can help carrying out these activities. We present results of courses aimed for teachers in Mexico, Portugal and Spain.

Key words: training teachers, teaching probability, probability paradoxes.

Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad en secundaria tiene ya una gran tradición, los nuevos Decretos Curriculares sugieren un cambio en la metodología, recomendando la presentación, tanto del enfoque clásico, como del frecuencial de la probabilidad, este último basado en simulaciones o experimentos. Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales. Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (Ball, 2000).

Puesto que queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001). En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza.

En este trabajo analizamos la posibilidad que algunas paradojas clásicas de la teoría de probabilidad tienen en la formación de profesores. Presentamos también datos de 166 profesores tomados en un taller que tiene como objetivo que los profesores trabajen las siguientes pautas:

a. Experimentar un proceso de aprendizaje de ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), a partir de una situación didáctica que puede ser adecuada en la Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

b. Contextualizar la reflexión epistemológica sobre las ideas estocásticas fundamentales e identificar cuáles de ellas intervienen en la situación didáctica.

c. Analizar las posibles dificultades y razonamientos incorrectos de los mismos profesores y ayudarles a diagnosticarlas en sus estudiantes.

Conocimiento del profesor para enseñar la probabilidad

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). Aunque, para la enseñanza en la escuela, no necesitan altos niveles de conocimientos matemáticos, tales como, por ejemplo, la teoría de la medida, sin embargo si requieren una comprensión profunda de las matemáticas básicas que se enseñan en la escuela. Además de la formación científica, el profesor requiere lo que se denomina “conocimiento profesional”, en el cual Ball, Thames y Phelps (2005) incluyen cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. En Batanero, Godino y Roa (2004) se especifican las componentes necesarias para el conocimiento profesional de los docentes, que son revisados por Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) en la forma siguiente:

- Componente epistémica: conocimiento del contenido matemático o estadístico, es decir, el conjunto de problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, el lenguaje y argumentos incluidos en la enseñanza de un tema dado y su distribución en el tiempo de enseñanza.
- Componente cognitiva: conocimiento de los niveles de los estudiantes del desarrollo y la comprensión del tema, las estrategias de los estudiantes, las dificultades y errores en cuanto al contenido previsto.

- Aspecto afectivo: conocimiento de las actitudes de los estudiantes, las emociones, las motivaciones sobre el contenido y el proceso de estudio.
- Componente mediacional: conocimiento de los recursos didácticos y tecnológicos disponibles para la enseñanza y las posibles formas de utilizar y distribuir estos recursos en el tiempo.
- Componente interaccional: gestión de las organizaciones posibles del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los estudiantes que ayudan a resolver las dificultades de los estudiantes y los conflictos.
- Componente ecológico: el conocimiento de la relación del tema con el currículo oficial, otros temas matemáticos o estadísticos y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

Estos modelos de formación del profesor proporcionan una pauta para organizar actividades formativas dirigidas a desarrollar todo o parte de dicho conocimiento. Como indican Ponte y Chapman (2006), debemos considerar los profesores como profesionales, y formar a los docentes en la práctica profesional, haciendo que todos los elementos de la práctica (preparación de las clases, tareas y materiales, la realización de clases, observación y reflexión sobre la experiencia) sean el elemento central del proceso de formación del profesorado.

Paradojas como herramienta para desarrollar el conocimiento del docente

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas que aparecidas en la historia de la probabilidad para diseñar actividades dirigidas a la formación de profesores. Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes. No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña (ver Székely, 1986). La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005).

Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas, que algunos participantes puedan defender vehementemente, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos, como reconocen varios autores. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de estos ejemplos contra-intuitivos apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Los estudiantes se pueden beneficiar al desarrollar su motivación y meta cognición, descubriendo las conexiones con la historia y la vida real. Falk y Konold (1992), por su parte, afirman que estas actividades requieren una consciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

Batanero, Godino y Roa (2004) proponen una actividad basada en la paradoja de Bertrand que ayudan a distinguir y comparar la concepción frecuentista y Laplaciana de la probabilidad, además de reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional, así como sobre el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático. La actividad tiene el siguiente enunciado

Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y agitar la caja, antes de seleccionar una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados. El objetivo del juego es adivinar el color de la cara oculta. Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta. ¿Cuál es la mejor estrategia en este juego?

Batanero, Godino y Roa (2004) sugieren que, para trabajar con esta actividad, los participantes primero han de hacer algunas pruebas del juego y, a continuación, el formador de profesores ha de pedirles que encuentren la estrategia que produce la oportunidad de ganar más veces en una serie larga de ensayos. Debido al carácter contra intuitivo, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). Después de algunas repeticiones del juego, todas las estrategias sugeridas por los profesores deben figurar en la pizarra y posteriormente sería organizado por el formador de profesores un debate para decidir cuál es la mejor estrategia. El objetivo de este debate, donde es posible tanto el razonamiento correcto como los conceptos erróneos, es aumentar el conocimiento probabilístico del maestro. Si no hay acuerdo final, los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de su estrategia y se organiza un debate que permitirá revelar los razonamientos erróneos.

Resultados de nuestro estudio

Batanero, Godino y Roa (2004) evaluaron esta actividad en una muestra de 47 estudiantes españoles de pregrado que se preparan para ser profesores de estadística a nivel universitario. En nuestro estudio se ha ampliado el tamaño de la muestra y se han realizado talleres en diferentes contextos. Los datos se recogieron por escrito de la actividad dada por 166 docentes en activo que participan en tres talleres distintos (España, n=98 profesores de matemáticas de secundaria, Portugal, n=27 profesor de matemáticas de la escuela secundaria y México, n=41 profesores de Estadística a nivel secundario o universitario).

En la tabla 1 se presenta la composición de la muestra. Los profesores en formación españoles eran alumnos del quinto curso en la licenciatura de Ciencias y Técnicas Estadísticas. Los profesores portugueses en formación eran licenciados en matemáticas y cursaban el Máster de Didáctica de la Matemática. Todos ellos realizaron el taller dentro de una asignatura optativa de Didáctica de la Matemática. Los profesores en ejercicio realizaron el taller en congresos dirigidos al profesorado, en sus países respectivos. Su formación inicial era variada, siendo mayoría los licenciados en Matemáticas en España o Educación Matemática (en Portugal y México). En el taller impartido en México participaron también profesores en activo de estadística en diversas titulaciones universitarias, algunos de los cuales tenían una formación como ingeniero, médico o farmacéutico.

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) de participantes por paises según situación

Situación del profesor	España	Portugal	México	Total
En ejercicio	40 (38.1)	14 (50)	33 (100)	87 (52.4)

En formación	65 (61.9)	14 (50)	0 (0)	79 (47.6)
Total	105 (59)	28 (16.9)	33 (24.1)	166 (100)

El número medio de años de experiencia docente en toda la muestra fue 12.6. El objetivo de este estudio es comparar si las dificultades de partida y el aprendizaje a lo largo de la actividad descrita por Batanero, Godino y Roa (2004) en los profesores en formación se reproducen en el caso de los docentes en servicio. Otras diferencias son el tamaño de la muestra, cuatro veces mayor que la utilizada por Batanero, Godino y Roa (2004) y las diferencias de contexto, así como el incluir profesores en activo.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de estrategia inicial según país

	País			
Estrategia inicial	España (n=98)	Portugal (n=27)	México (n=41)	Total (n=166)
E1. Apostar al color de la cara mostrada (correcta)	33 (33.7)	5 (18.5)	3 (7.3)	41 (24.7)
E2. Predecir el color contrario del que se muestra	8 (8.2)	3 (11.1)	2 (4.9)	13 (7.8)
E3. Considerar que no hay estrategia (aleatoriedad)	38 (38.7)	14 (51.9)	27 (65.8)	79 (47.7)
E4. Elección de un mismo color en todos los ensayos	3 (3.1)	1(3.7)	1 (2.4)	5(3.0)
E5. Alternar colores	4 (4.1)	3 (11.1)	0 (0)	7 (4.2)
E6. Usar los resultados anteriores para la predicción	7 (7.1)	1 (3.7)	4 (9.8)	12 (7.2)
E7. Cambiar las estrategias a lo largo de la secuencia de ensayos	4 (4.1)	0 (0)	4 (9.8)	8 (4.8)
E8. Propiedades no físicas de las tarjetas	1(1.0)	0(0)	0 (0)	1(0.6)

La tabla 2 presenta las estrategias iniciales. Aparecen una variedad de estrategias de partida, por lo que se logró el objetivo de crear una situación problemática que sirvió a los profesores a enfrentarse a sus diferentes soluciones y a reflexionar sobre las intuiciones erróneas en probabilidad. Algunos participantes no percibían inicialmente la independencia de los ensayos, ya que utilizan los resultados anteriores antes de predecir el color. Las estrategias fueron muy similares en los distintos entornos (México, Portugal y España), aunque con diferentes porcentajes y similares a las descritas por Batanero et al., a pesar de que el grupo contenía profesores con experiencia docente (educación secundaria o universidad). El mayor porcentaje de estrategias correctas en el grupo español se debe a la presencia en este grupo de una proporción importante de licenciados en estadística.

Tabla 3. Resumen de estrategias iniciales y finales por país

	España		Portugal		México	
Estrategia	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final
Correcta	32 (32.6)	71 (72.4)	5 (18.5)	17 (63)	3 (7.3)	23 (56.1)
Incorrecta	66(67.4)	27 (27.6)	22 (81.5)	10 (37)	38 (92.7)	18 (43.9)
	98	98	27	27	41	41

Esta mayor proporción se refleja también en los resultados finales (tabla 3), donde se resumen las estrategias iniciales con las consideradas correctas después de tres repeticiones de la serie de 10 jugadas (30 experimentos), seguida cada una de debate. Las diferencias iniciales en la proporción de estrategias correctas/incorrectas entre países se hicieron más pequeñas en las estrategias finales. Puesto que los profesores fueron invitados a escribir y justificar sus soluciones como parte del taller, hubo un tiempo de reflexión, y, como consecuencia del debate, en la etapa final, la mayoría de los profesores ha cambiado a la estrategia correcta. Observamos globalmente un aumento muy importante de las respuestas correctas, que se duplican respecto a la situación inicial.

El porcentaje de aumento es similar en todas las muestras alrededor del 40% de profesores pasan de una estrategia incorrecta a otra correcta. Por consiguiente, los datos sugieren un cambio positivo en general en las concepciones de los docentes acerca de los conceptos involucrados en la actividad. En la tabla 4 se presentan los datos por tipo de profesor. Observamos también poca diferencia entre los profesores en formación y ejercicio, inicialmente (Chi-cuadrado= 1.16, 1 g.l. p= 0.28) con menos del 30 % de estrategias correctas en los dos grupos y finalmente (Chi-cuadrado= 0.27, 1 g.l p= 0.60) con porcentajes de estrategias correctas superiores al 60%. Concluimos la similitud de intuiciones incorrectas en los dos colectivos y la utilidad para ambos de la actividad formativa propuesta.

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias iniciales y finales según situación profesional

	En formación		En ejercicio	
Estrategia	Inicial	Final	Inicial	Final
Correcta	23 (29.1)	53 (67.1)	19 (21.8)	55 (63.2)
Incorrecta	56 (70.9)	26 (32.9)	68 (78.2)	32 (36.8)
Total	79	79	87	87

Reflexiones finales

Los resultados mostrados señalan la necesidad de mejorar el conocimiento del contenido probabilístico en los profesores, incluso de los profesores en ejercicio, quienes, en una proporción considerable mostraron intuiciones incorrectas al comienzo de la actividad y no fueron capaces de dar una demostración completa de la estrategia, una vez identificada al final del juego. Pensamos que ello se debe a que la preparación matemática de los profesores en su formación inicial se centra en el conocimiento común del contenido, y sería necesario complementarlo con un conocimiento especializado del contenido, que incluye información sobre los sesgos en el razonamiento probabilístico. Los profesores requieren también un conocimiento didáctico del contenido, incluyendo aspectos como metodología de enseñanza y representaciones instruccionales, tales como tipos de demostración matemática asequible a los estudiantes.

Para proporcionar a los participantes en el taller estos conocimientos, la actividad se complementó en la segunda sesión del taller con el análisis didáctico sobre el conocimiento matemático que necesitan los estudiantes para resolver el problema, los errores potenciales de los estudiantes y las fases didácticas del taller. La actividad también ayudó a aumentar algunas componentes de los conocimientos profesionales:

- Componente epistémica: Al hacer reflexionar al futuro profesor sobre los diversos significados históricos de la probabilidad (subjetiva, frecuentista y clásica) y las controversias ligadas a su definición en diferentes momentos históricos;
- Componente cognitiva: pues adquieren conocimientos sobre la dificultades de los estudiantes con los conceptos de probabilidad condicional e independencia y sobre posibles razonamientos y estrategias correctas e incorrectas para resolver el problema;

- Componente afectiva: experimentando nuevos métodos de enseñanza, basados en el juego, experimentación y debate, que permite aumentar el interés de los alumnos y su participación en la actividad;
- Componente interaccional: aumentando su experiencia sobre la forma de organizar el discurso y el tiempo didáctico y de hacer aflorar y resolver los conflictos cognitivos de los estudiantes;
- Componente ecológica: pues la actividad se puede conectar con el estudio de las concepciones erróneas sobre el azar (psicología) y con los problemas sociales relacionados con la adicción a los juegos de azar (sociología).

Los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad. Lamentablemente, no todos los profesores siempre reciben una buena preparación para enseñar la probabilidad en su formación inicial. Sin embargo, actividades como las que se analizan en esta presentación pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales.

Finalmente, apuntamos a la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado. Esta es un área importante de investigación que puede contribuir a mejorar la educación estadística a nivel escolar.

Agradecimientos: este trabajo forma parte del proyecto EDU2010-14947 (MICIN) y de la beca FPI BES-2008-003573, MEC-FEDER.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Recuperado el 03 de septiembre de 2010 de http://www-personal.umich.edu/~dball/.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education,* 12, 1. Recuperado el 05 de septiembre de 2010 de http://www.amstat.org/publications/jse/

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Falk, R., & Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twuenty-first century*, MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC, EE. UU: Mathematical Association of America.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, México: ICMI e IASE. Recuperado el 7 de agosto de 2010 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics,* 20(1), 10-12.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics.* Dordrech: Reidel.

LAS PRÁCTICAS DE EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA Y LAS CREENCIAS DE LOS PROFESORES

Analí Acevedo Hernández, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas. (México)
analiacevedo@hotmail.com, erbalderas@uat.edu.mx

Resumen. Esta investigación presenta un estudio sobre las prácticas de evaluación de las matemáticas en sexto grado de educación primaria en México y las creencias de los profesores. Éstas tienen una fuerte influencia en la actuación del docente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y concretamente en la evaluación, dado que son ideas incuestionables, originadas en la práctica y que pueden permanecer o cambiar a lo largo del tiempo. Este estudio en proceso es de corte cualitativo, de tipo etnográfico, que utiliza observación participante y no participante. Se analiza el Plan de Estudios 2009 con su enfoque por competencias, al considerar conocimientos, habilidades y actitudes.

Palabras clave: -evaluación, matemáticas, creencias.

Abstract. This qualitative, ethnographic research in process, using participant and non participant, presents a study on the assessment practices of mathematics in sixth grade of elementary school in Mexico and beliefs of teachers. They have a strong influence on the performance of teachers in the teaching and learning of mathematics, specifically in the assessment, since they are unquestionable ideas originated in the practice can remain or change over time. We analyze the Curriculum 2009 with its competency-based approach, considering the knowledge, skills and attitudes.

Key words: assessment, mathematics, beliefs

Introducción

La educación es un proceso muy complejo en el cual intervienen múltiples factores y actores, en donde juega un importante papel la evaluación. Ésta puede estar enfocada en procesos, resultados, alumnos, maestros, etc., sin embargo, en el presente trabajo se tratará de presentar las creencias de los profesores sobre las prácticas de evaluación utilizadas en los grupos de sexto grado de educación primaria en México durante las clases de matemáticas.

El Programa de Estudios de Matemáticas tiene un *enfoque por competencias*, por lo cual es sumamente importante movilizar un conjunto de recursos conceptuales, procedimentales y actitudinales para enfrentar con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones, considerando que los conocimientos, habilidades y actitudes son solamente recursos, mismos que requieren ser movilizados en situaciones concretas, debiendo realizar la persona una serie de operaciones mentales complejas. (Perrenoud, 2004), (Tobón, 2008).

El programa presenta actividades interesantes para los niños en donde se promueve la reflexión y la resolución de problemas de la vida cotidiana, promoviendo la argumentación de los procesos y resultados, y planteando, además, la necesidad de realizar una evaluación del profesor, de las actividades de estudio y de los alumnos (SEP, 2009). La organización del programa presenta los contenidos divididos en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y, Manejo de la información. El Libro de Texto agrupa las lecciones en cinco bloques, para desarrollar cada uno en aproximadamente dos meses, dado que las evaluaciones sumativas son bimestrales.

Para que el enfoque por competencias sea implementado es necesario que el docente tenga ciertas competencias que permitan fomentar en los alumnos las propias. No es suficiente que sepan diseñar situaciones didácticas, se requiere estar interesado en el conocimiento que se desea construyan los alumnos, relacionar lo que se aprende en el aula con lo que el alumno vive fuera de la escuela y viceversa para vincular sus experiencias, darle mayor significado, facilitar el diálogo, la interacción de los alumnos en clase y su participación, y, tener capacidad de innovación para diseñar situaciones de aprendizaje acordes al contexto escolar y comunitario, con flexibilidad mental, seguridad emocional y creatividad. Otro aspecto muy importante que debe poseer el maestro es su capacidad para realizar una parte fundamental del proceso enseñanza-aprendizaje, la evaluación, vista como un proceso de apoyo y seguimiento a la construcción de competencias con propósito formativo tendiente a desarrollar en los alumnos la metacognición. En cuanto al enfoque por competencias podemos decir que son muy importantes sus tres elementos: conceptuales, procedimentales y actitudinales (Tobón, 2008). Dicho de otra manera, las competencias son la puesta en práctica por una persona o grupo de personas de saberes, contextualizados en una situación específica y siempre dependiendo de la representación que la persona o el grupo de personas hacen de esta situación.

El papel del docente es trascendental en el proceso enseñanza aprendizaje, él detenta la autoridad pedagógica frente al grupo por designación institucional y por conocimiento, siendo éste de dos tipos: el del campo disciplinario, es decir, por los contenidos programáticos y por su ejercicio de enseñanza con una finalidad dirigida a los alumnos mediante el uso de estrategias, y, además, por designación institucional (Camarena, 2009). Él es el responsable directo de los logros académicos y conductuales de los alumnos, porque aunque no le compete la selección de los contenidos curriculares -atribución del gobierno federal a través de la dependencia encargada, la Secretaría de Educación Pública-, es quien trata de apoyar a los alumnos para que los construyan, a través de los recursos que la escuela posee y de su acervo personal de conocimientos, habilidades, creencias y valores. Él es quien tiene la decisión última, en el aula, ante los discentes, para considerar o no ciertos contenidos, para hacer énfasis en ellos o para no hacerlo, para insistir en la formación de ciertos valores, es él quien decide finalmente con qué metodología tratará de alcanzar los objetivos propuestos y de qué manera lo hará. También es quien determina las pautas para que se dé la interacción con cada alumno y con el grupo en general. A través de su discurso promueve o detiene participaciones, ideas, actitudes, iniciativas y acciones.

Muchos autores han tratado de explicar qué mueve la actuación del docente frente al aula, encontrando variadas explicaciones. Algunos señalan que el maestro se ve influido por cuatro saberes: los *saberes académicos*, conjunto de saberes disciplinares que poseen sobre el currículum o ciencias de la educación, siendo explícitos y organizados de acuerdo a la lógica disciplinar; los *saberes basados en la experiencia*, conjunto de ideas concientes desarrollados durante el ejercicio de su profesión sobre ciertos aspectos de la enseñanza-aprendizaje con gran peso en su desenvolvimiento con los alumnos y en la planeación, realización y evaluación de la clase; *rutinas y guiones de acción*, conjunto de esquemas tácitos que predicen los acontecimientos en el aula, con pautas, concretas y estandarizadas, que simplifican la toma de decisiones y disminuye la ansiedad al tener preestablecidas ciertas pautas a seguir ante determinadas situaciones; y, las *teorías implícitas*, mismas que pueden explicar las creencias y acciones de los profesores, que pueden ser observadas y detectadas, aunque éstos no sean concientes de ellas o no conozcan los nombres de formalizaciones conceptuales que poseen (Porlán y Rivero, 1998).

Evaluación y competencias

La evaluación es un proceso complejo que requiere identificar el objeto de evaluación, establecimiento de criterios para evaluar, sistematización mínima para obtener información, representación del objeto de evaluación, emisión de juicios y toma de decisiones (Díaz-Barriga, 2002). El Programa de Estudios de Matemáticas señala que los alumnos deben ser evaluados respecto a qué tanto saben hacer y qué tanto aplican lo que saben, para lo cual se establecen los aprendizajes esperados, los cuales reúnen conocimientos y habilidades que deben construirse (SEP, 2009). Evaluar es un proceso complejo, y evaluar por competencias mucho más, ya que se pretende conocer el nivel de rendimiento académico de los estudiantes en términos de conocimientos, competencias, habilidades del pensamiento, actitudes, etc. (Ruiz, 2009). En concreto, queremos conocer el nivel de logro alcanzado por el alumno, y que, además, lo conozca el propio alumno, siendo conciente, de lo que sabe, lo que desconoce y el proceso que siguió para conocer.

El enfoque del programa y algunos autores señalan que se debe dejar al alumno en libertad de buscar solución a los problemas planteados de la forma que el alumno quiera, conozca o deduzca, que debe confrontar después con sus compañeros y hasta el final, llegar a una forma convencional, conveniente, para encontrar la solución (SEP, 2009), (Polya, 2008). Por ello, para evaluar por competencias es necesario diseñar instrumentos que permitan que el alumno demuestre con ejecuciones que puede realizar las tareas de la competencia exigida, para ello el maestro puede valerse de varios instrumentos, destacando la solución de problemas y el estudio de caso.

Marco metodológico

Al observar las prácticas áulicas se pueden detectar algunas formas de evaluación que utilizan los maestros, los momentos, recursos e instrumentos de que se valen y el manejo que hacen de la información obtenida. Es por ello que planteamos la siguiente interrogante: ¿cuáles son las creencias de los profesores sobre las prácticas de evaluación utilizadas en los grupos de sexto grado de educación primaria en México durante el desarrollo de las clases de matemáticas?

Esta investigación está en proceso, es de corte cualitativo, utiliza observación participante y no participante y método etnográfico, registrándose en audio las sesiones clase y posteriormente realizando la transcripción y análisis de diálogos mediante el agrupamiento en categorías. Se cuenta también con información proveniente de entrevistas realizadas a las maestras y alumnos. La unidad de análisis está integrada por dos grupos de sexto grado de una escuela primaria pública, urbana, en México.

Marco teórico

La indagación realizada hasta el momento gira en torno a las *creencias de los profesores*, la *evaluación* y el *enfoque por competencias*.

Las creencias están presentes en los tres niveles del currículo: el pretendido o normativo, el impartido y el logrado (Vila y Callejo, 2005). En el *currículo pretendido*, prevalecen las creencias teóricas explícitas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, presentes en los diseñadores del currículo, podemos detectarlas en los programas, planeaciones o materiales de apoyo, todo ello atribuible a la Secretaría de Educación Pública; en el *currículo impartido*, -que es el investigado en este trabajo-, se manifiestan creencias explícitas del profesorado, creencias implícitas de la cultura escolar y personal, las cuales pueden detectarse mediante entrevistas, cuestionarios u observación directa de la clase; en tanto que en el *currículo logrado* están presentes creencias explícitas e implícitas del alumnado, que en ocasiones no son deseables por los profesores, y que también se pueden descubrir con las mismas técnicas utilizadas con los maestros. Los profesores tienen muchas creencias sobre el proceso enseñanza-aprendizaje, las cuales reflejan en la planeación de la clase, en el momento de estar frente al grupo y en la evaluación. Sus creencias lo impactan a él y en consecuencia también a sus alumnos (Solar y Díaz, 2007, Vilanova *et al*, 2005).

Las creencias pedagógicas son la disposición interna que el profesor obtiene de modo no conciente, pudiendo permanecer o cambiar en algunas condiciones personales, institucionales o contextuales y que usan como principios o supuestos personales organizadores de prácticas pedagógicas no justificadas o no reflexionadas, provenientes de la práctica. El profesor las ha adquirido de manera personal o social y éstas lo hacen ver, concebir, actuar como enseñante de determinada manera, efectuar su práctica pedagógica de cierta forma en particular, adoptar un rol como profesor, otorgar determinado papel a la teoría y a la práctica, y tener una imagen de sí mismo y de sus alumnos (Salazar, 2006), contraponiéndose con otras posturas que señalan que son autorreflexiones del profesor en servicio sobre la enseñanza, los estudiantes, el contenido y las estrategias de solución de problemas propios de su asignatura (Yanes (2001). Las creencias de los docentes son muy poderosas dado que no se someten a discusión, sin embargo, mueven al actuar diario (Nafarrete, 2006). Sus creencias matemáticas las reflejan en el significado que le dan a sus contenidos, a su enseñanza y a su aprendizaje (Flores, 1996). Las creencias del docente en cuanto a lo que es el proceso de aprendizaje de las matemáticas y su evaluación no siempre es coincidente (Remesal, 2006). Es claro que la actitud del docente respecto a las matemáticas repercute en gran medida en el proceso educativo (Castro de Bustamante, 2002).

Análisis de resultados

Al analizar los registros etnográficos se observa que las maestras aplican la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa. La *evaluación diagnóstica o inicial* generalmente la hacen formulando preguntas orales sobre lo visto en sesiones anteriores; la *evaluación formativa o procesual* mediante la realización de actividades orales y escritas, pasando frecuentemente a los alumnos al pizarrón después de haber resuelto algún problema en equipo y haber deliberado sobre la forma de resolverlo, siendo coevaluados por los demás equipos, y teniendo que argumentar sus procedimientos y resultados; y la *evaluación sumativa o final* al término del tema, en donde invariablemente los maestros aplican ejercicios escritos con resolución individual que después son efectuados en el pizarrón por algún voluntario o persona designada por la maestra. Es frecuente que se encarguen de tarea ejercicios similares con el fin de reafirmar el conocimiento. Se observa el interés de las maestras por contextualizar los ejercicios matemáticos para darles sentido y vinculación con la vida cotidiana. Las maestras siguen los pasos recomendados tratando que los alumnos comprendan el problema, planeen la manera de resolverlo, lo realicen y, finalmente, reflexionen y expliquen cómo lo resolvieron, poniéndolo a consideración de sus compañeros (Polya, 2008).

Respecto a las competencias que el programa de estudios pretende desarrollar, se detectó, mediante entrevista a ocho maestras, las siguientes creencias sobre la evaluación:

Resolver problemas de manera autónoma, considerando la identificación, planteamiento y resolución de diferentes tipos de problemas. Los maestros sí valoran la importancia de este aspecto, permitiendo que los alumnos busquen libremente la resolución de problemas con métodos no convencionales o convencionales, promoviendo la interacción entre los alumnos y la búsqueda de ayuda pedagógica a quienes lo necesitan.

Maestra	A ver, vamos a la lección 82. ¿Quién me puede hacer el favor de leer el propósito de esta lección?
Alumna	*Definición de problemas de porcentaje.*
Maestra	En casos anteriores ya hemos estudiado lo que es el porcentaje. ¿Quién me puede decir lo que entiende por porcentaje? (voltea a ver a los alumnos, algunos levantan la mano). A ver Paty…
Alumna	El tanto por ciento de una cosa.
Maestra	El tanto por ciento de una cosa. (repite) ¿Cómo lo podemos aplicar con referencia a qué cantidad, siempre tenemos que tener como referencia una cantidad…Ahorita vamos a aplicar el tanto por ciento en esta lección…

Comunicar información matemática, realizando expresión, representación e interpretación de información matemática. La forma de comunicar la información casi siempre es verbal, y en menor medida escrita. Cuando se trata de esta última valoran en mayor medida la comunicación con uso de algoritmos, a diferencia del uso de dibujos u otro tipo de representación. Aumenta la incorporación de las Tic's en el proceso educativo.

Maestra:	Yo antes no enseñaba igual, trabajaba de otra manera…
Investigadora:	¿Cómo trabajabas antes?, ¿en qué era diferente?
Maestra:	Pues… antes era como… más tradicional, explicaba, ponía ejercicios y… pues ya, esperaba que los alumnos aprendieran…
Investigadora:	Y ahora…
Maestra:	No, pues ahora no, ahora sí explico, pero pregunto, cuestiono, indago conocimientos previos y luego trato de que ellos reflexionen y vayan descubriendo o construyendo, como decían las Antologías de la UPN (Universidad Pedagógica Nacional). Además ahora tenemos Enciclomedia (computadora cargada con recursos audiovisuales, gráficos, animaciones y enciclopedias virtuales que contiene los libros de texto y mucha información) y eso sirve muchísimo, a mí me gusta mucho, y a los niños también. Y esto no había antes, vaya, ni siquiera los maestros sabíamos usar la computadora.

Validar procedimientos y resultados, expresando sus procedimientos y defendiendo sus aseveraciones con pruebas empíricas y argumentos. Los maestros muestran aceptación de esta idea aunque les cuesta esfuerzo encontrar la forma adecuada para apoyar a los alumnos para que construyan sus argumentaciones.

Maestra	Ahora, vemos en el libro: *"1. Calcula los datos que faltan en la primera tabla. Para llenar la tabla que dice "B"* Tenemos aquí estas tablas (refiriéndose a las del libro) ¿quién me puede apoyar con la tabla?
Alumna	(Pasa una alumna voluntaria al pizarrón) Vamos a ver, la edad de Juan…es de 8 años, y la de su mamá de 35. ¿Qué es B-A?
Alumna	Es la diferencia que se llevan Juan y su mamá.
Maestra	Cuando Juan tenga 15 años, ¿cuál será la edad de su mamá?, ¿cómo vamos a hacerle para encontrarlo? (le pasa el marcador a la alumna para que escriba en el pintarrón)
Alumna	(Escribe la operación 15 + 27 = 42)
Maestra	¿Cómo encontraste el 42?
Alumna	27 + 15 = 42, porque 27 es lo que no va a cambiar.
Maestra	A ver, me gustaría que hicieran la operación en el pizarrón. (Pasa una alumna, escribe, se equivoca, borra con la mano, termina de escribir y pasa a su lugar). Bien, a ver, pásale (se dirige a otra alumna y ésta pasa al pintarrón y resuelve 24 + 27 = 51). *"Por qué la diferencia entre los años de la mamá y del hijo no cambia cuando pasan los años?* (Lee)
Alumnos	(Murmullo contestando en voz baja)

Manejar técnicas eficientemente, utilizando procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos con o sin apoyo de la calculadora. Existe cierta reticencia de los maestros para que los alumnos utilicen la calculadora en primera instancia, promueven el cálculo mental y después la realización de operaciones con papel y lápiz.

Maestra	A ver tú, pásale al pizarrón y resuelve (pasa y lo hace). Exactamente, nos dio 208. A ver, vamos a ver el porcentaje, 164…(escribe en el pizarrón la regla de tres simple), ¿cómo despejaría yo?, a ver Clara… (pasa al pizarrón) Pueden sacar su calculadora… (la sacan y trabajan con ella).

Sólo al final la maestra permite el uso de la calculadora, esto con fines de rectificación. Las maestras creen que el uso anticipado limita el desarrollo de ciertas habilidades en los alumnos. Por otra parte, hay autores que señalan que se debe dejar al alumno en libertad de buscar solución a los problemas planteados, que debe confrontar después con sus compañeros y posteriormente llegar a una forma convencional, conveniente, para encontrar la solución. (Polya, 2008)

Conclusiones

Las *conclusiones preliminares* permiten apreciar que en el aula se realizan en mayor medida prácticas de coevaluación durante la evaluación formativa, y en menor grado la autoevaluación y heteroevaluación, en tanto que esta última es frecuente en la evaluación diagnóstica, en forma oral por parte del maestro.

La evaluación sumativa realizada al término del bimestre, lapso oficial para rendir evaluaciones, se nutre principalmente de la heteroevaluación, con la resolución tradicional de resolver un examen escrito con problemas, que si bien contextualizados, siguen siendo ejercicios. Los maestros creen que la evaluación es su compromiso, y apenas inician el proceso de incorporar a los alumnos en esta labor.

Referencias bibliográficas

Camarena, E. (2009). *La enseñanza. Imaginarios docentes.* México: Gernika.

Castro de Bustamante, J. (2002). *Análisis de los componentes actitudinales de los Docentes hacia la enseñanza de la Matemática. Caso: 1° y 2° Etapas de Educación Básica Municipio San Cristóbal-Estado Táchira.* Tesis de Doctorado no publicada, Universitat Rovira I Virgili.

Díaz-Barriga, A. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México: Mc Graw Hill.

Flores, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *UNO. Revista de la Didáctica de las Matemáticas 8,* 103-111.

Nafarrete, C. (2006). Creencias e ideas en la docencia. *Sinécdica*, *28,* 89-92

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar.* México: Biblioteca para la Actualización del Maestro. Secretaría de Educación Pública.

Polya, G. (2008). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Porlán, R. y Rivero, A. (1998). *El conocimiento de los profesores*. España: Díada.

Remesal, A**.** (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria. Perspectiva de profesores y alumnos.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Barcelona. España.

Ruiz, M. (2009). *Cómo evaluar el dominio de competencias*. México: Trillas.

Salazar, V. (2006). *Comprender los procesos escolares. Creencias, valores y emociones*. Barcelona-México: Pomares.

Secretaría de Educación Pública (2009). Programas de Estudio 2009. Sexto grado. Educación básica. Primaria. México: Autor.

Solar, M. y Díaz Lorenas, C. (2007). El sistema de cogniciones y creencias del docente universitario y su influencia en su actuación pedagógica. *Horizontes Educacionales*, *12 (1),* 35-42.

Tobón, S. (2008). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica.* Colombia: Ecoe Ediciones.

Vila, A. y Callejo, M. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid: Narcea.

Vilanova, S. *et al*. (2005). Concepciones de los docentes sobre la Matemática. Su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.) *Acta Latinoamericana* de *Matemática Educativa 18*, 425-430. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Yanes, G. (2001). *Creencias de los profesores sobre la enseñanza de la lectura y la aritmética y la relación con el rendimiento*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de la Laguna. España.

LAS CONCEPCIONES DEL PROFESOR Y SU RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ECUACIÓN LINEAL

Mario Adrián Caballero Pérez, María Guadalupe Ordaz Arjona
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán . México
mcaballero1988@hotmail.com, oarjona@audy.mx

Resumen. El estudio de las ecuaciones en la enseñanza del álgebra en bachillerato desempeña un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, no sólo por estar relacionado con temas de otras asignaturas, sino porque permite modelar problemas reales. Sin embargo, el tratamiento escolar de éstas, propicia dificultades en su aprendizaje, e ideas incompletas de ecuación. Conviene entonces indagar sobre las razones de que los profesores de matemáticas aborden la enseñanza de la ecuación de una forma y no de otra. En particular uno de nuestros objetivos, fue caracterizar las concepciones sobre el concepto ecuación lineal, para lo cual establecimos cuatro categorías de concepciones: Operacional, Estructural, Funcional y Geométrico. Los resultados obtenidos al momento indican que la ecuación lineal es concebida como un objeto matemático definido por medio de reglas, propiedades y procedimientos propios del álgebra y no como herramienta para la resolución de problemas.

Palabras clave: ecuación lineal, concepciones, profesores

Abstract. The study of equations in the teaching of algebra in high school have an important role in student learning, not only as it relates to other subject, also allows us to model real problems. However, the teaching of them fosters their learning difficulties, and ideas incomplete about equation. Then, should investigate the reasons that teachers of mathematics teach equation one way and not another. In particular, one of our goals was to characterize the conceptions about the concept linear equation, for which we established four categories of conceptions: Operational, Structural, Functional and Geometric. The results to date indicate that the linear equation is conceived as a mathematical object defined by rules, properties and procedures of the algebra and not as a tool for solving problems.

Key words: linear equation, conceptions, teachers

Introducción

Planteamiento del problema

La ecuación es un concepto matemático que ha sido relacionado estrechamente con la enseñanza del Álgebra, y contemplado como un requisito en otras asignaturas, como es el caso de geometría analítica y cálculo. Sin embargo, se ha visto que el aprendizaje de este concepto no es sencillo, lo cual queda evidenciado al observar la diversidad y recurrencia de errores y dificultades en los estudiantes, tanto de carácter conceptual como procedimental, por ejemplo, el manejo del signo igual y, el significado de las literales y de la solución. Existen investigaciones que tratan acerca de las causas que originan estos errores, algunas de corte epistemológico, analizando los cambios conceptuales que se dan en la transición de la aritmética al álgebra, y otras enfocadas en el alumno, particularmente en sus actitudes hacia el aprendizaje, o en los procesos cognitivos. Sin embargo, se ha estudiado en menor medida, cómo el profesor de matemáticas, en particular, el tratamiento que le da a los conceptos, puede contribuir al surgimiento de errores. Por ejemplo, durante la enseñanza en el aula, el profesor suele definir una ecuación como una igualdad con una incógnita, lo cual como menciona Sessa (2005) induce a la idea de que la ecuación es un número que existe pero es desconocido, y en consecuencia, no es posible concebir la idea de ecuaciones sin solución y de ecuaciones con soluciones infinitas. Es así que en la escuela, a la ecuación se le da un tratamiento que propicia en los estudiantes, por un lado, dificultades en el aprendizaje del Álgebra, y por otro, ideas inadecuadas o incompletas de lo que es una ecuación. Conviene entonces indagar sobre las razones que causan que los profesores de matemáticas aborden la enseñanza de la ecuación de una forma y no de otra. Coincidimos con García, Azcárate y Moreno (2006), en que las concepciones juegan un papel importante en el desarrollo de la actividad docente, y el conocer las concepciones de los profesores sobre algún concepto matemático puede ayudar a explicar el tratamiento que los profesores dan a éstos. En este trabajo presentamos los resultados preliminares de una investigación que pretende explicar cómo se relacionan las concepciones de los profesores sobre la ecuación lineal con el tratamiento que estos le dan al concepto. En este reporte, planteamos el trabajo realizado en torno al objetivo: *caracterizar las concepciones que los profesores tienen sobre la ecuación lineal.*

Marco de referencia

Las concepciones son un constructo que los investigadores han creado para referirse a parte del conocimiento personal que los seres humanos poseen. Moreno y Azcárate (2003), consideran que las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, imágenes mentales, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. Esta caracterización corresponde a una idea general de concepción, sin embargo, para hablar de las concepciones del profesor de matemáticas, hemos considerado la propuesta de García, Azcárate y Moreno (2006), en la cual, las concepciones consisten en la estructura que cada profesor da a sus conocimientos, para posteriormente, enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes. Bajo esta idea, una concepción sobre la ecuación lineal está conformada por la organización e interiorización de los significados que el profesor tiene de este concepto. Sfard (1991), citado en Kieran (1992), considera que las nociones matemáticas pueden ser concebidas de dos formas, una *Operacional*, considerándolas como procesos, y una *Estructural*, concibiéndolas como objetos. En el trabajo de Panizza, Sadovsky y Sessa (1996), se considera que una concepción que permite la compresión de la ecuación lineal, involucra la elaboración de los conceptos *raíz, conjunto solución, variable y ecuaciones equivalentes.* Nosotros establecimos un conjunto de categorías de concepciones sobre la ecuación lineal (**Ver Tabla 1**), considerando los significados atribuidos a los elementos señalados por Panizza, Sadovsky y Sessa (1996), y las concepciones propuestas por Sfard (1991, citado en Kieran, 1992), además de otros aspectos relacionados con la ecuación lineal como *las literales, el signo igual, y los métodos de resolución*.

Aspectos metodológicos

Una vez establecido nuestro marco de referencia, el siguiente paso consistió en identificar las concepciones que los profesores tienen de la ecuación lineal; estudiamos a siete profesores que laboran en Colegios de bachilleres del estado de Yucatán, contemplando formación inicial en: Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Construcción, Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas y Licenciatura en Educación, con experiencias docentes que varían desde dos hasta cuarenta años. Para identificar las concepciones aplicamos una encuesta, diseñada a partir de los indicadores señalados en las categorías de concepciones, está encuesta constó de seis preguntas, dándoles cuatro opciones de respuesta que correspondían a una de las cuatros categorías señaladas anteriormente. También se aplicó un cuestionario conformado por cuatro ítems, que pretendían mostrar cómo el profesor hace uso de la ecuación lineal, a través de analizar las formas en que resuelve ciertos problemas matemáticos. Adicionalmente se realizó una entrevista, que permitió complementar la información de las concepciones.

INDICADORES	OPERACIONAL	ESTRUCTU-RALISTA	FUNCIONAL	GEOMÉTRICO
Definición de ecuación lineal	La ecuación es una expresión en la que existe un valor desco-nocido, el cual debe ser hallado por medio de operaciones matemáti-cas.	La ecuación es un concepto matemático definido, cuyos elemen-tos y técnicas de reso-lución son específicos.	La ecuación es una herramienta que per-mite la resolución de problemas y que se relaciona estrecha-mente con el concep-to de función.	Es un concepto matemático, cuya utilidad e importancia, radica en su versatilidad para ser representado en forma gráfica.
El papel del signo igual	Es visto como un operador unidireccional Sirve para indica cuales son las operaciones que deben realizarse.	Le da a la ecuación la característica de igual-dad, es decir, ambos miembros de la ecua-ción tienen el mismo valor.	Indica las condicio-nes que se establecen en el problema que se pretende resolver.	Indica la condición que cumplen los puntos pertenecientes a un lugar geométrico en un sistema coordenado.
El significado de las literales	Representan los valores que se desconocen, y que deben ser hallados.	Números generalizados, es decir, representan to-dos aquellos números que puedan ser susti-tuidos en la ecuación.	Son las variables de una función lineal.	• Es la abscisa de un punto (una literal). • Representan los puntos de un sistema coordenado (dos literales).
El significado de la raíz o solución	Es el número cuyo valor era desconocido.	Es el valor que hace que la igualdad sea verda-dera.	El valor con el cual se da solución a un	• Es el valor de la abscisa para el cual

			problema.	la ordenada es cero (una literal). • Son los puntos que pertenecen a un lugar geométrico (dos literales).
El significado de resolver una ecuación lineal	Efectuar procedimien-tos, no necesariamente algebraicos, con el fin de dar respuesta a la ecuación.	Hallar todas las solu-ciones de la ecuación mediante operaciones algebraicas que no alteren la igualdad.	Hallar el valor de la variable de una fun-ción, que cumple con la condición indicada en un problema.	• Hallar el punto en que una gráfica corta al eje X. (una literal) • Hallar el conjunto de puntos que pertenecen a un lugar geométrico (dos literales).

Tabla 1

Resultados

Por la extensión del documento nos centraremos en presentar los resultados obtenidos en el Cuestionario, enfocándonos en el análisis realizado a dos de los ítems, y a dos profesores, el profesor A, y el profesor D. En dicho análisis pretendíamos obtener información sobre cómo el profesor hace uso del concepto, para lo cual se complementó con la información obtenida en la entrevista, y de esa forma indagar más sobre la concepción que tenía sobre la ecuación lineal, para posteriormente corroborarlo con lo reportado en la encuesta.

Profesor A. Ítem 1

"Un auto A inicia en el principio de una carretera y avanza a una velocidad constante de 60 Km/h. Media hora después, un auto B parte del mismo punto hacia la misma dirección con una velocidad de 90 Km/h".

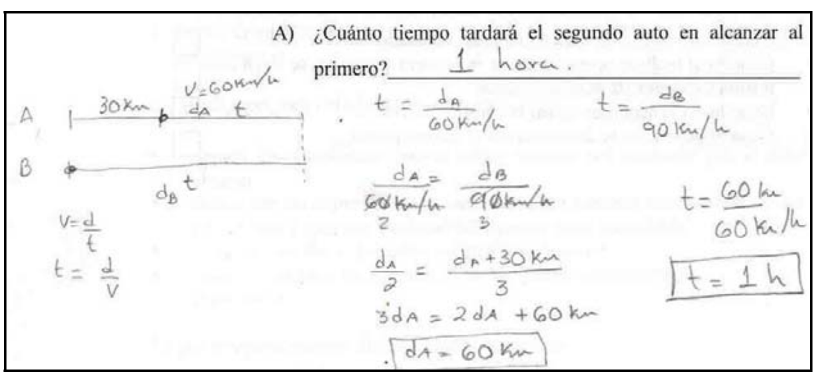


Figura 1

En el inciso A (ver Figura 1) la profesora emplea el símbolo "=", como un *símbolo de equivalencia*, ya que expresa la igualdad entre las expresiones correspondientes a los tiempos de los vehículos A y B, y resuelve empleando *métodos algebraicos que no alteran la igualdad planteada*, como se puede apreciar en la transposición de términos que hace. Las literales representan la distancia que recorren los automóviles, y estas literales pueden ser sustituidas por diferentes valores, por lo cual, corresponden a *números generalizados*. Además, la raíz de la ecuación corresponde al tiempo en que las distancias recorridas son iguales, por tanto, representa *el valor para el cual, la igualdad se conserva*. Así, la concepción que muestra aquí es *Estructural***.**

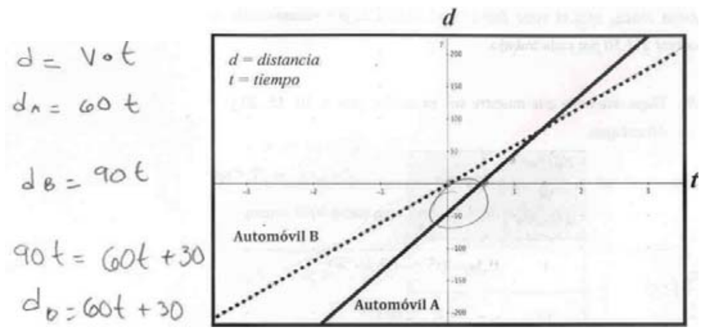


Figura 2

En el inciso C del mismo ítem (ver Figura 2), se le mostraba a la profesora un gráfica que representa la situación descrita en el inciso A y se le preguntaba si ella incluiría la gráfica al plantearles este problema a sus estudiantes; la profesora dice que no la incluiría, sin embargo, resuelve nuevamente el inciso A mostrando ahora un procedimiento distinto, pero acorde a la situación mostrada en la gráfica, ya que considera al automóvil A como referencia para el tiempo de inicio, a diferencia del procedimiento mostrado en el inciso A, donde consideró el automóvil B como referencia para el tiempo inicial, incluso la respuesta que dá es distinta a la presentada anteriormente. Asimismo, al preguntarle en la entrevista sobre cómo utilizó la gráfica, la profesora dice:

"*como te piden el tiempo en que las distancias son iguales, vemos en el eje de las Y, dónde las rectas se cortan, y luego para hallar el tiempo, buscamos el valor del eje X correspondiente al punto de corte"*

Aunado a ello, cuando en la entrevista se le preguntó cuál de los dos procedimientos (el del inciso A y del inciso C) considera más adecuado, la profesora responde que ambos, ya que según ella, la figura del inciso A y la gráfica del inciso *C "son similares y proporcionan la misma información"*. En ambos procedimientos la profesora enfatiza en la representación auxiliar, los segmentos en el inciso A, y la gráfica en el inciso C, y al decir que proporcionan la misma información, vemos que la profesora considera la literal como los *valores del eje X*, a la raíz de la ecuación como *la abscisa de un punto específico*, y al signo "=" como *la relación que cumplen* *las abscisas y ordenadas de los puntos de una recta*. Por tanto, al considerar las respuestas plasmadas en el inciso C y en la entrevista, decimos que la concepción que muestra la profesora es *Geométrica*.

Profesor A. Ítem 2

"Carla planea ir de vacaciones con su prima Kate durante una semana, por lo que pide prestados \$195 para comprar una podadora de césped, con el fin de ganar dinero para el viaje cortando el césped de los vecinos. Ella decide cobrar \$11.50 por cada trabajo"

D) ¿Cuántos trabajos tiene que hacer Carlos con el fin de ganarse al menos \$500 para su viaje de vacaciones?

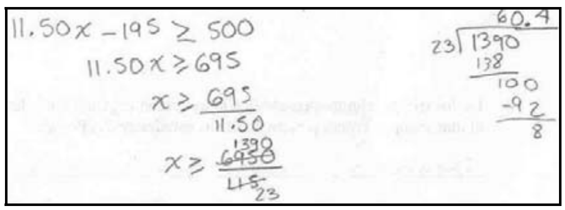


Figura 3

En el inciso D (Figura 3), el signo "=" es remplazado por una desigualdad que representa *la condición que cumple la expresión correspondiente a la ganancia obtenida* por cada trabajo, es decir, la ganancia sea mayor a \$500. La literal representa el número de trabajos para los cuales la ganancia es mayor a \$500, y como la ganancia depende del número de trabajos realizados, entonces la literal es una *variable*. La solución no es un valor único, sino *un conjunto de valores que dan solución al problema*, y resolver la desigualdad implicó realizar operaciones algebraicas que no alteren la desigualdad. Por tanto, la concepción de la profesora es *Funcional***.**

Profesor D. Ítem 1

En el inciso A el profesor plantea una ecuación derivada de igualar las ecuaciones correspondientes a las distancias recorridas por cada automóvil, y la resuelve por métodos algebraicos (ver Figura 4). El símbolo "=" representa *la equivalencia* que debe haber en las distancias recorridas, y por tanto, entre las ecuaciones de cada automóvil, la literal que utiliza, representa los tiempos en que cada uno recorre cierta distancia, por tanto, la literal es un *número generalizado* y la solución es *el valor de la literal que mantiene la igualdad entre las expresiones indicadas*. Resolver la ecuación es realizar *operaciones algebraicas que no alteren la igualdad* entre las expresiones. En la entrevista se observó, que el profesor concibe a la ecuación lineal ajena a la función lineal, afirma: "*hay algunos conceptos, como el de funciones que no lo manejamos"*. También se aprecia que considera a la ecuación lineal bajo un enfoque puramente algebraico, lo cual concuerda con lo que dice sobre el uso de la gráfica en el ítem 1:

"no había visto la gráfica, resolví la ecuación sin verla". Da a entender que el uso de la gráfica no fue necesario, y que se centró únicamente en el planteamiento y resolución algebraica de la ecuación correspondiente. Por tanto, la concepción del profesor es *Estructural*.

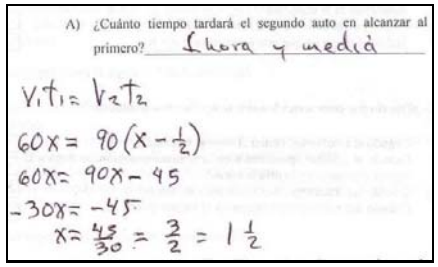


Figura 4

Profesor D. Ítem 2

En el procedimiento mostrado en la Figura 5, el símbolo "=" representa *la equivalencia* que se da entre el número de trabajos y la ganancia que se obtiene, mientras que la literal son los trabajos que se realizan, y por tanto, representa *un número generalizado*. La solución de la ecuación, es el valor para el cual, la expresión correspondiente al número de trabajos es equivalente a la ganancia, es decir, *el valor que hace verdadera la igualdad*. En la entrevista, el profesor menciona que el uso de tablas ayuda a los estudiantes en la resolución del ítem, debido a que pueden "*visualizar las relaciones y hacer el planteamiento de la ecuación"*. Sin embargo, esta idea la asoció únicamente a los estudiantes, pues para él no es necesario el uso de la tabla, ya que basta el planteamiento algebraico. Por tanto, la concepción que muestra es *Estructural*.

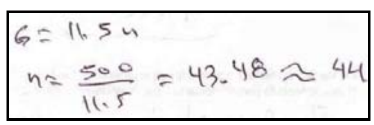


Figura 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos de la encuesta, el cuestionario y la entrevista se presentan en la Tabla 2, en la que se indica el profesor y la concepción que predomino en el análisis.

PROFESOR	CONCEPCIÓN
A	Geométrica
B	Estructural
C	Estructural
D	Estructural
E	Operacional
F	Operacional
G	Geométrica

Tabla 2

De estos resultados concluimos que hay una tendencia en los profesores estudiados hacia una concepción *Estructural* de la ecuación lineal, ya que está presente en tres de los profesores, en tanto que la concepción *Geométrica* y *Operacional* se presenta cada una en dos profesores. Debido a que sólo tres de siete profesores presentaron una concepción *Estructural*, esto nos indica que hay una tendencia a concebir la ecuación lineal como un concepto matemático definido, cuyos elementos y técnicas de resolución son específicos del álgebra, el signo igual da a la ecuación la característica de igualdad, es decir, que los miembros a la derecha e izquierda de la igualdad pueden entenderse como partes de la ecuación, que deben ser iguales. Las literales son vistas como números generalizados, es decir, representan todos aquellos números que puedan ser sustituidos en la ecuación, donde la raíz de la ecuación lineal representa el valor que hace que la igualdad sea verdadera.

Llama la atención que la concepción *Funcional* no se encontró presente en los profesores estudiados, puesto que en ella se logra una articulación entre los diferentes registros de representación de la ecuación lineal, y se considera el uso variables, el cual es un elemento esencial para el aprendizaje del álgebra. Sin embargo, aunque no fue predominante, en algunos profesores se observó que en cuanto al significado atribuido a las literales, estas eran concebidas como variables de una relación funcional, e incluso se hacía mención de la relación de dependencia entre las variables. Por otra parte, la entrevista permitió observar que la mayor parte de los profesores conciben de forma separada, conceptual y académicamente, conceptos como función y ecuación, y asimismo, la representación gráfica es concebida por los profesores como un elemento ajeno a la enseñanza de la ecuación lineal. Sin embargo, los mismos profesores consideran importante la inclusión de gráficas en la enseñanza de la ecuación lineal, ya que proporciona una alternativa para el aprendizaje y la comprensión del concepto.

En un estudio posterior se complementarán los resultados obtenidos hasta ahora con la descripción del tratamiento dado a la ecuación lineal por profesores de bachillerato, con el objetivo de analizar de qué forma las concepciones influyen en el tratamiento dado a este concepto, con lo cual se tendría una forma de caracterizar la práctica docente en función de las concepciones, dando así referencia sobre las concepciones que deberían ser modificadas en los profesores durante cursos de actualización y formación, y de ese modo, contribuir a una enseñanza de la ecuación lineal que propicie un aprendizaje enfocado en la compresión del concepto, y no en la memorización de reglas.

Referencias bibliográficas

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 9, número 1, 85-116.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Douglas A. Grouws (ed.), pp. 390-419. Nueva York: Macmillan.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias* 21(2), 265-280.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática. Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Córdoba.

Sessa, C. (2005). Una entrada al álgebra a través de la generalización. En Sessa (Eds.). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y perspectivas* (pp. 67 – 126). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

LAS INTERACCIONES EN UN ENTORNO VIRTUAL. UNA EXPERIENCIA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES

Daniela Müller, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Marcela Hecklein
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen. Las tecnologías de la información y de la comunicación han transformando la formación a distancia ante la posibilidad de diseñar nuevos espacios virtuales de enseñanza y de aprendizaje donde la comunicación es uno de los aspectos vitales. Los medios informáticos contribuyen al propósito de la comunicación bidireccional, produciendo intercambios en tiempo real o diferido. En este trabajo, se presentan las características de un curso a distancia para docentes de Matemática de enseñanza secundaria, se describen los principales recursos incluidos en los planes de trabajo semanales y en especial, se analizan las intervenciones e interacciones realizadas en los distintos foros propuestos.

Palabras clave: participación, interacción, formación docente.

Abstract. The information and communication technologies have transformed distance education at the possibility of designing new virtual learning environment where communication is an important aspect. Computer resources contribute to the purpose of producing two-way communication and exchanges in real or delayed time. In this paper, we present the characteristics of a distance learning course for teachers of mathematics in secondary education, we describe the main weekly resources and in particular, we analyze the interventions and interactions carried out in some forums suggested.

Key words: participation, interaction, teacher training

Introducción

Las tecnologías de la información y de la comunicación han transformando la formación a distancia ante la posibilidad de diseñar nuevos entornos virtuales de enseñanza y de aprendizaje. Esto se debe principalmente, a la posibilidad de establecer espacios de comunicación que proveen un buen soporte para la interacción del alumno con el docente tutor y con los otros alumnos.

Los medios informáticos contribuyen al propósito de la comunicación bidireccional, produciendo intercambios en tiempo real o diferido. La segunda, también llamada asincrónica, es aquella que no se realiza en tiempo real. En ella el docente abre la discusión y retroalimenta las opiniones de los participantes quienes intervienen en diferentes momentos aportando su opinión, otros puntos de vista, compartiendo información, etc.

Esta herramienta comunicativa incorporada de modo apropiado en los procesos de enseñanza o de formación, y bien asistidas, puede favorecer un proceso interactivo en donde los alumnos producen activamente el conocimiento expresando por escrito las ideas que son compartidas y construidas a partir de las reacciones y respuestas de los demás. De esta manera nos encontramos frente a la posibilidad de crear entornos de aprendizaje que posibilitan el trabajo colaborativo y potencian la construcción de conocimiento en un grupo de aprendizaje. Pero, a pesar de las posibilidades que conllevan, por sí solas las nuevas tecnologías no propician cambios si no existe una modificación en las actitudes y acciones personales de quienes las utilizan.

Durante el año 2008, haciendo uso de la plataforma de la UNLVirtual, dictamos un curso destinado a docentes de Matemática de enseñanza secundaria en el que, a través de la organización en planes de trabajo semanales, diseñamos distintas actividades que promovieran la participación activa de los docentes. Entre ellas, los foros abarcaron cuestiones que invitaban al análisis, al intercambio, a la discusión o a la reflexión de un determinado tema. En este trabajo se analizan las distintas intervenciones e interacciones que se realizaron en estos espacios de comunicación asincrónica.

Fundamentación

Una de las posibilidades emergentes derivadas de las nuevas tecnologías, es el uso de entornos virtuales de aprendizaje para apoyar la labor docente, extendiendo la clase más allá de las fronteras del aula. En el prólogo del informe sobre las tecnologías de la información y la formación docente elaborado por la UNESCO (2004) se establece:

> Con el advenimiento de las nuevas tecnologías, el énfasis de la profesión docente está cambiando desde un enfoque centrado en el profesor y basado en clases magistrales, hacia una formación centrada principalmente en el alumno dentro de un entorno interactivo de aprendizaje. El diseño e implementación de programas de capacitación docente que utilicen las TICs efectivamente es un elemento clave para lograr reformas educativas profundas y de amplio alcance.
>
> (…) Para que la educación pueda explotar al máximo los beneficios de las TICs en el proceso de aprendizaje, es esencial que tanto los futuros docentes como los docentes en actividad sepan utilizar estas herramientas. Las instituciones y los programas de formación deben liderar y servir como modelo para la capacitación tanto de futuros docentes como de docentes en actividad, en lo que respecta a nuevos métodos pedagógicos y nuevas herramientas de aprendizaje (p. 5).

Acosta y Cruz (2008), expresan que el desarrollo de nuevos recursos didácticos y tecnológicos, ha originado que los docentes que participan en un proceso de formación y actualización, adquieran un mayor protagonismo, intervención y control de los procesos, en especial al usar recursos y herramientas que mejor se adapten a sus necesidades. De aquí la importancia de una capacitación planificada, crítica y actualizada, que tenga como finalidad incrementar la calidad de la educación mediante la adquisición de habilidades y conocimientos que promueva en los docentes el desarrollo de actividades pedagógicas creativas e innovadoras.

Entre otros aspectos, coincidimos con Barberà y Badía (2004), al considerar que es muy positivo que los docentes participen en propuestas de formación docente pues, además de actualizarse en contenidos curriculares, les permite conocer cómo funcionan estos espacios que en otro momento podrían ser ambientes en los que les correspondería desempeñarse, ya sea integrándolos como apoyo o complemento de una clase presencial o utilizándolo completamente en forma virtual.

Las nuevas tecnologías permiten crear espacios de comunicación en tiempo real y diferido, compartir documentos, trabajos grupales colaborativos o cooperativos, discutir a través de foros virtuales, entre otras. Sin embargo la tecnología no crea la comunicación ni el aprendizaje (Gros, 2004), sino que abre vías que facilitan y hacen posible la comunicación lo que muchas veces se da a nivel de participación que no es sinónimo de interacción.

La participación y la interacción son dos formas complementarias de presencia virtual. Para diferenciarlas, tomamos las palabras de Barberá y Badía (2004), quienes consideran que la participación es la presencia y aporte virtual del alumno, mientras que la interacción agrega la respuesta y encadenamiento de comprensiones mutuas realizadas mediante el lenguaje.

La interacción es vital para la construcción de conocimiento por medio del intercambio de mensajes con los otros participantes y con el tutor, centrados en el tema de discusión. Estos mensajes muchas veces se construyen en un comienzo desde la experiencia personal y luego se enriquecen con los aportes de los demás. En cambio, la participación supone simplemente "estar ahí e intervenir", pero no requiere de una respuesta ni necesariamente la provoca. Un ejemplo de esto es cuando el tutor plantea un tema y todos o parte de los alumnos le responden al tutor pero no interactúan entre ellos. En cambio cuando hay interacción hay diálogo entre el tutor y los participantes y entre estos mismos.

En los cursos virtuales existen muchos alumnos que no participan activamente aunque lean las intervenciones de los compañeros. Para lograr que ellos se relacionen con los demás, expresen sus ideas, modifiquen su pensamiento a partir de la idea de los otros, defiendan con argumento sus propias ideas y pensamientos, es preciso favorecer la interacción más allá de la participación. Por ello se requiere de la intervención oportuna del profesor tutor que realice el seguimiento y la moderación que permitan mantener "vivos" los espacios comunicativos, facilite el acceso a los contenidos y anime el diálogo entre los participantes.

Acordamos con Barberà, Badía y Moninó (2001) al establecer como ventaja que al disponer de los textos escritos de las intervenciones éstos pueden ser visualizados y examinados varias veces y su contenido puede ser reestructurado y recontextualizado en cualquier momento mientras dura el proceso de discusión del tema propuesto. Como desventaja citan que las discusiones por escrito pueden carecer de coherencia y pueden tender a tomar distintas direcciones sin un hilo conductor que resulta imprescindible en cualquier debate.

Desarrollo de la propuesta

La Universidad Nacional del Litoral implementa el Programa de Educación a Distancia, UNLVirtual, desde el año 1999, primero mediante un sistema con soporte satelital para luego de unos años incorporar una plataforma e-learning.

Desde el año 2001 participamos de la propuesta a través del dictado de cursos de extensión sobre los temas Funciones, Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, de manera continua hasta el presente. Esto nos permitió, a partir de la experiencia recogida en cada dictado, modificar cada una de las actividades propuestas en función de las necesidades y dificultades planteadas por los docentes participantes.

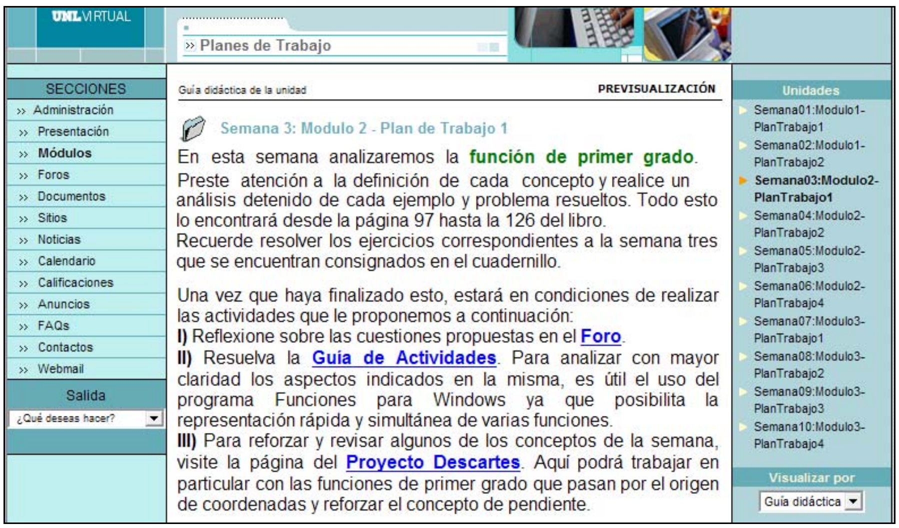
Durante el año 2008, dictamos un curso dirigido a docentes del nivel secundario que trató la temática referida a la enseñanza del tema “Funciones Escalares” y en especial su rol en la formulación de modelos matemáticos. Contó con 110 inscriptos provenientes de diversas provincias y se desarrolló en 10 semanas entre los meses de mayo a agosto.

La planificación e implementación del curso contempló la selección de contenidos, la diagramación de los temas, la elaboración de planes de trabajo semanales para lo que se tuvo en cuenta la utilización de diversos recursos de apoyo a los contenidos.

La estructura semanal responde a lo planteado por Barberà y Badía (2004) en el sentido de presentar en forma clara la organización de las actividades y articular a través de ellas el acceso a los diferentes recursos. Fue una manera de hacer más operativa la propuesta, estableciendo espaciadamente en semanas las actividades del curso. El Plan de Trabajo tiene por finalidad organizar la actividad del alumno al ingresar al aula virtual y fue pensado como una actividad semanal que acompañe a la lectura del material de estudio impreso que el alumno ha recibido y que representa el material estático. En cambio, todo aquello que se propone en el espacio del Aula Virtual, mediatizado por los Planes de Trabajo, representa la dimensión dinámica del curso.

En estos planes, se presenta la actividad semanal a desarrollar, se establecen las consignas, y se remite a la lectura de parte del material impreso o se indica dónde y cómo pueden encontrarlo: un sitio web interesante o un documento anexo que complemente el tema que se está desarrollando, el planteo de una situación diferente que invite al análisis de distintas formas de resolverla o de ser llevada al aula. Si la actividad propuesta es de debate, a la vez que se establecen las pautas para la participación, se estipula el tema y espacio de esa instancia de intercambio que figura en la sección "Foros".

En la siguiente imagen se muestra el contenido del plan de trabajo de la tercera semana del curso que corresponde al tema Función de Primer grado.



En un breve párrafo se recuerdan las principales actividades que deben realizar con el material impreso recibido. Luego se presentan las actividades que pueden realizar haciendo uso de los distintos recursos del Aula Virtual que complementan lo anterior. En cada una de las palabras resaltadas en color azul se establece un vínculo a la sección donde se encuentra una guía con actividades diferentes que requieren del uso de un software, la visita a una página web que ayuda a reforzar los conceptos y la invitación a reflexionar sobre una cuestión en particular planteada dentro de un *Foro.*

Por ejemplo, para el plan de trabajo que estamos analizando, lo propuesto en el foro establecía lo siguiente:

1) Sea P un punto cualquiera perteneciente a la gráfica de una función de primer grado de pendiente m = –0,5. Si Q es otro punto de la misma gráfica ubicado 4 unidades a la derecha de P, ¿cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo de P se encuentra?

2) Si R es otro punto de la misma gráfica que se encuentra ubicado 8 unidades a la izquierda de P, ¿cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo de P se encuentra R?

Justifique sus respuestas.

Para responder estas cuestiones, podían recurrir a distintas representaciones. En el análisis de las respuestas, este también fue uno de los aspectos considerados pero no forman parte de este trabajo.

Dentro de los objetivos del curso también nos interesó conocer la apreciación de los docentes participantes sobre el uso de los espacios provistos por el aula virtual y conocer y caracterizar las intervenciones e interacciones del tutor y de los docentes participantes en las situaciones propuestas en los distintos foros.

En esta experiencia, se recogieron y analizaron diferentes tipos de información relacionadas con el curso y su implementación y el uso del espacio virtual destinado a la interacción. En particular presentamos el análisis cualitativo de las distintas intervenciones e interacciones que se produjeron dentro del *Foro* durante las distintas semanas.

Para analizar las intervenciones del tutor y los docentes participantes se utilizaron como unidad de análisis a los mensajes y unidades temáticas.

De los textos correspondientes a las intervenciones de los participantes se analizó a quién se dirigen las mismas y como estas se construyen. Lo primero tiene relación con determinar si la intervención responde a algún tipo de interacción para lo cual se consideró apropiado determinar el destinatario de la intervención: el tutor, los compañeros del grupo u otro participante en general cuya identidad no quedaba explícita. Las dos primeras responden a un contexto de interacción mientras que la tercera no. El segundo aspecto se relaciona con los elementos sobre los cuales se construye el contenido de la intervención, es decir si la intervención se realiza sobre la base de argumentos personales o a partir de las participaciones anteriores de otros participantes.

Presentamos los principales resultados del análisis de la calidad y de la cantidad de las intervenciones e interacciones que se produjeron en los foros propuestos a lo largo de todo el curso.

Resultados

Para evaluar la experiencia, el último de los foros se refirió a que emitan su opinión sobre el desarrollo del curso. En este espacio participó el 34% de los docentes y algunas de sus opiniones se transcriben a continuación.

En general coinciden en evaluar el curso positivamente:

> *Debo decir que sumamente positivo todo lo realizado por las profesoras encargadas del curso y por los compañeros: material excelente, problemáticas planteadas en los trabajos prácticos, guías y foros (…), respuesta inmediata y organización en cuanto a tiempo destinado para cada cosa. (Nieves)*

En relación a la propuesta, una docente señala:

> *El curso me resultó muy interesante. He utilizado algunas propuestas teóricas en cursos del polimodal y los alumnos respondieron satisfactoriamente. Con las propuestas de los foros aprendí otras formas de resolución. (Silvia)*

Los participantes no se sintieron solos durante el tiempo de realización del mismo:

> *Además, quiero destacar el excelente seguimiento realizado por ustedes, que estaban presentes ante cada inquietud o solicitud y la predisposición que siempre tuvieron en responder inmediatamente todo tipo de pregunta y problema. (Cecilia)*

Sobre la escasa participación en los foros, opinan:

> *Como siempre el factor tiempo es un condicionante y por esa razón se resintió de mi parte la participación en foros. (Héctor)*

Este último docente sólo participó en este foro y en el de presentación. Es un claro ejemplo de falta de participación activa que hubiera sido importante detectar antes para favorecer la intervención en los espacios de comunicación, aunque más no sea de manera tardía.

En relación a los diez foros restantes, cada uno en correspondencia con el tema semanal establecido en los planes de trabajos, la participación promedio fue del 19% a la mayoría de los mismos y fue disminuyendo en las últimas semanas del curso. Solo uno de los alumnos lo hizo de manera continua en cada uno de los foros propuestos. Los docentes que no participaron activamente en esta sección cumplimentaron con las demás actividades propuestas en el curso.

En los foros referidos a las cuestiones propuestas para cada uno de los temas, analizando los textos correspondientes a las intervenciones de acuerdo hacia quiénes estaban dirigidas, el 77% de las mismas fueron hacia el grupo en general, no siendo posible determinar un destinatario en particular. El 23% restante fueron dirigidas hacia un compañero acordando con la respuesta dada por éste y algunas veces complementándola con otro procedimiento. Las mismas comienzan o incluyen la frase: "coincido plenamente con lo expuesto por mis compañeros anteriores…", "respecto a lo opinado por…", "estoy de acuerdo parcialmente con lo expuesto por…".

Analizando las respuestas emitidas en cada foro de acuerdo a los elementos sobre las cuales se construye el contenido de las mismas, podemos decir que el 75% la realiza sobre la base de argumentos propios, el 18% a partir de las intervenciones anteriores y el 7% no interviene ni agrega nada, sólo coincide con las respuestas emitidas por los demás. Las intervenciones de naturaleza personal comienzan directamente escribiendo la respuestas a las consignas o utilizan frases como: "mi respuesta es…", "mi opinión es…", "considero que…", entre otras. Las intervenciones realizadas a partir de las anteriores consideran frases del tipo: "Adhiero a lo dicho por…", "coincido plenamente con la respuesta de…", "he leído la respuesta de… y estoy de acuerdo con ella", "la respuesta que escribió… es perfecta", "iba a contestar y… se adelantó a mi respuesta pero agrego…".

En particular, en el espacio correspondiente al foro propuesto sobre Función de Primer Grado citado, participó el 18% de los docentes. De las respuestas, solo el 30% fueron hacia un compañero en particular, acordando con éste y en algunas oportunidades agregando otro procedimiento. El 35% de las intervenciones fueron realizadas con argumentos propios, el 42% a partir de las intervenciones anteriores y el 23% manifiestan solo su acuerdo con los compañeros pero no agrega ningún procedimiento propio. Algunas de las mismas fueron:

- *Coincido en una totalidad con lo argumentado por mi compañero anterior. En mi participación hago una demostración más formal del mismo razonamiento espero sea el correcto. (Luciana)*
- *Coincido con mis compañeros. Voy a intentar una explicación mucho menos formal que las anteriores (…). (María)*
- *Hola a todos...coincido con mis compañeros. Muy buena la explicación de Luciana! (Rocío)*
- *Coincido parcialmente con la propuesta de María (…) (Patricia)*
- *Lo pensé como Luciana ya que sirve para cualquier función de primer grado. (Nieves)*
- *Coincido con Luciana. Me parece espectacular la demostración. (Sandra)*
- *En respuesta al mensaje de Patricia, el análisis solamente necesita tener en cuenta (…) (Walter)*
- *Walter, me ganaste de mano, es erróneo el razonamiento de Patricia. Lo podemos demostrar tanto gráfica como analíticamente (…). (Emanuel)*
- *Coincido plenamente con la respuesta de Walter, me parece simple y como soy profesora de secundaria pienso en la explicación que les daría a mis alumnos. (Daniela)*

En este foro en particular es donde se observó la mayor riqueza de la discusión basada en los textos escritos por lo que es posible suponer la reflexión sobre las intervenciones anteriores.

Conclusiones

La actualización docente es una de las claves para la implementación de procesos de enseñanza innovadores, que potencien más y mejores aprendizajes, respondiendo de esta forma a los nuevos escenarios que plantean las necesidades de la sociedad en general y a las cuales el sistema educativo busca dar respuesta a través de reformas curriculares, de la incorporación de las nuevas tecnologías y del uso de otros modelos metodológicos para el trabajo en clase.

Consideramos significativo promover espacios para la reflexión, accesible a toda hora, adaptables al ritmo de aprendizaje individual y por sobre todo opuestos a la clásica transmisión de conocimiento del profesor al alumno. Lo importante es que los espacios que se generen se remitan a situaciones, actividades y tareas auténticas y relevantes para los participantes. La implicación y la participación activa de los docentes potencian la motivación y la comunicación.

Los docentes del curso desarrollado expresaron la importancia de los materiales, los contenidos y los diversos recursos provistos en el mismo. Reconocen en ellos la utilidad para su labor docente y su posible transferencia al aula.

De acuerdo a lo manifestado por algunos ellos, la visibilidad de las respuestas escritas y la disponibilidad de tener una copia del contenido de las aportaciones de los demás participantes influye directamente en la profundidad de la reflexión sobre el debate de un tema planteado, favoreciendo la calidad de las soluciones propuestas al presentar respuestas más argumentadas y elaboradas.

Si bien el porcentaje de participación en los foros no fue elevado, los que lo hicieron reconocen la relevancia y pertinencia de los temas planteados y manifestaron la riqueza de la intervención e interacción de los compañeros, pudiendo de esta manera analizar otras formas de resolución que no habían considerado.

Uno de los objetivos de esta experiencia fue analizar el uso educativo que pueden tener los foros dentro de la estructura formal de un curso, para lo cual se requiere de una participación con los demás en la construcción de conocimiento. En este contexto se observa que en un comienzo las intervenciones fueron personales y que paulatinamente se tornaron más colaborativas. Se puede presumir que en la medida que los docentes utilicen de manera más sistemática los espacios virtuales de comunicación, las intervenciones mejorarán en cantidad y calidad. Sería importante y recomendable que la formación inicial docente incluya experiencias de aprendizaje de este tipo.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. y Cruz, M. (2008). La interacción docente ante la vinculación del entorno tecnológico en al ámbito escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 951-961. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Barberà, E. (Coord.), Badía, A; Moninó, J.M. (2001). "La incógnita de la educación a distancia". *Cuadernos de Educación Nº 35*. Barcelona, Horsori.

Barberà, E.; Badia, A. (2004). *Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. Madrid, A. Machado.

Gros, B. (2004). La construcción del conocimiento en la red: límites y posibilidades. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 5. Recuperado el 2 de febrero de 2009, de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_05/n5_art_gros.htm

UNESCO (2004). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente*. Recuperado el 23 de marzo de 2010 de http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533s.pdf.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN VENEZUELA. REALIDADES Y ALTERNATIVAS PARA SU TRANSFORMACIÓN

Hugo Parra S.
Universidad del Zulia . Venezuela
hps1710@yahoo.es

Resumen. El trabajo muestra de manera sucinta la realidad de la formación de matemáticos educativos en Venezuela. En ese sentido, iniciamos con una descripción de nuestro sistema educativo; posteriormente explicamos las principales características de los diferentes programas de formación docente predominantes en nuestro país, para luego presentar diferentes alternativas que de alguna u otra manera se han propuesto para mejorar su calidad. Finalmente, exponemos nuestra propuesta de formación de matemáticos educativos que busca superar los obstáculos presentes en las alternativas hasta ahora dadas a conocer, de manera tal que nuestros procesos de formación de docentes respondan a las necesidades de la mayoría de la población.

Palabras clave: formación de profesores

Abstract The present work shows in a succinct way the reality of the formation of educational mathematicians in Venezuela. In this sense we initiate describing our educational system. Later we explain the principal characteristics of the different predominant programs of educational formation in our country, then to present different alternatives that of someone or another way they have presented to improve his quality. Finally, we show beforehand our offer of formation of educational mathematicians who might overcome the present obstacles in the alternatives till now presented, in such a way that our processes of teachers' formation answer to the needs of the majority of the population

Key words: teachers training

Introducción

La necesidad de transformar nuestra práctica educativa matemática implica contar con educadores convencidos de dicha misión. Un paso fundamental para encaminarnos en esa dirección es el conocer los diferentes modelos de formación de docentes en nuestro continente latinoamericano. En la XXIV RELME tuvimos la oportunidad de presentar de manera sucinta la realidad venezolana en este ámbito y compartirla con compañeros de otros países hermanos. El presente escrito intenta plasmar las ideas ahí presentadas, resumiendo las características más relevantes de nuestros diferentes programas de formación de docentes, en particular, la formación del matemático educativo en nuestro país. En primer lugar, abordaremos una descripción bastante breve de nuestro sistema educativo. En segundo lugar, nos detendremos a explicar las principales características de los diferentes programas de formación docente predominantes en nuestro país, basándonos en el estudio que al respecto realizaron Rojas y Parra (2009). Posteriormente, se presentan algunas voces que plantean alternativas para su revisión y sustitución. Finalmente, presentamos nuestra propuesta de lineamientos, que creemos, podría encaminar a cambios profundos en nuestros procesos de formación de docentes, con miras a una matemática educativa que responda a las necesidades de la mayoría de la población.

El sistema educativo venezolano

Nuestro sistema educativo venezolano está organizado por niveles, modalidades y misiones. En cuanto a los niveles, estos son cuatro, a saber: Educación Inicial (0-6 años), Educación Primaria (6-12 años), Educación Secundaria (12-18 años) y Educación Universitaria (17 en adelante). Respecto a las modalidades se contemplan las siguientes: Educación Especial, Educación Intercultural Bilingüe, Educación para Jóvenes y Adultos y Educación Militar (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2007). Por último, están las denominadas Misiones Educativas, que consisten en programas masivos de educación que el gobierno nacional implementó desde el año 2003 con la finalidad de incluir sectores de la población antiguamente excluidos (D'Elia y Cabezas, 2008). También, es importante señalar que la ley contempla la obligatoriedad de que todo docente debe estar graduado por una institución de educación universitaria; no obstante, la realidad muestra que aún hay personas ejerciendo la profesión docente sin haber obtenido la debida Licenciatura en Educación. Esta situación se muestra más crítica en determinadas áreas, y las matemáticas es una de ellas.

Características de los programas de formación predominantes

No pretendemos mostrar en detalle los diferentes cursos que en los diferentes programas de formación docente se ofrecen, más bien resaltaremos una descripción general de ellos y su distribución en el tiempo. Al respecto, Rojas y Parra (2009) realizaron un estudio de los planes curriculares de las principales universidades que forman docentes en Venezuela, donde se destaca que normalmente en los programas de formación docente existen tres bloques de curso, de acuerdo con la naturaleza del conocimiento que se pretende desarrollar. Un primer bloque de cursos teóricos, discriminados en cursos de formación general, de matemática y pedagógicos; un segundo bloque de carácter teórico – práctico constituido por cursos de matemática educativa y un tercer bloque práctico en el que se encuentran las prácticas profesionales o pasantías (ver gráfico 1). En cuanto a su distribución en el tiempo, los cursos teóricos son los primeros en ser visto por los futuros profesionales de la matemática educativa, posteriormente se encuentran los cursos de carácter teórico práctico y por último, los cursos prácticos.

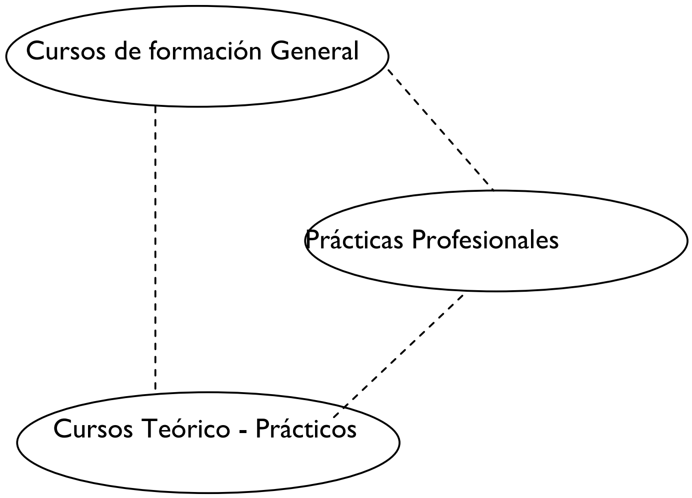


Gráfico 1. Composición de los diferentes bloques de cursos presentes en los programas de formación predominantes

La discriminación de estos tipos de cursos y su distribución en el tiempo, no es casual. En el proceso de formación del futuro matemático educativo se evidencia un deslinde entre la teoría y la práctica social de la matemática educativa, lo que nos lleva a ver en los programas de formación una visión derivada de la concepción racionalista del conocimiento del profesor, que concibe que el conocimiento es fraccionable y que finalmente, la suma de sus partes constituye el todo (Porlán y Rivero, 1998; Parra, 2006).

De igual manera, la distribución en el tiempo en el que se desarrollan los diferentes cursos responde a la visión racionalista antes señalada. Se entiende bajo esta concepción epistemológica que el conocimiento se crea desde la mente del individuo y se legitima en su aplicación; es decir, que en primer lugar, el individuo – en este caso el matemático educativo en formación – debería imbuirse de las diferentes teorías educativas generales y específicas de la profesión y progresivamente conocer la práctica social de su ejercicio profesional (Porlán y Rivero, 1998). Esta visión presupone que inicialmente la teoría lo prepara para su actuación profesional y posteriormente lo acerca al campo de su práctica laboral para verificar que lo aprendido teóricamente lo sabe aplicar.

Reacciones ante este modelo

Este modelo predominante y de trayectoria histórica en el país ha sido objetado desde tres perspectivas diferentes. Todos coinciden en que los actuales modelos de formación docente no responden a la urgente necesidad de mejorar la calidad de la matemática que se desarrolla en los diferentes niveles del sistema educativo. Un primer grupo, liderizado por aquellos cuya formación predominante ha sido la matemática, manifiestan que la causa de esta problemática tiene su raíz en la falta de una mayor formación en esta disciplina académica. Declaran su preocupación e inconformidad en base al hecho de haber cedido espacio a los cursos de educación, en detrimento de los cursos de matemática. Un ejemplo de ello se evidencia cuando se compara el plan de estudio implementado el año 1995 por la Universidad del Zulia (Universidad del Zulia, 1995) y el propuesto para el nuevo diseño curricular que entrará en vigencia el presente año 2011 (Universidad del Zulia, 2010). La comparación evidencia una disminución en la proporción de los cursos disciplinarios de matemática y un aumento de los cursos de índole educativo y general.

Un segundo grupo, en este caso liderizado por los pedagogos, manifiestan su desacuerdo en otorgarle más espacio a los cursos de formación matemática, porque consideran que la razón fundamental de los problemas de la calidad de los aprendizajes de las matemáticas se halla en la escasa formación – a decir de ellos – en el campo de la pedagogía. Ambos grupos se caracterizan por mantener en el fondo la misma posición epistemológica enmarcada en el pensamiento racionalista, esto es, la idea de que el proceso de formación supone finalmente el resultado de la suma del conocimiento de la teoría matemática, de la teoría de las Ciencias Educativas y el conocimiento de algunas técnicas de enseñanza (Porlán y Rivero, 1998; Parra, 2006).

En el tercer grupo de críticos hallamos una nueva tendencia que, ante la parcelación del conocimiento y la sobrevaloración de la teoría alejada de la realidad profesional de los futuros matemáticos educativos, propone que la práctica se constituya en su eje articulador y la teoría pase a un plano inferior. Esta propuesta se ha concretizado fundamentalmente en el marco de las denominadas misiones educativas que el gobierno nacional actual implementó a partir del año 2003 (D'Elia y Cabezas, 2008). A nuestro entender, si bien rescata el valor de la práctica profesional del matemático educativo como fuente del conocimiento, adolece del mismo problema de los dos anteriores grupos, al continuar manteniendo una diferenciación marcada entre la teoría y la práctica.

¿Qué hacer al respecto?

Para superar las diferentes posiciones antes señaladas, creemos que cualquier programa de formación de profesores en nuestra disciplina pasa por las siguientes dos premisas: la matemática históricamente sirve como organizador de la realidad y como tal, ayuda a explicarla y transformarla (Freudenthal, 1983) y la realidad profesional del docente de matemática es compleja, contemplando la inter y transdisciplinario (Freudenthal, 1983, Azcárate, 1998; Parra, 2006). Si la matemática es históricamente una herramienta que el ser humano ha desarrollado para comprender, explicar y transformar la realidad, implica que la matemática que se incorpore en cualquier programa de formación debería estudiar diferentes escenarios de su práctica social. En cuanto a la realidad profesional del matemático educativo, si entendemos que ésta es compleja, cualquier programa de formación debería vincular desde sus inicios a los futuros matemáticos educativos con dicha realidad para que, desde su acercamiento, la contrasten con los diferentes cursos que reciban y reflexionen al respecto.

En función de estas premisas planteamos que el modelo de formación que se proponga tenga como eje articulador diferentes problemas matemáticos educativos contextualizados y que a partir de ellos, se aborde la construcción del conocimiento profesional del matemático educativo atendiendo las siguientes cuatro dimensiones (Parra, 2006):

- Dimensión ética
- Dimensión epistemológica
- Dimensión cognitiva y;
- Dimensión didáctica.

La dimensión ética respondería al para qué enseñar matemática; lo que daría al futuro matemático educativo la capacidad de seleccionar desde sus referentes éticos cualquier tipo de innovación o propuesta didáctica que le sea presentada. La segunda dimensión – denominada epistemológica - atendería la interrogante del cómo se generó el conocimiento matemático y como éste ha evolucionado en el tiempo; de esta manera, el futuro educador conocería las prácticas sociales que dieron origen a los diferentes objetos matemáticos y cómo ha evolucionado hasta el día de hoy. Por su parte, la dimensión cognitiva aportaría los conocimientos necesarios para comprender al sujeto del aprendizaje en el marco de un contexto determinado. Por último, la dimensión didáctica desarrollaría todo lo concerniente al problema del cómo plantear diferentes situaciones de aprendizaje en el ámbito escolar, dándole herramientas prácticas que le permitan enfrentar la cotidianidad profesional. Ninguna dimensión es considerada como prioritaria en el tiempo sobre otra, ni tampoco una es superior en importancia a la otra. Todas estas dimensiones, articuladas a partir de problemas didácticos relevantes contribuirían en la construcción del conocimiento profesional del docente de matemáticas que deseamos (Ver figura 2).

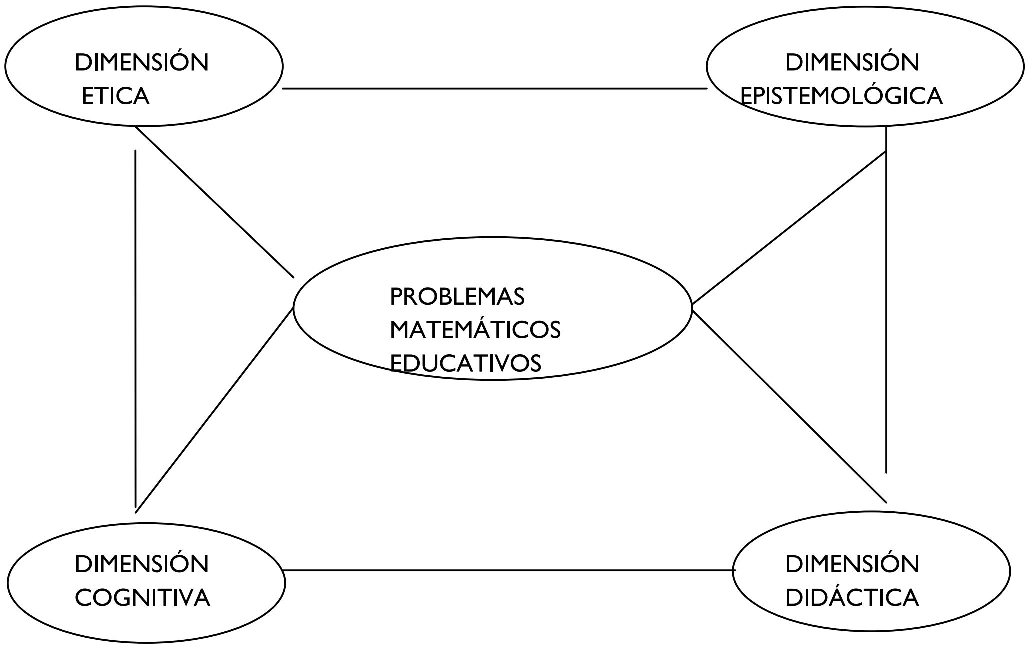


Figura 2. Dimensiones que deben abordarse en los procesos de formación de los futuros matemáticos educativos

A modo de conclusión

Una vez presentado un panorama general de las características de la formación docente en Venezuela, podemos afirmar que aún tenemos como comunidad de matemáticos educativos latinoamericanos dos tareas pendientes. La primera, al interior de nuestra comunidad académica, consiste en la necesidad de profundizar en el proceso de descripción de nuestros diferentes programas de formación docente, con miras a tener un panorama claro de su situación actual. La segunda tarea es hacia nuestras sociedades; debemos comenzar a llamar la atención sobre la necesidad, no sólo de cambiar nuestros programas de formación docente, sino que además, tenemos el deber ineludible de presentar propuestas formativas que respondan a las necesidades e intereses educativos de nuestro continente. Debemos pasar del diagnóstico a las propuestas, superando la falsa dicotomía entre teoría y práctica a través de programas de formación docente, en el que los problemas matemáticos educativos derivados de la práctica social sean el eje articulador acompañado de una reflexión sistemática.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad.* España: Editorial COMARES. Colección Mathema.

D'Elia, Y. y Cabezas, L. (2008) *Las misiones sociales en Venezuela*. Recuperado de: http://www.ildis.org.ve/website/administrador/uploads/PolicymisionesYolanda.pdf

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Parra S., H. (2006). *La formación docente en matemática alternativas para su transformación.* Recuperado de: http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/20309

Porlán, R. y Rivero, A. (1998) *El conocimiento de los profesores.* España: DÍADA Editores.

Rojas, A. y Parra, H. (2009) L*a construcción del conocimiento didáctico matemático al utilizar software educativos.* Paradigma. Vol. XXX (1) 169 – 182.

Venezuela. Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). *Diseño curricular del Sistema Educativo Bolivariano*. Caracas.

Venezuela. Universidad del Zulia (1995) Planes de Estudio de las diferentes Licenciaturas en Educación. Maracaibo.

Venezuela. Universidad del Zulia (2010) Plan de Estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física. Maracaibo.

SIGNIFICADO PERSONAL DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD EN PROFESORES EN FORMACIÓN

Juan Jesús Ortiz, Nordin Mohamed, José M. Contreras.
Universidad de Granada. España
jortiz@ugr.es

Resumen. En el marco de una investigación sobre evaluación del conocimiento probabilístico de los profesores en formación, en este trabajo presentamos un análisis detallado de las respuestas a dos problemas, sobre concepción frecuencial de la probabilidad, tomados de Green (1983), en una muestra de 167 profesores en formación de educación primaria de la Universidad de Granada, que comparamos con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997). Este estudio ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales (Godino, Batanero & Font, 2007) y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto.

Palabras clave: enfoque frecuencial de la probabilidad, formación de profesores.

Abstract In the framework of a research intended to assess the probabilistic knowledge of pre-service teachers, in this paper we present a detailed analysis of responses to two problems related to the frequentist approach to probability, taken from Green (1983). Responses from a sample of 167 preservice primary school teachers are compared with results from 10-14 year-olds children in Cañizares'research (1997). This study served to show the variety of personal meanings (Godino, Batanero & Font, 2007) and confirm that there are important difficulties in the understanding of this concept.

Key words: frequentist approach to probability, training teachers.

Introducción

El interés de la enseñanza de la probabilidad se ha visto reforzado en España por el Real Decreto que establece las enseñanzas mínimas para la educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde se enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., National Council of Teachers Mathematics (NCTM), 2000; Secretaría de Educación Pública (SEP), 2006).

Ahora bien, un cambio efectivo de la enseñanza de la probabilidad requiere mejorar la formación de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una preparación específica, podrían transmitir a sus estudiantes sus creencias, a veces erróneas (Cardeñoso, 2001; Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006). Un requisito, por tanto, es conocer las competencias probabilísticas de los profesores en formación.

Por ello, pretendemos realizar una evaluación inicial de los conocimientos de los profesores en formación de educación primaria para resolver problemas elementales de probabilidad, en particular del enfoque frecuencial de la probabilidad, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997).

Siguiendo a Godino, Batanero & Font (2007), para caracterizar el significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en los profesores en formación de educación primaria, se analizarán las prácticas realizadas por ellos durante la resolución de los problemas de probabilidad propuestos, que son los indicadores empíricos utilizables en la evaluación del conocimiento de dichos profesores.

Consideramos de interés este tipo de trabajos para la Didáctica de la Matemática. En primer lugar, por la importancia de tener en cuenta el conocimiento del contenido matemático de los docentes (Shulman, 1986), y en segundo lugar, porque los formadores de docentes deben interesarse por dicho conocimiento (Ball, 2000). Presentamos a continuación una síntesis de las investigaciones previas, el análisis de los resultados y las conclusiones.

Formación de profesores en probabilidad

Aunque hay algunos trabajos interesantes sobre el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991 y Kvatinsky & Even, 2002), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas. A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad entre los profesores (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Franklin & Mewborn, 2006; Mickelson & Heaton, 2004; Ortiz et al., 2006).

Otros estudios muestran que los docentes tenían un conocimiento insuficiente del contenido matemático de la probabilidad (Begg & Edwards, 1999; Carnell, 1997; Pereira-Mendoza, 2002; Watson, 2001) y del contenido pedagógico (Dugdale, 2001; Godino, Batanero, Roa, & Wilhelmi, 2008; Haller, 1997; López, 2006).

Por último, para poder superar algunos sesgos en el razonamiento de los profesores en formación, se proponen experiencias de enseñanza basadas en la simulación (Batanero, Godino, & Cañizares, 2005; Sánchez, 2002).

3. Problemas de probabilidad en enfoque frecuencial

Los dos problemas sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad, tomados de Green (1983), que se plantearon para su resolución a los profesores en formación antes de la instrucción, fueron los siguientes:

> Problema 1. Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA …… ___

(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ........………….. ___

(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ … ___

(D) No lo sé.. ___

¿Por qué? (Green, 1983, p. 780)

En el problema 1 tratamos de evaluar la percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones y que han sido descritos en las investigaciones de Truran & Truran (1997). En él se preguntaba cuál sería el resultado más probable la próxima vez en el experimento de lanzamiento de una moneda si los cinco primeros lanzamientos habían salido cinco caras. Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación. Es posible detectar efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones a partir del trabajo de Piaget & Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic & Tversky (1982).

Problema 2. El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo. El resultado fue: ARRIBA = 68; ABAJO = 32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente elige el resultado que tú crees que obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36, ABAJO = 64 …....…………………….………… ___

(B) ARRIBA = 63, ABAJO = 37 …………………………………… ___

(C) ARRIBA = 51, ABAJO = 49 …………………………………… ___

(D) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad ……. ___

¿Por qué? (Green, 1983, p. 780)

En el problema 2 se pide comparar probabilidades binomiales en el experimento, disponiendo para ello de una estimación de probabilidad a priori de tipo frecuencial, ya que en este caso no se puede aplicar el principio de indiferencia. Se han detectado algunos alumnos que consideran los sucesos como equiprobables, ignorando el resultado del lanzamiento previo. Esta insensibilidad hacia las probabilidades a priori de los resultados está considerada por Khaneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de la representatividad.

Resultados

En base al análisis de las prácticas realizadas por 167 profesores en formación de educación primaria, de la Universidad de Granada (España), se han obtenido los resultados que presentamos a continuación.

Análisis del problema 1

En la Tabla 1, observamos que el porcentaje de respuestas correctas de los profesores en formación es bastante alto (89.2%). Entre las respuestas incorrectas, hay un 5.1 % que considera que al haber salido cinco veces cara, en los sucesivos lanzamientos de una moneda, ahora es más probable que en el siguiente obtengamos cruz, debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia de sucesos.

Tabla 1. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 1

Respuestas	Profesores en formación n = 167	Alumnos (10-14 años) n = 251
Más probable que salga cara	2.5	9.2
Más probable que salga cruz	5.1	6.4
Igual de probable (*)	89.2	82.9
No sabe/no contesta	3.2	1.6

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas es mayor en los profesores en formación. Un hecho a destacar es que entre los que no responden correctamente, los alumnos responden más frecuentemente la opción (A, recencia positiva) que la (B, recencia negativa) mientras que entre los profesores en formación ocurre al revés. Esto podría tener su explicación en un efecto indeseado del programa de instrucción de estadística que se imparte a los profesores en formación, basándose en el cual, dichos profesores tienden a equilibrar las frecuencias.

Entre los argumentos utilizados por los profesores en formación, la justificación mayoritaria fue la correcta "*puede salir cualquiera de los dos resultados*" (77.9%), distinguiendo entre los que aplican la regla de Laplace (53.8%) y los que han respondido sin hacer uso de la probabilidad (24.1%). Entre los argumentos incorrectos, hubo un importante porcentaje de profesores en formación que consideró que "*se debe al azar*" (9.5%), seguido de los que opinaron que es más difícil que vuelva a salir cara (5.7%).

Análisis del problema 2

Como puede observarse en la Tabla 2, para los profesores en formación este problema ha sido más complicado que el anterior, ya que el porcentaje de respuestas correctas es bastante más bajo (23.4%). Entre las respuestas incorrectas, destaca el alto porcentaje que considera que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad (63.3%), no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Porcentajes menores son los que opinan que es más probable que vuelvan a salir los otros dos resultados.

Tabla 2. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 2

Respuestas	Profesores en formación n = 167	Alumnos (10-14 años) n = 251
A. Arriba=36 Abajo=64	1.9	6.6
B. (*) Arriba=63 Abajo 37	23.4	17
C. Arriba=51 Abajo=49	3.2	7.2
D. Todos los resultados tienen la misma probabilidad	63.3	66.1
No contesta	8.2	3.1

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas es mayor en los profesores en formación y que existe una fuerte incidencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) en ambos grupos.

Entre los argumentos utilizados por los profesores en formación, el porcentaje de justificaciones correctas es bastante bajo (23.4%), diferenciando entre los que aducen razones físicas (19%) y los que basan su justificación en la información aportada por el experimento realizado por el profesor anteriormente (4.3%). Entre los argumentos incorrectos, hay un alto porcentaje que considera que los dos sucesos "*tienen la misma probabilidad*" (35,4%), lo que muestra que no distinguen correctamente entre sucesos equiprobables y no equiprobables, seguido de los que opinan que "*se debe al azar*" (8,2%). Destaca también el alto porcentaje que no aporta ningún argumento (32,9%).

Conclusiones

En este trabajo se han analizado las prácticas personales de los profesores en formación al resolver las tareas, lo que ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de significados personales manifestadas por los profesores en formación de educación primaria cuando resuelven problemas de probabilidad en enfoque frecuencial, así como las dificultades y errores más frecuentes, en algunos casos similares a los alumnos de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997).

Hay un porcentaje importante de profesores en formación que resuelven de forma incorrecta el problema 1 (lanzamiento de monedas), debido quizás a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia (Truran & Truran, 1997). Como hemos comprobado, el problema 2 (lanzamiento de chinchetas) es más complicado para los profesores en formación que el problema 1, destacando el alto porcentaje que manifiesta el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), al considerar que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad, no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Estas dificultades coinciden con las descritas por Begg & Edwards (1999) con profesores en prácticas de enseñanza elemental y las referidas por Carnell (1997) con profesores de enseñanza media.

Vistos los errores y dificultades de los profesores en formación de educación primaria en la resolución de problemas de probabilidad, similares a las de los alumnos del nivel educativo donde ejercerán profesionalmente, el formador de profesores, como indica Ball (2000), debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento estadístico, al abordar la enseñanza de la probabilidad. En consecuencia, debemos diseñar y poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los profesores en formación de educación primaria, que debe incluir las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004) y realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte de los Proyecto SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER y EDU2010-14947, MICIIN y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía y ha sido cofinanciado por el Plan propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Cádiz. Cádiz, España.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, 51, 241-247.

Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), Proceedings of ICMI First African Regional Conference. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education, 12. Recuperado el 02 de septiembre de 2010 de: http://www.amstat.org/publications/jse/

Begg, A. & Edwards, R. (1999, August). Teachers ideas about teaching statistics. Comunicación presentada en la reunión anual de the Australian Association for Research in Education y the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada. Granada, España.

Cardeñoso, J. M. (2001). Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Cádiz. Cádiz, España.

Carnell, L. J. (1997). Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers). Tesis Doctoral no publicada, University of North. Carolina-Greensboro.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. Computers in the Schools 17 (1/2), 173-182.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Franklin, C. & Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey. México.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, & G. M. Constable (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics (2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Haller, S. K. (1997). Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers. Tesis Doctoral no publicada, University of Minnesota.

Khaneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). Judgment under uncertainity: Heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press.

Kvatinsky, T. & Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. En B. Phililips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. Educational Studies in Mathematics, 23, 557-568.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador (Bahía), Brasil: International Association for Statistics Education.

Mickelson, W. T. & Heaton, R. (2004). Primary teachers’statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 293.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles & M. Moreno (Eds.), Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La genése de l’idée de hasard chez l’enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Secretaría de Educación Pública (2006). Programa de estudio, educación secundaria. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. En R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Chance encounters: Probability in education (pp. 135-167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning. Dodrecht: Kluwer.

Truran, J. & Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), Papers on statistical education presented at ICME-8 (pp. 87-100). Swinburne University of Technology

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. Journal of Mathematics Teacher Education 4 (4), 305-337

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y LA FORMACIÓN DE DOCENTES

Carmen Andrade Escobar.

Colombia

andrade.carmel@gmail.com

Resumen. El interés de este artículo es reflexionar sobre los obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y cómo se pueden evitar con una adecuada formación de docentes. Los obstáculos son dificultades que no se pueden superar e impiden avanzar en el nuevo conocimiento. Brousseau los clasifica en: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos. Los ontogenéticos se refieren a condiciones genéticas específicas y por lo tanto, no se pueden evitar; los epistemológicos son saltos conceptuales que se deben superar para promover el conocimiento; y los didácticos surgen de la enseñanza y por lo tanto, se pueden evitar. El análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes permite concluir que estos provienen de errores didácticos en tres aspectos: metodológicos; curriculares, cuando no promueve los saltos conceptuales sino trata de evitarlos; y conceptuales cuando se enseñan nociones falsas que distorsionan el concepto. Por último, se estudia la didáctica de Federici como la base de la formación de docentes para evitar los obstáculos didácticos.

Palabras clave: obstáculos didácticos, formación de profesores, dificultades en el aprendizaje, pensamiento numérico.

Abstract The interest of this article is to reflect on the didactic obstacles in the learning of the mathematics and how they can be avoided with an adequate formation of educators. The obstacles are difficulties that cannot be surpassed and they impede to advance in the new knowledge. Brousseau classifies them in: ontogenetic, epistemic and didactic. The ontogenetic refer to specific genetic conditions and therefore, they cannot be avoided; the epistemic are conceptual leaps that should be surpassed to promote the knowledge; and the didactic arise of the teaching and therefore, they can be avoided. The analysis of the most frequent errors of the students allows concluding that they come from didactic errors in three aspects: methodological; curriculum, when does not promote the conceptual leaps but tries to avoid them; and conceptual when false notions are taught that distort the concept. Finally, we studied Federici's didactic as the base of the formation of educators to avoid the didactic obstacles.

Key words: teaching obstacles, training of teachers, difficulties in learning, numeric thought.

Introducción

Una de las grandes preocupaciones de la educación en nuestro país es la deserción escolar cuya principal causa es el fracaso en el aprendizaje de la matemática. Las investigaciones en educación matemática señalan que las dificultades de los estudiantes se deben tanto a la complejidad de los conceptos como a las metodologías. Sin embargo, otra causa de estas dificultades es la concepción de la educación matemática tradicional. Por lo tanto, si se modifica esta mirada de la educación se superan muchas dificultades (Federici, 2004).

La educación tradicional consiste en aprender a manipular números y figuras geométricas. Esto no es enseñar matemáticas porque "(…) estamos enseñando a manejar números, no a pensar sobre ellos. Para hacer matemática no basta realizar operaciones, contar y calcular. La matemática comienza con la toma de conciencia de lo que está involucrado en esas operaciones" (Federici, 2004, p.4).

Lo que este artículo pretende es presentar la didáctica de la matemática que aborda la matemática desde la pregunta que atiende al cómo se construye y por qué se construye de ese modo. De esta manera, la educación matemática contribuye a superar las dificultades en el aprendizaje, construyendo el significado de los conceptos, y la formación de docentes centra su atención en estos aspectos y no sólo en la metodología. "(…) hemos insistido en la falsa aproximación a la matemática que aprendimos de nuestros maestros y enseñamos a nuestros alumnos por lo que se hace necesario cuestionar las evidencias a partir de las cuales trabajamos actualmente con los maestros" (Federici, 2004, p.6). Antes de reflexionar sobre la didáctica que contribuye a superar las dificultades, se analiza el origen de estas dificultades en los estudiantes.

Obstáculos didácticos

Cuando las dificultades no se pueden superar, se convierten en obstáculos porque impiden avanzar en la construcción del nuevo conocimiento. Estos obstáculos pueden ser de tres tipos, según de dónde provengan: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1989). Los obstáculos ontogenéticos provienen de condiciones genéticas específicas de los estudiantes y por lo tanto, no se pueden evitar mediante la formación de docentes. Los obstáculos epistemológicos son parte del proceso de aprendizaje y no solo no se deben evitar sino que se deben enfrentar porque juegan un papel muy importante en la adquisición del nuevo conocimiento. Por ejemplo, el salto conceptual entre los números naturales y los números racionales (Brousseau, 1989). Por el contrario, los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza, y se deben evitar porque impiden superar los obstáculos epistemológicos, es decir, impiden ver las cosas de una nueva manera. Por esta razón, no se puede seguir aplazando la reflexión sobre estos obstáculos, porque si se conocen se pueden evitar.

Los obstáculos didácticos se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes. Se concluye que estos errores provienen de dificultades que se originan en la enseñanza por alguno de estos errores didácticos: metodológicos, curriculares o conceptuales. Se considera un error metodológico el uso, por parte del docente, de palabras inadecuadas o "trucos"; un error curricular se presenta cuando el diseño del currículo impide dar un salto conceptual o superar el obstáculo epistemológico, que se debe dar porque es fundamental para adquirir el nuevo conocimiento; y un error conceptual es una noción falsa que se enseña, precisamente, para evitar el salto conceptual, y que distorsiona el concepto. En cualquiera de los casos, los errores que provienen de la didáctica son muy difíciles de modificar e impiden avanzar en el conocimiento: las palabras inadecuadas no permiten dar un nuevo significado a las palabras técnicas que se usan en grados posteriores y una noción falsa impide construir el significado matemático del concepto y dar el salto conceptual.

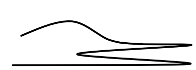
Los errores más frecuentes, en niños de 7 a 12 años, se presentan en el sistema de numeración decimal y en los números racionales sin signo. Por ejemplo, en el sistema de numeración decimal, se presentan los siguientes errores, entre muchos otros casos: dar el valor de la cifra de acuerdo a su posición en el número; sumar números cuando la suma de las unidades es mayor que la decena; restar números cuando las unidades que se restan son mayores; dar el paso de la suma a la multiplicación; usar los símbolos, mayor que y menor que. En cuanto a los números racionales sin signo, los errores se presentan en: la construcción de los números, especialmente, cuando el numerador es mayor que el denominador; la relación entre el numerador y el denominador; la relación del número con la medida y la razón; el cálculo de las operaciones y la relación con situaciones problema.

A continuación se analizan algunos errores frecuentes de los estudiantes producidos por los diferentes tipos de obstáculos didácticos.

Errores metodológicos

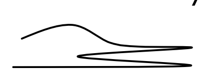
Los siguientes ejemplos de errores de los estudiantes se producen por el uso de palabras inadecuadas o de trucos, por parte del docente:

a) En el uso de los signos < y >: El ejemplo de error metodológico que más llama la atención está relacionado con la siguiente anécdota: un niño de sexto grado, 12 o 13 años, pasa al tablero a escribir el signo mayor o menor entre un par de números. Se queda pensando y pregunta: ¿Cómo es lo de la boca del cocodrilo? Explica que su profesora de primer grado le enseñó a usar el símbolo "mayor que", haciendo referencia a la boca del cocodrilo, con estas palabras: "la boca grande para el mayor". Para entender el "truco" utilizado por la profesora, dibujé una cabeza de cocodrilo, o algo parecido, con la boca abierta:



Le pregunté al niño: ¿Dónde ubicas los números 4 y 3? El niño los ubicó así:

4 3



es decir, 4 < 3, usando el sentido común: el mayor se come al menor.

b) Otro error metodológico se presenta cuando la suma de las unidades es mayor que la decena: 37 + 48 = 75. Se le enseña que pone 8 y lleva 1. El error se produce porque al niño se le olvida "llevar".

De igual manera, el error se presenta en la resta cuando las unidades que se restan son mayores: 354 – 189 = 235. El niño sabe que 9 no se puede restar de 4, pero no se acuerda de "prestar", entonces, hábilmente, invierte los números y resta como si se puede: 9 – 4 y 8 – 3.

En este ejemplo de resta: 305 – 9, el niño no sabe cómo hacerla, porque 0 no tiene nada para prestar.

La dificultad se presenta porque el niño olvida las "recetas" de los procedimientos y recurre al sentido común.

c) Con relación al sistema de los números racionales, también se usan varias palabras inadecuadas. La palabra "fracción" en sí misma es un obstáculo didáctico. Se explica que se "cogen o toman" partes de un todo. En el caso de 5/3, ¿Cómo se pueden coger 5 partes de 3? El sentido común indica que no se puede coger un número de partes mayor que el total. Adicionalmente a esta dificultad, esta la palabra "impropia" que se usa para esta fracción, y que da la idea de algo sucio que se debe evitar (Federici, 2001).

El niño, desde temprana edad, aprende una noción y luego, el docente se contradice: por ejemplo, en el caso de 5/3, se enseña que como no se pueden tomar 5 partes de 4, la unidad son dos unidades. ¿Puede una unidad estar formada por dos unidades?

Los anteriores ejemplos de errores de los estudiantes provienen de los errores metodológicos. El docente usa palabras inadecuadas o "trucos" para ayudarle al niño a salir de la dificultad que implica para él la manipulación de símbolos abstractos; esta ayuda es temporal porque a largo plazo se convierten en obstáculos.

Errores curriculares y errores conceptuales

Los errores curriculares se presentan cuando el diseño del currículo evita los saltos conceptuales o epistemológicos necesarios para avanzar en el conocimiento. A continuación se presentan tres ejemplos de saltos conceptuales que se deben dar pero que tradicionalmente se han evitado, y se han enseñado errores conceptuales:

a) El salto entre los números de 1 y 2 cifras es necesario porque el número de 1 cifra representa un cardinal mientras que el número de 2 cifras es una construcción lógica de un número de decenas y un cardinal, por ejemplo: 35 es 3 decenas y 5. Sin embargo, en la educación tradicional se enseña que el número doce es el cardinal de un grupo de 12 elementos, respectivamente, de igual manera, que se enseña que 9 representa el cardinal de un grupo de nueve elementos. El niño aprende que doce está formado por 1 y 2, no por 1 decena y 2. Por esta razón, no construye 12 como la suma: 10 + 2. Esta omisión será un impedimento para avanzar en el conocimiento, por ejemplo, en el cálculo de sumas con números de 3 o más cifras y en el valor posicional.

Para reparar este error se utiliza como recurso didáctico la tabla de valor posicional:

d	u
1	2

Sin embargo, este recurso lleva a otro error: al leer la tabla el niño confunde el valor de la cifra, 1, con el valor posicional, 10. La dificultad se observa mejor con los números de 3 cifras:

c	d	u
5	0	3

¿Cuántas decenas hay en el número 503? El niño lee la tabla y responde: 0. ¿Puede formarse una centena con 0 decenas? El niño responde de acuerdo a la lectura de la tabla y al concepto de centena que le han enseñado: 1 centena son 100 unidades. No se le enseña que 10 decenas son una centena. Por esta razón, no se sorprende que un número de 3 cifras tenga 0 decenas.

b) El salto entre la suma de números menor que la decena y mayor que la decena se presenta porque para sumar 3 más 4, solo se requiere calcular la suma: 3 + 4 = 7. Pero, para sumar 7 + 8, se requiere un proceso lógico para formar la decena:

$7 + 8 = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$

En la educación tradicional para obtener el resultado de 7 + 8, el niño cuenta 8 a partir del 7. Se produce un error conceptual: contar es diferente de sumar. En el caso de la suma 37 + 8, se le enseña un procedimiento mecánico en forma vertical: 7 más 8 es igual a 15, pone 5 y lleva 1. ¿Lleva 1 o se forma una decena adicional?

Otro salto conceptual se produce entre la resta cuando las unidades que se restan son menores y cuando las unidades que se restan son mayores, por ejemplo: 35 – 1 = 30 + (5 – 1) = 30 + 4 = 34, solamente, se resta 5 – 1, y se suman las mismas decenas. Pero en el caso de 35 – 8, se requiere un procedimiento diferente: como no se puede restar 8 de las unidades se usa una de las decenas para restarlo, 35 – 8 = 20 + (15 – 8) = 20 + 7 = 27. Tradicionalmente, se le enseña la siguiente receta: no se puede restar 8 de 5, entonces el 5 le pide prestado 1 al 3, etc.,… ¿Los números prestan? (Prestar suena a una institución financiera). Con esta receta, al niño se le olvida prestar y no sabe qué hacer o invierte los números, es decir, resta 8 – 5.

c) El salto entre los números naturales y los números racionales, es fundamental, porque los números racionales sin signo, muy mal llamados "fraccionarios" (Federici, 2001, p. 43), están compuestos por 2 números relatores u operadores, un multiplicador y un divisor. Por el contrario, la fracción como relación parte-todo, está compuesta por dos números naturales, uno arriba y uno abajo. Esta noción no solo evita el salto conceptual entre el número contador y el número relator, sino que propicia un error muy frecuente en la suma de fracciones, por ejemplo:

   2/5 + 3/7 = 5/12

   El niño suma números naturales, los de arriba y los de abajo. Por esta razón, la noción de fracción que se enseña como la base de número racional sin signo impide construir el significado del mismo (Andrade, 2008).

En conclusión: los obstáculos didácticos se producen por errores en la enseñanza, ya sea por el uso inadecuado de palabras o por diseño del currículo que evita los saltos conceptuales que son necesarios para avanzar en el conocimiento, y en consecuencia, se enseñan nociones que distorsionan los conceptos. Estos errores se presentan, precisamente, cuando el profesor repite lo que aprendió de sus profesores y no conoce ni el concepto ni su proceso de construcción.

Formación de docentes

Después de analizar los errores de los estudiantes cuyo origen está en los obstáculos didácticos, la conclusión es que si las dificultades se generan por la enseñanza, se pueden evitar. Estas dificultades se producen por el enfoque tradicional; el niño debe manipular símbolos abstractos pero aún no ha desarrollado ese proceso cognitivo. Aunque no es fácil cambiar esta mirada, porque a través de muchas generaciones se han transmitido los mismos contenidos, es necesario hacerlo para que no se sigan repitiendo los mismos errores didácticos.

Por el contrario, la educación matemática debe atender a las preguntas sobre cómo se construye un concepto y por qué se construye de ese modo, y respetar el proceso de desarrollo del pensamiento lógico matemático del niño. Entonces, el objetivo de la formación de docentes es adquirir herramientas conceptuales en cuanto a la disciplina misma de la matemática y a la psicología genética, y no solo en cuanto a la metodología. La didáctica de la matemática de Federici provee herramientas para la formación de docentes en estos aspectos, y para la reflexión fundamental sobre: ¿Qué? ¿Para qué? y ¿Cómo se enseña la matemática? A continuación se estudian los aspectos fundamentales de la didáctica de Federici.

La didáctica de Federici es de carácter ético porque el docente debe conocer los conceptos que enseña y el proceso de construcción del concepto en el niño. Para conocer este proceso debe apropiarse de la historia de su disciplina y no sólo de los resultados de la misma. Es fundamental que cada docente reviva, de alguna manera, los procesos de descubrimiento e invención de los conceptos porque no basta saber matemática para enseñarla bien, aunque saber matemáticas es necesario para poder enseñarlas (Federici, 2004).

La acción del niño sobre lo concreto es indispensable para que el niño se siente "metido" en el problema y sienta el placer de descubrir y generalizar (Piaget, 1983). En la medida en que descubra las relaciones con el material didáctico podrá construir el significado de los conceptos. Toda acción termina con una representación para que se logren las transformaciones, y para que el estudiante confronte su idea y el profesor la puede evaluar. Es importante aclarar que el juego por sí mismo no lleva al aprendizaje; es necesario, que el profesor tenga un objetivo claro sobre los logros de cada actividad para que propicie las transformaciones por medio de las preguntas adecuadas, y para que el niño aproveche el potencial del material como una herramienta para pasar de lo concreto a lo abstracto.

La construcción del significado de los conceptos se logra con las transformaciones de significado que se dan en la interacción entre el docente y el discente: "(…) el docente debe comenzar a hablar según la verdad poseída por el discente, es decir, debe empezar a hablar de lo que el discente sabe, para (…) empujarlo más allá" (Federici, 2004, p.5). El discente descubre los significados y el docente le da las palabras técnicas, de esta manera, la sintaxis es el resultado de la semántica. "A las significaciones les brotan palabras, lejos de que a esas cosas que se llaman palabras se las provea de significado" (Heidegger, 1988, p.180).

Además, esta didáctica tiene un carácter epistemológico porque el proceso ontogenético repite, en cierta manera, el proceso filogenético: el proceso de construcción de los conceptos en el niño se basa en el proceso de construcción de los conceptos a través de la historia de la humanidad; es un camino ideal o epistemológico porque no recorre todos los vericuetos sino sólo los puntos esenciales mirados desde hoy, tanto en perspectiva como en retrospectiva, con el fin de evitar "el camino tortuoso, sinuoso de ayer" y aprovechar el conocimiento actual. "Las transformaciones que se realizan en el sistema de significaciones del discente, inducidas por las interpelaciones del docente, deben, en cierta manera, repetir las (transformaciones) que en algún momento se dieron en la historia de una idea, de un concepto, de una disciplina, de una teoría, (…)" (Federici, 2004, p.6).

En la propuesta del profesor Federici es necesario integrar todos los tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio que son la base para construir cada una de las ramas de la matemática: cálculo, geometría, medida, álgebra y estadística, respectivamente, de igual manera que el conocimiento se desarrolló en forma integral a través de la historia de la humanidad. No obstante, tradicionalmente se *enseñan en capítulos separados e independientes.*

Al modificar la mirada de la educación matemática tradicional hacia un desarrollo del pensamiento lógico matemático, el interés se centra en el proceso del niño y el manejo de símbolos aparece como una necesidad de escribir en forma corta el lenguaje gráfico y el lenguaje común, que expresa el significado construido previamente por el niño, mediante la acción sobre el material concreto (no sobra recordar que los símbolos son abstractos). Sin embargo, este proceso requiere que se desarrollen desde temprana edad, las estructuras lógicas, las bases del pensamiento matemático y las relaciones espaciales, y su interrelación.

Conclusiones

La reflexión sobre los obstáculos didácticos es necesaria porque si se descubre su origen se modifica la didáctica y la formación de docentes. Aunque los fines de la educación matemática dependen de las políticas educativas de la institución y del país que se reflejan en programas y currículos, en última instancia, la responsabilidad de los cambios recae sobre las personas que estamos directamente comprometidas con la educación de los niños: los docentes, los padres de familia y los docentes de docentes. No es suficiente que las investigaciones apunten a nuevas metodologías sino que es necesario hacer una reflexión sobre qué significa educar en matemáticas (Federici, 2004).

Nuestra responsabilidad es evitar las dificultades que provienen de la didáctica y esto exige "una toma de conciencia del proceso, la conciencia de lo que se hace y de por qué se hace" (Federici, 2004, p.3). La formación de docentes también debe enfocarse a responder estas preguntas y a que cada docente conozca los conceptos que enseña y el proceso psicogenético, para formular y usar las palabras adecuadas, y vigilar y estimular el proceso de desarrollo del pensamiento lógico matemático de sus estudiantes.

Referencias bibliográficas

Andrade, C. (2008). *De la mano al cerebro; sobre la construcción de los racionales sin signo (Q^+) con base en la didáctica de la matemática de Federici.* Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs*, 41-63.

Federici, C. (2001). *Sobre la resolución de problemas y la numerosidad*. Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Federici, C. (2004). *Una construcción didáctica del Sistema de Numeración Decimal*. Bogotá: en imprenta.

Heidegger, M. (1988). *El ser y el tiempo*. México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1983). *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Editorial Crítica.

PARTICIONES DE TODOS CONTINUOS ELABORADAS POR MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN

Marcela Carrillo, Marta Valdemoros.
CINVESTAV-IPN México
marcecarrillo08@yahoo.com.mx, mvaldemo@civestav.mx

Resumen. Esta investigación de carácter exploratorio y de corte cualitativo, concierne al aprendizaje y enseñanza de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición. Los sujetos del estudio son maestros en formación del tercer semestre de la licenciatura en Educación Primaria, impartida en la Escuela Normal de la Ciudad de México. Los instrumentos metodológicos empleados son: dos cuestionarios, observación participante y entrevistas, para elaborar estudio de casos. En este documento mostramos los resultados observados en las tareas de los cuestionarios Fase 1 y 2 con respecto a la partición de todos continuos (figuras geométricas).

Palabras clave: maestros en formación, fracciones, partición.

Abstract This exploratory research of qualitative cutting is dedicated to learning and teaching of relations about equivalence relationship between fractions and partition processes. The study subjects are teachers in training; they are students in the third semester degree in Primary Education at the Normal school of Mexico City. The methodological instruments used are: two questionnaires, participant observation, and interviews to develop case studies. Here we show the results observed in Phase 1 and 2 questionnaires tasks regarding the partition of whole continuous (geometric figures)

Key words: teacher training, fractions, partition.

Introducción

Para quienes estamos interesados en la construcción del conocimiento matemático de la fracción debemos tomar en cuenta que éste es muy complejo, puesto que en él, intervienen muchos aspectos, ya que no sólo es dividir en partes iguales algún entero.

Existen distintas aportaciones teóricas respecto a los procesos y conceptos fundamentales referidos a las fracciones. Para Kieren (1983 y 1988) las fracciones están constituidos por cuatro subconstructos elementales; medida, cociente, razón, operador, y un quinto, la relación parte -todo. Estos subconstructos se encuentran inmersos de algún modo en el Plan y Programas de Educación Primaria (1993) y actualmente en la Reforma Integral de la Educación Básica (2009); por lo consiguiente están dentro del Programa de Licenciatura en Educación Primaria (1997) de la Escuela Normal.

Debido a los múltiples significados de la fracción es de vital importancia desarrollar herramientas básicas que permitan la construcción de los mismos. De acuerdo con Kieren (1983), estas herramientas son: *la partición, la equivalencia* y el reconocimiento de unidades divisibles (“*mecanismos constructivos”).*

Con base en la importancia que tiene en la enseñanza acerca de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición debemos preguntarnos cómo desarrollan los docentes estas herramientas, y más aún, qué y cómo están aprendiendo y llevando a la práctica los maestros en formación estos elementos esenciales.

Marco teórico

Por lo común, la palabra fracción está relacionada con dividir un entero en partes iguales, pero su concepto va más allá de esta interpretación dado que tras muchos estudios de investigación se han identificado diversos significados. Para Freudenthal (1983), las fracciones son el *recurso fenomenológico* es decir, la expresión concreta, fácilmente identificable, para la que se hace presente intuitivamente el número racional y pueden aparecer como*: fracturador, comparador y operador.*

Kieren (1983), puntualiza que las fracciones están constituidas por cuatro significados que él denomina *"subconstructos"*: *medida, cociente, razón, operador multiplicativo* y un quinto que genera el lenguaje de fracción: *la relación parte-todo*. Este último lo define como un todo cortado en pates iguales, asimismo, puede relacionarse con cada uno de los otros por medio de la identificación de unidad apropiada a cada circunstancia; es decir, el conocimiento de fracciones es un conjunto de elementos que se interconectan. De acuerdo con Valdemoros (2008), los distintos significados que se le atribuyen a las fracciones sientan las bases para tener una mejora en el desarrollo posterior de conceptos.

Kieren (1983), considera a *la partición y a la equivalencia* como dos *mecanismos constructivos,* es decir, herramientas empleadas por el individuo para desarrollar el conocimiento de número racional, dichas herramientas permiten al niño construir los cinco significados de la fracción mencionados anteriormente. *La partición*, definida por Kieren (1983), es considerada como *la equidivisión* de una cantidad continua o discreta en un número dado de partes. Esta actividad está basada en los siguientes aspectos: a) es un tipo de clasificación o asignación basado en el criterio de igualdad y suficiencia, teniendo una génesis social mediante la acción de repartir; b) es el origen del lenguaje fraccionario y; c) muestra la relación independiente entre tamaño y medida. Mientras que *la equivalencia* surge en el sentido de "igualdad" o de "lo mismo", donde la comprensión de ésta es uno de los fundamentos para adquirir el concepto de número racional.

Kieren (1983), identifica algunos tipos de partición: 1) *por separación***,** el conjunto es dividido en un número apropiado de subconjuntos; 2) *partición avanzada***,** dada una partición transformarla añadiendo al número de particiones o bien reduciendo su número (partición repetida).

Valdemoros (1993), identifica las *"particiones mixtas"* donde algunos partes del todo se consideran como discretos y otros como continuos.

Debido a la importancia de dichos *mecanismos constructivos* es necesaria su incorporación de manera cotidiana en el trabajo docente de educación primaria, por lo que nos preguntamos cómo están adquiriendo, construyendo y llevando a la práctica los *maestros en formación* estos elementos esenciales, procurando de nuestra parte identificar sus concepciones acerca de tales *mecanismos constructivos* puesto que Martínez (2004), apoyándose en producciones previas de Ernest y de Contreras, afirma que las actividades desarrolladas por los profesores están orientadas por sus propias concepciones.

Para esclarecer la anterior y de acuerdo con Martínez (2006), *las concepciones* son producto de la construcción cognitiva a través de la interacción con la información del entorno del sujeto, por lo que no sólo existen concepciones de objetos matemáticos también del aprendizaje y la enseñanza de los mismos. De igual manera, según Nérici (1969), el profesor necesita saber el qué, el porqué, a quién y cómo enseñar, para llevar a cabo su planeamiento didáctico.

Problema y preguntas de investigación

Nuestro objeto de investigación está enfocado a explorar y analizar qué es lo que algunos estudiantes de la licenciatura en Educación Primaria conocen y aprenden para elaborar planes de clase orientados a enseñar las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos, en la primaria. De tal planteamiento derivamos la siguiente *pregunta de investigación*:

- ¿Qué concepción tienen los maestros de primaria en formación acerca de las relaciones de equivalencia entre fracciones y procesos de partición?

Método

Escenario. La investigación se llevó a cabo en la escuela Nacional de Maestros de Educación Primaria, ubicada al noroeste de la ciudad de México, la cual es la institución pública de educación superior más importante de la ciudad y zona conurbada dedicada a formar, únicamente, profesores de Educación Primaria.

Sujetos. Se consideraron veinticinco alumnos del tercer semestre de Licenciatura en Educación Primaria, ya que durante este semestre se desarrolla el contenido de fracciones en la asignatura Enseñanza de las Matemáticas II; además, en dicho período los maestros en formación cuentan con dos temporadas de práctica, en las cuales diseñan y efectúan planes de clase de matemáticas.

Nuestro *plan general de investigación* estuvo orientado a la elaboración de estudio de casos con maestros en formación, así que el método desarrollado es el siguiente:

1. Aplicación del cuestionario inicial a los maestros en formación. Fase 1.
2. Observación directa de las sesiones impartidas a los profesores en formación.
3. Aplicación del cuestionario de seguimiento para compararlo *a posteriori,* con el cuestionario inicial. Fase 2.
4. Entrevista semiestructurada a los maestros en formación.
5. Observación directa de las sesiones impartidas por los profesores en formación.

Los *instrumentos metodológicos empleados* son: a) dos cuestionarios, b) una sesión de observación directa al presenciar las clase impartida a los maestros en formación por parte de su profesor de la Normal y con referencia a la operatoria de fracciones; c) una entrevista a cada uno de los cuatro candidatos para el estudio de casos; d) una sesión de observación directa a cada unos de los maestros en formación entrevistados, cuando ellos ejercen enseñanza de fracciones. La validación cualitativa de la investigación consta de la triangulación de los instrumentos metodológicos antes mencionados. En este artículo damos prioridad a los resultados obtenidos en los cuestionarios, por lo que aquí detallamos dichos instrumentos. Su aplicación fue en tiempos distintos, es por ello que se denominaron Fase 1 y 2, puesto que nuestro objetivo específico es comparar los cambios, si es que los hay, en cuanto a las concepciones de aprendizaje y de enseñanza de los maestros en formación respecto a las relaciones de equivalencia y procesos de partición.

Ambos cuestionarios constan de tres tareas basadas en partición y equivalencia proporcionadas por el investigador donde el maestro en formación resuelve de manera distinta, justifica sus respuestas, identifica el contenido matemático en la tarea y reconoce qué significado de fracción se está usando; además de elaborar tareas para sus estudiantes**,** con respecto a las fracciones.

Interpretación de resultados obtenidos

En este apartado exponemos los resultados obtenidos por los maestros en formación en los cuestionarios Fase 1 y 2 acerca de las particiones realizadas a todos continuos (figuras geométricas). La tarea del cuestionario Fase 1 consistió en partir de cuatro maneras distintas, doce rectángulos de igual tamaño en medios, tercios y cuartos dentro sus posibilidades puesto que, no tenían instrumentos de medición que les permitiera hacerlo de manera estricta.

Las particiones más comunes en relación a los medios muestran claramente equidivisiones simples, mientras que en los cuartos existe partición avanzada (partición repetida); ambos casos se realizan a través de biparticiones o dicotomías, sin perder de vista la congruencia de áreas.

Respecto a los tercios hubo muchas dificultades puesto que cerca de la mitad del grupo de normalistas sólo pudieron realizar dos particiones de las cuatro requeridas dando origen a respuestas erróneas al subdividir en tres partes desiguales (Ver *Figura A*), lo cual nos muestra que no tienen identificada claramente la concepción de equidivisión y compensación de áreas.

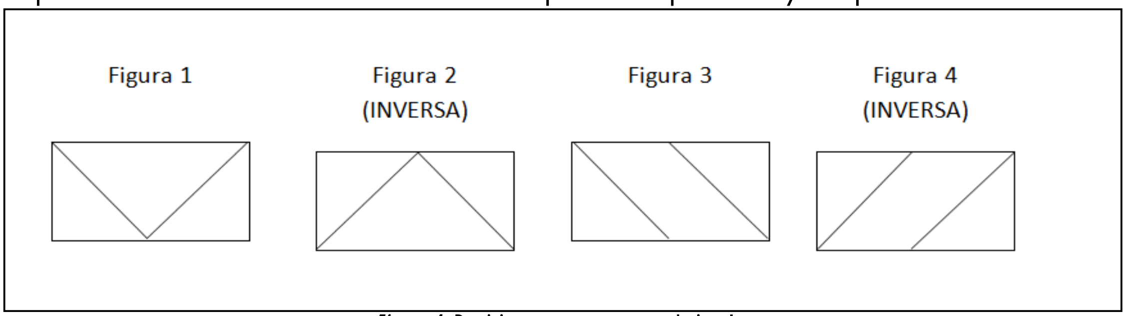


Figura A. Particiones en tres partes desiguales

Asimismo, en dicho cuestionario encontramos ejemplos de particiones donde realizaron “equidivisiones complejas”, es decir, a través de una equivalencia numérica se amplían los valores dados y así lograr sus particiones. Existen dos casos particulares donde encontramos más claramente el ejemplo de “equidivisión compleja”, a continuación los presentamos.

Interpretando la solución de Nancy (Ver *Figura B)* observamos el uso de una equivalencia numérica realizada mentalmente, no hay nada escrito que lo indique, en su partición; puesto que cada tercio está compuesto de dos sextos. Gerardo, nos muestra de manera más detallada gráficamente (Ver *Figura B)* de una “equidivisión compleja”, utilizando equivalencia numérica dividiendo en doceavos, determinando 4/12 para cada tercio y en el segundo en quinceavos, otorgando 5/15 a cada tercio.

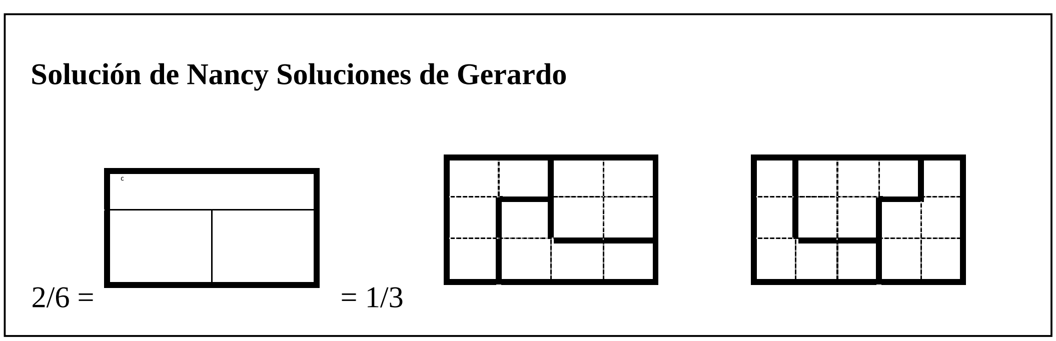


Figura B. Particiones en tercios empleando “equidivisión compleja”

A continuación expondremos los resultados de la tarea aplicada en el cuestionario Fase 2 con respecto a la partición de todos continuos, la cual incluía particiones en quintos, sextos y octavos. A diferencia con la tarea similar del cuestionario Fase 1 las figuras a fracturar eran distintas, así que se pidió que partieran dos cuadrados y un círculo en cada caso (quintos, sextos y octavos), además de dos polígonos acordes a la partición requerida, es decir dos pentágonos para quintos, dos hexágonos para sextos y dos octágonos para octavos.

Las particiones de los cuadrados, en los tres casos (quintos, sextos y octavos), no tuvieron mayor problema puesto que sus experiencias en este campo son muy bastas. En esta figura los maestros en formación utilizaron la equidivisión y la congruencia de áreas, tomando en cuenta que para fracturar sextos y octavos emplearon particiones avanzadas, al utilizar biparticiones y particiones repetidas.

En las particiones elaboradas, en su mayoría, por los maestros en formación, con respecto a los círculos consistieron en la identificación del centro del mismo y dividir en partes tomando en cuenta la congruencia de áreas. Para dividir en sextos la solución más común fue en primera instancia la bipartición del círculo y después cada mitad fue partida en tercios con apoyo de la congruencia de áreas. La partición en octavos se llevó a cabo de biparticiones, es decir partieron en mitad, para después partir en cuartos (mitad de la mitad) y posteriormente partieron a la mitad cada cuarto (partición avanzada).

En las particiones correctas de polígonos regulares, pentágono para quintos, hexágonos para sextos y octágonos para octavos; los procedimientos son similares a las del círculo al identificar el centro de la figura tomando en cuenta la equidivisión y congruencia de áreas al dibujar líneas del centro, anteriormente identificado, a los vértices; así como también del centro a las mediatrices de las aristas.

Tomando en cuenta que los normalistas en su labor cotidiana, la mayoría de las veces trabajan con cuadriláteros encontramos la traspolación de procedimientos de partición de éstos a los círculos y a los polígonos regulares antes mencionados.

En la *Figura C*, observamos las particiones del círculo donde existen procedimientos similares a los de los cuadriláteros.

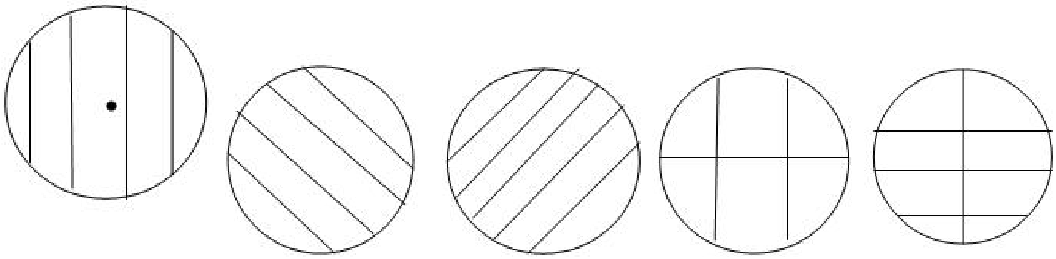


Figura C. Partición del círculo en cinco, seis y ocho partes desiguales

Asimismo encontramos soluciones erróneas, mostradas en la *Figura D*, de los polígonos regulares atribuibles a la causa de la traspolación de procedimientos.

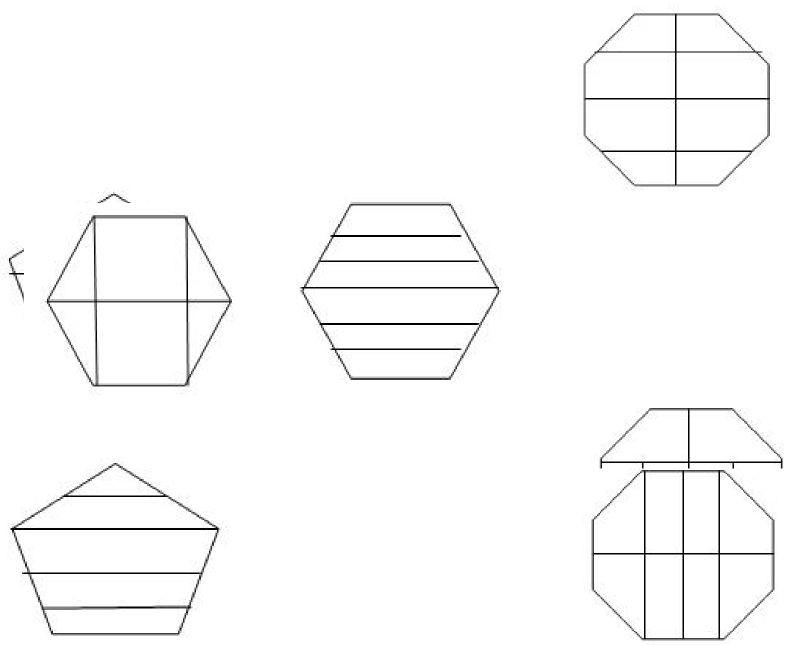


Figura D. Particiones erróneas de polígonos regulares

Para Piaget, Inhelder y Szeminska (1966), la noción de fracción depende de dos relaciones fundamentales: la relación de la parte con el todo (exahustividad) y la relación de parte a parte, donde los tamaños de todas las partes son comparadas con la de la primera parte (equidad). A través de la comparación de los resultados de los cuestionarios Fase 1 y 2, podemos identificar una carencia en la enseñanza puesto que los maestros en formación no modificaron sus concepciones acerca de la equitatividad y el papel que juega la partición en la construcción de las fracciones.

Conclusiones

En la resolución de tareas con respecto a la partición en medios, los maestros en formación mostraron habilidad al desarrollar particiones no convencionales, puesto que, de acuerdo con (Piaget, et al), la dicotomía o bipartición es la forma más fácil de subdividir, porque es la operación más elemental de partir un todo.

La equidivisión compleja es una herramienta desarrollada por los Normalistas, observada en este estudio, donde la equivalencia numérica amplía los valores dados y ésta apoya el concepto de equitatividad.

Debido a la experiencia de fracturar casi siempre cuadriláteros, el partir figuras distintas a estos muestra que la equivisión y congruencia de áreas no está totalmente conceptualizadas por los maestros en formación, puesto que no la toman en cuenta para fracturar un todo continúo.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. En: W. Zwang (Ed), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Boston, E. E. U.U. : Birkhauser. 506 – 508.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development, En J. Hiebert y M. Behr (Ed), *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston, E.E.U.U.: National Council of Teachers of Mathematics. 162 181.

Martínez, M. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 6 (1).

Martínez, M. (2006). *Educación Matemática para todos Vol. 1*. México: Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO. 54 – 87.

Nérici, I. (1969). *Hacia una didáctica general dinámica.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Kapelusz.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminiska, A. (1966). Subdivisión de áreas y el concepto de fracción. *The child´s conception of geometry,* Londres, Routledge and Reagan Paul.

Secretaria de Educación Pública. (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria*. México.

Secretaría de Educación Pública (1997). *Plan de estudios para la Licenciatura en Educación Primaria*, México.

Secretaría de Educación Pública. (2009). *Educación Básica. Primaria. Plan de Estudios*. México.

Valdemoros, M. (1993). The Language of Fractions as an Active Vehicle for Concepts. *Proceedings of Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I. 1233-1239*

Valdemoros, M. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones. Estudio de caso. En: F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México: Editorial Iberoamericana. 465- 481

Valdemoros, M y Ruiz, F (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(1), 127-157.

HISTORIA EN UN CURSO DE POSGRADO PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN SERVICIO. UNA ESTRATEGIA PARA PROBLEMATIZAR LA TRIGONOMETRÍA ESCOLAR

Gisela Montiel Espinosa .
CICATA – Cinvestav, IPN México
gmontiel@ipn.mx

Resumen. -. A través del análisis de *fuentes originales*, en un curso de posgrado con profesores de matemáticas en activo, proponemos la problematización de la trigonometría escolar; es decir, el cuestionamiento de aquello que enseñamos, más allá del cómo lo hacemos y cómo lo aprende el estudiante. Reconociendo los contextos, los problemas y los escenarios de origen de dicho conocimiento, y usando a la historia como mediador, se plantean elementos para la *resignificación* de lo trigonométrico en la construcción de conocimiento matemático.

Palabras clave: - . problematizar el saber escolar, lo trigonométrico, historia de las matemáticas.

Abstract .-. Trough the analysis of mathematical original sources, on a postgraduate course with in-service teachers, we propose problematize the school trigonometric knowledge, i.e., questioning what to teach and not just how we teach it and how students learn it. Recognizing the contexts, the problems and the scenarios of knowledge's origins, and using the history as a mediator, we found elements for a *new base of meanings* for trigonometric in the construction of knowledge.

Key words: - school knowledge, trigonometric, mathematics history.

Introducción

El reconocimiento de la matemática educativa como disciplina autónoma ha descansado significativamente en el papel que le otorga al saber matemático como parte del objeto de estudio, al enfrentar un fenómeno didáctico. Sin embargo, para entender qué aprendizajes logran los estudiantes se ha asumido, con regularidad, al saber escolar como el saber matemático y se estudia cómo los métodos de enseñanza permiten alcanzar cierta comprensión de ellos. En este sentido no hay un cuestionamiento hacia la pertinencia de los significados que subyacen a dicho saber escolar, ni a su estructuración formal desvinculada de los contextos que le dan sentido al conocimiento en el desarrollo del pensamiento matemático. Esta situación se vive con claridad en el área de la trigonometría educativa.

En el marco de un curso de posgrado en matemática educativa, dirigido a profesores en activo, nos propusimos la problematización de un saber escolar, la razón trigonométrica, buscando más allá de éste los significados que le son propios. Nos situamos en un escenario histórico, pues si bien el profesor reconoce que en *en sus orígenes la Trigonometría trata con el cálculo de cuerdas y no de las razones*, suele desconocer las problemáticas, los contextos, las circunstancias y las condiciones donde se trata con esas cuerdas; pero sobre todo nos situamos en este escenario para provocar un cambio de foco: de centrarse en la razón trigonométrica a atender la construcción de la *cantidad trigonométrica*.

El papel de la historia en la formación docente

Los resultados obtenidos de usar la historia de las matemáticas en la escuela, con alumnos o con profesores, se relacionan al cómo se usa más que al rol de la historia en sí misma (Furinghetti, 2007). Es decir, el resultado depende del método que se usa para incorporar la historia en la educación matemática.

La historia de las matemáticas inserta en la formación de profesores ha sido un elemento variable, que ha dependido de países, tradiciones matemáticas, tradiciones de enseñanza, épocas, entre otros (ver la revisión de Schubring et al, 2000). La historia para *humanizar* o dar un *contexto* a la matemática, para ampliar la *cultura* matemática, para reconocer *problemas* interesantes o para analizar el *desarrollo o evolución* de los conceptos matemáticos, son algunos de los objetivos que se plantean al introducirla, tanto en cursos con estudiantes como en espacios de formación de profesores.

De particular interés para nuestro trabajo es la propuesta de Furinghetti (2007) que ocupa la historia de las matemáticas para provocar en el futuro profesor una reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos, que lo lleven a un diseño didáctico propio, abandonando la reproducción pasiva del estilo de enseñanza que experimentó siendo estudiante. Se dice entonces que la historia no se introduce *per se*, sino como *mediador* del conocimiento a enseñar; se usa la historia para *reorientar*, es decir, para hacer que el profesor experimente de nuevo la construcción de objetos matemáticos.

Sin embargo, en nuestro escenario contábamos con profesores *en-activo*, que laboran en distintos niveles educativos, con diversidad de formación profesional y docente, con experiencia profesional y docente en distintos niveles; que están formándose en un posgrado en matemática educativa, en la modalidad a distancia en línea. Es decir, adultos que trabajan y estudian en forma simultánea, que buscan un continuo ir y venir entre su proceso de formación y su quehacer profesional.

Nuestro método para introducir la historia de las matemáticas en este proceso de formación particular está matizado por la visión del posgrado mismo y la línea de investigación a partir de la cual se reconoce al contexto histórico como fuente para la problematización del saber matemático escolar.

Formación de posgrado en matemática educativa

El posgrado en Matemática Educativa, del CICATA-IPN, nace como un proyecto social no centrado en la masificación (esperanza latente), sino en la diversidad, pues permite reunir por su naturaleza a una muestra diversa de profesores, tanto por los niveles educativos a los que pertenecen, como a las tradiciones culturales regionales o nacionales de sus países de origen (Lezama, 2009). El proyecto académico, desde la disciplina, ha sido nuestro eje rector y hemos ido actualizando, a la par de las posibilidades tecnológicas de la institución, nuestros formatos de diseño e interacción para lograr nuestros objetivos. En este sentido no soslayamos los recursos tecnológicos a herramientas operativas, sino que las integramos a un ambiente de aprendizaje para constituir un nuevo escenario educativo, donde si bien no son el fin, tampoco son solo el medio.

Asumimos a la formación en matemática educativa como el espacio donde el profesor de matemáticas reconoce a la disciplina como el campo de saber que aporta a su práctica docente y al cual contribuye con su experiencia en el aula. Un punto de partida para conseguir dicho reconocimiento es, desde nuestra perspectiva, hacer una clara distinción entre la Matemática, la Matemática Escolar y la Matemática Educativa,

> En la matemática educativa se reconoce a la matemática escolar como un cuerpo autónomo de conocimientos que toma a la matemática como su saber de referencia, pero se distingue de ella, no solamente por su explícita pretensión didáctica, sino también por el profundo cambio de su epistemología (Cantoral, 1995).

Esta distinción no busca descartar la perspectiva desde ninguna de ellas, sino entender lo que cada una aporta al entendimiento del fenómeno social de interés: el *fenómeno didáctico*. Así, reconociendo que la *matemática escolar* está normada por un discurso hegemónico que subyace a los paradigmas de enseñanza, nos propusimos la problematización de la razón trigonométrica, a partir del análisis de la *fuente original* en donde se le *institucionaliza* por primera vez como fundamento matemático de la teoría astronómica en el Almagesto de Ptolomeo.

Aquí, la historia también se introduce como un mediador, pero que *problematiza* al saber matemático haciendo uso de herramientas teórico-metodológicas construidas al seno de la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa.

Metodología para el análisis de la historia

Furinghetti (2007), con el objetivo de culminar con un diseño de clase, realiza un experimento en cuatro fases y finaliza reconociendo que el proceso que lleva al futuro profesor al diseño se sintetiza en:

- Lectura de los programas de matemáticas
- Lectura de la historia en un *modo evolucionista*
- Distinción de las raíces cognitivas del concepto
- Confrontación de las raíces cognitivas en la historia y en los programas de matemáticas, mediante un *modo situado* de leer la historia
- Diseño de secuencias de enseñanza

Nuestra experiencia por otro lado tuvo que considerar elementos de diseño instruccional para la modalidad a distancia y la integración de acercamientos teórico-metodológicos a la historia en el contexto de la matemática educativa. Una exposición detallada del diseño del curso puede consultarse en (Montiel, 2010), aquí lo resumiremos en momentos:

> Momento 1. Familiarización con el tópico escolar, no solo a nivel de dominio de contenido. Se realizó un análisis de textos orientado hacia la identificación de procesos de enseñanza, hacia distinguir el estatus *institucional* de este contenido escolar, es decir, el *saber a enseñar*.
>
> Momento 2. Primer análisis del Libro I, Capítulo IX: *Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo* (traducido al español) del Almagesto de Ptolomeo, acompañado de los elementos teóricos sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico que se propone en Montiel (*en prensa*).
>
> Momento 3. Acercamiento a las herramientas teórico-metodológicas para hacer investigación en el marco de la Socioepistemología (Buendía y Montiel, en prensa, 2009) y para hacer investigación socioepistemológica en escenarios históricos (Espinoza-Ramírez, 2009).
>
> Momento 4. Segundo análisis de la fuente original, considerando los factores de construcción social y reconociendo los elementos de resignificación de lo trigonométrico.

Para entender cómo se usó un concepto en un cierto periodo histórico, qué problemas resolvía y qué impedimentos redujeron sus alcances, es necesario evitar que se busquen en el pasado solo las raíces del conocimiento moderno, tal como los conocemos (enseñamos) actualmente. Maltese (2000) reconoce que para embarcarse en esta tarea es necesario poner el objeto de la investigación en el marco de una cierta época, buscando su influencia en prácticas científicas previas e inclusive ir más allá y dar luz de los procedimientos y los algoritmos para descifrar la forma en la que se empleaba. Esta mirada se logró en el paso del momento 3 al momento 4, es decir, la introducción de un episodio histórico no basta, por sí mismo, para que se analizaran los significados y los usos que subyacen a lo trigonométrico y que nos proporcionan los elementos para problematizar el qué enseñamos en trigonometría.

Problematización y resignificación de lo trigonométrico en un escenario histórico

Se revisó toda *producción* de los estudiantes-profesores haciendo uso de todos los registros generados en el curso: foros, blogs, tareas, participación en la Wiki e incluso las conversaciones vía chat o los correos enviados en forma individual; en donde se evidencie reflexión alrededor de *lo trigonométrico* en el episodio histórico elegido o en situación escolar.

El análisis que hicimos de estas producciones se enmarca en el paradigma de la investigación cualitativa expuesto en (Álvarez-Gayou, 2009), nos interesó comprender la realidad de un momento particular del proceso de formación de nuestros estudiantes, e interpretar dicha realidad con base en nuestro marco teórico, la socioepistemología y en considerar a los estudiantes dentro de su propio marco de referencia.

Los estudiantes lograron la problematización de la trigonometría escolar al:

- confrontar su dominio del conocimiento trigonométrico con la estructuración institucionalizada de lo trigonométrico en una época y una obra ajenas a su quehacer,
- identificar distintas ‘orientaciones’ didácticas en libros de texto, y al
- articular la teoría y sus resultados con su práctica docente.

Sin embargo, no se logró que todos reconocieran qué del desarrollo geométrico hace de lo construido un conocimiento trigonométrico, es decir, que identificaran que la cantidad trigonométrica surge de desentrañar la *naturaleza de la relación* ángulo-cuerda (como bien señaló ya Wentworth, 1883).

Identificamos la *resignificación* de lo trigonométrico cuando el estudiante-profesor reconoce el contexto de construcción geométrica en donde surge la cantidad trigonométrica, en relación a su práctica docente:

> *Siento que si hubiese más tiempo en la escuela para plantear a los estudiantes actividades, de tal manera que ellos mismos puedan construir así geométricamente las cantidades trigonométricas, tal vez existiría otra relación con la trigonometría.*

y establece que los conocimientos necesarios para dicha construcción ya no se restringen a la proporcionalidad, los triángulos semejantes y la medida de ángulos:

> *Los conocimientos y herramientas matemáticas necesarias para dicha construcción:*
>
> *Herramientas matemáticas: Círculo, cuerda, arco, razones/proporciones.*
>
> *Conocimientos matemáticos: Círculo, semicírculo, circunferencia, diámetro, arco, cuerda, sector, figuras geométricas (cuadrado, triángulo, rectángulo, pentágono, hexágono, decágono y dodecágono, cuadrángulo), ángulos (recto), línea, longitud, radio, proporciones, sistema sexagesimal (grados), semigrados (minutos, segundos y terceros.*

Reflexiones finales

Problematizar el saber escolar desde un escenario histórico, utilizando fuentes originales, nos obliga a confrontar la obra 'matemática' con la obra 'escolar' haciendo evidente que los procesos de transposición didáctica pueden sintetizar el saber al grado de hacerlo irreconocible con una mirada actual. Con ello no pretendemos que los saberes originales se lleven al aula, sino reconocer cómo el contexto, el lenguaje, los problemas y los paradigmas de una época hacen de ciertos saberes un conocimiento que se construye y se comparte en grupos humanos específicos; y cómo para acercarse a él es necesario reorganizar formas de pensamiento.

En la siguiente figura mostramos cómo una estudiante-profesora hace uso de la construcción verbal de Ptolomeo y las notas del traductor para hacer una reconstrucción geométrica en su propio lenguaje, que le permita continuar con el resto de las construcciones geométricas del Almagesto.

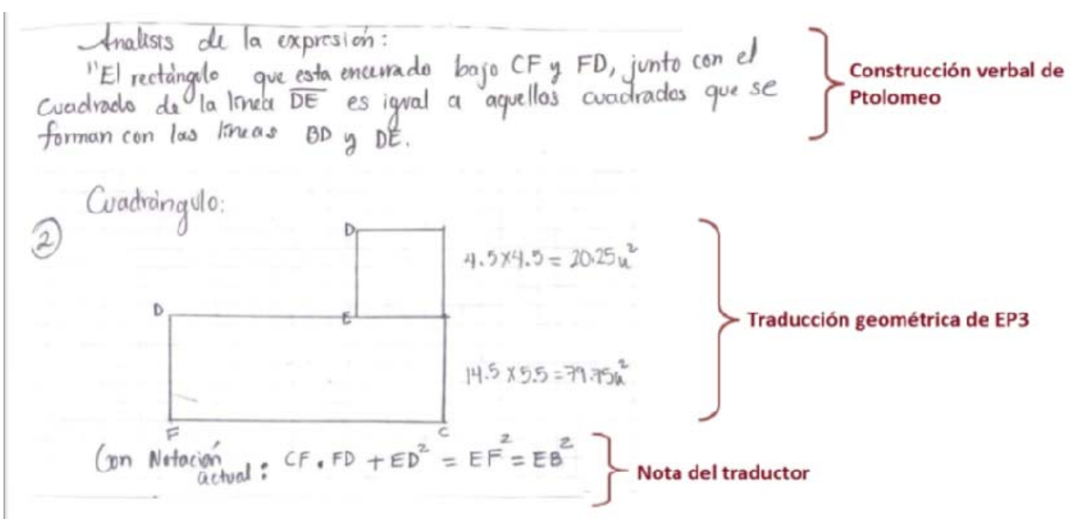


Fig. 1 Extracto de la reconstrucción que hizo una estudiante-profesora del Almagesto de Ptolomeo

El lenguaje geométrico-euclidiano (verbal) fue el primer obstáculo en el análisis del capítulo. Sin embargo, esto los llevó a reconocer que éste es en realidad su contexto de origen y que ello pudiera explicar las dificultades que el estudiante tiene del paso de la razón (con el método del triángulo rectángulo) a la función (con el método del circulo trigonométrico), el hecho de despojarlo de su contexto natural.

El binomio Historia–Educación referido a las matemáticas ha encontrado diversas manifestaciones exitosas. Buendía y Montiel (en prensa, 2009) lo han usado para reconocer en la primera elementos que contribuyan en (1) la explicación de fenómenos de aula y (2) en la construcción de epistemologías de prácticas que condicionan la construcción de conocimiento matemático. Las autoras ponen en evidencia cómo desde la aproximación socioepistemológica se desarrollan estrategias de investigación a través de la historia para determinar aquellas circunstancias que dan cuenta de porqué hoy tratamos con la matemática escolar como lo hacemos.

Ahora, el binomio como mediador en la formación docente, gracias a la vinculación teoría-práctica educativas que hace el propio profesor, provee de nuevos elementos para el rediseño del discurso trigonométrico escolar.

Referencias bibliográficas

Almagesto. Libro I, Capítulo IX: Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo [traducido al español]

Alvarez-Gayou, J. (2009). *Cómo hacer Investigación cualitativa. Fundamentos y Metodología.* México: Paidós Educador.

Buendía, G. y Montiel (en prensa). *From history to research in mathematics education. Socio-epistemological elements for trigonometric functions*. Capítulo aceptado en V. Katz y C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education.*

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.*), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1287-1296. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* R. Farfán (Ed.), Ediciones de la UNAM, Vol. 1, Cap. Plenarias, 1 – 10. Ministerio de Educación, La Habana, Cuba.

Espinoza-Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies of Mathematics* 66: 131-143.

Lezama, J. (2009). Posgrado a distancia en línea en matemática educativa, una alternativa de formación de profesores. La propuesta del Instituto Politécnico Nacional para América Latina. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1585 – 1594. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maltese, G. (2000). On the Relativity of Motion in Leonhard Euler's Science. *Archive for History of Exact Sciences 54*(4), 319-348.

Montiel, G. (2010). Problematizando la trigonometría escolar en un curso de posgrado en línea en matemática educativa. En G. Buendía (ed.) *A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN,* 141-174. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G. (en prensa). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. Aceptado para su publicación. México: Ediciones Díaz de Santos.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-I., El Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., et al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (pp. 91–142). Boston, MA: Kluwer.

Wentworth, G. (1883). *Plane and Spherical Trigonometry*. Ginn Heath & Co., Printers.

FORMACIÓN A DISTANCIA. LAS CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES CON RELACIÓN A IDEAS VARIACIONALES

Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar

Resumen. En nuestro país la educación a distancia es una modalidad que adquirió gran importancia durante los últimos años. Las Tecnologías de la Información y Comunicación están transformando la educación y juegan un rol protagónico en la formación a distancia. En este trabajo presentamos el análisis de las intervenciones realizadas por siete docentes que participaron en dos foros propuestos en el aula virtual durante el curso: *Los principios del cálculo diferencial. Un enfoque intuitivo.* En el primer foro se trabajaron las nociones de magnitud, variable e intervalo mientras que en el segundo se planteó la necesidad de definir las ideas de diferencia y razón. Identificamos y analizamos las herramientas matemáticas o extramatemáticas a las que recurren los docentes (alumnos del curso) para dar respuesta a los planteos enunciados. Los resultados nos muestran que las concepciones de los docentes y las maneras con que los mismos enseñarían los conceptos no están necesariamente relacionadas a nociones variacionales.

Palabras clave: pensamiento variacional, concepciones docentes.

Abstract In our country, distance education is a modality that has become important in recent years. Information´s Technologies and Communication´s Technologies are transforming education and are playing a leading role in distance learning. We present the analysis of interventions made by seven teachers who participated in two forums proposed in the virtual classroom over the course: *Differential´s calculus principles. An intuitive approach.* During the first forum we worked with magnitude, variable and interval. During the second one, we worked the ideas of difference and rate. We have identified and analyzed the mathematical or extra mathematical tools that the teachers (students of the course) used to respond to different questions raised in the forums. The results show that the teachers´ conceptions and the ways they teach the concepts are not necessarily related to variational notions.

Key words: variational thinking, teachers´ conceptions.

Introducción

El mundo vive en una permanente transformación educativa que avanza a un ritmo acelerado. Este proceso nos obliga a renovar la enseñanza teniendo en cuenta diferentes caminos didácticos y pedagógicos.

Hoy más que nunca se deben generar las estrategias y procesos que permitan que el profesorado alcance y mantenga niveles de competencia, eficacia y excelencia elevados. Para esto es necesario disponer de un buen sistema de formación a lo largo de toda la carrera docente. En nuestro país la educación a distancia es una modalidad que adquirió gran importancia durante los últimos años. Hace tiempo que comenzaron a gestarse e implementarse proyectos con una amplia variedad de contenidos, estrategias y tecnologías que tienen en común la utilización de la educación a distancia como una modalidad alternativa con el mismo valor académico que la presencial.

(…) la sociedad exige más oportunidades de formación y entre las soluciones más viables, las instituciones proponen los programas de educación a distancia. Sin embargo, entrar en ambientes de esta naturaleza presupone de un cambio radical, desde la misma concepción de la educación a distancia hasta los mecanismos de acción, administración, implementación, diseño, entre otras. Esta práctica no es un terreno educativo nuevo, sus inicios se dan en 1700, pero ha sufrido una evolución impresionante en las últimas décadas Montiel (2002, p. iv).

La educación y las nuevas tecnologías comparten actualmente algunos escenarios comunes. Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) están transformando la educación y juegan un rol protagónico en la formación a distancia. Estas tecnologías permiten la creación de entornos virtuales, bajo enfoques metodológicos no tradicionales, que facilitan el paso de un aprendizaje individual a un aprendizaje colaborativo y desde la transmisión a la construcción de conocimiento.

La Universidad Nacional del Litoral en 1999 puso en marcha su Programa de Educación a Distancia. Dentro de la oferta académica aparecen los cursos de Extensión dictados a través de la plataforma e-learning como nuevos espacios de formación, actualización y perfeccionamiento docente. A través del aula virtual los docentes (alumnos del curso) cuentan con la posibilidad de construir conocimientos, intercambiar experiencias y compartir producciones. Generan y promueven espacios para la reflexión, accesibles a toda hora, adaptables al ritmo de aprendizaje individual y por sobre todo opuestos a la clásica transmisión de conocimiento del profesor al alumno.

Hace nueve años comenzamos nuestro trabajo con el dictado de diferentes cursos de formación para docentes de matemática de nivel medio, terciario y primer año de universidad. Durante el año 2009 dictamos el curso *Los principios del cálculo diferencial. Un enfoque intuitivo,* en el que se inscribieron 109 alumnos de diferentes lugares del país. El mismo se llevó adelante dentro de un proyecto enmarcado en la línea de investigación *Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Durante el desarrollo del mismo se propició el debate sobre la importancia del estudio del cálculo resaltando las ideas más importantes y su relación con la variación y el cambio. Se buscó conocer aspectos importantes y conocimientos de los docentes con relación a las ideas de variable, diferencia y razón.

Aspectos teóricos

En el intento de explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, es fundamental considerar la actividad matemática como una actividad humana. El interés fundamental debe centrarse en "entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática" (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003, p. 18). El papel de la actividad humana es tal que es considerada como la fuente principal de la reorganización de la obra matemática que implicará el rediseño del discurso matemático escolar en todos los niveles escolares.

Teniendo en cuenta estas premisas se ubica la *socioepistemología*, aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, articulando en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004).

Bajo esta aproximación se encuentra la línea del *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, que se ocupa de las relaciones entre la matemática de la variación y del cambio, así como de los procesos y los mecanismos funcionales del pensamiento matemático. Los trabajos enmarcados en este programa buscan tender puentes entre la investigación y la realidad del aula.

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral y cols., 2003, p. 185).

Al iniciar el estudio de temas relacionados a la variación, tales como razón de cambio, derivada, análisis y graficación de funciones, entran en juego conocimientos variacionales que frecuentemente tendemos a naturalizar en nuestro discurso. Damos por interiorizadas nociones como por ejemplo, intervalo, constante, variable, magnitud, variación, razón. Los resultados obtenidos en distintas experiencias nos muestran que muchos alumnos (inclusive docentes) presentan dificultades con estos conceptos.

Todos los seres humanos a lo largo de la vida desarrollan ideas acerca de su mundo, elaboran significados para términos científicos y construyen explicaciones acerca de por qué y cómo las cosas se comportan de determinada manera. Estas teorías, significados y explicaciones son consideradas *concepciones*. En el caso de los profesores, las concepciones constituyen la estructura que cada profesor da a sus propios conocimientos para luego transmitirlos o enseñarlos a sus alumnos. Esto significa que forman parte del conocimiento, resultan el producto del entendimiento, actúan en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento (García, Azcárate y Moreno, 2006). Las concepciones personales del profesorado, sus creencias, la forma en la que se produjo su formación profesional y sus experiencias vividas, constituyen la base sobre la que se sustenta la tarea a desarrollar en el aula.

Aspectos metodológicos

Los contenidos abordados durante las seis semanas de cursado fueron: números reales y la recta real, límite de funciones, función continua, derivada y función derivada, reglas de derivación y estudio del comportamiento de una función.

El concepto de variación tiene una importancia fundamental en el estudio del cálculo. El estudio del cambio en diferentes situaciones, generó las ideas fundamentales que dieron origen a esta rama de la matemática. Es por ello que nos propusimos provocar la emergencia de algunos conceptos básicos relacionados al cambio, tratando de recuperar el aspecto variacional descuidado en la enseñanza previa a la universidad e incluso en la superior. Aprovechamos el espacio propuesto en el aula virtual, los foros de discusión, dado que se constituyen en un medio de interacción directa entre el profesor y los estudiantes.

Cada foro se inició con una actividad planteada por el docente. Para ello tuvimos en cuenta el trabajo de Ávila (2005), cuyo objetivo principal fue analizar las representaciones de la variación (conceptos y propiedades matemáticas relacionadas al cambio) de las que se apropian los estudiantes en la escuela. Teniendo como base las actividades enunciadas por el investigador planteamos durante el curso dos foros en los que indagamos las concepciones de los docentes de matemática de la escuela secundaria (alumnos del curso) con relación a nociones variacionales básicas.

El primer foro en el que se trabajaron las nociones de magnitud, variable e intervalo se presentó durante la primera semana de dictado mientras se desarrollaba el tema números reales y la recta real. El segundo foro en el que se planteó la necesidad de definir las ideas de diferencia y razón fue habilitado al comienzo de la tercera semana, previo al desarrollo del módulo correspondiente a derivada y función derivada.

En este trabajo presentamos el análisis de las intervenciones realizadas por docentes que participaron en los foros propuestos. Identificamos pasajes en los que se refieren a aspectos variacionales y analizamos las herramientas matemáticas o extra matemáticas a las que recurren para dar respuesta a los planteos enunciados.

Foro primera semana (transcripto en cursiva)

La matemática de la variación y el cambio

Durante los siglos XVI y XVII, dada la necesidad de resolver problemas de movimiento de los astros, el flujo de los líquidos, el movimiento de un cuerpo, entre otros, aparecieron nuevos métodos matemáticos para su resolución. Desde esa época surge la necesidad de medir los cambios. Los cambios que ocurren en la sociedad, la economía, la naturaleza, en nuestra vida cotidiana, tienen distintos comportamientos. Algunos ocurren de manera uniforme, otros lo hacen abruptamente y otros a cada instante. La medición de estos cambios y la variación están estrechamente ligadas. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos. Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función.

Teniendo en cuenta lo enunciado le sugerimos que responda a las siguientes preguntas y comparta sus respuestas con sus compañeros en el foro.

- *Cada vez que usted escucha, utiliza o lee en su vida cotidiana las palabras enunciadas a continuación ¿qué le sugieren?, ¿en qué piensa? Complete:*

Magnitud……………………………………………………………………………………

Variable……………………………………………………………………………………

Intervalo……………………………………………………………………………………

La noción de variable es uno de los elementos básicos para estudiar la variación. En los procesos de variación se involucran por lo menos dos variables que se relacionan entre sí.

Al leer las intervenciones de los docentes observamos que, desde lo matemático, reiteradamente aparece la concepción de variable en el contexto de una relación funcional. En general no dan una definición de variable sino que relacionan con "x", "y" o con "variable independiente", "variable dependiente". Varios casos presentan la acepción de variable como adjetivo, refiriéndose al cambio en alguna situación, ya sea matemática o no.

Transcribimos algunas intervenciones. (Indicamos con D1, D2,…. a los diferentes docentes intervinientes).

D1. Variable: función, "x", "y", variable dependiente, variable independiente, etc.

D3. Resulta interesante este tema, desde el momento en que, desde lo cotidiano, los términos usados tienen una interpretación bastante diferente matemáticamente hablando. En lo cotidiano, sin el saber matemático se entiende como Variable, al cambio que pueden sufrir las cosas, cuando no mantienen sus características de modo permanente.

D6. Con la palabra variable se me ocurre la comparación entre variables independiente y variable dependiente mediante la relación entre ellas ya sea funcional o no. Relacionando distintas situaciones que se presentan en la vida cotidiana. El costo depende de la cantidad de artículos que se compren, la cantidad de habitantes de una ciudad depende del tiempo, el tiempo que tarda un automóvil en recorrer una distancia depende de la velocidad que lleva.

- *¿Cómo explicaría a sus alumnos el significado de estas palabras? En la respuesta puede utilizar distintas representaciones (gráfica, verbal)*

Magnitud…………………………………………………………………………………

Variable………………………………………………………....………………………

Intervalo…………………………………………………………………………………

Los docentes manifestaron lo siguiente: (transcribimos sólo algunas respuestas por razones de extensión)

D3. El concepto matemático es más complejo y modifica la idea cotidiana. A mis alumnos les hablo de variables, como las características que se desean analizar, cuando existe algún tipo de dependencia en la relación de unas con otras.

D6. Para variable plantearía una situación problemática cotidiana en la que exista una relación entre dos variables, para luego traducir su comportamiento a una tabla y gráfico cartesiano.

D7. Para explicar estos conceptos a mis alumnos emplearía la idea de función mediante una tabla de datos y su correspondiente gráfico, ya que son múltiples las situaciones que se pueden estudiar a partir de estos términos.

Foro tercer semana (transcripto en cursiva)

La matemática de la variación y el cambio

En el libro Cálculo (Tomo 1) de Smith y Minton (2000) al inicio del Capítulo 2: Derivación se puede leer:

¿Qué tan rápido puede correr una persona? Esta pregunta ha fascinado literalmente a la gente durante miles de años desde cuando incontables culturas que se remontan a la prehistoria realizaban carreras de competencia. En la época moderna, el ganador de los 100 metros planos en los Juegos Olímpicos ha ganado el título del "ser humano más rápido del mundo". Sin embargo, la elección de los 100 metros como la distancia apropiada para este título no se acepta universalmente. … El debate acerca de la distancia apropiada nos conduce a una pregunta matemática significativa: ¿exactamente que quiere decir el más rápido?

Para comenzar a dar respuesta al interrogante le sugerimos que responda a las siguientes preguntas y comparta sus respuestas con sus compañeros en el foro.

- *Cada vez que usted escucha, utiliza o lee en su vida cotidiana las palabras enunciadas a continuación ¿qué le sugieren?, ¿en qué piensa? Complete.*

Diferencia…………………………………………………………………………………

Razón……………………………………………………………………………............

La diferencia es el concepto que sirve de herramienta para cuantificar la variación entre dos estados consecutivos de un sistema dado. La razón es una de las ideas más relevantes en el cálculo. Siempre que se estudia un fenómeno de variación lo importante no sólo es estudiar los cambios, sino que tan rápido cambia eso que cambia. Compartimos algunas intervenciones.

D1. Diferencia: Resta, dos puntos entre los cuales hay un trayecto, minuendo, sustraendo.

D1. Razón: División, fracción, distancia sobre tiempo, razonamiento.

D3. Diferencia: característica que distingue a una cosa de otra. Denota discrepancia entre cosas semejantes. Variedad entre cosas de la misma especie. Resto. Todo lo que le falta a una cosa o conjunto de cosas para igualar a otra/o.

D3. Razón: Acto de entendimiento. Causa o motivo de algo. Relación entre dos cantidades o cosas medibles. Cuenta.

D6. Diferencia: Intersección de dos posibles trozos, tramos, distancias. Cambio.

D6. Razón: Variación de dos elementos dependientes. Cociente de diferencias.

- *Para cada una de las palabras propuestas, escriba tres oraciones diferentes en las que las utilice.*

Diferencia…………………………………………………………………………………

Razón……………………………………………………………………………............

Enunciamos algunas intervenciones de los docentes:

D1. Cuatro pesos de diferencia hay entre el precio de estos dos cuadernillos.

Halla la diferencia entre tu edad y la de tu compañero de banco.

D1. Si efectuamos la razón entre 6 y 3, el resultado es 2.

Ese vehículo se traslada a una razón de 10 kilómetros por hora.

Efectúa todas las razones, las divisiones y las multiplicaciones, luego las sumas y restas.

D3. Entre los Polos y el Ecuador, existen grandes diferencias de temperaturas.

Mis hijas nacieron con 5 años de diferencia.

Las diferencias políticas entre el gobierno de la Nación y el de la Provincia perjudican a la población.

D3. La razón del debilitamiento de la capa de ozono es la gran contaminación ambiental.

Se dice que las mujeres somos mayoría respecto de los hombres, a razón de 7 a 1.

Galileo tenía razón, luego Newton lo demostró.

D6. La diferencia de temperatura depende de la proximidad al mar.

El ancho del retazo de tela tiene una diferencia de 3 cm con el largo de la misma.

Son 5 km de diferencia que hay desde la playa a la escuela.

D6. La pendiente de una recta es la razón entre la variación de la variable independiente y la variable dependiente.

La velocidad media es la razón entre la distancia que recorre un autobús y el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia.

La razón del cambio de temperatura de un pastel en el horno está asociada al tiempo que se halla en el mismo.

Si analizamos las respuestas, en cuanto a la diferencia, observamos en las intervenciones que, desde lo cotidiano, es considerada con diferentes significados: comparación, distinción, no coincidencia, distinto, clasificación (destacando lo no igual), contrario, distancia, entre otras. Desde la matemática relacionan la diferencia con la operación resta. En casi todos aparece esta acepción influenciada por la formación matemática o por la escolarización.

Si analizamos lo referido a razón en las acepciones como en los ejemplos, aparecen diferentes significados del término. Definen razón como la facultad del hombre para conocer y pensar, el motivo o la causa de algo, verdad o acierto en lo que una persona dice o hace. También aparecen las explicaciones desde la matemática: fracción, división, razón de cambio o específicamente relacionada al concepto de velocidad.

- *¿Cómo explicaría a sus alumnos el significado de estas palabras? En la respuesta puede utilizar distintas representaciones (gráfica, verbal)*

Diferencia……………………………………………………………………………………

Razón………………………………………………………………………………………...........

En las intervenciones aparece la noción de razón como cociente entre números. Si bien se observan ejemplos interesantes de aplicación del concepto, en ningún momento recalcan la importancia o necesidad del concepto al momento de explicarlos. Las respuestas más interesantes que surgieron fueron:

D1. Yo procedería, en ambas situaciones, realizando una "lluvia de palabras" a partir de los aportes de los alumnos, para saber que es la idea que ellos tienen. Luego los haría buscar en el diccionario los significados y posteriormente luego de hacerles resolver varios problemas en los cuales utilicen las operaciones mencionadas les dictaría los conceptos.

D3. Razón: La razón o relación es el resultado de comparar dos cantidades, lo cual puede hacerse de dos maneras: buscar en cuánto excede una a la otra, es decir, restándolas, para hallar su diferencia o bien cuántas veces contiene una a la otra, es decir, dividiéndolas. Las razones se dividen: Razón aritmética o por diferencia y Razón geométrica o por cociente.

D6. Plantearía distintas situaciones para realizar cociente de diferencias y como cierre daría un problema en el que se utilicen ambos conceptos (diferencia, razón).

D7. Para explicar el término diferencia a mis alumnos de nivel medio recurriría a una situación problemática donde el alumno reconozca la operación resta. También recurriría a diferencia entre conjuntos. Para explicar el término razón a mis alumnos de nivel medio recurriría a: Proporciones numéricas, Sucesiones Aritméticas y Sucesiones geométricas.

Reflexiones

Los resultados obtenidos nos muestran que, además de aparecer concepciones no aceptables o erróneas, las concepciones de los docentes y las maneras con que los mismos enseñarían los conceptos a sus alumnos no están necesariamente relacionadas a nociones variacionales.

Consideramos que las causas de esta problemática están relacionadas con su propio proceso de formación, que no ha tenido en cuenta la importancia de presentar situaciones de variación, tanto cotidianas como provenientes de la matemática, de manera de beneficiar el desarrollo del pensamiento variacional.

La lectura de las diferentes producciones de los alumnos del curso (docentes de nivel medio, terciario y universitarios) nos movilizaron a reflexionar. Nos planteamos preguntas ¿cómo se construye cada noción?, ¿qué procesos favorecen su construcción?, ¿qué actividades son apropiadas para desarrollar esta noción?

Los dos foros de discusión fueron de gran importancia como preparación para el abordaje de los diferentes temas dado que nos proporcionaron información acerca de las concepciones sobre determinados contenidos matemáticos que se desarrollarían con posterioridad en el curso (limite, derivada, comportamiento de funciones). La idea fue, a partir de las participaciones de los docentes, orientar nuestra propuesta a un significado común de los diferentes conceptos.

Referencias bibliográficas

Ávila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Cantoral, R.; Farfán, R; Cordero F.; Alanís, J.; Rodríguez R. y Garza A. (2003) *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F, México: Trillas.

Cantoral (2004). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.),* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.*

García, L., Azcarate, C., Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(1),* 85-114.

Montiel, G. (2002). *Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE PROFESORES EN FORMACIÓN: UN CURSO-TALLER

Marleny Hernández Escobar, Simón Mochón
CINVESTAV-IPN. México
marlenylesly@hotmail.com

Resumen. La formación inicial del profesor de secundaria en el ámbito específico de la educación matemática sigue siendo una asignatura pendiente de nuestro sistema educativo. La reflexión sobre las características del conocimiento profesional deseable para estos profesionales y sus fuentes de información básicas sobre las que es necesario estructurar su formación inicial es actualmente un tema de especial interés.

La presente es una investigación de carácter cualitativo con enseñanza, la cual indaga el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que posee un grupo de futuros profesores y las posibilidades de mejorar dicho conocimiento a través de la reflexión mediante un taller de apoyo educativo.

Palabras clave: conocimiento para enseñanza, futuros profesores.

Abstract The pre-service training of the secondary teacher in the specific area of the mathematical education continues being a subject pending of our educational system. The reflection on the characteristics of the desirable professional knowledge for these professionals and its sources of information on those which is necessary to structure your pre-service training is currently a topic of special interest.

The present is a qualitative research with education, which investigates the Mathematical Knowledge for Teaching that a group of future teachers possesses and the possibilities of improving this knowledge through the reflection by means of an educational support workshop

Key words: knowledge for teaching, future teachers.

Introducción

En la literatura se ha identificado un conocimiento especial del profesor, el cual es una mezcla de contenido matemático y pedagogía, que se ha denominado "Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME)". El objetivo de esta investigación es averiguar el CME que los profesores en formación poseen y mejorarlo a través de un curso-taller sobre contenidos elementales del currículo de matemáticas para la educación secundaria por medio de la lectura, análisis de artículos y la reflexión de hojas de trabajo. Se definen y exploran tres facetas sobresalientes del CME: conocimiento matemático especializado, conocimiento para la instrucción y conocimiento de estudiantes.

Por lo tanto se busca indagar:

- ¿Cuál es el CME que poseen los profesores en formación?
- ¿Qué avances podría producir en el CME de los docentes en formación un curso-taller centrado en el análisis y reflexión de conceptos?

Marco teórico

El objetivo de esta investigación es averiguar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) que los profesores en formación poseen y mejorarlo a través de un curso-taller sobre contenidos elementales del currículo de matemáticas para la educación secundaria por medio de la lectura, análisis de artículos y la reflexión de hojas de trabajo.

Ball (2000) advierte que en la formación de maestros y en la conceptualización del conocimiento para la enseñanza ha prevalecido una división entre la asignatura y la pedagogía, esto ocasiona una fragmentación en la formación del maestro y sugiere que es necesario determinar qué es lo que necesitan saber los maestros, cómo deben saberlo, y cómo ayudarlos en este aprendizaje.

Debido a esto, es necesario pensar e investigar sobre las características de la formación del profesor, poniendo énfasis en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME), indagando las posibilidades de mejorar este conocimiento por medio de un análisis de contenidos elementales.

Este CME consiste de tres partes. El docente requiere de un conocimiento extra denominado Conocimiento Matemático Especializado, que tiene que ver con la comprensión profunda de las ideas, conceptos matemáticos y el porqué de cada paso en un procedimiento. También requiere de un Conocimiento para la Instrucción (fusión de matemáticas y pedagogía) para el diseño y planeación del trabajo en el aula. Además, el profesor requiere de un Conocimiento de Estudiantes para estar en posibilidad de explicar y deducir cuáles son los conceptos básicos que sus estudiantes necesitan.

Por otro lado, se ha observado la necesidad de una relación apropiada entre teoría y práctica con respecto a la preparación de los maestros. Dewey (1983) considera que los buenos maestros son capaces de crear una actividad intelectual genuina, por su parte Baturo (2004) plantea que no todos los maestros poseen los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar adecuadamente.

Las dificultades de esta formación son enormes porque, además de formar profesionalmente es necesario compensar una formación matemática. Grossman, et al. (2005) consideran que los profesores que comprenden el mapa más amplio, que entienden la relación de tópicos o habilidades individuales con tópicos más generales bien pueden ser más efectivos en la enseñanza.

También se tiene un marco referencial de cada uno de los temas matemáticos tratados en el curso-taller. Entre otros, para fracciones se consideraron a Kieren (1983) y Baturo (2004);

para decimales a Centeno (1988); para cálculo mental y estimación a Mochón (1995) y para álgebra a Matz (1980), Trigueros y Ursini (2000).

Metodología

Esta investigación de carácter cualitativo con intervención, busca observar y relacionar las actividades, enfatizando tanto en los resultados como en los procesos.

La selección de la población no se da de manera aleatoria, ya que atiende a necesidades propias de la investigación. Esta investigación se llevó a cabo en la Escuela Normal Superior de México con 21 profesores en formación de la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas.

La recolección de datos se realiza a través de una gran variedad de instrumentos como: observaciones de clase, hojas de trabajo, cuestionarios y grabaciones de audio; el análisis se lleva a través de la síntesis e integración de la información recabada.

El curso-taller se llevó a cabo durante un semestre y estuvo integrado por 14 sesiones de hora y media cada una. Los temas abordados correspondieron a elementos matemáticos que forman parte del CME y fueron los siguientes:

a) *Fracciones y decimales.*

b) *Cálculo mental y estimación.*

c) *Álgebra. (Errores algebraicos, funciones y el uso del modelo 3UV)*

Las seis primeras sesiones sobre fracciones y decimales están organizadas de la siguiente manera:

En la primera sesión la aplicación del cuestionario inicial el cual tiene como finalidad conocer algunos elementos del CME que tienen los futuros docentes; así mismo en esta sesión se revisan y analizan conceptos sobre partición, conjuntos continuos, conjuntos discretos y sus representaciones gráficas.

En la segunda se realiza la lectura y el análisis del artículo Facultando a Andrea a ayudar a estudiantes de 5 grado a construir entendimiento de la fracción, (Baturo2004) además de revisar y comentar las respuestas del apéndice de la lectura.

En la tercera sesión se explora el concepto de fracción y sus interpretaciones, además del análisis de la lectura Tópico matemático #3: Fracciones Parte 1 y 2; se reconocen y revisan los subconstructos de la fracción como pate-todo, medida, cociente, operador y razón.

La cuarta sesión se lleva a cabo mediante la resolución, análisis y discusión grupal de algunos ejemplos tomados del artículo: La construcción del conocimiento matemático: El profesor de matemáticas como arquitecto consultor. (Kieren 1983)

En la quinta sesión se explora sobre lo que conocen los docentes en formación relativo a la manera de pensar, las estrategias, dificultades, las ideas erróneas y los conceptos equivocados de los alumnos de secundaria sobre números decimales, esto se lleva mediante una discusión grupal basada en el intercambio de escritos donde estas ideas están registradas, además se analiza de forma grupal la lectura Tópico matemático #3: Decimales.

En la sexta sesión se analizan y discuten escritos, en los cuales los futuros docentes dan respuesta a tres preguntas sobre fracciones y decimales, con el propósito de indagar el conocimiento que tienen sobre ideas erróneas y conceptos equivocados de sus alumnos, averiguando las explicaciones acerca de las causas que los generan; se aplica el cuestionario final sobre fracciones y decimales el cual tiene como propósito identificar avances perceptibles en el CME.

Las siguientes cuatro sesiones retoman tópicos sobre cálculo mental y estimación; su organización es la siguiente:

En la sesión siete el trabajo se lleva a cabo mediante escritos que los docentes en formación elaboran de manera individual en los que se dan respuesta a tres preguntas sobre cálculo mental, haciendo un análisis de la información obtenida.

La sesión ocho inicia con el análisis de los resultados de una hoja de trabajo, (10 ejercicios sobre sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) a través de una discusión grupal con base en la primer parte del documento Tópico matemático #1: Cálculo Mental y Estimación referente a lo que se entiende generalmente por cálculo mental y los hechos básicos de este tópico.

En la sesión nueve se analizan las ideas que los docentes en formación poseen sobre lo que es estimar, además de la discusión grupal de la segunda parte de la lectura Tópico matemático #1: Cálculo mental y Estimación.

En la sesión diez se estudiaron las soluciones de 5 reactivos relativos a la estimación, para indagar el conocimiento matemático especializado que los futuros docentes tienen y averiguar el conocimiento de sus estudiantes; (infiriendo y deduciendo lo que piensan los alumnos y sus confusiones).

En las siguientes cuatro sesiones se revisaron temas referentes a álgebra; las sesiones se organizadas de la siguiente forma:

En las sesiones once y doce se resuelven 32 ejercicios referentes a problemas de álgebra y se analizan los ítems que presentaban algún error con similitud a la clasificación propuesta por Matz (1982) de acuerdo a dos técnicas de extrapolación, que son: linealidad y generalización.

En la sesión trece se analizan algunos tópicos sobre funciones exponenciales, oscilatorias, lineales (lineales por pedazos), cuadráticas y polinomiales. El propósito es rescatar elementos importantes del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) de los futuros docentes.

En la última sesión (catorce) se aplicaron, cinco reactivos relacionados con el concepto de variable, las soluciones se clasificaron de acuerdo al modelo 3UV propuesto por Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005).

Para la toma de datos se consideran diferentes fuentes de información con el propósito de obtener mayores elementos dados los objetivos de la investigación.

a) Hojas de trabajo

Son hojas en la que los participantes realizan representaciones gráficas y simbólicas, dentro de algunas sesiones; todas esas hojas son recolectadas al final de cada sesión.

b) Gr*abaciones* de audio

Se recurre a dispositivos de grabación de audio para las actividades grupales. Esto con la intención de rescatar las ideas mencionadas para ser complementadas con la información arrojada por las hojas de trabajo.

c) Observación de clases

La intención es explorar en un espacio natural (el aula) el conocimiento de los futuros docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje para realizar el registro detallado de lo observado con apoyo del audio y de las hojas de trabajo.

Posteriormente se realiza el análisis de cada sesión conforme a las facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME):

- Conocimiento Matemático Especializado.
- Conocimiento para la instrucción.
- Conocimiento de estudiantes.

Resultados

Cuestionarios

Inicial, observamos que:

- ✓ Están habituados a la aplicación de técnicas de cálculo más que a la evaluación semántica de las expresiones.
- ✓ Se trasladan al dominio de lo simbólico y procedimientos numéricos (divisiones, porcentajes, productos cruzados, entre otros) sin usar ilustraciones o una representación gráfica adecuada.
- ✓ No conocen las cantidades discretas.
- ✓ Usan la misma estrategia partitiva para plantear de manera correcta un problema.
- ✓ La mayoría utilizan operaciones o dibujos sin llegar a dar explicaciones de lo que hacen.
- ✓ Están acostumbrados al uso de algoritmos sin un análisis de estos.

Final, observamos que:

- ✓ Pueden dotar de significado las expresiones logrando el uso de varias formas de representaciones gráficas.
- ✓ Muestran ilustraciones en conjuntos continuos y discretos, apoyados de una forma simbólica, dejando de lado la aplicación de reglas.
- ✓ Vinculan su conocimiento al tipo de tareas para la instrucción y la actividad que se realiza con ellas.
- ✓ Usan diferentes respuestas de lo que los estudiantes erróneamente podrían contestar.

Sesión 1.

De acuerdo con sus respuestas, el conocimiento matemático para la enseñanza de los docentes en formación se relacionó con el tipo de conocimientos matemáticos (profundos o superficiales) adquiridos a través de su preparación académica.

Sesión 2

Desde una perspectiva epistemológica, didáctica y cognitiva, existió una mejora del conocimiento estructural, de las grandes ideas matemáticas, y de los procesos genéricos de enseñanza (con ejemplos no prototípicos).

Sesión 3

Fueron muchos los elementos que el profesor en formación necesitó tener y dominar para llevar a cabo su práctica docente de manera adecuada. Independientemente de la cantidad de elementos que poseía, fue indispensable reflexionar acerca de ello, para determinar en dónde estaba y hacia dónde quería encaminar sus esfuerzos, de esta manera hubo cambios importantes en la forma de ver, entender y llevar a cabo su enseñanza.

Sesión 4

En los futuros docentes el conocimiento matemático especializado fue importante ya que relacionó su proceso de enseñanza, con las formas más útiles de representar y comunicar un contenido y del cómo aprender mejor conceptos específicos de un tema.

Los procesos del pensamiento, la imagen y una gradual transición desde un objeto ligado hacia el lenguaje matemático fue útil para modificar varios conceptos erróneos.

Sesión 5

En esta sesión del taller (después de haber discutido el tema de decimales en clase) se observó que los docentes en formación: Lograron describir algo más de lo que sus estudiantes conocían, algunas de sus dificultades y varias de sus concepciones erróneas.

Utilizaron los errores de sus estudiantes para elegir representaciones e ilustraciones apropiadas (ya no sólo de forma simbólica), con base en los artículos analizados y recurrieron a estrategias que exhibían nociones sobre los números decimales; explicando y analizando la manera de pensar y las dificultades con que se encontraba el educando para deducir lo que entendía.

Sesión 6

En esta sesión observamos un avance, porque consiguieron organizar y desglosar de forma coherente y adaptable sus ideas y procedimientos matemáticos, usando conexiones entre sus nociones, recurriendo a su comprensión como medio para representar y comunicar conceptos fundamentales, lo que implicó una reconstrucción, adaptación y reorganización de los contenidos que utilizaban.

Sesión 7

Notamos concepciones erróneas de las matemáticas en los docentes en formación que transfieren al cálculo mental (repetición de ejercicios o acertar más en los resultados), desconocían el proceso de las estrategias para realizar un cálculo pensado y no lograran usar formas de representación útiles, analogías, ilustraciones, ejemplos o explicaciones para estas ideas.

Sesión 8

Observamos que al finalizar las actividades el conocimiento de contenido que poseían los docentes en formación se modificó, a través del análisis de sus resultados y la discusión grupal de sus ideas con base en el artículo propuesto para esta sesión.

Los procesos utilizados para la resolución de ejercicios pasaron del uso del algoritmo en la mayoría de los docentes en formación a mostrar una variedad de estrategias de análisis en sus procesos, además de saber cómo utilizarlas y cómo eran nombradas para un mismo ejercicio sin caer en el uso de reglas conocidas.

Sesión 9

Notamos que comprendieron y analizaron las ideas matemáticas con mayor profundidad sobre estos temas, razonando sus componentes para estar en posibilidad de explicarlos, deduciendo cuales son los conceptos básicos para desarrollar el conocimiento de sus estudiantes de una forma más conceptual.

Sesión 10

Referente al conocimiento matemático especializado observamos una mejora, porque consiguieron organizar y desglosar de forma coherente y adaptable algunas ideas y procedimientos sobre los contenidos de cálculo mental y estimación, usando conexiones entre los distintos procesos cognitivos desarrollados para hacer un cálculo pensado.

Sesión 11 y 12

El análisis de esta sesión estuvo basado en el conocimiento matemático especializado de los docentes en formación, conociendo y clasificando a profundidad algunos de los errores algebraicos fundamentales, desglosando las ideas que presentaron en sus procedimientos matemáticos para conocer su manera de pensar, sus estrategias y las dificultades a las que se enfrentaban, deduciendo e infiriendo lo que entendían para analizar sus soluciones y los métodos utilizados.

Sesión 13

Observamos que es valiosa una exploración colectiva que admita el análisis de comentarios o dudas que se expresen durante una sesión sobre este tipos de funciones, ya que algunas no se dan en secundaria porque en cuestión de fórmulas son más complejas (exponenciales y oscilatorias).

Sesión 14

Observamos que las dificultades no fueron de naturaleza cognitiva sino tuvo que ver en la manera de como se trataron los usos de la variable ya que las características que los hacen distintos no se hacen explicitas (sin darse cuenta de que es un concepto multifacético).

Vimos que la mala conceptualización de la variable obstaculizó su proceso de solución ya que fue necesario adquirir la capacidad de interpretar, simbolizar y manipular las variables a través de los distintos reactivos que se propusieron para esta sesión.

Conclusiones

- Se observó que a través de situaciones problemáticas que ponían en evidencia los errores adquiridos en experiencias previas, los estudiantes a profesor obtenían nuevos conocimientos sobre las relaciones y conexiones, acerca de los conceptos y procedimientos que utilizaban.
- Reflexionaron sobre nuevos conocimientos y la forma en que los conseguían a través de articulaciones con tareas que integraban y transformaban el conocimiento de manera coherente y sistemática como una práctica que era comprendida.
- Hicieron uso de una gama más extensa de representaciones graficas apropiadas, para comunicar de manera eficaz nociones matemáticas, justificando su uso y desarrollando formas de generar un proceso de aprendizaje apoyado en ver, interpretar y diseñar perspectivas de acción vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Process Psychology of Mathematics Education*, 28 (2), 95-102.

Centeno, J. (1988). *Números decimales.* Madrid - Síntesis.

Dewey, J. (1983). The child and the curriculum. En J.A. Boydston, y J. Dewey (Eds.), *The middle works.* Carbondale, IL: Southern Illinois University.

Grossman, L., Wilson, M. y Shulman L. S. (2005). Teachers of Substance: Subject Matter Knowledge for Teaching. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-21.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. In W. Zwang (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education.* (pp. 506-508). Boston, USA: Birkhauser.

Matz, M. (1982) Towards a Computational Theory of Competence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 3 (1), 93 – 165.

Mochón, S. y Vázquez, J. (1995) Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*, 7 (3), 93-105.

Trigueros, M y Ursini, S. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*, 12 (2) 27-48.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa.* México - Trillas.

MODOS DE ACCIÓN Y DECISIONES DE LOS DOCENTES. UN EJEMPLO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Alicia Iturbe, Maria Elena Ruiz
Universidad Nacional del Comahue. Universidad Nacional de Río Negro. Instituto de Formación Docente Argentina
aliciaitu@gmail.com, ruiz.melena@gmail.com

Resumen. Este artículo presenta un estudio sobre la enseñanza de la proporcionalidad con docentes de nivel medio, con el objeto de contribuir al análisis y a la comprensión de la práctica docente, tanto en lo referente a producir el aprendizaje de sus alumnos como en lo que se refiere a las características que adquiere su trabajo profesional. Trabajaremos sobre las características del proceso de elaboración del proyecto de enseñanza que dichos docentes realizan de la proporcionalidad, su puesta en práctica y su análisis posterior. Dicho proyecto de enseñanza es producido en el contexto de una capacitación que llevamos a cabo con una metodología de investigación sobre la práctica y aportes teóricos de la didáctica de la matemática. Durante el desarrollo de un curso-taller surgieron diferentes situaciones a ser analizadas. En esta oportunidad presentamos y analizamos las decisiones de dos profesores que elaboraron conjuntamente su proyecto de enseñanza de la proporcionalidad

Palabras clave: proporcionalidad, formación docente, prácticas de enseñanza .

Abstract .- This paper shows a study about how secondary teachers work with proportionality. We pretend to make contributions to the analysis and understanding of teacher's practice, both in terms of producing learning in their students as the characteristics of their professional work. We will work about the features of the elaboration process of teaching project of proportionality that teachers makes, the teacher's practice and their subsequent analysis. That teaching project is elaborated during a teacher's training course, which we conducted with a research-on-practice methodology and theoretical contributions of mathematical didactics. Several situations happened during this training course and they must be analyzed. In this opportunity we analyzed the decision of two teachers who worked together in their teaching project of proportionality.

Key words: proportionality, teacher training, teaching practices

Introducción

Las investigaciones en Didáctica de la Matemática han tenido un desarrollo importante en los últimos 30 años, lo que permitió hacer progresar los conocimientos relativos a los procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática. En un comienzo el foco estaba más centrado en el alumno que en el docente, pero más adelante numerosas investigaciones pusieron el acento en los docentes, como las de Thompson (1992) que refieren a las concepciones de los docentes, otras que aluden a sus modos de acción y decisión, como las de Margolinas & Perrin (1997), o a sus conocimientos, como el caso de las investigaciones de Elbaz (1993) o Steffe (1990) o a sus prácticas como las de Roditi (2001) o Robert (2001) entre otras. Recientemente, varias investigaciones manifiestan preocupación por la utilización de los resultados de las investigaciones en didáctica y su incidencia sobre las prácticas docentes. En este sentido señalan, por ejemplo, el caso de algunas ingenierías didácticas que a pesar de "su gran robustez", no son adoptadas, en general, por los docentes (Robert, 2005).

Estas investigaciones constituyen antecedentes que dan un marco referencial a nuestro trabajo y a la problemática que nos ocupa en esta oportunidad: analizar y comprender las decisiones que toman los docentes al elaborar y poner en práctica un proyecto de enseñanza producido en el marco de una capacitación en didáctica de la matemática.

Presentamos un estudio sobre la enseñanza de la proporcionalidad con docentes de nivel medio. Este estudio rescata trabajos que hemos realizado anteriormente en formación inicial y continua de docentes y en investigaciones alrededor de esta temática (Ruiz, 2005).

Nuestro objetivo es comprender el funcionamiento de la tarea de enseñanza en un sentido amplio, las decisiones que toman los docentes en sus clases y fuera de ellas y aquello que gobiernan estas decisiones. Pretendemos, contribuir al análisis y a la comprensión de la práctica docente tanto en lo que se refiere al aprendizaje de sus alumnos como en lo que se refiere a las características que adquiere su trabajo profesional.

Dos ámbitos de estudio enmarcan este trabajo

Este trabajo se caracteriza porque surge de la interrelación entre el desarrollo de un proyecto de investigación y el de una instancia de formación continua. En el cuadro que se presenta a continuación se describen y comparan ambos proyectos:

Proyecto de investigación	**Proyecto de Formación Docente continua**
Indagamos sobre: - la relación de los docentes de Matemática o futuros docentes de nivel primario y medio, con el saber matemático, dentro de las instituciones educativas; - algunos condicionamientos y su repercusión en la toma de decisiones (de los docentes) que promueven diferentes dominios de experiencias.	**Estudiamos** la enseñanza de la Proporcionalidad. **Nos ocupamos** del proceso de elaboración del proyecto de enseñanza de la Proporcionalidad que los docentes realizan, su puesta en práctica y el análisis posterior.
Metodología: Enfoque cualitativo de investigación Instrumentos de recolección de datos: -Observaciones de diferentes momentos del Curso-Taller, realizadas a través de registros escritos, grabaciones y/o filmaciones. -Entrevistas semiestructuradas.	**Metodología:** -Aula taller, donde se analizan situaciones didácticas surgidas de investigaciones en Didáctica de la Matemática. -Encuentros grupales (capacitador con docente/alumno) durante el proceso de planificación del proyecto de clase. -Puesta en obra (por parte del docente/alumno) de dicho proyecto. -Socialización del análisis de sus prácticas.

La metodología con que estos proyectos se llevan adelante asume características propias, nos referimos a enfoques cualitativos para el caso del proceso de investigación y para el caso del proceso de formación docente continua, a metodologías de investigación sobre la práctica, en ambos casos se toman diferentes aportes teóricos de la didáctica de la matemática. Desde las dos dimensiones consideramos al docente como un profesional capaz de reflexionar sobre su práctica y que trabaja en ambientes complejos y cambiantes a los que debe adaptarse constantemente. En este sentido coincidimos con Artigue (2004), cuando afirma que esta concepción "nos brinda un acceso más realista al trabajo del docente, influye sobre nuestra percepción de la relación entre teoría y práctica, y de la formación" (Artigue, 2004, p. 15). Más adelante plantea que "Las formaciones que se apoyan en estos trabajos se tornan más respetuosas de la realidad de las prácticas, de sus modos de elaboración y evolución, de las restricciones diversas del oficio del docente." (Artigue, 2004, p. 15).

En relación a la temática propuesta para el curso-taller, consideramos que para lograr cambios sustanciales en la enseñanza es necesario posibilitar a los docentes la realización de un análisis profundo de la estructura que subyace en los diferentes problemas de proporcionalidad, del dominio numérico que interviene, de los posibles procedimientos de resolución, del papel que juegan las diferentes representaciones de este concepto así como de la red de conceptos que engloba la proporcionalidad. Dicho curso se desarrolló en ocho encuentros, con un corte de un mes y medio para que los docentes implementen su proyecto de enseñanza en el aula con sus alumnos.

Es decir, se realizaron:

-Aula taller, donde se analizaron situaciones didácticas para la enseñanza, categorización, elementos, alcances, organización por ciclo y año, también se analizaron situaciones didácticas surgidas de investigaciones en Didáctica de la Matemática; se estudiaron contenidos teóricos didáctico matemáticos que abordan esta temática tales como elección, organización, secuenciación, ubicación en los documentos curriculares, objetivos de su enseñanza, etc., así como también definición de proporcionalidad, propiedades, distintos tipos de representaciones, conceptos asociados, conceptos subordinados, conceptos derivados, etc.

- Encuentros grupales (formador con docente/alumno, no más de tres) durante el proceso de planificación del proyecto de clase.
- Puesta en obra (por parte del docente/alumno) de dicho proyecto. Algunas de las clases impartidas por el docente/alumno fueron observadas y grabadas o filmadas.
- Socialización y análisis colectivo de sus prácticas.

Descripción y análisis de un episodio

Durante el desarrollo del curso-taller surgieron diferentes situaciones a ser analizadas. En esta oportunidad presentamos una de ellas. Se trata de dos profesores que elaboran conjuntamente su proyecto de clase para llevar a cabo en una escuela de nivel medio para adultos (19 a 25 años).

El diseño elaborado por estos dos profesores incorporó cuestiones trabajadas en el curso-taller, propuso iniciar el tema de proporcionalidad a partir del planteo de una situación problemática. En el momento de la implementación en el aula con sus alumnos, consideraron que, como la presentación del tema (proporcionalidad) era diferente a la forma de trabajo que comúnmente llevaban a cabo, sería conveniente intercambiarse los cursos, el profesor del curso A da clases en el curso B y el del B en el A. Un día a la semana los horarios coincidían en los dos cursos, por lo que resuelven que ese día se intercambian. Su explicación era que, en particular en estos cursos con alumnos adultos, siempre inician el tema con la explicación en el pizarrón del contenido para luego dar ejercicios o problemas de aplicación, nunca inician con un problema. En palabras de ellos *"esto es así, se resuelve así y después les damos ejercicios de aplicación"*[1]. A seguir uno de ellos plantea *"¿cómo me paro yo frente al curso a esta altura del año y les presento un problema?,* (era el mes de octubre y el año escolar finaliza a principios de diciembre), (…) *ellos ya tenían un ritmo, ¿cómo les explico por qué ahora cambio?. Si es otro el profesor que les da, ellos no saben cómo trabaja ese profesor"*. Esta situación hace que decidan intercambiarse los cursos pues ellos consideraron que la variación de estrategia didáctica podría generar conflicto en el aula, Así, los docentes plantean, que la mudanza que los alumnos notarían, estaría dado por el cambio de profesor y no por el de modalidad de trabajo.

Esto nos llevó a preguntarnos:

¿Por qué los docentes se preocupan para que los alumnos no perciban el cambio?

¿Por qué creen que los alumnos tomarán en forma negativa ese cambio de metodología en la enseñanza?

¿Por qué consideran menos conflictivo, para los alumnos, el cambio de profesor con otra metodología, que solo el cambio de metodología?

Para intentar dar respuesta a estas preguntas, podemos hacer uso de algunos conceptos teóricos que nos ofrece la didáctica de la matemática.

Como dijimos anteriormente, en los últimos años numerosas investigaciones han centrado su atención en el docente. Una de ellas es la construcción teórica del "doble enfoque" desarrollada por Robert y Rogalsky (2002), la que hace referencia a la convergencia de dos campos, el de la ergonomía cognitiva que analiza los procesos cognitivos en situación de trabajo y el de la didáctica de la matemática. Con este enfoque se pretende contribuir al análisis y comprensión de las prácticas de los docentes, que se realizan según tres dimensiones: la que se vincula con los contenidos trabajados en clase y la distribución de actividades, la que hace referencia a las formas de trabajo de los alumnos y por último, la vinculada a la interacción con el docente. Según estos análisis las prácticas docentes se pueden ver desde una dimensión "cognitiva" y otra de "mediación". Además estos autores explicitan el "margen de maniobra" que usan los docentes cuando plantean que para precisar el margen que realmente emplean en sus clases, se pueden considerar dos dimensiones:

- una "social", relativa a las restricciones institucionales y sociales que pesan sobre las prácticas docentes y

- una "personal", ligada a las concepciones del profesor en cuanto al saber y a su oficio, su tolerancia en materias de correr riesgos, su necesidad de confort…

En relación a las restricciones institucionales, Robert (2003) plantea que en la clase juegan numerosos condicionamientos sociales que restringen la libertad del docente. Ella expresa: "los alumnos, en principio están a la espera y tienen hábitos. El docente está ahí para enseñar (mostrar), los alumnos están ahí, al menos, para escuchar y para aplicar – no para investigar" (traducción libre del francés, p.107).

Como vemos las elecciones que realizan los docentes no se deben solo a necesidades de aprendizaje de sus alumnos. Sus prácticas responden a diferentes restricciones como son: los hábitos, otros colegas, los alumnos, los padres, la administración (dimensión social), sus concepciones, sus valores personales, sus experiencias, sus conocimientos (dimensión personal). También sus elecciones tienen que ver con los riesgos que están dispuestos a correr o que pueden tolerar. Estos docentes plantearon que si presentaban un tema de un modo diferente a cómo venían trabajando hasta ahora, podría generar indisciplina o conflicto en el aula.

Sin embargo, cuando se realiza en el aula-taller, el análisis del proyecto de clase, plantearon que este intercambio de cursos produjo fenómenos no anticipados como por ejemplo que los alumnos trabajaron mejor y con "*más entusiasmo*", según sus propias palabras: "*el cambio de docentes en este caso, favoreció la presentación del tema, permitiendo un clima de trabajo más ameno y más activo en cuanto a lo que trabajo se refiere".* Además la vice-directora decide ir a observar las clases (papel de la gestión directiva) y propone implementar el cambio en los cursos con otros profesores, lo cual muestra la apertura de la gestión directiva ante innovaciones propuestas por sus docentes.

Conclusiones

En este trabajo en particular hemos observado que los docentes vivencian y sienten como un problema, el supuesto que el cambio de metodología va a producir rechazo por parte de los alumnos y esto podría tener consecuencias sobre sus acciones al llevar innovaciones al aula. Las acciones están asociadas a sus supuestos, a las características de la institución en la que se producen (escuela de nivel medio para adultos). En general cuando los docentes producen esas acciones se encuentran solos, y sin posibilidades de reflexionar sobre los eventuales efectos de las mismas. Esto no fue el caso de estos docentes que participantes del curso-taller y que al finalizar la puesta en obra de su proyecto de clase, continuaron con otros encuentros con el objetivo de analizar lo sucedido en el aula.

En la región donde realizamos este trabajo y en general en nuestro país, gracias a los documentos curriculares que se vienen elaborando hace unos diez o quince años, los docentes tienen contacto con producciones de investigaciones y de divulgaciones de la didáctica de la matemática. Si bien, en general, acuerdan con los marcos teóricos trabajados, se observa que difícilmente esto redunde en un cambio de prácticas en sus aulas, es decir esto no se ve traducido en las prácticas de los docentes, y, como dijimos anteriormente hay trabajos de investigaciones que abordan esta problemática (Robert, 2005).

En general las prácticas de enseñanza en el aula se limitan a presentar los temas y dar ejercicios de aplicación. Sabemos que hay la resistencia a producir cambios en la forma de presentar los contenidos. Sabemos que el docente juega un papel central en el sistema educativo, pero como plantea Artigue (2004) "considerar al docente como un elemento clave del sistema no es suficiente si ese docente no es problematizado como verdadero actor" (Artigue, 2004, p.25). De aquí la necesidad de comprender sus prácticas, las decisiones que toma dentro o fuera del aula, las restricciones a las que está sujeto y sus márgenes de maniobra, los conocimientos disciplinarios y otros que hacen su competencia profesional así como al modo en que se construyen.

La actualización docente constituye una preocupación, las instancias de formación continua están planteadas, los docentes están dispuestos a innovar sus prácticas, evidentemente hay otras cosas que influyen en cómo se traduce esto en las prácticas efectivas de los docentes, y esto es necesario estudiar. Nos preguntamos ¿qué trabajo hacer en la formación continua?

¿Qué modelo privilegiar?

Robert & Pouyanne (2005) plantean por un lado la formación en "la práctica" solamente, no es bueno pues genera reproducciones, "hay cosas importantes que no se ven cuando se permanece en clase, incluso con los "buenos profesores". Por otro lado plantean que la transmisión "directa" de las investigaciones en didáctica a los docentes, no se hace de manera adecuada. Varias investigaciones han mostrado, como lo dijimos anteriormente, que en algunos temas específicos, como con los decimales, a pesar de la robustez de la ingeniería concebida por los investigadores, no es adoptada por la mayoría de los docentes del nivel medio.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática: ¿qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? *Revista Educación Matemática*, *16(003),* 5-28.

Elbaz, F. (1993). La recherche sur le savoir des enseignants: l´enseignante experte et l´enseignante 'ordinaire'. En G. Clermont, M. Melloudi y M. Tardiff (com), *Le Savoir des enseignants. Que savent-ils?* (pp.101-114). Canadá: Les Éditions LOGIQUES.

Margolinas, C. & Perrin-Glorian, M. J. (1997). Des Recherches visant à modéliser le rôle de l`enseignant. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 17*(3), 7-15.

Robert, A. & Pouyanne (2005). Formar formadores de maestros de matemática de educación media: ¿Por qué y cómo? *Revista Educación Matemática*, *17(002)*, 35-58.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies 2(4)*, 505-528.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du l`exercice su métier du enseignant. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 21(1-2),* 57-80.

Robert, A. (2003). De l`idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). *Didaskalia 22*, 99-116.

Roditi, E. (2001). *L`enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.* Tesis de doctorado, Universidad Paris VII. Francia.

Ruiz, M. E. (2005). *La proporcionalidad y su enseñanza: Un estudio con docentes de matemática*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina.

Steffe, L. (1990). On the knowledge of mathematics teachers in Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics Monograph n°4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 167-184.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.127-146). New York: Macmillan.

UNA PERSPECTIVA DE FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Elizabeth del Socorro Marín Arceo, Martha Imelda Jarero Kumul
Universidad Autónoma de Yucatán. México
eliza_8877@hotmail.com, jarerok@uady.mx

Resumen. En este trabajo se muestra una perspectiva de formación de profesores de acuerdo a los resultado obtenidos respecto a sus concepciones acerca de la ciencia y su enseñanza de acuerdo a cinco modelos didácticos: transmisor, tecnológico, artesano, descubridor y constructor; asimismo se hace referencia a variables que podrían influir en dichas concepciones. Se consideran importantes las concepciones del profesor ya que éste es pieza fundamental en la puesta en escena del currículo y sus concepciones impactan en el aula. Actualmente es importante que el profesor de matemáticas relacione los contenidos de sus cursos con los contenidos de otros, situación que conlleva a considerar formar un profesor en áreas disciplinares, es decir, la formación del profesor de ciencia.

Palabras clave: enseñar ciencias, concepciones, modelo didáctico.

Abstract In this work we show our view of teacher training according to the results obtained about their conceptions about science and teaching according to five models: transmitter, technology, craftsmanship, discoverer and constructor; also referred to variables that could influence in these conceptions. We also consider important conceptions of the teacher because he is the cornerstone in the staging of the curriculum and their conceptions impact in the classroom. Actually it is important that the math teacher relates the content of their courses with the content of other, a situation that leads to consider becoming a teacher in subject areas that is the science teacher training.

Key words: teaching science, conceptions, teaching model.

Introducción

Problema de investigación

El académico de las instituciones educativas que se desenvuelve en México, es aquel que si bien ha recibido una formación en alguna área del conocimiento, rara vez ha sido formado para realizar la función docente a la que se enfrenta. En otras palabras, en esta actividad se encuentran personas que son profesionistas que enseñan y no profesionales de la enseñanza; lo que exige poner mucha atención en la formación docente de los profesores de las instituciones educativas si se desea verdaderamente cumplir con los retos que hoy se han establecido para la educación en México (Portilla, 2002).

No hay duda de que la formación de maestros en México, en este momento, se debate entre la tradición y la modernidad. Actualmente, se encuentran en ejercicios muchos maestros que han sido formados tradicionalmente en las Escuelas Normales que existen en todo el país. Así que cuando se le pide al maestro que sea un investigador y en la Escuela Normal no se le dan las herramientas para ello, el maestro termina por hacer lo que puede y como puede (Calvo, 1995; citado en Galván, 1997). De hecho, se afirma que la educación normal, que es la más importante está en crisis. Esto se debe a que se han reformado los programas de educación, se han replanteado sus objetivos, y sin embargo la educación y formación de los maestros no se ha tocado (Galván, 1997).

Al respecto, Balam (2007), considera que el problema de las reformas, obedece a la falta de una visión y planeación adecuada que sea acorde con los procesos de formación del profesorado. Por ejemplo, actualmente se considera importante que el profesor de matemáticas relacione los contenidos de sus cursos con los contenidos de otros cursos; situación que conlleva entonces empezar a considerar no formar un profesor por disciplinas sino en áreas disciplinares donde logre trabajar las matemáticas en diferentes contextos. Ante esto, es importante actuar y considerar la formación del profesor de ciencia, en la cual, como indica Acevedo (2004), no se mire a la ciencia escolar como una organización académica por disciplinas-matemáticas, física, química, biología- a la que se le atribuye una finalidad propedéutica al preparar a los estudiantes para cursos superiores; sino que la enseñanza de la ciencia se destine a promover una ciencia escolar más válida y útil para personas que tendrán que tomar decisiones respecto a cuestiones de la vida real relacionadas con la ciencia y la tecnología.

En los últimos años Latinoamérica ha sufrido un notable rezago científico-tecnológico, lo cual ha generado repercusiones económicas, sociales y culturales. Debido a esto, es necesario el impulso de la ciencia en la escuela, con lo cual se promueva en los estudiantes la toma de decisiones y el enfrentamiento a desafíos sociales. Por ello, una tarea de la política educativa es la integración de la ciencia, la tecnología y la sociedad. Así que un reto al que se enfrenta cada país es brindar una educación integral en la que se vincule a la docencia y a la sociedad, es decir, es importante considerar el papel que juega el profesor, ya que éste es pieza fundamental en la puesta en escena del currículo, pues se asume que sus concepciones acerca de la ciencia y su enseñanza impactan en el aula, de manera que éstas influyen en su práctica y por tanto en la implementación de un currículo. Respecto a las concepciones sobre la ciencia, numerosos autores (Pope y Gilbert, 1983; Gordon, 1984; Gil, 1991; Lederman, 1992; Kouladis y Ogborn, 1995, citados en Porlán, Rivero y Martín, 1998) insisten en que los profesores transmiten una imagen deformada del conocimiento y del trabajo científico.

Debido a lo expuesto anteriormente nos ha interesado trabajar con las concepciones de los profesores respecto a la ciencia y a su enseñanza, por tanto nos preguntamos, ¿cuáles son las concepciones que tienen los profesores de bachillerato acerca de la enseñanza de la ciencia y de la ciencia misma?, ¿qué aspectos determinan que los profesores posean ciertas concepciones acerca de la ciencia, su enseñanza y su aprendizaje?. De esta manera, nos planteamos como objetivo de esta investigación caracterizar las concepciones que profesores de bachillerato poseen sobre la enseñanza de la ciencia y de la ciencia misma.

Elementos teóricos

Según Ponte (1999), para tener alguna visión de la manera en que los maestros entienden y llevan a cabo su trabajo, uno necesita saber también sus concepciones y creencias. Sin embargo, estos términos son difíciles de definir y encontramos diversidad de explicaciones como producto del reciente interés que se tiene en torno a dichos aspectos en la investigación educativa de los últimos años.

> Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo. (Llinares, 1991 y Pajares, 1992, citados en Moreno y Azcárate, 2003 p. 267)

Por su parte, las concepciones pueden verse como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción, proporcionando puntos de vista del mundo y a modo de organizadores de conceptos. En otras palabras son vistas como marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas (Ponte 1992, 1994, citado en Ponte, 1999).

Asimismo, Contreras (1998), indica que es posible ver concepciones como conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en torno a los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje.

Como se ha referido, las concepciones del profesor juegan un papel importante en la puesta en escena del aula donde se involucran formas de entender el conocimiento, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación que pueden interpretarse a través de los llamados modelos didácticos. Para Fernández y Elórtegui (1996) "modelo" en didáctica refiere una muestra o estereotipo de posible alternativa de enseñanza-aprendizaje.

Son Fernández, Elórtegui, Rodríguez y Moreno (1997) quienes asumen que la caracterización de un modelo didáctico supone la selección y estudio de aspectos asociados al pensamiento del docente y a la práctica educativa, aunque consideran que éstos son muy variados y numerosos de modo que centran su atención en aquellos que consideran afectan más directamente a la teoría y la práctica docente. Tal es el caso de la imagen que tienen los profesores de la ciencia. Es así como Fernández et al (1997) presentan un abanico de cinco alternativas a las concepciones de lo que es la ciencia y la forma en que los científicos actúan y la desarrollan así como su enseñanza y aprendizaje; correspondientes a los modelos: transmisor, tecnológico, artesano, descubridor y constructor. Cada uno de dichos modelos considera la enseñanza de la ciencia de forma distinta y que describimos brevemente.

En el modelo transmisor, la ciencia es exacta, objetiva, neutral, perfecta en su concepción y por ello, el fracaso en su estudio es natural, ya que la ciencia es difícil y no está al alcance de todos los entendimientos. Según este modelo didáctico, para aprender ciencia, los alumnos deben estudiar los conocimientos acumulados a lo largo de la historia para, a partir de ahí, estar en condiciones de crear nuevos conocimientos si su inteligencia es lo suficientemente despierta para ello. Al enseñar ciencia, el profesor debe tener en cuenta que a medida que se avanza en las etapas escolares, aumenta la magnitud del cuerpo de conocimientos aceptados por la comunidad científica, tales como hechos, conceptos y leyes. La experiencia del profesor transmisor le muestra que no es posible presentar el cuerpo de conocimientos, ni siquiera de un dominio, si no es por estrategias didácticas de transmisión-recepción.

En el modelo tecnológico, el profesor considera que enseñar ciencia es organizar pausada y progresivamente los conocimientos de la ciencia. Un profesor tecnológico, tiene una visión de la ciencia que se caracteriza por considerarla neutra e imparcial, desideologizada y no sometida a intereses, por lo que el argumento de que "es científico", o son "datos científicos" debe desarmar a cualquiera. Esta concepción de la ciencia lleva a una forma de docencia coherente con ella, se apoya fuertemente en el método hipotético deductivo, del que se aprecia su potencia predictiva y si bien dialécticamente se da mucha importancia a la observación y al experimento, en la práctica docente quedan en un segundo plano. El desarrollo de la clase y su planificación deben ser cuidados al máximo, controlando todas las variables del aula para llegar a resultados óptimos: una situación perfectamente diseñada y controlada produce siempre los resultados apetecidos.

El modelo artesano, considera que el auténtico conocimiento está en la realidad y la ciencia ha de partir del estudio de ella. Por tanto, la ciencia se basa en la observación directa de la realidad, para inferir, a partir de ella los conceptos más relevantes. Considera que para que la enseñanza de las ciencias provoque un aprendizaje de importancia, ha de basarse en los intereses y motivaciones espontáneas de los alumnos y lo significativo es dominar los procedimientos, que permitan a los alumnos aprender por sí mismos cualquier conocimiento científico, así como aprender determinados valores y actitudes que potencien el espíritu científico, la crítica y la creatividad. Según este esquema de pensamiento, pretender enseñar ciencia es ir al fracaso, ya que los alumnos aprenden ciencia cuando ellos la planifican y realizan. El papel de los profesores es servir de apoyo. Por esto, las actividades de aprendizaje han de ser planificadas y realizadas por los alumnos. En la toma de decisiones en el aula, están a un mismo nivel alumno y profesor, por lo que para atender a los distintos ritmos individuales, a la espontaneidad del aprendizaje y la evolución personal, las actividades no pueden ser uniformes ni de estructura rígida.

En el modelo descubridor se considera a la ciencia intuitiva, genial, experimental y poco planificable. Se rechaza una enseñanza basada en la transmisión verbal de los contenidos disciplinares por parte del profesor y se sugiere modificarla por otra enseñanza basada en que el descubrimiento práctico de los conocimientos sea realizado por los propios alumnos, en la propia realidad del entorno, en el laboratorio o en talleres. La enseñanza debe basarse en un nuevo método que partiendo de las experiencias de laboratorio y de campo de los alumnos les lleve a la formación de conceptos teóricos, de manera que este método ha de promover la curiosidad y la actividad científica de los niños. Los alumnos sólo aprenden lo que quieren aprender, siendo ellos los que proponen en qué van a trabajar, por lo que el papel del profesor debe ser facilitarles las condiciones para que redescubran las leyes de la Naturaleza. El alumno es el protagonista del proceso real, es el investigador. Esta visión instrumental del aprendizaje y del papel de los alumnos en ella, tiene como consecuencia que se interpreten los intereses de los alumnos, por lo que el proceso de descubrimiento es muy dirigido y, como consecuencia, a veces se denomina "descubrimiento guiado".

En el modelo constructor, se considera a la ciencia altruista, creativa, crítica, cualitativa y divertida. Se considera que la enseñanza de las ciencias deberá basarse en la idea de construcción de conocimientos científicos entendidos de una forma global, es decir, en conceptos, procesos, disposición ante las ciencias y contexto social e histórico de las ciencias. Este planteamiento se deberá llevar a la práctica mediante un "aprendizaje significativo". Se manifiesta una necesidad de plantear el aprendizaje de las ciencias sobre propuestas de "cambio conceptual" como una "investigación de situaciones problemáticas de interés" para los alumnos. La resolución de los problemas planteados se aborda a partir de los conocimientos que se poseen y de las nuevas ideas que se construyen. Las ideas iniciales pueden permanecer, modificarse e incluso ser cuestionadas. Por tanto, es necesario resaltar que el cambio conceptual no constituye un objetivo explícito, sino que adquiere un carácter funcional porque se logra con la pequeña investigación escolar de dificultades, es decir, de situaciones problemáticas de interés.

Metodología

De acuerdo con los propósitos de nuestro trabajo, el estudio que realizamos se considera descriptivo transversal dado que se pretendía indagar acerca de las concepciones de profesores del área de ciencias exactas de nivel medio superior sobre la ciencia misma, su enseñanza y su aprendizaje, de modo que se pudiera interpretar y plantear una caracterización de éstas buscando aquellas variables que permiten explicar algunas regularidades.

Como instrumento para recolectar los datos recurrimos al cuestionario, el cual consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir. En esta investigación únicamente se consideraron preguntas cerradas, las cuales contienen categorías u opciones de respuesta que han sido previamente delimitadas. Es decir, se presentan a los participantes las posibilidades de respuesta, quienes deben acotarse a éstas.

En específico se diseñó un cuestionario con 10 preguntas cerradas con 5 opciones de respuesta, basándose en las características de los modelos propuestos por Fernández et al (1997), cada respuesta correspondía a un modelo para rescatar diferentes aspectos sobre los elementos que caracterizan los modelos didácticos propuestos, esto es sobre la historia de la ciencia, la filosofía de la ciencia y la ciencia escolar. Dichos elementos son interpretados para efectos de nuestro trabajo como las concepciones de los profesores respecto a la ciencia y su desarrollo, el científico y sus métodos y por último la enseñanza y aprendizaje de la ciencia.

Se implementó el cuestionario a 26 profesores de nivel bachillerato, interesándonos la participación de profesores que imparten asignaturas del área de ciencias exactas, esto es matemática, física y química. Dentro del grupo de profesores entrevistados encontramos diversidad de formación profesional inicial como Licenciados en Enseñanza de las Matemáticas y en Educación, Ingenieros Químicos Industriales, Civiles y Bioquímicos, Químico Farmacobiólogo, Contador Público, Arquitecto y Médico Veterinario Zootecnista.

Resultados y conclusiones

Mediante el instrumento aplicado, identificamos que entre los profesores participantes no existen tendencia a un modelo didáctico específico, en otras palabras los profesores que se encuentran impartiendo cursos de física, química y matemáticas en el bachillerato, de los planteles considerados, poseen diferente percepción acerca de los que es la ciencia, su enseñanza y aprendizaje.

Se observa que las concepciones que destacan entre los profesores, giran en torno a los modelos descubridor y constructor, en algunos aspectos. Por ejemplo, en cuanto a la visión que se tiene del científico y sus métodos; lo miran desde un modelo descubridor; respecto a la enseñanza y al aprendizaje de la ciencia, creen que se da desde la perspectiva del modelo constructor; mientras que en la ciencia escolar encontramos en los profesores un modelo combinado, el constructor-descubridor. Por otro lado, se hace evidente que no existe un consenso en cuanto a la manera de concebir a la ciencia y su desarrollo.

Lo anterior se traduce en que a los científicos son vistos como personas curiosas, buenos trabajadores manuales y perseverantes, que buscan en el laboratorio los datos sobre los que construirán sus teorías. Los métodos de investigación se basan en el estudio experimental de casos particulares para su generalización posterior. La enseñanza de la ciencia consiste en provocar la construcción de conocimientos científicos contextualizados. Y asumen que el aprendizaje de la ciencia se da a partir del cuestionamiento lo que el estudiante ya se sabe, modificando e incluso conservando y reafirmando conocimientos anteriores. La ciencia escolar se asume entre el estudio de situaciones problemáticas de interés para los alumnos y que le permiten construir su conocimiento, así como el procedimiento del trabajo experimental para que los alumnos redescubran de forma autónoma o mediante el descubrimiento guiado.

Se observa que la formación de los profesores si tiene un impacto en las concepciones. Los profesores que son Licenciados en Enseñanza de las Matemáticas tienen una tendencia hacia el modelo constructor, aunque únicamente comparten puntos de vista en la categoría de enseñanza y aprendizaje de la ciencia. En los profesores con formación de Químicos Farmacobiólogos también se mira una tendencia hacia el modelo constructor, pero a diferencia de los LEM, no únicamente coinciden en los aspectos que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje, sino que también tienen puntos de encuentro en la categoría el científico y sus métodos, específicamente en las preguntas relacionadas con la mente investigadora y la actividad experimental en donde se observa una inclinación al modelo descubridor. Los profesores que son Ingenieros Químicos Industriales se pueden considerar con una tendencia al modelo combinado descubridor-constructor. Sin embargo, se observan consensos con el modelo didáctico artesano en las preguntas referentes al método científico y a la actividad experimental; en cambio muestran un modelo constructor en las preguntas asociadas al aprendizaje de la ciencia y a la formación científica escolar.

Se observó que profesores cuya formación está dirigida a la enseñanza-aprendizaje, como son los Licenciados en Enseñanza de las Matemáticas, tienen concepciones dentro del modelo constructor en los aspectos relacionados con el aprendizaje y enseñanza de la ciencia. Sin embargo, profesores que durante su formación estuvieron en contacto con prácticas de laboratorio o bien una formación más dirigida al área científica, coinciden en otros aspectos y con otras perspectivas, ya que también existen puntos de encuentro respecto al desarrollo de la ciencia, al método científico, la actividad experimental y la mente investigadora, no siendo únicamente caracterizados desde el modelo constructor sino también desde el artesano y descubridor.

Por ello, es importante que se propongan cambios que incidan en la formación de los profesores, ya que mientras en el país se sigan aceptando a profesores formados de manera diferentes para impartir los cursos, seguirán existiendo estas notables diferencias. En cambio, sería conveniente proporcionarles una sola formación, no dirigida a cubrir asignaturas sino áreas disciplinares, en donde se mire a la disciplina científica de forma integrada y se genere nuevo conocimiento, siempre considerando las necesidades sociales, mostrando que la ciencia y la tecnología son accesibles e importantes para los ciudadanos.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. (2004). Reflexiones sobre las finalidades de la enseñanza de las ciencias: educación científica para la ciudadanía. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 1(1), 3-16.

Balam, A. (2007). *El currículo escolar mexicano de las ciencias en el nivel medio. Un estudio proyectivo.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Contreras, L. (1998). *Capítulo 2. Marco teórico sobre concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Huelva España. Recuperado el 01 de diciembre de 2009 de http://www.uhu.es/luis.contreras/tesistexto/cap2.htm

Fernández, J. y Elórtegui, N. (1996). Qué piensan los profesores acerca de cómo se debe enseñar. *Enseñanza de las Ciencias*, 14(3), 331-342.

Fernández, J., Elórtegui, N., Rodríguez, J. y Moreno, T. (1997). ¿Qué idea se tiene de la ciencia desde los modelos didácticos? *Alambique*, 12, 87-99.

Galván, L. (1997). La formación de maestros en México: entre la tradición y la modernidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 9(17), 49-74.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*. 21 (2), 265-280.

Ponte, J. (1999). Teacher´ beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education, in Krainer, K. Goffree, F. (eds.). On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teahcer education. Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik, pags. 43-50.

Porlán, R., Rivero, A. y Martín, R. (1998). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores, II: Estudios empíricos y conclusiones. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 16 (2), 271-288.

Portilla, A. (2002). *La formación docente del profesorado universitario: perfil y líneas de formación*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. España.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FAVORECER EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA GESTIONAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL PROCESO DOCENTE EDUCATIVO DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR

Ángela Mercedes Martín Sánchez
Universidad pro Educación y Cultura, UNAPEC. República Dominicana
m.angela24@gmail.com

Resumen. Esta conferencia pretende mostrar la estrategia presentada por la autora en una Investigación realizada en la Universidad APEC, con el objetivo principal de contribuir a mejorar las insuficiencias que se relacionan con la gestión del conocimiento en el proceso docente educativo de la Matemática Superior dentro de la Universidad y que puede ser aplicada a cualquier otra institución de enseñanza superior, ajustándola al nuevo contexto. La estrategia planteada contiene un sistema de tareas que toma en cuenta la gestión de la información en el contexto matemático, a través tareas para orientar, motivar y/o asegurar condiciones, tareas para la identificación de necesidades individuales y la creación de conflictos, tareas para gestionar el conocimiento matemático y tareas integradoras, interdisciplinares y/o transdisciplinares. Su implementación se realiza en cuatro etapas: Diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación.

Palabras clave: gestión, conocimiento, competencia, estrategia.

Abstract The following conference pretends to display the strategies employed by the author in an investigation done in APEC University. Its purpose is to contribute to alleviating the insufficiencies related to knowledge management in the educative process of Higher Mathematics within the University. It can also be applied to any other higher education institution, with proper contextual adjustments.

The proposed strategy contains a task system that takes management of information in the mathematical context into account, employing orienting, motivating and/or condition assuring tasks, tasks for identifying individual needs and conflict creation, tasks for management of mathematic knowledge and integrating, interdisciplinary and/or transdisciplinary tasks. Its implementation is done in four stages: diagnostic, planning, execution and evaluation.

Key words: management, knowledge, competence, strategy

Introducción

La situación de la Educación Superior en el mundo actual es muy peculiar, tiene una función de extraordinaria importancia dentro de la sociedad, cuando comunica información para la sociedad y prepara una gran cantidad de profesionales que se incorporarán luego al mundo laboral para satisfacer sus necesidades y la de los que lo rodean, esto hace que tenga en realidad un valor social agregado extremadamente alto.

La revisión documental devela que en la mayoría de los programas de la Matemática Superior no se concibe el desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático y las investigaciones actuales para el perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática Superior recomiendan que aún es importante y necesario enfatizar en el desarrollo de competencias de gestión de los conocimientos matemáticos, precisando la necesidad de generar nuevas propuestas.

Desde una perspectiva didáctica asumiremos el término competencia cómo la cualidad de la personalidad que:

1. Integra en su estructura: conocimientos, valores, habilidades y recursos personológicos que se relacionan y combinan según las condiciones, características y potencialidades de cada estudiante, del contexto en que se desenvuelve y de la actividad específica para la que se requiere.
2. Posibilita el funcionamiento autorregulado, independiente, flexible, responsable y reflexivo del sujeto, la toma de decisiones, el enfrentamiento a conflictos y la reconstrucción de sus estrategias para actuar en la solución de tareas y problemas profesionales y de la vida. (González, 2002)

Existen tres tipos de competencia

- **Competencias básicas**: aquellas que se adquieren durante la educación de nivel primario y secundario.
- **Competencias genéricas**: aquellas que son comunes a los profesionales de un campo del conocimiento.
- **Competencias profesionales:** aquellas particulares de una profesión, ocupación, especialidad, o sub-especialidad.

Ejemplos de competencia genérica:

- Comunicarse de forma oral y escrita en la propia lengua o en otros idiomas.
- Gestionar procesos y conocimientos.
- Resolver problemas.
- Trabajar en equipo.
- Aprender a aprender.
- Apreciar la diversidad multicultural.
- Liderazgo.

Ejemplos de competencia profesional

Gestionar (Planificar, ejecutar y evaluar) proyectos de investigación para resolver problemas relevantes del contexto, en el marco del compromiso ético, acorde con el estado del arte, los retos del contexto y del país, el trabajo en equipo, y una determinada metodología de la investigación científica.

La competencia gestionar el conocimiento matemático es una competencia genérica y es necesario que las universidades se ocupen de su desarrollo ya que

- Cualquier profesional debe ser gestor del conocimiento que precisa para su trabajo
- En el proceso docente educativo de la Matemática, los estudiantes deben ser capaces de apropiarse del conocimiento matemático a partir del procesamiento de la información científica que aparece en su multiplicidad y formas en la bibliografía y en las fuentes humanas.
- La gestión del conocimiento matemático es además importante para el tratamiento de los conceptos, relaciones, definiciones, etc. para contextualizarlos, analizarlos y compararlos con los diferentes criterios científicos y poder asumir posiciones argumentadas.
- Para resolver un problema matemático, se necesita obtener la información que se relaciona con el problema, procesar la información, reflexionar, pensar, compartir opiniones; y desestimar la idea de que sea una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias.
- Ello constituye un reto, pues el alumno se enfrentaría a situaciones que lo deben llevar a gestionar conocimientos, construir estrategias, tomar decisiones, etc.
- No obstante**,** en la mayoría de las ocasiones los problemas matemáticos son presentados por el profesor sin propiciar la oportunidad de que el estudiante autogestione su aprendizaje mediante la búsqueda de información en diversas fuentes, su interpretación y evaluación.

La investigación llevada a cabo por González en el año 2009, propone un modelo teórico para la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático. (González, 2009). De este modelo se asume, que la competencia gestionar el conocimiento matemático es el proceso que integra en su estructura, conocimientos, valores, recursos personológicos y habilidades para la gestión del conocimiento que se relacionan según las condiciones y características de cada sujeto para su utilización en diversas tareas propias de la actividad matemática, lo cual le permite un comportamiento independiente, flexible, responsable y reflexivo ante esta actividad.

Referentes didácticos de la estrategia

- El motivacional axiológico que incluye como componentes esenciales la orientación motivacional y la orientación axiológica
- El Cultural – Cognitivo – Metacognitivo Para las necesidades generales y específicas en cuanto a la cultura matemática necesaria para realizar la gestión del conocimiento matemático
- El procedimental de la gestión del conocimiento matemático que da lugar a la Gestión del conocimiento matemático explícito, y del conocimiento matemático tácito.

Motivacional- axiológico

- **Orientación motivacional:** Proceso dirigido al logro de la disposición positiva de los estudiantes hacia la obtención, generación y utilización del conocimiento, incluye la identificación de necesidades y creación de conflictos, de forma tal que el estudiante reconozca el desarrollo de esta competencia como una verdadera necesidad.
- **Orientación axiológica:** Proceso que guía hacia el sistema de valores de los sujetos en correspondencia con el contexto, en el caso concreto, hacia la. integridad, responsabilidad y crítica reflexiva ante la gestión del conocimiento.

Sistema de valores

- **Integridad en la obtención, generación y utilización del conocimiento.** Cualidad de la persona que le da la posibilidad de obtener y procesar la información, generar y utilizar el conocimiento con una actitud digna, de respeto, sencilla, honesta, para tomar decisiones adecuadas y justas y alcanzar su plena realización humana.
- **Responsabilidad en la obtención, generación y utilización del conocimiento** Cualidad de la persona que ofrece la posibilidad de obtener, procesar, generar y utilizar los conocimientos en pos de las necesidades personales y de la sociedad, se basa en el compromiso personal y el reconocimiento de la importancia del conocimiento en virtud del desarrollo humano. Ella implica, respeto a las normas de la gestión, reconocimiento de los errores y adopción de medidas para su eliminación o atenuación de los efectos.
- **Crítica reflexiva en la gestión del conocimiento.** Cualidad que ofrece la posibilidad de lograr cambios favorables en los seres humanos con una actitud de respeto y sentido de colaboración, para problematizar un aspecto de la realidad a

partir de diversos puntos de vista, para orientar su transformación y reformular en cierto modo su sentido.

- **Disposición positiva ante la gestión del conocimiento.** Cualidad que moviliza al sujeto y lo estimula a la acción. Para que esta disposición sea positiva, el alumno debe encontrarle algún valor la tarea a realizar, que la misma esté al alcance de sus posibilidades. En última instancia tal disposición puede hacer la persona logre una conciencia y lo estimule a ofrecer respuestas.

Cultura matemática

- Proceso de asimilación, producción, y comunicación de conocimientos matemáticos, y valores; el conjunto de representaciones individuales y colectivas, creencias, usos del lenguaje, estilos de pensamiento matemático que articulan con la conciencia de los alumnos y el ámbito en que se producen y reproducen sus formas de vida.
- **Potencial cognitivo:** Incluye los conocimientos, habilidades matemáticas, estilos de pensamiento matemático, las representaciones individuales y colectivas, creencias, usos del lenguaje, conocimientos y las posibilidades para su adquisición y desarrollo.
- **Potencial metacognitivo:** Incluye la autovaloración personal de la cultura requerida para llevar a cabo las tareas. Es el conocimiento de sí, el auto-conocimiento o autoconciencia, expresado en la actitud hacia sí mismo, con respecto a la concienciación de las condiciones personales para gestionar el conocimiento.

Gestionar el conocimiento explícito

- **Obtención de la información matemática:** Localizar y capturar la información matemática procedente de fuentes escritas (impresas o digitales).
- **Selección de la información matemática:** Escoger, como primera elección, dentro del volumen de información capturada, aquella de mayor relevancia que como un primer acercamiento, permite cumplimentar los objetivos planteados ante la necesidad de: la solución de un determinado problema, la definición de un concepto, la ejecución de un proceso, entre otros.
- **Filtraje de la información matemática:** Realizar consultas automatizadas en torno a motores de búsquedas: mapas de conocimientos, portales de conocimientos, fuentes humanas, entre otras, para comparar la coincidencia o no de las selecciones efectuadas según necesidades y puntos de vistas de otros autores.

- **Organización de la información matemática:** Es categorizar, confrontar, clasificar, dar orden y jerarquía, formar bases de datos, realizar mapas conceptuales, esquemas, etc., con la información ya filtrada.
- **Evaluación de la información matemática:** Se centra en el reconocimiento de la autoridad de la fuente y veracidad de la información organizada; la valoración de su actualidad, el grado de especialización de la información, el momento y lugar en que se publica; la identificación de los argumentos que le dan valor a la información para que se convierta en conocimiento explícito.

Gestionar el conocimiento tácito o implícito

- **Obtención de la información matemática implícita:** Localizar las fuentes vivenciales y humanas y utilizar diversas estrategias e instrumentos de indagación y recopilación de información, experiencias, vivencias, etc.
- **Formalización de la información matemática:** Expresar en tablas, mapas conceptuales u otros recursos gráficos, la información obtenida, para luego procesarla, resumirla, sintetizarla.
- **Selección de la información matemática:** Escoger aquella de mayor relevancia que como un primer acercamiento, incluye la valoración crítica de la información obtenida teniendo en cuenta el objetivo propuesto.
- **Filtraje de la información matemática:** Realizar consultas, compartir experiencias, diálogos, etc., para confrontar opiniones, comparar la coincidencia o no de la información seleccionada.
- **Organización de la información matemática:** Es categorizar, confrontar, clasificar, dar orden y jerarquía, a la información.
- **Evaluación de la información matemática:** Se centra en el reconocimiento de la confiabilidad de las personas, su especialización, autoridad, la coincidencia de sus puntos de vistas y la argumentación de las ideas, que le dan valor a la información para que se convierta en conocimiento explícito.

Estrategia

Etapa1: Diagnóstico

Objetivo

Identificar las necesidades de los estudiantes, las condiciones y potencialidades relacionadas con la orientación motivacional-axiológica, la formación cultural matemática requerida para gestionar el conocimiento y con el propio proceso de gestión del conocimiento matemático.

Acciones

- Determinación y/o elaboración de instrumentos para la realización del diagnóstico.
- Aplicación de los instrumentos seleccionados a los implicados en la estrategia.
- Análisis de los principales resultados obtenidos.

Etapa 2: Planificación

Objetivo

Concebir las tareas que tributen a la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático

Acciones

- Diseñar tareas para el aprendizaje en las que los estudiantes deban gestionar el conocimiento matemático con integridad, responsabilidad y críticamente

Características de los sistemas de tareas

- Tareas para orientar, motivar y asegurar condiciones para desarrollar la CGCM.
- Se contextualizan en temas específicos, según el contenido a abordar.
- Son variadas en su complejidad, diversas en los contextos en los que se presentan, propician reflexiones, propician la auto-evaluación, la co-evaluación, la comunicación y la argumentación crítica de los resultados.

Etapa 3: Ejecución

Objetivo:

- Materializar las acciones de la etapa de planificación y utilizar métodos que permitan contribuir a desarrollar la competencia gestionar el conocimiento matemático

Acciones

- Identificar las necesidades de aprendizaje y las condiciones previas de los estudiantes para la formación y desarrollo de la competencia.
- Orientar y ejecutar las tareas.
- Evaluar a través de las tareas.

- Retroalimentar, a través, de todo el proceso docente educativo.

Etapa 4: Evaluación

Objetivos

- Valorar la marcha de la aplicación de la estrategia en cada una de las etapas
- Realizar las adecuaciones necesarias para su perfeccionamiento

Acciones

- Valorar la actividad desplegada por los docentes en cuanto a la formación y desarrollo de la CGCM en sus estudiantes, a partir de la autoevaluación y del criterio de los estudiantes.
- Valorar la actividad de los estudiantes y sus resultados en relación con la CGCM.
- Llevar a cabo las modificaciones y ajustes necesarios para el perfeccionamiento de la estrategia para su aplicación coherente en el PDE de la Matemática universitaria.

Ejemplificación de la estrategia

La estrategia se aplicó en la Asignatura Cálculo I, de la carrera de Mercadeo en UNAPEC, enfatizando en la concreción de las acciones del momento de planificación de la misma.

Acciones

- Conjuntamente con el diseño de las tareas, se orienta, para cada unidad de estudio, un listado de libros de Matemáticas, de diversas editoriales y de variados autores, los cuales pueden ser localizados en la Biblioteca y/o Internet.
- Dichos libros son orientados en las tareas anteriores y en otras se sugiere localizarlos.

Unidad IV: La Integral

Tema: Integral indefinida y métodos de integración

1. James Stewart con su libro "Cálculo de una variable" y G. B. Thomas con su libro "Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica", abordan la temática de los teoremas de Rolle y el valor medio, sus interpretaciones geométrica y analítica y sus aplicaciones. Identifica los puntos de acuerdo y desacuerdo entre estas dos fuentes atendiendo a: autores, editora, fecha de publicación, tipo de obra, lugar de publicación. Establece las diferencias ¿Cuál te resultaría más confiable? ¿Por qué?
2. Determina en las fuentes: Enciclopedia Encarta, Historia de las Matemáticas (Ribnikov, K. (1987)) y Cálculo y Geometría Analítica de Larson, R.E. ((1995). Mc Graw- Hil) la

manera en que se recogió la información sobre el origen de estos dos teoremas y determina su confiabilidad para las necesidades de la tarea que se te encomienda.

3. Calcula el tiempo que le dedicarás a la búsqueda de información sobre la situación, aplicaciones físicas de la integral indefinida, en función del tiempo total asignado para la tarea.

4. Si necesitas buscar información sobre las propiedades de la integral indefinida y las tablas de integrales inmediatas. ¿Qué acciones planificarías realizar para obtener información sobre estos aspectos? Elabora los instrumentos correspondientes. Localiza la información que precises y fundamenta tu elección a partir de su actualidad y cientificidad. Aplica los instrumentos, tabula los datos en un sistema de gestión de bases de datos y la información en las correspondientes fichas bibliográficas y de contenido.

Unidad III: La derivada

TEMA: Teoremas de y del valor medio Rolle

1. Calcula el tiempo que le dedicarás a la búsqueda de información sobre la situación, aplicaciones de los teoremas de Rolle y del valor medio en el cálculo de los puntos extremos de una función, en función del tiempo total asignado para la tarea.

2. Si necesitas buscar información sobre las propiedades y características de los teoremas de Rolle y del valor medio. ¿Qué acciones planificarías realizar para obtener información sobre estos aspectos? Elabora los instrumentos correspondientes. Localiza la información que precises y fundamenta tu elección a partir de su actualidad y cientificidad. Aplica los instrumentos, tabula los datos en un sistema de gestión de bases de datos y la información en las correspondientes fichas bibliográficas y de contenido.

3. Busca información sobre aplicaciones de los teoremas de Rolle y del valor medio. Elabora las fichas bibliográficas correspondientes. Elabora fichas de contenido donde trunques información al inicio, al final, en el intermedio.

4. Sobre la localización de los valores extremos de una función utilizando el cálculo diferencial y los teoremas de Rolle y el valor medio utiliza los buscadores (*Yahoo!* (búsqueda por índices), y *AltaVista* (búsqueda por palabras clave). Otros como *Lycos*, *HotBot*, *Exice*, *WebCrawler*, *Magellan* o *Infoseek* Crea una carpeta donde organices y ubiques la información que recuperas.

5. Decide la medida en que el proceso de recolección o análisis de información sobre la obtención de los valores extremos de una función partiendo de los teoremas de Rolle y

del valor intermedio debes contar con la participación de otros sujetos y, por consiguiente si has de trabajar con compañeros o grupos, o con ambos a la vez.

Conclusiones

La estrategia debe implementarse, a través de interacciones efectivas entre estudiantes, grupo y docente, siempre bajo la óptica de que el docente debe concientizar que él es el encargado de organizar estas interacciones, sin eliminar el papel activo de los estudiantes, y además, se debe trabajar porque todos comprendan los objetivos y puedan compartir motivaciones en correspondencia con sus necesidades comunicativas reales, lo que conlleva a la necesidad de la negociación de intenciones en el proceso docente educativo, de forma tal que los objetivos y motivos de los estudiantes y docentes estén en equilibrio, de lo contrario no se logra una verdadera interacción, y mucho menos una verdadera potenciación del desarrollo.

El sistema de tareas propuesto en la estrategia, concebidos como ayudas, tiene como finalidad promover el desarrollo del estudiante y dar los recursos para que éste llegue a realizar de manera más independiente, flexible, responsable y reflexiva la competencia, gestionar el conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Athanasou, A. (1996). Instrumentación de la educación basada en competencias. Perspectiva de la teoría y la práctica en Australia. Limusa.

Bacarat, M. (2002). ¿Sabemos de qué hablamos cuando usamos el término competencia/s?

Goñi Tahala, J. (2003). De la Gestión del Conocimiento a la Gestión de la Conocimiento. Obtenido de http:/www.gestióndelconocimiento.com/documentos2/jjoni/gestcon.htm.

González, C. (2005). Propuesta Didáctica para el desarrollo de la habilidad procesar datos en la asignatura de Estadística en lo estudiantes de La Universidad APEC.

González, M. V. (2002). La orientación profesional en la educación superior. Una alternativa teórico-metodológica para la formación de profesionales competentes. Ponencia. 3era Convención Internacional de Educación Superior.

Labarrere, ALaurence, P. (1998). Gestión del Conocimiento. España.

Leboyer, L. (2003). Gestión de las competencias. Barcelona. Barcelona.: Ediciones Gestión 2000.

Machado, E.; N. Montes de Oca & A. Mena (2008). El desarrollo de habilidades investigativas como objetivo educativo en condiciones de la Universalización de la Educación Superior: la solución de problemas como habilidad compleja e integradora. La Habana. Proyecto Ramal el Ministerio de Educación Superior. (Inédito)

González, C. (2009). Estrategia didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes universitarios. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación Enrique José Varona. Camagüey. Cuba

Stewart, Cálculo de una variable transcendentes tempranas, sexta edición, Editorial Cengage Learning

Larson RE, Cálculo y geometría analítica(1995), Editora: Mc Graw Hill

G.B. Thomas Cálculo diferencial y Geometría Analítica: Editorial Norma.

MODOS DE ACCIÓN Y DECISIONES DE LOS DOCENTES. UN EJEMPLO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Inocencia Espinoza, Carlos Rondero, Ana Tarasenko
Universidad Politécnica de Francisco I. Madero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
espinozainocencia@hotmail.com, rondero@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. En esta investigación se pretende mostrar que el teorema de Pitágoras es un eje articulador transversal de saberes matemáticos, dado que posibilita el relacionar conceptualmente la matemática básica con la matemática avanzada, esto particularmente referido en los niveles educativos básico y medio superior. Se parte de la realización de un análisis de histórico-epistemológico del teorema, para dar evidencias acerca de la relevancia de este saber sabio en un gran número de asignaturas de la matemática escolar.

Palabras clave: teorema de Pitágoras, articulación conceptual, epistemología.

Abstract This research aims to show that the Pythagorean Theorem is a coordinating cross-mathematical knowledge, since conceptually possible to relate basic math to advanced math, this particularly referred to in the primary and secondary educational levels higher. It is part of the realization of a historical-epistemological analysis of the theorem, to give evidence about the relevance of this knowledge learned in a large number of subjects in school mathematics.

Key words: Pythagorean Theorem, conceptual articulation, epistemology

Introducción

Se parte de la premisa de que el teorema de Pitágoras puede ser considerado como un saber sabio, dado que su estatus epistemológico se remonta a algunas de las culturas ancestrales tales como la egipcia, china y mesopotámica. Sin embargo, desde su presentación por primera vez en el escenario escolar correspondiente al tercer año de secundaria, este saber es tratado con mucha superficialidad conceptual que se ve reducida al enunciado del teorema asociándosele con los lados de un triángulo rectángulo, dejando de lado el sustento histórico – epistemológico, lo cual conlleva implicaciones en su aprendizaje.

Desde la perspectiva de este trabajo, al teorema de Pitágoras es un elemento de articulación conceptual, en el sentido que señala Rondero (2006),

> La articulación es el conjunto de etapas dispuestas de manera coherente en relación a un objetivo de aprendizaje, en donde las condiciones de ésta no son sin duda fáciles de establecer.

Una característica adicional del teorema es el hecho relevante de que es un instrumento fundamental e indispensable para estructurar y entender otros conceptos de geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo, como es el caso de: la deducción de identidades trigonométricas; desarrollo de las ecuaciones de cónicas, el cálculo de longitud de curva, método de integración por sustitución trigonométrica y las representaciones paramétricas de curvas y superficies, entre otras, además de otros saberes que se manejan en diferentes áreas de la matemática y de la física. Sin embargo, a pesar de su trascendencia epistemológica, su presentación en la didáctica es muy pobre, dado que casi siempre se reduce, al menos en la matemática escolar de nivel básico, al enunciado del teorema y como regla memorística, desproveyéndolo así de su esencia conceptual.

Marco teórico

Siguiendo a la epistemología genética, se puede señalar que el desarrollo del pensamiento de la tesis Piagetiana indica que el conocimiento se construye a medida que se interacciona con la realidad, sobre esquemas donde el individuo puede actuar, en la generación de los conocimientos matemáticos, en el caso del teorema de Pitágoras se requiere que primero se genere una adecuada asimilación y una acomodación del mismo dado su papel preponderante que tiene dentro de la gama de conceptos fundamentales que el alumno debe aprender en secundaria, para luego poder aplicarlo en el bachillerato y por supuesto en el nivel superior.

Desde otro enfoque Wertsch (1988), afirma que Vygotsky, considera al conocimiento como el producto de la interacción social y cultural, es decir que todo se deriva de un producto social y considerando que el Teorema de Pitágoras se va aprendiendo de generación en generación, y en diferentes culturas como una necesidad social, por medio de la comunicación, el lenguaje y los razonamientos y además por la generación de procesos en forma interpersonal e intrapersonal, es decir intervienen tanto el aspecto social como el individual.

En matemáticas no podemos hablar de objetos reales por este motivo es importante identificar, como se ha teniendo la necesidad de crear específicamente los objetos matemáticos que no son algo tangible, esto nos lleva a la necesidad de tener que hacer representaciones de estos objetos, con la finalidad de ampliar y tener mejores herramientas que han ayudado a plasmar el entorno desde una perspectiva matemática. Se tiene entonces la necesidad de contar con los conceptos desarrollados *por* Duval(1999*) con su teoría de representaciones semióticas y la articulación de registros*, debido a que uno de los objetivos de la investigación es dar a conocer el aspecto articulador del Teorema de Pitágoras en la educación matemática en los niveles de secundaria y bachillerato.

Chevallard en su teoría de Transposición Didáctica (1992) afirma que todos los conocimientos tienen un origen y se van desarrollando al paso del tiempo y en el avance de cada ciencia, de tal forma que al momento de dar a conocer estos conocimientos no son enseñados como originalmente se descubrieron o se crearon, por lo tanto es importante identificar que al teorema de Pitágoras como un saber sabio cuyo origen se remonta a diferentes culturas ancestrales, pero en su transposición a saber enseñado sufre muchas modificaciones al grado de llegar a perder su esencia epistemológica lo que trae como consecuencia que los profesores lo refieran a sus estudiantes sólo como un saber anecdótico desprovisto de todo su potencial constructivo en la matemática y en la física.

Otra teoría que sirve de sustento a esta investigación es la teoría de obstáculos epistemológicos, considerando que el término *obstáculo epistemológico* fue utilizado por primera vez en 1938 por el filósofo francés Gastón Bachelard, referido como*: "son todos aquellos entorpecimientos y confusiones que se experimentan durante el acto de conocer".*

Estos obstáculos tienen un fuerte componente psicológico, la manifestación del dominio de un espíritu conservativo por sobre un espíritu formativo: el conocimiento proporciona una sensación de bienestar, de poder sobre la naturaleza y las cosas, reconocer que lo que se creía saber en realidad era erróneo provoca en la persona inseguridades y conflictos.

Por otra parte, Douady (1986) menciona que la dialéctica herramienta – objeto tiene como principal interés el aprendizaje que se genera en el aula, realizando el análisis de la relación que se forma entre el alumno, el docente y el saber matemático, marcando esta metodología como un proceso cíclico que organiza los papeles del profesor y del alumno, donde los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de "*herramienta*" para resolver el problema y de "*objeto*" al tomar un lugar en la construcción de un conocimiento organizado. Generando así un acercamiento a la comprensión de las implicaciones y significados de aprender en situación escolar y a los factores puestos en juego en tal situación.

Metodología

Considerando la metodología de la Ingeniería Didáctica y como parte del análisis preliminar, se ha realizando una revisión crítica de programas de estudio y de libros de texto, de secundaria y bachillerato acerca de cómo se explicita el teorema de Pitágoras.

En la primera fase de la ingeniería didáctica, se realizó un análisis preliminar basado en dos etapas del desarrollo histórico del teorema, la primera esta referida a las culturas antiguas y la segunda en los libros de texto de los Siglos XVIII, XIX y XX..

Dentro del análisis epistemológico se buscan evidencias acerca de la generalización del teorema de Pitágoras así como las variantes de sus diferentes registros, en las asignaturas de matemáticas del nivel de bachillerato. Adicionalmente se ha realizado un análisis de programas académicos para ubicar las diferentes representaciones del teorema de Pitágoras, en el desarrollo de las matemáticas en secundaria y en el nivel medio superior.

En la segunda fase del análisis *a priori* se han realizado exámenes de diagnóstico a profesores de los dos niveles educativos mencionados, con el propósito de identificar los conocimientos que tienen respecto al teorema de Pitágoras.

Desarrollo de la investigación

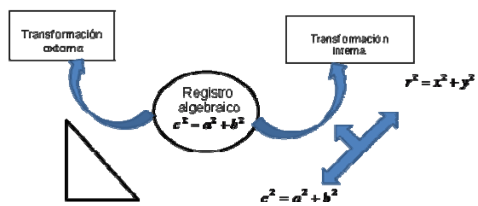
De acuerdo a la metodología planteada se ha podido identificar que en los planes y programas de bachillerato después de de las reformas educativas del año 2006, el teorema de Pitágoras ya no se encuentra dentro de los temas a estudiar en las asignaturas de matemáticas, por contraste con los programas anteriores referidos a la reforma de secundaria de 1993, donde claramente se le identificaba como un tema de la asignatura de geometría y trigonometría. Lo anterior muestra una clara incongruencia, ya que sin este teorema no es posible fundamentar, argumentar, sustentar o demostrar otros temas no solo de la matemática misma, sino también de otras asignaturas.

En la revisión de libros de texto de secundaria y bachillerato se identifican diversas limitantes conceptuales en su tratamiento al no involucrarse aspectos relevantes tales como; su contexto histórico y numérico, sobre todo el enfoque social que dio origen al teorema. Asimismo ninguno de los libros de texto consultados hace mención a las ternas pitagóricas. Tampoco se explicita la trascendencia que tiene en una amplia diversidad de otros saberes y su utilización práctica en diferentes ramas de las matemáticas. Es por ello que resulta importante su estudio epistemológico pues hace notar su incidencia en la didáctica de las matemáticas que han permitido buscar la forma de incorporar los resultados obtenidos en la formación de profesores.

Con la información obtenida de los libros de texto, se ha observado también que los autores sólo abordan el teorema de Pitágoras en forma tradicional, es decir, sólo se maneja el enfoque geométrico y la interpretación algebraica a través de la conocida fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, sin entrar en detalles donde se posibilite al estudiante establecer criterios propios y una interpretación concordante para ser ocupada en las asignaturas de matemática y de otras ciencias. Es de mencionarse que por su parte los profesores requieren en su formación entender a mayor profundidad epistemológica lo que subyace al teorema de Pitágoras, para que no sea únicamente utilizado como herramienta que permite encontrar el lado faltante de un triángulo rectángulo, lo que posteriormente se convierte en un obstáculo epistemológico que limita su aprendizaje al no identificar todo el potencial conceptual del mismo, lo que a su vez genera una amplia desarticulación de los saberes que se relacionan con dicho teorema.

En el análisis de los libros de texto de secundaria y bachillerato, se parte del enunciado *"en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los* *catetos"* realizada por Baldor (1997 p. 120), y en otros libros se cambia la palabra cuadrado, por *"las áreas de los cuadrados construidos"* , otros más por *"el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo…"* . Sin embargo, en ningún libro se menciona la generalización del teorema y esto es un aspecto muy importante para que el alumno puede ir adquiriendo una conceptualización más amplia del mismo.

Con relación a las diferentes representaciones del teorema se encontró que para este entendimiento se van realizando varias estructuras, es decir como va cambiando de una representación algebraica, a una geométrica, a una trigonométrica, entre otras que va adquiriendo en sus múltiples utilidades. Estas representaciones pueden contar según Duval (1999) con sistemas de representación externa los cuales están conformados por grupos de signos que al agruparse de acuerdo a determinadas reglas que a su vez generan representaciones externas acerca de los objetos y los hechos. Estas representaciones externas pueden ser comunicadas y compartidas por los sujetos, es decir son de carácter semiótico.

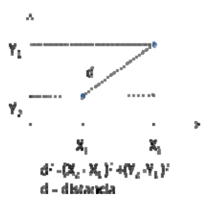
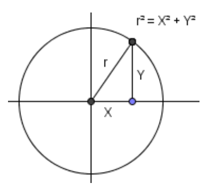
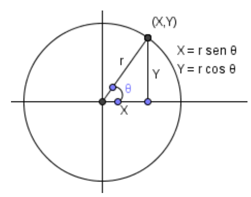
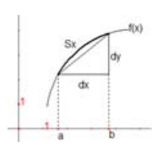


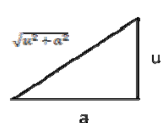
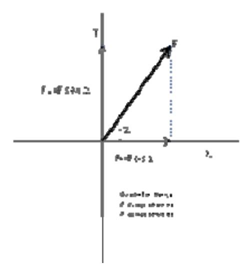
Esquema de un registro de representación semiótica

Según Duval (1999) existen tres actividades cognitivas relacionadas con los sistemas de representación externa (semióticos): la formación de representaciones, el tratamiento de las mismas y su conversión. Estos tratamientos cambian en diferente forma, cuando se inicia con las ternas pitagóricas, para que se cumpla esta igualdad, lo primero que se observa es la existencia de una características generalizada la cual deriva en lo constante o fijo de cada uno de los valores de *a*, *b* y *c*, para que se cumpla la terna, sin embargo, cuando se traslada a un triángulo se sigue la misma temática, es decir los tres valores son constantes, pero cuando se desea conocer la distancia entre los dos puntos ahora el valor de la distancia depende directamente de la ubicación de los otros puntos, cuando pasa a la ecuación de la circunferencia los valores de *"r"* son constantes y ahora los valores de *"x"* y *"y"* son variables, sin embargo cuando se ubica a *"r"* con el valor de 1 se encuentran ahora los valores para *"x"* y *"y"* diferentes y *"r"* toma un solo valor único, para que después en la identidad trigonométrica los tres valores se regresan una terna pitagórica.

Considerando que el teorema tienen un estatus de herramienta, inscritas en un contexto bajo la acción y el control de un individuo o grupo en un momento dado, de ahí la importancia de considerar este marco teórico, respecto al teorema de Pitágoras, de tal forma que la mayoría de veces el alumno puede recurrir a una herramienta implícita o explícitamente. Cuando lo hace de manera implícita es porque pone en juego concepciones que le permiten utilizar un procedimiento que y él mismo ya conoce o se representa en términos de acciones en un contexto particular, en tanto que recurre a una herramienta explícita cuando emplea nociones que puede formular y justificar su uso.

A su vez los saberes matemáticos adquieren el estatus de objeto cuando se implica el reconocimiento de nociones y teoremas como parte de un conjunto de conocimientos científicos y reconocidos, así como también, la formulación de definiciones, enunciados y demostraciones de teoremas. Bajo esta perspectiva claramente esta definido el teorema de Pitágoras como un saber matemático, científico, con una definición y con sus respectivas demostraciones logrando un estatus de objeto.

<table>
<tr>
<td>La distancia entre dos puntos

</td>
<td>En la deducción de la ecuación de una circunferencia.

</td>
<td>Identificación de identidades trigonométricas.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Calculo de la longitud de arco


$S_a=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$
Fuente</td>
<td>Integración por sustitución trigonométrica.

</td>
<td>Componentes de una fuerza
</td>
</tr>
</table>

Diferentes representaciones del teorema de Pitágoras

Con la información obtenida se pudo concretar que un concepto tiene el status de herramienta cuando nuestro interés en él se centra en la utilidad que nos brinda para resolver un problema, en tanto que deviene en objeto cuando lo entendemos como un ente cultural insertado en una estructura más robusta, el saber erudito socialmente validado. Por lo tanto, cuando se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos, cuando se desea expresar las distancias trigonométricas, cuando se tiene la necesidad de resolver triángulos rectángulos, para el cálculo de momentos o de las componentes de una fuerza en estática, en la determinación del cálculo de la longitud de una cuerda, entre otras muchas áreas del conocimiento donde el teorema puede ser usado como herramienta de cálculo.

Es claro que al trabajar con las anteriores representaciones, los estudiantes pueden ampliar considerablemente su conceptualización del teorema de Pitágoras, lo que permite identificar el doble estatus de herramienta y de objeto. Basados en la idea que las nociones pueden ser abordadas, modificadas y trabajadas en las situaciones propuestas a los alumnos derivando posteriormente en nuevos conceptos que son, a su vez, susceptibles de ser generalizados, y llevados a mejores condiciones de aprendizaje, buscando evidenciar de ese modo la articulación conceptual de los mismos.

Conclusiones

Después de haber realizado los análisis antes mencionados, se puede afirmar claramente que saberes sabios como lo es el teorema de Pitágoras, cada día disminuye la importancia que se debe de dar en la formación matemática, ocasionando que los conocimientos de esta área tengan poco sustento histórico y epistemológico, así mismo se puede afirmar que no es suficiente que el profesor identifique la presencia del teorema de Pitágoras, en diferentes representaciones, sino se requiere además efectuar una articulación conceptual más profunda de las mismas, rescatando su relevancia epistemológica.

Referencias bibliográficas

Aldana, M., Azar, J. (2005). *Matemáticas II. Geometría y trigonometría*. México: SEP DGETI.

Arraiga, A., Benítez, M. Cortés. (2008). *Matemáticas 3 Inducción a las Competencias*. México: Pearson Educativo.

Baldor, A. (1997). *Geometría Plana y de Espacio y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural, S.A. DE C.V.

Chevallard, Y. (1997). *La Transposición didáctica*. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Editorial Aique.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Grupo de Educación Matemática.

Escareño, F., Mandera, E., Espinosa, H. (2005). *Enfoque de resolución de problemas*. México: Pearson Educativo.

Guzmán, A. (2003). *Geometría y trigonometría*. México: Publicaciones Culturales.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(1), 45-78.

Piaget, J., García, R. (2004). *Psicogénis* e *Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Rondero, C. (2006). Propuestas didácticas acerca de la articulación de saberes matemáticos, en: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Editores), investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: *Un Reporte Iberoamericano (p.p. 151-162),* Díaz de Santos- Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. México.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente* España: Ediciones Paidós Ibérica.

UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE SU CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO EN MATEMÁTICAS

Ana María Martínez Blancarte, Simón Mochón Cohen
CINVESTAV – IPN México
anismaba@hotmail.com

Resumen. Esta investigación se enfocó en averiguar y reflexionar el Conocimiento Pedagógico que los profesores en formación conocen y manejan al enseñar la asignatura de matemáticas, lo anterior se realizó mediante un taller de apoyo educativo y la aplicación de instrumentos metodológicos como son observaciones de clase (iniciales y finales) y cuestionarios. El análisis de los datos obtenidos se hizo con base en los cuatro parámetros de Askew, Brown, Denvir & Rhodes (2000): tareas, conversación, herramientas, relaciones y normas establecidos en un salón de clase, además de los aportes de McDonough & Clarke (2003) quienes mencionan diez categorías para identificar las prácticas de profesores efectivos.

Palabras clave: conocimiento pedagógico, futuros profesores, matemáticas.

Abstract This research was focused on finding out and reflecting upon the pedagogical knowledge that teachers in training know and manage when teaching mathematics, the former was carried out by means of a workshop for educational support and the implementation of methodological tools such as classroom observations (initial and final) and questionnaires. The analysis of the data was based on four parameters Askew, Brown, Denvir & Rhodes (2000): tasks, talk, tools, relationships and rules established in a classroom, in addition to the contributions of McDonough & Clarke (2003) who listed ten categories to identify the practices of effective teachers.

Key words: pedagogical knowledge, future teachers, mathematics.

Introducción

La formación docente tiene un papel fundamental en el aprendizaje de los alumnos (Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F & Novotna, J., 2005), es por ello que para mejorar el desenvolvimiento de los educandos es necesario mejorar la formación de los profesores. Sin embargo, en la actualidad se observa que algunos docentes no han desarrollado sus habilidades pedagógicas (Baturo, 2004) y no cuentan con el conocimiento matemático suficiente para efectuar una adecuada enseñanza. Por lo anterior, nuestra problemática de estudio se enfocó en averiguar y reflexionar el conocimiento pedagógico que los estudiantes a profesor conocen y manejan al momento de enseñar la asignatura de matemáticas, teniendo como preguntas de investigación:

- ¿Cuál es el conocimiento pedagógico que poseen los estudiantes a profesor acerca de la enseñanza/aprendizaje de la asignatura de matemáticas?
- ¿De qué manera se puede mejorar el conocimiento pedagógico del estudiante a profesor, mediante un taller de apoyo educativo?

Shulman (1986) resalta que el maestro necesita entender no sólo lo que algo es; sino comprender más allá del porqué es así; concebir si su justificación puede ser válida o no, y bajo qué circunstancias. Para ello, el conocimiento para la enseñanza debe considerar aspectos de dimensión general y de contenido específico. Mencionaremos únicamente la segunda por ser el punto primordial donde se centra nuestro trabajo. Para Shulman (1986) la dimensión del contenido se divide en tres categorías: el conocimiento de contenido, el conocimiento curricular y el conocimiento de contenido pedagógico. A continuación solo explicaremos al último conocimiento por ser la prioridad de nuestro trabajo; por tanto tenemos que el Conocimiento de Contenido Pedagógico (CCP) es la categoría donde se mezclan el contenido y la pedagogía necesarios para la enseñanza de una asignatura. De acuerdo con Shulman (1987), este conocimiento permite entender cómo un docente puede organizar, modelar, representar o adaptar los tópicos particulares, los problemas o las situaciones a los diversos intereses, habilidades, concepciones y dificultades de sus estudiantes. El *CCP* ha desencadenado diversas investigaciones alrededor del conocimiento del profesor, y brindado nuevas aportaciones y hallazgos al respecto. Algunos investigadores como Ball, Thames & Phelps (2007); cuestionan ¿qué hace el maestro?, ¿cómo lo hace? y ¿qué demandas están inmersas en su conocimiento y enseñanza? Ellos, dentro de su estudio y análisis de la práctica de enseñanza, han desarrollando una teoría sobre el conocimiento matemático, originando así, lo que Ball denomina Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) que es una combinación de contenido matemático y pedagogía; ambos son conocimientos que un profesor requiere para desempeñar su diaria labor. Dos de las tres facetas centrales del CME que se centran más en la cuestión pedagógica, son la del Conocimiento de estudiantes (este conocimiento se encuentra relacionado con los conocimientos de contenido y pedagogía, además de considerar el razonamiento de los alumnos; es decir, el conocer las estrategias, conceptos, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos sobre un tópico matemático) y la del Conocimiento para la instrucción (está conformada por el conocimiento matemático y el pedagógico, pues ambos se complementan al brindar la enseñanza de un tópico en particular y deben ser dominados por el profesor al impartir una clase matemática).

Cooper, Baturo & Grant (2006) detectaron que existía una carencia de programas de aprendizaje profesional que se dedicara al aspecto de cómo enseñar los conceptos y procesos matemáticos de una manera efectiva. Estos investigadores encontraron que para dar respuesta a lo anterior debe existir una relación entre los profesores e investigadores sobre el aspecto pedagógico, mediante una pedagogía en contexto llamada también pedagogía a tres niveles, que a continuación describimos.

Primer nivel. Pedagogías genéricas: son las específicas de una asignatura, cualquiera que sea. En Cooper *et al.* (2006) encontramos que Krutetskii y Hershkowitz identifican cuatro aproximaciones precisas para la enseñanza de las matemáticas: a) flexibilidad, b) reversibilidad, c) generalización y d) ejemplos no prototípicos.

Segundo nivel. Pedagogías de dominio: son aquellas estrategias o métodos de enseñanza y aprendizaje apropiados para desarrollar un tópico matemático. Retoman los cuatro parámetros de Askew *et al.* (2000), los cuales son tareas, conversación, herramientas, además, de las relaciones y normas; y las diez categorías que de acuerdo con McDonough & Clarke (2003) nos ayudarían a identificar a un profesor efectivo en la asignatura de matemáticas; dichas categorías son: características de las tareas, materiales y representaciones, adaptaciones y conexiones, estilos de organización, aproximaciones de enseñanza, interacción en el salón, expectativas, reflexión, métodos de evaluación y atributos personales del profesor.

Tercer nivel. Pedagogías técnicas: son los consejos y sugerencias prácticos que ayudan a que una lección en particular funcione. Como ejemplo citamos la enseñanza de las fracciones mediante el doblado de papel.

Como se observa, estas pedagogías en contexto definen el conocimiento pedagógico de la asignatura que impartirá un profesor en el aula. En el caso particular de las matemáticas, estos tres niveles de pedagogía conforman lo que llamamos Conocimiento Pedagógico en Matemáticas.

Otras investigaciones que se han realizado sobre el CME son la de Sorto, M., Marsall, J. H., Luschei, T. F. & Carnoy, M. (2009) el cual es un estudio sobre la relación entre el CME y la preparación y prácticas de los docentes en el nivel de educación básica. Sin embargo, su análisis difiere bastante del nuestro.

Algunos artículos en la misma línea de nuestra investigación serían: Mochón (2010), Pérez, V. E. L. & Mochón, S. (2009) y Ramírez, R. M. T. & Mochón, S. (2009); los dos último trabajos mencionados llevaron a cabo un taller de apoyo educativo, sin embargo, el artículo de Pérez *et al.* (2009) se centra más en la reflexión de la práctica docente y el conocimiento en general del profesor de primaria, mientras que el de Ramírez *et al.* (2009) remota las tres facetas del CME, pero difiere de nuestro trabajo debido a que nosotros solo retomamos dos facetas que están más apegadas al Conocimiento Pedagógico sobre dicha asignatura, además de que el estudio de Ramírez *et al.* (2009) se realizó con profesores de primaria en activo y el nuestro con futuros docentes de Secundaria, pues consideremos que podemos tener mayor impacto desde la formación de los futuros profesores.

Metodología

La investigación tuvo un carácter cualitativo con enseñanza y se llevó a cabo con profesores en formación del sexto semestre de la Licenciatura en Secundaria con especialidad en Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México; en el espacio de la asignatura de Observación y Práctica Docente IV en donde los normalistas se encuentran realizando sus prácticas docentes en la asignatura de matemáticas con alumnos de los tres grados de secundaria y ponen en juego los elementos adquiridos en las asignaturas de su especialidad, además de tener horas en la normal para compartir y fortalecer sus experiencias frente a grupo. La recolección de datos de nuestra investigación, se llevó a cabo de algunos instrumentos como lo fueron:

I) Un cuestionario sobre la efectividad del profesor (de 22 reactivos) en la asignatura de matemáticas y **II)** un cuestionario de elementos pedagógicos (de nueve preguntas) cuyo objetivo fue indagar los aspectos pedagógicos que conocen y emplean los docentes en formación, en sus clases de matemáticas. Los ítems de ambos instrumentos estuvieron diseñados y analizados conforme a los cuatro parámetros de Askew *et al.* (2000) y las 10 categorías de MacDonough & Clarke (2003).

III) Observaciones de clases (cuatro iniciales y cuatro finales), teniendo por objetivo explorar el trabajo de los estudiantes a profesor, conocer las herramientas y actividades que utilizan para algunos temas de matemáticas, además de observar la manera en que organizan y se comunican con sus estudiantes durante la clase.

IV) Implementación de un taller de apoyo educativo de siete sesiones con el fin de explorar y reflexionar el Conocimiento Pedagógico que los estudiantes a profesor conocen y manejan al impartir una clase de matemáticas. Las actividades que se desarrollaron en las seis sesiones fueron las siguientes:

Primera sesión: se realizó la discusión de las respuestas a las preguntas del cuestionario de elementos pedagógicos que dieron los futuros docentes, con el objetivo de clarificar conceptos, averiguar y reflexionar el Conocimiento Pedagógico que conocen y dominan.

Segunda y tercera sesiones se organizó al grupo en equipos para que leyeran, analizaran y expusieran a sus compañeros una parte de los artículo "Colaboración con maestros para mejorar el aprendizaje de las matemáticas: Pedagogía a tres niveles" y "Describiendo la práctica de maestros efectivos de matemáticas en los años tempranos", con el objetivo de identificar y reflexionar sobre la necesidad de poseer un conocimiento de contenido sobre la asignatura de matemáticas, pero sobre todo contar y poner en práctica el conocimiento del contenido pedagógico para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general.

Cuarta y sexta sesiones: los profesores en formación JP y LN impartieron una clase muestra abordando el tema de fracciones y números decimales, y el tema de cálculo mental, respectivamente. Tuvo como finalidad observar los elementos pedagógicos que el estudiante a profesor maneja; además, de que sus compañeros le recomendaran otros aspectos pedagógicos que podría incluir para mejorar su práctica docente.

Q**uinta sesión** se dedicó al análisis de las hojas de trabajo que los futuros docentes diseñaron y emplearon en la primera jornada de sus prácticas docente.

Séptima sesión el normalista F nos mostró su manera de trabajar el tema de cálculo de áreas de figuras geométricas y al igual que a sus compañeros JP y LN, el resto del grupo le hizo aportaciones sobre los elementos pedagógicos que utilizó al desarrollar su clase.

V) Un cuestionario final cuyo objetivo fue conocer los elementos pedagógicos que los estudiantes a profesor rescataron y reflexionaron antes, durante y después del taller de apoyo educativo mejorando así su práctica docente; constó de tres reactivos.

Resultados

I) Primer cuestionario

De las diez categoría que enuncian McDonough & Clarke (2003) podemos mencionar lo siguiente, relacionado a la categoría de atributos personales y reflexión de la actividad docente, encontramos que solo una estudiante a profesora considera importante observar los errores del profesor y no solo los de los estudiantes de secundaria al momento de impartir una clase, como elementos importantes para que se tenga éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de matemáticas; sin embargo la mayoría de los docentes en formación se inclinan más hacia el conocimiento de un tópico matemático como el responsable de que la enseñanza-aprendizaje de la asignatura de matemáticas tenga éxito, dejando de lado el aspecto pedagógico y didáctico de la materia mencionada.

En la categoría de métodos de evaluación, los docentes en formación reconocieron llevar a cabo una evaluación cuantitativa por medio de exámenes y resolución de ejercicios; además de ser el otorgamiento de una calificación el medio como estimulan a sus alumnos para que participen en clase.

Los docentes en formación en cuanto a la categoría de organización y estilos de enseñanza mencionaron que la forma en que más trabajan con el grupo es de manera individual o en equipos, como ejemplo citamos del trabajo individual citamos el siguiente comentario de la normalista FA "Interesante para verificar que cada alumno sabe lo que hace…"; con respecto al trabajo en equipos tenemos las siguientes participaciones JA mencionó "Los alumnos, entre ellos dan ideas y llegan a cosas concretas" y OS "Por medio del trabajo en equipo, los alumnos socializan sus ideas".

II) Segundo cuestionario

Se pudo observar que en el aspecto de actividades o tareas, la resolución de problemas es la tarea que más ponen en juego los profesores en formación, lo anterior se debe a que en los planes y programas se menciona como enfoque de la asignatura de matemáticas, la resolución de problemas.

Los tipos de conversación que se establecen en un salón de clase de acuerdo a Askew *el at.* (2000), no todos son puestos en práctica por los normalistas a lo largo de sus sesiones, a pesar de que identifican que todas son importantes. Pues algunos comentarios de la conversación que se establece entre alumnos encontramos los siguientes comentarios CR "Entre ellos difunden ideas erróneas del tema que se esté tratando…" y LN "Puede existir una mala información o una equivocación en el desarrollo de la actividad".

En lo que respecta a las herramientas que los futuros docentes ponen en práctica, estas se basan más la pedagogía genérica que mencionan Cooper *et al.* (2006), sólo un docente en formación, reconoció la pedagogía técnica en la enseñanza de fracciones.

Las normas que más reconocen los normalistas que deben ser implementadas en un salón de clase son el respeto, la puntualidad y la disciplina de los estudiantes de secundaria.

III) Observaciones de clase

Algunas deficiencias que se detectaron en los docentes en formación al llevar a cabo las observaciones de clase, fueron:

- Escasa utilización diversos recursos didácticos, lo que más emplean son fotocopias con ejercicios, los libros de texto, juegos de geometría, entre otros.
- Las actividades diseñadas por los docentes en formación no siempre tienen un objetivo claro y suelen ser el planteamiento y resolución de problemas o ejercicios, además de la solución de hojas impresas.
- No siempre escuchan atentamente a sus alumnos, ni consideran sus conceptos previos para desarrollar el tópico a trabajar.
- Se les dificulta conectar los temas con ejemplos de la vida diaria.

- Para motivar a sus estudiantes a participar en clase, se valen del otorgamiento de una calificación o puntos extras.

Las situaciones anteriores reafirman el escaso conocimiento por parte de los profesores en formación sobre el diseño, selección de actividades y materiales que permitan el desarrollo de un contenido matemático, aspectos que van de la mano con los cuatro parámetros y las diez categorías que Askew et al. (2000) y MacDonoug & Clarke (2003) consideran importantes y que el profesor debe tomar en cuenta al planear y diseñar una clase de matemáticas.

IV) Sesiones del taller

Sesión uno: en la pregunta que se refirió al diseño de actividades, encontramos que en su mayoría estaban basadas en la práctica o mecanización de los ejercicios o algoritmos, en lugar de ser tareas que ayuden a desarrollar el pensamiento de los estudiantes, para ilustrar lo anterior citamos el siguiente comentario de la profesora en formación MY "*La verdad, realizamos ejercicios de memorización o mecanización, por ejemplo, al impartir un tema de ecuaciones de primer grado, primero damos la explicación sobre la forma de resolverlas y sus reglas, después entregamos una serie de ejercicios a resolver; son quince o veinte ecuaciones nada más*".

Sesiones dos y tres: Después de la revisión de los artículos de investigación internacional sobre el Conocimiento Pedagógico en la asignatura de matemáticas, retomamos el comentario de la normalista MY sobre el diseño de las actividades y planteamos la siguiente interrogante ¿cómo sería entonces una actividad que ayude a desarrollar el pensamiento de los alumnos y no resulte ser sólo una mecanización?, algunas sugerencias que dieron los futuros profesores fueron:

- CI: "*Sería una actividad o tarea que tenga un grado de complejidad*".
- LN: "*La actividad si debe tener una complejidad, pero en cuanto al desarrollo del pensamiento, no debe ser algo muy elaborado o complejo que los alumnos no lo entiendan y terminen por abandonarlo".*
- MY: "*Un ejemplo claro es lo que acabamos de ver sobre los decimales y las fracciones, ¿cuál es mayor $\frac{1}{3}$ ó 0.33333?, entonces el alumno ya activa su pensamiento buscando estrategias y argumentos que le permitan demostrar cuál es mayor y por qué".*

Las participaciones anteriores, nos demuestran que mediante los textos leídos y analizados a lo largo del taller, los estudiantes a profesor reconocen que es necesario modificar el diseño de las actividades o tareas que brindan a sus alumnos, para lo cual deben evitar el empleo de la mecanización.

Sesión cinco: encontramos que las de trabajo diseñadas por los normalistas, en su mayoría solo enlistaban una serie de operaciones o problemas que los alumnos deberían de resolver, como la que se muestra a continuación en la figura 1.

Escuela Secundaria Diurna No. 78 "República de Paraguay"

Nombre del alumno: _______________________No. De lista: ______

Grupo: ___________ Fecha: _____________ subtema: Ecuaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza su comprobación.

a) $k-2=23$	d) $5d=18$	g) $2d+14=30$
b) $f+9=24$	e) $6t=33$	h) $6k-17=37$
c) $x+2.5=5$	f) $10g=42$	i) $8t+42=58$

Figura 1. Hoja de trabajo diseñada por los normalistas durante la primera jornada de trabajo

En el ejemplo anterior, se muestra que los futuros docentes tienen la creencia de que una hoja de trabajo es una lista de ejercicios por resolver y mecanizar; además de no brindar el espacio suficiente para solucionar el trabajo. Cabe aclarar que la mecanización puede llevar a los estudiantes incluso a la repetición de los mismos errores de solución en los ejercicios planteados. La situación anterior sé mejoró en la segunda jornada de trabajo donde mostraron hojas de trabajo con un objetivo, diversidad de ejercicios y con espacio suficiente para ser solucionados, e incluso las ocuparon para desarrollar toda la sesión y no solo como medio para evaluar el tema trabajado en clase.

V) Sesión siete donde se analizó el cuestionario final

En el cuestionario final que se aplicó, resultó importante plantear la siguiente pregunta a los docentes en formación, ¿Escribe lo que aprendiste en este taller acerca del aspecto pedagógico que se debe llevar a cabo en la asignatura de matemáticas? Pues permitió conocer la concepción inicial que tenían y lo que tienen después de la participación en el taller, como lo muestra el siguiente comentario de la futura profesora FA "*Aprendí el significado de la pedagogía dentro de un salón de clases, porque no se trata solamente de llegar al aula pasar lista, explicar, dejar trabajo a los alumnos y sentarse, si no es todo una serie de actividades que deben ser planeadas, actividades con respecto a las actitudes y capacidades de cada alumno, es buscar la forma en que el alumno adquiera, procese un conocimiento…*". En la aportación se observa la reflexión sobre el concepto e importancia del Conocimiento Pedagógico en la asignatura de matemáticas.

Conclusiones

Los profesores en formación reconocieron que tienen carencias sobre lo que significa el Conocimiento Pedagógico (que involucra el conocimiento para la instrucción y de estudiantes) en la asignatura de matemática, y por ello se inclinan más al dominio y conocimiento de los temas específicos de la asignatura de matemáticas.

Se hace necesario un conocimiento de herramientas y materiales didácticos que permitan a los futuros docentes el desarrollo de un tópico matemático de una manera distinta a la que están acostumbrados (explicación y resolución de ejercicios).

Los docentes en formación reconocieron las carencias que tenían al planear, desarrollar y evaluar una clase de matemáticas, además del diseño de hojas de trabajo; dichos aspectos se fortalecieron gracias a la lectura y reflexión de los artículos enfocados a identificar el Conocimiento Pedagógico en la asignatura de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics 60*(3), 359-381.

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. y Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. *Proceeding Psychology of Mathematics Education 24*(2), 17-24.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2007). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Manuscrito enviado para publicación.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceeding Psychology of Mathematics Education 28*(2), 95-102.

Cooper, T., Baturo, A. & Grant, E. (2006). Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels. *Procceding Psychology of Mathematics Education 30*(2), 361-368.

McDonough, A. & Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. *Procceding Psychology of Mathematics Education 27*(3), 261-268.

Mochon, S. (2010). La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 355-371.

Pérez, V. E. L. & Mochón, S. (2009), Impacto de un taller de discusión en el conocimiento y en la reflexión sobre la práctica docente de maestros de primaria. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1521-1528. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ramírez, R. M. T. & Mochón, S. (2009), Estudio de los efectos de un taller de apoyo educativo en matemáticas para maestros de educación básica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1463-1472. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Sorto, M. A.; Marshall, J. H.; Luschei, T. F. & Carnoy, M. (2009). Teacher Knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: a comparative study in primary and secondary education, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(2)*, 251-290

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES Y SU IMPACTO EN LA ENSEÑANZA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
CICATA-IPN/UTVM; ESIME-IPN México
elitret@hotmail.com

Resumen. Esta investigación forma parte de un estudio cualitativo, realizado en una Universidad Tecnológica del estado de Hidalgo, México. El estudio está enmarcado en la línea de investigación de la Matemática en el Contexto de las Ciencias en la fase de formación docente y busca entender como las concepciones de los profesores pueden impactar directamente en el aprendizaje de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas. Para determinar las concepciones de los profesores en torno al objeto matemático de interés se utilizó como instrumentos de recogida de datos la entrevista a profundidad, la cual se aplicó a tres docentes de matemáticas. Los resultados fueron analizados y clasificados evidenciando un fuerte arraigo de concepciones pedagógicas tradicionales en donde hay un fuerte predominio de la enseñanza de reglas y procedimientos.

Palabras clave: matemáticas, matemática en contexto, formación docente.

Abstract This research is part of a qualitative study, which was realized in a Technological University located in Hidalgo State. The study framed in the line of research of the Mathematical in Context of Sciences in the phase of teacher training and looks for to understand how the conceptions of the teachers can impact directly in the learning of a system of linear algebraic equations with two unknown. In order to determine the conceptions of the teachers around the mathematical object of interest the interview and the questionnaire were used like instruments of collection of data. The results were analyzed and classified demonstrating a strong root of traditional pedagogical conceptions where there are a strong predominance of the education of rules and procedures.

Key words: mathematics, mathematical in context, teacher training.

Introducción

Uno de los actores importantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es el profesor, quien acerca de algún modo el conocimiento al estudiante. Sin embargo, debido a sus concepciones, es decir a la historia personal de cada profesor, su experiencia, su forma de pensar, su posición frente a su práctica docente (Ponte, 1992, 1994 y 2006) posibilitan o dificultan el acceso al conocimiento. Al respecto Ernest (2005) refiere que las concepciones de los docentes sobre la educación, sobre el valor de los contenidos y sobre los procesos propuestos por el currículo los llevan a interpretar, decidir y actuar en la práctica, en otras palabras, a seleccionar libros de texto, adoptar estrategias de enseñanza, evaluar el proceso de enseñanza aprendizaje, entre otros. Por esta razón la influencia que tienen las concepciones sobre el actuar de los docentes han hecho que estas sean consideradas elementos clave para comprender los procesos de enseñanza aprendizaje que se dan en el aula.

Al respecto, muchas investigaciones se han realizado en torno a las concepciones de los profesores y su impacto en la enseñanza; por ejemplo, Pajares (1992) señala que las concepciones de los profesores tienen un rol adaptativo, es decir permite a los profesores ajustarse a una determinada situación de la mejor forma posible. Thompson (1992) reconoce que la práctica docente se da en un ambiente que demanda al docente conocimientos y habilidades por lo cual muchas veces este se guiará por la experiencia (concepciones), aunque es posible que también existan situaciones diferentes o inusuales que le exigirán una respuesta distinta, es decir, que le demandaran mostrar un pensamiento reflexivo y crítico que le permita tomar las mejores decisiones.

En esta investigación, dada la importancia de la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para el Técnico Superior en Tecnología de Alimentos (Trejo y Camarena, 2009) se busca entender cómo las concepciones de los profesores puede impactar directamente en la aprehensión de los alumnos del objeto matemático de interés. Al ser el centro de atención el proceder de los profesores ante el objeto matemático, la investigación se enmarca en la línea de investigación de la Matemática en Contexto de las Ciencias (Camarena, 2006), en la fase de formación del docente, en donde a través de los resultados de diversas investigaciones se hace hincapié sobre la necesidad de que el profesor de matemáticas de instituciones en donde no se forman matemático sino ingenieros o licenciados tengan conocimientos sobre la carrera en donde laboran, sobre los contenidos a enseñar y sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, aspectos que contribuyen favorablemente en sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

Problema de investigación

Las concepciones de los profesores de matemáticas son elementos clave para comprender el proceso de enseñanza aprendizaje que se da por los estudiantes en el aula. Por lo cual se plantea un estudio cuyo objetivo es aproximarse a las prácticas pedagógicas de los docentes desde sus concepciones. Específicamente se analizan las concepciones de los profesores en torno a la enseñanza de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Por ello, las preguntas de investigación que guiaron el estudio fueron las siguientes:

a) ¿Qué concepciones tienen los profesores sobre la enseñanza de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?

b) ¿Qué concepciones tienen sobre el papel de la contextualización en el aprendizaje y enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?

c) ¿Qué situaciones/contextos utilizan los profesores para dar sentido o significado a la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Metodología

El enfoque adoptado para la investigación fue cualitativo. Se optó por este enfoque pues permite comprender, en la medida de los posible, todos los procesos que ocurren al interior del aula y así tener un acercamiento a las concepciones sostenidas por los docentes ante el objeto matemático sistema de ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas.

Participantes: El estudio de concepciones se realizó tomando una muestra conformada por tres docentes de matemáticas I que imparten clases en el Programa Educativo de Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, ubicada en Ixmiquilpan, Hgo. México. La característica relevante de los docentes en general es que han impartido al menos más de tres veces el curso antes señalado y no son matemáticos de formación si no ingenieros en diversas áreas del conocimiento.

Instrumentos: La información se obtuvo mediante la realización de entrevistas individuales en profundidad en donde se tuvieron preguntas guía (anexo 1). Además, se realizaron observaciones de aula, las cuales se efectuaron durante una semana en cada salón de clases, es decir, en cinco jornadas educativas completas, donde los profesores de interés impartieron clases.

Procedimiento: Toda la información recogida, fue organizada en una matriz que incluye los principales hallazgos sobre las concepciones de los profesores en relación a la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales (la motivación, el papel de los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático, la enseñanza vista como reglas y procedimientos y la enseñanza alejada de la realidad). Cabe señalar que el presente documento solo presenta algunos elementos investigados en el estudio de las concepciones, mismos que dan luz sobre la enseñanza de la matemática, concretamente el objeto matemático de interés, con mayor incidencia entre los docentes.

Resultados y discusión

Antes de presentar los resultados es importante abordar tres aspectos que permitirán tener una mayor comprensión de estos. Primero, en sus orígenes las Universidades Tecnológicas, al contratar personal docente se privilegiaba la experiencia profesional en el sector productivo sobre la experiencia docente, actualmente muchos de estos profesores continúan laborando; segundo, el sector productivo tiene una fuerte participación en el diseño y desarrollo de planes y programas de estudio, mismos que son revisados y actualizados cada cuatro años.

Finalmente, la investigación se realizó cuando se trabajaba con una didáctica centrada en los procesos de aprendizaje de los estudiantes (plan 2004) donde el elemento integrador es el problema o situación problemática, es decir la enseñanza deja de centrarse en la disciplina (actualmente se trabaja con enfoque basado en competencias profesionales, planes 2010).

Los resultados se muestran por categorías y cuando se considera necesario se incluyen fragmentos de las entrevistas o preguntas realizadas a los profesores.

a) La motivación

Las entrevistas realizadas dieron cuenta de la importancia que los profesores otorgan a la motivación, en ella manifiestan que para que los estudiantes tengan interés por el aprendizaje de un sistema de ecuaciones lineales es importante este factor. Las estrategias, utilizadas para lograr la motivación de los estudiantes son: el trabajo en equipo, la reflexión sobre la aplicación de un sistema de ecuaciones lineales en la práctica, la participación y retroalimentación oportuna a los estudiantes. Los profesores indican utilizar estas estrategias cuando observan que el interés de los estudiantes decae, se sienten cansados, aburridos o inquietos. Esta concepción es producto de la experiencia práctica del profesor. La concepción más arraigada entre los docentes fue la que se muestra en la siguiente cita:

> *"Cuando fomento en la clase el trabajo en equipo los estudiantes se muestran motivados al aprendizaje, además les permite desarrollar habilidades de comunicación así como valores de responsabilidad, solidaridad, tolerancia y empatía. Si un alumno es tímido y no quiere participar frente a todo el grupo, cuando trabaja en equipo se siente motivado, resuelve sus dudas con sus iguales y de esa manera va aprendiendo como resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, logra hacer matemáticas".*

Al respecto, Woolfolk (1995) señala que el trabajo grupal puede ser una herramienta metodológica que promueva la motivación por aprender pues logra comprometer al estudiante con su propio proceso de aprendizaje. Además, señala que un trabajo en grupo bien orientado y monitoreado podría ser un escenario propicio para ejecutar tareas de mayor demanda cognitiva, pues permite realizar actividades como discutir, hipotetizar, argumentar, evaluar, sintetizar, organizar, reflexionar y resolver problemas. En contraste, el análisis de la información recogida concluye que las actividades grupales planteadas por los docentes difícilmente promueven el desarrollo de estas habilidades. Adicionalmente Camarena (2001) señala que una manera de motivar a los estudiantes para el estudio de las matemáticas es presentándole problemas contextualizados, del interés del estudiante por ser de su área profesional, laboral o vinculada con las ciencias que estudia.

b) El papel de los estudiantes

A pesar del modelo de enseñanza centrado en el estudiante no en los conceptos se detectó que la concepción del profesor respecto al rol del estudiante es que éste es un ente pasivo, que no gusta de las matemáticas y consecuentemente no le interesa aprenderlas. Los profesores consideran que para aprender matemáticas los estudiantes deben realizar una serie de ejercicios que los vuelvan diestros en los procedimientos. Es decir, los profesores consideran que el aprendizaje de un sistema de ecuaciones lineales es responsabilidad de los estudiantes y que deben saber resolverlos puesto que es un tema abordado en el nivel medio superior. Además, el profesor opina que si los estudiantes tienen bajo nivel en matemáticas es debido a una mala instrucción en el nivel educativo anterior, por problemas familiares o porque son irresponsables y no cumplen con sus tareas.

> *"Al llegar los estudiantes a la Universidad lo menos que se espera es que sepan resolver un sistema de ecuaciones lineales, es un tema abordado en el bachillerato. Además, para que un estudiante aprenda matemáticas deben ser estudiantes responsables, querer aprender, poner atención en la clase mientras explico en el pizarrón y luego hacer las tareas que se le dejan para ejercitar"*

Al respecto Camarena (2001) reflexiona sobre la necesidad de proporcionar a los estudiantes conocimientos matemáticos duraderos, fomentando el aprendizaje significativo y autónomo para lo cual establece la necesidad de ofrecer propuesta didácticas que permitan el logro de estos objetivos, plantea como estrategia didáctica a la Matemática en Contexto.

c) La matemática vista como reglas y procedimientos

Durante la investigación se encontró que la concepción de los profesores para la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en enseñar a los estudiantes una serie de pasos para resolver los ejercicios matemáticos. Cuando los estudiantes sean diestros en el desarrollo de los procedimientos y se tarden poco tiempo en su realización, entonces se considera, han aprendido matemáticas. El profesor se concibe como instructor más que como facilitador y piensa que a mayor práctica mayor aprendizaje. Al respecto, Ernest (2005), asevera que esta concepción corresponde con una visión instrumentalista de la matemática, es decir, se entiende a la matemática como un conjunto de resultados, en la cual se hallan reglas, procedimientos y herramientas sin una vinculación teórica ni práctica determinada.

> *"Cuando tengo que abordar el tema de ecuaciones lineales con dos incógnitas primero le explico a los estudiantes el procedimiento para resolverlo por los diferentes métodos algebraicos y gráficos y después ellos tienen que realizar una serie de ejercicios para que*

adquieran la habilidad en su resolución. El estudiante que más ejercicios realiza más aprende".

Es evidente que una instrucción basada en el desarrollo de procedimientos limita el desarrollo de las capacidades matemáticas, es decir no se fomenta el desarrollo de competencias de orden superior como el análisis, el razonamiento, la argumentación y la toma de decisiones. Solo se fomenta la memorización lo cual traerá como consecuencia que cuando el estudiante requiera hacer uso de sus conocimientos matemáticos para la resolución de problemas de su entorno profesional, laboral o de su vida cotidiana (contextualizados) no logren el objetivo (Camarena, 2006), adicionalmente en los estudiantes se crea la falsa idea sobre el aprendizaje de las matemáticas.

d) La matemática alejada de la realidad

Durante las entrevistas a los profesores al referirles la importancia de mostrar una matemática contextualizada a los estudiantes estos manifestaron que después de enseñar los procedimientos para la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas procedían a mostrar "la aplicación de los mismos" en la resolución de problemas tomados directamente de los libros de texto utilizados en clase. Se detectó, en general, que los trabajos realizados en clase en torno a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, no son desarrollados a partir de situaciones cercanas al estudiante. Consecuentemente, no identifican el objeto matemático como algo que tiene relación con la realidad lo que influye en la idea que los estudiantes construyan sobre el objeto matemático. Es decir, se forman la concepción de aquello que se enseña en clases tiene como objetivo el aprobar la materia sin ninguna otra contribución adicional y sin tomar en cuenta las ventajas que un adecuado pensamiento matemático les puede proporcionar en su vida personal, laboral y profesional.

Adicionalmente los profesores consideran que con el estilo de enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales los estudiantes serán capaces de resolver problemas de su entorno, es decir que ellos tienen la posibilidad de vincular por sí mismos los conocimientos matemáticos con los del área de su interés, área técnica o entorno laboral. Lo anterior queda en evidencia en la siguiente cita:

"Los problemas que se analizan en clases, referentes a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, son los que se obtienen de los libros. Tengo claro que hay aplicaciones directas en el área técnica de formación de los estudiantes pero el programa es ambicioso y no me da tiempo de preparar los problemas específicos, además hay cosas que desconozco del área de alimentos. Cuando ellos ocupen un

> *sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas van a poder resolverlos por que por eso realizamos muchos ejercicios".*

Lo anterior ocasiona que el aprendizaje no sea significativo para los estudiantes, y por lo tanto el objeto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es difícilmente aprendido. Los estudiantes no lograran realizar las conexiones entre el objeto matemático de interés y la realidad, por lo que podrían percibirla como un concepto que no tiene utilidad práctica en su cotidianeidad, exclusivamente en el aula y para cuestiones muy concretas.

Sobre las preguntas de investigación

En relación con los resultados obtenidos se posibilita atender las preguntas de investigación, a saber se tiene que *las concepciones de los profesores en la enseñanza de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas* con mayor arraigo son: las concepciones pedagógicas tradicionales, donde no se consideran los intereses, expectativas y necesidades de los estudiantes de una carrera considerada científico-experimental como lo es tecnología de alimentos. No se identifica a los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales como un objeto de conocimiento ni como un instrumento para los futuros profesionistas. Lo anterior repercute directamente en el aprendizaje del objeto matemático pues el estudiante considera este proceso como la adquisición de la destreza de procedimientos, percibe este objeto matemático como "algo" que solo es de interés para la clase de matemática y que no tiene relación alguna con su formación integral y profesional por lo cual tendrá dificultades al querer utilizarla para la solución de problemas contextualizados, específicos de su área de interés.

En relación con las *concepciones del profesor sobre el papel de la contextualización en el aprendizaje del objeto matemático de interés*, la concepción predominante es que enseñando los procedimientos y practicando con ellos el estudiante adquirirá la habilidad de aplicar dichos conocimientos en áreas específicas donde sean requeridos. No se presenta una matemática contextualizada en el área de formación e interés de los estudiantes, consecuentemente este cree que las matemáticas no son útiles para su formación profesional y laboral.

Finalmente se evidencio la ausencia de *situaciones/contextos utilizados por los profesores para dar sentido a la enseñanza del objeto matemático* por lo cual difícilmente se logra un aprendizaje significativo. Se reconoce la importancia del objeto matemático como apoyo para la solución de problemas del área técnica, sin embargo, debido a la amplitud de los programas de estudio y el poco involucramiento de los profesores en el programa educativo donde laboran no se hace uso de los problemas o proyectos contextualizados.

Conclusiones

Durante las entrevistas con los docentes de matemáticas se observó que la enseñanza del objeto matemático Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene las siguientes particularidades:

Hay un predominio de una enseñanza basada en concepciones predominantemente tradicionales donde el profesor es el que enseña, el que sabe y el estudiante el que aprende y debe tener una actitud pasiva.

Se apreció claramente que la enseñanza del objeto matemático es entendida como la transmisión de contenidos, lo cual se manifestó mediante el tipo de ejercicios realzados en el aula y la motivación como requisito indispensable para que los estudiantes capten los contenidos.

En la enseñanza del objeto matemático de interés hay un predominio de la matemática con visión instrumentalista, es decir como un conjunto de reglas y procedimientos; la enseñanza predominante es mediante la repetición y el uso de la memoria.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (2001). La Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Antologías 1*. COLME. 149-169. México.

Camarena, G. P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica.* 10(04). 167-173. IPN, México.

Ernest, P. (2005). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Recuperado el 25 de junio de 2009 en http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Recuperado el 28 de mayo de 2009 en http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte).

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal. Recuperado el 28 de mayo de 2009 en http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte.

Ponte, J. P. (2006). *Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros*. Recuperado el 20 de febrero de 2009 en http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-sp/Las%20creencias.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NCMT. New York. Grows, pp 127-146.

Trejo, T. E. y Camarena, G. P. (2009). Problemas contextualizados: una estrategia didáctica para aprender matemáticas. En Lestón, P. (Ed.). (2009). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*,831-841. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Woolfolk, A. (1995). *Psicología del aprendizaje*. México: Prentice Hall.

ANEXO 1

PREGUNTAS GUÍA PARA ENTREVISTA CON PROFESORES

1. ¿Qué actividades realiza para que el estudiante se interese en su clase de matemáticas, particularmente en el tema de sistema de ecuaciones lineales?
2. ¿Cómo es el actuar de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje del tema matemático de sistema de ecuaciones lineales?
3. ¿Qué actividades realiza para que estudiante aprenda a resolver un sistema de ecuaciones lineales?
4. ¿Cuáles son los principales problemas que el estudiante tiene al resolver problemas con un sistema de ecuaciones lineales? ¿Cuáles considera que son las causas?
5. ¿Cuál es el papel que juega usted como profesor en la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales?
6. ¿Cómo concibe usted a las matemáticas?
7. Para la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales, ¿qué tipo de ejemplos utiliza?
8. Conoce usted si sus estudiantes tienen alguna dificultad para resolver problemas específicos de su formación profesional en donde es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales ¿A qué te atribuye esta situación?

CAPÍTULO 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Mauricio Herrera

maherrer2005@gmail.com

Hasta hace muy poco tiempo, la enseñanza de la matemática había sido un reflejo del conocimiento matemático generado dentro de una tradición: la tradición del papel y el lápiz. Sin embargo, las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el quehacer de la matemática. No sólo han afectado el tipo de matemática que es relevante, sino que también al modo en que ésta se hace y se practica. Este hecho tiene consecuencias importantes en todas las áreas del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. El impacto de las tecnologías computacionales se está dando en prácticamente todas las áreas de la educación matemática, entre las que destacan el campo del diseño y desarrollo curricular, la aplicación de nuevos métodos de enseñanza y uso de herramientas de aprendizaje, la transformación de las prácticas educativas de los docentes, la readecuación del rol de los actores principales en el proceso educativo, entre otras.

El currículo de matemática exige un reajuste importante a la luz de la implementación de tecnología. El currículo tradicional de matemática incorpora la realización de cálculos con papel y lápiz basados en procesos fundamentalmente algebraicos que requieren la aplicación, casi exclusiva, de habilidades cognitivas que no involucran procesos superiores de abstracción, generalización, diseño de estrategias de resolución de problemas, entre otros. En consecuencia, las habilidades matemáticas que se exigen a los estudiantes, muchas veces tienen que ver con la experticia de realizar cálculos rutinarios, que en realidad no pueden traducirse en un genuino pensamiento matemático. Este es el tipo de proceso cognitivo que puede transferirse a las nuevas tecnologías, sin que cause un perjuicio al conocimiento y habilidades básicas que requiere manejar el estudiante de matemática en la sociedad contemporánea.

De este modo, deben diseñarse estrategias didácticas, que tomen en cuenta estos servicios cognitivos que prestan las nuevas tecnologías, para que el estudiante pueda concentrar sus esfuerzos en la interpretación de los resultados, el desarrollo de estrategias de resolución de problemas y la creación de soluciones novedosas para ellos.

Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora gráfica tiene el potencial de diseñar métodos y estrategias de graficación, además de incorporar tabla de valores como parte del concepto y aplicación de función. Una probable conclusión que el estudiante podría hacer en este ambiente, es que la función es diferenciable en cierto valor del argumento, si al hacer acercamientos sucesivos sobre su gráfica, un vecindario de su imagen se ve como un trozo de recta. Así, de esta manera, empleará distintas representaciones de un mismo concepto, lo que le permitirá crear un conocimiento duradero y útil para abordar problemas con niveles de complejidad, incluso imposibles sin el uso de tecnología.

Las nuevas tecnologías tienen el potencial de modificar antiguos enfoques de enseñanza, sustituyendo el rol de "transmisor" del profesor y de "receptor" pasivo del estudiante, por otros donde este último se haga cargo de manera activa de gran parte de su instrucción. Efectivamente, las herramientas y procedimientos basados en nuevas tecnologías, hacen viable que la exploración, la experimentación, la modelización y la simulación, puedan incorporarse de manera fundamental en las actividades matemáticas de los estudiantes. Probablemente muchos de los profesores en la actualidad, estarán de acuerdo con el planteamiento de que antes de una formalización matemática rigurosa, el alumno debería antes reunir evidencias de fenómenos matemáticos, lo que es una muestra del cambio de paradigma que ha ido experimentado la educación matemática.

Hay en la actualidad numerosas e ingeniosas iniciativas para modificar la enseñanza de la matemática con el uso de tecnologías computacionales y de informática. Un par de estas iniciativas lo constituyen el denominado "*Proyecto SimCalc*" de *MathWords* (http://www.kaputcenter.umassd.edu/products/software/), que plantea la modificación del currículo matemático escolar sobre la base de cuatro estrategias básicas: 1) fenómeno antes del formalismo, 2) variación discreta antes de variación continua, 3) acumulación e integrales antes de razón de cambio y derivadas, 4) gráficas y tablas antes del simbolismo algebraico.

Una segunda experiencia es el caso de *GeoGebra* (http://www.geogebra.org/cms/es), que es un software de código abierto interactivo de matemática, que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. *GeoGebra* ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una *Vista Gráfica*, una numérica, *Vista Algebraica* y además, una *Vista de Hoja de Cálculo*. Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás, en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente. Esta es una herramienta fácil de usar y está dirigida tanto a profesores como a estudiantes.

Sin duda, con el uso adecuado de las nuevas tecnologías puede lograrse una convergencia entre las actividades de exploración y sistematización propias del experimento matemático, con la de formalización conceptual, una actividad imprescindible de la matemática. El teorema y las demostraciones matemáticas siguen siendo herramientas funcionales y estructurales de la actividad matemática.

El impacto de la tecnología en el estudiante es de carácter intrínsecamente cognitivo ya que esta se convierte en un nuevo ambiente para trabajar diversas representaciones de objetos y relaciones matemáticas. A diferencia de otros ambientes de aprendizaje, el recurso tecnológico proporciona de manera inmediata, una retroalimentación de las acciones y descubrimientos hechos por el estudiante, poniendo de manifiesto su compresión del fenómeno matemático tratado. El estudiante deberá convencerse así, de la necesidad de la demostración matemática para formalizar sus descubrimientos.

Sin embargo, la introducción de nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática no trae de manera automática cambios en el currículo, en la metodología o evaluación. Estas introducen en el sistema educativo ciertas tensiones que obligan a un reordenamiento de todo el proceso, a fin de encontrar un nuevo punto de equilibrio, en el cual, las herramientas tecnológicas e informáticas puedan tomar lugar con toda su potencialidad. Esto trae consigo el hecho de que los cambios en la educación matemática sean el resultado de un proceso paulatino de asimilación de las nuevas tecnologías en la cultura escolar. El proceso de interiorización de estos cambios por parte de los profesores es lento, más aún cuando el docente se ve en un rol dual de profesor-estudiante, debido a que debe aprender a dominar la tecnología antes de emplearla. Este proceso pasa necesariamente por una etapa de simple adopción, familiarización y luego paulatinamente a una transformación de las prácticas de enseñanza y evaluación.

La implementación de tecnología en la educación matemática requiere de investigaciones basadas en métodos científicos para valorar y cuantificar el impacto real de las nuevas tecnologías computacionales e informáticas en ella. Después de todo, las hipótesis autorizadas y opiniones sobre temas específicos, son humanas y pueden ser útiles como orientación personal, pero cuando se trata de decisiones y prioridades en la implementación de nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática, la investigación científica tiene que ser de rigor.

CALCULO DE ÁREAS PLANAS EN R^2 USANDO LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

José Juan Contreras Espinosa, José Luz Hernández Castillo, Armando Aguilar Márquez, Frida Ma. León Rodríguez, Carlos Oropeza Legorreta
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM México
jjuancon@correo.unam.mx, joselo26@servidor.unam.mx

Resumen. - En la enseñanza de las matemáticas y en particular del cálculo diferencial e integral, el profesor busca que los conceptos correspondientes se puedan entender por los alumnos a través de ejemplos sencillos al principio, propone varias estrategias para encontrar la solución de un problema, trata de motivar a los estudiantes y de proporcionar ejemplos de aplicación. En varias de las asignaturas de matemáticas para estudiantes de ingeniería, un aspecto fundamental al analizar un tema en particular es usar al menos tres formas de representar un concepto: El aspecto analítico, el geométrico y el tabular. En el presente trabajo se muestra una estrategia alternativa complementaria para estudiar el concepto de la integral definida haciendo uso de software matemático.

Palabras clave: – maple, áreas, rectángulos, integral definida.

Abstract. - Teachers look for that the appropriate concepts that can be understood by students through simple examples in the beginning of mathematics' teaching, especially in Differential and integral calculus; they suggest various strategies in order to find the solution for the problem, try to motivate the students and to provide applicable examples. In several fields of mathematics for engineering's students, a fundamental aspect to analyze a specific issue is to use at least three ways to represent a concept: the analytical side, the geometric and the tabular. The present work demonstrates a complementary alternative strategy to study the concept of the definite integral using mathematics' software.

Key words: - maple, areas, rectangles, defined integral.

Introducción

Antecedentes

Reconociendo según Dreyfus (1990), quién afirma que "los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) a un nivel puramente algorítmico, construido sobre imágenes conceptuales escasas. Y que las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto) como de los procesos de aproximación".

La comprensión de los conceptos básicos del Cálculo suele resultar una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes en sus primeras experiencias en esas asignaturas. Algunas de estas dificultades han sido documentadas sistemáticamente en diferentes regiones del mundo y bajo el abrigo de diversas perspectivas teóricas (Orton, 1983; Artigue, 1998 y Cantoral, 2000), en

Cabañas y Cantoral (2007). Específicamente, diferentes investigaciones muestras que los estudiantes tienen dificultades con la conceptualización de los procesos de integración y que estas se refieren al desequilibrio existente entre lo conceptual y lo algorítmico. De ahí que se coincide con quienes afirman que, bajo el influjo del discurso matemático escolar, la enseñanza del Cálculo Integral privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de integración en detrimento propiamente de la comprensión de nociones básicas, como se señala en (Quezada, 1986; Artigue, 1998; Cantoral, 2000), en Cabañas y Cantoral (2007).

Por otra parte, como ha sido reconocido, la enseñanza de las aplicaciones en Cálculo Integral es un tópico sumamente amplio. Sin embargo, una de las más utilizadas por los profesores es el cálculo de áreas planas debido a la flexibilidad que se tiene de su representación, en el pasado (aunque en algunos casos en el presente) dicho tema principalmente era cubierto con el apoyo de gráficas en láminas o directamente en el pizarrón, en donde se mostraban las gráficas dividiendo el área o la región buscada desde una pequeña cantidad de rectángulos hasta una cantidad muy amplia haciendo la suma de ellos de forma manual y con la suma también a través de algunas fórmulas que conducen a su solución del Cálculo Integral.

El desarrollo del presente trabajo se fundamenta a partir de la experiencia respaldada por la labor de más de una década de profesores adscritos al departamento de matemáticas en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, se ha llegado al consenso de estudiar la naturaleza de algunos de los conceptos que se abordan, dentro de los que se incluyen ejemplos de integrales con las soluciones correspondientes y de manera implícita se pretende que los estudiantes puedan transitar a través de la representación analítica, grafica, y tabular, promoviendo con ello se reconozcan sus características, las dificultades inherentes con el transito de las representaciones, compartan sus experiencias, discutan las ventajas o no que la computadora y el software especializado les puede ofrecer, etc. Este proceso ha permitido una mejora en la adquisición de los conceptos y de la interpretación del cálculo de áreas por parte de los estudiantes.

Actualmente algunos alumnos del área de las ingenierías que estudian en la facultad se encuentran en contacto permanente con los avances científicos y tecnológicos a través del uso frecuente de diversos software lo que les ha permitido ampliar sus oportunidades de desarrollo y de esta manera proporcionar una alternativa que les brinde una manera más rápida y eficiente de corroborar sus respuestas comparándolas así con los métodos convencionales.

Objetivo

Encontrar el área bajo la curva de tres formas distintas: rectángulos izquierdos, rectángulos medios y rectángulos derechos, como una propuesta alternativa de comprensión en el estudio del tema referido.

Desarrollo

La propuesta planteada en el trabajo consiste en que los estudiantes encuentren el área bajo una curva, limitada por dos rectas verticales y una horizontal que coincide con el eje de las abscisas; se presenta la solución de varias formas para encontrar el área de una manera aproximada, dividiéndola en cinco rectángulos y colocándolos en distintas posiciones, para posteriormente calcularla con una mayor precisión y comparar con los resultados previos para concluir de que forma se tiene menor error; todas las soluciones se encuentran a través de un proceso analítico apoyándose del software matemático Maple. Por último, se les solicita hacer una demostración gráfica con animación para el cálculo del área correspondiente a través del mismo software.

Por cuestiones de espacio se decidió presentar a continuación una respuesta general de la solución gráfica de un ejemplo en específico, en este caso la solución hace uso de las nuevas tecnologías a través del software matemático Maple.

Ejercicio. Calcular el área bajo la curva $y = x^2 + 1$ definida en $x \in [0,5]$ usando 5 rectángulos. Izquierdos, medios y derechos. Realizar un planteamiento analítico, gráfico y tabular.

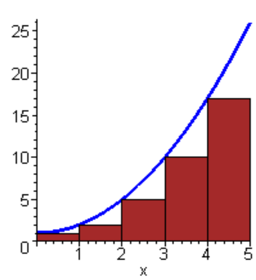
En el siguiente desarrollo usando el software matemático Maple, se presenta la parte correspondiente a los rectángulos izquierdos.

[> restart:with(plots):with(linalg):with(student):

Gráfica de los rectángulos izquierdos. El área es menor que la real.

[> ri:=leftbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=brown):

[> ri;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos.

Suma de los rectángulos izquierdos.

[> leftsum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=0}^{4} (i^2 + 1)$

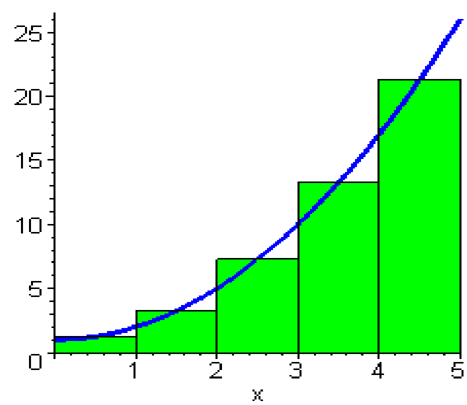
[> value(%); 35

Maple inicia la suma en i = 0 debido a que es el punto inicial donde el primer rectángulo toca a la curva en la parte superior izquierda.

A continuación se presenta la gráfica de los rectángulos medios, el área es ligeramente menor que la real (es la mejor aproximación debido a que se equilibra al compensarse los errores por abajo y por arriba de la curva).

[> rm:=middlebox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=green):

[> rm;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos medios.

Suma de los rectángulos medios.

[> middlesum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=0}^{4} \left(\left(i + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right)$

[> value(%); $\frac{185}{4}$

[> evalf(%); 46.25000000

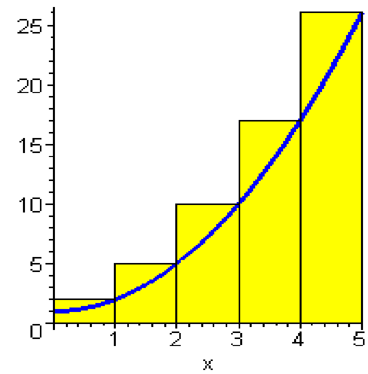
Nota: Maple inicia la suma en i = 0 debido a que es el punto donde inicia el área del primer rectángulo, la curva toca al primer rectángulo en la parte superior media en x = 0.5.

En esta última parte del cálculo del área con el software matemático Maple, se presenta lo correspondiente a los rectángulos derechos.

Gráfica de los rectángulos derechos, el área es mayor que la real.

[> rd:=rightbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=yellow):

[> rd;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos derechos.

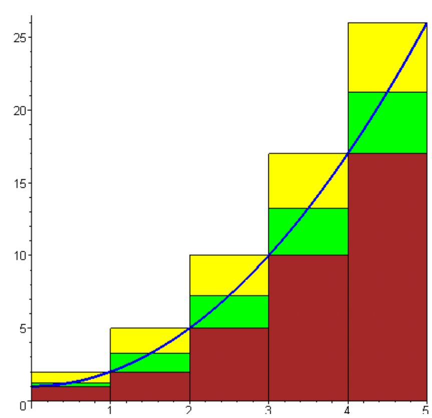
Suma de los rectángulos derechos.

[> rightsum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=1}^{5} (i^2 + 1)$

[> value(%); 60

En la gráfica siguiente, se muestran los tres tipos de rectángulos en el mismo plano cartesiano de referencia, en donde se puede observar claramente que el cálculo del área a través de los rectángulos medios es la que tiene menor error.

[> display(ri,rm,rd);



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos, medios y derechos.

[> 35 < 46.25 and 46.25<60;

true

35 < 46.25 < 60; *ri* < *rm* < *rd*.

A continuación se obtiene el área real.

[> Int(x^2+1,x=0..5)=int(x^2,x=0..5); $\int_0^5 x^2+1\,dx = \frac{140}{3}$

[> lhs(%)=evalf(rhs(%)); $\int_0^5 x^2+1\,dx = 46.66666667$

Cálculo del área de los tres tipos de rectángulos. Paso a paso.

Suma de los rectángulos izquierdos.

[> f:=x->x^2+1:f(0)*1+f(1)*1+f(2)*1+f(3)*1+f(4)*1; **35** # Evaluando en la función.

[>(0)^2*1+1+(1)^2*1+1+(2)^2*1+1+(3)^2*1+1+(4)^2*1+1; **35** # Sustituyendo y evaluando en la función.

[> 1+2+5+10+17; **35** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

Suma de los rectángulos medios.

[> f:=x->x^2+1:f(1/2)*1+f(3/2)*1+f(5/2)*1+f(7/2)*1+f(9/2)*1; **185/4** # Evaluando en la función.

[> (1/2)^2*1+1+(3/2)^2*1+1+(5/2)^2*1+1+(7/2)^2*1+1+(9/2)^2*1+1; **185/4** #

Sustituyendo y evaluando en la función.

[> 5/4+13/4+29/4+53/4+85/4; **185/4** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

46.25000000

[> evalf(%);

(5 + 13 + 29 + 53 + 85)/4 = 185/4 = 46.25

Suma de los rectángulos derechos.

[> f:=x->x^2+1:f(1)*1+f(2)*1+f(3)*1+f(4)*1+f(5)*1; **60** # Evaluando en la función.

[> (1)^2*1+1+(2)^2*1+1+(3)^2*1+1+(4)^2*1+1+(5)^2*1+1; **60** # Sustituyendo y evaluando en la función.

[> 2+5+10+17+26; **60** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

35 < 46.25 < 60; *ri* < *rm* < *rd*.

En resumen área de los rectángulos izquierdos es menor al área de los rectángulos medios menor a área de los rectángulos derechos.

Visualizando los tres tipos de rectángulos en la misma lámina para hacer un análisis comparativo complementario a la gráfica anterior.

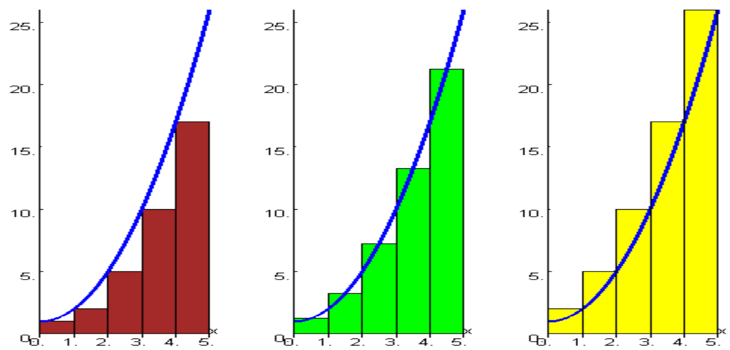
[> A:=array(1..3):

A[1]:=leftbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=brown):

A[2]:=middlebox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=green):

A[3]:=rightbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=yellow):

display(A);



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos, medios y derechos.

Animación del área bajo la curva

En esta parte se lleva a cabo el desarrollo a través del software matemático maple, en el que se ilustra la animación del área bajo la curva haciendo uso de los rectángulos medios que corresponden a la suma de Riemann con un total de 50 rectángulos, lo que permite visualizar el área con una exactitud muy aproximada a la real.

[> restart:with(student):with(plots):

[>setoptions(labels=["",""],axesfont=[HELVETICA,18],font=[TIMES,ROMAN,20], axes=boxed,title="Una aproximación de la integral definida usando rectángulos medios", titlefont= [TIMES, BOLD,12]):

[> f:=x->x^2+1:

[> a:=0:b:=5:

[> f_min:=minimize(f(x),x=a..b):

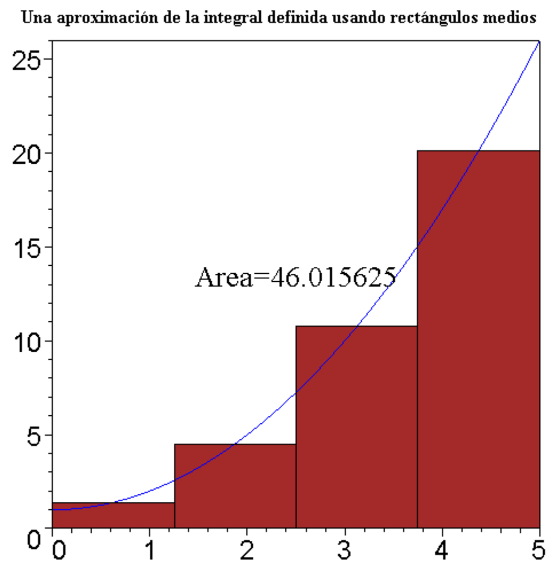
[> f_max:=maximize(f(x),x=a..b):

```
[> MidGraf:=(a+b)/2,(f_min+f_max)/2:

[>Rectángulos:=display(seq(middlebox(f(x),x=a..b,NumRects,shading=brown,color=blue,
   thickness=3),NumRects=4..50),insequence = true):

[>Area:=display(seq(textplot([MidGraf,sprintf("Area=%f",middlesum(f(x),x=a..b,
NumRects))]),NumRects=4..50),insequence=true):

[> display(Rectángulos,Area);
```



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$.

Un comentario para reflexionar

Entre otros, uno de los aspectos fundamentales por destacar en este punto abordado es la animación del área bajo la curva, los estudiantes distinguen con claridad la diferencia que se establece cuando se implementan los métodos que hacen uso de las nuevas tecnologías en contraste con los métodos convencionales. También se ha detectado que en su mayoría los alumnos tienden ha interesarse ampliamente en el uso del software matemático, echo que provoca una actualización permanente por parte de los profesores, así como la adquisición e instalación de las versiones más recientes del mismo utilizado en el laboratorio de computo.

Conclusiones y recomendaciones

En la solución del problema, el área encontrada con rectángulos izquierdos es menor que la real en virtud de que el error que se comete con este tipo de estructura y número de rectángulos es alto.

Así mismo, el área encontrada con rectángulos medios es ligeramente menor que la real, ya que el error generado con esta estructura se equilibra en gran medida al tomar errores por abajo y por arriba de la curva.

El área encontrada con rectángulos derechos es mayor que las dos anteriores y que el área real o la más aproximada en virtud de que el error que se comete con este tipo de estructura y número de rectángulos es alto.

Comparando las áreas se tiene que: El área de los rectángulos izquierdos es menor que el área de los rectángulos medios y esta a su vez es menor que el área de los rectángulos derechos.

Por lo antes expuesto, el método o la forma más recomendada por su precisión es la señalada como rectángulos medios, tomando como base las sumas de Riemann.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). *La integral definida: un enfoque socioepistemológico*. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C.

Dolores, C. (2005). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. Guerrero, México: Ediciones Díaz de Santos.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In Nesher, P. And Kilpatrick, J. (Ed.). Mathematics and Cognición: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (pp.113-134).Cambrige University Press.

Larson Hostetler. *Cálculo 1*. 12va, Ed. Mc Graw Hill. 2010. México.

Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp. 3-25). Guerrero, México: Ediciones Díaz de Santos.

Pursell J. Edwin. *Cálculo.* 9va. Ed. Pearson Educación, 2007, México.

Stewart J. *Cálculo Trascendentes Tempranas.* 4a, Ed. CENGAGE, 2008, México.

Thomas Finney. *Cálculo de una Variable*. 10ma. Ed. Pearson Educación. 2010. México.

CREENCIAS SOBRE LA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Gabriela Molina, Alejandro Rosas, Apolo Castañeda
Instituto Politécnico Nacional . México
jmolinaz@ipn.mx, alerosas2000@gmail.com, apcastane@gmail.com

Resumen. - En este documento se explica el cartel "Actividad a-didáctica para el estudio de las razones trigonométricas". Discute qué entendemos por actividad "a-didáctica" y cuál es nuestro interés en ella. Nuestro marco teórico es la teoría de las situaciones didácticas.

Palabras clave: - situaciones didácticas, razones trigonométricas, applets.

Abstract. - This article explains the poster "Actividad a-didáctica para el estudio de las razones trigonométricas". It discusses what we mean by activity "a-didáctica" and what our interest in it is. Our theoretical framework is the theory of didactical situations.

Key words: - didactical situations, trigonometrical reasons, applets.

Introducción

En la XXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa presentamos el cartel que se observa en la figura 1. El trabajo que se discute en él, es parte un proyecto que actualmente está en desarrollo y que se realiza con colegas de la Universidad Veracruzana, tal proyecto concursó en la convocatoria Conacyt (2008) y fue aprobado; el compromiso adquirido fue la elaboración de actividades didácticas que puedan ser utilizadas en computadora, con o sin conexión a Internet, las actividades están dirigidas a estudiantes de escuela secundaria.

Los elementos teóricos usados pertenecen a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), en específico se usan los términos "situación a-didáctica" y "medio", los cuales se discuten con detalle en el apartado siguiente.

Figura 1

Para explicar la idea que deseamos comunicar en él es necesario comentar los siguientes asuntos: ¿qué es la actividad a-didáctica? ¿Por qué nos interesa?

¿Qué es la actividad a-didáctica?

La situación a-didáctica la entendemos en el sentido de la Teoría de Situaciones Didácticas, como un problema que el profesor plantea al estudiante para que lo resuelva. Tal solución lo debe llevar a construir un conocimiento matemático. Los elementos de la TSD las retomamos del trabajo de Chevallard, Bosch, y Gascón (1998). Por otra parte, las actividades a-didácticas las definimos como aquellas que están formadas por un programa de computadora y una situación a-didáctica. Es decir, cuando la situación a-didáctica es planteada al estudiante por medio de una computadora, en el marco de un programa especialmente diseñado para ello.

¿Por qué nos interesan?

Las actividades a-didácticas son de nuestro interés porque planteamos un proyecto de investigación en el que nos proponemos generar materiales didácticos que pudieran ser estudiados por alumnos a través de la computadora, incluyendo en ellos la posibilidad de ejecutarse en Internet. Aquí las actividades a-didácticas son la idea básica en cada uno de los materiales que diseñamos. Las características que el proyecto tenía que cumplir se pueden consultar en el documento Conacyt (2008). Respectivamente, trabajos como el de Lagrange (2005) o Pérez (2007) nos hicieron reflexionar lo siguiente: ¿qué pasa con las tareas y las técnicas de solución de éstas, cuando en la clase de matemáticas se incorpora un dispositivo tecnológico? y ¿cómo plantear tareas a los alumnos en un escenario en el que se implica el uso de una computadora, de tal forma que no se copien esquemas de trabajo de escenarios tradicionales? El trabajo es complicado, pues nos hemos formado en un escenario tradicional (donde una de sus características es usar las herramientas lápiz y papel) y ello influye implícitamente en nuestros diseños. Sin embargo no quiere decir que sea imposible, por ello estamos construyendo propuestas, estas son programas computacionales que presentan a los alumnos la situación a-didáctica y permiten interactuar con él, siendo el programa y la computadora, el medio en que ellos construirán el conocimiento. El programa presenta una tarea al estudiante, le permite ingresar datos para resolverla y obtener resultados. Entonces el planteamiento de la situación a-didáctica es de nuestro interés porque es la directriz que guía el planteamiento de las tareas en estos materiales didácticos. La elección del tema razones trigonométricas es por dar un ejemplo concreto, y porque está incluido en el programa de estudios de secundaria en México, dados los términos en que definimos el proyecto debemos abordarlos.

La idea del cartel

Entonces la idea que pretendemos comunicar con el cartel es la siguiente, presentamos una situación a-didáctica para el estudio de la definición de razones trigonométricas. Tal situación es presentada al alumno por un programa computacional bajo la forma de una tarea que le asigna. En este caso es completar los valores faltantes con base en la información que el programa da, ver figura 2.

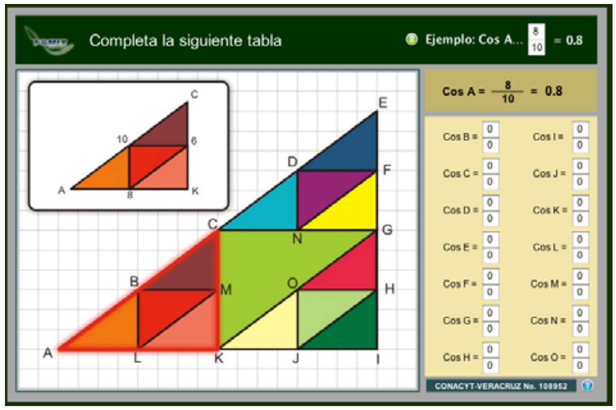


Figura 2

La computadora y el programa se convierten en el medio en que el estudiante ha de construir su conocimiento al interactuar con ambos. En el diseño el profesor deja a los estudiantes la responsabilidad de realizar la tarea, o los apoya con preguntas que les ayudan a concretarlas y finalmente realiza la institucionalización.

En el cartel, el triángulo de la figura 3 formado por bloques representa dos aspectos del diseño de la actividad, uno teórico, que en el diseño están implícitos elementos de la TSD (hace referencia al triángulo didáctico) y otro práctico, que es un material que se puede utilizar en línea, pues el triángulo en bloques es un símil del ícono que representa la conexión a Internet en uno de los sistemas operativos más usados (Windos®).

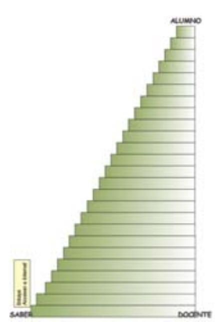


Figura 3

Comentarios finales

La experiencia ganada al trabajar en la elaboración de estos materiales nos confirma la dificultad de plantear tareas adecuadas para en un escenario computacional. Es necesario probarlas con estudiantes, analizar su funcionamiento y modificarlas, esa es parte de la tarea en que estamos trabajando. Algunas experiencias de profesores que las han usado son en apariencia alentadoras, pues reportan que este tipo de materiales capturan la atención de los pupilos y hace que éstos se involucren en la solución de las tareas, lo ven como un juego. Usamos la palabra "en apariencia" porque hace falta un estudio formal que documente esta situación, esto para el caso concreto de estos materiales, pues hay otros estudios relacionados con la implementación de dispositivos tecnológicos en la clase de matemáticas que explican situaciones semejantes. Otro asunto a reflexionar es sobre el aporte de utilizar elementos de la TSD, pues es un marco teórico que explica fenómenos escolares propios de escenarios tradicionales.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto Conacyt: "Diseño, desarrollo y generación de materiales didácticos en línea para la enseñanza de la matemática en el Sistema Educativo Veracruzano", con número de registro 108952. Las siglas Conacyt significan Consejo nacional de ciencia y tecnología, es una institución gubernamental mexicana que apoya a la investigación en diversas disciplinas científicas.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* España: Universidad de Barcelona.

Conacyt (2008). *Demandas específicas, convocatoria 2008-02*. Recuperado de www.conacyt.gob.mx/Fondos/Mixtos/convocatoria_FondosMixtos.html el 30 de enero de 2009.

Lagrange, J.B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp.113-135). E.U.A.: Springer.

Pérez, C.O. (2007). *Nuevas tecnologías y diseño de ambientes virtuales*. Cinvestav-IPN. Tesis de maestría no publicada.

UTILIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ARRASTRE DEL SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

Jesús Salinas Herrera
Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Vallejo, UNAM . México
jes54@servidor.unam.mx

Resumen. - La irrupción de la tecnología en la enseñanza ha generado nuevos escenarios para el aprendizaje. Esta situación implica la necesidad de tener en cuenta el papel de los instrumentos en las actividades de aprendizaje y discriminar el tipo de función didáctica que pueden desempeñar. Por ello, esta investigación se ubica en la línea de trabajos que se interesan por indagar el tipo de percepción que los estudiantes desarrollan acerca del comportamiento dinámico de una figura construida con un software de geometría dinámica. Dada la estrecha relación entre la práctica del arrastre y sus posibles consecuencias teóricas en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, el presente estudio indaga la manera en que éstos perciben el arrastre de un Cabri-dibujo después de la realización de múltiples construcciones geométricas, tanto con regla y compás como con el software Cabri – Géomètre..

Palabras clave: – geometría dinámica, arrastre, pensamiento geométrico.

Abstract. - The irruption of the technology in the education has generated new scenes for the learning. This situation implies the need to think over the paper of the instruments in the activities of learning and to discriminate the type of didactic function that they can play. For it, this study is located in the line of works that are interested for research the type of perception that the students develop about the dynamic behavior of a figure constructed with software of dynamic geometry. Given the narrow relation between the practice of the dragging and his possible theoretical consequences in the development of the geometric thinking of the students, the present study research the way in which students perceive the dragging of a Cabri-drawing after to carry out multiple geometric constructions, both with rule and compass and with the software Cabri - Géomètre.

Key words: - dynamic geometry, dragging, geometric thinking.

Introducción

La presencia de calculadoras, computadoras y software educativo en las escuelas modifica el entorno de la acción docente y establece nuevas condiciones para el aprendizaje de las matemáticas. Esta situación implica la necesidad de tener en cuenta el papel de este tipo de instrumentos en las actividades de aprendizaje (Verillon y Rabardel, 1995) y esclarecer el tipo de función didáctica que pueden desempeñar. Al respecto, Willibald Dörfler (1993) ha señalado que el uso apropiado de la computadora en la enseñanza de las matemáticas tiene el potencial, que no poseen otras herramientas, para producir “cambios estructurales en el sistema de (cognitivo) actividades del usuario humano” (Dörfler 1993, p.161). Sin embargo, es claro que, no es suficiente disponer de cierto tipo de tecnología; sino lo más importante es saber cómo explotar ese potencial en la enseñanza. Como señala Dörfler (1993), esto hace más urgente identificar la idea crucial alrededor de la cual organizar el uso de la nueva tecnología en la educación matemática, en particular el de la computadora.

El uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje ha sido estudiado por diversos investigadores desde diferentes perspectivas. El presente trabajo considera el uso de la computadora en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular, relacionado con la aprehensión perceptiva de las propiedades y relaciones en un Cabri-dibujo. El software Cabri-Géomètre proporciona una interface, la cual genera un objeto, que siguiendo a Colette Laborde (2000), llamamos "Cabri-dibujo". El comportamiento de este nuevo objeto es diferente al de un simple dibujo con lápiz y papel o al de una construcción con regla y compás.

La investigación que se ha realizado acerca del papel que tiene la geometría dinámica en la enseñanza de la demostración es abundante, sin embargo, continua siendo un terreno fértil, pues todavía no se conocen del todo las características esenciales de esas nuevas condiciones y, menos aún, sus alcances y consecuencias (Mariotti, 2002). A pesar de los estudios realizados por distintos investigadores para utilizar la geometría dinámica en el aprendizaje de la prueba matemática, no hay todavía un acuerdo unánime de la manera en que se puede alcanzar esta meta (Balacheff, 1987; Mariotti, 2002; Talmon y Yerushalmy, 2004; Jones, 2000). Algunos autores se han preguntado, incluso, si las propias ventajas de la geometría dinámica pudieran inhibir el aprendizaje de la prueba, al hacer innecesario establecer relaciones entre propiedades que pueden ser visualizadas directamente en una pantalla (Laborde, 2000). Sin embargo, tal visualización no es inmediata sino que existen dificultades para percibir e interpretar adecuadamente tales propiedades, como se reporta en este estudio.

En la literatura de investigación en matemática educativa se suele hablar indistintamente de propiedades y relaciones (Parzyzs, 1988; Laborde, 1993, 1994; Goldenberg y Cuoco, 1998; Laborde y Caponni 1994; Talmon y Yerushalmy, 2004). Sin embargo, en nuestra opinión es necesario tener en cuenta que tales conceptos son distintos y pueden estar relacionados con un diferente nivel de desarrollo cognitivo. Así, en la perspectiva de este enfoque es posible observar no sólo si los alumnos logran percibir las propiedades y relaciones en una construcción geométrica sino indagar que tipo de noción tienen de estos conceptos (Salinas y Sánchez, 2006).

Problema de Investigación

Dada la estrecha relación entre la práctica del arrastre y sus posibles consecuencias teóricas en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, el presente estudio indaga la manera en que éstos perciben el arrastre de un Cabri-dibujo después de la realización de múltiples actividades de geometría tanto con regla y compás como con el software Cabri –

Géomètre. Asimismo, explora la manera en que los alumnos relacionan lo visual con lo geométrico en un Cabri-dibujo. Así pues, de manera específica, el problema de investigación consiste en responder si una experiencia de enseñanza utilizando herramientas de mediación semiótica para elaborar construcciones geométricas, permite desarrollar en los estudiantes los requisitos cognitivos necesarios para percibir las propiedades y relaciones representadas por dicha figura geométrica.

Marco Teórico

Seguimos la perspectiva del análisis semiótico de Vygotsky (1985), el cual considera los procesos de mediación semiótica de las herramientas culturales, de los instrumentos psicológicos y de la mediación social. Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos – signos, símbolos, textos, formulas medios gráfico-simbólicos – que ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas naturales (Kozulin, 2000).

El uso de dispositivos técnicos en los procesos de aprendizaje ha conducido a la necesidad de ampliar y profundizar el análisis de su funcionamiento. Así, algunos autores han establecido una distinción importante entre el término de "artefacto" y el de "instrumento" (Verillon y Rabardel, 1995). Por una parte, se considera que un artefacto es un objeto particular con características intrínsecas, diseñado y construido con el propósito de realizar una tarea determinada. Por otra parte, se concibe un instrumento como un artefacto con las modalidades de su uso, en la manera en que ha sido elaborado por un usuario particular. Un mismo artefacto es un instrumento diferente para un novato que para un experto. La noción de un instrumento remite al sujeto e involucra la contraparte mental de un uso bien adaptado de un artefacto (Rabardel, 1995). Por consiguiente, un instrumento es una construcción interna, la cual tiene un desarrollo a lo largo de un proceso; "esto significa que en diferentes momentos, diferentes instrumentos están involucrados, no obstante que el mismo artefacto es de hecho usado" (Mariotti 2002, p.703).

La literatura reporta problemas diversos en los estudiantes para establecer un vínculo entre lo visual con lo geométrico en un Cabri-dibujo. Sin embargo, también se ha mostrado que los aspectos perceptivos del dibujo pueden favorecer su lectura geométrica (Duval, 1988, Laborde, 1994). Por lo tanto, consideramos que una manera de abordar esta situación es investigar más sobre la interacción entre lo visual y lo geométrico (Parzyzs, 1988; Laborde, 1993, 1994; Goldenberg y Cuoco, 1998; Laborde y Caponni 1994; Talmon y Yerushalmy, 2004).

Metodología

Se llevó a cabo un experimento de enseñanza basado en actividades de construcción geométrica utilizando el software Cabri – Géomètre, en un curso de geometría plana en el bachillerato, con alumnos de segundo semestre. El objetivo de las actividades fue doble: capacitar a los alumnos en el manejo del Cabri y detectar el tipo de génesis instrumental que desarrollan los alumnos, es decir, observar como utilizan el arrastre y que significado le dan. En cada sesión se les proporcionaron hojas de actividades a los alumnos y debían trabajar con ellas por parejas y llenarlas.

Las actividades consistieron en la construcción de una figura siguiendo un procedimiento dado. De esta manera los estudiantes realizaron 14 construcciones (el anexo ilustra una de dichas actividades). Al término de cada una de ellas, se les pidió que exploraran que elementos de la figura eran arrastrables y reportaran sus observaciones. Los conceptos que se trabajaron en ellas son: ángulos opuestos por el vértice; ángulos suplementarios y complementarios; rectas perpendiculares y mediatrices; rectas paralelas y ángulos formados por una transversal y suma de ángulos internos de un triángulo.

Los aspectos que fundamentalmente nos interesó observar en estas actividades fueron tres: 1) la manera en que los alumnos describen la dinámica general del diagrama cuando utilizan la herramienta de "arrastre", 2) la posible identificación de propiedades y relaciones entre elementos del diagrama, y 3) la escritura de la proposición esperada.

Las categorías que identificamos para el análisis de las respuestas de los alumnos, son tres:

Descripción Fenomenológica General __________________DG

Identificación de propiedades y relaciones _______________DF

Descripción Dinámica Precisa _________________________DP

La primera categoría alude a una descripción general de la dinámica de la figura usando la herramienta de arrastre. Utilizamos la siguiente gradación de esta categoría:

DG. Descripción fenomenológica general

2. Describen de manera general la dinámica de la figura separada del contexto del software.

1. Describen de manera general la dinámica de la figura en el contexto del software.

0. No describen la dinámica de la figura.

La segunda categoría hace referencia a si los alumnos identifican las propiedades y relaciones entre los elementos de la figura. Utilizamos la siguiente gradación para esta categoría:

DF. Identificación de propiedades o relaciones entre elementos de la figura.

2. Señalan la propiedad o relación geométrica representada.

1. Identifican los elementos de la relación requerida sin señalar alguna vinculación entre ellas.

0. No señalan ninguna característica geométrica representada en el diagrama.

Finalmente, la tercera categoría recoge la información de si los alumnos logran escribir la proposición esperada, en la cual identifican una relación geométrica.

DP: Escritura de la proposición esperada.

2. Escriben la proposición.

1. Expresan ideas relacionadas con la proposición, pero no la escriben explícitamente.

0. No expresan idea alguna de la proposición.

A continuación se ilustra la aplicación de las categorías en el análisis de una de las respuestas de una pareja de alumnos. La tarea a la que hacen referencia es construir dos rectas que se intersectan y observar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

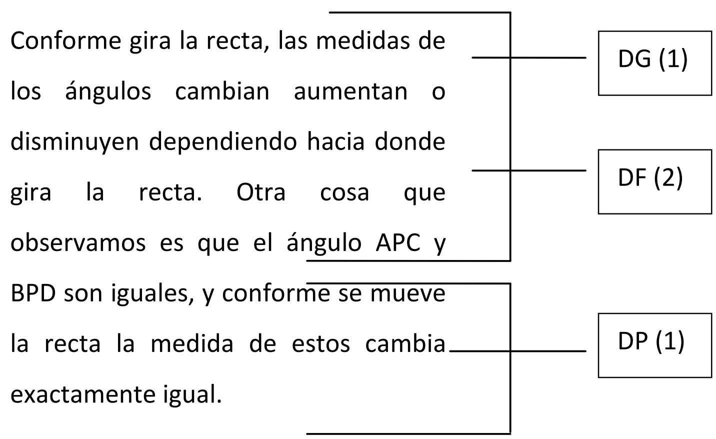


Fig. 1 Ilustración de la aplicación de las categorías de análisis a una respuesta de la pareja de alumnos Luciano & Víctor Manuel. Los números indican la gradación de la categoría respectiva.

Resultados

Con respecto a la descripción dinámica general (DG), predomina la descripción contextualizada por el software (casos con puntuación de 1) con 70.3 %. Sin embargo, también es importante señalar que la mayor parte de los alumnos realizan una descripción descontextualizada en al menos una tarea (casos con puntuación de 2). De esta manera, esta situación muestra una tendencia en el proceso de descontextualización de la herramienta utilizada y la incipiente capacidad que manifiestan los alumnos para usar un lenguaje simbólico.

Con respecto a la segunda categoría, observamos que los estudiantes tienen grandes dificultades para identificar las características geométricas representadas en los diagramas construidos con Cabri. 48% de casos con puntuación de 0. El 24% de veces los alumnos identifican los elementos de la relación requerida sin señalar alguna vinculación entre ellas y se presenta el 28% de casos con puntuación de 2. En este caso es importante acotar, que fundamentalmente estas respuestas se concentran en proposiciones muy familiares para los alumnos. De esta manera, se pone de manifiesto la dificultad de los alumnos para relacionar elementos de una figura entre sí.

Finalmente, con relación a la tercera categoría, sólo en el 9.8% de los casos los alumnos escriben la proposición esperada. Esta categoría permite observar si los alumnos son capaces de expresar una proposición geométrica en términos de una condicional, lo cual significa que existen serias dificultades para que los alumnos puedan reconocer explícitamente que ciertas condiciones geométricas producen otros resultados geométricos.

Conclusiones

El estudio permite observar que los alumnos llegan a usar la función de arrastre del software Cabri – Géomètre para describir una relación geométrica y su comportamiento dinámico y en consecuencia esta actividad incide en un rasgo cognitivo necesario para que aprendan a elaborar una conjetura.

Los resultados obtenidos muestran el tipo de dificultades que tienen los alumnos en la interpretación adecuada del uso de la función de “arrastre” y nos brindan una orientación de los aspectos que es importante atender para un mejor aprendizaje.

De acuerdo con el marco teórico de referencia, los tres aspectos observados en las categorías de análisis están relacionados con el desarrollo de un pensamiento teórico y son necesarios para que los alumnos avancen en la elaboración de un argumento deductivo.

Si bien, los resultados obtenidos con el uso del Cabri muestran dificultades para que los alumnos accedan a un dominio cognitivo adecuado, también es necesario resaltar la emergencia de una tendencia de desarrollo en estas direcciones.

Referencias bibliográficas

Esta investigación se realizó en el marco del Proyecto PB101109 del Programa Iniciativa para Fortalecer la Carrera Académica en el Bachillerato de la UNAM, 2009.

Balacheff, N. (1987). Processus de prueve et situations de validation; *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Dörfler, W. (1993). Computer use and view of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 159-186). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problems de géométrie en terms de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Université Louis Pasteur et IREM, Strasbourg, Vol. I, 57-74.

Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry?, en R. Leherer & D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 351-368.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students´ interpretations whew using dynamic geometry software and their evolving mathematical explications. *Educational Studies in Mathematics 44*, 55-85.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona: Paidós.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry, in *Learning from Computers* Keitel C. & Ruthven K. (eds), NATO ASI Series, Springer Verlag, Heidelberg (à paraître).

Laborde, C. (1994). Les rapports entre visuel et géométrique dans un eiao. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. La Pensée Savage, Paris, France.

Laborde, C. y Caponni, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d´un milieu pour l´apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14(1-2) 165-210.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics 44*, 151-161.

Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. En: L. English, et al. (Eds.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 695-723). New Jersey: Lawrence Eribaum Associates.

Parzyzs, B. (1988). Knowing vs. Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 19, no. 1, 79-92.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies- Approache cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Salinas, J. y Sánchez, E. (2006). Interpretation of the Cabri dragging in a learning experience. *Proceedings of the Twenty eight annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics Education, Vol. 2 427-429.*

Talmon, V. y Yerushalmy. M. (2004). Understanding dynamic behavior: parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics* 57, 91-119.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacrs: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psycology of Education,* 10, 77-101.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

ANEXO

EJEMPLO DEL TIPO DE ACTIVIDADES QUE REALIZARON LOS ALUMNOS

A C T I V I D A D 3

Nombre ________________________________ Fecha: ____________Edad ________

Rectas Perpendiculares y Mediatrices.

1. Crear el segmento AB (Barra de herramientas tercer botón, *Rectas*; herramienta, *Segmento*).

2. Construir su mediatriz (Barra de herramientas quinto botón, *Construir*; herramienta, *Mediatriz*)

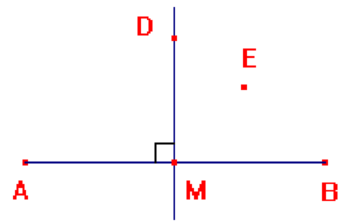
3. Crear el punto M, la intersección del segmento AB y la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, *Puntos*; herramienta, *Punto de intersección*).

4. Crear el punto D sobre la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, *Puntos*; herramienta, *Punto sobre objeto*) y crear el punto E que no esté sobre el segmento AB ni sobre la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, *Puntos*; herramienta, *Punto*).

5. Medir las distancias AD, DB, AE y EB (Barra de herramientas noveno botón, *Medir*; herramienta, *Distancia y longitud*). Arrastrar los puntos D y E (Barra de herramientas primer botón, *Puntero*; herramienta, *Puntero*). ¿Qué observas?

6. Marcar el ángulo ∠AMD (Barra de herramientas décimo botón, *Ver*; herramienta, *Marca de ángulo*).

7. Medir el ángulo ∠AMD (Barra de herramientas noveno botón, *Medir*; herramienta, *Ángulo*). ¿Qué Observas?, anótalo.



Escribe tus observaciones acerca del comportamiento dinámico de la figura al utilizar la función de “arrastre”. Formula una conjetura.

VALORACIÓN DEL IMPACTO DE LOS SOFTWARE MATEMÁTICOS EN EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA BÁSICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Patricia Có, Mónica del Sastre, Erica Panella, Ana Sadagorsky
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R. Argentina
co@fceia.unr.edu.ar,delsas@fceia.unr.edu.ar,panella@fceia.unr.edu.ar;sadagors@fceia.unr.edu.ar

Resumen. - En el presente trabajo se muestran los resultados parciales de una encuesta realizada a los docentes de Matemática de las carreras de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la U.N.R, en el marco de un proyecto de investigación sobre la utilización de la herramienta computacional como herramienta cognitiva. En la encuesta se indagó acerca de la valoración que los profesores hacen del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza, con el fin de analizar la relación existente entre su implementación en las clases, la disposición de tecnología y la capacitación tecnológica docentes.

Palabras clave: – software matemático, valoración, herramienta cognitiva.

Abstract. - In this work we show the partial results of a survey of Mathematic´s professors in engineering careers that are taught in the School of Exact Sciences, Engineering and Measuring of the UNR, as part of a research project about the use of computational tools as cognitive tools. In the survey, professors are asked about their assessment of the impact of mathematical software in teaching and learning, in order to analyze the relationship between its implementation in the classroom, the provision of technology and teacher´s technological training.

Key words: - mathematical software, assessment, cognitive tool.

Introducción

Si bien las TICs modifican esencialmente los entornos de enseñanza y de aprendizaje, sigue siendo un tema de permanente discusión la forma de llevar a cabo su adecuada integración al aula para transformarlas en instrumentos cognitivos (Jonannsen, 1995). Coincidimos con Litwin (2005) en que la mayor dificultad no radica en el uso de una nueva herramienta sino en concebir un proyecto en el cual tenga sentido la utilización de la misma y, a partir de él, los nuevos recursos tecnológicos puedan potenciar la propuesta educativa o enmarcarla.

Las Normas UNESCO sobre Competencias en TICs para docentes describe las mismas clasificándolas en ciertos módulos. En el documento se explicita que:

> Los docentes que muestren poseer competencias en el marco del enfoque de *creación de conocimientos* podrán: concebir recursos y entornos de aprendizaje basados en las TIC; utilizar las TIC para apoyar el desarrollo de la creación de conocimientos y del espíritu crítico de los estudiantes; apoyar el aprendizaje permanente y reflexivo de éstos. (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2008, p.22)

Particularmente, ya se ha reflexionado mucho en torno al papel que pueden desempeñar los software matemáticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Su incorporación está cambiando la manera en que docentes y estudiantes conciben las actividades matemáticas y desarrollan investigaciones en torno a distintos temas de la disciplina. Su gran potencialidad gráfica y de procesamiento, así como su cada vez más accesible y dinámica interfaz, constituyen características de gran relevancia en relación con los sistemas de representación y las representaciones semióticas que resultan de vital importancia para que los alumnos conciban la construcción del conocimiento matemático.

Existen experiencias (Gomes Allevato, 2007; Eisnberg, 2007; Olivero y Robutti, 2007; Torregosa y Quesada, 2007) en las que se concluye que una adecuada incorporación de las herramientas computacionales como recurso didáctico facilita el aprendizaje de la Matemática.

Desde el año 1995, en el marco de los proyectos radicados en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería, y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario: “Enseñanza de la Matemática con Herramienta Computacional” y “La Ingeniería Didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares”, ambos dirigidos por la Dra. Mercedes Anido, se han desarrollado y publicado numerosas investigaciones sobre la utilización de la herramienta computacional como herramienta cognitiva (Anido, 1998, 1999; Anido y Rubio Scola, 1999; Anido, Có y Guzmán, 1999; Có, del Sastre y Panella, 2004; Anido, Có, del Sastre y Panella, 2008).

Tales investigaciones pueden considerarse un antecedente en las líneas de estudio que se abren en el proyecto actual: “El rol de las representaciones en el aprendizaje de la Matemática básica en carreras donde su carácter se considera instrumental”, entre cuyos objetivos se encuentran:

- Diseñar, experimentar, evaluar, modificar y reproducir actividades de enseñanza con utilización de software matemáticos como herramienta cognitiva.
- Diseñar y validar instrumentos que permitan conocer la opinión de alumnos y docentes en cuanto a la motivación, facilitación y utilidad del trabajo interactivo con la computadora.

Este proyecto implica por su naturaleza, concepción y desarrollo, una intencionalidad didáctica y una reflexión sobre la propia práctica docente.

No se puede dejar de mencionar que también implica la formación de docentes en la utilización de la herramienta informática como herramienta cognitiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto conlleva a una preparación no sólo en el uso de software específicos sino también en la planificación de actividades y en la elaboración de materiales didácticos pertinentes.

En el año 2004 la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) al informar los resultados de la evaluación de algunas de las carreras que se dictan en la Facultad, resaltó que:

> En el área de Matemática no se trabaja sistemáticamente con software específico según se analizó en la reunión con docentes del área respectiva, y la razón que se menciona es la falta de infraestructura. .... Por último, dada la envergadura y el nivel de equipamiento de los laboratorios del bloque de ciencias básicas se ha puesto de manifiesto en reuniones con los docentes respectivos la necesidad de disponer de un sistema de mantenimiento y desarrollo de nuevas prácticas, lo que no aparece en los planes de mejora y por lo tanto se puntualiza como recomendación. (Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria, 2005, p.24)

Atendiendo a este requerimiento se impulsó, desde la Dirección del Departamento de Matemática, la realización de talleres de capacitación, cursos de perfeccionamiento y jornadas de divulgación de experiencias, que contaron con el apoyo y la participación masivos. Su principal intención fue la actualización de los docentes en el manejo de distintos software y en el diseño de nuevas propuestas didácticas, en un espacio en donde siempre se privilegió el trabajo en equipo. Además, y como a partir del año 2009 se dispone de un laboratorio de Informática de uso exclusivo para este Departamento, se exhortó a aplicar en forma sistemática todas aquellas propuestas que oportunamente fueron generadas por los docentes.

Sin embargo, al observar su poca implementación en las clases, nos preguntamos: ¿es esto resultado de una actitud o valoración desfavorable hacia su instrumentación?

Para dar respuesta a estas cuestiones y conforme con los objetivos de nuestro proyecto, se llevó a cabo una encuesta realizada a los profesores de Matemática del ciclo básico de nuestra facultad. En este trabajo se presentan los resultados parciales de la misma.

Cuestionario

El instrumento básico de la observación por encuesta es el cuestionario, que no es otra cosa que un conjunto de preguntas, cuidadosamente preparado, sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación para su contestación por la población o la muestra a que se extiende el estudio emprendido. El cuestionario cumple la función de enlace entre los objetivos de la investigación y la realidad de la población observada. Por ello, las condiciones fundamentales que debe reunir, dependen de la investigación y de la población. Se pueden sintetizar, por una parte, en traducir los objetivos de la investigación en preguntas concretas sobre dicha realidad y, por otra parte, en ser capaz de suscitar en los encuestados respuestas sinceras y claras a cada pregunta, que puedan después ser tratadas científicamente, es decir clasificadas y analizadas. (Sierra Bravo, 1996).

El cuestionario confeccionado para llevar a cabo la encuesta a la que nos referimos en este trabajo consta de 8 ítems y puede ser tipificado como mixto de acuerdo a las respuestas que se solicita, ya que plantea preguntas de ítem cerrado y abierto. Las primeras deben contestarse por si o por no, y las segundas brindan un espacio libre para comentarios, que se interpretan como "síntomas" de la valoración hecha por los docentes. En ese sentido se realiza una categorización con respecto a sus sentimientos y actitudes.

El criterio que guió su construcción está sustentado en la búsqueda de opinión de los docentes interrogados en cuanto a la confirmación de la pregunta de investigación de la que derivan las siguientes variables:

Valoración del impacto de los software matemáticos en relación:

- a la capacitación que recibió en su formación docente.
- al aprendizaje de los estudiantes.
- a la práctica profesional en la enseñanza.

Comentarios e interpretación de los resultados

El 59 % de los profesores que integran el Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Básicas (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario) completaron el cuestionario, muestra representativa de una población total de 75.

De sus respuestas se desprende la valoración que hacen *del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica:*

- *En relación a la formación del docente*

El 70% de los encuestados manifiesta haber recibido capacitación formal en el manejo de algún software, mayormente cursos de perfeccionamiento y actualización en Maple, Mathematica y Cabri. Sólo 2 de ellos expresan haber obtenido la capacitación en su formación de grado.

Los docentes que se consideran capacitados para el uso de un software matemático representan el 75%, y de ellos el 79% lo utiliza efectivamente en situaciones tales como la preparación de clases y exámenes, la verificación de resultados, el análisis de situaciones problemáticas, la visualización gráfica y trabajos de investigación.

- *En relación al aprendizaje de los estudiantes*

La mayoría de los docentes concuerda en que la utilización de un software matemático como recurso didáctico favorece en el alumno el desarrollo de conductas hacia un aprendizaje autogestionado (83%), posibilita que se alcancen nuevas destrezas y nuevos resultados en el aprendizaje (86%) y permite que los alumnos alcancen sus objetivos de aprendizaje con mayor facilidad y/o rapidez (69%).

- *En relación a la práctica docente*

Casi la totalidad de los encuestados (93%) manifiesta estar de acuerdo con la utilización de algún software matemático como una herramienta didáctica más. Al preguntarles el por qué, algunos de ellos responden:

Es útil para corroborar resultados

Desarrolla capacidades cognitivas

Permite acelerar las prácticas supervisadas por el profesor

Motiva a los alumnos a indagar sobre otros temas conceptuales

Facilita la visualización de los problemas

Facilita la visualización de los resultados obtenidos teóricamente

Porque la computadora forma parte de la vida cotidiana de los alumnos

Favorece a la visualización de ciertos conceptos matemáticos, también ayuda a construir conceptos a partir de la manipulación por parte del alumno

Porque en los libros actuales se incluyen aplicaciones de distintos software

Sin embargo merece destacarse que estas respuestas, en muchos casos (41%), aparecen acompañadas de "peros":

…hay que desarrollar muchos contenidos en poco tiempo, con lo cual una actividad que sumaría en un sentido restaría en otro

…como herramienta extra clase

…primero deben aprenderse todos los conceptos teóricos para no mecanizarse

…será útil siempre que el docente esté convencido de que realmente es un recurso didáctico importante

No se puede negar el rol de las tecnologías, pero hay que evaluar y ponderar prioridades

…no como sustitutivo de la función docente

…se deben modificar las prácticas, además no se debe sustituir el lápiz y el papel

…con mucho cuidado: no debe perderse de vista la metodología de cálculo

…con el control del docente

…faltan computadoras para cada alumno y aulas

…debe ser supervisado muy bien por el profesor

Además:

- el 64% de los profesores reconoce no utilizar software matemático en la preparación y/o desarrollo de sus clases y los argumentos son los siguientes:

Porque me falta destreza en el manejo del software

Extensión de los programas a desarrollar

Falta de tiempo

Falta de infraestructura

El nivel de los alumnos ingresantes

No es imprescindible

Porque no lo tengo instalado en casa

Por requerir tiempo y esfuerzo adicional

El software que conozco no se adapta al desarrollo de clases

No tengo computadora en mi casa

Porque elegimos lo conocido y tenemos miedo y pereza hacia los nuevos conocimientos

- el 36% restante declara utilizar algún software matemático para la verificación de resultados, la resolución de problemas y/o desarrollo de las clases.

Conclusiones

La evolución que ha experimentado el software matemático, especialmente en la última década, nos sitúa ante un nuevo sujeto que aprende y nos ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer Matemática. No obstante creemos que aún no se ha mostrado plenamente en el campo de la enseñanza de esta disciplina.

Los resultados de este trabajo de investigación demuestran que los profesores valoran positivamente el impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de Matemática, por lo que han atendido a su capacitación en la materia.

Creemos que sería necesario modificar nuestras concepciones docentes para introducir exitosamente la tecnología en la enseñanza de la Matemática. Dado que algunos usos de esta tecnología no encajan muy bien en el currículo tradicional, los profesores deberíamos involucrarnos en una experiencia innovadora como parte de un equipo, para su rediseño. No obstante consideramos que es la Institución quien tiene la responsabilidad de avalar e impulsar dicho replanteamiento curricular.

Referencias bibliográficas

Anido, M. (1998). Un proyecto sobre el uso de herramientas C.A.S. en el aprendizaje de la matemática básica. *Memorias de las 3º Jornadas de investigación en la F.C.E .y E. U.N.R.*, 20-22. Argentina: UNR Editora.

Anido, M. y Rubio Scola, H. (1999). Un Programa sobre el Uso de Herramientas C.A.S. en el Aprendizaje de la Matemática Básica en las Universidades Nacionales de la Provincia de Santa Fe. *Lecturas Matemáticas*, *21*(1).

Anido, M. (1999). El Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática a partir del uso de Herramientas Computacionales. *Revista INFOMEC, 4*(7), 20 - 23.

Anido, M., Có, P. y Guzmán, M. (1999). La Enseñanza de la Geometría en el Nivel Universitario con Herramienta Maple. *Revista IRICE, 13*, 155-168.

Anido, M., Có, P., del Sastre, M. y Panella, E. (2008). Una trayectoria Didáctica para la Enseñanza de la Geometría Analítica en un Laboratorio de Informática. Análisis de su Idoneidad. *Memorias de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática.,* 249-257. Argentina: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Có, P., del Sastre, M. y Panella, E. (2004). La compresión de conceptos geométricos. Obstáculos surgidos en el trabajo con diferentes representaciones. *Mathema, 1,* 95-104.

Coll, C., Mauri, T Onurubia, J. (2008). Análisis de los usos reales de las TIC en contextos educativos formales: una aproximación sociocultural. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 10 (1). Recuperado el 09 de diciembre de 2009 de http://redie.uabc.mx/vol10no1/contenido-coll2.html.

Eisnberg, M. (2007). Mathematical String Sculptures: A case study in Computationally – Enhanced Mathematical Craft. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 12(2),157-166.

Gomes Allevato, N. (2007). As Concepcones dos alunos sobre resolucao de problemas ao utilizarem computador no estudo de funcoes. *Revista Paradigma*, 28(1), 131- 156.

Gros, B. (2000). *El ordenador invisible. Hacia la apropiación del ordenador en la enseñanza*. Barcelona: Gedisa.

Hernández Zampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Jonannsen, D. (1995). Computers as Cognitive Tools. Learning with Technology. Not from Technology. *Journal of Computing in Higher Education,* 6, 40-73.

Litwin, E. (2005). *La tecnología educativa en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires: Amorrortu.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria.(2005). *Resolución nº: 386/05*. Buenos Aires, Argentina. Recuperado el 20 de septiembre de 2010 de http://www.coneau.edu.ar/archivos/resoluciones/Res386-05E804-458.pdf

Olivero, F. y Robutti, O. (2007). Measuring in Dynamic Geometry. Environments as Tool for Conjecturing and Proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 12(2), 135-156.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2008). *Normas UNESCO sobre Competencias en TIC para Docentes.* Recuperado el 03 de marzo de 2010 de http://www.portaleducativo.hn/pdf/Normas_UNESCO_sobre_Competencias_en_TIC_para_Docentes.pdf

Sierra Bravo, R. (1996). *Tesis Doctorales y Trabajos de Investigación Científica*. Madrid: Paraninfo

Torregosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*. 10(2), 275-300.

Universidad Nacional de Rosario (2007). Proyecto académico ING202: *El rol de las representaciones en el aprendizaje de la matemática básica en carreras donde su carácter se considera instrumental.* (2007-2010). Argentina.

MATERIALES DIDÁCTICOS PARA LA PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

Eugenio Carlos Rodríguez, Esther Ansola Hazday, Nelson Hernández Reyes
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría . Cuba
ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, esther@ind.cujae.edu.cu, nelsonh@ind.cujae.edu.cu

Resumen. - El presente trabajo muestra la experiencia del grupo de investigación en el uso de calculadoras graficadoras del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, en La Habana, Cuba. En este se muestra el resultado obtenido en la elaboración de materiales didácticos dirigido a estudiantes de preuniversitario que se preparan para el ingreso a los estudios universitarios. En muchas universidades donde se enseñan carreras vinculadas a las ciencias, como las ingenierías, se desarrollan cursos de ingreso para los jóvenes, que tienen la función de repasar los contenidos dados en el nivel anterior, aunque en la práctica muchos alumnos manifiestan desconocer temas básicos que deberían haber adquirido en el nivel medio (Fernández, 2003).

Teniendo esto presente se trabajó en la elaboración de materiales didácticos, vinculando los contenidos teóricos, la ejercitación necesaria y el uso de la tecnología.

Palabras clave: – enseñanza de la matemática, materiales didácticos, tecnologías, calculadoras.

Abstract. - This paper shows the experience of the Graphic Calculators Researching Group of the Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, in Havana, Cuba. It shows the results obtained in the development of didactics material directed to high school students, which are preparing for entrance to university studies. In numerous universities, with degree courses related to the sciences, as engineering, access courses are developed for youths student, that have the function of reviewing the contents learned in the previous level, although, in fact, many students declare to ignore basic topics that should have acquired in the previous level (Fernandez y Burguet, 2003). Taking it into account, didactics material were developing connecting the theoretical contents, the necessary exercitation and the use of the technology.

Key words: - mathematics teaching, didactic materials, technologies, calculators.

Introducción

El crecimiento de la matrícula en las universidades constituye un fenómeno mundial y responde a profundos cambios sociales que dieron como resultado una multiplicación de las tareas asociadas a los estudios superiores. Hoy no se puede pensar en un país moderno con un sistema universitario excluyente, por más que éste brinde una preparación "de excelencia" (Zito, 2006).

En muchas universidades donde se enseñan carreras vinculadas a las ciencias, como las ingenierías, se desarrollan cursos de ingreso para los jóvenes, que tienen la función de repasar los contenidos dados en el nivel anterior, aunque en la práctica muchos alumnos manifiestan desconocer temas básicos que deberían haber adquirido en el nivel medio (Fernández y Burguet, 2003).

Teniendo esto presente se trabajó en la elaboración de materiales didácticos dirigidos a los estudiantes que se preparan para el ingreso a la universidad, vinculando los contenidos teóricos, la ejercitación necesaria y el uso de la tecnología.

Considerando la importancia de la utilización de medios de enseñanza aprendizaje, que resulten atractivos y faciliten el autoaprendizaje, se utilizó como soporte tecnológico una calculadora graficadora, aprovechando las posibilidades que ofrece la calculadora CASIO ClassPad 300 o ClassPad 330 para desarrollar documentos electrónicos que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes, las llamadas e-activities (Ansola, Carlos, Gómez y Hernández, 2003; Carlos, 2006).

Los objetivos propuestos fueron los siguientes:

- Consolidar los contenidos de Matemática impartidos en Secundaria Básica y Preuniversitario.
- Desarrollar en los estudiantes habilidades de cálculo y para la solución de problemas.
- Propiciar un clima de estudio en el que se puedan desarrollar valores tales como la responsabilidad individual y colectiva, la voluntad, la honestidad y la solidaridad.

Fundamentación teórica

El presente trabajo se fundamenta en la teoría de Vigotsky (1985), el cual coloca en el centro al estudiante, como sujeto activo y conciente con un objetivo determinado, utilizando diversos medios a su disposición, que es lo que esta teoría asume como mediadores.

Según esta propuesta, en el proceso de enseñanza aprendizaje, se resaltan dos tipos de mediación: mediación social y mediación instrumental: los adultos y los instrumentos, actúan como mediadores del proceso de conocimiento.

Cuando se trata de mediación social se refiere a la utilización de otra persona como instrumento de mediación para la acción sobre el ambiente, papel de los grupos sociales en la integración del sujeto a las prácticas sociales, papel del otro en la formación de la conciencia individual.

En el caso de mediación instrumental, según la concepción vigotskiana, se trata de la utilización por los hombres, en las acciones de transformación de la realidad, de los instrumentos creados por la cultura. En el contexto del presente trabajo, la mediación instrumental será concebida, a través del uso de la calculadora.

Sustentado en estos postulados, se asume que los instrumentos provocan modificaciones en el objeto de la realidad, es el medio de la actividad externa del hombre para conquistar la naturaleza, por tanto los instrumentos actúan en el plano externo, propiciando la interiorización de los conocimientos.

En este sentido Vigotsky concibe la interiorización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo, pasan a ejecutarse en un plano interno, diferenciando la actividad externa en términos de procesos sociales mediatizados y argumentando que las propiedades de estos procesos proporcionaban la clave para entender el funcionamiento interno (Vigotsky, 1985).

A partir de este postulado, se asume que el maestro orienta el trabajo independiente con el uso de las calculadoras, como principales mediadores en el proceso de conocimiento de los alumnos, sin minimizar el papel que juega el trabajo en grupo, los cuales encaminan o facilitan la solución de las tareas; orientan, instruyen, corrigen o demuestran cómo proceder; además de que refuerzan, apoyan y estimulan, permitiendo una mejor interiorización del aprendizaje.

Presentación

El presente trabajo muestra el resultado obtenido en la elaboración de materiales didácticos dirigido a estudiantes de preuniversitario que se preparan para el ingreso a los estudios universitarios.

Los materiales elaborados fueron los siguientes:

- Material escrito que contiene un resumen de los principales contenidos teóricos, ejercicios y problemas resueltos y propuestos. Los ejercicios resueltos hacen uso de la calculadora.
- Conjunto de e-activities para la calculadora CASIO ClassPad 300 ó 330, que contienen los principales contenidos teóricos.

Los temas que se abordan son los siguientes:

- Tecnicismo algebraico.
- Funciones.
- Sistemas de ecuaciones.
- Geometría.
- Trigonometría.

Para la elaboración de los materiales se utilizaron como referencia textos de importantes autores que se han destacado en el desarrollo de estos temas (Baldor, 1947; Campistrous y Rizo, 1989; Lehmann, 1968; Lidski, 1972; Potápov, Alexandrov y Pasichenco, 1986; Swokowski y Cole, 1998)

Los materiales escritos

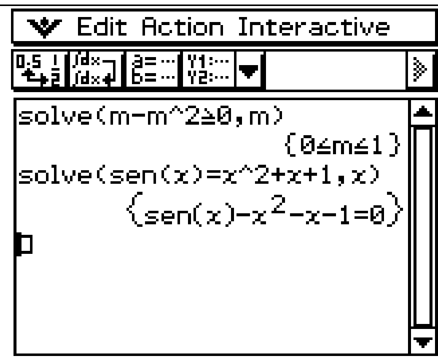
Con un resumen de los principales contenidos teóricos de cada tema, los materiales escritos presentan un conjunto de ejercicios resueltos que están dirigidos a desarrollar habilidades de razonamiento y en general al desarrollo del pensamiento lógico del estudiante, haciendo uso de la calculadora como apoyo para lograr este desarrollo. A continuación se muestran dos de estos ejercicios en el tema de funciones.

Ejemplos de ejercicios con el uso de la calculadora

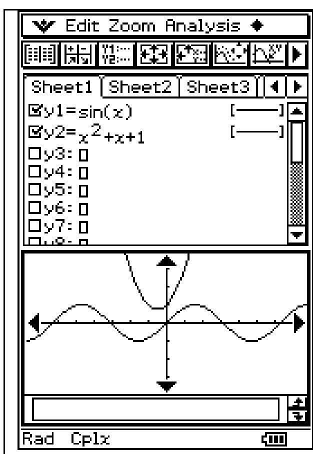
1. Sean las funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = x^2 + x + 1$.Determine para qué valores de x se cumple que $f(x) = g(x)$.

Solución:

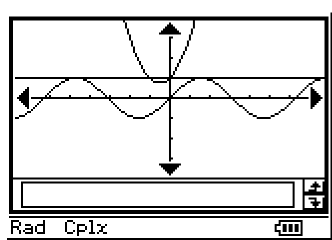
Este problema conduce a la solución de la ecuación $sen(x) = x^2 + x + 1$ la cual no puede ser resuelta por métodos analíticos. Si hacemos uso de la calculadora la respuesta que nos devuelve es la siguiente



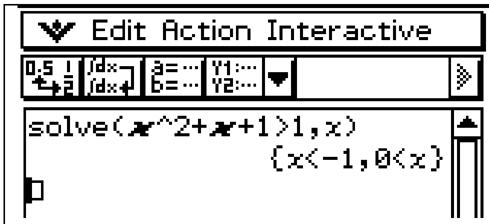
Luego, para resolver el problema se recurre a una interpretación geométrica, representando en un mismo sistema de coordenadas ambas funciones.



Como se puede apreciar, las gráficas de estas funciones no se cortan en ningún punto. Por tanto esta idea permite buscar una demostración exacta. Como el $senx \leq 1$ para todo $x \in$ □, tracemos la recta $y = 1$



como corta al gráfico de g en dos puntos resolviendo la inecuación

	$x^2+x+1>1$ se demuestra que para los valores de $x>0 \vee x<-1 \Rightarrow x^2+x+1>senx$ en el intervalo que resta cuando $-1\le x\le 0$ $senx\le 0$ y $x^2+x+1>0$ y por tanto la ecuación no tiene solución

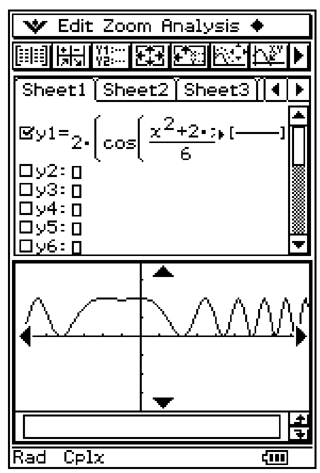
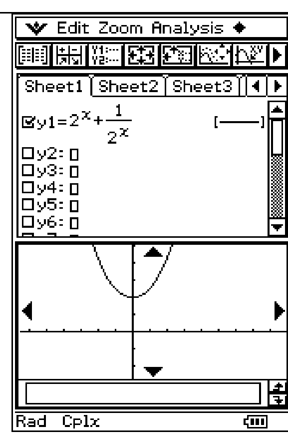
2. Dadas las funciones $f(x)=2\cos^2(\frac{x^2+x}{6})$ y $g(x)=2^x+2^{-x}$

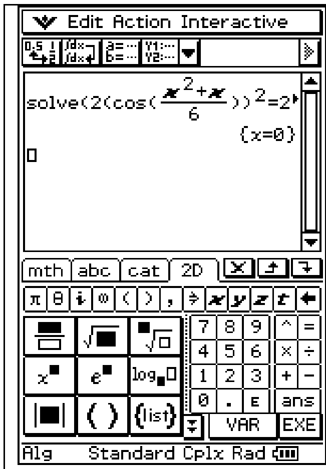
   a. Determine dominio e imagen de f y g

   b. Analice la paridad de las funciones f y g

   c. Resuelva la ecuación $f(x)=g(x)$

Solución:

$Dom\ f=R \quad \operatorname{Im} f=\{y\in R:0\le y\le 2\}$ Por la gráfica de f se puede notar que la misma no es simétrica al eje Y ni al origen de coordenadas, por lo que la función no tiene paridad. $f(-x)=2\cos^2\left(\frac{x^2-2x}{6}\right)\neq\begin{cases} f(x)\\ -f(x)\end{cases}$	Gráficamente 
$Dom\ g=R \quad \operatorname{Im} g=\{y\in R:y\ge 2\}$ Por la gráfica de g se puede notar que la misma es simétrica al eje Y por lo que la función será par. $g(-x)=2^{-x}+2^{x}=2^{x}+2^{-x}=g(x)$	



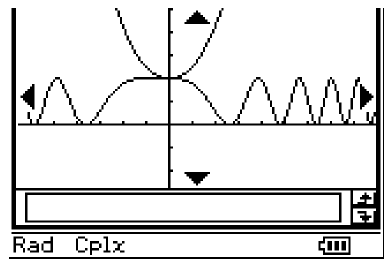
A pesar de que la calculadora muestra el resultado de resolver la ecuación

$$f(-x) = 2\cos^2\left(\frac{x^2-2x}{6}\right) = 2^x + 2^{-x}$$

Es recomendable analizar con los estudiantes que, a partir de las imágenes de la función, se puede obtener esta solución, pues como

$\operatorname{Im} f = \{y \in R : 0 \le y \le 2\}$

$\operatorname{Im} g = \{y \in R : y \ge 2\}$ el único valor posible es y = 2 que se alcanza para x = 0.

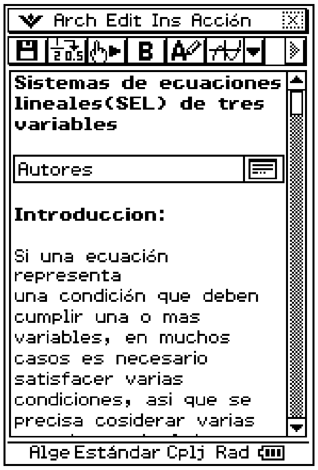


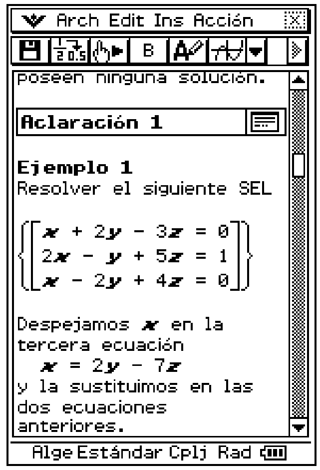
E-activities para la calculadora CASIO ClassPad 300 ó 330

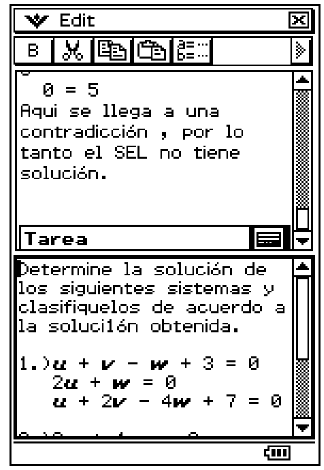
Las e-activities consisten en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, etc., que permite solucionar un problema o dar una explicación sobre un tema determinado (Ansola y Carlos, 2006). Las e-activities utilizadas tienen la siguiente estructura: objetivos, bibliografía y ejercicios propuestos, desarrollo del tema, ejemplos, tareas y conclusiones y contienen los principales contenidos teóricos. La calculadora, como herramienta tecnológica, nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su comprensión, de modo que las posibilidades de éxito, ante un problema, de un estudiante que haya sido preparado con el uso de la calculadora son mayores, aun no disponiendo de ella en ese momento.

A continuación se muestra un ejemplo de e-activitie en el tema de Sistemas de Ecuaciones.

Ejemplo de e-activitie







Conclusiones

El presente trabajo muestra la elaboración de materiales didácticos dirigidos a los estudiantes que se preparan para el ingreso a la universidad, vinculando los contenidos teóricos, la ejercitación necesaria y el uso de la tecnología. Los materiales preparados para estos estudiantes consistieron en material escrito con resúmenes de los principales contenidos teóricos con ejercicios, problemas resueltos y problemas propuestos, haciendo uso de la calculadora.; así como un conjunto de e-activities para calculadoras CASIO ClassPad 300 ó 330, que contienen los principales contenidos teóricos.

En este trabajo se presenta, como un todo, un conjunto de trabajos anteriores de los autores, en los cuales habían sido abordados de manera independiente, por una parte algunos materiales escritos con propuestas de ejercicios y problemas a resolver con la calculadora, y por otra, un conjunto de e-activities elaboradas para diferentes temas de la Matemática de nivel medio.

Un elemento importante que se tuvo en cuenta es que el uso de la tecnología favorece el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática, lo cual se manifiesta en la motivación de los estudiantes al abordar los temas estudiados. La calculadora resulta ser una herramienta útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente como apoyo al trabajo independiente, que permite desarrollar habilidades de forma independiente y creativa.

Referencias bibliográficas

Ansola, E., Carlos, E., Gómez, P. y Hernández, N. (2003). El uso de la calculadora graficadora en la preparación matemática de los estudiantes para el ingreso a la universidad. En C.

Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 747-750. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 930-935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Baldor, A. (1947). *Aritmética: Teoría-Práctica.* La Habana: Cultural, S. A.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1989). *Matemática 10mo grado*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Carlos, E. (2006). Enseñanza semipresencial de la Matemática utilizando como soporte tecnológico una calculadora gráficadora. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 925-929. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fernández, M. y Burguet, I. (2003). Experiencias en cursos propedéuticos de Matemática en la preparación para los exámenes de ingreso a la Educación Superior. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (2), 772-777. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lehmann, Ch. (1968). *Geometría Analítica*. La Habana: Instituto Cubano del Libro.

Lidski, V. B. (1972). *Problemas de Matemáticas Elementales*. Moscú: Editorial MIR.

Potápov, M., Alexándrov, V. y Pasichenko, P. (1986). *Álgebra y análisis de funciones elementales.* Moscú: Editorial MIR.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (1998). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: International Thompson Editores.

Vigotsky, L. S. (1985). *Interacción entre enseñanza y desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.

Zito, S. (2006). *El Aprendizaje de la Matemática y el Acceso a Estudios Superiores.* Recuperado el 15 de mayo de 2005 de http://www.educoas.org/portal/es/tema/editorial.

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA Y MODELO DE VAN HIELE. UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Gabriela Molina, Alejandro Rosas, Apolo Castañeda
Instituto Politécnico Nacional . México
jmolinaz@ipn.mx, alerosas2000@gmail.com, apcastane@gmail.com

Resumen. - En este trabajo presentamos una experiencia de formación de profesores en el área de Geometría Euclidiana. La propuesta integró dos elementos principales: La geometría dinámica y El modelo de razonamiento de Van Hiele. La primera, permite que los estudiantes exploren la geometría y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para redescubrir teoremas por ellos mismos, de generar ideas matemáticas, sus propias estrategias y formas de resolución de un problema. Por su parte, el Modelo de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento. La metodología consistió en hacer partícipes a los profesores y no sólo receptores. Como resultados por una parte se tuvo la profundización de los profesores en sus conocimientos matemáticos y por otra, la aceptación y motivación hacia poner en práctica la propuesta.

Palabras clave: - geometría dinámica, construcción, modelo de aprendizaje.

Abstract. - In this work we present an experience of teacher training in the area of Euclidean Geometry, the proposal integrated two main elements: The dynamic geometry and the model of Van Hiele reasoning. The first, make it possible the students explore the geometry and they have the possibility to study objects and geometry properties to rediscover theorems for themself, to generate mathematical ideas, their own strategies and ways of solving a problem. Meanwhile, the Van Hiele model explain, how to produce the evolution of students' geometry reasoning and, how can a professor to help to his students to improve the quality of their reasoning. The methodology consisted on engaging teachers and not just recipients. As a result of one part it had the depth of the professors in their mathematical knowledge and the other, the acceptance and motivation to implement the proposal.

Key words: - dynamic geometry, construction, learning model.

Introducción

El conocimiento geométrico es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los currículos escolares por su aporte a la formación del individuo. Los objetivos clásicos de la enseñanza de la geometría son fundamentalmente: conocer y analizar las características y propiedades de los objetos geométricos, e introducir y desarrollar el pensamiento lógico y el razonamiento deductivo (NCTM, 2000; Hansen, 1998; citados en Castiblanco, 2004). Para el logro de ambos objetivos, se tienen que tomar en cuenta que las diversas dimensiones del pensamiento geométrico se apoyan en dos procesos cognitivos: *la visualización* y los procesos de *razonamiento discursivo*.

Por lo anterior expuesto, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico, para poder diseñar ambientes de aprendizaje; pero, para que los docentes puedan desarrollar este tipo de actividades, consideramos que es necesario que ellos se vean inmersos en las mismas.

En la Facultad de Matemáticas (FMAT) de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) se cuenta con el Diplomado en Educación Matemática (DEM), dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio superior y tiene como objetivos, que los profesores participantes profundicen en los conocimientos matemáticos, se capaciten en la didáctica de la matemática y desarrollen la habilidad para organizar, analizar y diseñar nuevas formas de aprendizajes. Particularmente, en este trabajo presentamos una experiencia de aula que incluye parte de lo que se trabaja en el módulo 2 del DEM correspondiente a Geometría Euclidiana, titulado: Perspectivas del pensamiento Geométrico.

En el módulo 2, centramos la atención principalmente en el diseño y rediseño de actividades con *Geometría dinámica*; consideramos que usando geometría dinámica, es posible que los discentes exploren la geometría euclidiana y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para redescubrir teoremas por ellos mismos. La Geometría dinámica ofrece la posibilidad de una aproximación al estudio de la geometría que permite la manipulación de los objetos geométricos, abriendo así, posibilidades que antes no estaban disponibles para los estudiantes (Larios, 2006).

A través de estas actividades con geometría dinámica los docentes se ven inmersos en una nueva geometría, teniendo que pasar por los procesos de *visualización, conjeturación, experimentación y validación*; de modo que puedan no sólo desarrollar su pensamiento geométrico, sino que reconozcan los beneficios de desarrollar actividades que propicien que los estudiantes pasen por estos procesos.

Por otra parte, tenemos que considerar que al ir avanzando en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben ir perfeccionando el lenguaje geométrico, ir introduciendo encadenamientos lógicos, accediendo a la estructura deductiva de la geometría. Por lo tanto, la transformación del discurso debe llevar al discente de una *argumentación informal* que se apoya fuertemente en la *visualización*, y por lo tanto es de carácter *descriptivo*, a una *organización discursiva* formal que encadena proposiciones usando reglas lógicas. En un discurso de carácter descriptivo se ligan proposiciones o enunciados a partir de la visualización de una figura y sus configuraciones, por asociaciones evidentes y espontáneas tal como argumentamos al conversar, mientras que en el caso de los discursos formales, el razonamiento no se centra en una descripción basada en la visualización de una figura, sino que la organización del discurso requiere hacer uso de proposiciones que de antemano tienen un estatus teórico específico (axiomas, definiciones, teoremas).

En la geometría como ciencia del espacio y la forma, lo que vemos en una figura puede ser tomado como garantía de certeza; mientras que en la geometría deductiva, cualquier afirmación debe ser deducida de otras dadas (Ver Figura 1).

Figura 1

Por otra parte, las actividades didácticas tuvieron como sustento teórico el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el cual es una teoría de aprendizaje que describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría. Sus autores son Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, educadores y matemáticos holandeses, quienes elaboraron un modelo que explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento.

La idea básica de partida del Modelo de Van Hiele es que el aprendizaje es un proceso que el estudiante va alcanzando conforme va estructurando su conocimiento y que en la Geometría dicho aprendizaje se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento; éstos niveles no van asociados a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. La descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos puedan acceder al nivel del razonamiento superior al que tienen actualmente, las denominaron *fases de aprendizaje*. Por lo anterior expuesto, se dice que el Modelo de Van Hiele a diferencia de otras teorías del aprendizaje tiene no sólo un carácter descriptivo sino también instructivo, como lo podemos ver en la siguiente figura:

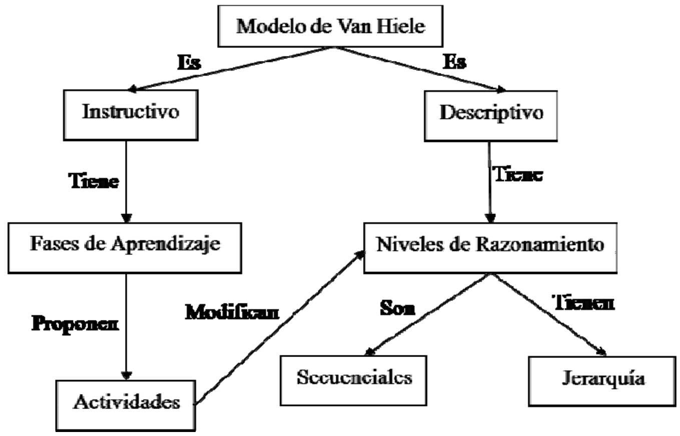


Figura 2

En su modelo Van Hiele distingue cinco niveles de aprendizaje o niveles de razonamiento, y afirma que es necesario dominar un nivel antes de pasar al siguiente, estos niveles son:1) Visualización, 2) Análisis, 3) Ordenación, 4) Deducción formal, 5) Rigor (Rodríguez, 2005).

En el nivel 1 el estudiante identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas de acuerdo con su apariencia global.

Este nivel tiene tres características principales: Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes, se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una puerta, etc.); no hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto; no reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

En el nivel 2, el estudiante analiza las figuras geométricas en términos de sus componentes y relaciones entre componentes, y descubre empíricamente propiedades y reglas de una clase de figuras. Empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes. Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación. De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones. Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades, sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

Se dice que los alumnos han alcanzado el Nivel 3 cuando: describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

En el nivel 4 los alumnos ya realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas; se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas, y se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado. Adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas. Aquí el estudiante demuestra teoremas deductivamente, de una manera formal (usando axiomas y teoremas antes demostrados), y establece relaciones entre redes de teoremas.

En el nivel 5 se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías; se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático; el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza y compara estos sistemas.

El modelo de Van Hiele propone además a los profesores una secuencia cíclica de cinco fases de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. En la figura 3 se presenta un esquema en el que se exponen cada una de las fases del aprendizaje.

Particularmente en este trabajo nos centramos en el tema c*onstrucciones geométricas*, las cuales pretenden asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción y lograr una generalización; a través del proceso de construcción, van poniéndose en evidencia propiedades geométricas y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la argumentación. La dificultad de la utilización de la construcción como campo de reflexión, radica en la dificultad motriz que conlleva a la utilización idónea de los instrumentos técnicos, sin embargo, el software de geometría dinámica puede liberar la atención de los alumnos para concentrarla en la reflexión teórica sobre los mismos ya que asegura la precisión de los trazados, es así que, la construcción geométrica dinámica puede constituirse un campo de exploración y reflexión, de donde la deducción puede surgir y organizarse.

La construcción también es un mecanismo para validar afirmaciones dentro de un contexto, a partir de la formulación de inferencias de carácter deductivo, da pie a la demostración, con lo cual las proposiciones geométricas cobran importancia por el papel que desempeñan en el sistema axiomático deductivo.

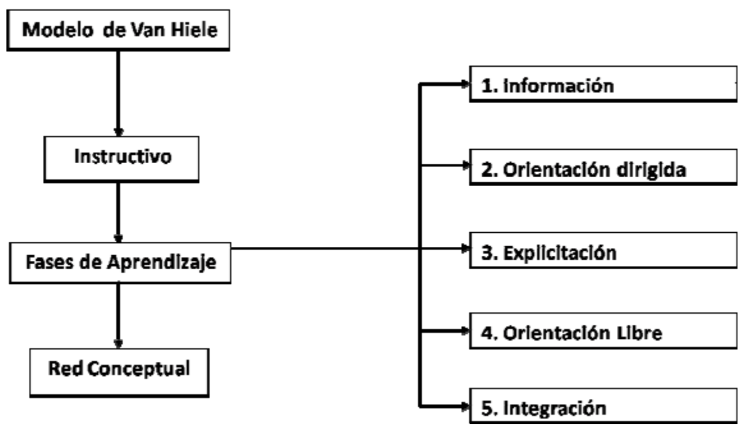


Figura 3

Metodología

Como antes se mencionó, este trabajo es producto de un curso titulado Perspectivas del pensamiento geométrico, correspondiente al Módulo 2 del DEM, pese a que el Programa está dirigido a profesores de nivel medio superior, tuvimos la oportunidad de impartirlo a un grupo de 12 profesores, con formación inicial en ingeniería y que laboraban en una Institución de Educación Tecnológica de nivel Superior. El curso tuvo una duración de 48 horas, 40 presenciales y 8 a distancia, las 40 horas presenciales fueron repartidas en las cuatro unidades de las que constó el curso, en la primera se estudió el desarrollo histórico conceptual de la geometría, en la unidad dos se presentó el Modelo de Van Hiele como un modelo de aprendizaje para la enseñanza de la geometría, en la unidad tres las características, propiedades y uso de la geometría dinámica, y por último la unidad cuatro nombrada Resolución de problemas. Los profesores trabajaron con el software de geometría dinámica Cabri Géomètre II y desarrollaron las actividades pasando por cada una de las fases del aprendizaje propuestas por Van Hiele, es decir, por la fase de información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración, éstas se presentaban parte por escrito y parte verbalmente. En las ocho horas a distancia los profesores trabajaron en la elaboración una propuesta para su implementación en el aula.

A continuación mostramos algunos ejemplos de actividades que los profesores trabajaron en el aula; cabe aclarar que por espacio no presentamos las actividades completas, sino una parte de éstas, aquí les llamamos actividades 1 y 2.

Actividad 1

a) *Para la fase de orientación dirigida:*

*Tema***.** Suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo

1. Construya un triángulo denotando sus vértices con A, B y C. Mida los ángulos interiores del triángulo ABC
2. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo ABC.
3. ¿Qué valor obtuvo?
4. Mueva los vértices A, B o C para generar otros triángulos.
5. ¿Cuál es ahora el valor de la suma de los ángulos interiores del estos triángulos?
6. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores de los triángulos encontrados?
7. Mueva los vértices A, B o C para generar otros triángulos diferentes, ¿se sigue cumpliendo lo que afirmaste en el paso 6?
8. Da una explicación que justifique la verdad de tu conjetura anterior.

b) Para la *fase de orientación libre*

¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero ABCD?

Formule una conjetura y justifique la veracidad de su conjetura.

Los docentes al enfrentarse a realizar construcciones geométricas dinámicas tuvieron la oportunidad de profundizar en sus conocimientos geométricos, y a su vez reconstruir teoremas y propiedades por ellos mismos, y de esta forma valorar su importancia.

Además, para llevar a cabo las construcciones, los profesores pasaban por cuatro etapas: Exploración, Conjeturación, Experimentación y Validación. Por ejemplo, en la Actividad 2, en la *fase de orientación libre* se le plantea lo siguiente:

Sean A, B y C tres puntos fijos.   ¿Qué condiciones debe satisfacer el punto D, para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero ABCD se encuentren en un solo punto? Justifica tu respuesta.

El profesor construye con ayuda del software lo que se le indica en el enunciado, en este caso los puntos A, B, C e inicialmente construyen un punto D arbitrario y lo mueven de modo que cumpla la condición solicitada, de modo que va explorando a través del movimiento y la visualización del objeto en busca de una solución al problema planteado, después de ello establece una conjetura, es decir, establece las condiciones que debe cumplir el punto D para que siempre se cumpla que ABCD sea un cuadrilátero tal que las mediatrices de sus lados se encuentren en un solo punto. Una vez establecida la conjetura experimenta moviendo el objeto (punto D) de modo que pueda asegurarse que efectivamente su conjetura es válida, en caso de serlo, debe validarlo dando una construcción geométrica que asegure la veracidad de su conjetura y posteriormente planteando una demostración de la misma.

Resultados

Pese a ser profesores de nivel superior y con experiencia docente en el área de matemáticas, mostraron siempre disposición al aprendizaje, fueron participativos y abiertos a nuevas propuestas, con una actitud proactiva.

Durante el curso fuimos tomando notas de los comentarios y discusiones de los profesores, de donde rescatamos algunas que presentamos a continuación de los profesores que llamamos A, B, C y D.

> *(A) Esto es como crear geometría, mueves y mueves, planteas algo, para convencerte pruebas con más casos y finalmente hay que convencer al profesor; con esta propuesta los estudiantes pudieran prestar más interés que si sólo le pides demuestra algo que alguien ya demostró...)*
>
> *(B) Sí porque él ve la necesidad de convencer a los demás, pero primero el ya se convenció porque él lo encontró…*
>
> *(C) Ah entonces esto es lo que le llaman explorar, conjeturar,…mmm,…*

Podemos observar que identifican las etapas: explorar, conjeturar, posteriormente experimenta con otros casos, y cuando está convencido debe validar sus resultados.

En otro momento comentan lo siguiente:

> *(A) Ahí es donde interviene la construcción, es la que te asegura que lo que afirmas es correcto*
>
> *(B) Sí, pero también la demostración de que esa construcción es correcta es lo que sería validar, ¿verdad profesora?*

Entre los resultados que tuvimos es la aceptación y motivación de los profesores hacia la propuesta, señalan aspectos como los siguientes:

(A) Es motivante, pero no se trata de facilitarle las cosas, el piensa, razona, explora, es él el que saca sus conclusiones.

(D) Me gustaría implementarlo con mis alumnos, ahora entiendo qué significa que la enseñanza esté centrada en el estudiante, es él el que debe hacerlo, pero no es dejarlo sólo, nuestro trabajo es previo.

(F) Al fin entendí las construcciones geométricas, y el usar cabri no significó que yo no pensara, al contrario,…

Este trabajo nos permite observar que es importante que los profesores se vean inmersos en programas de formación y actualización no sólo informativos, sino donde puedan desarrollar o potencializar su pensamiento matemático y puedan convencerse de que la práctica de aula debe centrarse en la construcción del conocimiento por parte del estudiante y no en la exposición magistral del profesor.

Referencias bibliográficas

Castiblanco, A. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia*. Recuperado el 3 de julio de 2009 de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en una ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa* 9(3), 361-382.

Rodríguez, R. (2005). La geometría y los niveles de aprendizaje. En J. Alanís, R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, A. Garza, R. Rodríguez (Eds), *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp.151-168), México: Editorial Trillas.

CREENCIAS SOBRE LA MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Tulio Amaya de Armas (1), Natalia Sgreccia (2 y 3)
(1) Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo (Colombia). (2) Universidad Nacional de Rosario. (3) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas . Argentina
tuama1@hotmail.com, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen. - Se comparte la experiencia de diseño e implementación de un taller destinado a educadores matemáticos latinoamericanos que se desempeñan en escuelas secundarias. En dicho taller se propusieron actividades guiadas utilizando el programa Geogebra y se discutió sobre el potencial de los ambientes dinámicos en la búsqueda de patrones en matemáticas. El contenido en tratamiento fue el Teorema de Pitágoras, considerándose como un caso particular del Teorema de Fermat, sobre el que también se discutió. Se conjetura la relación entre tales teoremas a través de la manipulación del teorema de Pitágoras, con figuras del plano, entrando a analizar figuras en el espacio tridimensional para relacionarlo con el teorema de Fermat. Aquí se mencionan las actividades realizadas, así como algunos registros de la interacción con los profesores participantes del taller.

Palabras clave: – patrones, teoremas de Pitágoras y de Fermat, herramientas tecnológicas.

Abstract. - We share an experience of design and implementation of a workshop destined for Latin-American mathematics educators who work in secondary schools. In this workshop we proposed guided tasks using the software Geogebra and we discussed about the potential of the dynamic environments in the searching of patterns in math. The content in treatment was Pythagoras' Theorem, considering as a particular case of Fermat's Theorem about which was also discussed. The relation between such theorems through the manipulation of Pythagoras' theorem is conjectured, with figures of the plane, entering to analyze figures in the three-dimensional space to relate it to Fermat's theorem. Here we mention the realized tasks and some notes of the interaction with the teachers who participated of the workshop.

Key words: - patterns, Pythagoras and Fermat's theorems, technological tools.

Introducción

Las comparaciones internacionales sobre capacidades matemáticas de estudiantes de secundario ubican a Colombia y Argentina (entre otros países latinoamericanos) prácticamente al final de un conjunto considerable de naciones (Ministerio de Educación de España, 2009). Para detectar y contribuir a solucionar dicha problemática, se han venido realizando acciones específicas desde los Ministerios de Educación. Además, teniendo en cuenta las Metas Educativas para el año 2021 en Iberoamérica (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2010), es necesario incorporar la tecnología a los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la inclusión social se vincula, cada vez más, con el acceso al conocimiento, por la participación en redes y por el uso de la tecnología. Para acercarnos a la mejora que se proclama, consideramos crucial el fortalecimiento de la formación continua de los docentes, para resignificar formas de enseñar y aprender

Matemática. Una forma de contribuir a tal mejora es mediante propuestas de actividades concretas, como la que aquí se presenta.

Hegedus y Kaput (2004) conciben la tecnología como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo en una pantalla el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. De acuerdo con Herrera (2010), el debate sobre el papel de las tecnologías electrónicas en la Educación Matemática ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática.

Por otro lado, el Teorema de Pitágoras es considerado un verdadero trampolín para posteriores descubrimientos, tanto en la historia de la Matemática (entre otras cosas, dio origen a los números irracionales) como en la alfabetización matemática de las personas (numerosos problemas de medidas, entre otros, requieren de este conocimiento), lo que le da un considerable nivel de reconocimiento epistemológico a su enseñanza. Sin embargo, su significatividad en las escuelas suele quedar restringida a una fórmula que se utiliza irreflexivamente. Aunque han sido muchas las demostraciones y los enfoques desde los cuales se ha presentado y analizado dicho teorema, también es cierto que son muchas las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas que involucran las representaciones de nociones matemáticas fundamentales, como lo es ésta.

Centrando nuestra atención en la formación de docentes en Matemática que se desempeñan en el nivel secundario, nos preguntamos: ¿qué papel pueden jugar los ambientes dinámicos computacionales para ayudar al estudio comprensivo del Teorema de Pitágoras? y ¿qué tipo de actividades, desde la búsqueda de patrones, pueden facilitar dicho estudio?

Propuesta de actividad

Para el estudio del Teorema de Pitágoras se propuso, en el marco de un taller, una serie de actividades utilizando el programa Geogebra. A través de la búsqueda de patrones, se pretendió que los participantes pudieran visionar de una manera más completa dicho teorema, al relacionar las representaciones icónicas, gráficas y algebraicas.

En este contexto dinámico, se partió considerando que el Teorema de Pitágoras establece que si se tiene un triángulo rectángulo, el área de cualquier polígono regular (de n lados) que se forme con la hipotenusa como lado, es igual a la suma de las áreas de los otros dos polígonos regulares (de n lados cada uno) que se forman con los catetos como lado. La prueba más conocida y/o difundida es la que considera $n = 4$, pero esto es válido para todo n natural mayor o igual que tres.

Según los niveles de escolaridad, los conocimientos previos y los objetivos de aprendizaje, se van matizando los grados de rigurosidad requeridos en cuanto a la validación de la propiedad anterior -en un principio en forma de conjetura-, como por ejemplo:

- Ubicados en los primeros años de escuela secundaria (donde la mayoría de los participantes del taller se desempeñan), se pueden solicitar más ejemplos (otros valores de n) para ir reforzando la conjetura. Aquí el uso del software dinamiza la construcción y visualización de los diferentes polígonos regulares.
- Ubicados en la formación de profesores, en la validación ya debería solicitarse una demostración formal, donde también se requiere una visualización adecuada de regularidades matemáticas.

Consideramos sumamente beneficioso que en momentos específicos de la formación inicial o en instancias de formación continua, los profesores reflexionen (mediante actividades concretas) sobre cómo creen que la enseñanza de esta propiedad puede concretarse en la escuela secundaria y, por otro lado, que en un nivel más avanzado puedan visionar el Teorema de Pitágoras como un caso particular del Teorema de Fermat.

Una de las contribuciones que se pretende con esta propuesta es la formación de los participantes del taller en la habilidad de descubrir patrones. Esta habilidad se considera una actividad fundamental en el accionar matemático, ya que -más allá de un punto de vista bastante común y generalizado acerca del carácter estático de fórmulas- la Matemática continúa creciendo, en nuevos campos y aplicaciones, y no justamente por cálculos o fórmulas, sino por la búsqueda abierta de patrones (Steen, 2008). Por ello, para crecer matemáticamente, creemos propicio brindarles la posibilidad a los alumnos de interactuar con una variedad considerable de patrones en diversas actividades, ejemplificándose en este caso con el Teorema de Pitágoras.

Además, y de acuerdo con Herrera (2010), un buen uso de la tecnología puede favorecer el estudio de casos y la experimentación, ya que a partir de datos y gráficos obtenidos mediante herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden: formular conjeturas y validarlas (reforzarlas o desecharlas), descubrir patrones, explorar y sintetizar resultados. Una buena conjetura facilita la resolución de problemas y permite mostrar la necesidad de demostrar matemáticamente los teoremas, incluso sugiriendo vías para sus demostraciones.

Metodología empleada

Durante los días 5 y 6 de Julio de 2010 se llevó a cabo el trabajo en la modalidad de taller con los docentes. Participaron 25 educadores matemáticos latinoamericanos, de los países Guatemala, México, Honduras, Costa Rica, Panamá, Colombia, Venezuela, Perú, Brasil, Uruguay, Argentina, Cuba y República Dominicana. Ubicados en una sala de computación con una computadora por participante -contando con el programa Geogebra-, se les propuso realizar una serie de actividades consistente en cuatro tareas secuenciadas por etapas:

1. realizar las construcciones;
2. construir tres sistemas de representación de la situación;
3. buscar un patrón de regularidad en el análisis de las diferentes representaciones;
4. buscar alguna relación entre los teoremas de Pitágoras y de Fermat.

En las construcciones se utilizaron polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados, donde debían:

- Construir un segmento *AB* de longitud *k*. Colocar al punto *D* sobre este segmento. Hacer *AD* = *c* y *BD* = *k-c*.
- Construir un triángulo rectángulo con catetos de longitud *c* y *k-c*, respectivamente.
- Sobre cada uno de los lados del triángulo, construir un polígono regular (de igual número de lados sobre cada cateto como base).
- Calcular las áreas de los polígonos sobre los catetos A_1 y A_2 y la suma de éstas.
- Mover el punto *D*, para analizar la relación entre las áreas del polígono construido sobre la hipotenusa y el área de la suma $A_1 + A_2$ de los polígonos construidos sobre los catetos.
- Transferir la longitud de *c* sobre el eje *x* y la suma $A_1 + A_2$ al eje *y*.
- Construir una recta vertical que pase por el transferido de *c* y otra horizontal que pase por el transferido de $A_1 + A_2$; estas rectas se deben interceptar en un punto que llamamos *P*.
- Al activar la traza del punto *P* y mover *D*, se puede ver un lugar geométrico que permite analizar gráficamente la relación entre las áreas de los polígonos.
- A partir de la gráfica encontrar, con ayuda del programa, la ecuación del lugar geométrico.
- Por simplicidad, se fija el segmento *k* -base de la construcción- en un número entero, para analizar la relación entre la longitud de éste y los coeficientes de la expresión matemática del

lugar geométrico que describe el punto *P* al mover *D*, y asignar sentido a cada representación de la situación, al asociarla con elementos de otra representación.

- A partir del análisis de las tres representaciones, y al comparar con la longitud *k* del segmento, se pueden encontrar algunos patrones, objeto de estudio aquí.

Resultados de la implementación

Se comienza con *n* = *4* y *k* = *4*, es decir, construyendo cuadrados y el segmento *AB* fijo en *4*. Se obtiene una representación algebraica donde los coeficientes son *2*, *8* = *4*x*2* y *16* = *4*^{2}, como puede apreciarse en la Fig. 1. Se discute con los participantes la explicación matemática de esto, basados en la relación entre las áreas de los polígonos que se construyen sobre cada lado del triángulo rectángulo de referencia.

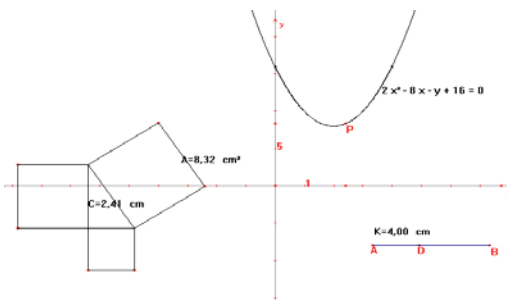


Figura 1

El área *Ac* del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa es: $Ac = c^2 + (k-c)^2$ que al desarrollar se tiene $Ac = 2c^2 - 2kc + k^2$ o si *c* = *x*, $Ac(x) = 2x^2 - 2kx + k^2$.

Seguidamente se hace el análisis cuando los polígonos son triángulos. El área de un triangulo es $At = \frac{B \times h}{2}$ y las alturas de cada uno de los dos triángulos que tienen como lado cada cateto son $h_1 = \sqrt{3}\frac{c}{2}$ y $h_2 = \sqrt{3}\frac{k-c}{2}$, respectivamente, así que el área del triángulo equilátero que tiene como lado la hipotenusa del triángulo rectángulo es:

$At = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(k-c)^2$, así

$At = \frac{\sqrt{3}\left(2c^2 - 2kc + k^2\right)}{4}$ y teniendo en cuenta que *c* es la variable con que se está trabajando en la construcción, si hacemos *c* = *x* y *At* = *A(x)*, se tiene la función $A(x) = \frac{\sqrt{3}\left(2x^2 - 2kx + k^2\right)}{4}$, que es la que muestra el programa, sólo que expandida.

Lo podemos verificar en la Fig. 2.

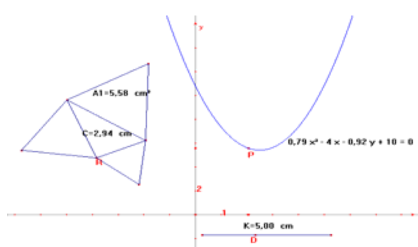


Figura 2

Si ahora el polígono es un pentágono regular, y se utilizan los mismos parámetros, ese pentágono se puede descomponer en cinco triángulos isósceles congruentes.

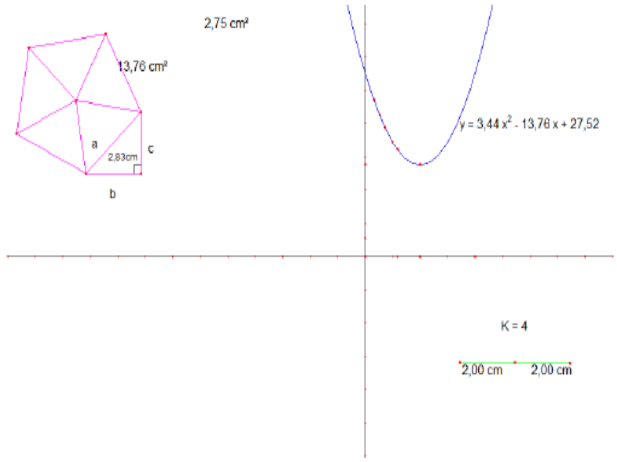


Figura 3

Los ángulos congruentes de cada triángulo isósceles miden 54°, ya que al dividir 360° entre los cinco triángulos da 72° y al trazar la altura de cada triángulo, este ángulo se biseca, así los tres ángulos de cada uno de lo diez triángulos generados por las apotemas son 36°, 54° y 90°. Las longitudes de los lados congruentes y de la apotema de cada uno de los cinco triángulos son: $d=\dfrac{c}{2\cos 54°}$ y $a=\dfrac{c\cdot\tan 54°}{2}$. Así que el área del pentágonos *Ap* que tiene como lado la hipotenusa del triángulo rectángulo base de la construcción, es $Ap(x)=\dfrac{5\tan 54°\left(2x^2-2kx+k^2\right)}{4}$, lo que puede verificarse en la Fig. 3.

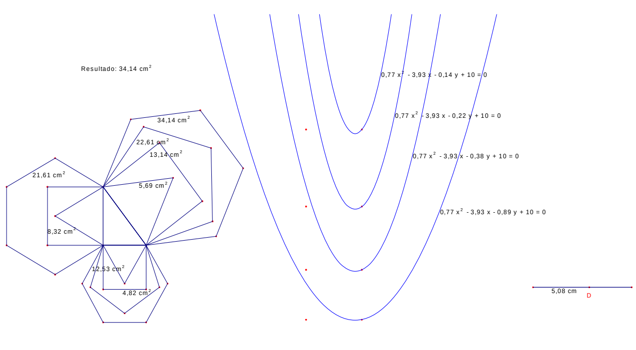


Figura 4

Analizando las expresiones algebraicas de los tres lugares geométricos medianamente estudiados hasta ahora, podemos ver que hay un factor común, $x^2-2kx+k^2$ y para la secuencia de polígonos con 3, 4, 5,..., n lados, se podría obtener la sucesión $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4},1,\dfrac{5\tan 54°}{4},\ldots,\dfrac{n\tan\alpha}{4}\right\}$.

Se conjetura que el patrón de la constante, que siempre acompaña al factor $c^2 - 2kc + k^2$, es $\frac{n\tan\alpha}{4}$, donde $\alpha = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n}\right) = 90° - \frac{180°}{n}$, siendo *n* la cantidad de lados del polígono regular que se forma en los lados del triángulo rectángulo dado.

Verifiquémoslo para los primeros valores de *n*, sobre los cuales exploramos anteriormente.

$$n = 3 \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = 1$$

$$n = 5 \Rightarrow \alpha = 54° \Rightarrow \tan\alpha = \tan 54° \Rightarrow \frac{n\tan\alpha}{4} = \frac{5\tan 54°}{4}\ldots$$

En relación con la realización de las construcciones, el principal inconveniente fue el poco manejo de la computadora por parte de los docentes asistentes, pero por la facilidad de uso del programa, esto fue superado rápidamente.

Se les guió en la construcción del cuadrado a los que se les dificultó, pero en general no hubo mayor dificultad con esta construcción ni con la del triángulo equilátero. La construcción del pentágono regular (dado uno de sus lados, como en todas las construcciones), no fue realizada en forma autónoma por ninguno de los asistentes, por lo que fue necesario utilizar el video beam para compartir los pasos a seguir. A la construcción del hexágono regular la lograron por casualidad, en sus intentos por hacer la construcción del pentágono regular.

Muchos de los participantes valoraron el abordaje de tan importante temática y la facilidad con que se pueden relacionar los diferentes sistemas de representación con el uso del computador, especialmente porque no fue necesario el uso de algoritmos diferentes al propio teorema de Pitágoras.

Al respecto, Jiménez (2006) asegura que todo contenido del currículo que tenga relación con los procesos de cálculo, será necesariamente influenciado por los aportes de la tecnología informática actual y futura, lo cual llevará a una necesaria redefinición de los énfasis en la enseñanza de algoritmos y conceptos. Aquí aparece como crucial la distinción y reflexión sobre intencionalidad de uso de los materiales y recursos didácticos disponibles (Flores, 2006), entre ellos los software educativos matemáticos.

En cuanto a la construcción de los sistemas de representación gráfico y algebraico, el principal inconveniente estuvo relacionado con la distinción entre el lugar geométrico generado por la traza, lugar geométrico (denominado así en el programa) y la gráfica de la cónica como tal; los docentes participantes pretendían que el programa generara la representación algebraica a partir de la traza o del lugar geométrico sin generar la cónica correspondiente.

En la búsqueda de un patrón de regularidad en el análisis de las diferentes representaciones, fue donde los asistentes mostraron mayores dificultades, las cuales estuvieron relacionadas con:

1. obtener un factor en cada una de las expresiones correspondientes a un número de lados dado;
2. aceptar la equivalencia entre las expresiones algebraicas expandidas y factorizadas, para convencerse debieron acudir a la calculadora manual;
3. establecer la relación entre los coeficientes de cada ecuación con la longitud del segmento *AB*.

Cuando se les pidió relacionar los Teoremas de Pitágoras y de Fermat no hubo inconvenientes, sólo en la manipulación de la construcción en Cabri 3D.

Reflexiones finales

Para finalizar, señalamos que una de las contribuciones que creemos que tiene esta propuesta es la formación en el descubrimiento de patrones (descubrimiento al que se debe llegar por medio de la conjetura inicial y en el que el software actúa de andamio).

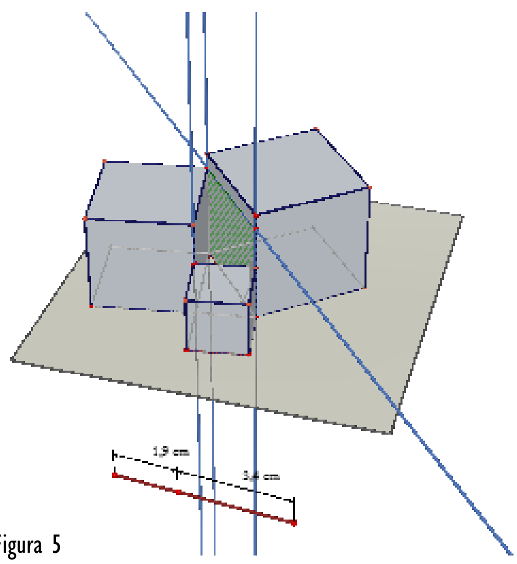


Figura 5

A los asistentes se les preguntó: ¿Qué pueden decir sobre la relación $a^n + b^n = c^n$ para distintos valores de *n*? Hubo consenso entre ellos en que tal igualdad no es posible para *n* > 2. Luego se les mostró y se les hizo manipular una construcción en Cabri 3D, a partir de la cual pudieron cambiar de opinión, al utilizar un *n* irracional. El asombro fue muy grande, pero vuelto a revisar el Teorema de Fermat, cayeron en la cuenta de que lo anterior no está en contravía con tal teorema, ya que este último es para valores enteros.

Para finalizar, creemos que actividades de este tipo, que involucran tecnología, trascienden la mera acción técnica del uso de una herramienta, ya que contemplan el desarrollo de habilidades matemáticas. En este sentido acordamos con Herrera (2010), quien le otorga valor a las herramientas tecnológicas para fomentar la observación, la discusión y el pensamiento crítico en los estudiantes. Estas habilidades adquieren relevancia en el escenario actual, donde la cantidad y variedad de información aumenta y se transforma continuamente.

Referencias bibliográficas

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el día 11 de marzo de 2010 del sitio web: http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf.

Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, 12(41), 77-97.

Hegedus, S. y Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-136). Bergen, Norway: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1149-1151), Vol. 23. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Jiménez, L. (2006). *Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual.* Recuperado el día 6 de marzo de 2010 del sitio web: http://www.uned.ac.cr/memencmate/Ponencias/procesoensenanza/Enseñanza%20de%20la%20Matemática%20-%20Lilliana%20Jiménez%20Montero.pdf.

Ministerio de Educación de España (2009). Pisa 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe español. Recuperado el día 25 de febrero de 2011 del sitio web: http://www.educacion.gob.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2010). 2021. Metas educativas. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios. Recuperado el día 25 de febrero de 2011 del sitio web: http://www.oei.es/metas2021/todo.pdf

Steen, L. (2008). Patrones. En L. Steen (comp.). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* (pp. 7-16). México DF: Limusa.

PERSPECTIVA DE LAS TIC EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR EN IBEROAMÉRICA

Gabriela Molina, Alejandro Rosas, Apolo Castañeda
Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI. España
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco. Argentina
Escuela Politécnica Superior de Zamora.Universidad de Salamanca. España
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@ciudad.com.ar, lmilevicich@ciudad.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. - En este documento se explica el cartel "Actividad a-didáctica para el estudio de las razones trigonométricas". Discute qué entendemos por actividad "a-didáctica" y cuál es nuestro interés en ella. Nuestro marco teórico es la teoría de las situaciones didácticas.

Palabras clave: - situaciones didácticas, razones trigonométricas, applets.

Abstract. - This article explains the poster "Actividad a-didáctica para el estudio de las razones trigonométricas". It discusses what we mean by activity "a-didáctica" and what our interest in it is. Our theoretical framework is the theory of didactical situations.

Key words: - didactical situations, trigonometrical reasons, applets.

Introducción

En la vigésimo tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa inauguramos un grupo de discusión sobre el uso de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en educación. Allí se trabajó sobre varios documentos (Dupuy, 2007; Facundo, 2005; Tünnermann, 1996 y 2008), focalizando la atención en las conclusiones de la UNESCO a partir de la Conferencia Mundial en Educación Superior en el Siglo XXI (UNESCO, 1998) y Los estándares de competencias en TIC para docentes (UNESCO, 2008).

Las conclusiones obtenidas, a partir de la opinión de los participantes, identificaron falencias en cuanto a la posibilidad real de implementación del uso de TIC en el aula, si bien en pocos años habían prosperado muchas iniciativas importantes al respecto: congresos y reuniones de carácter nacional o internacional, de instituciones de educación superior, de representantes de los gobiernos o de carácter mixto, dónde la preocupación por la calidad, por la cooperación, por la pedagogía, por el alistamiento, ha sido un tema recurrente en estos eventos (Milevicich y Lois, 2010).

En ese sentido se plantearon perspectivas a futuro referidas a la puesta en marcha de una colaboración bilateral sobre la base de convenios entre instituciones que constituyan la base de acuerdos de cooperación; *y a la creación de un grupo permanente* que pueda investigar y dar respuestas, al menos parciales, a los problemas referidos a:

- la implementación del uso de TIC en el aula, tales como la selección de contenidos donde la utilización de las nuevas tecnologías pueda ser más útil,
- la formación de los profesores en el uso e implementación didáctica de las nuevas tecnologías,
- la elección de los sistemas de álgebra computacional ("Computer Algebra System" CAS) más adecuados, sobre todo en el campo cada vez más amplio del software libre,
- la participación de profesores e investigadores en proyectos internacionales con propósitos tales como promover la enseñanza virtual en Matemáticas, potenciar las habilidades en el uso de los entornos e instrumentos educativos más avanzados, contribuir en la creación y el desarrollo de materiales educativos en formato electrónico, ofrecer consultoría acerca del uso del material existente, ofrecer un espacio para compartir los recursos de la enseñanza virtual a través de portales educativos, tales como el Laboratorio Virtual Europeo de Matemáticas ("European Virtual Laboratory of Mathematics" EVLM).

Desarrollo

Creemos que una sólida infraestructura de comunicación entre centros educativos es decisiva a la hora de construir una red educativa de calidad. En ese sentido, en el marco de los objetivos generales enunciados, en este nuevo encuentro nos propusimos desarrollar un grupo de discusión que:

a) evalúe estrategias para introducir las TIC en el aula de Matemática, en la educación superior,

b) contribuya con el conocimiento, análisis y evaluación de los software libres para Matemática, de aplicación en el nivel superior.

Conformación del grupo

El grupo de discusión estuvo conformado por docentes e investigadores pertenecientes a diferentes centros educativos: Universidad Autónoma de Querétaro (México), Universidad de San Pablo (Brasil), Universidad de San Carlos (Guatemala), Universidad Galileo (Guatemala), Universidad Pontifica Comillas (España), Universidad de Salamanca (España), Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Santa Fé y Facultad Regional General Pacheco) (Argentina).

Sesiones

El espacio asignado al grupo de discusión consistió en dos sesiones de aproximadamente dos horas de duración cada una. Cabe aclarar, que una vez finalizada la RELME, cada uno de los participantes debió continuar el trabajo iniciado en sus centros educativos de origen.

La primera sesión se centró en la evaluación de estrategias para introducir las TIC en el aula, en la educación superior. En ese sentido, se discutió la importancia de la figura del facilitador de TIC, con el rol de capacitar a los docentes en planeamiento e incorporación de las nuevas tecnologías. Los docentes pertenecientes a instituciones educativas que cuentan con el apoyo de un coordinador tecnológico, con asesoramiento en lo que hace a la integración de las TIC a los procesos educativos, o bien, con asesoramiento técnico, manifestaron haber logrado avances importantes en los últimos años.

Referido a la problemática del surgimiento de esta nueva figura, el facilitador de TIC, en el escenario educativo, se discutió sobre la necesidad de contar con acompañamiento institucional y de actualizar los currículos. Se puso especial énfasis en *"la necesidad de dar los conocimientos básicos del trabajo sobre las nuevas tecnologías y su uso en el aula, procurar que los docentes no dicten tantas asignaturas, para darles el tiempo suficiente para que puedan indagar y bosquejar según su tema, a trabajar en aula ..., debería darse un curso en línea que sea accesible y básico, algo así como lo que tiene enlaces pero acreditado por cada país de residencia para anular el desconocimiento sobre el avance de las tecnologías"* (párrafo extractado de las discusiones que tuvieron lugar en la primera sesión del grupo).

Otro cuestión analizada, fue el acceso de los docentes al uso de TIC. Se comentaron diferentes propuestas impulsadas por las instituciones gubernamentales educativas de los países de origen de los participantes. En particular, se analizó el material en línea ofrecido por Educ.ar y Encuentro, como ejemplos de política para integración de las TIC.

Educ.ar es el nombre abreviado del Portal educativo del Estado Argentino. En él se presentan propuestas de formación docente voluntaria, innumerable cantidad de recursos de todo tipo para la formación y para el trabajo en el aula, en particular para el aula de Matemática. Como parte de una Campaña Nacional de Alfabetización Digital, se incluye la generación de contenidos a través de software educativo y actividades en línea como weblogs y webquests. También aloja una plataforma o banco de datos que permite acceder a materiales diseñados por otras entidades públicas y privadas.

El canal de televisión *Encuentro* surgió hacia fines de 2006, al principio, mediante grupos de DVD, con distintas colecciones de programas, que se distribuyeron a pedido de las escuelas. El sitio web del canal, co-producido con Educ.ar, fue evolucionando de manera significativa: surgió publicando la programación y abriendo espacios de foro para la discusión y hoy ofrece directamente recursos audiovisuales y producciones web sobre los programas que emite la señal Encuentro adaptados al uso educativo.

En el año 2010 tanto Educ.ar como el canal Encuentro han implementado un servicio de acceso en línea de sus materiales audiovisuales que permite descargarlos para que sean usados por los docentes.

En la segunda sesión se evaluó tanto la posibilidad de utilización, como las alternativas existentes, respecto de los software libres para cálculo matemático, de aplicación en el nivel superior. El trabajo desarrollado durante esta sesión tuvo dos partes.

En primer lugar, los participantes analizaron los elementos a favor y en contra de los software libre frente a los programas comerciales o propietarios. En ese sentido, hubo consenso entre los participantes en cuanto a que el problema tiene su origen en las limitaciones impuestas por los programas denominados privativos o propietarios y las dificultades, sobre todo económicas, en el acceso y uso de los mismos. Al mismo tiempo, los movimientos de software libre hacen hincapié en la adopción, o bien la migración hacia herramientas libres que incluyan el código fuente y permitan:

1. usar el programa, con propósitos académicos,
2. estudiar su funcionamiento y poder adaptarlo,
3. distribuir copias, fundamentalmente en las comunidades educativas que comparten metodologías orientadas al uso de TIC.
4. mejorar el programa y hacer públicas tales mejoras, de modo que toda la comunidad académica pueda beneficiarse.

Se coincidió en que estas características son más afines con los contextos académicos y científicos que aquellas correspondientes a programas propietarios.

Por otra parte, la estrecha relación que existe entre las matemáticas y las ciencias de la computación, contribuye a un mejor aprovechamiento de una gran cantidad de herramientas libres que pueden ser de utilidad para los profesores.

En segundo lugar, se propició la discusión sobre la adaptación de algunos programas, de uso libre, específicos para Matemáticas, a las necesidades de los profesores y a las características didácticas de los diferentes cursos. Entre otros, se evaluaron:

1. Programas de cálculo numérico y simbólico. Se focalizó la atención en la evaluación de Maxima, programa CAS, a partir de la presentación de ejemplos de resolución referidos a complejas operaciones algebraicas, representación de funciones en 2 y 3 dimensiones,

operaciones con polinomios, resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, operaciones con vectores y matrices, resolución de derivadas e integrales, aproximación de funciones mediante series de Taylor, resolución ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Programas interactivos de diseño y de cálculo simbólico para trabajar con objetos geométricos y funciones matemáticas, tal como Geo-Gebra. Se enfatizó la posibilidad de integrarse a la comunidad de docentes e investigadores que trabajan con este software, accediendo a los materiales desarrollados e involucrándose en la producción de nuevos.

Finalmente, como cierre de la segunda sesión, se analizó, con los participantes, un cuestionario integrado por un conjunto de afirmaciones surgidas de la opinión de especialistas sobre el impacto de las TIC en la sociedad y en la comunidad educativa y de los educadores e investigadores en tecnologías educativas. El mismo consistió en 6 afirmaciones sobre las cuales, los encuestados debían expresar su grado de acuerdo (desde 1, correspondiente a total desacuerdo, hasta 7, total acuerdo). Cada uno de participantes realizó las encuestas en su institución de origen y envió las respuestas. Se recibieron 24 devoluciones.

A continuación se presentan, numerados, los *textos de referencia*, que formaron parte de la mencionada encuesta

(1) *Dice Neil Postman: "La escuela infantil de la era de la información será muy distinta a la que conocieron mamá y papá. ¿Te interesa la biología? Diseña mediante simulación virtual tus propias formas de vida. ¿Tienes problemas con un proyecto científico? Establece una videoconferencia con el mejor investigador mundial sobre el tema. ¿Te aburre el mundo real? Entra a un laboratorio de física virtual y escribe una nueva ley de la gravedad. Esta es la clase de aprendizaje de primera mano de la que nuestros jóvenes podrían estar ya disfrutando. Las tecnologías que la hacen posible están ya disponibles y esos mismos jóvenes, con independencia de cuál sea su posición económica, saben cómo utilizarlas" (Postman, 2001, p.55)*

Los entornos virtuales con los que interactuamos y convivimos cada vez con mayor frecuencia avanzan no solo en su capacidad de seducirnos y fascinarnos con el fin de mantenernos en estado de inmersión, sino que se proponen justamente borrar toda distinción con el mundo natural o, más aún, competir con eso que nosotros insistimos en denominar mundo real.

(2) "*La percepción de los docentes y directivos es que el recurso es muy interesante, pero aparece como un distractor del trabajo habitual del aula, algo que hacen además de dar clase.*"

Algunos docentes explicitan que les resulta complejo encontrar la forma de incorporar esta tecnología al trabajo en el aula. Muchos consideran que se les sumó un problema en su trabajo, especialmente por la habilidad de los chicos de manejar la herramienta: abrir páginas, chatear, jugar, mientras se supone que deben estar prestando atención a la clase.

(3) "Si estamos viviendo una revolución sin precedentes, en la que por primera vez en la historia humana, podemos combinar en una misma plataforma el habla, la escritura, las imágenes y el sonido;

Si, por primera vez, los humanos podemos combinar cualquier forma concebible de información con cualquier otra para crear una forma diferente de comunicación;

¿por qué deberíamos sentirnos cómodos y familiarizados?

¿No habría que preguntarse por qué están tan subvaluadas en la educación en TIC características tales como la innovación, el desafío intelectual, el disenso y la discusión?" (De Castell, Briyso & Jenson, 2002, p.5)

Los autores ven allí el peso del sistema escolar que termina replicando el modelo conocido y previsible de pregunta-respuesta, antes que la exploración y la aventura como modos de indagación.

(4) "Una estrategia para introducir las TIC en las instituciones educativas es la creación de la figura del facilitador TIC. Su función es capacitar a los docentes en planeamiento e incorporación de las nuevas tecnologías las escuelas disponer de un coordinador tecnológico, lo que significa contar con apoyo técnico y asesoramiento en lo que hace a la integración de las TIC en la enseñanza "

Publicado en la comunidad de educadores para la cultura científica (OEI)

Foro: Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital

Es de imperiosa necesidad brindar los conocimientos básicos de trabajo sobre las nuevas tecnologías y su uso en el aula, procurar que los docentes no dicten tantas asignaturas para darles el tiempo suficiente para que puedan indagar y bosquejar según su tema a trabajar en aula pero debería darse un curso en línea que sea accesible y básico algo así como lo que tiene enlaces pero acreditado por cada país de residencia para anular el desconocimiento sobre el avance de las tecnologías.

(5) "El impacto de las TIC en la sociedad actual ha impactado tanto sobre todo en los niños y jóvenes, que les resulta difícil, tedioso y aburrido a decir de ellos leer libros

escritos, prefieren oírlos o verlos resumidos en la TV, cine o Internet, el uso desmedido de ipots, celulares, etc. a ocasionado que muchos se estén volviendo sordos, y con riesgos de sufrir accidentes ya que caminan por la calle con sus audífonos sin percatarse de nada ni nadie a su alrededor. ”

Publicado en la comunidad de educadores para la cultura científica (OEI)

Foro: Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital

La educación se vuelve un reto para nosotros como docentes, pues tenemos que buscar alternativas en el uso eficiente de las TIC para atraer la atención de los estudiantes, capacitarnos para no-solo alcanzarlos sino adelantarnos a su habilidad casi "innata", para las nuevas tecnologías.

(6) El principal inconveniente referido a la adopción del software libre tiene que ver con la continuidad. Si el paquete de software está basado en el entusiasmo de una comunidad de personas que puede decaer a lo largo de los años, dicho paquete de software puede caer en el olvido.

Resultados y conclusiones

Tal como se mencionó, al describir la encuesta, se recibieron un total de 24 respuestas, realizadas por docentes que se desempeñan en educación superior (universidades o centros de formación de profesores), las cuales fueron procesadas con el soporte de una planilla de cálculo. Los resultados correspondientes a la media, por cada afirmación, se muestran en la tabla 2 (recordamos que las valoraciones tenían un rango de 1 a 7).

Se puede observar un buen grado de aceptación sobre las afirmaciones 3 y 5, en relación con la preocupación de los docentes por ofrecer propuestas didácticas innovadoras. Del mismo modo, la afirmación 4, referida a nuevas formas de concebir los procesos de enseñanza y aprendizaje, fue muy bien valorada por los encuestados.

Se observa que las afirmaciones 1y 2 tuvieron un grado de aceptación medio, lo cual nos lleva a suponer que estos docentes tienen una buena disposición hacia la incorporación de TIC en el aula.

Finalmente, respecto de la afirmación 6, estos docentes no acuerdan, mayormente, con que el principal inconveniente, referido a la adopción del software libre, tiene que ver con la continuidad de su uso.

Tabla 2. Resultados referidos a la encuesta sobre el impacto de las TIC en la sociedad y en la comunidad educativa

Textos de referencia	*Valoración Media*
1	3,54
2	3,16
3	4,08
4	5,01
5	4,67
6	3,16

Consideramos necesario seguir trabajando para que este espacio académico en las RELME´s, pueda tener continuidad. Nuestros propósitos iniciales fueron muy amplios, y en ese sentido, en cada nuevo encuentro pretendemos abordar, al menos uno de ellos.

En cuanto a la contribución sobre el conocimiento, análisis y evaluación de los software libres para Matemática, en el nivel superior, consideramos que es fundamental impulsar la creación de una "comunidad de usuarios" para comenzar un trabajo colaborativo eficiente, que permita intercambiar información y la elaboración de prácticas y tutoriales que sean significativos y sirvan como guía para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Comunidad de educadores para la Cultura Científica. (Campus Virtual de la OEI). Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://www.caeu.org

De Castell, S., Bryson, M. & Jenson, J. (2002) Object Lessons: Towards an Educational Theory of Technology. *First Monday, 7, pp.1-7*

Dupuy, G. (2007) La fractural digital hoy. *Ciencia, Tecnología y Sociedad, 9(3), 115-133*

Educ.ar (Portal Educativo del Estado Argentino). Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://www.educ.ar

Facundo, A. (2005). *Antecedentes, situación y perspectivas de la educación superior virtual en América Latina y el Caribe*. Caracas: Iesalc/Unesco.

Laboratorio Virtual Europeo de Matemáticas. Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://portalevlm.usal.es/

Milevicich, L y Lois, A (2010). Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en América Latina. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1331-1340.

México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Postman, N. (2001). *El fin de la educación. Una nueva definición del valor de la escuela.* Barcelona, Octaedro.

Tünnermann, C (2008). *UNESCO. La educación superior en: diez años después de la Conferencia Mundial de 1998*. Cali: Iesalc-Unesco

Tünnermann, C. (1996) *La Educación superior en el Umbral del Siglo XXI.* Caracas: Cresalc/Unesco.

UNESCO (1998). *World Conference on Higher Education in the XXI Century: Vision and Action.* Paris: UNESCO

UNESCO (2008) *Estándares de competencias en TIC para docentes.* Recuperado el 20 de julio de 2008 de http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/default.aspx

EL USO DEL GRAPHER EN LA ENSEÑANZA DE LAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD: EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Javier Barrera Ángeles, Tulio Rafael Amaya de Armas, Petra Téllez Reyes
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México
Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo Colombia
Centro de Bachillerato Tecnológico e Industrial y de Servicios No 8. Mexico
jbarrera12@hotmail.com, tuama1@hotmail.com, ptr45@hotmail.com

Resumen. -En este documento se reportan resultados de una investigación llevada a cabo con estudiantes de nivel universitario, cuyo objetivo fue determinar de qué manera el uso del software (Grapher) facilita el aprendizaje de la distribución normal mediante procesos matemáticos en resolución de problemas. Se diseñó una metodología a través de un caso de estudio, con una muestra de 11 estudiantes. Se utilizó el método de comparación en dos fases de aplicación. La enseñanza de la distribución normal de forma tradicional, centra más su atención en la parte algorítmica que en la reflexión misma de la actividad. Sin embargo, se pudo constatar que el uso del Grapher motivó de manera importante a los estudiantes para resolver problemas con la distribución normal, permitiendo así, la reflexión y análisis durante el proceso de resolución.

Palabras clave:- grapher, aprendizaje, distribución normal, reflexión, estrategias.

Abstract. -This paper reports result of a research conducted with college students, whose goal was to determine how the use of software (Grapher) facilitates the learning of normal distribution using mathematical processes to solve problems. A methodology was designed through a case study with a sample of 11 students. We use the method of comparison in two stages of implementation. The teaching of the traditional normal distribution focuses more on the algorithmic reflection of the activity itself. However it was found the use of an important reason, students using grapher to solve problems with the normal distribution, thus, reflection and analysis during the resolution process.

Key words:- grapher, learning, normal distribution, reflection, strategies.

Introducción

El propósito de este documento es presentar resultados del reporte de investigación, cuyo objetivo principal fue determinar de qué manera el uso de la tecnología facilita el aprendizaje de la distribución normal a través de los procesos matemáticos en resolución de problemas, con estudiantes de nivel universitario. Existen diversas opiniones a favor del uso de la tecnología, por ejemplo, Estrada (2002) menciona que la tecnología moderna ha creado las condiciones esenciales para manipular los objetos matemáticos y, al mismo tiempo, ver los objetos sobre estas acciones en la representación dinámica mostrada sobre la pantalla de la computadora. Así, la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). También se menciona que la utilización de la informática de tipo cualitativo representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas (Kutzler, 1999). De igual manera, se dice que las técnicas basadas en el análisis de datos y su interpretación es cada día más importante (Rodríguez, 2004). Por otra parte existen investigaciones que han estudiado conceptos de la probabilidad, como la distribución normal (Batanero, et al. 2001, Lavalle, et al. 2003 y García, et al. 2009). Para llevar a cabo esta investigación se hizo una selección adecuada de problemas de aplicación de la distribución normal, a través de un caso de estudio donde participaron estudiantes universitarios. El método empleado en esta investigación fue de comparación: la primera actividad fue desarrollada con lápiz y papel y la segunda con el uso del Grapher. Algunos de los resultados más sobresalientes son: la enseñanza tradicional centra más su atención en la parte algorítmica que en la reflexión misma de la actividad y el uso del Grapher creó un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a la reflexión y análisis durante el proceso de resolución.

Referentes teóricos

La relación sujeto-herramienta tecnológica permite observar patrones de conducta en el sujeto cuando interactúa con ella. En este sentido, pueden apreciarse dos situaciones: la primera tiene que ver con situaciones estáticas o inertes; una característica esencial de este punto, es que las acciones de los estudiantes no reaccionan con las representaciones de los objetos matemáticos. La segunda tiene que ver con un medio interactivo, en el cual los estudiantes reciben respuesta a sus acciones (Estrada, 2002). En este sentido, se dice que la tecnología moderna ha creado las condiciones esenciales para manipular los objetos matemáticos y, al mismo tiempo, ver los objetos sobre estas acciones en la representación dinámica mostrada sobre la pantalla de la computadora.

Kaput (1994) señala que la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano; afirma que el uso de las herramientas tecnológicas conduce a nuevas maneras de pensar o razonar por parte del usuario. Una utilización de la informática de tipo cualitativo, que incide mucho más en los procesos de modelización y construcción de las matemáticas que representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas (kutzler, 1999).

Se está avanzando hacia una sociedad cada vez más informatizada y a una comprensión de las técnicas basadas de análisis de datos y su interpretación es cada día más importante (Rodríguez, 2004). A pesar de ello, el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aún muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Sin embargo, existen investigaciones importantes que discuten el uso de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, Batanero, et al. (2001) quienes han menciona que a pesar de la importancia de la distribución normal, no se han encontrado estudios que muestren los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de esta distribución. Esta investigación toma el referente teórico sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

Además, el significado de objeto institucional de la distribución normal es tomado de tres referentes: del carácter epistemológico, la literatura actual y de la experiencia propia y la de los estudiantes con el enfoque basado en el uso de los ordenadores. A partir de esta concepción, se incorporan los siguientes elementos**:** *extensivos* (las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto), *ostensivos* (las herramientas semióticas disponibles para representar o para operar con los problemas y objetos involucrados), *actuativos* (procedimientos y estrategias para resolver problemas), intensivos (propiedades características y relaciones con otras entidades) y *valídativos* (argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones).

Por otra parte, Lavalle, et al. (2003) en su estudio, analizan la presencia de razonamientos heurísticos; entendiendo a la "heurística" como el proceso mental que reduce la complejidad del problema, de modo que sea accesible al resolutor. En esta propuesta, los autores establecen que los cursos de formación deben contemplar ciertos aspectos complementarios, entre los que destacan: a) reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares y el estudio de las transformaciones que experimentan para adaptarlos a la enseñanza; b) conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias de resolución de problemas.

Otra investigación importante es la desarrollada por García, et al, (2009), cuyo objetivo es proporcionar a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y, en general a los alumnos de asignaturas básicas de probabilidad y estadística, de cualquier área, de material de apoyo a los contenidos teóricos y prácticos que se desarrollen en clase, sin que ello deba entenderse como un sustituto del profesor a la hora de explicar los contenidos de la materia, sino como un complemento a la clase presencial. Como resultado de esta aportación se tuvo un considerable descenso en el grado de dificultad encontrado después de haber utilizados los materiales (software llamado CDPYE, el cual administra un determinado conjunto de materiales docentes que incluyen: presentaciones multimedia, programas interactivos, que permitan realizar aplicaciones a problemas concretos, así como ejercicios con los cuales el alumno pueda comprobar de forma interactiva los conocimientos adquiridos) en todos y cada uno de los aspectos a que se hacía referencia.

Planteamiento y análisis de resultados

La distribución normal es la más utilizada en la estadística. Constituye un buen modelo para muchas poblaciones continuas, aunque no para todas. La media de una variable aleatoria normal puede tener cualquier valor y la varianza cualquier valor positivo. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal con media μ y σ² está dada por

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)/2\sigma^2} \quad (1)$$

La proporción de una población normal que se encuentra a cierto número de desviaciones estándar de la media es la misma en cualquier población normal. Por esta razón, cuando se trabaja con poblaciones normales, se convierte las unidades en las cuales se midió originalmente las unidades de la población a unidades estándar. Estas últimas indican a cuántas desviaciones estándar se encuentra un dato de la media poblacional (Navidi, 2007).

Para esta investigación se consideraron los siguientes problemas:

1. Un proceso fabrica cojinetes de bolas cuyos diámetros se distribuyen normalmente con media 2.505 cm y desviación estándar de 0.008 cm. Las especificaciones requieren que el diámetro esté dentro del intervalo 2.5±0.01 cm. ¿Qué proporción de cojinetes de bolas cumple con la especificación?
2. Si el proceso puede recalibrarse para que la media sea igual a 2.5 cm, el centro del diámetro del intervalo de la especificación. La desviación estándar del proceso sigue siendo de 0.008 cm. ¿Qué proporción de los diámetros satisface la especificación?
3. Suponga que se ha recalibrado nuevamente el proceso de tal forma que la media del diámetro mide ahora 2.5 cm. A qué valor debe reducirse la desviación estándar para que 95% de los diámetros satisfaga la aplicación.

Estos problemas permiten analizar el proceso en la resolución de problemas y estrategias que el estudiante utiliza en la obtención del resultado, a través del significado institucional de la distribución normal. Además, se busca que relacione la información que provee cada problema, de manera que el primer resultado le permita pensar en la solución del segundo y, así consecutivamente, dado que se trata del mismo problema sólo que variando los datos y cambiando las preguntas. Por otra parte, se usa Grapher como herramienta que permite resolver problemas a través del uso de los elementos tales como extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos; a través de la manipulación de la ecuación (1). En este sentido; se usa la herramienta tecnológica para dar repuesta a los problemas, lo que permite un mayor dinamismo en el manejo de los objetos matemáticos, dando lugar a razonamientos heurísticos según Lavalle (2003).

Un aspecto relevante en la selección de estos problemas tiene que ver con la interrelación entre los datos y las preguntas (variables aleatorias, variables normalizadas, media y variación de la media, desviación estándar, etc.), las cuales propician que durante el desarrollo del proceso en la resolución de estos, bajo cualquiera de las dos situaciones pretenden que el estudiante desarrolle estrategias en cada caso que le permitan reflexionar sobre sus resultados, desde el punto de vista tanto inerte como dinámico. De esta manera, el objetivo de esta investigación es determinar de qué manera el uso de la tecnología facilita el aprendizaje de la Distribución normal a través de los procesos matemáticos en resolución de problemas.

Metodología

El diseño de esta investigación tuvo como sustento un estudio de casos a partir de una muestra de 11 estudiantes de segundo año universitario (cuarto semestre de Lic. En sistemas computacionales, de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo). El tipo de método que se empleó fue de comparación a partir de un primer momento y una segunda aplicación en otro momento. A estos estudiantes se les dio un curso de probabilidad y estadística básica (tomando como referente la literatura actual: Walpole, 1992, Navidi, 2006, Richard et al., 1996); este curso tuvo una duración de 3 meses, tomando 5 horas a la semana de clase. Y durante el tercer mes del curso se instruyó a los estudiantes sobre el manejo del Grapher, en principio no se les comentó cual era la intención en el manejo de esta herramienta. Después del tercer mes se aplicaron los problemas previamente seleccionados de acuerdo al objetivo de esta investigación; la aplicación duro dos horas. Al siguiente día nuevamente se les pidió que contestaran los problemas; que para sorpresa de ellos, eran los mismos, una de las recomendaciones era que explicaran en la medida de lo posible el proceso que realizaban en cada problema.

Análisis de resultados

Después de haber realizado todo el trabajo y recabado la información escrita así como las presentaciones realizadas en la computadora, se procedió al análisis de la información, la cual se describe a continuación.

a. *Actividad con lápiz y papel*

En la tabla 1, se presentan los resultados obtenidos de la primera situación, la cual tiene que ver con el trabajo a lápiz y papel o prueba escrita. Para ello hemos convenido en la siguiente codificación: 0(sin respuesta), 1(sólo intento), 2(procedimiento sin resultado), 3(procedimiento y respuesta correctos) y 4(procedimiento incorrecto). Además se incluyen los elementos que utilizaron los estudiantes para responder a cada problema descritos baja la siguiente subcodificación: $*^{1}$(extensivos); $*^{2}$(ostensivos); $*^{3}$(actuativos); $*^{4}$(intensivos) y $*^{5}$(validativos).

Tabla 1. Descripción de resultados de la primera situación.

Alumno/Problema	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Graficas
1	$4*^{3}$	0	0	1
2	$4*^{2}*^{3}$	0	0	1
3	$4*^{2}*^{3}*^{4}$	0	0	1
4	$4*^{2}*^{3}*^{4}$	$4*^{2}*^{3}*^{4}$	$4*^{2}*^{3}*^{4}$	1,2,3
5	$4*^{2}*^{3}$	0	0	1
6	$3*^{3}*^{5}$	$3*^{3}*^{5}$	0	1,2
7	$3*^{2}*^{3}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{5}$	$2*^{2}*^{3}*^{5}$	1,2,3
8	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	1,2,3
9	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$4*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	1,2,3
10	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	$3*^{2}*^{3}*^{4}*^{5}$	1,2,3
11	0	0	0	0

De manera breve concluimos con los siguientes resultados: (3) 32% con los elementos $*^{2}$(10), $*^{3}$(10), $*^{4}$(8), $*^{5}$(1); (4) 24% con los elementos $*^{2}$(6), $*^{3}$(4), $*^{4}$(5), $*^{5}$(1); (2) 3.03% con los elementos $*^{2}$(1), $*^{3}$(1), $*^{5}$(1) y (0) 33% con los elementos. Como podemos ver, estos resultados muestran el alto grado de deficiencias que tienen los estudiantes al resolver problemas con la distribución normal. Además de que no existe reflexión alguna sobre sus respuestas.

b. Actividad con el uso del Grapher

La segunda situación tiene que ver con el uso del Grapher, en donde los estudiantes resolvieron los problemas con éxito; no solo han sido capaces de reflexionar sobre cada una de las actividades sino que también lograron vincular las soluciones con otros objetos matemáticos (concepto de límite y el concepto de integral). Esto se debió al dinamismo y la interactividad entre el objeto matemático y sujeto cognoscente. La visualización dinámica que proporcionó la pantalla también les permitió explorar cada resultado obtenido. Además, se hace notar que después de terminar de resolver los problemas, los estudiantes siguieron manipulando el algoritmo cambiando el valor a los parámetros deseados y, de esta manera realizaron algunas conjeturas acerca de lo que sucedería si se cambiaran los valores de la media y desviación estándar. Otro aspecto importante observado en esta actividad tiene que ver con el uso de los elementos *[1](extensivos); *[2](ostensivos); *[3](actuativos); *[4](intensivos) y *[5](validativos), que a pesar de que es una actividad muy diferente a la primera, son utilizados para responder de manera correcta a los problemas planteados argumentando cada respuesta y reflexionando sobre otro tipo de respuestas que se producían al cambiar los valores mencionados.

Conclusiones

Después de concluir esta investigación se considera conveniente resaltar lo siguiente: que enseñar distribuciones continúas a estudiantes de manera tradicional solo favorece la parte algorítmica; así lo demuestran los resultados derivados de este trabajo. La poca capacidad de análisis demostrada en las actividades realizadas por el estudiante en la resolución de problemas, se convierte en una actividad mecánica. Por otra parte el uso del Grapher ha motivado a los estudiantes para resolver problemas con la distribución normal; donde la manipulación de variables de un problema se representa en imágenes que simulan su comportamiento, permitiendo la reflexión y análisis de la actividad misma.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. Quadrante, pp. 59-92.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos en la formación del profesorado.* Tesis doctoral en didáctica de las Matemátiques i les Ciencies esperimentals. Universidad Autónoma de Barcelona.

Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kutzler, B. (1999).The Algebraic Calculador as a Pedagogical tool for Teaching Mathematics. In: Laughbaum, E.D, (ed.): Hand-Held Tecnology in Mathematics and Science Education: A Collectionof Paper, Teachers Teaching with Technology Short Course Program @ the Ohio State University, pp.98-109.

Lavalle, A., Micheli, E. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Boletín de la SOAREM* (Sociedad Argentina de Educación Matemática). Año 5 nº 17, pp.23-32.

Levin, R. I. y Rubin, D. S. (1996). *Estadística para administradores*, 6a.Ed.Prentice Hall 1996, pp.264-277.

García Ligero, M. J., Hermoso, A., Maldonado, J. A., Román, P. y Torres, F. (2009). *Nuevas tendencias para enseñar probabilidades usando CDPYE*. Vol. 30. No 2, pp.173-184.

Navidi, William. (2007). Estadística para Ingenieros y científicos, 1ª. Ed. Mc Graw Hill, pp 231-238.

Rodríguez, M. (2004). Dificultades en el significado y la comprensión de conceptos estadísticos elementales y de probabilidad. *Revista premisa de la SOAREM* (Sociedad Argentina de Educación Matemática). Año 6 nº 22, pp.13-22.

Walpole y Myers.(1992). Probabilidad y Estadística, 4ª Ed. McGraw-Hill.

LA REPRESENTACIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco . Argentina
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar

Resumen. - Este trabajo forma parte de la línea de investigación sobre resolución de problemas, con incorporación de tecnología informática.

Focalizados en analizar los modos en que los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM) resuelven problemas sobre Cálculo diferencial e Integral, utilizando herramientas informáticas, nos propusimos:

*a)*corroborar si estos alumnos integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas, y

*b)*comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas..

Palabras clave:- resolución de problemas, representaciones semióticas, estrategias de resolución, heurística.

Abstract. -This paper is part of our research on problem solving, with computer technology. Focused on analyzing the ways in which students of Teaching Mathematics … (LEM) solve problems on Differential and Integral Calculus, using tools, we set:

a) verify if these students integrate different representations (graphical, numerical and algebraic) to solve problems, and

b) check whether guess processes, experimentation, simulation and verification, are performed in problem solving with informatic tools.

Key words:- problem solving, semiotic representation, solving strategies, heuristic.

Introducción

En los últimos veinte años se han realizado un gran número de trabajos referidos a la resolución de problemas en los ámbitos académicos, con distintas orientaciones. Por un lado, se han descrito modelos sobre cómo los sujetos resuelven problemas, denominados: estudios experto-novato (López-Rupérez, 1991 y Glaser, 1992). Por otro, se han desarrollado propuestas metodológicas, diseñadas explícitamente para enseñar a los alumnos a resolver problemas, con la característica común de haber evaluado su nivel de eficacia dentro del aula (Caillot y Dumas, 1987; Selveratnam, 1990; Gil y Martínez Torregrosa, 1983; Taconis, Ferguson-Hessler y Broekkamp, 2001).

Esta última orientación constituye el encuadre de nuestra línea de investigación sobre la resolución de problemas, aunque ambas perspectivas tienen elementos en común y se nutren mutuamente. En particular, el presente trabajo, indaga sobre aspectos de la resolución de problemas en la educación superior, con incorporación de tecnología informática.

Nuestro problema inicial estuvo focalizado en analizar los modos en que los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM) de la Facultad Regional General Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional, resuelven problemas "'*cognitivamente no-triviales*' (Selden y Selden, 1989), sobre Cálculo Diferencial e Integral, utilizando herramientas informáticas. En ese sentido, tuvimos en cuenta que la posibilidad de resolver un problema depende, mayormente, de un modo apropiado de encarar el mismo y de las representaciones que se realicen. Esta última característica ofrece un amplio campo de estudio del problema desde distintas perspectivas.

Sobre el marco de referencia de la Teoría de Duval (1999, 2000, 2004), consideramos que un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones. El conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, es esencial que el alumno pueda lograr una representación adecuada del problema a resolver.

Cabe señalar que cuando hablamos de "*representaciones*" es necesario considerar los siguientes cuatro aspectos:

1) *El sistema por el cual se produce la representación.* Cualquier representación se produce a través de un sistema particular. El contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación que se utiliza para su producción. El pensamiento humano requiere la movilización de varios sistemas de representación de producción y su coordinación. Puede ser un aparato físico (una cámara fotográfica, una pizarra interactiva, una computadora), una organización mental (las imágenes visuales de la memoria), un sistema semiótico (una gráfica, una tabla, una fórmula, un enunciado).

2) *La relación entre la representación y el objeto representado*.

3) *La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica*. Cabe recordar que los objetos matemáticos no pueden ser percibidos sino a través de sus representaciones.

4) *La razón por la que el uso de la representación es necesario.* Esta puede ser para comunicación o para procesamiento.

Parafraseando a Duval, en una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización (Duval, 2000). En ese sentido, juega un papel decisivo la habilidad de cambiar de "*registro de representación"* (Duval, 2000, Milevicich, 2008) en situaciones de resolución de problemas, ya sea porque otra presentación de los datos encaja mejor con un modelo ya conocido, o porque se deben poner en juego dos registros diferentes.

Otra perspectiva, no menos importante, está referida a la incorporación de herramientas informáticas en la resolución de problemas (Milevicich y Lois, 2007), lo cual contribuye favorablemente en la adquisición de habilidades tales como: conjeturar, experimentar, simular, verificar, etc., a partir de la utilización de gráficos, tablas numéricas, etc. (Milevicich y Lois, 2008).

Desarrollo

Características de la investigación: Se trabajó sobre una propuesta de investigación y experimentación que se está llevando a cabo en la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la UTN, enmarcado en el proyecto "*La resolución de problemas de Cálculo en el contexto de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería*".

Metodología: Investigación-acción pedagógica aplicada a la resolución de problemas.

Muestra: Formada por 3 grupos de 30 alumnos aproximadamente, pertenecientes a las cohortes 2006, 2007 y 2008, de la LEM de la UTN.

Propósitos generales: Con el actual trabajo se pretende contribuir al desarrollo de una línea de investigación orientada hacia la elaboración de un cuerpo coherente de conocimientos enmarcados en la Didáctica de la Matemática, una de cuyas prioridades es conseguir en nuestros alumnos un aprendizaje significativo basado en un cambio metodológico y de actitudes. En ese contexto, se pretende que los estudiantes de la LEM comiencen a construir un conocimiento profesional fundamentado a partir de su propia práctica.

Propósitos específicos del trabajo: En primer lugar, corroborar si los alumnos de la LEM integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas. En segundo lugar, comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas.

Implementación: Con cada una de las 3 cohortes, se llevaron a cabo 5 sesiones de resolución de problemas de 1,5 h de duración. Los alumnos debieron trabajar sobre problemas de Cálculo Diferencial e Integral, que a nuestro criterio, permitieran su abordaje mediante el uso de distintos registros de representación.

Cabe observar que los problemas propuestos, tanto en la unidad de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral, tuvieron niveles de complejidad creciente.

Robert y Speer (2001) establecen una categorización respecto de la complejidad de los problemas. Así, en un primer nivel se encuentran aquellos donde se pide a los alumnos aplicar definiciones, propiedades o teoremas directamente. Los problemas en este nivel también implican el uso del lenguaje formal. Por ejemplo, solicitar a los alumnos que enuncien el Teorema Fundamental del Cálculo o bien, las características que debe poseer una función para que sea integrable.

En un segundo nivel, los problemas no son de aplicación directa, se requieren varios pasos, o bien hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teoremas necesarios. Por ejemplo, encontrar la derivada de la función $g(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ o bien encontrar el intervalo sobre el cual la curva $y=\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$ es cóncava hacia arriba, corresponde a una tarea de segundo nivel.

También, tomamos un problema que, a nuestro juicio, permite explorar con claridad la utilización de diferentes representaciones, por parte del alumno:

Aplique las propiedades de las integrales para probar que: $0 \le \int_1^3 \ln \mathrm{x} \mathrm{dx} \le 2\ln 3$

El problema propuesto no indicaba que propiedades debían aplicar, con lo cual los alumnos podían seleccionar diferentes caminos:

a) resolver la integral indefinida, aplicar la regla de Barrow y comparar con las cotas del problema (0 y 2ln3)

b) aplicar cualquiera de los métodos numéricos (regla del punto medio o del trapecio o de Simpson) para calcular la integral y luego comparar con las cotas,

c) aplicar la propiedad de comparación de la integral, es decir:

Si $\ln(1)\le \ln(x)\le \ln(3)\_en\_[1,3] \Rightarrow \ln(1)(3-1)\le \int_1^3 \ln(x)dx \le \ln(3)(3-1)$,

d) graficar los resultados de aplicación de la propiedad de comparación de la integral, tal como se observa en el gráfico 1

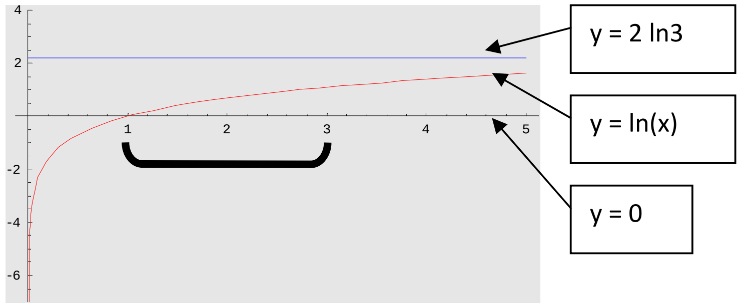


Gráfico 1. El área bajo la curva y = ln(x), comprendido entre y =0 e y = 2 ln3.

En un tercer nivel, aparecen problemas que requieren la habilidad de resolución sin pistas o contextos, dar contraejemplos, cambiar métodos, utilizar conocimientos de otros campos de las ciencias, etc. (Robert y Speer, 2001).

A modo de ejemplo, presentamos algunos de los problemas seleccionados:

Problema 1

En la figura 1 se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes sobre P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

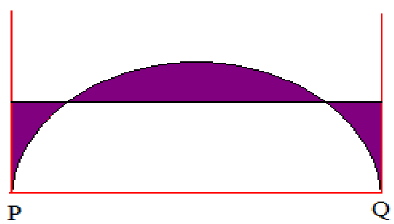


Figura 1. Semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes sobre P y Q

El problema propuesto requiere, en primer lugar, modelizar el cálculo del área mediante una ecuación que involucra la suma de 3 integrales con límites variables. Atendiendo a la solución solicitada, la función a minimizar debe estar expresada en una variable, para lo cual se requieren deducciones algebraicas apoyadas en conjeturas y análisis gráficos y numéricos.

Problema 2

Sean y(t) y V(t) la altura y el volumen del agua en un tanque en el instante t. Si el agua se fuga por un agujero de área "a" que se encuentra en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli afirma que: $\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2g.y}$ *, donde "g" es la aceleración debida a la gravedad.*

a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 195 cm y radio de 64 cm y que el agujero es circular con radio de 2,5 cm. Si consideramos g = 10 m/s², demuestre que y satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{y}$

b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el instante t, suponiendo que el tanque está lleno en el instante t = 0.

c) ¿Cuánto tardará el agua en drenar por completo?

El problema propuesto, tiene varias instancias. En primer lugar el reconocimiento de variables y constantes en la ecuación diferencial (ley de Torricelli), luego la deducción de la fórmula que representa la variación de altura de agua, donde y = y(t), su interpretación y finalmente su aplicación en una situación concreta (el tiempo necesario para vaciar el tanque).

Resultados

Las producciones de los participantes fueron plasmadas en sus hojas de trabajo (esto incluyó las resoluciones finales y los borradores), luego fueron clasificadas por sesiones y en relación con el nivel del problema (1°, 2° o 3°). Los resultados que se exhiben en la tabla 1 corresponden al tratamiento cuantitativo sobre tales producciones, agrupadas por cohorte.

Las categorías de análisis, en cada nivel de dificultad, fueron: la utilización de distintos registros de representación y la integración de dos o más registros.

Tabla 1. Resultados del análisis sobre la resolución de problemas

Categoría de problema	Registro utilizado	Año 2006	Año 2007	Año 2008
primer nivel (aplicación directa de definiciones, propiedades o teoremas)	Utiliza registro gráfico	5 %	4 %	6 %
	Utiliza registro numérico	0 %	2 %	2.5 %
	Utiliza registro verbal	23 %	31 %	28 %
	Utiliza registro algebraico	78 %	69 %	77 %
	Integra dos o más registros	45 %	47 %	34 %
segundo nivel (se requieren varios pasos, o bien hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o	Utiliza registro gráfico	24 %	32 %	31 %
	Utiliza registro numérico	23 %	26 %	30 %
	Utiliza registro verbal	25 %	26 %	24.5 %
	Utiliza registro algebraico	79 %	78 %	67.5 %

teoremas necesarios)	Integra dos o más registros	34 %	38 %	46 %
tercer nivel (requieren la habilidad de resolución sin pistas)	Utiliza registro gráfico	48 %	56 %	57 %
	Utiliza registro numérico	67 %	68 %	57 %
	Utiliza registro verbal	45 %	47 %	39.5 %
	Utiliza registro algebraico	79 %	82 %	84 %
	Integra dos o más registros	65 %	56.5 %	54 %

Como se puede observar, no se obtuvieron diferencias importantes en los tres años para una misma categoría de análisis y en un mismo nivel dificultad, sin embargo se observan diferencias notables entre las distintas categorías. Así, el registro algebraico es el más usado, con porcentuales muy superiores al resto, en los niveles 1 y 2.

En el tercer nivel, dónde los problemas propuestos ofrecían mayores dificultades, se observa, en las tres cohortes, que los alumnos recurren más asiduamente, a representaciones gráficas y numéricas de los objetos matemáticos.

También, se puede observar, que la integración de dos o más representaciones, tiene más presencia en los problemas de tercer nivel.

En relación con el segundo propósito, en cuanto a *comprobar si los procesos de conjetura, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas*, analizamos los logros de los diferentes grupos, por niveles de dificultad.

La tabla 2 exhibe los porcentuales de resolución correcta e incorrecta con utilización de CAS (software Mathematica) y otros software didácticos de libre distribución.

Tabla 2. Porcentuales de resolución correcta e incorrecta de problemas propuestos

Categoría de problema	Categorías	Grupo año 2006	Grupo año 2007	Grupo año 2008
primer nivel (aplicación directa de definiciones, propiedades o teoremas)	Resuelve el problema propuesto	83 %	86 %	87 %
	No resuelve el problema propuesto	17 %	14 %	13 %

segundo nivel (se requieren varios pasos, o bien hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teoremas necesarios)	Resuelve el problema propuesto	65 %	67 %	60 %
	No resuelve el problema propuesto	35 %	33 %	40 %
tercer nivel (requieren la habilidad de resolución sin pistas)	Resuelve el problema propuesto	48 %	40 %	52 %
	No resuelve el problema propuesto	52 %	60 %	48 %

Se observa que los porcentuales de "Resuelve el problema propuesto" son notablemente mayores para los problemas del primer nivel; algo menores, para los de segundo nivel, y bastante inferiores para los de tercer nivel. Cabe observar, que justamente, este último nivel es el que más requiere de actividades de conjetura, simulación y verificación.

Conclusiones

Luego del análisis de las 3 cohortes, los resultados nos permiten concluir que, si bien la utilización de diferentes registros de representación fue empleada por los alumnos en la resolución de los problemas propuestos, no lograron establecer una adecuada integración entre dos registros diferentes.

Tal integración es más fuerte en aquellos problemas más complejos. En ese sentido, los borradores de los alumnos, dan cuenta de las representaciones utilizadas. En algunas ocasiones prefirieron utilizar un gráfico, en otras, una tabla numérica, o bien describir verbalmente la situación, pero no se evidencian frecuentes articulaciones entre las diferentes representaciones.

En cuanto a los procesos de resolución y en relación con el segundo propósito de nuestra investigación, los logros son muy pobres, en los problemas de mayor dificultad.

Las producciones de los alumnos dan cuenta de dificultades similares en las 3 cohortes:

a) Escaso dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.

b) Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: representación gráfica del enunciado del problema, exploración gráfica o numérica, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados.

c) Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.

d) Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.

Consideramos que la línea de investigación sobre resolución de problemas, mediados por tecnología, tiene numerosas vetas aún por explorar. Los modos en que los alumnos resuelven, las estrategias que utilizan, las dificultades que se presentan, las validaciones que realizan; son temas de investigación, cuyos resultados podrían contribuir al diseño de una metodología de resolución de problemas más eficaz.

Referencias bibliográficas

Caillot, M. y Dumas Carrè, A. (1987). Prophy: Un enseignement de une méthodologie de résolution de problèmes. *Rapports de Recherches*, 12, 199-224. Paris: INPR.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Hiroshima (Japón), (pp. 55-69).

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register, Regular Lecture en *10th International Conference on Mathematics Education* (ICME10), Dinamarca.

Gil, D y Martínez Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.

Glaser, R. (1992). Expert knowledge and processes of thinking. En D.F. Halpern (Eds.) *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics*. Nueva Jersey: Hillsdale.

López Ruperez, F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en Física*. Madrid: MEC.

Milevicich, L y Lois, A. (2007) El ordenador como recurso didáctico en la resolución de problemas. En C. Crespo Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20, 641-646*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, L (2008) *La construcción de los objetos matemáticos del Cálculo diferencial* e *integral a través de las representaciones semióticas*. Primer encuentro de Docentes e Investigadores de

Estadística en Psicología. Universidad de Buenos Aires, Recuperado el 20 de enero de 2009 de:

http://www.psi.uba.ar/encuentroestadistica/programa_cientifico/resumenestalleres.php?idtaller=4

Milevicich, L y Lois, A. (2008) La resolución de problemas de cálculo integral en un entorno informático. En: *Workshop, 11th International Congress of Math Education*, Monterrey, Mexico.

Robert, A. y Speer, N. (2001) Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (pp. 283-299).

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1989) Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?, *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45-50.

Selveratnam, M. (1990). Problem-Solving, a model approach. *Education in Chemistry* 27(6), 163-165.

Taconis, R., Ferguson-Hessler, M. y Broekkamp, H. (2001). Teaching science problem solving: An overview of experimental work. *Journal of Research in Science Teaching*, 38 (4), 442-468.

GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA VISUALIZACIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL SUPERIOR. UNA PROPUESTA

Norma Esther Haas Ek, María del Pilar Rosado Ocaña
Universidad Autónoma de Yucatán . México
normahaas@gmail.com, rocana@uady.mx

Resumen. -En este trabajo se presenta el diseño de una propuesta basada en una secuencia de actividades relacionadas con problemas de geometría plana dirigidas a estudiantes que cursan la asignatura de Geometría Plana y del Espacio en el primer semestre de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. La problemática que se atiende es la falta de visualización en las representaciones geométricas para dar solución a problemas de Geometría Plana en el nivel superior. Para el diseño de la secuencia de actividades se utilizó el Software Cabri II, ya que este software de geometría dinámica permite al estudiante manipular, explorar y analizar las construcciones, y de ésta manera contribuir a mejorar la visualización (habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual) lo cual permite argumentar los pasos a seguir en la resolución de los problemas geométricos planteados.

Palabras clave:- visualización, representaciones geométricas, problemas, Cabri.

Abstract. -This paper presents the design of a proposal based on a sequence of activities related to problems in Planar Geometry aimed at students in the course of Planar and Spatial Geometry of the first semester of their Major in Mathematical Education, taught by the Department of Mathematics of the Autonomous University of Yucatan. The addressed issue is the lack of visualization in geometric representations to solve problems of Planar Geometry at a higher level. The software Cabri II was used to design the sequence of activities, since this dynamic geometry software enables students to manipulate, explore and analyze the constructions and in this way contribute to improve the visualization (ability to represent, transform, generate, communicate, document and reflect visual information) which allows arguing the steps to follow when solving stated geometric problems.

Key words:- visualization, geometric representations, problems, Cabri.

Introducción

En el ámbito de la educación matemática, a pesar de los esfuerzos que se han hecho por cambiar el enfoque de la enseñanza de esta importante disciplina, ésta se sigue enseñando de manera algorítmica y, principalmente, mediante conferencias magistrales en las que el profesor dicta su cátedra y el estudiante recibe, de manera pasiva, el mensaje que se le envía (Flores, C., Gómez A., Suárez L., Mendoza G., Flores A. 2009). Actualmente la tecnología puede ser incorporada en el ámbito escolar, creando un ambiente dinámico en donde el estudiante puede interactuar directamente con la misma. Es por ello que en este trabajo se presenta una propuesta, la cual consiste en una secuencia de actividades para trabajar con estudiantes que cursan la asignatura de Geometría Plana y del Espacio, parte de estas actividades están elaboradas con el software Cabri II, lo cual permite al alumno poner a prueba sus conocimientos de geometría y analizar situaciones que no serían posibles de observar en figuras construidas a lápiz y papel.

Problemática

La problemática que atiende el trabajo es la falta de visualización en las representaciones geométricas de problemas de Geometría Plana en el nivel superior, entendiendo por ésta la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual, por lo cual se propone una alternativa diferente a la tradicional para tratar a la geometría utilizando el Cabri Géomètre; Dal Maso (2007) menciona que el Cabri Géomètre es utilizado de cierta manera en la resolución de problemas en geometría realizando la construcción de su representación gráfica, ya que las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en Geometría y trabajar con una representación clarifica, aporta detalles, provee un material sobre el cual es posible elaborar ideas y hacer correcciones; y se convierte así en un marco de referencia importante para la percepción.

Objetivo

Diseñar una propuesta basada en una secuencia de actividades con el uso del software Cabri II que contribuya a mejorar la visualización de problemas de Geometría Plana en el nivel superior.

Marco de referencia

Compartimos la afirmación de Laborde (citado en Dal Maso, 2007) con respecto a que la geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas cuyo papel en el aprendizaje de la geometría es indiscutible. Por otra parte, con base a la literatura especializada, existen dos formas clásicas de entender la enseñanza de la Geometría: la geometría vista como la ciencia del espacio y la geometría entendida como una estructura lógica. Algunos niveles del desarrollo del pensamiento requieren de la geometría como ciencia del espacio para con base en ellas, desarrollar la visión de la geometría como una estructura lógica (Cantoral, R., Farfan, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., Garza, A., 2000, p.145) Dado lo anterior, surge la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, dando lugar a nociones como *visualización y percepción espacial.*

Una cuestión importante, ligada a la percepción espacial que no solo se reduce a la geometría, trata de la visualización en matemáticas. Generalmente se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente científico (Cantoral, et. al. 2000, p.146).

Considerando al software Cabri como punto de apoyo para este trabajo, compartimos la reflexión de Laborde (2005) cuando afirma que "Los ambientes de geometría dinámica tales como Cabrí Géomètre, que introducen el movimiento como metáfora de la variación de los objetos geométricos, provocan cambios profundos en los modos de representación habituales y los modos de pensamiento en Geometría". (p.26) Es por ello que el hacer uso del software Cabri y realizar las representaciones geométricas de los problemas, permite al estudiante explorarlas, manipularlas, verificar propiedades, entre otros. Camargo, L., Samper, C & Perry, P. (2006) mencionan que cuando se dispone de un gran número de ejemplos tan variados como se quiera, esto les da la posibilidad de realizar exploraciones con el objetivo de entender la situación propuesta en un problema, formular conjeturas, verificarlas, descubrir propiedades, estudiar la dependencia entre propiedades y disponer de herramientas para desarrollar ideas útiles para hacer las correspondientes demostraciones.

Metodología

Para el diseño de la secuencia de actividades, partimos de la selección de temas de congruencia, semejanza, cuadriláteros y circunferencia (correspondientes a la Geometría Plana) y se determinaron los tipos de problemas que fueran de utilidad para el logro de aprendizajes significativos para el alumno (realizados en una primera etapa del desarrollo del trabajo).

Como punto de partida, se consideraron las construcciones de las figuras que corresponden a las representaciones geométricas de algunos problemas seleccionados en la primera etapa.

Aprovechando las ventajas que proporciona un software de geometría dinámica como lo es el Cabri; con el objetivo de que el alumno pueda manipular ciertos puntos y segmentos, cambiar de posición y tamaño las figuras y realizar las exploraciones necesarias haciendo uso de las herramientas del programa que le ayuden a desarrollar una visualización más profunda de los problemas que se les presenta y con base en ello puedan realizar una visión retrospectiva del problema y argumentar características y propiedades que de otra manera, en una figura rígida no serían fáciles de identificar. Así, se espera que el estudiante logre una mejor comprensión de los conceptos y problemas geométricos (Rosado, M. y Haas, N., 2009, p.604).

Las construcciones de las figuras correspondientes a las representaciones geométricas de los problemas seleccionados se realizaron de acuerdo a las propiedades o conceptos fundamentales que involucran estos problemas, de tal manera que al momento de manipular esta construcción se siga cumpliendo dichas propiedades sin que se distorsione la figura, aunque cambie de forma o tamaño.

La secuencia se estructuró en tres partes para cada actividad problema considerando que en la primera parte, se presente el enunciado del problema y se pida al alumno realizar, en algunos casos la descripción de los conceptos necesarios para la solución del mismo y en otros, la construcción de la figura que represente las condiciones del problema. En la segunda parte, se pide al alumno que abra un archivo en el que la construcción del problema está elaborada y se dan instrucciones para que el estudiante explore diferentes situaciones que se presentan al "mover" puntos o rectas de la figura y conteste algunas preguntas. Finalmente, en la tercera parte de cada actividad problema se pide al alumno que describa alguna conjetura de lo realizado en las partes anteriores y se solicita que redacte la solución del problema.

En los archivos de Cabri, se indica qué puntos son los que se "mueven", así como los conocimientos previos que debe de tener para poder contestar las preguntas, también se muestran las mediciones de segmentos, ángulos, etc. Para que el estudiante observe qué es lo que sucede, como se muestra en la Figura 1.

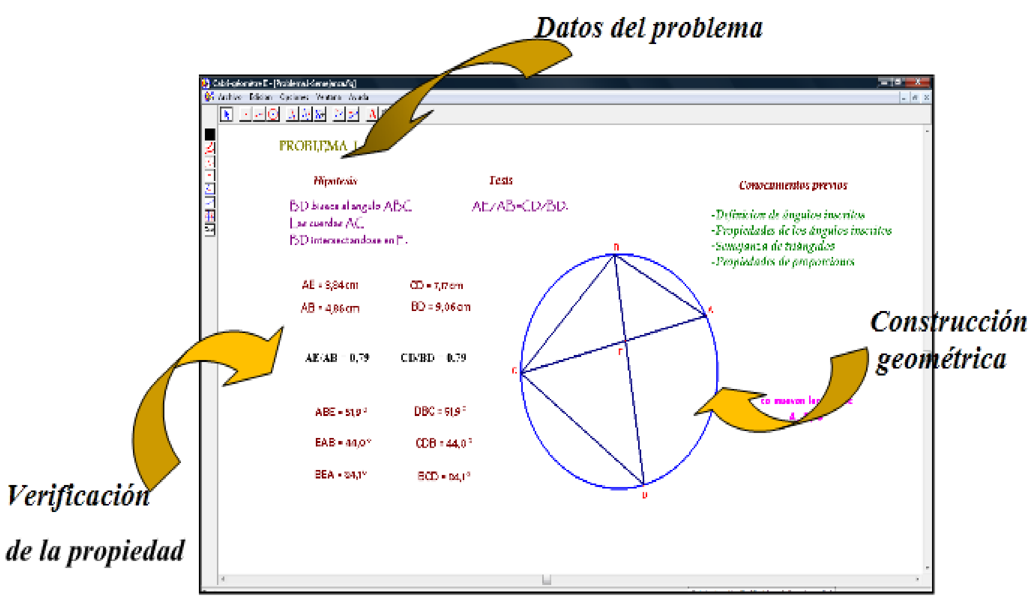


Figura 1. Construcción de un problema en Cabri

A continuación se presenta la secuencia de una de las actividades problema con las que se va a trabajar.

Secuencia de actividades

Actividad Problema 1

Parte 1.

Instrucciones: Describe las ideas principales para resolver el siguiente problema a lápiz y papel. En la Figura 2, se muestra la representación geométrica de este problema.

Hipótesis:

BD bisecta al ángulo ABC.

Las cuerdas AC y BD se intersectan en E.

Tesis:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

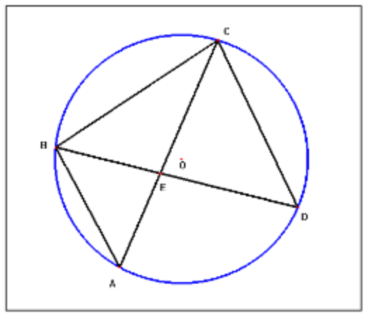


Figura 2. Representación geométrica de la Actividad problema 1.

Parte 2.

Instrucciones: Abre el archivo de Cabri llamado Problema1.fig, una vez abierto el archivo, selecciona el icono  para poder manipular los puntos, A, B, C como quieras y responde a cada pregunta de acuerdo a lo que observas al manipular la construcción. La siguiente imagen muestra el archivo de Cabri.

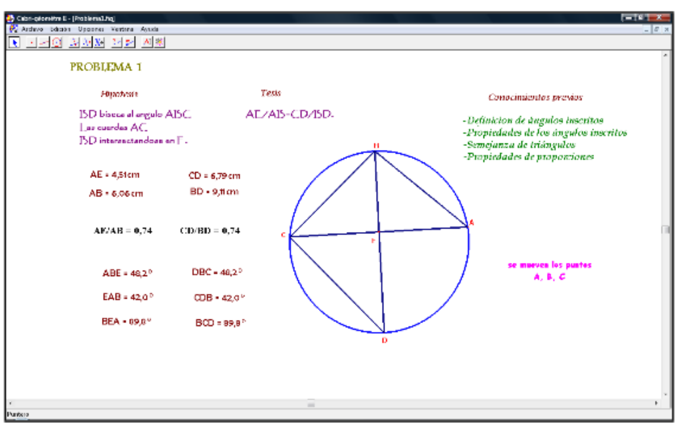


Figura 3. Archivo de cabri del Problema 1

a) Si el punto A coincide con el punto C, ¿Qué sucede con los puntos E y D? ¿Se cumple la propiedad? Argumenta tu respuesta.

b) Ahora si el punto C coincide con B, ¿Qué observas? ¿Se cumple la propiedad? Argumenta tu respuesta.

c) Si el punto B coincide con A, ¿Se cumple la propiedad? ¿Por qué? El alumno deberá observar que la construcción se transforma con cada una de las instrucciones anteriores como se muestra en las Figs. 4, 5 y 6, respectivamente.

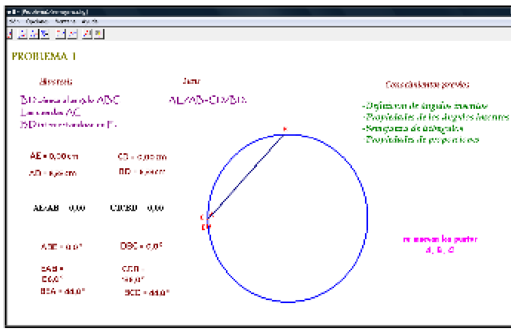


Figura 4. Manipulación del inciso a)

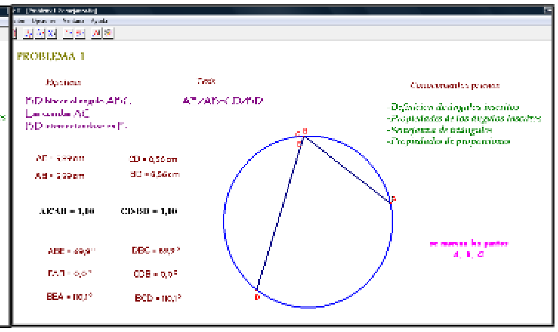


Figura 5. Manipulación del inciso b)

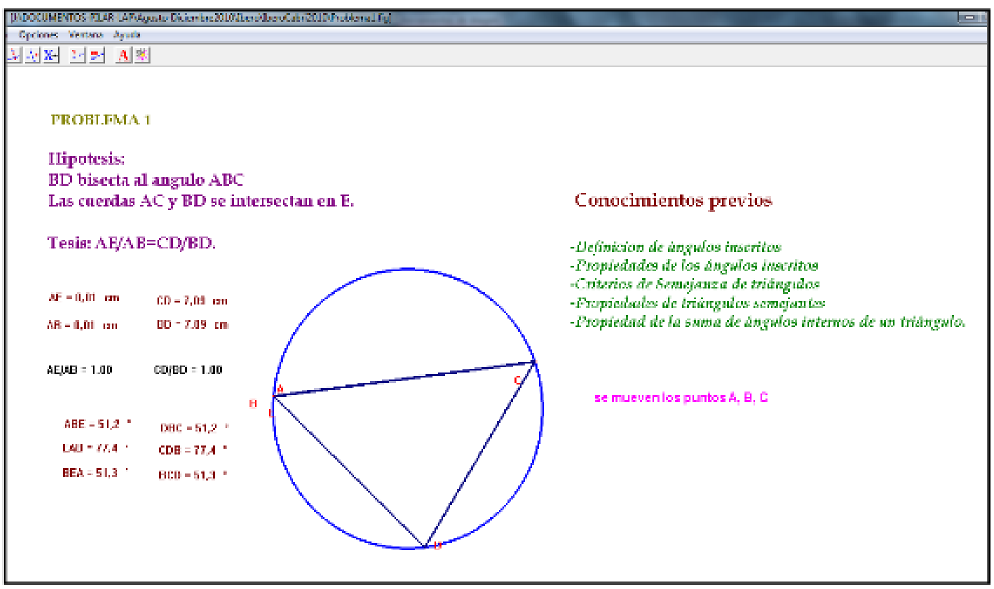


Figura 6. Manipulación del inciso c)

Parte 3

Instrucciones: Con base a lo realizado en las partes 1 y 2 de esta actividad, responde lo siguiente:

a) ¿Qué puedes conjeturar?

b) Desarrolla completamente la solución del problema.

La idea es que en la parte 1 de la actividad, los estudiantes describan las ideas generales que tengan para resolver el problema que se plantea. Posteriormente, en la parte 2, al manipular los puntos de la construcción deberán observar, analizar y verificar en cada caso si se cumple la condición del problema y argumentar sus respuestas. Con lo anterior, se espera que los estudiantes describan en la parte 3 de manera clara sus conjeturas y que puedan desarrollar completamente la solución del problema.

Por cuestiones de espacio en el presente documento sólo se presenta una secuencia de actividad problema con sus tres partes, correspondiente al tema de semejanza de triángulos, sin embargo; como se comentó anteriormente, el trabajo se ha desarrollado de tal manera que se cubran problemas correspondientes a los temas de congruencia, semejanza, cuadriláteros y circunferencia.

Conclusiones

Considerando el tratamiento que se le da la Geometría Plana, para alumnos de la licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, se trabaja en el diseñó una propuesta de secuencias de actividades problema con la intención de cambiar el enfoque tradicional por uno más dinámico y al mismo tiempo aprovechar las bondades que ofrece el software de geometría dinámica, en este caso el Cabri Géomètre II, para que el alumno desarrolle su pensamiento deductivo, analítico y reflexivo, necesarios para un buen desempeño en los cursos de Geometría Plana en el nivel superior. Las secuencias de actividades es una propuesta que se aplicará a un grupo pequeño de estudiantes que estén cursando la asignatura de Geometría Plana y del Espacio, con la intención de probar la efectividad de la misma y realizar las modificaciones necesarias, para el logro del objetivo planteado y de esta manera, contribuir a la mejora de la visualización para resolver problemas de Geometría Plana en el nivel superior.

Referencias bibliográficas

Camargo, L., Samper, C., Perry, P. (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica.* Extraída el 30 de Agosto de 2009 desde http://www.scm.org.co/Articulos/853.pdf

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Dal Maso, S. (Noviembre, 2007). Dificultades en las demostraciones en geometría. *Revista Premisa*. 10(35), 26-36.

Flores, C., Gómez, A., Suárez, L., Mendoza, G., Flores, A. (2009). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Resúmenes Decimosegunda Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Red Cimates.

Laborde, C. (2005). Geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas. ¿Qué cambia para los alumnos y profesores? *Resúmenes Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rosado, M. y Haas, N. (2009). Visualizando problemas geométricos con el Cabri Geometre. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 22, 599-607. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

USO DEL SOFTWARE PARA EL APRENDIZAJE DEL LENGUAJE Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA UAN

Gessure Abisaí Espino Flores, José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime L. Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Nayarit, Universidad Autónoma de Guerrero . México
abisai_8282@hotmail.com, jtulloa@hotmail.com, Jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. -El presente reporte de investigación es un avance más en las exploraciones en el uso del software libre como herramienta de aprendizaje en matemáticas. Con este trabajo damos evidencias de que la visualización mediante software como herramienta de aprendizaje es necesaria para abordar los problemas del Lenguaje y Pensamiento Matemático (LPM). Lo describimos en base al análisis y observación para la obtención de aproximaciones a modelos matemáticos. Esta visualización permite al estudiante que mediante la manipulación de software pueda alcanzar un fin de comprensión de los objetos matemáticos. El trabajo lo fundamentamos en el por qué de la investigación desde una postura socio-epistemológica. Se inicia de la necesidad de admitir la enseñanza con el uso de la computadora e identificar que acciones se requieren en el proceso de su preludio.

Palabras clave:- visualización, gráficas, software libre, pensamiento matemático.

Abstract. -The present report of investigation is an advance on the explorations of the use of free software like tool of learning in mathematics. With this work we give evidences that the visualization by means of software like tool of learning necessary to approach the problems of the Language and Mathematical Thought (LMT). We described it on the basis of the analysis and observation to it for the obtaining of approaches to mathematical models. This visualization allows the student who by means of the manipulation of software can reach an aim of understanding of the mathematical objects. We based it to the work on why of the investigation from a socio-epistemologist position. One begins of the necessity to admit education with the use of the computer and that actions are required in the process of their prelude.

Key words:- visualization, graphs, free software, mathematical thought.

Introducción

Las matemáticas desde siempre han estado relacionadas en todos los campos de las ciencias. Tales como: ciencias de la educación, filosofía, comunicación y medios, lingüística aplicada, ciencias políticas y psicología, en las cuales las matemáticas como tal no han tenido gran relevancia, sin embargo a cada momento están demandando el uso de nuevas herramientas para la fácil comprensión y aplicación de las matemáticas en la vida laboral y profesional, nuevas herramientas las cuales permitan al estudiante el análisis y argumentación de los problemas en los cuales tienen información real.

En las últimas décadas se ha producido un incremento significativo en el desarrollo de software para matemáticas, así como la introducción de las técnicas computacionales en la docencia. Es necesario adoptar las nuevas tendencias computacionales para aprovechar las posibilidades que aporta este desarrollo tecnológico, la introducción de este tipo de proceso de enseñanza no es un proceso sencillo, pues el uso incorrecto puede producir resultados contraproducentes.

El reporte de investigación se articula dentro del trabajo en el que se consideran la naturaleza social del conocimiento, las dimensiones epistemológicas, cognitiva, didáctica dentro del contexto social de la Universidad Autónoma de Nayarit, México, por lo que puede considerarse como una aportación particular a la línea del pensamiento matemático conocido como epistemología (Cantoral, 2000; Cordero, 2001, 2002; Cantoral y Farfán, 2002; Arrieta, 2003). La asignatura de Lenguaje y Pensamiento Matemático (LPM) se inicia en la Universidad Autónoma de Nayarit en 2003 y se ha encontrado que la comprensión de los conceptos básicos alcanzados en el contenido suele ser problemático para la mayoría de los estudiantes, en especial aquellos que cursan una carrera universitaria no matemática.

Con el trabajo pretendemos facilitar las conversiones entre los distintos registros de representación (Grafico, numérico, algebraico y coloquial), la cual se propone el logro de este mediante la práctica social e interacción con un medio ambiente computacional de la figura No. 1.

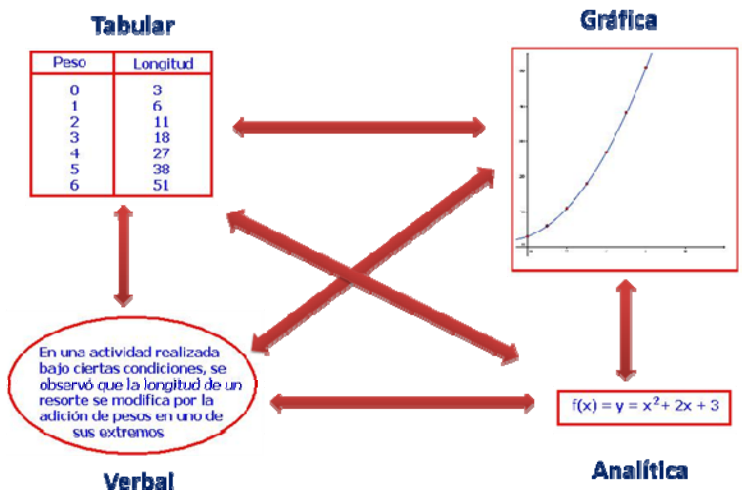


Figura 1. La transición entre los diferentes registros.

Por lo que las actividades propuestas privilegian el trabajo con diferentes representaciones y en esto adoptamos lo que señala Duval (1998) que establece que dado que cada representación es parcial con respecto al proceso que representa, se deben considerar la interacción entre las diferentes representaciones del objeto para su formación debiendo comprender en la elaboración del material no solo las dificultades para manipular cada una de esas representaciones sino además el análisis de dichas actividades.

Este trabajo pretende constituirse en una contribución a la solución de los problemas encontrados, para ello hemos desarrollado secuencias de aprendizaje sin perder de vista lo expresado por Moreno, L (2002), que dice:

> cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología

En las propuestas elaboradas se promueven estrategias en las que el estudiante deberá combinar el trabajo analítico, con tácticas que permitan corroborar los resultados que le sugiere el software utilizado, como lo muestran las figuras No. 2 y No, 3.

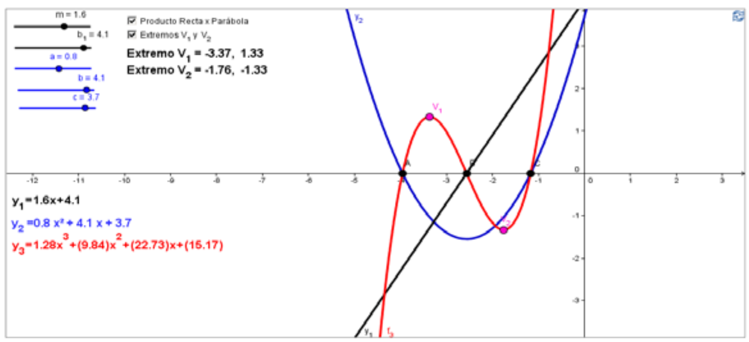


Figura 2. Multiplicación de recta por parábola.

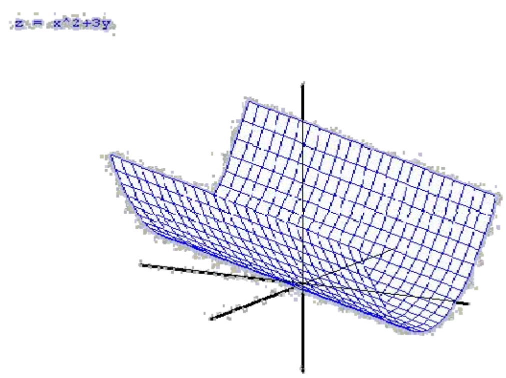


Figura 3. Vista en 3D con Winplot.

Con el surgimiento acelerado y desarrollo de programas computacionales que permiten una solución con técnicas de cómputo, principalmente en la modelación de problemas de la realidad como se muestra en la figura 4, pero a pesar de esto en la matemática de la universidad persiste la utilización de procesos rutinarios, como lo expresado por De Guzmán (1991) que dice:

parece que no se deberían enseñar tal vez cosas muy diferentes, sino que simplemente se podría prescindir de muchísimo esfuerzo rutinario dedicado a tener bien presentes y activas ciertas técnicas que el ordenador va a poder hacer mucho mejor, más rápido y más seguro

Sin embargo en la enseñanza tradicional se encuentra que se presentan dificultades en la comprensión de conceptos básicos como son: pendiente, variable, modelo, variación, etc., para los cuales se imponen conceptos formales, impidiendo esto que el estudiante pueda llegar una materialización del concepto, pero aún más importante la aplicación de este concepto en su vida cotidiana en contexto, y no ver los conceptos matemáticos como una forma del producto del intelecto.

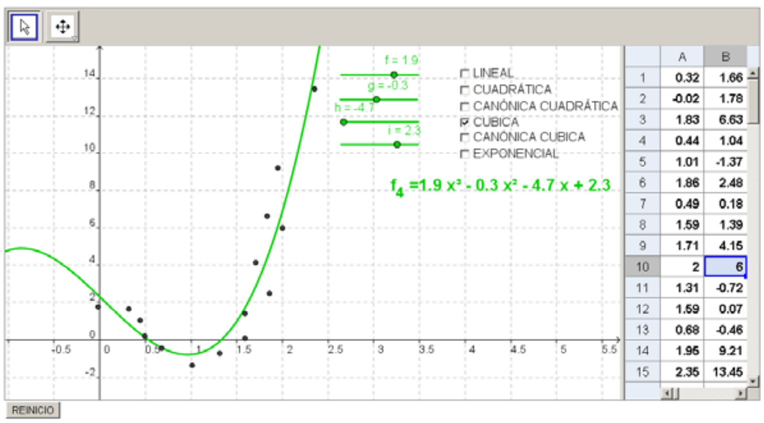


Figura 4. Modelación mediante ajuste de aproximación.

Metodología

Método de representaciones semióticas.

El método lógico inductivo, con su aplicación de las primeras pruebas pilotos en la unidad académicas del Centro Universitario de Ciencias Sociales y Humanidades (CUCSH) de la Universidad Autónoma de Nayarit.

El contenido de la unidad de aprendizaje Lenguaje y Pensamiento Matemático (LPM) es: Desarrollo del pensamiento y lenguaje algebraico, Tratamiento visual de las funciones, Pensamiento y lenguaje variacional, Introducción a la modelación matemática.

El software será utilizado por el estudiante universitario, afrontando una situación problema, siendo el profesor quien proporcionara la información necesaria (uso o manipulación del software) al estudiante para que inicie las prácticas correspondientes con las actividades diseñadas en específico para un tipo de software, observando el desarrollo y el impacto de la visualización como lo muestra la figura No. 5 y No. 6, ante la unidad de aprendizaje de LPM.

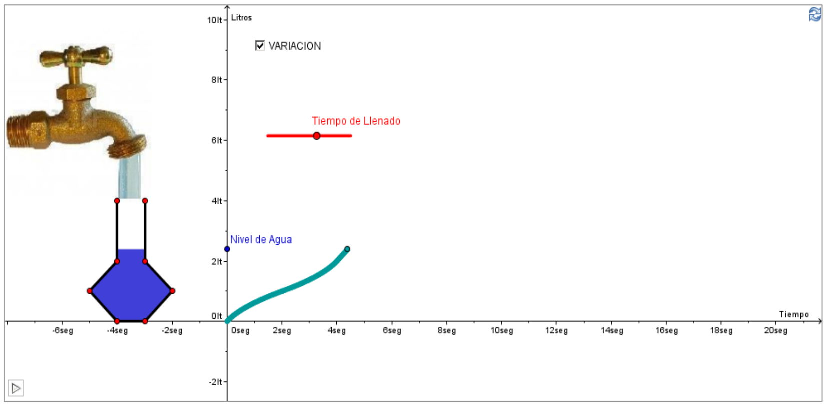


Figura 5. Llenado de recipientes.

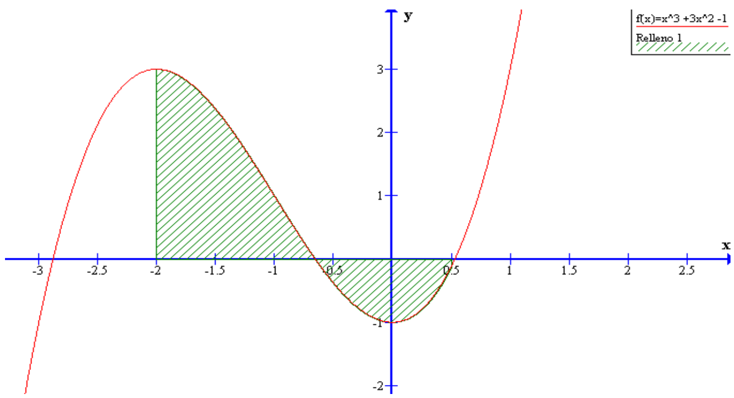


Figura 6. Desigualdades e inecuaciones.

Debido a la diversidad de los temas incluidos en el programa se utilizaron los software: GeoGebra, Graph y Winplot figura No. 7, en las secuencias se consideraron los tres momentos de inicio, desarrollo y cierre, iniciando en todas con el planteamiento de una solución problemática, la recuperación de conocimientos previos, para posteriormente abordar el contenido a través de formulación de preguntas, interacción entre pares y resolución de ejercicios, para enseguida profundizar en el contenido a través de la resolución de un trabajo practico y finalmente la resolución de ejercicios integradores.

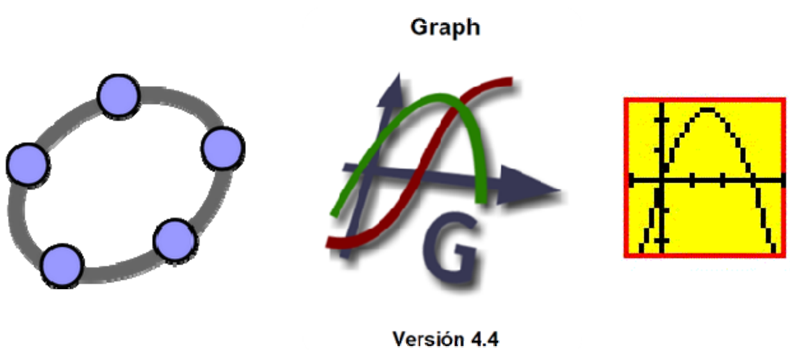


Figura 7. Software utilizado para el desarrollo de las actividades

Propuesta

A medida de propuesta de cómo utilizar el software como una herramienta de aprendizaje se plantean actividades diseñadas, preparadas para la introducción de conceptos en base a su vida diaria, en estas prácticas se incluyen actividades como las siguientes:

- La compañía Telcel en su programa "pasa tiempo", cobran una tarifa de $3.03 pesos como comisión por la transferencia de saldo de un celular a otro, la persona que recibe el saldo y el costo del mensaje que es de $0.88 centavos que es cobrado a la persona que ha transferido el saldo.

  Con el servicio actual de "pasa tiempo" si envías $53 pesos, ¿Cuánto es lo que recibe de saldo?

  Si envías $70, $75, $5 y $10, ¿Cuánto es lo que en realidad se está enviando?

  Si la persona que recibe el saldo enviado es de $96.97, $95, $54, $20 y $83 pesos, ¿Cuánto es lo que le enviaron originalmente?

  Con los incisos anteriores completa la tabla que aparece a continuación.

Dinero	Saldo recibido
53	
70	
75	
5	
10	
	96.97
	95
	54
	20
	83

  Con los datos anteriores obtén un modelo que represente la función de las ganancias obtenida por la compañía Telcel, teniendo en cuenta que la transferencia mínima que se puede realizar es de $5 pesos y máximo $100 pesos por mensaje.

  Suponiendo que usted quiere competir con la compañía Telcel genere una promoción que pueda competir con esta compañía.

  Grafica los modelos que has obtenido en el inciso d y e

- En la semana cultural que se lleva a cabo en el Centro Universitario de Ciencias Sociales y Humanidades (CUCSH) de la Universidad Autónoma de Nayarit, se pretende realizar una exposición de fotografía, al equipo 1 se les ha asignado un área rectangular la cual es 3 metros mayor que el ancho, al equipo 2 que también presentara una exposición de fotografía deciden que para tener el doble de área del equipo rival aumentaran 3 metros de ancho y 2 metros de largo que el equipo contrario, siendo así el doble del área para la exposición.

  ¿Cuál es el área que se le asignó al equipo 1 para su exposición? (resuelve analíticamente)

  ¿Cuánto vale cada lado de las dos áreas de estos equipos?

  ¿De qué tipo es la ecuación que obtuviste?

  Grafica la ecuación mediante la multiplicación de rectas o si es el caso mediante la forma canónica de la ecuación

  ¿El corte sobre el eje de las x´s que significa?

  ¿Cuál corte sobre el eje de las x's has elegido para la solución?

  ¿Por qué no se eligió el otro corte?

Conclusión

Con el presente trabajo se muestra una manera en la cual la tecnología ayuda a la comprensión de conceptos matemáticos en la vida cotidiana, aprovechando estos avances científicos-tecnológicos.

Las experiencias y las prácticas sociales pueden ser un vínculo entre diferentes registros que enmarcamos como grafico, numérico, algebraico y coloquial, parte importante de esto es el diseño de las actividades que lleven a la reflexión del por qué y dónde se aplican estos conceptos matemáticos, haciendo referencia al contexto social en el que está inmerso el estudiante.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral publicada, CINVESTAV, México.

Cantoral, R. (2000). *Pasado, presente y futuro de un paradigma en matemática educativa*. En acta latinoamericana de matemática educativa. Volumen 13. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 54-62

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). *Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analysecomplexe. Recherches en Didactique des mathématiques*. Vol. 22, Núm. 2.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M. (1991). *Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática*. En Manuel ABELLANAS y Alfonsa GARCÍA (Eds.) Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la matemática en la Universidad. Universidad Politécnica de Madrid, 10, 11 y 12 de diciembre de 1991, pp. 9-27. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/riesgosordenador/riesgoordenador.html

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Moreno, L. (2002). *Graficación de funciones.* En Memorias del Seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas (pp. 110-140). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

DIFICULTADES ASOCIADAS AL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ENTORNOS MEDIADOS TECNOLÓGICAMENTE. EXPERIENCIA CON PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN INICIAL

Mariela Herrera Ruiz, Andrés González Rondell
UC, UPEL. Venezuela
marielalilibeth@gmail.com, agorondell@gmail.com

Resumen. -El propósito de la investigación fue indagar las dificultades de los profesores de matemática en formación inicial en el aprendizaje del álgebra lineal apoyado en un entorno virtual. En el marco teórico se considera la teoría de dificultades de Socas (1997), el concepto de pensamiento algebraico así como aspectos teóricos y prácticos relacionados con la mediación tecnológica del aprendizaje. Se empleó un enfoque cualitativo, el grupo focal lo constituyó un curso de "Introducción al Álgebra Lineal" durante el período académico 2008-II en una universidad de formación docente venezolana. Las clases fueron totalmente presenciales, significa que el recurso tecnológico se empleó como una herramienta didáctica de apoyo; sin embargo, la recolección de los datos se realizó en el ambiente virtual dadas las posibilidades que ofrece para guardar con detalle las intervenciones de los estudiantes.

Palabras clave:- difficulties, cognitive blockades, algebraic thought.

Abstract. -The goal of the investigation was to find the difficulties of the professors of math in initial formation in the process of learning linear algebra with technology. The theoretical frame is based on the theory of difficulties of Socas (1997), the concept as well as the aspects theoretical and practical related to technological learning meditation of algebraic thought. A qualitative approach was used; the focal group constituted it the section 561 of "Introduction to the Linear Algebra "of the semester 2008-II. The classes were totally face to face, it means the technology was used as didactic tool, nevertheless, the compilation of the information was realized in the virtual environment since it allows to detail and to guard the intervention of every student.

Key words:- difficulties, cognitive blockades, algebraic thought.

Introducción

A pesar de la importancia que tienen las matemáticas escolares en el desarrollo cognitivo de los educandos, pues tienden a incrementan la agilidad mental, la capacidad de atención, la capacidad analítica y crítica, su enseñanza y aprendizaje está presente a lo largo del sistema educativo con múltiples debilidades: prevalecen los métodos memorísticos de aprendizaje, la enseñanza pareciera estar dirigida hacia la creación de hábitos y no a la construcción de un pensamiento crítico, tradicionalmente, el papel del alumno es pasivo, y ni la formación del docente de matemático escapa a esta situación. Considerando que estas deficiencias pueden minimizarse integrando armónicamente la didáctica, la psicología, la matemática, la andragogía, se generó un proceso de enseñanza-aprendizaje con apoyo de la tecnología, flexible, autónomo, autodirigido por el estudiante, siendo el propio estudiante quien organiza y planifica su horario de estudio. En esta investigación, el interés se centró en analizar las dificultades de los profesores de matemática en formación inicial en el aprendizaje del Algebra Lineal al emplear como recurso didáctico un entorno virtual.

Bases Teóricas

Pensamiento Algebraico

Entre algunos procesos mentales distintivos de este tipo de pensamiento se pueden mencionar la capacidad de revertir operaciones, la posibilidad de deducir lo general en lo particular, el reconocimiento de patrones, la interpretación y uso del signo igual, la modelización y la interpretación que se le da al uso de las letras. Sin embargo, desde un ángulo más flexible podemos afirmar que el pensamiento algebraico se hace presente cuando se manipulan ideas o procesos algebraicos de cualquier índole. Desde el ámbito escolar, distintos investigaciones se han centrado en los siguientes aspectos del pensamiento algebraico que se desarrollan desde la enseñanza de la aritmética, que son: lo relativo a la comprensión y uso del signo de igualdad, el asunto de la generalización y su explicitación, la representación de las generalizaciones tanto en el lenguaje natural como mediante la notación algebraica, y lo referente a la comprensión de los niveles de justificación y demostración, dentro del álgebra escolar, también deben considerarse, el álgebra como lenguaje, como estilo de pensamiento, como herramienta de trabajo, generalización de la aritmética y como una actividad. Es por ello que en algunos casos el simbolismo es clave para definir el álgebra.

Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

Las teoría de dificultades adoptada en esta investigación es la propuesta por Socas (1997) asociadas al aprendizaje del álgebra, quien plantea que "las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas" (p.35). El proceso de construcción de conocimientos matemáticos traspasa por dificultades que atañen al colectivo en general incluyendo a los más aptos y a los que más destrezas manifiestan, y pueden ser analizadas desde distintas perspectivas, en este caso, el origen de estas dificultades el autor las categoriza en cinco grupos:

1. *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas*: se relaciona con la Matemática como disciplina científica, siendo una de las variables a considerar el papel del lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, los signos matemáticos presentes en el estudio de las nociones matemáticas y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos, de aquí surgen el conflicto de precisión. Otro conflicto es la injerencia del lenguaje cotidiano en las matemáticas, en el uso de homónimos o

específicamente de homógrafos, de manera que el uso de esas palabras involucra una confusión semántica, además, muchas palabras son exclusivas de la jerga matemática, no tienen significado en el lenguaje común, son palabras poco conocidas y usualmente mal entendidas por los estudiantes.

2. *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*: se originan desde la propia matemática por su la naturaleza lógica, y se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático. Una dificultad relacionada con la naturaleza de la Matemática es el aspecto deductivo formal y el pensamiento lógico que es el que proporciona la capacidad para concatenar argumentos lógicos, y que es imprescindible para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

3. *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas*: los elementos en el currículo de matemática que pueden distinguirse como dificultades son: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemática, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido, así como la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

4. *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: al momento de seleccionar los recursos y diseñar estrategias en la enseñanza se deben considerar los estadios del desarrollo intelectual, sus características y las capacidades asociadas a cada estadio referidas al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Entre los enfoques para fijar el desarrollo cognitivo de los estudiantes están los enfoques: jerárquico, evolutivo, estructuralista, constructivista, procesamiento de la información.

5. *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas*: uno de los aspectos claves para comprender el comportamiento de los alumnos en las clases de matemáticas es la dimensión afectiva, al respecto.

Los Entornos de Aprendizaje

El entorno de aprendizaje es un lugar, espacio, comunidad o sucesión de hechos que promueven el aprendizaje; está compuesto por cuatro dimensiones: social, física, técnica y didáctica. Se puede considerar como el espacio y las convenciones establecidas, pero es la dimensión didáctica la que convierte al contexto en un entorno de aprendizaje. El aprendizaje didáctico en línea pretende promover la consecución de los objetivos de aprendizaje a través de documentos y recursos compartidos, razón por la que un entorno de aprendizaje virtual es un ambiente que se materializa utilizando un equipo telemático: correo electrónico, videoconferencias, Internet, equipo para realizar videoconferencias, audio, gráficos. Entre sus ventajas podemos mencionar que el horario de estudio es adaptable a las necesidades personales de cada estudiante, las participaciones se pueden realizar asincrónicamente, el alumno tiene un papel activo que no lo limita a recibir información sino que forma parte de su propia formación, todos los alumnos tienen acceso a la enseñanza, no viéndose perjudicados aquellos que no pueden acudir periódicamente a clases por motivos de trabajo, la distancia, el profesor conoce si el alumnos responde al método y alcanza los objetivos fijados inicialmente, se promueve la interacción y el compañerismo, el estudiante es protagonista de su propio proceso formativo y recibe una instrucción más personalizada.

Objetivo de la Investigación

El objetivo de esta investigación es explicar las dificultades que presentan los profesores de Matemática en formación inicial en el aprendizaje de tópicos algebraicos en un ambiente mediado tecnológicamente.

Sujetos de Investigación

En la actividad participaron los veintitrés (23) alumnos cursantes de la asignatura Introducción al Álgebra Lineal durante el semestre 2008-II de la especialidad de Educación Matemática del Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara.

Descripción de la Actividad

Se diseñó y organizó un Curso empleando la Plataforma Moodle de forma asincrónica, en correspondencia con el Programa oficial de la asignatura Introducción al Álgebra Lineal de la UPEL, el cual se estructuró por temas dividiéndose cada uno en recursos disponibles y actividades a realizar. Contempló, siguiendo el programa oficial de la asignatura, cuatro temas: espacios vectoriales, combinación lineal, base y dimensión y transformaciones lineales. Los recursos incluyeron la realización de guías didácticas, pruebas resueltas de semestres anteriores, vínculos a páginas web. Entre las actividades que se organizaron tenemos: el foro social, los foros académicos (conversemos sobre el álgebra y resolución de problemas), wiki, glosario, evaluaciones en línea. Se organizaron dos foros académicos por cada tema, uno titulado "Conversemos sobre Álgebra" cuya finalidad era fomentar la discusión de los tópicos algebraicos tratados durante las clases presenciales, y otro "Resolución de Problemas" donde los alumnos debían plantear justificadamente sus planteamientos. Para el trabajo grupal los estudiantes se organizaron voluntariamente, se les asignó un tema especifico para su desarrollo, y cada uno fue responsable de la wiki y de su glosario. Las tareas que analizamos en este trabajo están inmersas dentro de las actividades virtuales que se propusieron dentro del contrato didáctico, correspondiente al 30% de la evaluación sumativa de la asignatura. La participación fue espontánea y de manera escrita en los foros académicos, finalmente redactaron un ensayo introspectivo sus dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Hallazgos

Las dificultades en el aprendizaje de tópicos algebraicos se especificarán de acuerdo a la taxonomía propuesta por Socas (1997) de la siguiente forma:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas:* los estudiantes expresaron explícitamente deficiencias con los conocimientos previos que se requieren para la comprensión de los temas asociados a espacios vectoriales, entre los que tenemos: teoría de conjuntos, ley de composición interna y externa, identificación de las propiedades asociadas a las operaciones en el cuerpo de los números racionales y reales. Ejemplo de las deficiencias antes mencionadas en palabra de los propios estudiantes son:

Estudiante 2*: "en la parte de teoría de conjuntos se me fue fácil dominar las formas de determinar un conjunto por comprensión y por extensión, ahora cuando empezamos a ver el conjunto vacío, los conjuntos infinito y finito, y otros puntos como cardinal, universal, inclusión, igualdad, operaciones de conjuntos unión intersección, donde había que demostrar se me complicó todo porque era primera vez que veía eso de estar demostrando", "me costó fue cuando empezamos a ver la relación binaria, ese tema si que me costó", "no entendí muy bien y no dominé fue el conjunto de los números racionales, ahí si que me perdí por completo, lo ví difícil sobre todo cuando había que trabajar con el número inverso"*

Estudiante 4*: "mi principal dificultad radica en la manera en que se introduce el uso de letras. Una letra en el ámbito del álgebra puede representar un valor fijo, una variable, una incógnita, o una cantidad generalizada, es decir, pueden representar distintos conceptos","temas de Sistemas Numéricos en los que presenté ciertas dificultadas para concentrar el conocimiento y desarrollar el aprendizaje, por ejemplo al momento de realizar demostraciones donde se aplica el método de inducción completa, y al inicio del semestre con el contenido de los números naturales y toda su axiomática incluyendo los teoremas y demostraciones"*

Estudiante 6*: "teoría de conjunto, partición, funciones, unión generalizada, ley de composición interna, ley de composición externa, me costó mucho entender estos objetivos por que eran muchas la propiedades y condiciones que debía conocer"*

- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*: los estudiantes distinguen los temas que consideran que no lograron comprender con claridad en asignaturas anteriores, y la mayoría concuerdan en que no saben demostrar, además de los temas siguientes mencionados a continuación por los propios estudiantes:

Estudiante 1: *"sé redactar pero me cuesta expresar con palabras en un texto bien hecho un conjunto de propiedades entrelazadas para configurar así una demostración", "El gran obstáculo que enfrenté de entrada fue el hecho de que me parecía demasiado obvio"*

Estudiante 2*: "mi dificultad principal del álgebra* es *demostrar en forma de redactar, y ciertas cositas que me cuestan ver de forma abstracta"*

Estudiante 6: "*el tema de unión generalizada y partición, no lo entendí y de hecho reprobé esa evaluación, me parece que es muy complejo"*

- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas*: los alumnos manifestaron la falta de tiempo en las evaluaciones lo que los lleva a realizar los problemas sin dedicarle mucho tiempo a entender el enunciado, la complejidad del lenguaje matemático sobre todo en libros, la falta de pedagogía de los docentes, entre otras cosas:

Estudiante 1: "*La respuesta que obtuve de mi profesor fue que no había demostrado absolutamente nada y que en dado caso lo que había realizado era como un sondeo personal para saber que camino tomar", "luchar contra el tiempo porque la adrenalina de una evaluación me lleva a sentir que dos horas pasan volando y la presión me lleva a pensar que debo literalmente correr a hacer un ejercicio sin razonar, sin darle el tiempo suficiente a esa etapa previa tan importante en la que me doy la oportunidad de organizar mis ideas para no lanzarlas sobre la hoja sin un sentido"*

Estudiante 2: "*En las evaluaciones a veces me cuesta arrancar un ejercicio por muy fácil que sea"*

Estudiante 5: "*El detalle es que existen libros complejos en su modo o estrategia didáctica, y se me hacen difíciles entenderlos", "las deficiencias en el álgebra son debido a profesores con mala pedagogía o falta de experiencia para impartir conocimiento también por desinterés del alumno en función al contenido insípido en cuestión", "Nos dedicamos a creer en tan solo buscar respuestas en nuestro docente, evadiendo la responsabilidad que amerita el estudio algebraico por otras fuentes", "debo mejorar mi responsabilidad, asumir con seriedad el estudio de libros adecuados, investigar con constancia el contenido, creer en mis capacidades y inevitablemente tendré el éxito que hasta ahora no he tenido. Es importante decir que nuestras capacidades son suficientes madurar las álgebras, pero la falta de credibilidad en eso nos auto limita", "He tenido alta desconfianza en creer que mis capacidades me permitirán profundizar significativamente el estudio*"

Estudiante 6: "*no estudio con suficiente tiempo, es decir; no estudio todos los días y cuando lo hago estoy presionada por que no tengo suficiente tiempo*"

- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: los estudiantes reconocen la importancia de una buena redacción para la comprensión de una demostración, y manifiestan sus deficiencias así:

Estudiante1: "*mayores dificultades que se me han presentado son en primer lugar redactar, sentarme a dar un discurso coherente*"

Estudiante 2: "*que me cuesta un poco la lectura matemática", "aunque no mucho la parte cuando se utiliza las demostraciones por absurdo*"

Estudiante 6: "*soy muy mecánica para estudiar, estoy conciente que debo analizar mas los ejercicios*", "*en introducción al Algebra Lineal, no se como redactar mis ideas y me cuesta mucho establecer los enunciados aun sabiendo que es lo que tengo que hacer*", "*en sistema numérico, el gran problema fue que no sabía demostrar*", "*siempre me confundía en estas cosas triviales que yo se pero no sabias que podía aplicarlas*"

- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas*: los estudiantes manifiestan tener ciertas creencias y actitudes negativas hacia el aprendizaje de la asignatura, como por ejemplo, sentimientos de inseguridad, predisposición negativa, desmotivación, miedo, necesidad de acertar la respuesta, en sus propias palabras:

Estudiante 1: "*formo parte de un grupo grande de personas que se han predispuesto con el algebra desde mucho antes de verla*", "*mucha inseguridad, porque me da tanto miedo escribir algo incorrecto*", "*me tranzó por decir que desconozco el camino y pierdo no solo la oportunidad de desarrollar lo planteado sino que además me produce desanimo para continuar resolviendo"*

Estudiante 3: "*considero que es un poco complicada y me cuesta dominarla sobre todo en la parte correspondiente a la demostración", "estudio, practico y no he logrado entender sola las demostraciones", "siento desmotivación en el momento de estudiar, quizás me he bloqueado psicológicamente para el momento de estudiar el algebra y esto ha influido en el aprendizaje de la materia, por otro lado he probado distintas técnicas, me gusta estudiar en grupo porque asi siento más apoyo"*

Estudiante 5: **"***indisciplina y falta de responsabilidad en el estudio del algebra. Somos los alumnos principales responsables de la generalizada deficiencia algebraica que poseemos, por la inadecuada forma de estudiar las algebras"*

Estudiante 6: "*yo sentía que la forma como demostrábamos en introducción al algebra no era igual en sistema", "mi mayor dificultad se me presenta en la poca capacidad de memoria que tengo, olvido las cosas con facilidad, asimismo me he percatado que no dedico tiempo a pensar y a entender lo que el ejercicio me esta pidiendo, y esto me ha originado que no copio bien el ejercicio, siempre omito un* *dato, una variable, algo dejo de copiar", "lo más importante, es reconocer que la culpa de mi fracaso la he tenido yo, por el poco compromiso que he tenido con la asignatura"*

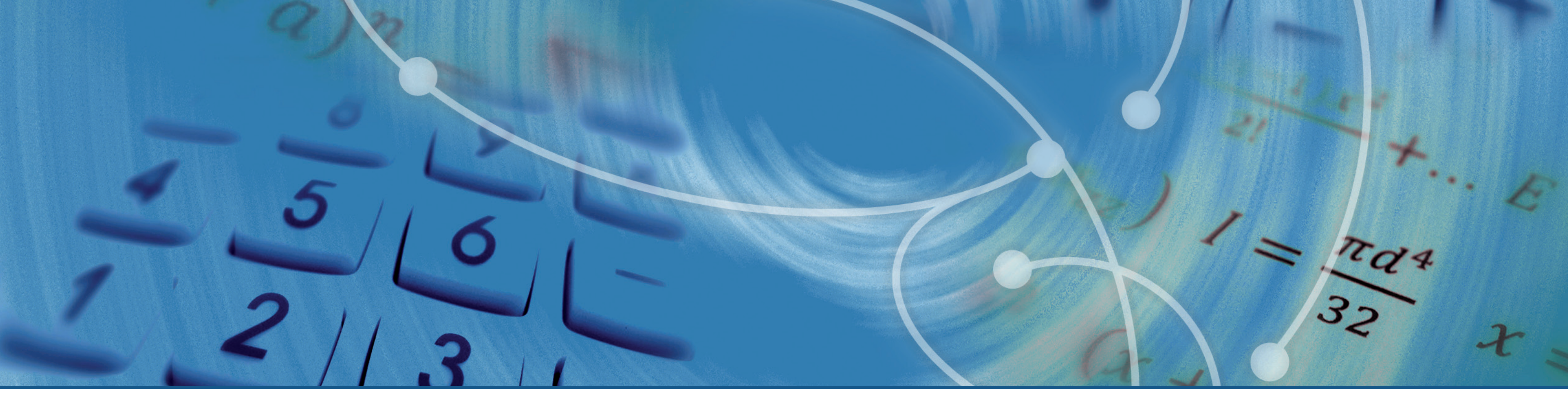
Comentarios finales

Para diseñar estrategias pedagógicas dirigidas a fomentar el pensamiento algebraico necesitamos indagar las deficiencias que presentan los estudiantes, y para implementar una experiencia que emplee entornos de aprendizajes virtuales se necesita planificar y evaluar de manera formativa el material y el curso, establecer normas y orientaciones claras tanto para las actividades evaluativas como para la participación, para ello se requiere de un diseño educativo planificado que promueva la interacción entre el facilitador, los estudiantes y los recursos. En este mismo contexto se debe reconocer la importancia de emplear aspectos pedagógicos propios de la educación a distancia: más que la digitalización de las guías de clases empleadas en la modalidad presencial hay que entender la especificidad de la modalidad e-learning, ya que, estudiar a distancia no necesariamente significa estudiar solo, sin apoyo, el estudiante a distancia debe contar con una alta motivación, actitud positiva y madurez para el estudio independiente, con alto grado de responsabilidad. Para finalizar, es importante mencionar que siempre se necesita un equilibrio entre los dos extremos de una realidad. Esta propuesta no pretende ser tecnocentrista, a pesar de que entre sus fines está disminuir la tecnofobia entre los profesores de matemática, ya que no se proyecta el uso de la tecnología como una varita mágica que solucione cualquier problema dentro de la labor docente, sino que simplemente se quiere ofertar una experiencia virtual como un ejemplo del uso de la tecnología como medio para fomentar el aprendizaje individual permanente.

Referencias bibliográficas

Bates, A. (1999). *The impact of new media on academic knowledge*. Recuperado el 07 de noviembre de 2008 de http://bates.cstudies.ub.ca/papers/envisionknowledge.html

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp.124-154). Barcelona: ICE/Horsori



Clame Comité Latinoamericano de Matematica Educativa